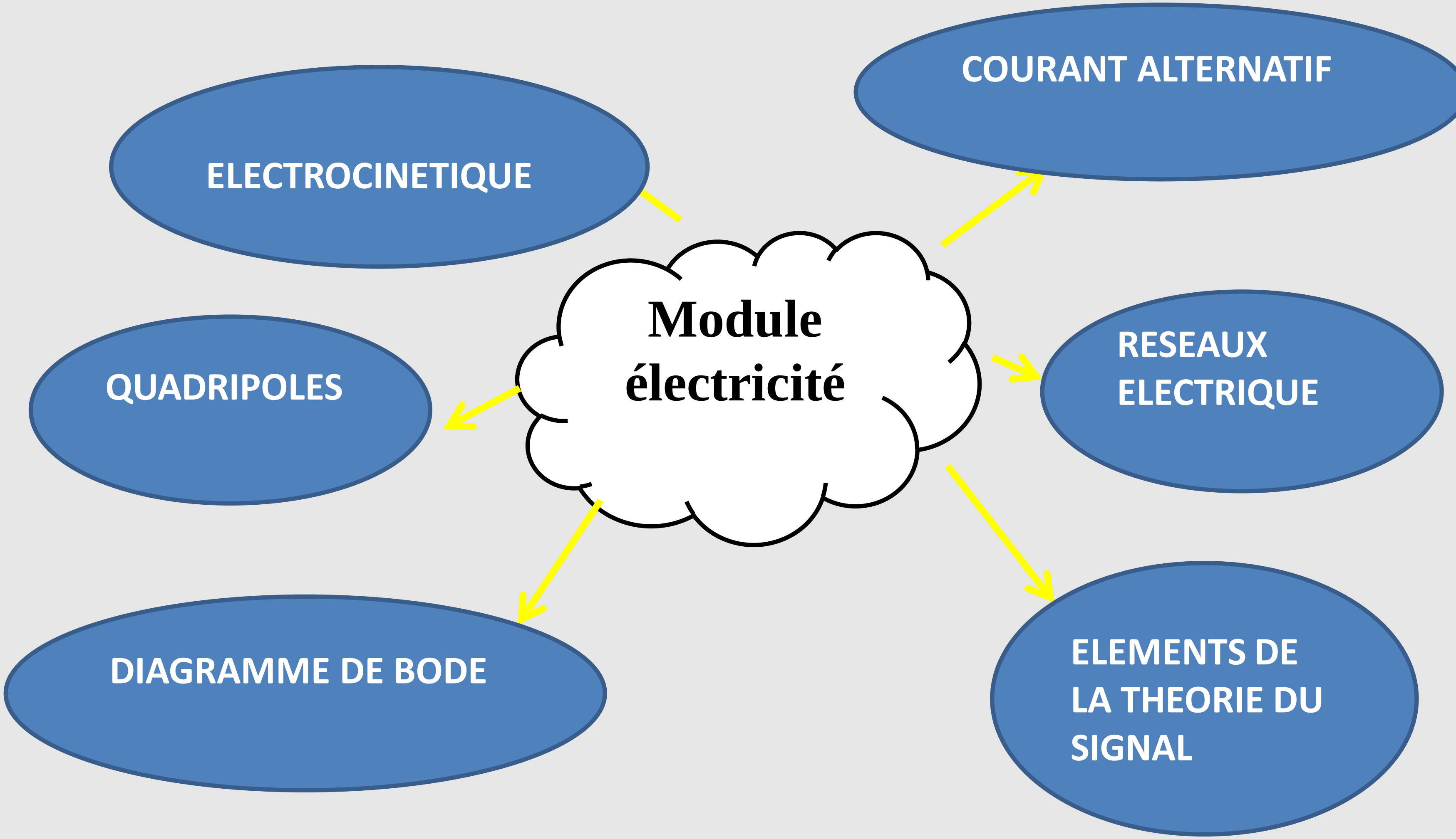
Introduction

Module Electricité



Objectifs du module

• comprendre et employer les notions de forces électrique, champ électrique, potentiel électrique et énergie.

• déterminer le courant et la tension dans un circuit électrique comprenant des sources de tension continue, des condensateurs et des résistances,

• comprendre les principes de l'électromagnétisme et l'appliquer pour résoudre les problèmes s'appliquant à l'électricité en présence du courant alternatif,

• savoir appliquer les lois et les théorèmes fondamentaux de l'électricité,

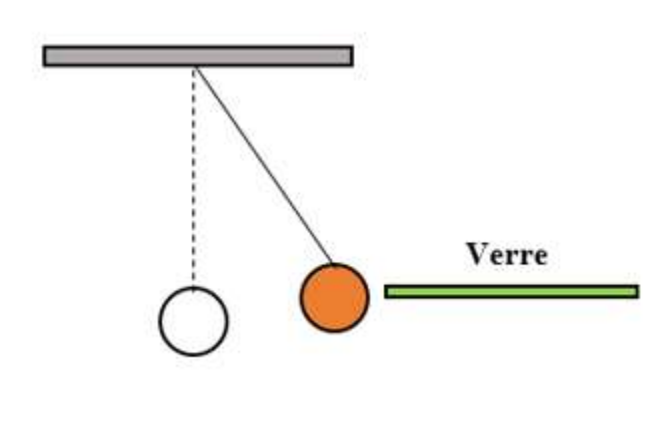
•maitriser les matrices associées aux différents quadripôles ainsi que leurs associations,

1 Introduction

L'électrisation est le phénomène d'apparition d'une charge électrique ou d'apparition des quantités d'électricité sur un corps. Il existe trois types d'électrisation :

- L'électrisation par frottement
- L'électrisation par contact
- L'électrisation par influence.

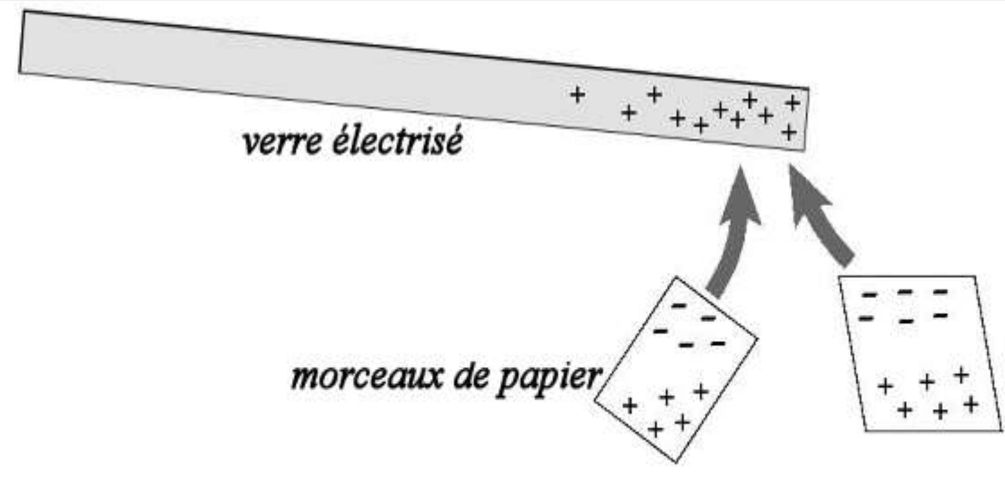
- Prenons une boule métallique et suspendons-la par un fil. Ensuite, on approche une tige de verre après l'avoir frottée préalablement



Module Electricité

- On approche une tige en verre frottée avec un tissu en laine de petits morceaux de papier

Les frottements de la tige lui ont fait perdre des électrons. Le verre se trouve alors chargé Positivement.



En approchant la tige des morceaux de papier de charge neutre, des charges négatives se déplacent dans le papier en face des charges positives de la tige de verre

1.2 loi de Coulomb

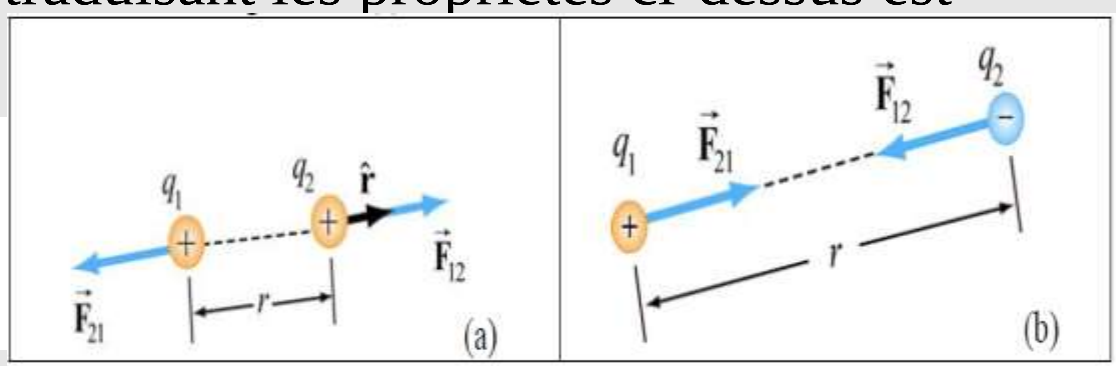
• La force électrostatique est dirigée selon la droite qui joint les deux charges q1 et q2.

• Elle est proportionnelle au produit des charges : soit elle est attractive si les charges sont de signe opposé soit elle est répulsive si les charges sont de même signe.

• Elle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

La loi de la force de Coulomb traduisant les propriétés ci-dessus est donnée par l'expression suivante

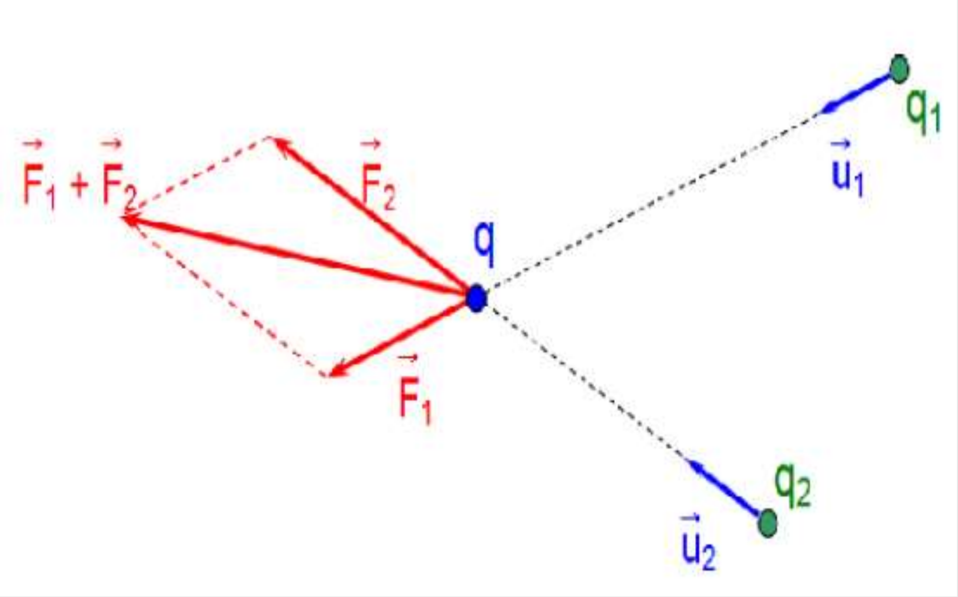
$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$



1.3 Principe de superposition

D’après la propriété de l’additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge q en présence de deux charges q1 et q2. La résultante des forces est calculée comme suit :

$$\overrightarrow{F_{tot}} = \overrightarrow{F_1} + F_2 = k\frac{q_1 q}{r_1^2}\overrightarrow{u_1} + k\frac{q_1 q}{r_2^2}\overrightarrow{u_2}$$

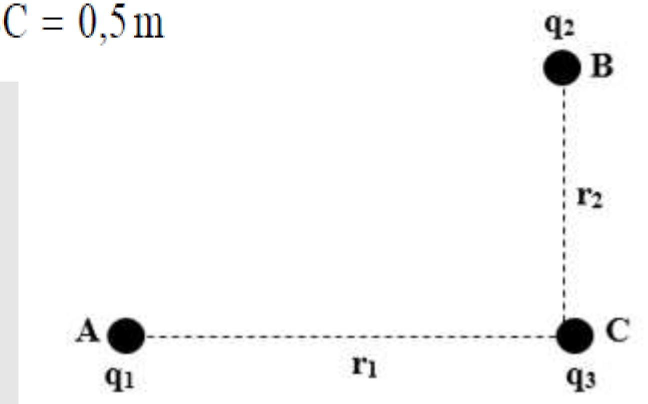


Exemple

Trois charges q1, q2 et q3 sont disposées selon la figure suivante.

Calculer la force résultante appliquée sur la charge q3.

$q_1 = +1,5.10^{-1}C,\ q_2 = -0,5.10^{-3}C,\ q_3 = +0,2.10^{-3}C,\ AC = 1,2m,\ BC = 0,5m$



2.1Champ électrique d'une charge ponctuelle

La force qui s'exerce sur une charge q au point M de la part d'une charge Q située au point O est donnée par :

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)\vec{u}$$

On remarque que l'expression $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ ne dépend que de la charge Q et des coordonnées du point M.

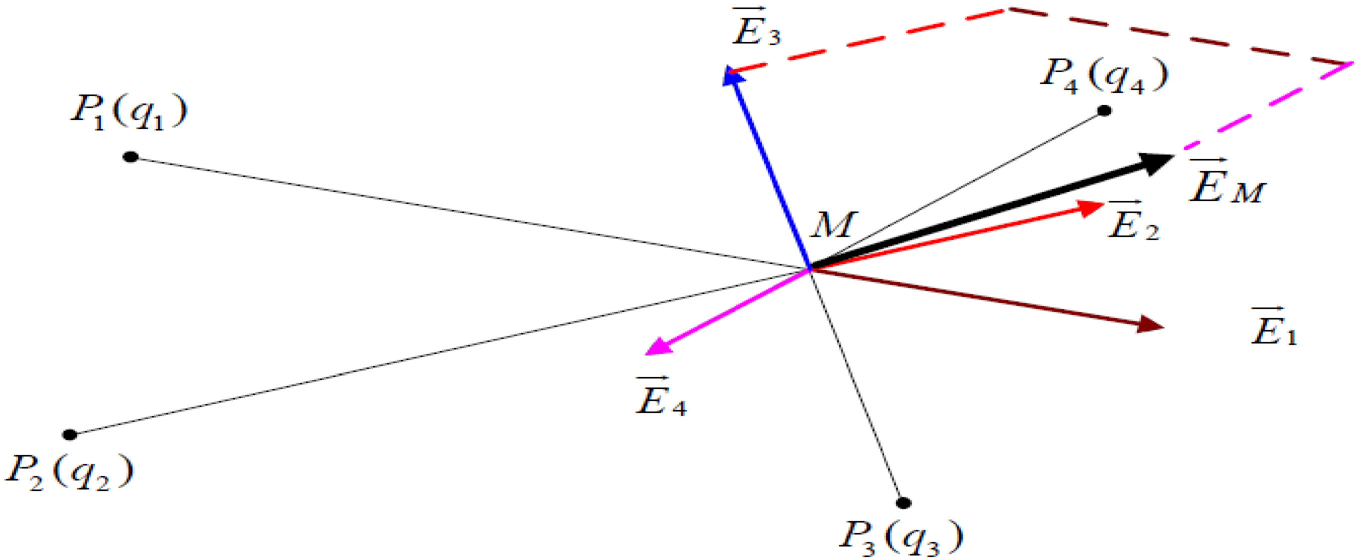
Cette expression définit une grandeur appelée champ électrique et qui est produit par la charge Q placée au point O en tout point M de l'espace, son expression vectorielle est :

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES

Si maintenant, on a n particules électriques q_i, situées aux points P_i, quel serait alors le champ électrique produit par cet ensemble de charges au point M ?

$$\boxed{\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i}$$



CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

Dans une telle répartition de charge, le principe de superposition reste toujours valable. On divise cette répartition en un nombre infini de très petits volumes, ou surfaces, ou segments rectilignes élémentaires chargés, puis on calcule le champ *dE* que chacun de ces éléments crée.

Dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on a :

$$d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k}$$

Par intégration on arrive à :

$$\vec{E} = \int \left(dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k} \right) = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k}$$

On obtient par la suite :

$$E_x = \int dE_x \quad , \quad E_y = \int dE_y \quad , \quad E_z = \int dE_z$$

En tous les cas, la relation qu'il faut retenir est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)}$$

Sachant que :

$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}\vec{u}}$$

2.2Potentiel électrique crée par une charge ponctuelle

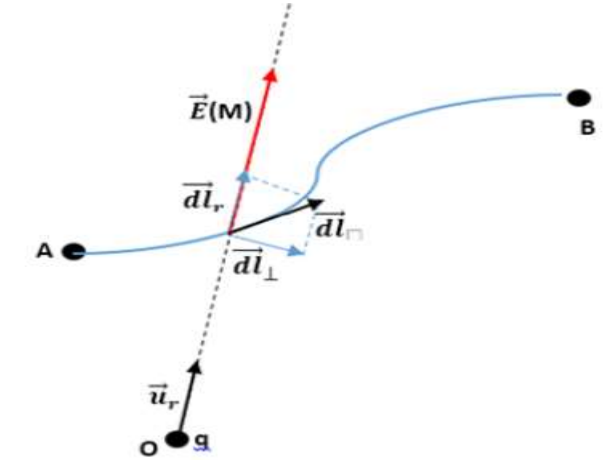
La circulation élémentaire du champ $\vec{E}_M$ crée par une charge Q sur un élément de longueur $\vec{dl}$ au point M d'une courbe quelconque (AB) est donné par la relation suivante : $dc = \vec{E}(M).\,\vec{dl}$

Avec $\vec{E}(M)$ est le champ électrique crée par la charge Q au point O. On note $\vec{ur}$ le vecteur unitaire le long de la droite OM et r = OM et $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

On décompose $\vec{dl}$ selon $\vec{ur}$ et selon une autre direction qui lui est perpendiculaire telle que :

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + \vec{dl}_\perp$$



En tenant compte du fait que les vecteurs $\overrightarrow{dl}_\perp$ et $\overrightarrow{ur}$ sont perpendiculaires, ce qui donne $\vec{E}(M)$ $\vec{dl}.\vec{u_r} = 0$, et $\overrightarrow{ur}$ est un vecteur unitaire, par conséquent $\overrightarrow{ur}.\overrightarrow{ur} = 1$, la circulation élémentaire devient alors :

$$dc = \vec{E}(M).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}.\left(dr\,\overrightarrow{u_r} \times \vec{dl}_\perp\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

L'intégrale de la relation sur toute la courbe (AB) donne la circulation totale. En prenant en considération que :

$$\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right) \quad \text{Ce qui donne :} \quad dc = d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

Dans ce cas, la circulation du champ électrostatique entre A et B sur la courbe (AB) est donnée par :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = \int_A^B d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi puisqu'elle ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B.

On définit alors le potentiel électrostatique comme étant la quantité V (M) dont la variation est l'opposé de la circulation du champ :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = V(A) - V(B) = -\Delta V \quad \text{avec:} \quad V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$$

En pratique, on utilise toujours des différences de potentiel au lieu du potentiel car la constante est choisie arbitrairement. Souvent elle est prise nulle à l'infini V (∞) =0.

Par conséquent, le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle Q au point M est donné par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V(\infty) = 0$$

CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

Dans une telle répartition de charge, le principe de superposition reste toujours valable. On divise cette répartition en un nombre infini de très petits volumes, ou surfaces, ou segments rectilignes élémentaires chargés, puis on calcule le champ *dE* que chacun de ces éléments crée.

Dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on a :

$$d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k}$$

Par intégration on arrive à :

$$\vec{E} = \int\left(dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k}\right) = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k}$$

On obtient par la suite :

$$E_x = \int dE_x \quad , \quad E_y = \int dE_y \quad , \quad E_z = \int dE_z$$

En tous les cas, la relation qu'il faut retenir est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)}$$

Sachant que :

$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}\vec{u}}$$

3.FLUX ELECTRIQUE

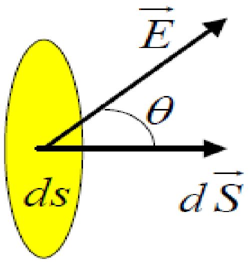
On appelle flux du champ électrique à travers une surface la grandeur :

$$\boxed{\Phi = \int \vec{E}.d\vec{S}}$$

$d\vec{S}$: Vecteur de la surface élémentaire, il est toujours normale à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume limité par la surface.

Si θ est l'angle compris entre $\vec{E}$ et $d\vec{S}$, on aura :

$$\boxed{\Phi = \oint_S E.dS.\cos\theta}$$



3.1 THEOREME DE GAUSS

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentes à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

soit q une charge ponctuelle positive, elle produit un champ électrique radial dirigé vers l'extérieur, de module $E(r) = K.\frac{q}{r^2}$.

On choisi comme surface fermée une sphère dont le centre est la charge q .

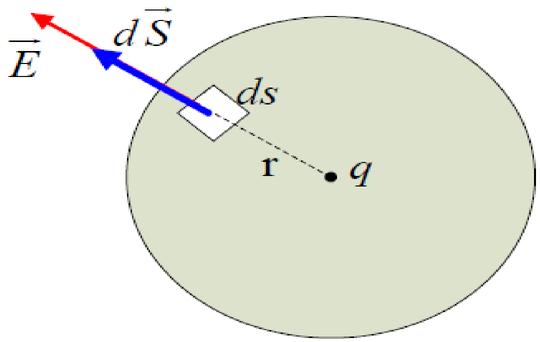
Puisque nous sommes dans le cas d'une sphère, tous les vecteurs surface élémentaire $d\vec{S}$ sont radiaux, ils ont donc la même direction que $\vec{E}$, d'où $\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$.

Le flux électrique élémentaire à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ est :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = E.dS$$

Par intégration on obtient :

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S K.\frac{q}{r^2}.dS$$



$$\Phi = K.\frac{q}{r^2}\oint_S dS$$

Rappelons-nous que la surface d'une sphère est :

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2$$

Après remplacement on obtient :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Le résultat obtenu par le calcul pour une seule charge est vérifié dans le cas général.

Si on considère une surface fermée quelconque renfermant n charges $q_n + \dots\dots\dots q_2 + q_1$ (quelque soient leur signes), on démontre dans ce cas que :

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i.\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}} \quad [\mathrm{Wb}]$$

Le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur du volume limité par cette surface, divisé par la permittivité du vide.

Ce théorème facilite et simplifie le calcul du champ électrique produit par une distribution simple de charges.

3.1.1 APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

a/ Le champ crée par une charge ponctuelle :

On considère la charge q comme centre d'une sphère de rayon r.

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est radial et sortant, $\cos 0 = 1$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

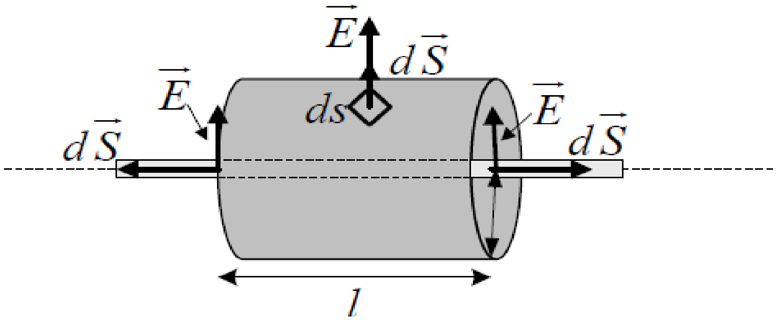
La surface de la sphère est $S = 4\pi r^2$, d'où :

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon_0 .S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}}$$

b/ Le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l, et dont l'axe coïncide avec la tige.

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1, la surface de base S_2, et la surface latérale S_L :



Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit $\Phi = \sum \Phi_i$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S}$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2) , le champ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{S}$, donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces $(\cos \pi/2 = 0)$. Mais, par contre sur la surface latérale (S_L), les vecteurs $d\vec{S}$ sont tous radiaux comme $\vec{E}$ $(\cos 0 = 1)$. D'où l'on obtient :

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = E.S_L = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

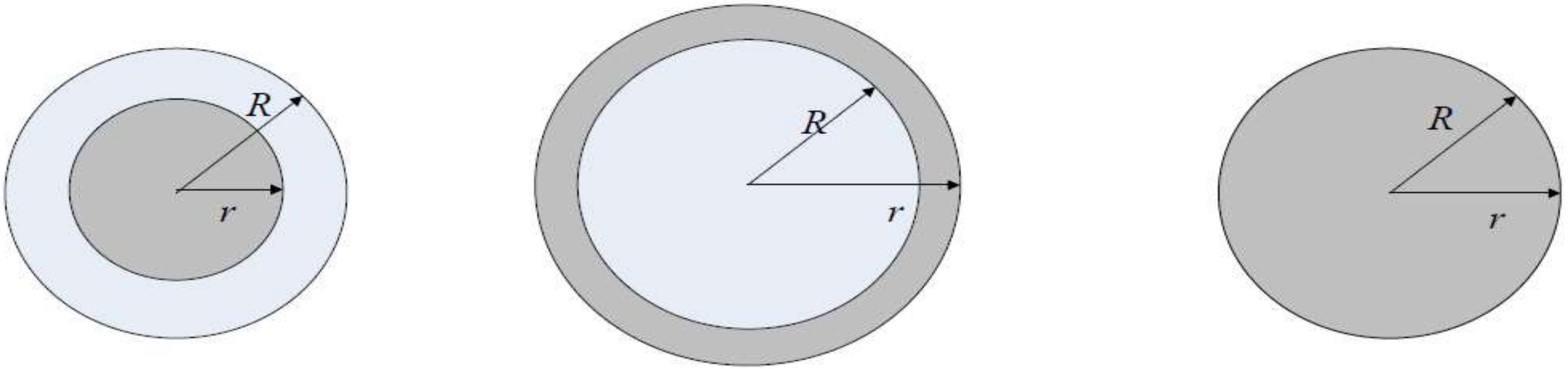
Sachant que $Q_i = \lambda.l$ et $S_L = 2\pi Rl$, donc :

$$E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

c/ Champ électrique produit par une sphère pleine chargée uniformément :

La surface de Gauss qui convient ici est une sphère de rayon . En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$



(a) (b) (c)

- $R \succ r$: seule une partie de la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r}$$

E est proportionnel à la distance .

- $R \prec r$: toute la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

E est inversement proportionnel au carré de la distance . La sphère se comporte comme une charge ponctuelle.

- $R = r$ la surface de Gauss coïncide avec la surface de la sphère :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.R}$$

Le champ électrique sur la surface de la sphère est constant.

d/ Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément :

On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces :

Le flux à travers la base de surface S_1 : $\Phi_1 = E.S_1$,

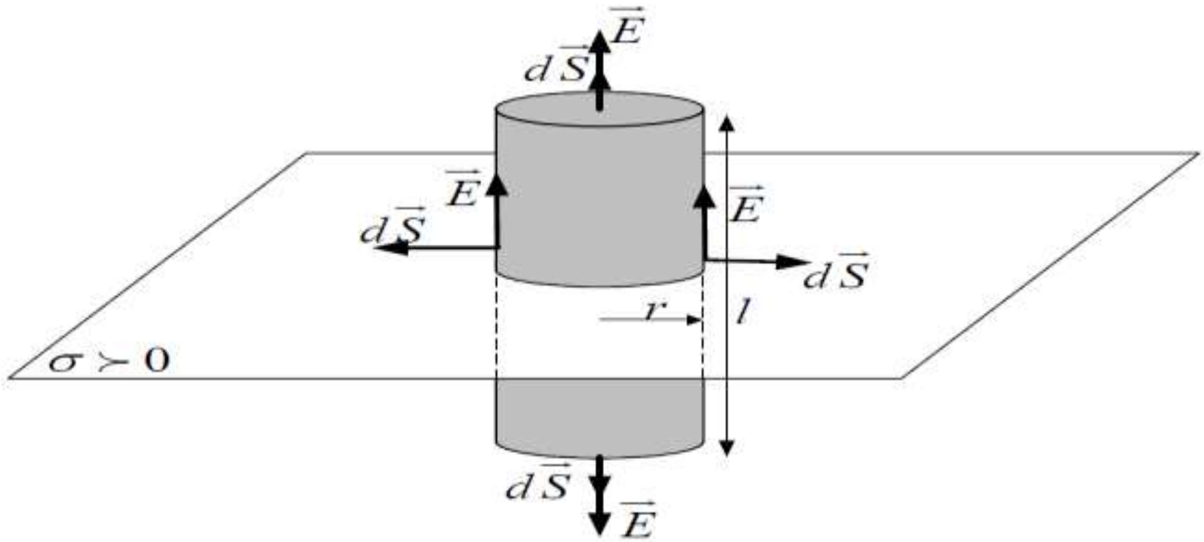
Le flux à travers la base de surface S_2 : $\Phi_2 = E.S_2$,

Le flux à travers la base latérale S_L est nul : $\left(d\vec{S} \perp d\vec{E}\right)$,

Faire attention à $\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{E_2}$ mais $E.S_1 = E.S_2$, donc :

$$\Phi = 2E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



4. CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si les charges qu'il renferment sont en état de repos.

4.1 Propriétés des conducteurs en équilibre :

• Puisque les charges à l'intérieur du conducteur en équilibre sont au repos, elles ne sont donc soumise à aucune force, cela veut dire que le champ électrostatique dans le conducteur en équilibre est nul.

$$\vec{F} = q.\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

• Le vecteur champ électrostatique est perpendiculaire à la surface du conducteur en équilibre : ceci s'explique par le fait que les lignes de champ sont, d'une part, tangentes au vecteur champ, et d'autre part perpendiculaires au plan.

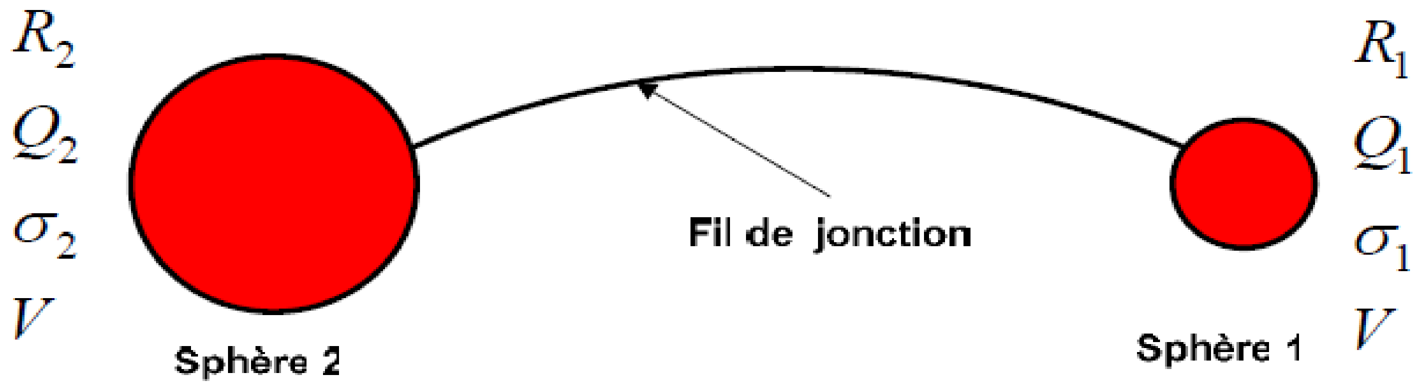
- Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel : On a déjà vu que la différence de potentiel entre deux points M et M' est définie par la relation $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$, et puisque $\vec{E} = \vec{0}$, cela implique que le potentiel est constant en tout point intérieur au conducteur en équilibre. En conséquence, la surface externe du conducteur est une surface équipotentielle, ce qui prouve que le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur.

- La charge dans le conducteur en équilibre est nulle, elle se concentre sur la surface du conducteur : En effet, et puisque le nombre de protons est égal au nombre d'électrons, la charge totale à l'intérieur du conducteur est nulle. Toutes les charges libres se répartissent sur une surface qui occupe une épaisseur constituée de quelques couches d'atomes (ici, le mot surface ne doit pas être compris au sens géométrique). Les charges électriques en mouvement s'accumulent sur la surface jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent devienne égal au champ électrique extérieur appliqué à cette surface, ce qui conduit à un état d'équilibre.

En peut résumer les propriétés du conducteur en équilibre par

$$\underbrace{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{\text{A l'extérieur du conducteur}} \qquad \underbrace{\vec{E} = \vec{0} \quad V = C^{te} \quad \sum q_i = 0}_{\text{A l'intérieur du conducteur}} \qquad \underbrace{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{A la surface et au voisinage du conducteur}}$$

Pouvoir des pointes Les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces en pointe (c'est à dire celles dont le rayon de courbure est petit). Nous allons expliquer ceci dans l'exemple représentant deux conducteurs de forme sphérique, chacun avec ses caractéristiques, reliés par un fil.



Les sphères sont au même potentiel V :

$$V = K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1 . 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2 . 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Capacité propre d’un conducteur isolé

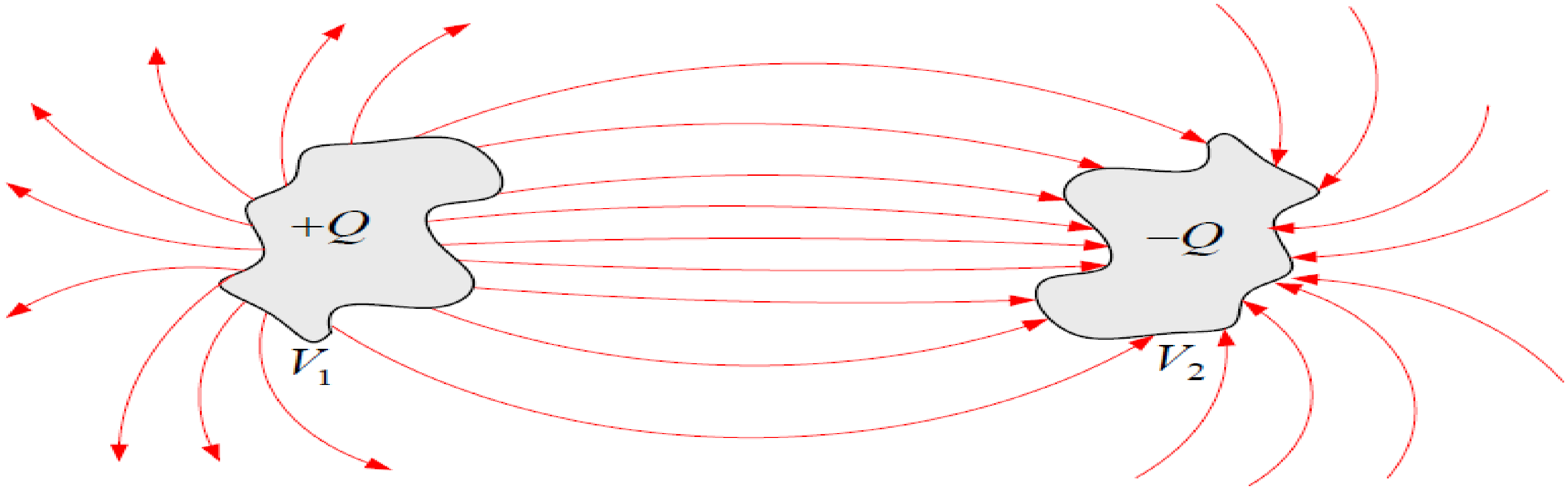
la capacité électrique d’un conducteur isolé est le rapport entre sa charge et son potentiel :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

La capacité d'un conducteur sphérique placé dans le vide, dont le potentiel est $V = K\dfrac{Q}{R}$, est égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 .R$$

Si l'isolant entourant le conducteur sphérique est autre que le vide, alors là, sa capacité est $C = 4\pi\varepsilon .R$, où ε est la permittivité de l'isolant.



L'unité de la capacité : c'est le coulomb/volt $\left(C.V^{-1}\right)$, et qu'on appelle le farad $\left(F\right)$ en mémoire à Michael Faraday (1791-1867).

Ordre de grandeurs de la capacité de quelques corps :

Pour la terre, en considérant que le rayon est $R = 6400km$, sa capacité vaut $C = 70 \propto F$.

Pour une sphère de rayon $r = 10cm$, de potentiel $V = 1000V$ par rapport à la terre, sa capacité est $C = 10\,pF$.

5. LES CONDENSATEURS

un condensateur est l'ensemble de deux conducteurs *A1 et A2 en* influence électrostatique. Il y a 2 types de condensateurs :

- A armatures rapprochées
- A influence totale

Les armatures sont séparées par un isolant qui a pour rôle d'augmenter la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose l'existence du vide entre les armatures. Le condensateur est désigné par ce nom parce qu'il fait apparaître le phénomène de la condensation des charges électriques dans une région restreinte de l'espace. Plus la capacité est grande, plus on obtient de grandes charges électriques sous de basses tensions.

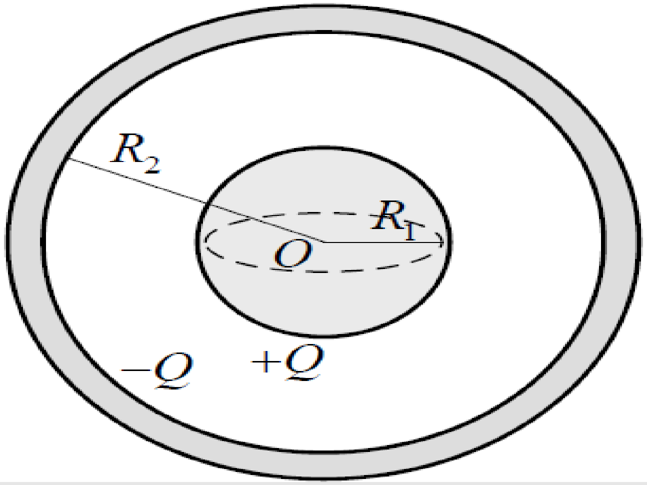
Capacités de quelques types de condensateurs :

Pour trouver la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et la tension U $\left(U = V_1 - V_2\right)$, appliquée entre les deux armatures. Pour calculer U on utilise l'expression de la circulation du champ électrique.

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

a/ Condensateur sphérique

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques et conductrices, séparées par un isolant.



$$\vec{E}_{(r)} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

On calcule la circulation du champ pour obtenir la différence de potentiel entre les deux armatures :

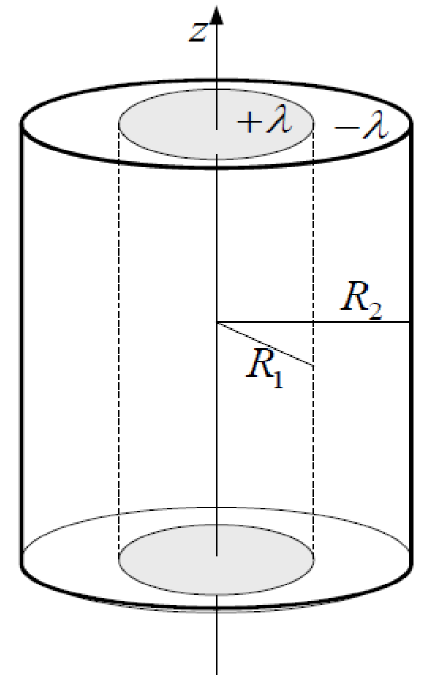
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} = KQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

A la fin on arrive à l'expression de la capacité du condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}}$$

b/ Condensateur cylindrique

Le condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux, séparés par un isolant.



Pour ce cas, on adopte les coordonnées cylindriques et on suit le même raisonnement que précédemment : D'après le théorème de Gauss, $\vec{E}$ entre les armature est :

$$\vec{E}_{(\rho)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 . \rho}\overrightarrow{u_\rho}$$

λ : le densité linéique (ou linéaire)

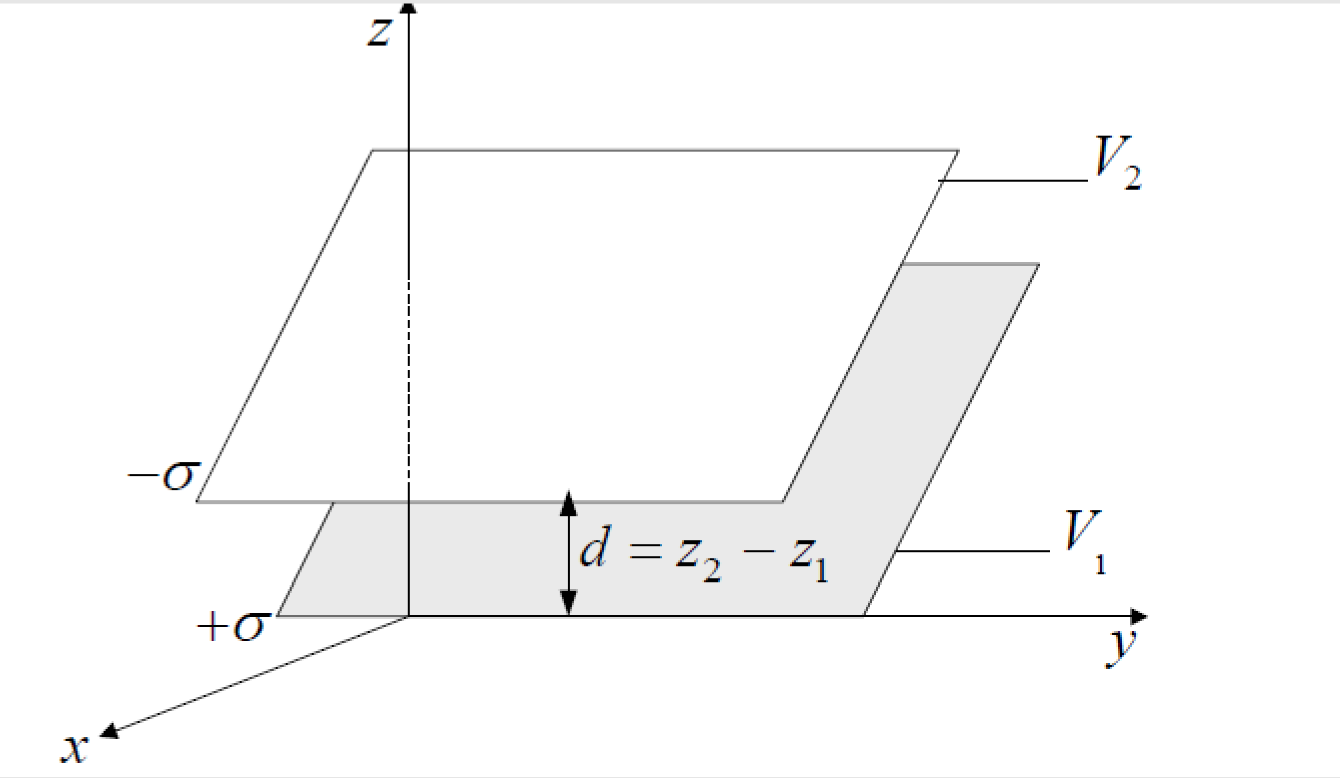
La différence de potentiel est donc :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Sachant que $Q = \lambda h$, h étant la hauteur des cylindres, la capacité du condensateur cylindrique étudié est :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda . h}{U} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 . h}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}}$$

b/ Condensateur plan



Dans ce cas, on utilise les coordonnées cartésiennes. Le champ électrostatique entre les armatures est la composition des champs résultants des deux plans infinis, soit :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} E..dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_2 - z_1) \Rightarrow U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

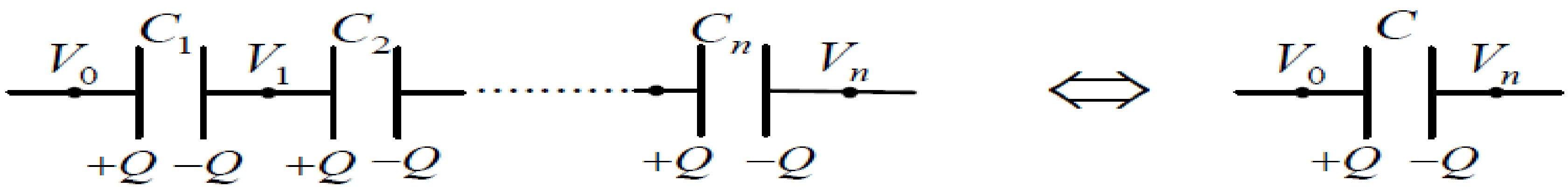
σ : Densité surfacique : $\sigma = \dfrac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma.S$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

5.2. Groupement de condensateurs

5.2.1. Groupement en série



Tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q à cause du phénomène d'influence. La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions :

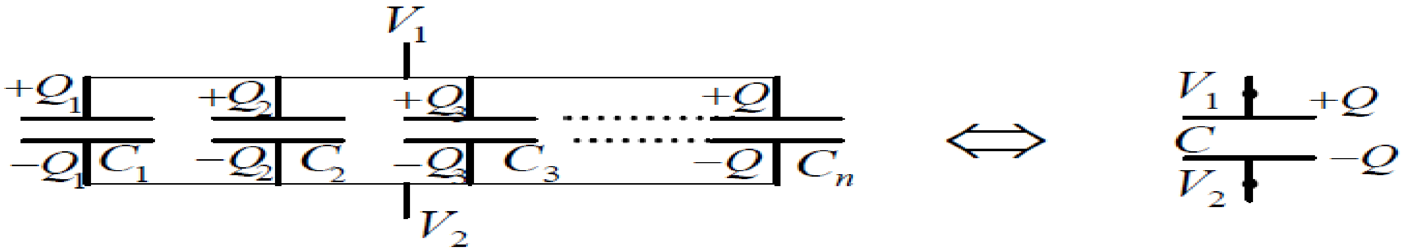
$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots\dots\dots(V_{n-1} - V_n)$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots\dots\dots \frac{Q}{C_n}$$

<u>**Résultats**</u> **:** L'inverse de la capacité équivalente est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs montés en série :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

5.2.2. Groupement en parallèle



Tous les condensateurs sont soumis à la même tension U. L'expérience prouve que la charge Q_i de chaque condensateur est proportionnelle à sa capacité C_i. La charge totale est égale à la somme des charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots Q_n$$

$$Q = C_1.U + C_2.U + \ldots\ldots\ldots\ldots C_n.U$$

$$Q = (C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots C_n).U$$

$$C.U = (C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots C_n).U$$

<u>**Résultats**</u> **:** La capacité équivalente est égale à la somme des capacités des condensateurs montés en parallèle :

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Energie d'un condensateur chargé

L'étude théorique a démontré, comme le prouvent les expériences que l'énergie emmagasinée par un condensateur chargé est proportionnelle au carré de la tension appliquée entre ses armatures. Son expression est :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C.U^2}$$

Sachant que $Q = C.U$, on peut aussi écrire :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energie du champ électrique

La charge d'un conducteur électrique nécessite la dépense d'une énergie, la raison en est que pour ajouter une charge à un conducteur on doit fournir un travail pour vaincre la force de répulsion qui résulte des charges déjà présentes sur le conducteur. Ce travail entraîne une augmentation de l'énergie du conducteur.

Soit un conducteur au potentiel $V = \dfrac{q}{C}$, de capacité C et qui porte la charge q .

Si on ajoute à ce conducteur une charge élémentaire dq , en l'amenant de l'infini, le travail fourni serait :

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

L'augmentation totale de l'énergie du conducteur, quand la charge passe de zéro à la valeur Q ,est égal à :

$$W_E = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{Q^2}{2C}}$$

Dans le cas d'un conducteur sphérique, par exemple, où $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, l'énergie du champ électrique est :

$$W_E = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$$

Densité de l'énergie électrique

On considère à titre d'exemple un condensateur plan :

Sa capacité est : $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

L'énergie qu'il emmagasine est : $W_E = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2} C U^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} U^2$

Si on divise cette énergie par le volume du condensateur, on obtient ce que l'on appelle densité de l'énergie électrique :

$$w = \frac{W_E}{v} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S U^2}{dSd} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 U^2}{d^2} \rightarrow (1)$$

On sait que l'intensité du champ électrique entre les armatures est : $E = \dfrac{U}{d}$

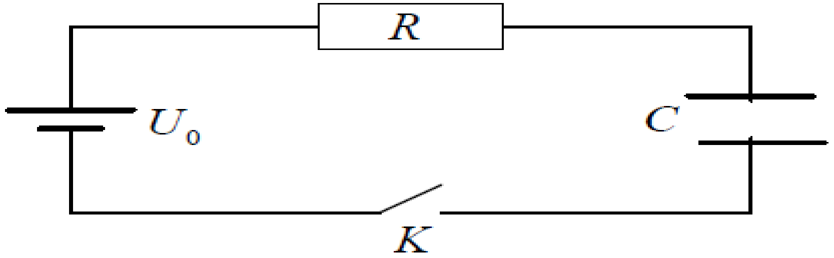
Après substitution, l'équation (1) de la densité de l'énergie électrique s'écrit :

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2}$$

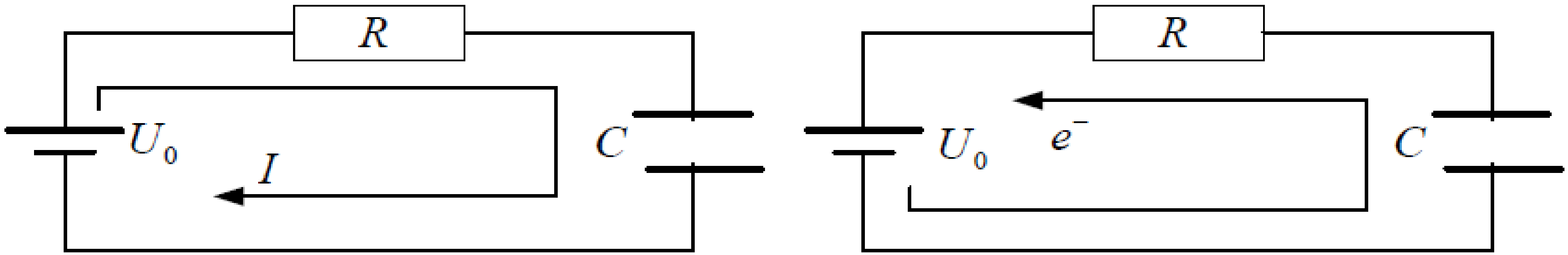
5.2.3. charge et décharge d’un condensateur à travers une résistance

Charge d’un condensateur :

Soit le montage indiqué sur la figure composé d’une résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C. On alimente l’ensemble à l’aide d’une source de tension continue U_0.



A l’instant t = 0, le condensateur est vide de charge, on ferme l’interrupteur K .
Soit i(t) l’intensité du courant électrique parcourant le circuit au temps t . Les électrons se déplacent dans le sens contraire du courant. Ces électrons quittent l’armature de haut, selon la figure précédente, et arrivent à l’armature d’en bas qui se charge négativement.
Soient
q(t)et u(t) la charge de l’armature de haut et la tension électrique entre les armatures du condensateur (les grandeurs i , q et u sont positives par convention).



La loi d'Ohm nous permet d'écrire : $U_0 = Ri + U$

Sachant que $q = CU$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$ (qui représente l'augmentation de la charge durant le temps dt).

On obtient l'équation différentielle de premier ordre :

$$U_0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow U_0C = RC\frac{dq}{dt} + q$$

Ou :

$$U_0C - q = RC\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{U_0C - q} = \frac{dt}{RC}$$

On intègre les deux membres de l'équation pour arriver à :

$$\ln(U_0C - q) = -\frac{t}{RC} + A$$

La constante d'intégration A est déterminée à partir de la condition initiale : au temps $t=0$, la charge est $q=0$, et par conséquent : $A=\ln U_0C$

D'où :

$$\ln(U_0C-q)-\ln U_0C=-\frac{t}{RC}\Rightarrow \ln\frac{U_0C-q}{U_0C}=-\frac{t}{RC}\Rightarrow \frac{U_0C-q}{U_0C}=\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Finalement, l'expression de la charge du condensateur est :

$$\boxed{q(t)=U_0C\left(1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)}$$

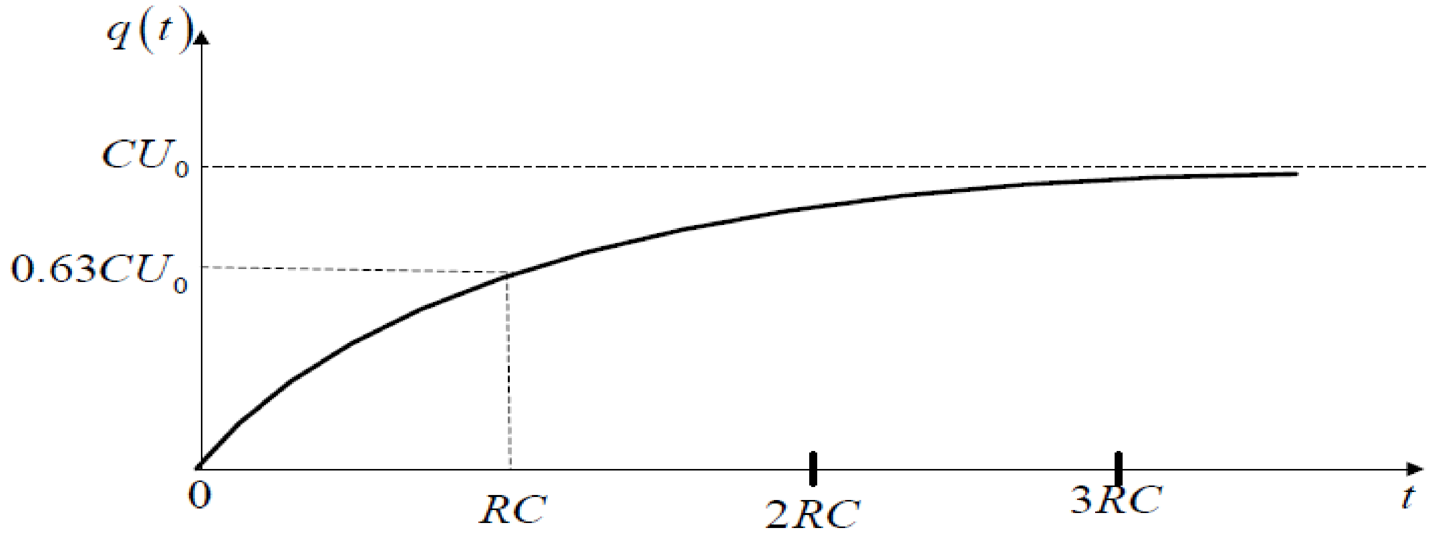
- **Définition** : On appelle constante de temps la grandeur constante :

$$\boxed{\tau=RC}$$

- **Durée de la charge ou décharge** : Les expériences ont prouvé , comme le prévoyait la théorie, que la durée de la charge ou la décharge d'un condensateur est estimée à :

$$t=5RC=5\tau\ .$$

Le graphe représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la charge



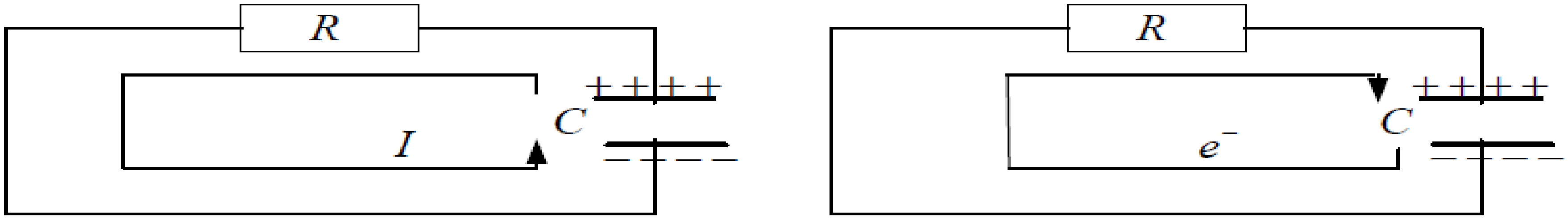
On en déduit l'intensité du courant à chaque instant $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$:

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

décharge d'un condensateur :

➢ **Décharge d'un condensateur :**

- Après que le condensateur ait atteint sa charge maximale $q_0 = CU_0$, on remplace à présent (à $t = 0$), la source de tension par un court circuit, comme il est indiqué sur la figure



Le courant a changé maintenant de sens : les électrons quittent l'armature d'en bas pour atteindre l'armature d'en haut. La charge $q(t)$ diminue au cours du temps.

En considérant toujours les grandeurs i , q et U positives par convention, on écrit la loi d'Ohm : $Ri = U$, avec $q = CU$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$.

$$-R\frac{dq}{dt}=\frac{q}{C}\Rightarrow R\frac{dq}{q}=-\frac{dt}{C}$$

$$\ln q=-\frac{t}{RC}+B$$

La constante B est déterminée par la condition initiale :

$$t=0 \quad , \quad q=q_0=\mathrm{CU}_0 \quad ; B=\ln q_0 \Rightarrow B=\ln CU_0$$

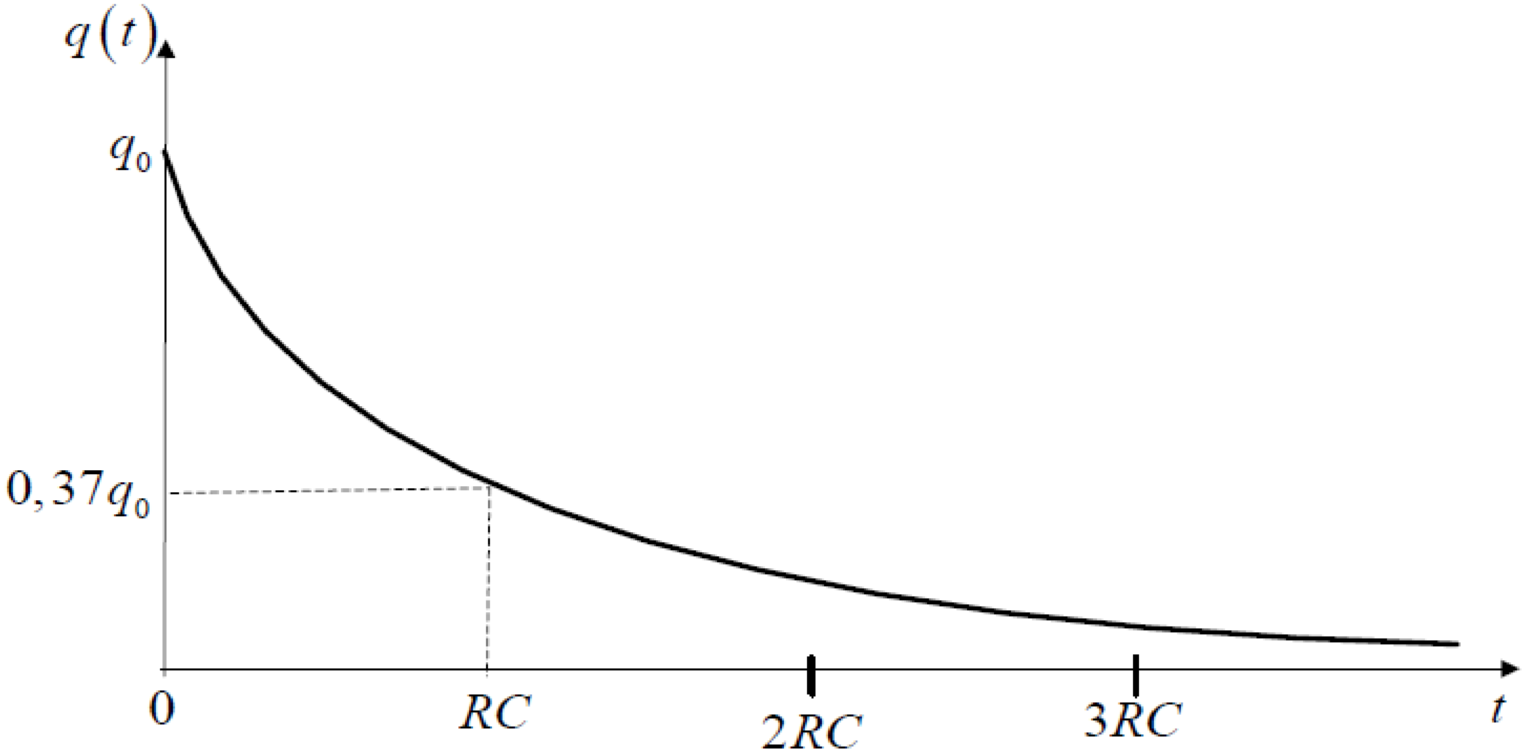
D'où :

$$\ln q=-\frac{t}{RC}+\ln CU_0 \Rightarrow \ln\frac{q}{CU_0}=-\frac{t}{RC}$$

Donc les expressions de la charge et de l'intensité du courant instantanées sont respectivement :

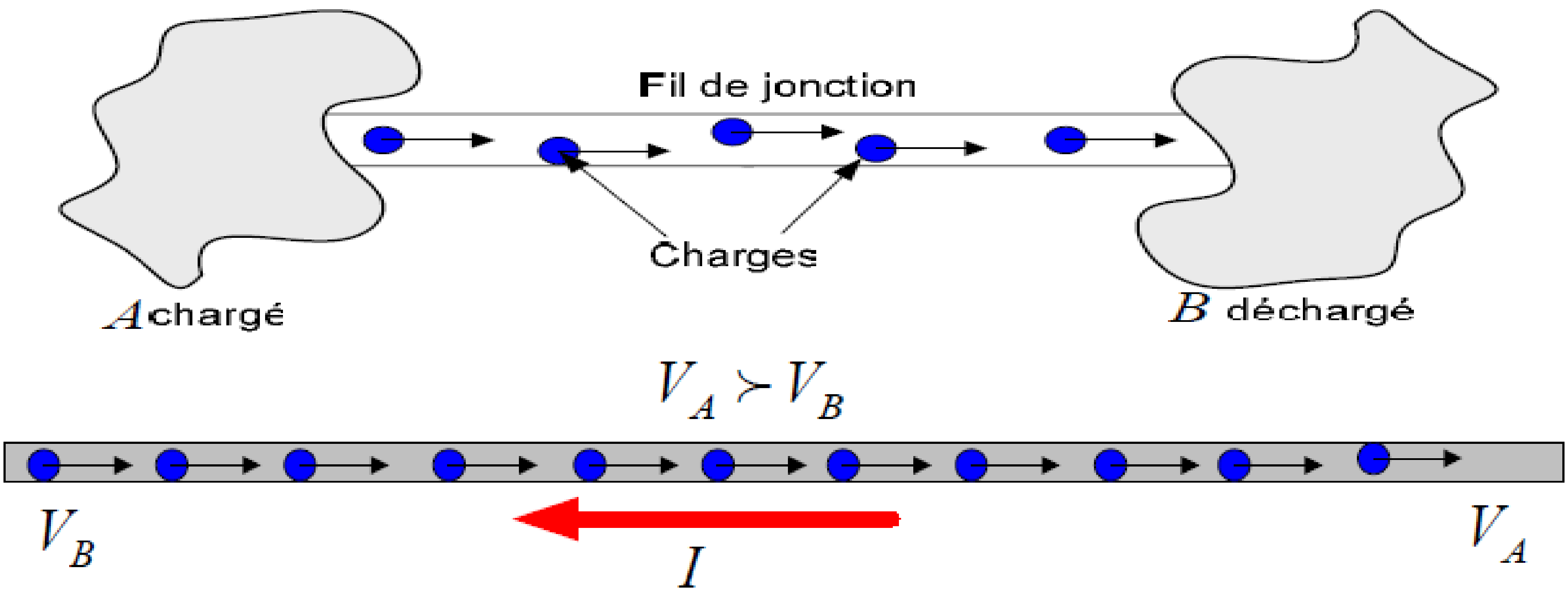
$$\boxed{q=CU_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

$$i=-\frac{dq}{dt}\Rightarrow \boxed{i=\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$


$q(t)$
q_0
$0,37q_0$
0
RC
$2RC$
$3RC$
t

Le courant électrique

La figure représente deux corps, B non chargé et en état d'équilibre, et A chargé par l'une des méthode d'électrisation. Relions les deux corps par l'intermédiaire d'un fil de jonction. Le corps B se charge, c'est-à-dire qu'il acquiert une charge élémentaire dQ en un temps très bref dt , ainsi il perd son équilibre électrostatique temporairement.



Densité de courant électrique

- **Définition** : La densité du courant électrique est la grandeur $\vec{J}$ qui est égale à la charge par unité de temps à travers l'unité de surface :

$$dQ = \vec{J}.dt.d\vec{S}$$

Si $\vec{S}$ représente le vecteur surface de la section transversale du conducteur, et qui est colinéaire au vecteur $\vec{J}$, l'intensité du courant est donc la grandeur scalaire :

On exprime l'unité de la densité de courant par **ampère par mètre carré** $\left(A.m^{-2}\right)$.

Relation entre le champ électrique et la densité de courant électrique:

On considère une portion $AB = l$, d'un conducteur, traversé par un courant électrique d'intensité I. Le passage d'un courant électrique implique obligatoirement l'existence d'une différence de potentiel entre les points A et B.

Nous savons comment calculer la différence de potentiel appliquée entre deux points :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

Si le conducteur est un fil de section S, le champ électrostatique est uniforme sur toute la portion AB.

Puisque $U = E.l$, On a :

$$U = R.I = E.l \Rightarrow RJS = E.l$$

Ainsi, on obtient une nouvelle expression de la densité de courant :

$$\boxed{J = \frac{l}{S.R}E}$$

On pose

$$\sigma = \frac{l}{S.R} = C^{te}$$

On appelle cette constante :**conductivité électrique** du matériau conducteur, son unité est $\left(\Omega^{-1}.m^{-1}\right)$.

La conductivité dépend des propriétés microscopiques de la matière conductrice, c'est une quantité locale utile qui permet de distinguer les propriétés électriques de la matière.

L'inverse de la conductivité s'appelle **résistivité électrique** du conducteur (ou résistance spécifique) :

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R.S}{l}}$$

Son unité est l'**ohm.mètre** $(\Omega.m)$.

Ainsi, l'expression de la résistance d'un conducteur peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma.S} = \rho\frac{l}{S}}$$

Effet joule

D'après la définition du potentiel électrique, le travail dW effectué par la charge élémentaire dq se déplaçant entre les deux points entre lesquels règne une différence de potentiel électrique (ou tension) U est :

$$dW = U.dq$$

On définit, de façon générale (en électricité comme en mécanique), la puissance comme étant le travail effectué par unité de temps, soit :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Dans notre cas, nous avons :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U.dq}{dt} = U.I$$

Donc, on peut écrire :

$$\boxed{P = U.I}$$

D'après la définition de l'énergie, on en déduit que, l'énergie E que produit une source, ou l'énergie consommée par une résistance pendant le temps t est égale à :

$$E = U.I.t = R.I^2.t = \frac{U^2}{R}.t$$

L'unité de l'énergie est le joule (J).

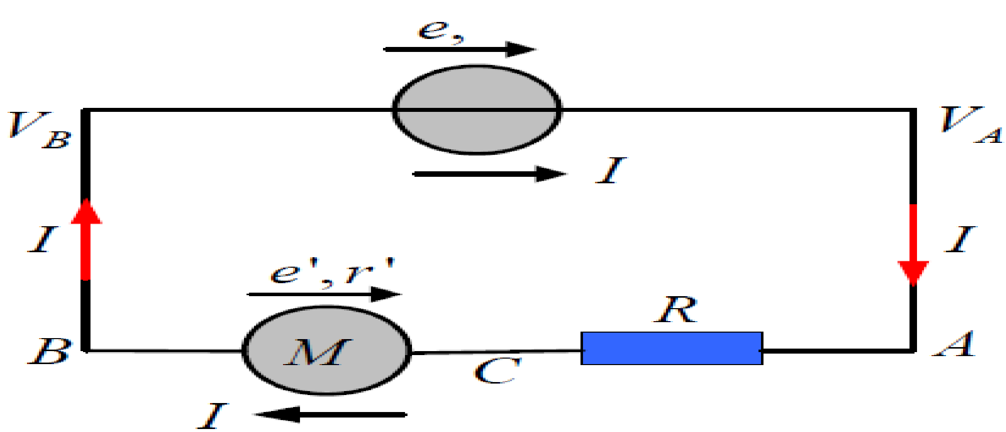
Les lois régissant les circuits électriques

Equation du circuit électrique

Soit le circuit représenté sur la figure composé d'un générateur (de force électromotrice e et de résistance interne), d'une résistance externe R, et d'un moteur M (de force contre électromotrice e' et de résistance interne r').

Le générateur produit une puissance électrique : $P = e.I$

Le conducteur Ohmique (R) transforme l'énergie électrique en énergie calorifique, dont la valeur est RI^2. La résistance interne du générateur consomme à son tour une



D'après le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie produite est égale à l'énergie consommée :

$$eI = e'I + RI^2 + rI^2 + r'I^2$$

D'où, l'intensité du courant qui parcourt le circuit :

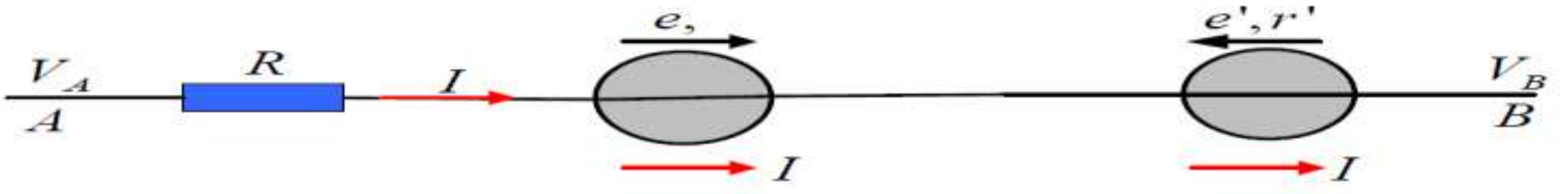
$$I = \frac{e - e'}{R + r + r'}$$

Dans le **cas général**, si on note par les résistances internes et par R les résistances externes, on a :

$$\boxed{I = \frac{\sum e}{\sum r + \sum R}}$$

L'intensité du courant électrique dans le circuit électrique est égale à la somme algébrique des forces électromotrices divisée par la somme de toutes les résistances. Cette relation est appelée : **équation du circuit électrique.**

Différence de potentiel entre deux points d'un circuit (ou loi généralisée d'Ohm)



$R=\sum R_i$: désigne la résistance totale de la portion AB (conducteurs ohmiques, fils de jonction, les résistances internes des générateurs et récepteurs…etc).

$e=\sum e_i$: désigne la somme algébrique de toute les forces électromotrices (y compris les forces contre électromotrices).

La puissance produite entre les points A et B est égale à :

$$UI+\left(\sum e_i\right).I$$

Dans les résistances la puissance consommée est :

$$\left(\sum R_i\right).I^2$$

Si on égalise les deux puissances produite et consommée, selon le principe de la conservation de l'énergie, on aura :

$$UI+\left(\sum e_i\right).I=\left(\sum R_i\right).I^2$$

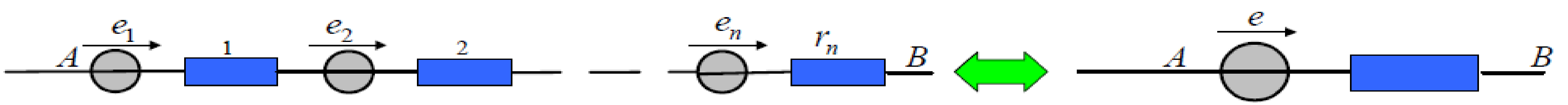
Finalement, on obtient la loi qu'on appelle : **loi d'Ohm généralisée** :

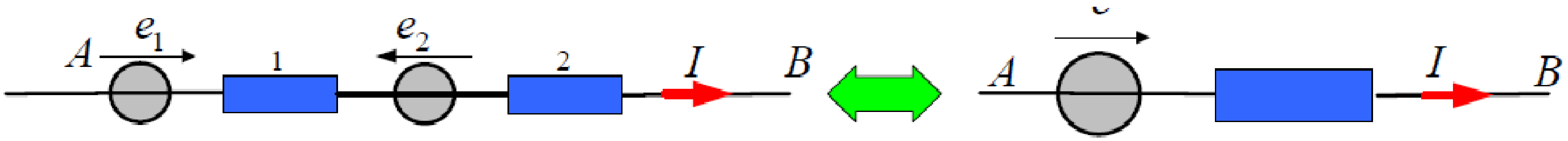
$$\boxed{V_A - V_B = U = \left(\sum R_i\right).I - \sum e_i}$$

Groupement de générateurs

a/ Cas des générateurs de tension : Chaque générateur est caractérisé par une force électromotrice e_i et une résistance interne $_i$.

$$\boxed{r = \sum_i r_i} \quad \boxed{e = \sum_i e_i}$$





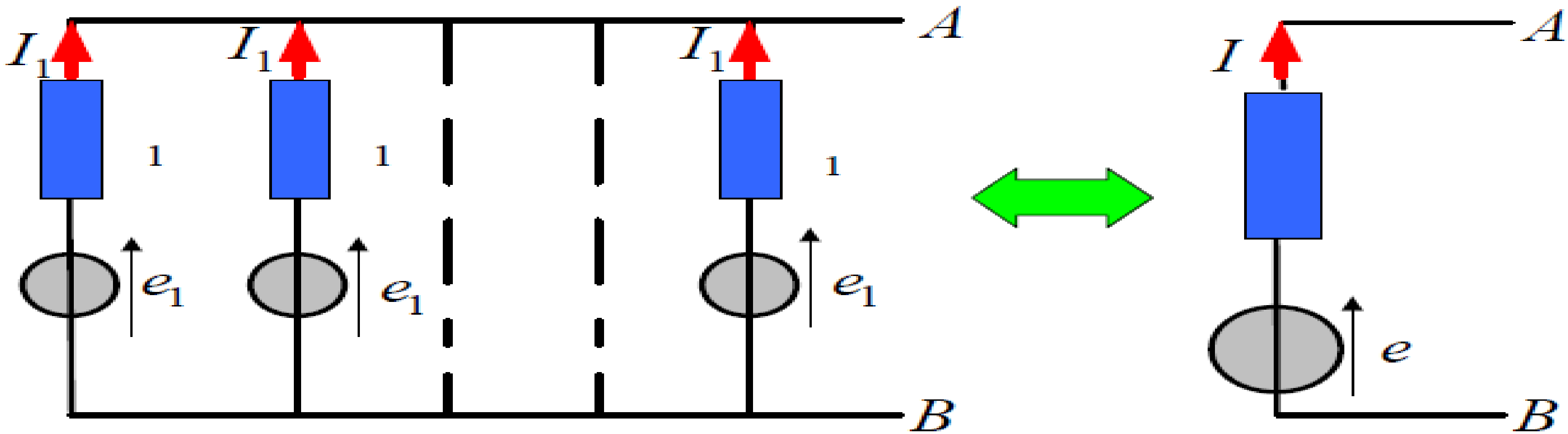
$e_1 \succ e_2$

On considère le récepteur (un moteur par exemple), comme étant un générateur monté en opposition avec le générateur effectif, et le générateur monté en opposition jouant le rôle de récepteur (ou moteur). Le générateur de plus grande force électromotrice s'impose en tant que générateur. D'où :

$$\boxed{e_1 \succ e_2 \Rightarrow e = e_1 - e_2}$$

$$\boxed{r = r_1 + r_2}$$

Association en série



Dans ce cas, la force électromotrice du générateur équivalent est égale à la force électromotrice d'un générateur du groupement, et l'inverse de la résistance équivalente est égal à la somme des inverses des résistances internes.

$$\boxed{I = nI_1} \;;\; \boxed{e = e_1} \;;\; \boxed{\frac{1}{r} = \sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{n}{r_1}}$$

4/Les lois de Kirchhoff:

a/loi des nœuds

En un nœud d'un circuit, la somme des intensités entrant est égale à la somme des intensités sortant :

$$\boxed{\sum I_s = \sum I_e}$$

Cela signifie que les charges ne s'accumulent pas, elles s'écoulent en un nœud du réseau, elles obéissent à la règle de la conservation de la charge.

b/ Conservation de l'énergie ou loi des mailles

En une maille k d'un circuit électrique, la somme algébrique des produits de résistance par l'intensité du courant ($\sum_{k=1}^{n} R_k . I_k$) est égale à la somme algébrique des forces électromotrices ($\sum_{k=1}^{n} e_k$).

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} R_k . I_k}$$