Exercice **1**. *Soit Γ un ensemble de formules tel que $\Gamma : \{\forall x P(x,y), \exists x \neg P(y,x)\}$.*

Question 1. *Donner, si elle existe, une interprétation qui satisfait Γ.*

Question 2. *Donner, s'il existe, un modèle de Γ.*

Réponse. Une interprétation qui satisfait l'ensemble des formules, c'est une interprétation qui satisfait la conjonction.

Les formules ne sont pas fermées. En général on doit avoir un état pour évaluer une formule. Mais par exemple $\forall x(P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$ est vraie pour une interprétation qui donne P symétrique. Dans telle interprétation, la formule sera vraie pour tout valuation de y. (pour tout état).

Revenons à l'exercice. On demande de trouver une interprétation qui satisfait Γ pour tout état(valuation de y, puisque y est la seule variable libre).

On doit avoir $[\forall x P(x,y)]_{(I,e)} = 1$ donc $P(d_1,d_2) = 1$ pour tout d_1, d_2 dans D. *************** (1)

On doit avoir en même temps, pour un certain $d_1 \in D$, pour tout $d_2 \in D$ $P(d_2,d_1) = 0$. Ce qui est impossible(contradictoire avec (1).)

Donc on conclut qu'il n'y a pas d'interprétation qui satisfait Γ.

Question 2. Il n'existe pas une interprétation qui satisfait Γ pour tout état. La question maintenant existe-il une assignation modèle de Γ: (une interpétation + un état) qui satisfait Γ.

Il suffit de trouver un modèle: un domaine, une interprétation de P, une valuation pour y telle que Γ soit satisfait.

On doit avoir un élément y fixé dans D avec qui tous les éléments sont en relation P. En même temps cet élément il faut qu'il existe un élément x telle que $P(y,x) = 0$.

*** Intuitivement, si on pense aux entiers. Avec $P(x,y) : x >= y$. avec $y = 0$. Γ sera satisfait.

Formellement: $D_I = \mathbb{N}$. $P_I(x,y) :\geq (x,y)$. La valuation de y: $e(y) = 0$.

Tous les entiers sont supérieurs ou égaux à 0.
En même temps, il existe certains entiers (une infinité) pour qui 0 n'est pas supérieur ou égal.

La méthode des expansions finis va donner par exemple:
$D = \{0,1\}$. $P_I = \{(0,0),(1,0)\}$; L'état: $e(y) = 0$.

Exercice **2**. *Écrire les énoncés suivants dans le langage du premier ordre.*

E1 : *Il existe au moins une planète habitée.*

E2 : *Il existe exactement une planète habitée.*

E3 : *Il existe au plus une planète habitée.*

E4 : *Tout entier naturel différent de 0 est le suivant d'un autre entier naturel*

Réponse. On note les prédicats:
$P(x)$: x est une planète.
$H(x)$: x est habitée.
$E(x)$: x est un entier
$S(x,y)$: x est le suivant de y.

E1 : $\exists x(P(x) \wedge H(x))$

E2 : $\exists x(P(x) \wedge H(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge H(y) \Rightarrow x = y))$

E3 : $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge H(x) \wedge H(y)) \Rightarrow x = y)$

E4 : $\forall x(E(x) \land x \neq 0 \Rightarrow \exists y(E(y) \land S(x,y)))$

Version simplifiée On devrait accepter aussi les réponses simplifiées suivantes:
On note les prédicats:
$H(x)$: x est une planète habitée.
$S(x,y)$: x est le suivant de y. C'est à dire implicitement le domaine est les planètes pour les 3 première formules et les entiers pour la dernière.

E1 : $\exists x H(x)$

E2 : $\exists x(H(x) \land \forall y(H(y) \Rightarrow x = y))$

E3 : $\forall x \forall y((H(x) \land H(y)) \Rightarrow x = y)$

E4 : $\forall x(x \neq 0 \Rightarrow \exists y S(x,y))$

Si la formule parle d'entiers et rationnels par exemple, on doit impérativement introduire les prédicats E: entier et R:rationnel.