Problème n°4 - Durée 5h

****

Consignes spécifiques au distanciel :

— Numériser (éviter les photos) votre production sous une résolution **acceptable**. Fichiers souhaités : pdf (de préférence) et images. **Merci de ne pas multiplier les fichiers inutilement.**

— **Etudiant(e) UPVD** : Envoyer le tout sans message texte à florent.nacry@gmail.com avec l'objet :

PB4-MEEF-PRENOM NOM

Etudiant(e) UM : Déposer votre fichier sur l'espace prévu Moodle.

— Début/Fin de l'épreuve : lundi 2 Novembre 13h00-18h00 (19h40 si tiers-temps).

****

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendant.

Notations et rappels.

(i) Dans tout le sujet, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(ii) On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des **polynômes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indeterminée X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ les éléments de $\mathbb{K}[X]$ de **degré inférieur** ou égal à n.

(iii) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E, \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Si $F = E$, une application linéaire de E dans $F = E$ est appelée **endomorphisme** de E. Si $F = \mathbb{K}$, une application linéaire de E dans $F = \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur E. Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

(iv) Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{fois}},$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'application identité de E. Etant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$) on peut associer à l'endomorphisme ci-dessus f un nouvel endomorphisme noté $P(f) : E \to E$ défini par

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(v) Pour une matrice carrée A de taille $n \geq 1$, on note $\det(A) \in \mathbb{K}$ son **déterminant** et $\mathcal{X}_A = \det(A - X\mathrm{I}_n) \in \mathbb{K}_n[X]$ son **polynôme caractéristique**, avec I_n la matrice identité de taille n. De manière analogue, si f est un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, on note $\det(f) \in \mathbb{K}$ son déterminant et $\mathcal{X}_f \in \mathbb{K}_n[X]$ son polynôme caractéristique.

Corrigé

Exercice.

1. Puisque $\mathcal{X}_f(f)$ est un endomorphisme de E, on a $\mathcal{X}_f(f)(0_E) = 0_E$.
2. L'inclusion $x \in E \setminus \{0_E\}$ garantit que la famille $(x) = (f^0(x))$ est libre dans E, i.e., $1 \in \Lambda$. D'autre part, nous savons que le cardinal d'une famille libre de E est majoré par la dimension de E sur $\mathbb{K}$, à savoir n. On conclut que Λ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^\star \subset \mathbb{N}$.
3. Puisque Λ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet un plus grand élément noté m. Cet entier m étant un élément de Λ, nous avons bien sûr
$$(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)) \in l(E).$$
D'autre part, si la famille $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), f^m(x))$ est libre dans E, alors $m+1 \in \Lambda$ et ceci contredit le fait que m est le plus grand élément de Λ. On a donc bien
$$(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), f^m(x)) \notin l(E).$$
4. Le caractère lié de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), f^m(x))$ obtenu ci-dessus nous donne l'existence de $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{m+1}}\}$ tel que
$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x) = 0_E,$$
ou de manière équivalente,
$$\lambda_m f^m(x) = -\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k f^k(x).$$
La liberté de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ entraîne évidemment $\lambda_m \neq 0$ et il suffit alors de poser pour chaque $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ $a_k = -\lambda_m^{-1}\lambda_k$ pour aboutir à
$$f^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x).$$
En notant $P = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k - X^m$, nous observons que $P(f) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k - f^m$ puis
$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x) - f^m(x) = 0_E.$$
5. (a) Suivons l'énoncé en développant selon la dernière colonne de la matrice
$$C_P - X\mathrm{I}_m = \begin{pmatrix} -X & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & a_{m-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{m-1} - X \end{pmatrix}.$$

Il vient sans difficultés

$$\det(C_P - X\mathrm{I}_m) = (-1)^{m+1}a_0\det\begin{pmatrix} 1 & -X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{m+2}a_1\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & -X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$\dots$$

$$+ (-1)^{2m-1}a_{m-1}\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2m}(a_{m-1} - X)\det\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -X \end{pmatrix}.$$

Ceci justifie l'égalité attendue pour $\mathcal{X}_{C_P}(X)$.

(b) En exploitant l'égalité ci-dessus et le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire vaut le produit de ses termes diagonaux, on obtient avec $k_m = (-1)^{m+1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{C_P}(X) &= (a_{m-1} - X)(-X)^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m+1-k}a_k(-X)^k \\ &= (-X)^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+1-k}a_k(-X)^k \\ &= (-1)^{m+1}\Big(- X^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{-k}a_k(-X)^k\Big) = k_m P(X).\end{aligned}$$

6. (a) La famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est une famille libre de E de cardinal $m = n = \dim E$: c'est donc une base de E.

(b) Pour obtenir la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$, il suffit d'utiliser la première égalité donnée par la Question 4 :

$$\begin{array}{c} \\ x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^{m-1}(x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(x) & f^2(x) & \dots & f^{m-1}(x) & f^m(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c) Etant donné un endomorphisme $g : E \to E$, on **rappelle** que pour toute paire $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de bases de E, on a l'égalité

$$\det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g),$$

où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$) désigne la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}$ (resp. à la base $\mathcal{B}'$). Cette valeur commune à toutes les bases de E est appelé *déterminant de* g, noté $\det(g)$. On a donc

$$\mathcal{X}_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}_E) = \det(C_P - X\mathrm{I}_m) = \mathcal{X}_{C_P}(X),$$

où Id_E désigne l'identité de E.

(d) De l'égalité entre polynômes $\mathcal{X}_{C_P}(X) = (-1)^{m+1}P(X)$ obtenue plus haut, nous déduisons l'égalité entre endomorphismes de E

$$\mathcal{X}_{C_P}(f) = (-1)^{m+1}P(f).$$

Cette égalité entre endomorphismes donne en particulier l'égalité entre vecteurs de E

$$\mathcal{X}_{C_P}(f)(x) = (-1)^{m+1}P(f)(x).$$

Il reste à évoquer l'égalité $P(f)(x) = 0_E$ pour conclure que $\mathcal{X}_f(f)(x) = \mathcal{X}_{C_P}(f)(x) = 0_E$, i.e., l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul sous réserve que $m = n$.

7. (a) La famille $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est une famille libre de E qui n'est toutefois pas une base de E puisque son cardinal est égal à $m < n = \dim E$. Le théorème de la base incomplète nous dit alors que nous pouvons compléter cette famille en une base de E, i.e., nous pouvons trouver $n - m$ vecteurs de E, notés $e_{m+1}, \dots, e_n$, tels que

$$\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), e_{m+1}, \dots, e_n)$$

est une base de E.

(b) La Question 4 ci-dessus nous assure (dans le même esprit que la Question 6(b)) que la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{array}{c} \\ x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^{m-1}(x) \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} f(x) & f^2(x) & \dots & f^{m-1}(x) & f^m(x) & e_{m+1} & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & * & * & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \end{array},$$

où (comme il est d'usage) la notation $*$ désigne un scalaire quelconque. Ceci revient bien sûr à dire que cette même matrice s'écrit comme demandé, à savoir :

$$\begin{pmatrix} C_P & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in M_{m,n-m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-m}(\mathbb{K})$.

(c) De ce qui précède, on déduit

$$\mathcal{X}_f(X) = \det \begin{pmatrix} C_P - X\mathrm{I}_m & A \\ 0 & B - X\mathrm{I}_{n-m} \end{pmatrix} = \det(C_P - X\mathrm{I}_m)\det(B - X\mathrm{I}_{n-m}) = \mathcal{X}_{C_P}(X)\mathcal{X}_B(X)$$

en particulier, $\mathcal{X}_{C_P}(X) \mid \mathcal{X}_f(X)$.

(d) Il résulte de (c) ci-dessus

$$\mathcal{X}_f(f) = (\mathcal{X}_B\mathcal{X}_{C_P})(f) = (\mathcal{X}_B(f) \circ \mathcal{X}_{C_P}(f)),$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{X}_f(f)(x) = \mathcal{X}_B(f)(\mathcal{X}_{C_P}(f)(x)) = \mathcal{X}_B(f)(k_m P(f)(x)) = \mathcal{X}_B(f)(0_E) = 0_E.$$

On conclut que $\mathcal{X}_f(f)$ est l'endomorphisme nul de E lorsque $m < n$: le théorème de Cayley-Hamilton est donc démontré.

1 Base duale

1. La fonction nulle $\mathbf{0}_{\mathcal{F}(E;\mathbb{K})}$ est evidemment un élément de $E^\star$. Soient $x^\star, y^\star \in E^\star$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ fixés. Nous allons montrer que $z^\star := \lambda x^\star + \mu y^\star$ qui est évidemment un élément de $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$ est linéaire, i.e., $\lambda x^\star + \mu y^\star \in E^\star$. Fixons donc $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et notons $w = \alpha u + \beta v$. La définition de la loi $+$ sur $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$ permet d'écrire

$$z^\star(\alpha u + \beta v) = (\lambda x^\star + \mu y^\star)(w) = \lambda x^\star(w) + \mu y^\star(w)$$

tandis que la linéarité de $x^\star$ et $y^\star$ donnent

$$\lambda x^\star(w) + \mu y^\star(w) = \alpha(\lambda x^\star(u) + \mu y^\star(u)) + \beta(\lambda x^\star(v) + \mu y^\star(v)).$$

Par définition de la loi $+$ sur $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$, nous avons

$$\alpha(\lambda x^\star(u) + \mu y^\star(u)) + \beta(\lambda x^\star(v) + \mu y^\star(v)) = \alpha z^\star(u) + \beta z^\star(v).$$

Il reste alors à combiner ces trois égalités pour aboutir à

$$z^\star(\alpha u + \beta v) = \alpha z^\star(u) + \beta z^\star(v).$$

On conclut que $E^\star$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E;\mathbb{K})$.

2. (a) Montrons que la fonction $b_k^\star$ est linéaire. Fixons $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Puisque $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, les égalités

$$\lambda x + \mu y = \sum_{l=1}^{n} [\lambda x + \mu y]_{l,\mathcal{B}} b_l = \sum_{l=1}^{n} (\lambda [x]_{l,\mathcal{B}} + \mu [y]_{l,\mathcal{B}}) b_l$$

entraînent immédiatement que

$$[\lambda x + \mu y]_{l,\mathcal{B}} = \lambda [x]_{l,\mathcal{B}} + \mu [y]_{l,\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Il reste alors à observer que

$$b_k^\star(\lambda x+\mu y)=b_k^\star(\sum_{l=1}^n[\lambda x+\mu y]_{l,\mathcal{B}}b_l)=[\lambda x+\mu y]_{k,\mathcal{B}}$$

et

$$\lambda b_k^\star(x)+\mu b_k^\star(y)=\lambda b_k^\star(\sum_{l=1}^n[x]_{l,\mathcal{B}}b_l)+\mu b_l^\star(\sum_{l=1}^n[y]_{l,\mathcal{B}}b_l)=\lambda[x]_{k,\mathcal{B}}+\mu[y]_{k,\mathcal{B}}$$

pour conclure que $b_k^\star$ est linéaire.

(b) Par définition de $b_1^\star,\dots,b_n^\star$, on a pour tout $k,l\in\{1,\dots,n\}$

$$\langle b_k^\star,b_l\rangle_{E^\star,E}=\begin{cases}1 & \text{si } k=l,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Supposons qu'il existe une famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de $E^\star$ telle que pour tout $k,l\in\{1,\dots,n\}$

$$\langle \varphi_k,b_l\rangle_{E^\star,E}=\begin{cases}1 & \text{si } k=l,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Il suffit d'observer que pour chaque $k\in\{1,\dots,n\}$

$$\langle b_k^\star,x\rangle_{E^\star,E}=[x]_{k,\beta}$$

et

$$\langle\varphi_k,x\rangle_{E^\star,E}=\left\langle\varphi_k,\sum_{l=1}^n[x]_{l,\mathcal{B}}b_l\right\rangle_{E^\star,E}=\sum_{l=1}^n[x]_{l,\mathcal{B}}\langle\varphi_k,b_l\rangle_{E^\star,E}=[x]_{k,\mathcal{B}}$$

pour aboutir à $b_k^\star=\varphi_k$, i.e., $(b_1^\star,\dots,b_n^\star)=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

(c) Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n\lambda_k b_k^\star=0_{E^\star}$. Les égalités valides pour chaque $l\in\{1,\dots,n\}$

$$0_{\mathbb{K}}=\left\langle\sum_{k=1}^n\lambda_k b_k^\star,b_l\right\rangle_{E^\star,E}=\sum_{k=1}^n\lambda_k\langle b_k^\star,b_l\rangle_{E^\star,E}=\lambda_l$$

montrent que la famille $(b_1^\star,\dots,b_n^\star)$ est libre.

(d) Soit $\varphi\in E^\star$. Les égalités suivantes valables pour chaque $x\in E$

$$\begin{aligned}\langle\varphi,x\rangle_{E^\star,E}&=\left\langle\varphi,\sum_{k=1}^n[x_k]_{k,\mathcal{B}}b_k\right\rangle_{E^\star,E}\\&=\sum_{k=1}^n[x_k]_{k,\mathcal{B}}\langle\varphi,b_k\rangle_{E^\star,E}\\&=\sum_{k=1}^n\langle\varphi,b_k\rangle_{E^\star,E}\langle b_k^\star,x\rangle_{E^\star,E}\\&=\left\langle\sum_{k=1}^n\langle\varphi,b_k\rangle_{E^\star,E}b_k^\star,x\right\rangle_{E^\star,E}\end{aligned}$$

nous assurent que

$$\varphi=\sum_{k=1}^n\langle\varphi,b_k\rangle_{E^\star,E}b_k^\star.$$

(e) Les questions (c) et (d) ci-dessus montrent que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une famille libre et génératrice de $E^\star$, i.e., est une base de $E^\star$. Ceci nous dit en particulier que $E^\star$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$.

(f) L'égalité désirée s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x \rangle_{E^\star,E} &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \, b_k^\star, x \right\rangle_{E^\star,E} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} \langle b_k^\star, x \rangle_{E^\star,E} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star,E} [x]_{k,\mathcal{B}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\varphi]_{k,\mathcal{B}^\star} [x]_{k,\mathcal{B}} \\
&= [\varphi]_{\mathcal{B}^\star} \times ([x]_{\mathcal{B}})^T.
\end{aligned}$$

2 Exemples

1. La fonction nulle $\mathbf{0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ est évidemment un élément de $C([a,b],\mathbb{R})$. D'autre part, étant données deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et deux réels λ, μ, nous savons que la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est encore continue sur $[a,b]$. Tout ceci justifie que $C([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$.

   Le fait que $\mathcal{R} : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ soit une forme linéaire découle de la linéarité de l'intégration au sens de Riemann, i.e., de l'égalité

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(t)dt = \alpha \int_a^b \varphi(t)dt + \beta \int_a^b \psi(t)dt$$

   pour toutes fonctions $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrables sur $[a,b]$ et pour tout réel α, β.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De l'égalité évidente

$$\lambda(a + ib) + \mu(a' + ib') = (\lambda a + \mu a') + i(\lambda b + \mu b')$$

   valide pour tout $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on tire

$$\Re(\lambda z + \mu z') = \lambda \Re(z) + \mu \Re(z') \quad \text{pour tout } z, z' \in \mathbb{C}.$$

   Cette dernière égalité montre que $\Re(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. D'autre part, en remarquant que

$$\Re(i^2) = -1 \neq 0 = i\Re(i),$$

   nous voyons que la partie réelle n'induit pas une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

3. (a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. L'inclusion $b_k^\star \in (\mathbb{R}^n)^\star$ et le fait que $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ soit une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^n)^\star$ nous assurent en particulier de l'existence et l'unicité d'une famille $(p_{k,l})_{1 \leq l \leq n}$ de réels telle que

$$b_k^\star = p_{k,1} e_1^\star + \ldots + p_{k,n} e_n^\star.$$

   (b) Soient $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. En évaluant la k-ième égalité de la question précédente en b_l, il vient

$$\langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} = p_{k,1} \langle e_1^\star, b_l \rangle_{E^\star,E} + \ldots + p_{k,n} \langle e_n^\star, b_l \rangle_{E^\star,E}.$$

En vertu de la Question 2(b), ce qui précède s'écrit encore

$$p_{k,1}[b_l]_{1,\mathcal{C}} + \ldots + p_{k,n}[b_l]_{n,\mathcal{C}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation matricielle attendue en découle.

(c) La matrice

$$\begin{pmatrix} [b_1]_{1,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{1,\mathcal{C}} \\ \vdots & & \vdots \\ [b_1]_{n,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{n,\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

est une matrice de passage (et donc inversible !) : plus précisément, c'est la matrice de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où l'ensemble/espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{B}$ et où l'ensemble/espace vectoriel d'arrivée $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{C}$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, sa k-ième colonne exprime les coordonnées de b_k dans la base canonique $\mathcal{C}$. Cette matrice est inversible d'inverse la matrice de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où l'ensemble/espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{C}$ et où l'ensemble/espace vectoriel d'arrivée $\mathbb{R}^n$ est muni de la base $\mathcal{B}$: pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, la k-ième colonne de cette matrice exprimera alors les coordonnées de e_k dans la base $\mathcal{B}$.

(d) Un calcul élémentaire montre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ceci confirme que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Toujours de manière élémentaire, on montre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'appliquer la question précédente pour obtenir que la base duale $(b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star)$ de (b_1, b_2, b_3) est donnée par $b_1^\star = \frac{1}{2}(e_1^\star + 2e_2^\star - 3e_3^\star)$, $b_2^\star = \frac{1}{2}(-2e_1^\star - 2e_2^\star + 6e_3^\star)$ et $b_3^\star = \frac{1}{2}(e_1^\star - e_3^\star)$.

4. (a) (i) La linéarité de Φ découle directement de l'égalité

$$(\lambda P + \mu Q)(x_k) = \lambda P(x_k) + \mu Q(x_k)$$

valable pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m ayant $m+1$ racines est nécessairement nul. Puisque Φ est linéaire son injectivité est équivalente à l'égalité $\ker \Phi = \{0\}$ elle-même équivalente à l'inclusion $\ker \Phi \subset \{0\}$. Etant donné $P \in \ker \Phi$, nous voyons que P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus m et ayant au moins $m+1$ racines en vertu des égalités

$$P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_m) = 0.$$

On conclut que P est nul et que Φ est injective.

(iii) L'application Φ est injective entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie, elle est donc bijective.

(iv) La bijectivité de Φ nous dit qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$(f(x_1), \ldots, f(x_m)) = \Phi(P),$$

i.e., il existe un unique $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$P(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, m\}.$$

(b) (i) Les polynômes $L_0, \dots, L_m$ sont chacun des produits de m polynômes à coefficients réels de degré 1 : ils sont donc des polynômes à coefficients réels de degré au plus m. D'autre part, on a tout de suite

$$L_k(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) Puisque $\mathbb{R}_m[X]$ est de dimension $m+1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit d'établir que $(L_0, \dots, L_m)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_m[X]$ pour conclure qu'elle est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^m \lambda_k L_k(X) = 0$. Cette égalité entre polynômes et la Question 4(b)(i) donnent tout de suite

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k L_k(x_l) = \lambda_l = 0 \quad \text{pour tout } l \in \{0, \dots, m\}.$$

On conclut que la famille $(L_0, \dots, L_m)$ est libre.

(iii) Pour obtenir l'égalité souhaitée, il suffit de remarquer que le polynôme $Q := \sum_{k=0}^m f(x_k) L_k(X)$ est de degré inférieur ou égal à m et satisfait $Q(x_l) = f(x_l)$ pour tout $l \in \{0, \dots, m\}$.

(iv) Soit $Q \in \mathbb{R}_m[X]$ et $k \in \{0, \dots, m\}$. Puisque $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, on peut écrire $Q(X) = \sum_{j=0}^m \lambda_j L_j(X)$ pour un certain $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. En évaluant cette expression en x_k, il vient $\lambda_k = Q(x_k)$, i.e., $L_k^\star(Q) = Q(x_k)$.

3 Vers la représentation de Riesz

1. Pour $v \in E$, on note que le caractère linéaire de $f_v(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$ découle immédiatement de la bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E. L'inclusion $f_v(\cdot) \in E^\star$ permet alors de considérer l'application $\Phi : E \to E^\star$ définie par

$$\Phi(v) := f_v \quad \text{pour tout } v \in E.$$

2. Soient $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les égalités

$$\Phi(\lambda u + \mu v)(x) = \langle \lambda u + \mu v, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle + \mu \langle v, x \rangle = \lambda \Phi(u)(x) + \mu \Phi(v)(x) = (\lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v))(x)$$

valides pour chaque $x \in E$ nous disent que

$$\Phi(\lambda u + \mu v) = \lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v).$$

La linéarité de Φ est établie.

Le caractère défini positif du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entraîne immédiatement que $\ker \Phi = \{0_E\}$ ce qui est équivalent à l'injectivité de Φ. Il reste à invoquer $\dim E = \dim E^\star$ pour aboutir à la bijectivité de Φ.

3. La Question 1 de cette partie garantit l'inclusion $\{f_v : v \in E\} \subset E^\star$ tandis que la surjectivité de $\Phi(\cdot)$ nous assure de l'inclusion renversée $E^\star \subset \{f_v : v \in E\}$. Nous concluons que

$$E^\star = \{f_v : v \in E\} = \{\langle v, \cdot \rangle : v \in E\}.$$

4. En appliquant ce qui précède au produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$, on déduit

$$(\mathbb{R}^n)^\star = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\}$$

On rappelle que l'on peut définir un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant pour chaque $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^T B)$. En appliquant une nouvelle fois la question précédente, on obtient

$$(M_n(\mathbb{R}))^\star = \left\{ \Phi \in \mathcal{F}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) : \exists A \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(M) = \mathrm{tr}(A^T M) \right\}.$$

En procédant par double inclusion, il est clair que ce dernier ensemble s'écrit encore

$$(M_n(\mathbb{R}))^\star = \{ \Phi \in \mathcal{F}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) : \exists B \in M_n(\mathbb{R}), \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(M) = \mathrm{tr}(BM) \}.$$

4 Bidual algébrique

1. Soit $x \in E$. L'inclusion $J_x \in E^\star$ provient de l'égalité

$$J_x(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)(x) = \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = \lambda J_x(\varphi_1) + \mu J_x(\varphi_2),$$

valide pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E^\star$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2. Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On observe sans difficultés que pour chaque $\varphi \in E^\star$,

$$J(\lambda x_1 + \mu x_2)(\varphi) = \lambda J(x_1)(\varphi) + \mu J(x_2)(\varphi) = (\lambda J(x_1) + \mu J(x_2))(\varphi)$$

ce qui s'écrit encore

$$J(\lambda x_1 + \mu x_2) = (\lambda J(x_1) + \mu J(x_2)).$$

Cette dernière égalité traduit la linéarité de J.

3. Il suffit d'établir que $\ker J \subset \{0_E\}$ pour conclure que J est injective. On peut supposer que E n'est pas réduit à zéro (sinon, il n'y a rien à établir). Puisque E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, nous pouvons choisir n vecteurs $b_1, \dots, b_n$ de E avec $n = \dim E$ tels que $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ soit une base de E. Soit $x \in \ker J$. De l'égalité $J(x) = 0_{E^{\star\star}}$, on déduit facilement que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$0_\mathbb{K} = J(x)(b_k^\star) = \langle b_k^\star, x\rangle_{E^\star,E} = [x]_{k,\mathcal{B}},$$

i.e., $x = 0_E$. On conclut que $\ker J = \{0_E\}$.

4. Puisque $E^{\star\star}$ est le dual algébrique de $E^\star$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, nous savons (d'après la Partie 1-Question 2. (e)) que

$$\dim E^{\star\star} = \dim E^\star.$$

Il résulte de ceci que l'application linéaire injective $J : E \to E^{\star\star}$ est en fait bijective, i.e., un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

5 Base antéduale

1. Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, l'inclusion $\varphi_k^\star \in E^{\star\star}$ combiné au caractère bijectif de l'application $J : E \to E^{\star\star}$ nous dit qu'il existe un (et un seul) $b_k \in E$ tel que

$$J_{b_k} = \varphi_k^\star.$$

2. Puisque $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille de cardinal $n = \dim E$, il suffit d'établir que $\mathcal{B}$ est libre pour montrer qu'elle est une base de E. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k = 0_E$. Il vient par linéarité de J et par construction de $b_1, \dots, b_n$

$$J(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k J(b_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k^\star = 0_{E^{\star\star}}.$$

Il reste alors à invoquer le caractère libre de $(\varphi_1^\star, \dots, \varphi_n^\star)$ pour aboutir à $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_\mathbb{K}$.

3. La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ satisfait pour tout $k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$\langle \varphi_l, b_k\rangle_{E^\star,E} = \langle J(b_k), \varphi_l\rangle_{E^{\star\star},E^\star} = \langle \varphi_k^\star, \varphi_l\rangle_{E^{\star\star},E^\star} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit alors de revenir à la Partie 1-Question 2.(b) pour conclure que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $(b_1, \dots, b_n)$.

4. Soit $(c_1, \dots, c_n)$ une base anté-duale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On note $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Pour $l \in \{1, \dots, n\}$, nous voyons à travers l'égalité $c_l = \sum_{k=1}^n [c_l]_{k,\mathcal{B}} b_k$ que

$$\langle \varphi_k, c_l \rangle_{E^\star, E} = [c_l]_{k,\mathcal{B}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et ceci traduit l'égalité $b_l = c_l$. En conséquence, la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ admet une unique base anté-duale, à savoir $\mathcal{B}$.

6 Hyperplans

1. C'est une conséquence directe du fait que le noyau de toute application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels F et G est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul, il n'y a qu'une unique forme linéaire de E : la forme linéaire nulle. On conclut que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul n'admet pas d'hyperplan vectoriel.

1. (a) Il suffit d'établir que $H \cap \mathbb{K}v \subset \{0_E\}$. Soit $x \in H \cap \mathbb{K}v$. On a d'une part $x = \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$ et d'autre part
$$0_\mathbb{K} = \varphi(x) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v).$$
En combinant ce qui précède à $\varphi(v) \neq 0$, on aboutit à $\lambda = 0_\mathbb{K}$, i.e., $x = 0_E$.

   (b) L'inclusion désirée est une conséquence immédiate de la linéarité de φ qui permet d'écrire
$$\varphi\big(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v\big) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} \varphi(v) = 0_\mathbb{K}.$$

   (c) L'inclusion obtenue à la question précédente entraîne
$$E \subset H + \mathbb{K}v.$$
Notons que l'inclusion précédente est en fait une égalité puisque l'inclusion renversée est évidente. Enfin, l'égalité $H \cap \mathbb{K}v = \{0_E\}$ permet de conclure que H et $\mathbb{K}v$ sont supplémentaires dans E, i.e.,
$$E = H \oplus \mathbb{K}v.$$

2. Supposons qu'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$. On note ψ le projecteur de E sur $\mathbb{K}v$ parallèlement à H, autrement dit ψ est l'application de E dans $\mathbb{K}v$ satisfaisant
$$\psi(h + \lambda v) = \lambda v \quad \text{pour tout } (h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}.$$
On vérifie immédiatement que ψ est linéaire, non nulle et de noyau H. On conclut alors que H est un hyperplan vectoriel de E.
3. De la Question 1(c), nous déduisons que la dimension (relativement à $\mathbb{K}$) de tout hyperplan de E vaut $n - 1$.
4. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(x, y, z) = x + y + z \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$
est évidemment une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$. Son noyau qui n'est nul autre que H est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Il reste à voir que n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ avec $v \notin H$ satisfait $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}v$.

5. Seule l'implication $\Rightarrow$ mérite d'être justifiée. Supposons donc que $H := \ker f = \ker g$. Puisque f n'est pas nulle, l'ensemble H est un hyperplan vectoriel de E. Le Lemme 1 nous dit alors qu'il existe $v \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$. Notons que $f(v) \neq 0$ et $g(v) \neq 0$ et posons $\lambda = \frac{f(v)}{g(v)}$. A présent, fixons $x \in E$ et écrivons $x = h + \mu v$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$. La linéarité de f et de g ainsi que la définition de H et de λ donnent sans difficultés

$$f(x) = f(h + \mu v) = f(h) + \mu f(v) = \mu f(v) = \mu\lambda g(v) = \lambda(g(h) + \mu g(v)) = \lambda g(x)$$

et ceci traduit l'égalité désirée $f = \lambda g$.