# 1 Introduction

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont deux outils fondamentaux en algèbre linéaire pour l'étude des endomorphismes et des matrices. Ces décompositions permettent de simplifier l'analyse des applications linéaires en les décomposant en parties plus simples à étudier.

# 2 La Décomposition de Dunford

## 2.1 Énoncé du Théorème

[Décomposition de Dunford] Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

— $u = d + n$

— $d$ est diagonalisable

— $n$ est nilpotent

— $n$ et $d$ commutent : $n \circ d = d \circ n$

De plus, $n$ et $d$ sont des polynômes en $u$.

## 2.2 Démonstration de l'Existence

La démonstration repose sur plusieurs lemmes clés :

[Lemme des noyaux] Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On pose $P = \prod_{i=1}^{m} P_i \in \mathbb{K}[X]$, alors :

— $\mathrm{Ker}(P(u)) = \oplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

— Pour tout $i \in [1, m]$, le projecteur de $\mathrm{Ker}(P(u))$ sur $\mathrm{Ker}(P_i(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ est un polynôme en $u$.

[Critère de codiagonalisation] Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

— $f$ et $g$ commutent et sont diagonalisables

— $f$ et $g$ sont simultanément diagonalisables

### 2.2.1 Preuve de l'Existence

Soit $\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$ le polynôme caractéristique de $u$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $m_i \geq 1$. D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, $E$ est la somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}$ :

$$E = \oplus_{i=1}^{r} F_i$$

On définit $d$ comme l'endomorphisme dont la restriction à $F_i$ est $\lambda_i \,\mathrm{Id}_{F_i}$. Ainsi :

— $d$ est diagonalisable avec chaque $F_i$ comme espace propre pour $\lambda_i$

— $n = u - d$ est nilpotent car sur chaque $F_i$, $n_i = u_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{F_i}$ vérifie $n_i^{m_i} = 0$

— $d$ et $n$ commutent car $d$ est une homothétie sur chaque $F_i$

## 2.3 Démonstration de l'Unicité

Supposons qu'il existe un autre couple $(d', n')$ vérifiant les mêmes propriétés. Alors :

— $d - d' = n' - n$

— $d$ et $d'$ commutent (car polynômes en $u$) donc sont codiagonalisables

— $d - d'$ est donc diagonalisable

— $n$ et $n'$ commutent donc $n' - n$ est nilpotent

— Le seul endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul

D'où $d = d'$ et $n = n'$.

## 2.4 Exemple de Décomposition

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $P_A(X) = -(X-2)(X-4)^2$. La décomposition de Dunford donne :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

avec $A = D + N$, $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente, et $DN = ND$.

# 3 La Réduction de Jordan

## 3.1 Définition et Énoncé

[Bloc de Jordan] Un bloc de Jordan de taille $p$ associé à la valeur propre $\lambda$ est une matrice de la forme :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

[Réduction de Jordan] Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors $A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan, appelée réduite de Jordan de $A$ :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

où les $J_i$ sont des blocs de Jordan.

### 3.2 Preuve (Idées Principales)

La preuve repose sur :

1. La décomposition de Dunford $A = D + N$ avec $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente, et $DN = ND$
2. La diagonalisation de $D$ : il existe $P$ inversible telle que $P^{-1}DP$ soit diagonale
3. L'étude de la partie nilpotente $N$ dans une base adaptée
4. La construction de vecteurs cycliques pour la partie nilpotente

### 3.3 Exemple de Réduction

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$. La réduite de Jordan est :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4 Exponentielle de Matrice

### 4.1 Définition et Propriétés

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de $A$ est définie par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

### 4.2 Propriétés Fondamentales

— Si $A$ et $B$ commutent ($AB = BA$), alors $e^{A+B} = e^A e^B$
— Pour toute matrice $A$, $e^A$ est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
— Si $A$ est diagonalisable ($A = PDP^{-1}$), alors $e^A = Pe^D P^{-1}$

### 4.3 Exponentielle et Décomposition de Dunford

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ admettant une décomposition de Dunford $A = D + N$ avec $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente d'indice $k$, et $DN = ND$. Alors :

$$e^A = e^D \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i}{i!}$$

Comme $D$ et $N$ commutent, on a $e^A = e^{D+N} = e^D e^N$. Or $N$ est nilpotente d'indice $k$, donc la série de l'exponentielle se tronque à l'ordre $k - 1$.

### 4.4 Exemple

Reprenons la matrice $A$ de la section 2.3. Sa décomposition de Dunford donne :

$$e^A = e^D(I + N)$$

car $N^2 = 0$. Le calcul explicite donne :

$$e^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$e^A = \begin{pmatrix} -\frac{e^2+9e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2 - 4e^4 \\ \frac{-e^2-5e^4}{2} & \frac{e^2+e^4}{2} & e^2 + 2e^4 \\ -\frac{e^2+7e^4}{2} & \frac{e^2-e^4}{2} & e^2 - 3e^4 \end{pmatrix}$$

## 5 Conclusion

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont des outils puissants pour l'étude des endomorphismes. Elles permettent :

— De simplifier le calcul des puissances et exponentielles de matrices
— De mieux comprendre la structure des applications linéaires
— De résoudre des systèmes différentiels linéaires

Ces décompositions montrent comment toute matrice (dont le polynôme caractéristique est scindé) peut se ramener à une forme "presque diagonale" plus simple à manipuler.