# Polynômes

## Introduction et explication du chapitre

Le chapitre des polynômes constitue une base incontournable en mathématiques pour les classes préparatoires. Il permet d'introduire les notions de racines, factorisations, relations coefficients-racines et théorèmes fondamentaux (d'Alembert-Gauss, Bezout, Gauss, interpolation de Lagrange, etc.). Les polynômes interviennent dans l'algèbre, l'analyse et les applications numériques (interpolation, approximation, résolution d'équations).

## Attendus des concours

- Maîtrise parfaite de la division euclidienne et des décompositions en produit d'irréductibles.
- Connaissance par cœur des théorèmes de base : Leibniz, Taylor, Bézout, Gauss, A.-Gauss.
- Capacité à établir des factorisations et à étudier les racines (multiplicités, unicité).
- Savoir appliquer l'interpolation de Lagrange dans des exercices d'approximation.
- Maîtrise des raisonnements sur $\deg(P)$, $\gcd(P, Q)$ et les propriétés de divisibilité.

## Projection des programmes (FR / MA)

- **France :** accent mis sur la rigueur formelle et la démonstration des résultats, ainsi que sur les applications directes en algèbre et analyse.
- **Maroc :** contenu analogue, mais parfois plus orienté vers la pratique (applications numériques, factorisations concrètes).
- Les deux programmes exigent la connaissance des théorèmes fondamentaux et des techniques de factorisation.

## Essentiel à maîtriser

- Division euclidienne dans $K[X]$.
- Théorème fondamental de l'algèbre (existence de racines complexes).
- Décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Relations coefficients–racines.
- Interpolation de Lagrange.

## Plan de travail détaillé

1. Définitions et rappels (degré, coefficients, opérations).
2. Division euclidienne et applications.
3. Étude des racines et multiplicités.

4. Décomposition en facteurs irréductibles.
5. Relations coefficients–racines et applications.
6. Théorèmes de Gauss, Bézout et A.-Gauss.
7. Interpolation de Lagrange et applications numériques.

## Actions précises à réaliser

— Apprendre par cœur les énoncés des théorèmes (Leibniz, Taylor, Bézout, A.-Gauss, Gauss).
— Réaliser des exercices de factorisation et de calcul de racines.
— S'entraîner à appliquer les relations coefficients–racines dans des situations variées.
— Travailler l'interpolation de Lagrange sur des cas simples puis complexes.

## Erreurs à éviter

— Confondre racines simples et racines multiples.
— Oublier les conditions de divisibilité dans la définition du PGCD.
— Négliger les coefficients dominants dans les factorisations.
— Appliquer de manière incorrecte la formule de Taylor ou Leibniz.

## Classiques à travailler

— **Tchebychev** : consiste à bien utiliser la formule de Moivre.
— **Laguerre** : consiste à bien utiliser la formule de Leibniz et les équations différentielles.
— **Legendre** : consiste à bien utiliser la formule de Leibniz et l'égalité de 2 polynômes.
— **Bernoulli** : consiste à bien savoir utiliser des relations entre la fonction, sa primitive et sa dérivée.
— **Bernstein** : est en relation avec la formule de Weierstrass.
— **Cyclotomique** : arithmétique et relations coefficients-racines.

## Extraits de concours

— **CNC 2016 math 1** : partie 1 et 3
— **Centrale 2014 math 2** : partie 1 , 2 et 3
— **Centrale 2021 math 2**
— **X 2019 math A**

# Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

## 0.1 Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre fondamental introduit les structures algébriques centrales en mathématiques : les espaces vectoriels et les applications linéaires. Il établit le cadre formel pour l'algèbre linéaire, permettant de manipuler des objets géométriques et algébriques de manière abstraite et générale. Les concepts de base, de dimension, de noyau et d'image sont essentiels pour toute la mathématique ultérieure.

### Attendus des concours

— Maîtrise parfaite de la structure d'espace vectoriel et de ses propriétés fondamentales.
— Connaissance exhaustive des notions de famille libre, génératrice, base.
— Capacité à déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire.
— Maîtrise du théorème du rang et de ses applications.
— Savoir manipuler les matrices représentant des applications linéaires.
— Compréhension profonde des sous-espaces vectoriels et de la somme directe.

### Projection des programmes (FR / MA)

— **France :** accent mis sur l'abstraction, les démonstrations formelles et la rigueur dans la manipulation des concepts d'algèbre linéaire.
— **Maroc :** approche similaire mais avec un accent particulier sur les applications concrètes et les calculs matriciels.

### Essentiel à maîtriser

— Structure d'espace vectoriel et sous-espace vectoriel.
— Combinaisons linéaires, familles libres et génératrices.
— Bases et dimension d'un espace vectoriel. linéaires, noyau et image.
— Théorème du rang et ses applications.
— Matrices et applications linéaires.
— Changement de base et matrices semblables.

### Plan de travail détaillé

1. Structure d'espace vectoriel et exemples fondamentaux.
2. Sous-espaces vectoriels et opérations sur les sous-espaces.
3. Familles libres, génératrices, bases et dimension.
4. Applications linéaires : définition et propriétés.

5. Noyau, image et théorème du rang.
6. Projecteurs et symétries vectorielles.
7. Matrices et applications linéaires.
8. Changement de base et matrices semblables.

## Actions précises à réaliser

— Maîtriser les techniques de démonstration de liberté d'une famille.
— Savoir déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
— S'entraîner à calculer noyau et image d'une application linéaire.
— Pratiquer intensivement les changements de base.
— Résoudre des problèmes concrets utilisant le théorème du rang.

## Erreurs à éviter

— Confondre famille libre et famille génératrice.
— Oublier de vérifier la stabilité pour les sous-espaces vectoriels.
— Négliger le corps de base dans les calculs.
— Confondre noyau et image d'une application linéaire.
— Erreurs dans le calcul du rang d'une matrice.

## Classiques à travailler

— **Base incomplète** : théorème fondamental de prolongement d'une famille libre en base.
— **Théorème du rang** : application cruciale dans de nombreux problèmes.
— **Hyperplans** : comprendre leur caractérisation comme noyaux de formes linéaires.
— **Projecteurs** : maîtriser leur caractérisation algébrique et géométrique.
— **Changement de base** : savoir manipuler les matrices de passage.

## Extraits de concours

— **X-ENS 2018** : problème sur les projecteurs et les symétries.
— **Mines-Ponts 2020** : étude complète d'un endomorphisme.
— **Centrale-Supélec 2019** : problèmes de dimension et de rang.
— **CCP 2021** : applications du théorème du rang.

# Matrices et Déterminants

## 0.2 Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre fondamental introduit les outils algébriques essentiels que sont les matrices et les déterminants. Il établit le lien crucial entre l'algèbre linéaire abstraite et le calcul concret, permettant de résoudre des systèmes d'équations, de représenter des applications linéaires et de calculer des volumes en dimension quelconque. La maîtrise de ce chapitre est indispensable pour toute la mathématique ultérieure.

### Attendus des concours

- Maîtrise parfaite des opérations matricielles et de leurs propriétés.
- Connaissance exhaustive des différentes méthodes de calcul de déterminants.
- Capacité à déterminer l'inversibilité d'une matrice et à calculer son inverse.
- Maîtrise du lien entre matrices et applications linéaires.
- Savoir manipuler les changements de base et les matrices semblables.
- Compréhension géométrique du déterminant comme volume.

### Projection des programmes (FR / MA)

- **France :** accent mis sur la théorie générale, les démonstrations formelles et l'abstraction.
- **Maroc :** approche plus calculatoire avec un accent particulier sur les applications numériques.
- Les deux programmes exigent la maîtrise des déterminants classiques (Vandermonde, circulant, Cauchy).

### Essentiel à maîtriser

- Structure d'algèbre de $M_n(K)$ et du groupe $GL_n(K)$
- Produit matriciel et propriétés de non-commutativité.
- Calcul pratique de déterminants par différentes méthodes.
- Formules de changement de base pour les matrices d'applications linéaires.
- Déterminant d'un endomorphisme et invariance par changement de base.
- Applications géométriques des déterminants.

### Plan de travail détaillé

1. Structure d'espace vectoriel de $M_{n,p}(K)$ et de la base canonique.
2. Produit matriciel et propriétés algébriques.
3. Matrices inversibles et calcul de l'inverse.

4. Transposition et matrices symétriques/antisymétriques.
5. Déterminants : définition et propriétés fondamentales.
6. Calcul pratique de déterminants (opérations élémentaires, développement).
7. Déterminants classiques (Vandermonde, circulant, tridiagonal, Cauchy).
8. Applications géométriques des déterminants.

## Actions précises à réaliser

- S'entraîner intensivement au calcul de produits matriciels.
- Maîtriser toutes les techniques de calcul de déterminants.
- Savoir déterminer rapidement si une matrice est inversible.
- Pratiquer les changements de base sur des exemples concrets.
- Résoudre des problèmes utilisant les déterminants classiques.

## Erreurs à éviter

- Confondre produit matriciel et produit terme à terme.
- Oublier la non-commutativité du produit matriciel.
- Erreurs de signe dans le calcul des cofacteurs.
- Négliger les conditions d'inversibilité dans les formules par blocs.
- Confondre matrice et déterminant d'une application linéaire.

## Classiques à travailler

- **Vandermonde :** comprendre la preuve par récurrence et les applications.
- **Circulant :** maîtriser l'approche par valeurs propres.
- **Tridiagonal :** savoir établir et résoudre les relations de récurrence.
- **Cauchy :** comprendre la méthode polynomiale.
- **Dodgson :** savoir appliquer la condensation.

## Extraits de concours

- **X-ENS 2019 :** problème sur les matrices de permutation.
- **Mines-Ponts 2021 :** étude des matrices de Hankel.
- **Centrale-Supélec 2020 :** déterminants de matrices particulières.
- **CCP 2022 :** applications géométriques des déterminants.
- **CNC 2019 math2** :partie 1
- **CNC 2016 math2** :parties 1 et 5

# Réduction des Endomorphismes

## Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre fondamental de l'algèbre linéaire traite de la simplification des endomorphismes par le choix de bases adaptées. L'objectif principal est de trouver des bases dans lesquelles la matrice représentant un endomorphisme soit la plus simple possible : diagonale (diagonalisation) ou triangulaire (triangularisation). Ces techniques sont essentielles pour résoudre des problèmes concrets en mathématiques et en physique.

## Attendus des concours

— Maîtrise parfaite des concepts de valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres.
— Connaissance exhaustive des critères de diagonalisation et triangularisation.
— Capacité à calculer efficacement les puissances de matrices diagonalisables.
— Maîtrise du théorème de Cayley-Hamilton et de ses applications.
— Compréhension profonde de la décomposition des noyaux et des sous-espaces caractéristiques.
— Savoir appliquer la diagonalisation simultanée et la décomposition de Dunford.

## Projection des programmes (FR / MA)

— **France :** accent mis sur la théorie générale, les démonstrations formelles et l'abstraction.
— **Maroc :** approche plus calculatoire avec un accent particulier sur les applications pratiques.
— Les deux programmes exigent la maîtrise complète de la diagonalisation et de la triangularisation.

## Essentiel à maîtriser

— Définitions : valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres.
— Polynôme caractéristique et son calcul.
— Conditions de diagonalisation et triangularisation.
— Théorème de Cayley-Hamilton et applications.
— Théorème de décomposition des noyaux.
— Polynôme minimal et ses propriétés.
— Sous-espaces caractéristiques et réduction de Jordan.
— Diagonalisation simultanée.
— Décomposition de Dunford.

## Plan de travail détaillé

1. Introduction : diagonalisation et triangularisation.
2. Valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres.
3. Polynôme caractéristique et multiplicité.
4. Conditions de diagonalisation.
5. Applications de la diagonalisation (puissances, suites récurrentes).
6. Triangularisation et théorème fondamental.
7. Théorème de Cayley-Hamilton.
8. Théorème de décomposition des noyaux.
9. Polynôme minimal.
10. Sous-espaces caractéristiques.
11. Diagonalisation simultanée.
12. Endomorphismes nilpotents et décomposition de Dunford.

## Actions précises à réaliser

- S'entraîner intensivement au calcul de valeurs et vecteurs propres.
- Maîtriser toutes les techniques de diagonalisation de matrices.
- Savoir appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à des problèmes concrets.
- Pratiquer la décomposition des noyaux sur des exemples variés.
- Résoudre des systèmes différentiels par diagonalisation.

## Erreurs à éviter

- Confondre multiplicités algébrique et géométrique.
- Oublier de vérifier l'indépendance linéaire des vecteurs propres.
- Négliger les conditions de commutativité dans la diagonalisation simultanée.
- Erreurs dans le calcul du polynôme caractéristique.
- Confondre polynôme caractéristique et polynôme minimal.

## Classiques à travailler

- **Diagonalisation :** comprendre les conditions nécessaires et suffisantes.
- **Cayley-Hamilton :** maîtriser les applications aux calculs de puissances.
- **Décomposition des noyaux :** savoir l'appliquer à des polynômes annulateurs.
- **Sous-espaces caractéristiques :** comprendre la réduction de Jordan.
- **Dunford :** maîtriser la décomposition d'un endomorphisme.

## Extraits de concours

- **X-ENS 2015 mathA**
- **X-ENS 2016 mathA** : partie 1
- **X-ENS 2014 mathB**
- **Mines-Ponts 2014 math1**
- **Mines-Ponts 2012 math1**
- **Mines-Ponts 2011 math1** : A, B et D
- **Centrale-Supélec 2019 math1 (Priorité à celui-là)**
- **CCP 2023**

# Réduction des Endomorphismes 2

## Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre avancé de la réduction des endomorphismes approfondit les concepts fondamentaux avec la décomposition de Dunford et la réduction de Jordan. Ces outils puissants permettent de décomposer tout endomorphisme en parties plus simples à étudier : une partie diagonalisable et une partie nilpotente (Dunford), ou sous forme de blocs de Jordan. Ces techniques sont essentielles pour résoudre des problèmes complexes d'algèbre linéaire et d'équations différentielles.

## Attendus des concours

- Maîtrise parfaite de la décomposition de Dunford et de ses applications.
- Connaissance exhaustive de la réduction de Jordan et des blocs de Jordan.
- Capacité à calculer l'exponentielle d'une matrice à l'aide de la décomposition de Dunford.
- Compréhension profonde du lemme des noyaux et de ses applications.
- Savoir déterminer la réduite de Jordan d'un endomorphisme.
- Maîtriser les techniques de diagonalisation simultanée.

## Projection des programmes (FR / MA)

- **France :** accent mis sur la théorie avancée, les démonstrations formelles et l'abstraction.
- **Maroc :** approche plus orientée vers les applications pratiques et le calcul matriciel.
- Les deux programmes exigent la maîtrise de la réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents.

## Essentiel à maîtriser

- Théorème de décomposition de Dunford (existence et unicité).
- Réduction de Jordan et blocs de Jordan.
- Calcul de l'exponentielle d'une matrice.
- Applications aux systèmes différentiels linéaires.
- Lemme des noyaux et projecteurs spectraux.
- Endomorphismes nilpotents et leur indice.
- Diagonalisation simultanée d'endomorphismes.

## Plan de travail détaillé

1. Rappels sur la décomposition des endomorphismes.
2. Théorème de décomposition de Dunford : énoncé et démonstration.
3. Exemples concrets de décomposition de Dunford.
4. Réduction de Jordan : définition et construction.
5. Calcul de l'exponentielle d'une matrice.
6. Applications aux systèmes différentiels.
7. Lemme des noyaux et applications.
8. Endomorphismes nilpotents : propriétés et classification.
9. Diagonalisation simultanée de familles commutatives.
10. Exercices d'application et problèmes de synthèse.

## Actions précises à réaliser

- S'entraîner à décomposer des endomorphismes selon Dunford.
- Maîtriser la construction de la réduite de Jordan.
- Savoir calculer l'exponentielle de matrices nilpotentes.
- Pratiquer la résolution de systèmes différentiels par exponentiation.
- Appliquer le lemme des noyaux à des problèmes concrets.

## Erreurs à éviter

- Confondre partie diagonalisable et partie nilpotente dans Dunford.
- Oublier la condition de commutativité dans la décomposition.
- Erreurs dans le calcul des blocs de Jordan.
- Négliger la troncation de la série exponentielle pour les nilpotents.
- Confondre polynôme caractéristique et polynôme minimal dans la réduction.

## Classiques à travailler

- **Dunford :** comprendre l'unicité de la décomposition.
- **Jordan :** maîtriser la construction des blocs de Jordan.
- **Exponentielle :** savoir calculer $e^A$ pour différentes matrices.
- **Lemme des noyaux :** appliquer aux projecteurs spectraux.
- **Nilpotents :** classification des endomorphismes nilpotents.

## Extraits de concours

- **X-ENS 2021 :** problème sur la réduction de Jordan avancée.
- **Mines-Ponts 2023 :** étude des endomorphismes nilpotents et leur classification.
- **Centrale-Supélec 2022 :** applications de la décomposition de Dunford aux systèmes différentiels.
- **CCP 2024 :** calcul d'exponentielles de matrices et applications.

# Espaces Euclidiens 1

## Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre fondamental introduit la géométrie dans les espaces vectoriels grâce au produit scalaire. Les espaces euclidiens, qui sont des espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire, permettent de généraliser les concepts de longueur, d'angle et d'orthogonalité à des dimensions quelconques. Ces outils sont essentiels pour de nombreuses applications en mathématiques et en physique.

## Attendus des concours

— Maîtrise parfaite de la définition et des propriétés du produit scalaire.
— Connaissance exhaustive des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.
— Capacité à orthonormaliser une famille de vecteurs par le procédé de Gram-Schmidt.
— Compréhension profonde des projections orthogonales et de la distance à un sous-espace.
— Savoir appliquer la méthode des moindres carrés à des problèmes concrets.
— Maîtriser les concepts d'orthogonalité et de bases orthonormées.

## Projection des programmes (FR / MA)

— **France :** accent mis sur la rigueur mathématique, les démonstrations et l'abstraction.
— **Maroc :** approche plus orientée vers les applications pratiques et le calcul matriciel.
— Les deux programmes exigent la maîtrise du produit scalaire et de ses applications géométriques.

## Essentiel à maîtriser

— Définition et propriétés du produit scalaire.
— Norme euclidienne et distance associée.
— Inégalité de Cauchy-Schwarz et ses applications.
— Orthogonalité et bases orthonormées.
— Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
— Projection orthogonale sur un sous-espace.
— Distance d'un point à un sous-espace vectoriel.
— Méthode des moindres carrés.

## Plan de travail détaillé

1. Produit scalaire : définition et exemples fondamentaux.
2. Norme euclidienne et propriétés métriques.
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz et interprétation géométrique.
4. Orthogonalité et familles orthonormales.
5. Procédé de Gram-Schmidt et applications.
6. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
7. Projection orthogonale et caractérisation.
8. Distance à un sous-espace vectoriel.
9. Méthode des moindres carrés : formulation et résolution.
10. Applications numériques et exercices.

## Actions précises à réaliser

— S'entraîner à calculer des produits scalaires dans différents espaces.
— Maîtriser l'orthonormalisation de familles de vecteurs.
— Savoir déterminer la projection orthogonale d'un vecteur.
— Pratiquer la résolution de systèmes par moindres carrés.
— Appliquer les inégalités classiques à des problèmes d'optimisation.

## Erreurs à éviter

— Confondre bilinéarité et linéarité du produit scalaire.
— Oublier que le produit scalaire est défini positif.
— Erreurs dans l'application du procédé de Gram-Schmidt.
— Négliger les conditions d'orthogonalité dans les projections.
— Confondre norme et distance euclidiennes.

## Classiques à travailler

— **Cauchy-Schwarz :** comprendre la démonstration et les cas d'égalité.
— **Gram-Schmidt :** maîtriser l'algorithme sur des exemples concrets.
— **Projection orthogonale :** savoir calculer la distance à un sous-espace.
— **Moindres carrés :** appliquer à des régressions linéaires simples.
— **Bases orthonormées :** construire dans des espaces de dimension 3 et 4.

## Extraits de concours

— **X-ENS 2018 :** problème sur les inégalités de Cauchy-Schwarz.
— **Mines-Ponts 2020 :** étude des projections orthogonales.
— **Centrale-Supélec 2019 :** applications du procédé de Gram-Schmidt.
— **CCP 2021 :** méthode des moindres carrés et interprétation géométrique.

# Espaces Euclidiens 2

## Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre avancé des espaces euclidiens explore les transformations orthogonales, les matrices symétriques et antisymétriques, ainsi que leurs décompositions fondamentales. Il établit le lien profond entre la géométrie des isométries et l'algèbre des matrices orthogonales, fournissant les outils nécessaires pour comprendre la structure des endomorphismes orthogonaux et leurs applications en géométrie.

## Attendus des concours

— Maîtrise parfaite des matrices orthogonales et de leurs propriétés.
— Connaissance exhaustive du groupe orthogonal $O(n)$et du groupe spécial orthogonal $SO(n)$
— Capacité à diagonaliser les matrices symétriques et à reconnaître les matrices définies positives.
— Compréhension profonde des décompositions polaire et de Cartan.
— Savoir classer les isométries affines
— Maîtriser la réduction des formes quadratiques.

## Projection des programmes (FR / MA)

— **France :** accent mis sur la théorie des groupes, les démonstrations structurelles et la classification des isométries.
— **Maroc :** approche plus orientée vers le calcul matriciel et les applications géométriques.
— Les deux programmes exigent la maîtrise de la diagonalisation des matrices symétriques et des isométries.

## Essentiel à maîtriser

— Matrices orthogonales et isométries vectorielles.
— Groupes $O(n)$ et $SO(n)$ : structure et propriétés.
— Décomposition canonique des éléments de $SO(n)$.
— Matrices symétriques : théorème spectral et applications.
— Matrices définies positives et leurs caractérisations.
— Matrices antisymétriques et leurs propriétés.
— Décompositions polaire et de Cartan.
— Isométries affines et leur classification.
— Formes quadratiques et leur réduction.

## Plan de travail détaillé

1. Matrices orthogonales et isométries : définitions et équivalences.
2. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$ : structure algébrique et géométrique.
3. Décomposition canonique des rotations en dimension n.
4. Matrices symétriques : théorème spectral et diagonalisation.
5. Matrices définies positives : caractérisations et propriétés.
6. Matrices antisymétriques : propriétés et exponentielle.
7. Décomposition polaire des matrices inversibles.
8. Décomposition de Cartan des isométries.
9. Isométries affines : classification en dimension n.
10. Formes quadratiques : réduction et applications.

## Actions précises à réaliser

— S'entraîner à reconnaître et manipuler les matrices orthogonales.
— Maîtriser la décomposition des rotations en blocs de Jordan.
— Savoir diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée.
— Pratiquer la détermination du caractère défini positif d'une matrice.
— Appliquer les décompositions polaire et de Cartan à des exemples concrets.
— Classer les isométries affines de $M_2(R)$ et de $M_3(R)$.

## Erreurs à éviter

— Confondre matrice orthogonale et matrice symétrique.
— Oublier que les valeurs propres des matrices symétriques sont réelles.
— Négliger la condition de commutativité dans la décomposition polaire.
— Confondre isométrie vectorielle et isométrie affine.
— Erreurs dans le calcul des mineurs principaux pour les matrices définies positives.

## Classiques à travailler

— **Matrices orthogonales :** comprendre la structure de $O(n)$ et $SO(n)$.
— **Théorème spectral :** maîtriser la diagonalisation des matrices symétriques.
— **Décomposition polaire :** savoir la mettre en œuvre sur des exemples.
— **Isométries affines :** classer les transformations du plan et de l'espace.
— **Formes quadratiques :** réduire et interpréter géométriquement.

## Extraits de concours

- **X 2018 mathA**
- **X 2011 mathA**
- **Mines 2013 math 2**
- **Mines 2009 math 2**
- **Centrales 2017 math 1**
- **Mines 2015 math 2**
- **CNC 2015 math2**

# Algèbre Générale

## Introduction et explication du chapitre

Ce chapitre regroupe les concepts fondamentaux d'algèbre générale et linéaire, allant des structures algébriques de base (groupes, anneaux, corps) aux théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de la théorie des groupes. Il établit le lien entre l'algèbre abstraite et ses applications en arithmétique et en algèbre linéaire, fournissant les outils nécessaires pour résoudre des problèmes avancés en mathématiques.

## Attendus des concours

— Maîtrise parfaite des structures de groupe, d'anneau et de corps.
— Connaissance exhaustive des théorèmes de Lagrange, Cauchy et Sylow.
— Capacité à appliquer les théorèmes de Bézout, Gauss et Euler-Fermat.
— Compréhension profonde du théorème des restes chinois et de ses applications.
— Savoir classer les groupes abéliens finis.
— Maîtriser les techniques de résolution d'équations congruentielles.

## Projection des programmes (FR / MA)

— **France :** accent mis sur la théorie des groupes, les démonstrations structurelles et l'arithmétique modulaire.
— **Maroc :** approche plus orientée vers les applications concrètes et les calculs arithmétiques.
— Les deux programmes exigent la maîtrise des théorèmes fondamentaux d'algèbre et d'arithmétique.

## Essentiel à maîtriser

— Structures algébriques : groupes, anneaux, corps.
— Théorèmes de Lagrange, Cauchy et Sylow.
— Arithmétique modulaire : Bézout, Gauss, Euler-Fermat.
— Théorème des restes chinois et applications.
— Classification des groupes abéliens finis.
— Résolution d'équations congruentielles.
— Lemme de Hensel et relèvement de solutions.

## Plan de travail détaillé

1. Structures algébriques : groupes, anneaux, corps.
2. Théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes.

3. Arithmétique modulaire et théorèmes de base.
4. Théorème des restes chinois : théorie et applications.
5. Classification des groupes abéliens finis.
6. Résolution d'équations congruentielles avancées.
7. Lemme de Hensel et relèvement p p-adique.
8. Applications aux problèmes de concours.

## Actions précises à réaliser

- S'entraîner à reconnaître et manipuler les structures algébriques.
- Maîtriser l'application des théorèmes de Sylow à des groupes finis.
- Savoir résoudre des systèmes de congruences par le théorème chinois.
- Pratiquer la classification des groupes d'ordre donné.
- Appliquer les théorèmes d'arithmétique à des problèmes concrets.

## Erreurs à éviter

- Confondre les propriétés des groupes, anneaux et corps.
- Oublier les hypothèses des théorèmes de Sylow.
- Négliger les conditions d'inversibilité dans les congruences.
- Confondre théorème des restes chinois et théorème de Bézout.
- Erreurs dans l'application du lemme de Hensel.

## Classiques à travailler

- **Théorèmes de Sylow :** applications à la classification des groupes finis.
- **Théorème chinois :** résolution de systèmes de congruences.
- **Groupes abéliens :** classification pour les petits ordres.
- **Arithmétique modulaire :** Euler-Fermat et applications.
- **Lemme de Hensel :** relèvement des solutions congruentielles.

## Extraits de concours

- **X-ENS 2018 :** problème sur la classification des groupes d'ordre 12.
- **Mines-Ponts 2020 :** étude des théorèmes de Sylow et applications.
- **Centrale-Supélec 2019 :** théorème des restes chinois avancé.
- **CCP 2021 :** arithmétique modulaire et équations diophantiennes.