1 Matrices orthogonales et isométries

1.1 Définitions fondamentales

[Matrice orthogonale] Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si :

$$A^\top A = AA^\top = I_n$$

L'ensemble des matrices orthogonales de taille n est noté $O(n)$.

[Isométrie vectorielle] Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est une **isométrie vectorielle** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

[Équivalence fondamentale] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans une base orthonormée. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est une isométrie vectorielle
2. A est une matrice orthogonale
3. f préserve le produit scalaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

1.2 Propriétés structurelles

[Structure de groupe] $(O(n), \times)$ est un :
— Sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$
— Groupe de Lie réel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$
[Comportement du déterminant] Pour toute matrice $A \in O(n)$:

1. $\det(A) = \pm 1$
2. L'application $\det : O(n) \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes surjectif

2 Le groupe spécial orthogonal $SO(n)$

2.1 Définition et propriétés

[Groupe spécial orthogonal] Le **groupe spécial orthogonal** est :

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} = \ker(\det|_{O(n)})$$

[Structure algébrique] $SO(n)$ est :
— Un sous-groupe distingué de $O(n)$ d'indice 2
— La composante connexe de l'identité dans $O(n)$
— Un groupe de Lie simple pour $n \geq 3$

2.2 Étude en basse dimension

[Description de SO(2)] Les matrices de $SO(2)$ sont exactement les matrices de rotation :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

On a un isomorphisme de groupes : $SO(2) \cong \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

[Rotations en dimension 3] Pour toute matrice $R \in SO(3)$, il existe un vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^3$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$ tels que R est la rotation d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ.

2.3 Décomposition canonique des éléments de $SO(n, \mathbb{R})$

[Décomposition en plans invariants] Pour toute matrice $R \in SO(n, \mathbb{R})$, il existe une base orthonormée dans laquelle R s'écrit comme matrice diagonale par blocs de la forme :

$$R = P \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où :
— $P \in SO(n, \mathbb{R})$ est une matrice de changement de base
— Les $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ sont des matrices de rotation planes
— Le nombre de blocs 1 sur la diagonale est $n - 2p$ (correspondant au sous-espace fixe)

[Esquisse de preuve] Par récurrence sur $n \geq 2$:

1. Pour $n = 2$: c'est la définition même de $SO(2, \mathbb{R})$
2. Pour $n = 3$: c'est le théorème d'Euler
3. Pour $n \geq 4$: on utilise que tout endomorphisme orthogonal admet un plan stable ou une droite invariante

[Cas des dimensions paires et impaires]
— Si $n = 2p$: R est conjuguée à une matrice diagonale par blocs de p rotations planes
— Si $n = 2p + 1$: R est conjuguée à une matrice diagonale par blocs de p rotations planes et d'un bloc 1

2.4 Conséquences géométriques

[Interprétation en termes d'action] Toute rotation $R \in SO(n, \mathbb{R})$ peut s'écrire comme composition commutative de :
— Rotations planes dans p plans orthogonaux deux à deux
— Identité sur un sous-espace de dimension $n - 2p$

[Cas de $SO(4,\mathbb{R})$] Toute $R \in SO(4,\mathbb{R})$ se décompose en deux rotations planes dans deux plans orthogonaux :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Cette décomposition est à la base de la théorie des *angles de Cayley*.

2.5 Paramétrisation explicite

[Forme normale] Pour $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$, on a le difféomorphisme :

$$SO(n,\mathbb{R}) \cong \underbrace{SO(2,\mathbb{R}) \times \cdots \times SO(2,\mathbb{R})}_{p \text{ fois}} \times V$$

où V est un voisinage de l'identité dans l'espace des matrices orthogonales stabilisant un drapeau fixé.

Cette décomposition montre que localement, $SO(n,\mathbb{R})$ se comporte comme un produit de cercles (puisque $SO(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$).

3 Matrices symétriques

3.1 Généralités

[Matrice symétrique] Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** si $A^\top = A$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

[Théorème spectral] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

1. Les valeurs propres de A sont réelles
2. A est diagonalisable dans une base orthonormée
3. Il existe $P \in O(n)$ telle que $A = PDP^\top$ avec D diagonale

3.2 Matrices symétriques positives

[Matrice symétrique positive] Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite :
— **Positive** (noté $A \geq 0$) si $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^\top Ax \geq 0$
— **Définie positive** (noté $A > 0$) si $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^\top Ax > 0$

[Caractérisation des matrices définies positives] Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, les assertions sont équivalentes :

1. A est définie positive
2. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives
3. Tous ses mineurs principaux sont strictement positifs
4. Il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$

[Propriétés des matrices positives]
— L'ensemble des matrices symétriques positives est un cône convexe fermé
— Si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors $A + B \geq 0$
— Pour $A \geq 0$, il existe une unique $B \geq 0$ telle que $B^2 = A$

4 Matrices antisymétriques

[Matrice antisymétrique] Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **antisymétrique** si $A^\top = -A$. L'ensemble est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
[Propriétés algébriques]
— $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$
— Si A est antisymétrique, alors $\exp(A) \in SO(n)$
— Pour n impair, toute matrice antisymétrique est singulière

5 Décompositions matricielles

5.1 Décomposition polaire

[Décomposition polaire] Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique :

$$A = OS$$

avec $O \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive.

5.2 Décomposition de Cartan

[Décomposition de Cartan] Toute matrice $A \in O(n)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions hyperplanes.

5.3 Décomposition spectrale

[Décomposition simultanée] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P^\top P \quad \text{et} \quad B = P^\top DP$$

où D est diagonale.

6 Applications géométriques

6.1 Isométries affines

[Isométrie affine] Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie affine** si elle s'écrit :

$$f(x) = Ax + b$$

avec $A \in O(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

[Classification des isométries] Toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ est :

— Une translation
— Une réflexion
— Une rotation
— Une composée de ceux-ci

6.2 Formes quadratiques

[Forme quadratique] À toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on associe la forme quadratique :

$$Q(x) = x^\top A x$$

[Réduction des formes quadratiques] Toute forme quadratique peut s'écrire après changement de base orthonormée :

$$Q(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.