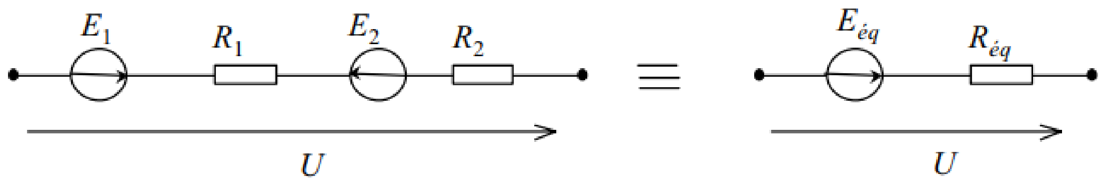
PRINCIPAUX THÉORÈMES DE CALCUL DE GRANDEURS ELECTRIQUES

Nous allons présenter quelques théorèmes généraux permettant de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques en régime statique. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

Association de générateurs de tension en série

Considérons les deux dipôles de la figure suivante



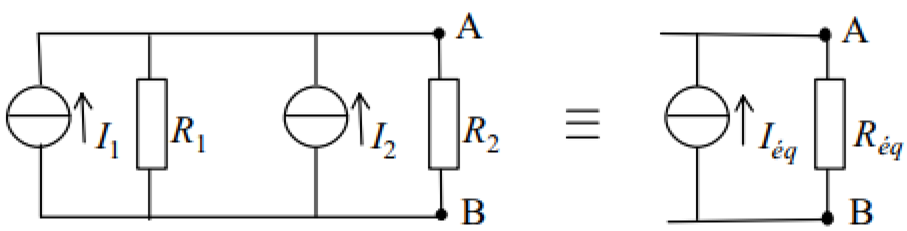
Constitués par la mise en série de deux générateurs de tension. Calculons maintenant le dipôle équivalent de la figure ci-dessus : ($E_{éq}$, $R_{éq}$). En appliquant la loi de Kirchhoff, la tension développée entre les bornes de ce circuit est égale à la somme algébrique des tensions produites par chacune des sources. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances internes des générateurs de tension.

$$\boxed{E_{éq} = \sum_{k=1}^{n_1} E_k \text{ et } R_{éq} = \sum_{k=1}^{n_1} R_k}$$

Généralisation : L'association en série de n générateurs de tension de résistance interne R_k et de force électromotrice E_k est équivalente à un générateur de tension unique dont la résistance équivalente est la somme des n résistances, et la force électromotrice équivalente est la somme algébrique des tensions produites par chaque source.

Association de générateurs de courant en parallèle

Considérons les deux dipôles de la figure suivante



Association en parallèle de deux sources de courants.

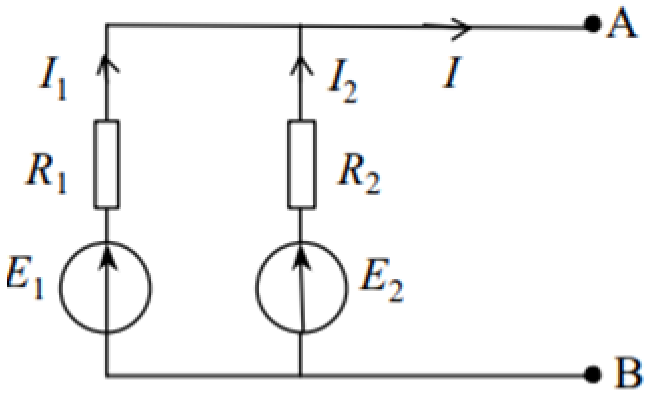
Constitués par la mise en parallèle de deux générateurs de courant (I_1, R_1) et (I_2, R_2). Calculons maintenant le dipôle équivalent ($I_{éq}$, $R_{éq}$). En appliquant la première loi de Kirchhoff, le courant de court-circuit est égal à la somme algébrique des courants produits par chacune des sources. La conductance équivalente est égale à la somme des conductances internes des différents générateurs de courant.

$$I_{éq} = \sum_{k=1}^{n_1} I_k \qquad\qquad G_{éq} = \sum_{k=1}^{n_1} G_k$$

Généralisation : L'association en parallèle de n générateurs de courant de résistances internes R_k et de courants I_k est équivalente à un générateur de courant unique, dont la conductance équivalente est la somme des n conductances et le courant équivalent est égal à la somme algébrique des courants produits par chaque source.

<u>Association de deux générateurs de tension en parallèle</u>

Supposons les deux générateurs réels de tensions de la figure suivante



A vide, le courant total I débité par les deux sources dans la charge étant nul, I_1 et I_2 sont forcément égaux en amplitude mais de signes opposés.
Si l'amplitude de ces deux courants n'est pas nulle, nous pouvons nous retrouver avec une situation de perte d'énergie (échauffement dans les résistances), ce qui peut, dans certaines conditions, provoquer une destruction du circuit.

En pratique, exceptionnellement, nous n'associons en parallèle que des générateurs identiques d'amplitude E et de résistance interne R. Dans ce cas, nous pouvons calculer la différence de potentiel qui apparaît entre A et B.

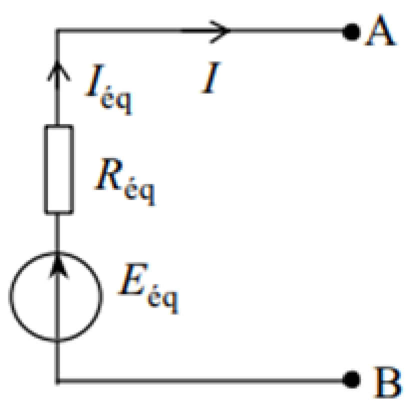
$$U_{AB} = E - R.I_1 = E - R.I_2 \text{ et } U_{AB} = E_{éq} - R_{éq}.I_{éq} = E_{éq} - R_{éq}.I$$

Puisque les deux générateurs sont identiques, ils sont traversés par le même courant :

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2}, U_{AB} = E - R\frac{I}{2}$$

Nous déduisons donc le générateur équivalent de la figure

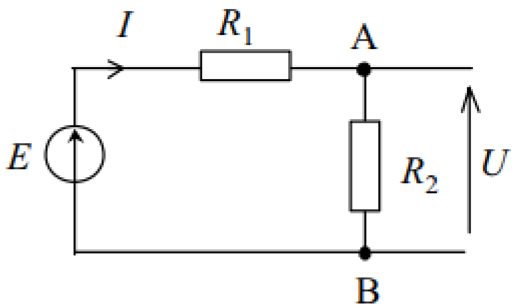
$E_{éq} = E \;\; R_{éq} = \frac{R}{2}$.



Pont diviseur de tension

Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure suivante

$$\boxed{U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$$



Il s'agit d'une application directe de la mise en série de deux résistances :

$$E = R_1 I + R_2 I \text{ d'où } I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

La tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse. Par exemple la tension aux bornes de la résistance $R2$ vaut :

$$U = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2}$$

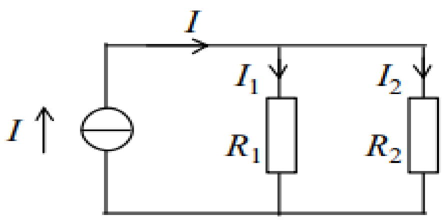
La tension ainsi obtenue est inférieure à E, d'où le nom donné à ce montage. Remarquons au passage, que d'une façon générale, la tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit série comportant n résistances, alimenté par une source de tension E est :

$$\boxed{U_i = R_i \frac{E}{R_1 + R_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots R_n}}$$

Pont diviseur de courant

Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure suivante

$$\boxed{I_2 = R_1 \frac{I}{R_2 + R_1} = G_2 \frac{I}{G_2 + G_1}}$$



Appelons «U» la différence de potentiel qui se trouve aux bornes des différents éléments en parallèle, nous obtenons :

$$E = R_2 I_2 = I(R_2 / / R_1) = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} I \text{ d'où } I_2 = R_1 \frac{I}{R_1 + R_2}$$

Si, maintenant, nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R1R2$, nous obtenons la relation suivante :

$$I_2 = G_2 \frac{I}{G_2 + G_1}$$

Cette relation est maintenant sous une forme comparable à celle trouvée pour le diviseur de tension. L'intensité obtenue est toujours inférieure à I, d'où le nom donné à ce montage.

Remarque : D'une façon plus générale, le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit parallèle comportant n résistances, alimenté par une source idéale de courant I, est :

$$\boxed{I_i = G_i \frac{I}{G_2 + G_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots G_n}}$$

Théorème de superposition

Il découle directement des propriétés de linéarité. Ce théorème s'applique donc aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs.

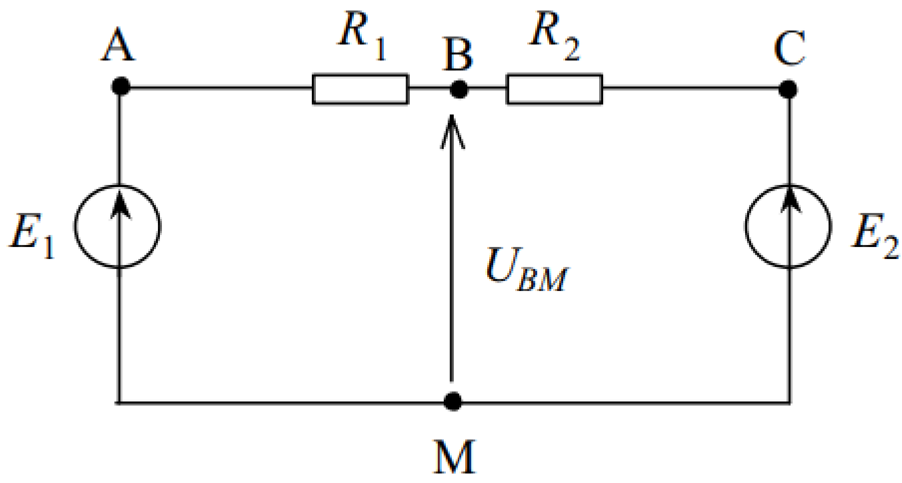
Soit un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : $S_1, S_2, \ldots, S_n$, et une grandeur à calculer, comme par exemple IK le courant dans la branche K. Appelons $I_{K1}, I_{K2}, \ldots, I_{Kn}$, les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. **Les autres sources étant passivées**. $I_K = I_{K1} + I_{K2} + \cdots + I_{Kn}$.

Remarque 1 : **Passiver** une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.

Remarque 2 : Le théorème de superposition ne s'applique pas aux circuits contenant des sources liées ou dépendantes (nous disons aussi sources contrôlées) puisque ces dernières ne sont pas, par définition, des éléments linéaires.

Un générateur contrôlé est un générateur dont la valeur nominale de tension ou de courant est fixée par une grandeur électrique du réseau.

Prenons par exemple le montage de la figure suivant, dans lequel nous calculons la tension U_{BM}.



Si $E_2 = 0$, $U_{BM} = U_1 = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2}$

Si $E_1 = 0$, $U_{BM} = U_2 = E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$

En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

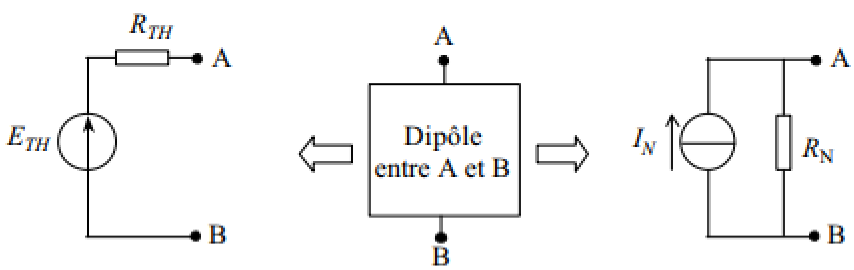
Théorèmes de Thévenin et de Norton

Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (calcul de la tension et du courant de sortie), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :

• soit sous la forme d'une source réelle de tension : c'est le modèle de Thévenin,

• soit sous la forme d'une source réelle de courant : c'est le modèle de Norton. Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de modéliser le comportement d'un dipôle.

Ces théorèmes montrent qu'indépendamment de la charge, un réseau quelconque vu entre deux de ces points peut toujours être représenté par une source réelle de tension ou par une source réelle de courant.

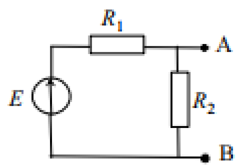


Théorème de Thévenin

Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B), le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH}.

- La valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- La résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Prenons par exemple le montage de la figure suivante

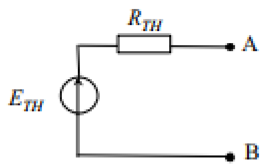


➢ La tension de Thévenin est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur.

➢ La résistance R_{TH} est obtenue en passivant la source de tension E. Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit.

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1+R_2}E \ \& \ R_{TH} = \frac{R_1 .\ R_2}{R_1+R_2}$$

Qu'on peut représenter comme suit :



Théorème de Norton

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points **A** et **B**, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre **A** et **B** par un générateur de Norton équivalent de courant $\boldsymbol{I_N}$, et de résistance interne $\boldsymbol{R_N}$.

➢ La valeur $\boldsymbol{I_N}$ du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).

➢ La résistance interne $\boldsymbol{R_N}$. correspond à la valeur de la résistance vue entre **A** et **B** lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit à trouver :

$$\boldsymbol{R_N = R_{TH} \ \& \ E_{TH} = R_{TH}. R_{TH} = R_N . I_N}$$