Correction Serie TD03 :

Exercice 01 :

$$P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \qquad x = 1, 2, 3, \dots$$

1. Trouvez l'estimateur des moments de p :

On sait que l'espérance d'une v.a X suivant une loi geometrique est $\underbrace{E(X)}_{\text{moment théorique d'ordre 1.}} = \frac{1}{p_m}$

On a également $\underbrace{\bar{X}}_{\text{moment empirique d'ordre 1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

par la méthode des moment on fait :

$$E[X] = \bar{X} \iff \frac{1}{\hat{p}_m} = \bar{X}$$

On entire l'estimateur des moments $\hat{p}_m$ de p :

$$\hat{p}_m = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2. Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ :

$$L(x_1, \dots x_n, p) = \underbrace{p^n (1-p)^{\sum x_i - n}}_{\text{produit de la loi geometrique}}$$

$$\log L(x_1, \dots x_n, p) = n \log p + \left(\sum x_i - n\right) \log(1-p)$$

En maximisant $\log L(x_1, \dots x_n, p)$ par raport à p :

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots x_n, p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum x_i - n}{1-p} = 0$$

$$\hat{p}_{MV} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum x_i}$$

La dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1, \dots x_n, p)}{\partial p} = -n \frac{1}{p^2} - \frac{\sum x_i - n}{(1-p)^2} < 0$$

D'où la valeur $\hat{p}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}}$ est bien un maximum de vraisemblance.

Remarque :

- Les 2 estimateurs sont identiques ($\hat{P}_M = \hat{P}_{MV}$)
- L'estimateur du maximum de vraisemblance de p est l'inverse de la moyenne empirique, ce qui est cohérent avec le fait que le paramètre p est l'inverse de l'espérance :

exercice 02 :

$$f(x,\theta) = (\theta+1)x^{\theta} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

1. L'estimateur de moments de θ :

*Calcul de l'espérance de la v.a X :

$$E[X] = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,dx = \left[\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2} = E[X]$$

par la méthode des moments, on fait :

$$E[X] = \bar{X} \iff \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X} \iff \hat{\theta}_m = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

2. L'estimateur du maximum de vraisemblance est :

* La vraisemblance est :

$$L(x_1,\dots x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x^{\theta}$$

$$= (\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} x^{\theta}$$

$$\log L(x_1,\dots x_n,\theta) = n\log(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$\frac{d\log L(x_1,\dots x_n,\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0$$

D'où $\hat{\theta}_{MV} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log x_i} - 1$

La dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1,\dots x_n,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{(\theta+1)^2} < 0$$

D'où $\hat{\theta}_{MV} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log x_i} - 1$ est bien un maximum

exercice 03 :

pour $x>0$; $f(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1}$ avec $\theta > 0$

loi non connue.

1/ Calcul de $E(X)$:

$$E(X) = \int_1^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1}\,dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}}\,dx = -\left[\frac{x^{-\frac{1}{\theta}+1}}{\theta(-\frac{1}{\theta}+1)}\right]_1^{+\infty}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{\theta}+1}}{\theta-1} + \frac{1}{\theta-1} = \frac{1}{\cancel{1-\theta}} = E[X]$$

par la méthode des moments on obtient.

$$\frac{1}{\cancel{\theta-1}} = \overline{X} \iff \hat{\theta}_M = \frac{\overline{X}-1}{\overline{X}}$$

2/ La loi de probabilité de la v.a $Y = \ln X$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y)$$
$$= F_X(e^y).$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt = 1 - x^{-\frac{1}{\theta}}$$

Donc :

$$F_X(e^y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/\theta} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où la loi de la v.a Y est :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(e^y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc Y suit une loi expo de parametre $\frac{1}{\theta}$

$$Y \rightsquigarrow \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

3. L'estimateur de vraisemblance :

* La vraisemblance :

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{-\frac{1}{\theta}-1}$$

$\sum x_i = \frac{\frac{1}{1-\theta}}{n}$

$$= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\frac{1}{\theta}-1}.$$

$$\log L(x,\theta) = -n\log\theta + \left(-\frac{1}{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

$$\frac{\partial \log L(x,\theta)}{\partial\theta} = 0 \iff \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{\theta^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

Car on a $\sum_{i=1}^{n} \log x_i = n\theta$

D'où $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i$ est MLE.

Est-il sans biais ?

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\log x_i)$$

$$= \frac{n}{n} E(\log(x_i)) = E(Y) \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Donc $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais

4/ Calcul de l'information de Fisher :

$$\hat{\theta}_{MLE} = I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= E\left(-\frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

Est il efficace ?

$$V(\hat{\theta}_{MLE}) = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

D'où $\hat{\theta}_{MLE}$ est efficace (4)

$$V(\hat{\theta}) \stackrel{?}{=} \frac{1}{I_n(\theta)}$$

$$V(\hat{\theta}_{MLE}) = V\left(\frac{\sum \log x_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum V(\log x_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} n \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$$

Exercice 04 :

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

1/ Trouver une statistique suffisante pour θ :

Famille exponentielle :

On dit que la famille de probabilité $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ appartient à la famille expo si sa loi s'écrit sous la forme $P_\theta(x) = f(x,\theta) = C(\theta) e^{u(\theta) T(x)} g(x)$

Théorème de Darmois :

Si le domaine de la v.a X ne dépend pas de θ et si la loi X appartient à la famille exponentielle, alors $T = \sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ est une statistique suffisante et complète pour θ

$$f(x,\theta) = c(\theta)\, e^{q(\theta) T(x)} \cdot g(x)$$

$\Rightarrow$ On a $c(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $q(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $T(x) = x$, $g(x) = 1$

alors $f(x,\theta)$ appartient à la famille expo

De plus le domaine de $f(x,\theta)$ ne dépend pas de θ

alors la statistique $T = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ d'après le théorème de DARMOIS est suffisante et complète

2/ l'information de Fisher apportée par le n-échantillon sur le paramètre θ :

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

$$L(x,\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log L(x,\theta) = -n\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$\frac{\partial \log L(x,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \cdot n\theta$$

$E = \theta$ $\quad \Sigma : E = n\theta$

$V = \theta^2$ $\quad V = n\theta^2 \leftarrow X \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$I_n(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$

3/ Trouvons l'estimateur sans biais de variance minimale : MVUE : $T' = \frac{1}{n}\sum x_i$

On a T' est sans biais, statistique suffisante et complète alors T est un MVUE :

- Calcul du risque associé au MVUE :

$R(T', \theta) = V\left[\frac{1}{n}\sum x_i\right] = \frac{1}{n^2} n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\theta^2}{n} = 0$ Donc T' est convergent

4/ Trouvons MLE de θ

$\log L(x,\theta) = \log\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i}\right)$

$\frac{\partial \log L(x,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$\Leftrightarrow \hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = T'$

* $\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0$

$\hat{\theta}_{MLE}$ est bien un MLE

- le risque associé au MLE

$R(\hat{\theta}_{MLE}, \theta) = V\left[\frac{1}{n}\sum x_i\right] = \frac{\theta^2}{n}$

5/ Un estimateur admissible pour θ :

Comme $\hat{\theta}_{MLE} = T'$ alors, $\frac{1}{n}\sum x_i$ est un estimateur admissible

Si $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$ l'estimateur est dit efficace.

…rcice 6 :

$$f(x,\theta) = \frac{\theta^3}{2} x^2 e^{-\theta x} \quad \text{si } \theta > 0 , x \geq 0$$

1/ L'estimateur des moments de θ :

Comme X_i suit une loi gamma de paramètre $(3,\theta)$ alors $E(X_i) = \frac{3}{\theta}$

et par la méthode des moments, on trouve :

$$\bar{X} = \frac{3}{\theta} \Leftrightarrow \hat{\theta}_M = \frac{3}{\bar{X}}$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

2/ Construction d'un intervalle de confiance approximatif au seuil de confiance de 95% pour θ basé sur la moyenne des observations :

Pour construire un intervalle de confiance pour μ, on utilise le TCL

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} \rightsquigarrow N(0,1) \quad \dots \ (*)$$

Après centrage et réduction de la moyenne empirique on obtient : ... (*)

$$\text{On a } P\left(-\varepsilon \leq \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} < \varepsilon\right) = 1-\alpha$$

où α est la fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi Normale $(0,1)$ $\varepsilon = \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

On a $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0,05}$

Donc, la fractile d'ordre 0,95 de loi Normale centrée réduite correspond à 1.96

avec $E(\bar{X}) = \frac{3}{\theta}$ et $Var(\bar{X}) = \frac{3}{n\theta^2}$

Ainsi on obtient :

$$\underbrace{-\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}_{-1,96} < \frac{\bar{X} - \frac{3}{\theta}}{\sqrt{3/n\theta^2}} < \underbrace{\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}_{1,96}$$

$$-1,96 < \sqrt{\frac{n}{3}}\bar{X}\theta - \sqrt{3n} < 1,96$$

$$IC = \left[\underbrace{\frac{3}{\bar{X}}}_{\text{l'estimateur des moment}} \pm 1,96\sqrt{\frac{n}{3}}\frac{1}{\bar{X}}\right]$$