

Un quadripôle est par définition un réseau qui comporte quatre bornes de liaisons avec les circuits extérieurs. Il s'agit souvent d'un ensemble d'éléments permettant de traiter des signaux ou de transférer de l'énergie fournie par un générateur pour les restituer sous une forme quelconque à une charge extérieure. Les échanges avec l'extérieur se font au travers de deux bornes utilisées comme bornes d'entrée (côté générateur) et vers deux autres bornes utilisées comme sortie (côté charge).

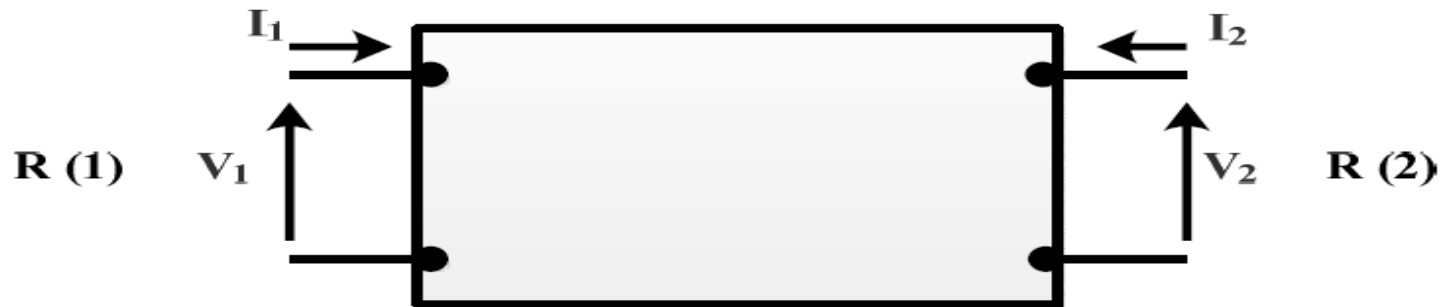


D'une façon générale, un quadripôle est défini par deux équations caractéristiques qui décrivent complètement son fonctionnement :

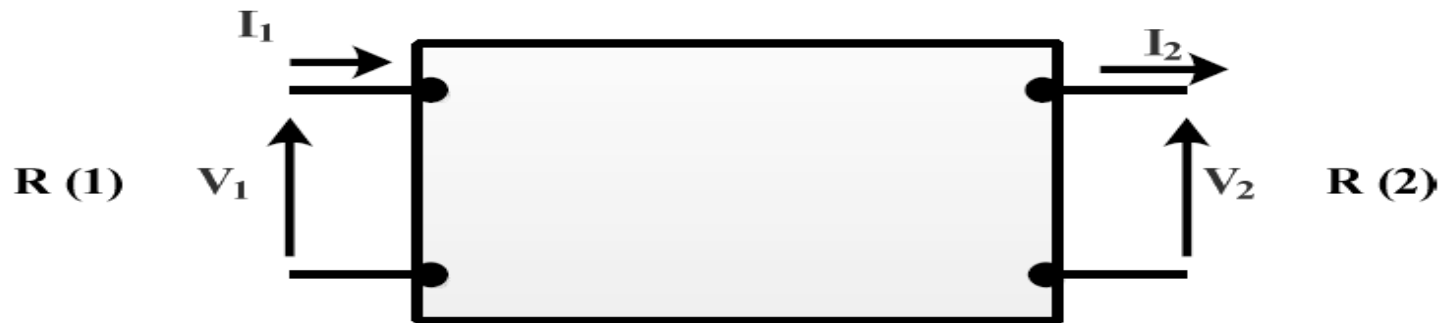
$$F_1(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

$$F_2(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

Système récepteur



Système générateur



Représentation matricielle

Matrice impédance Z

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice Z se définissent comme suit :

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} : \text{Impédance d'entrée, sortie ouverte.}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} : \text{Impédance de transfert direct, sortie ouverte.}$$

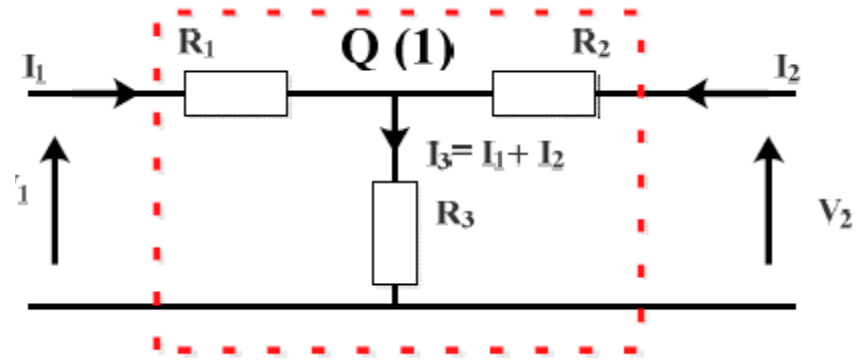
$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} : \text{Impédance de transfert inverse, entrée ouverte.}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} : \text{Impédance de sortie, entrée ouverte.}$$

Exemples D'application :

I. Détermination des paramètres d'impédance d'un quadripôle type T représenté par le circuit ci-dessous.

$$R_1 = 4\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 3\Omega$$



On exprime les tensions V_1, V_2 en fonction des courants I_1, I_2 . Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances Z (résistances).

$$V_1 = f(I_1, I_2) \text{ et } V_2 = f(I_1, I_2)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

On cherche la matrice $[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$

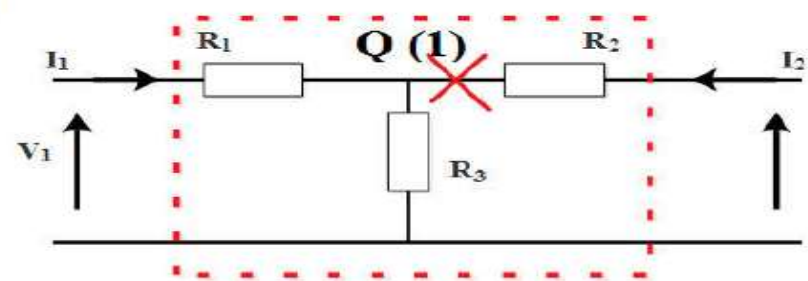
Cas $I_2 = 0$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

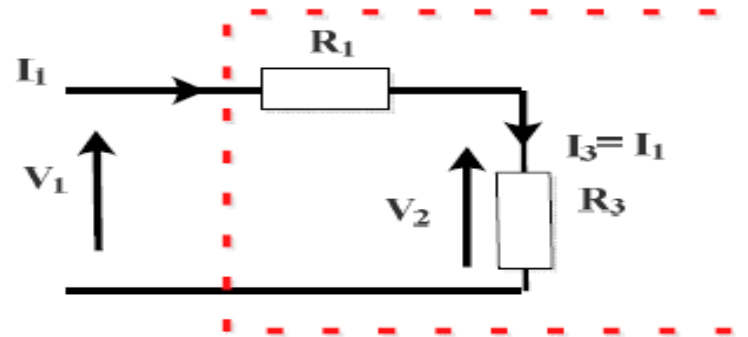
Donc

$$\text{si } I_2 = 0 \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \\ V_2 = Z_{21}I_1 \Rightarrow Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \end{cases}$$

si la sortie est en circuit ouvert ($I_2 = 0$) alors $I_3 = I_1$



Et le circuit devient comme suit :



Il résulte que $V_1 = (R_1 + R_3)I_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 + R_3 = 4 + 3 = 7\Omega$

En utilisant le diviseur de tension $V_2 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} V_1$

en remplaçant $V_1 = Z_{11} \cdot I_1$ on aura $V_2 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} Z_{11} \cdot I_1$

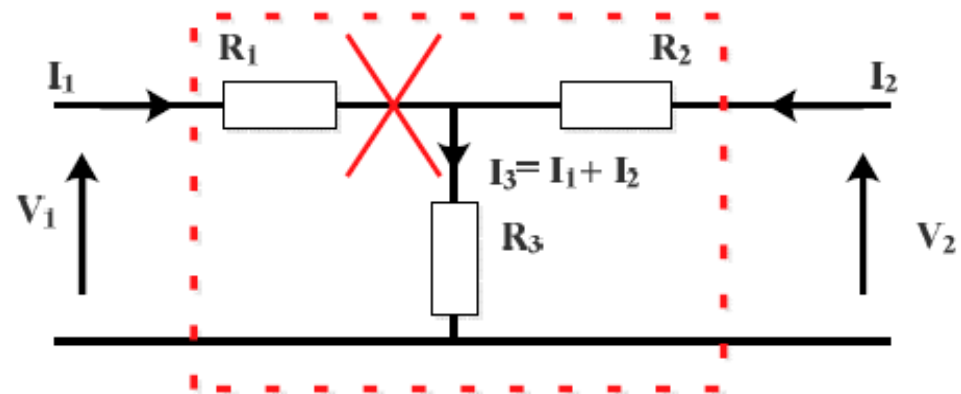
Par définition $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} Z_{11} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} (R_1 + R_3) = \frac{3}{3+4} 7 = 3\Omega$

Cas $I_1 = 0$

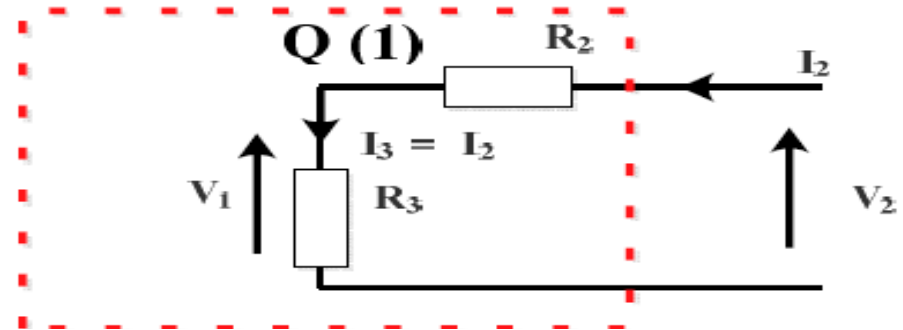
$$\begin{aligned} V_1 &= \cancel{Z_{11}I_1} + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= \cancel{Z_{21}I_1} + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\text{si } I_1 = 0 \begin{cases} V_1 = Z_{21}I_2 \Rightarrow Z_{21} = \frac{V_1}{I_2} \\ V_2 = Z_{22}I_2 \Rightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \end{cases}$$

si l'entrée est en circuit ouvert ($I_1 = 0$) alors $I_3 = I_2$



Et le circuit devient comme suit :



Il résulte que $V_2 = (R_2 + R_3)I_2 \Rightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = R_2 + R_3 = 2 + 3 = 5\Omega$

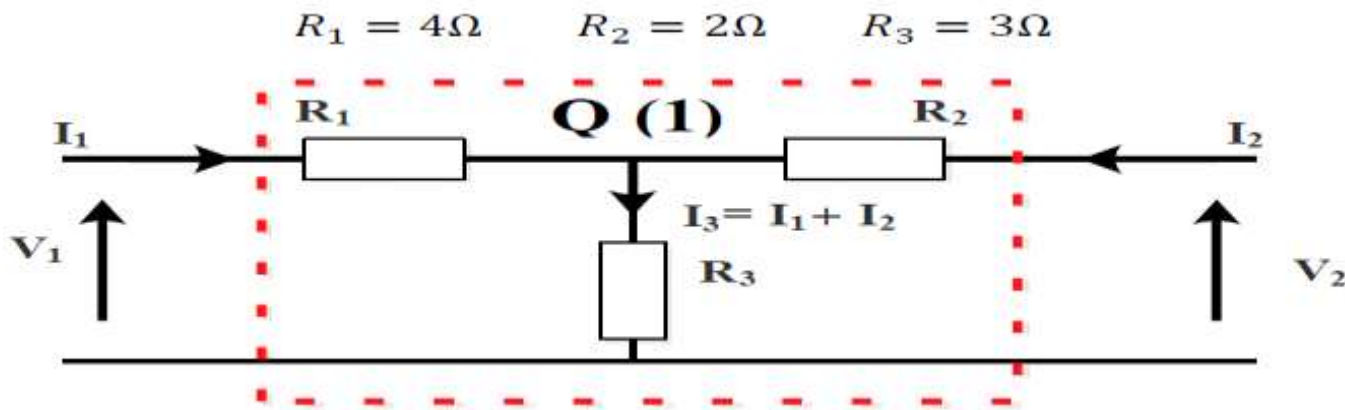
En utilisant le diviseur de tension $V_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_2$

en remplaçant $V_2 = Z_{22} \cdot I_2$ on aura $V_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} Z_{22} \cdot I_2$

Par définition $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} Z_{22} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} (R_2 + R_3) = \frac{3}{3+2} 5 = 3\Omega$

On obtient la matrice $[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ Et $\begin{cases} V_1 = 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 = 3I_1 + 5I_2 \end{cases}$

Déterminer les paramètres d'admittance du quadripôle type T représenté par le circuit ci-dessous.



On exprime les courants I_1 I_2 en fonction des tensions V_1, V_2 . Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances.

$$I_1 = f(V_1, V_2) \quad I_2 = f(V_1, V_2)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On cherche la matrice $[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$

$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$: Admittance d'entrée, sortie court-circuitée.

$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$: Admittance de transfert direct, sortie court-circuitée.

$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$: Admittance de transfert inverse, entrée court-circuitée.

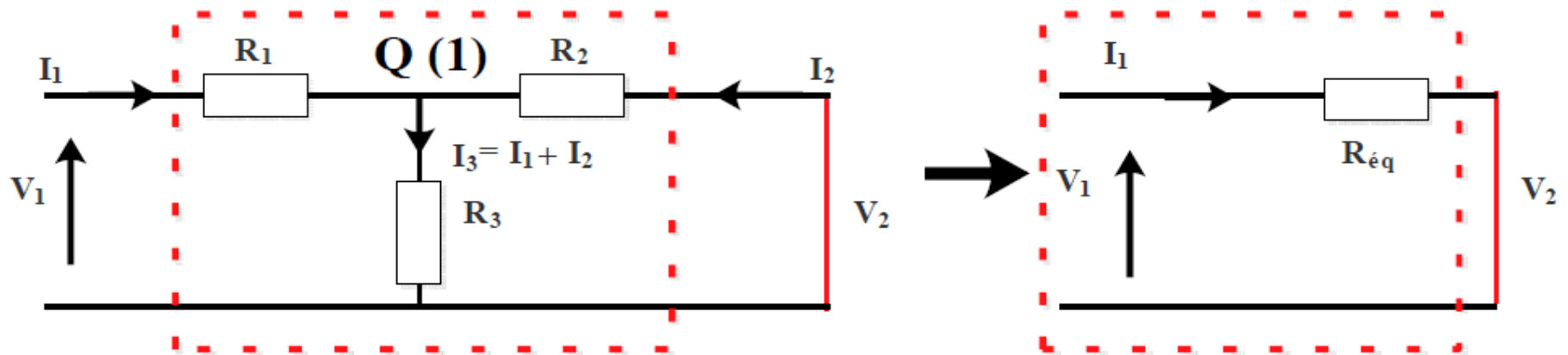
$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$: Admittance E de sortie, entrée court-circuitée.

Supposons $V_2 = 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + \cancel{Y_{12}V_2} \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + \cancel{Y_{22}V_2} \end{aligned}$$

$$\text{si } V_2 = 0 \begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \\ I_2 = Y_{21}V_1 \Rightarrow Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \end{cases}$$

si la sortie est circuit-circuitée ($V_2 = 0$) alors



Il résulte que $V_1 = R_1 + (R_2 // R_3) I_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{5}{26}$

En utilisant les deux équations d'impédances

$$\begin{array}{l} V_1 = 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 = 3I_1 + 5I_2 \end{array} \quad V_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 7I_1 + 3I_2 \\ 0 = 3I_1 + 5I_2 \end{array}$$

Nous obtiendrons $I_1 = \frac{-5I_2}{3}$ remplaçons l'expression de I_1 dans l'équation suivante

$$V_1 = 7 \frac{-5I_2}{3} + 3I_2$$

De cette manière nous avons trouvé l'expression qui lie la grandeur de l'entrée V_1 et le courant de sortie I_2 . Donc Y_{21} .

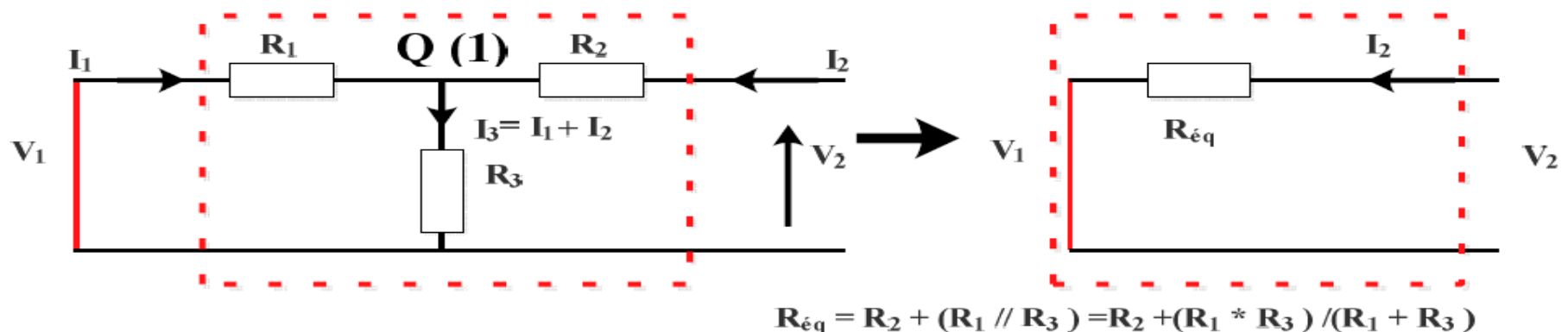
$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{-35+9}{3}} = \frac{-3}{26}$$

Supposons $V_1 = 0$

pour trouver les deux autres paramètres Y_{12} , Y_{22} on court-circuite l'entrée du circuit $V_1 = 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= \cancel{Y_{11}V_1} + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= \cancel{Y_{21}V_1} + Y_{22}V_2 \end{aligned}$$

si l'entrée est circuit-circuitée ($V_1 = 0$) alors le circuit peut être représenté comme suit : quadripôle



Alors $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$

$$\begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned} \quad V_1 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Nous obtiendrons $I_2 = \frac{-7}{3}I_1$ remplaçons l'expression de I_2 dans l'équation suivante

$$V_2 = 3I_1 + 5I_2 \text{ Nous aurons alors } V_2 = 3I_1 - 5\frac{7I_1}{3}$$

De cette manière nous avons trouvé l'expression qui lie la grandeur de l'entrée I_1 et le courant de sortie V_2 . Donc Y_{12} .

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{\frac{-35+9}{3}} = \frac{-3}{26}$$

De La même façon qu'on trouvera $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}$

$$\begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned} \quad V_1 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Nous aurons $I_1 = \frac{-3I_2}{7}$ et $V_2 = -3\frac{3I_2}{7} + 5I_2$ donc $\frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{\frac{-9+35}{7}} = \frac{7}{26}$.

$$\text{Donc la matrice } Y = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & \frac{-3}{26} \\ \frac{-3}{26} & \frac{7}{26} \end{bmatrix}. \text{ Et } \begin{aligned} I_1 &= \frac{5}{26}V_1 + \frac{-3}{26}V_2 \\ I_2 &= \frac{-3}{26}V_1 + \frac{7}{26}V_2 \end{aligned}$$

Le passage matriciel (Deuxième méthode de calcul de $Y = Z^{-1}$) :

On sait que $Y = Z^{-1}$ il suffit de calculer la matrice inverse de Z pour trouver les paramètres de Y .

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, avec

$$\det(A) = (a * d) - (b * c) \neq 0.$$

La comatrice est $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$, sa transposée est $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Alors la matrice inverse de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$\text{On } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Et } Z^{-1} = \frac{1}{\det(Z)} \text{com}Z^T$$

La transposée de Z est $Z^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Et sa comatrice est $\text{com}Z^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$.

Alors la matrice inverse de $Z = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ est donc $Z^{-1} = Y = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & \frac{-3}{26} \\ \frac{-3}{26} & \frac{7}{26} \end{bmatrix}$.