MEEF Mathématiques - UPVD & UM
M1 - Semestre 7
Année universitaire 2020-2021

Problème n°4 - Durée 5h

****

Consignes spécifiques au distanciel :
— Numériser (éviter les photos) votre production sous une résolution **acceptable**. Fichiers souhaités : pdf (de préférence) et images. **Merci de ne pas multiplier les fichiers inutilement.**
— **Etudiant(e) UPVD** : Envoyer le tout sans message texte à florent.nacry@gmail.com avec l'objet :

PB4-MEEF-PRENOM NOM

Etudiant(e) UM : Déposer votre fichier sur l'espace prévu Moodle.
— Début/Fin de l'épreuve : lundi 2 Novembre 13h00-18h00 (19h40 si tiers-temps).

****

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendant.

Notations et rappels.
(i) Dans tout le sujet, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
(ii) On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des **polynômes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indeterminée X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ les éléments de $\mathbb{K}[X]$ de **degré inférieur** ou égal à n.
(iii) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E, \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Si $F = E$, une application linéaire de E dans $F = E$ est appelée **endomorphisme** de E. Si $F = \mathbb{K}$, une application linéaire de E dans $F = \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur E. Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.
(iv) Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{fois}},$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'application identité de E. Etant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$) on peut associer à l'endomorphisme ci-dessus f un nouvel endomorphisme noté $P(f) : E \to E$ défini par

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(v) Pour une matrice carrée A de taille $n \geq 1$, on note $\det(A) \in \mathbb{K}$ son **déterminant** et $\mathcal{X}_A = \det(A - X\mathrm{I}_n) \in \mathbb{K}_n[X]$ son **polynôme caractéristique**, avec I_n la matrice identité de taille n. De manière analogue, si f est un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, on note $\det(f) \in \mathbb{K}$ son déterminant et $\mathcal{X}_f \in \mathbb{K}_n[X]$ son polynôme caractéristique.

Exercice.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 1 (Cayley-Hamilton) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors, l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul.

On veut montrer que l'endomorphisme $\mathcal{X}_f(f)$ est nul, c'est-à-dire que

$$\mathcal{X}_f(f)(x) = 0_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

1. Justifier que $\mathcal{X}_f(f)(0_E) = 0_E$. **On fixe dans toute la suite de l'exercice** $x \in E \setminus \{0_E\}$.
2. On note $l(E)$ l'ensemble des *familles libres* de E. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \left\{ d \in \mathbb{N}^\star : \left(x, f(x), \ldots, f^{d-1}(x)\right) \in l(E) \right\}$$

   est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.
3. En utilisant le fait que *toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{Z}$ *admet un plus grand élément*, déduire de la question précédente qu'il existe un entier $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :
   (i) la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\right) \in l(E)$;
   (ii) la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), f^m(x)\right) \notin l(E)$.
4. Justifier qu'il existe $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x).$$

   En déduire que $P(f)(x) = 0_E$ avec $P = (\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k) - X^m$.
5. On associe au polynôme P ci-dessus la matrice (dite *compagnon*)

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K}).$$

   L'objectif de cette question est de déterminer le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_{C_P}$ de C_P, c'est-à-dire $\det(C_P - X\mathrm{I}_m)$.
   (a) En effectuant un développement selon la dernière colonne de $C_P - X\mathrm{I}_m$, montrer que

$$\mathcal{X}_{C_P}(X) = (-X + a_{m-1})(-X)^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{m+1+k} a_k \Delta_k$$

   où pour chaque entier $k \in \{1, \ldots, m-2\}$,

$$\Delta_0 = \det D_0 \quad \text{et} \quad \Delta_k = \det \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ C_k & D_k \end{pmatrix},$$

   avec A_k, C_k, D_k des matrices (blocs), où A_k et D_0, D_k sont triangulaires.
   (b) Montrer qu'il existe une constante k_m dépendant uniquement de m telle que $\mathcal{X}_{C_P}(X) = k_m P(X)$.
6. On **suppose** dans cette question que $m = n$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \big(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\big)$ est une base de E.
(b) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ de E est donnée par C_P.
(c) En déduire que $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{C_P}$.
(d) Conclure.

7. On **suppose** maintenant que $m < n$.
   (a) Justifier qu'il existe $n - m$ vecteurs $e_{m+1}, \ldots, e_n \in E$ tel que la famille
   $$\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x), e_{m+1}, \ldots, e_n)$$
   soit une base de E.
   (b) Montrer que la matrice de l'endomorphisme f dans cette base $\mathcal{B}$ est une matrice par blocs de la forme
   $$\begin{pmatrix} C_P & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
   où $A \in M_{m,n-m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-m}(\mathbb{K})$.
   (c) Montrer que $\mathcal{X}_{C_P}$ divise $\mathcal{X}_f$.
   (d) Conclure.

Problème.

Aux notations et rappels présentés au début du sujet s'ajoutent :

(vi) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des formes linéaires sur E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$, voir en-tête du sujet) est noté $E^\star$ et est appelé **dual algébrique** de E. Etant donnée $\varphi \in E^\star$ et $x \in E$, il est d'usage de noter
$$\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E}\,.$$
On appelle $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^\star, E}$ le **crochet de dualité** entre E et $E^\star$.

(vii) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. *On rappelle* que pour chaque $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k.$$
L'élément $(x_1, \ldots, x_n)$ est appelé **vecteur des coordonnées** de x dans la base β et est noté $[x]_\beta$. Etant donné $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $[x]_{k,\beta}$ la k-ième coordonnée de x dans la base β, c'est-à-dire $[x]_{k,\beta} = x_k$. On note $b_k^\star : E \to \mathbb{K}$ l'application qui à un vecteur $x \in E$ associe sa k-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$, autrement dit
$$b_k^\star(x) = [x]_{k,\beta} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

L'objectif du problème est l'étude du dual algébrique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Base duale

1. Montrer que l'ensemble $E^\star$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(E; \mathbb{K})$ des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ (muni de sa structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
2. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
   (a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $b_k^\star \in E^\star$. Autrement dit montrer que l'application $b_k^\star : E \to \mathbb{K}$ définie par
   $$b_k^\star(x) = [x]_{k,\beta} \quad \text{pour tout } x \in E$$
   est linéaire.

(b) Montrer que la famille $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est l'unique famille de $E^\star$ satisfaisant pour tout les entiers $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ les relations

$$\langle b_k^\star, b_l \rangle_{E^\star, E} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Montrer que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une famille libre de $E^\star$.

(d) Montrer que pour tout $\varphi \in E^\star$,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, b_k \rangle_{E^\star, E} \, b_k^\star.$$

(e) En déduire que $(b_1^\star, \ldots, b_n^\star)$ est une base de $E^\star$. On l'appelle la **base duale** de $E^\star$ associée à la base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et on la note $\mathcal{B}^\star$. Exprimer la dimension de $E^\star$ en fonction de celle de E.

(f) Soit $\varphi \in E^\star$ et $x \in E$. Montrer que

$$\langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} = [\varphi]_{\beta^\star} \times ([x]_\beta)^T,$$

où $\times$ désigne le produit matriciel et ^{T} la transposition.

2 Exemples

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Justifier que $C([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Montrer que l'application $\mathcal{R} : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{R}(f) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{pour tout } f \in C([a, b], \mathbb{R})$$

est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

2. Montrer que la fonction *partie réelle* $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire lorsque $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Que dire si $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

3. Dans cette question, $n \geq 1$ est un entier et $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est sa base duale. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

(a) Justifier qu'il existe une unique famille $(p_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de réels tels que

$$\begin{cases} b_1^\star = p_{1,1} e_1^\star + \ldots + p_{1,n} e_n^\star, \\ \vdots \\ b_n^\star = p_{n,1} e_1^\star + \ldots + p_{n,n} e_n^\star. \end{cases}$$

(b) Déduire de ces égalités et de la Question 2.(b) de la Partie 1, l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [b_1]_{1,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{1,\mathcal{C}} \\ \vdots & & \vdots \\ [b_1]_{n,\mathcal{C}} & \ldots & [b_n]_{n,\mathcal{C}} \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n$$

(c) Comme s'appelle la matrice de droite intervenant dans le premier membre de l'égalité ci-dessus ? Pourquoi est-elle inversible ? A quoi correspond son inverse ?

(d) **Application.** Ici, $n = 3$, $b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $b_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $b_3 = 3e_1 + e_3$. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa base duale.

4. Dans cette question, on considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, ainsi qu'un entier $m \geq 1$ et $(m+1)$-réels de $[a, b]$ $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$.
   (a) On introduit l'application $\Phi : \mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}^{m+1}$ définie par
   $$\Phi(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_m)) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_m[X].$$
      (i) Justifier brièvement que Φ est linéaire.
      (ii) Que dire de $P \in \mathbb{R}_m[X]$ ayant au moins $(m+1)$ racines distinctes ? En déduire que Φ est injective.
      (iii) Montrer que Φ est surjective et donc bijective.
      (iv) Conclure qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que
      $$P(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, m\}.$$
   (b) L'unique polynôme obtenu à la question précédente s'appelle le *polynôme interpolateur de Lagrange* associé à la fonction f et à la famille $(x_k)_{0 \leq k \leq m}$. On s'intéresse désormais à la recherche d'une formule explicite pour ce polynôme. On introduit pour chaque $k \in \{0, \ldots, m\}$ le polynôme
   $$L_k(X) = \prod_{l \neq k} \frac{X - x_l}{x_k - x_l}.$$
      (i) Vérifier que $L_0, \ldots, L_m$ sont des éléments de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $L_k(x_l)$ pour des entiers $k, l \in \{0, \ldots, m\}$.
      (ii) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
      (iii) Etablir que
      $$P(X) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) L_k(X)$$
      (iv) Soit $\mathcal{L}^\star = (L_0^\star, \ldots, L_m^\star)$ la base duale de $\mathcal{L}$. Pour $Q \in \mathbb{R}_m[X]$ et $k \in \{0, \ldots, m\}$ déterminer $L_k^\star(Q)$.

3 Vers la représentation de Riesz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, i.e., E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer que pour chaque $v \in E$ la fonction $f_v : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_v(x) = \langle v, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in E$$
est une forme linéaire de E. On note $f_v(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$. En déduire que l'application $\Phi : E \to E^\star$ définie par
$$\Phi(v) = \langle v, \cdot \rangle \quad \text{pour tout } v \in E$$
est bien définie.
2. Montrer que Φ est linéaire et bijective.
3. Conclure que
$$E^\star = \{\langle v, \cdot \rangle : v \in E\}.$$
4. **Application.** Pour $n \geq 1$ entier, donner une description explicite des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ et de $M_n(\mathbb{R})$.

4 Bidual algébrique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le dual algébrique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E^\star$ est appelé **bidual algébrique** de E et est noté $E^{\star\star}$.

1. Pour $x \in E$, montrer que l'application $J_x : E^\star \to \mathbb{K}$ définie par

$$J_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} \quad \text{pour tout } \varphi \in E^\star$$

est linéaire. Ceci permet de définir l'application

$$\begin{aligned} J : E &\to E^{\star\star} \\ x &\mapsto J_x : E^\star \to \mathbb{K} \\ &\qquad\quad \varphi \mapsto J_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} \,. \end{aligned}$$

2. Montrer que J est une application linéaire.
3. En étudiant le noyau de J, montrer que J est injective.
4. Conclure que J est un isomorphisme. On dit alors que E **s'identifie canoniquement à** $E^{\star\star}$ **à travers** J.

5 Base antéduale

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 1$. On note J l'isomorphisme canonique de E avec son bidual algébrique $E^{\star\star}$ et J_x l'image de x par J pour $x \in E$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$. Soit $(\varphi_1^\star, \ldots, \varphi_n^\star)$ sa base duale associée (qui est donc une base de $E^{\star\star}$).

1. Justifier qu'il existe $b_1, \ldots, b_n \in E$ tels que

$$J_{b_k} = \varphi_k^\star \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E.
3. En utilisant la Question 2(b) de la Partie 1, montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$. On dit alors que $(b_1, \ldots, b_n)$ est **une** base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.
4. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ admet une **unique** base antéduale.

6 Hyperplans

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan vectoriel** de E le noyau de toute forme $\mathbb{K}$-linéaire de E **non nulle**. Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan vectoriel de E s'il existe $\varphi \in E^\star$ **non nulle** telle que

$$H = \{x \in E : \langle \varphi, x \rangle_{E^\star, E} = 0\}.$$

1. Justifier brièvement que tout hyperplan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Quels sont les hyperplans de $E = \{0_E\}$?

Les hyperplans sont caractérisés comme les sous-espaces de E qui admettent des droites comme supplémentaires. Plus précisément :

Lemme 1 Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :
(i) H est un hyperplan de E ;
(ii) Il existe $v \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$.

1. On veut montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$. On suppose donc que $H = \ker(\varphi)$ pour une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non nulle. Soit $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$.
   (a) Montrer que $H \cap \mathbb{K}v = \{0_E\}$.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer que $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v \in H$.
   (c) Conclure que $E = H \oplus \mathbb{K}v$.
2. Montrer la réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$.
3. On suppose que E est de dimension finie non nulle égale à n. Exprimer la dimension des hyperplans vectoriels de E en fonction de n.
4. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Justifier brièvement que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}v$.
5. En utilisant le Lemme 1, établir le résultat suivant :

   Proposition 1 *Soient $f, g : E \to \mathbb{K}$ deux formes linéaires non nulles sur E. Alors, f et g sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau, c'est-à-dire*

   $$\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, f = \lambda g.$$