Matrices et determinants

Définitions et théorèmes fondamentaux

1 Les matrices

K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m, n, p sont des entiers strictement positifs.

1.1 Définition et opérations

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est un tableau à double entrée :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

notée aussi $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ où $a_{i,j} \in K$.

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. Muni de l'addition terme à terme et de la multiplication par un scalaire, $M_{n,p}(K)$ est un espace vectoriel de dimension np.

[Base canonique] La base canonique de $M_{n,p}(K)$ est $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ où $E_{i,j}$ a un 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs.

1.2 Produit matriciel

Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{n,p}(K)$, le produit $AB \in M_{m,p}(K)$ est défini par :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

— Le produit matriciel est associatif mais non commutatif
— $M_n(K)$ est un anneau d'élément neutre I_n (matrice identité)
— $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$

1.3 Matrices particulières

— Matrice diagonale : $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$
— Matrice triangulaire supérieure : $a_{i,j} = 0$ si $i > j$
— Matrice triangulaire inférieure : $a_{i,j} = 0$ si $i < j$

1.4 Matrice inverse

$A \in M_n(K)$ est inversible s'il existe $B \in M_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$. On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles.

1.5 Transposition

Pour $A \in M_{n,p}(K)$, la transposée $A^T \in M_{p,n}(K)$ est définie par $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.
Propriétés :
— $(A+B)^T = A^T + B^T$
— $(AB)^T = B^T A^T$

2 La commatrice d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps K. La **commatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, est définie par la matrice des cofacteurs de A. Plus précisément, l'élément $c_{i,j}$ de la commatrice est donné par :

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A, et $\det(A_{i,j})$ est le déterminant de cette sous-matrice. La commatrice de A est donc une matrice $n \times n$, dont les éléments sont les cofacteurs de A.

La **matrice adjointe** de A, notée A^*, est obtenue en transposant la commatrice de A :

$$A^* = \mathrm{Com}(A)^T$$

Ainsi, la matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs. Cette matrice joue un rôle important dans le calcul de l'inverse de A lorsque A est inversible. En effet, si A est une matrice carrée inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

3 Matrices et applications linéaires

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, m avec bases B, C, D.

3.1 Matrice d'une application linéaire

Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, la matrice de u dans les bases B et C est :

$$\mathrm{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [u(e_1)]_C & \cdots & [u(e_p)]_C \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

L'application $\mathcal{L}(E,F) \to M_{n,p}(K)$, $u \mapsto \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$ est un isomorphisme.

3.2 Composition

Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$:

$$\mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{C,D}(v) \cdot \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$$

3.3 Changements de base

Pour deux bases B_1, B_2 de E, la matrice de passage $P_{B_1 \to B_2}$ est la matrice de B_2 dans la base B_1.

[Formule de changement de base] Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, B, B' bases de E, C, C' bases de F :

$$\mathrm{Mat}_{B',C'}(u) = P^{-1}_{C \to C'} \cdot \mathrm{Mat}_{B,C}(u) \cdot P_{B \to B'}$$

4 Rang et équivalence

Deux matrices $M, M' \in M_{n,p}(K)$ sont équivalentes s'il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $M' = Q^{-1}MP$.

Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang. Toute matrice de rang r est équivalente à J_r (matrice avec r "1" sur la diagonale).

5 Déterminants

5.1 Définition

Il existe une unique application det : $M_n(K) \to K$ vérifiant :

1. Multilinéarité par rapport aux colonnes
2. Antisymétrie : échanger deux colonnes change le signe
3. $\det(I_n) = 1$

5.2 Propriétés

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- A inversible ssi $\det(A) \neq 0$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

5.3 Calcul pratique

- Opérations élémentaires :
  - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne change pas det
  - $L_i \leftrightarrow L_j$ multiplie par -1
  - $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie par λ
- Matrice triangulaire : produit des éléments diagonaux

— Développement par rapport à une ligne/colonne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur.

5.4 Déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

6 Déterminant d'un endomorphisme

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_B(f))$ (indépendant de la base B).
— $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
— f isomorphisme ssi $\det(f) \neq 0$

7 Déterminants Classiques

7.1 Déterminant de Vandermonde

[Déterminant de Vandermonde] Pour $x_1, \dots, x_n \in K$:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Par récurrence sur n. Pour $n = 2$:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$. Considérons le polynôme :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

P est un polynôme de degré $\leq n-1$ qui s'annule en $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Donc :

$$P(X) = V_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$$

En évaluant en $X = x_n$:

$$V_n = V_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

7.2 Déterminant Circulant

[Déterminant Circulant] Pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

La matrice circulante C a pour vecteurs propres $v_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})^T$ avec valeurs propres $P(\omega^k)$. Le déterminant est le produit des valeurs propres.

7.3 Déterminant Tridiagonal

[Déterminant Tridiagonal] Soit la matrice T_n :

$$T_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(T_n) = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } a^2 \neq 4bc \\ (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n & \text{si } a^2 = 4bc \end{cases}$$

où $\alpha, \beta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$.

Par récurrence, en développant selon la première ligne :

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

avec $D_1 = a$, $D_2 = a^2 - bc$.

7.4 Déterminant de Cauchy

[Déterminant de Cauchy] Pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ avec $x_i + y_j \neq 0$:

$$\det\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(x_i + y_j)}$$

Considérons le polynôme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X + y_k) \cdot \det\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)$$

En évaluant en $X = -x_i$, on montre que :

$$P(X) = C\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

et on détermine C en comparant les coefficients dominants.

8 Techniques de Calcul

8.1 Développement par Lignes/Colonnes

[Développement selon une ligne] Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

où A_{ij} est la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

8.2 Matrices Blocs

[Déterminant par blocs] Pour $A \in M_p(K)$, $D \in M_q(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $C \in M_{q,p}(K)$:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A)\det(D - CA^{-1}B) & \text{si } A \text{ inversible} \\ \det(D)\det(A - BD^{-1}C) & \text{si } D \text{ inversible} \end{cases}$$

En particulier, si $C = 0$:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

8.3 Formule de Dodgson (Condensation)

[Condensation de Dodgson] Pour $A \in M_n(K)$, notons $A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ le mineur obtenu avec les lignes $i_1, \ldots, i_k$ et colonnes $j_1, \ldots, j_k$. Alors :

$$\det(A) = \frac{\det(A_{1,\ldots,n-1}^{1,\ldots,n-1})\det(A_{2,\ldots,n}^{2,\ldots,n}) - \det(A_{1,\ldots,n-1}^{2,\ldots,n})\det(A_{2,\ldots,n}^{1,\ldots,n-1})}{\det(A_{2,\ldots,n-1}^{2,\ldots,n-1})}$$

(si le dénominateur est non nul)

9 Applications Géométriques

[Interprétation géométrique] Pour $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$:

$$|\det(v_1|\cdots|v_n)| = \text{Volume du parallélépipède engendré par } v_1, \ldots, v_n$$

[Jacobien] Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable :

$$\text{Vol}(f(\Omega)) = \int_\Omega |\det J_f(x)| dx$$

où J_f est la matrice jacobienne de f.

10 Exercices Classiques

1. Montrer que pour $A, B \in M_n(K)$:

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$$

2. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \min(i, j)$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique ($A^T = -A$). Montrer que si n est impair, $\det(A) = 0$.