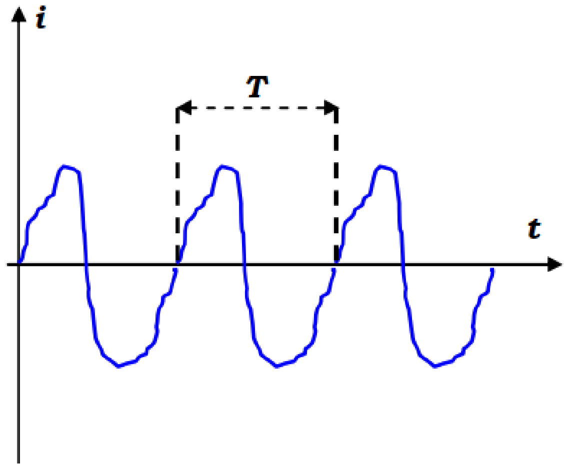
II. LES COURANTS ALTERNATIFS.
II.1 Définitions.

Un courant est alternatif s'il change de sens au cours du temps t ; en outre, il est périodique si son intensité i reprend la même valeur à des intervalles de temps égaux à T. On a alors :

$$i = f(t) = f(t + nT)$$



n est un nombre entier.
T est la *période* et son inverse f est la *fréquence* :

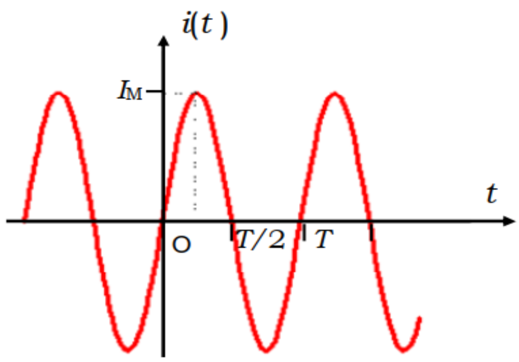
$$f = 1/T$$

La période est mesurée en *secondes* et la fréquence en *hertz* (*Hz*).

1.2. Les courants sinusoïdaux.

Un courant alternatif est sinusoïdal, lorsque son intensité est une fonction sinusoïdale du temps :

$i = I_M \sin(\omega t + \varphi)$ ou $i = I_M \cos(\omega t + \varphi)$



i est la valeur instantanée du courant,

I_M sa valeur maximale ou amplitude,

ω la pulsation ou fréquence angulaire et φ la phase :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

Remarque : On peut de la même façon utiliser une fonction $Cosinus$ plutôt qu'une fonction $Sinus$ pour représenter un signal électrique en effet ;

Exemple : Tension

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi_u) = u(t) = U_M \cos\left(\omega t + \varphi_u - {}^{\pi}/_{2}\right)$$

Intensité efficace. La valeur efficace d'un courant alternatif est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période. Elle s'écrit :

Valeur Moyenne :

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal à travers une période est :

$\langle u \rangle = U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = 0$ car il s'agit d'une fonction alternative.

Valeur efficace :

La valeur efficace d'une tension (ou d'un courant) sinusoïdale correspond à la quantité de tension continue U (ou de courant I) qui produirait un échauffement identique dans une résistance (**même puissance dissipée**)

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt}$$

Dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, on obtient: $I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

Dans le cas d'une tension alternative sinusoïdale, on obtient : $U_{eff} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$

Démonstration : soit une résistance R parcourue par un courant continu I. La puissance dissipée dans cette résistance est alors :

$$\boldsymbol{P_{CC} = U.I = U^2/R}$$

$\boldsymbol{P_{cc}}$: **P**uissance dissipée en **C**ourant **C**ontinu.

En courant alternatif (AC), la puissance dissipée dans la résistance est variable :

$$\boldsymbol{P(t)_{CA} = u(t).i(t) = u(t)^2/R}$$

$\boldsymbol{P(t)_{CA}}$: **P**uissance dissipée en **C**ourant **A**lternatif

La puissance dissipée sur une période T est alors :

$$\boldsymbol{\langle P(t) \rangle = P_{CA} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt}$$

En faisant égaler ces deux puissances :

$$\boldsymbol{P_{CC} = P(t)_{CA} \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt = U^2/R}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt \Rightarrow U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt}}$$

D'où l'expression de la valeur efficace d'un signal périodique quelconque :

$$\boldsymbol{U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt}}$$

Exemple : $u(t) = U_M \sin(\omega\ t + \varphi_u)$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(U_M \sin(\omega\ t + \varphi_u)\right)^2 dt}$$

En utilisant les deux relations trigonométriques suivantes afin d'enlever le carré du sinus

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2 \ldots\ldots..1$$

$$\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x) \ldots\ldots.2$$

Remplaçons $\cos(x)^2$ dans la deuxième équation :

$$1 - \sin(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin(x)^2 = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sin(\omega\ t + \varphi_u)^2 = \frac{1-\cos(2(\omega\ t + \varphi_u))}{2}}$$

notre fonction d'intégrale devient comme suit

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T {U_M}^2 \left(\boldsymbol{\frac{1-\cos(2(\omega\ t + \varphi_u))}{2}}\right) dt}$$

Et

$${U_{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T {U_M}^2 \left(\frac{1-\cos\left(2(\omega\ t + \varphi_u)\right)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{{U_M}^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(2(\omega\ t + \varphi_u)\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{{U_M}^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2} - \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\cos\left(2(\omega\ t + \varphi_u)\right)}{2}$$

L'intégral de la deuxième partie égale zéro $\int_0^{T} \frac{\cos\left(2(\omega\, t+\varphi_u)\right)}{2} = 0.$ c'est la valeur moyenne d'une grandeur alternative.

Donc

$$U_{eff}^{\ 2} = \frac{U_M^{\ 2}}{T}\left[\frac{t}{2}\right]_0^T = \frac{U_M^{\ 2}}{T}\left[\frac{T}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{U_M^{\ 2}}{T}\frac{T}{2} = \frac{U_M^{\ 2}}{2}$$

De cette façon on a pu démontrer l'expression de la valeur efficace :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_M^{\ 2}}{2}} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$$

N.B : la tension efficace fournie aux prises murales intérieures en Algérie est $V_{eff} = 230\ V$ à une fréquence $f\ = 50Hz.$

Exemple

$u(t) = \ 14.14 \sin(378\ \ t + 0.52)$

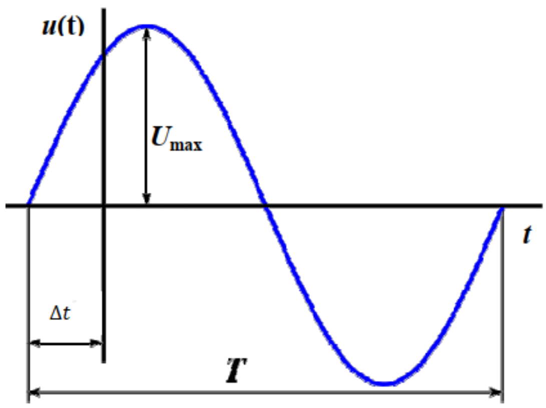
De cette fonction on peut déduire :

$$\omega = 378\, rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 60\ Hz \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 16.66\ ms$$

$$\varphi_u = 0.52\, rad \ \longrightarrow\ \varphi_u = 30^0$$

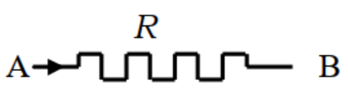
$$U_M = 14.14 \ \longrightarrow\ U_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{2}} = 10\ V$$

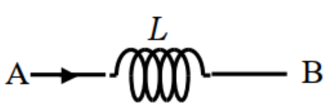


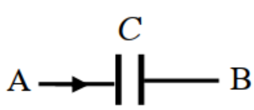
$$\varphi_u = \Delta t.\omega = 0.52\, rad \Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi_u}{\omega} = \frac{0.52}{378} = 0.0013s$$

LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL.

Les lois d'Ohm s'appliquent au courant alternatif sinusoïdal. Elles s'expriment, à chaque instant3, dans le cas d'éléments simples, comme suit :





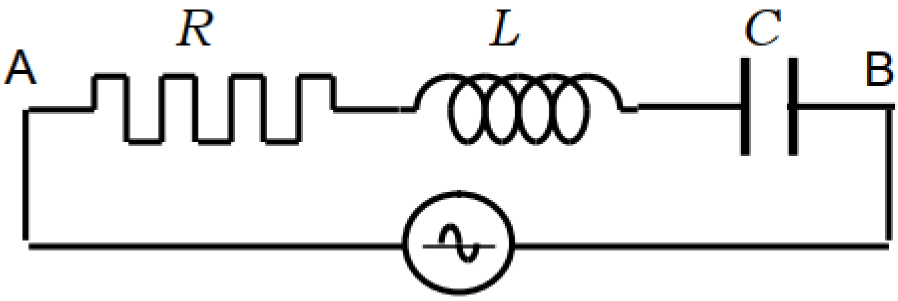


$u_A - u_b = R\ i$

$u_A - u_b = L\frac{di}{dt}$

$u_A - u_b = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}\int i\ dt$

La mise en série des trois éléments *R*, *L* et *C* est représentée par le circuit de la figure ci-dessous :



On applique, aux bornes de A et B du circuit une tension : $u(t) = U_M \sin(\omega \, t + \varphi_u)$

$$u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt$$

Représentation de Fresnel des grandeurs électriques

Définition

La représentation de **Fresnel** est une représentation graphique des grandeurs électriques sinusoïdales. C'est un outil graphique permettant d'effectuer les déférentes opérations s'effectuant sur les fonctions sinusoïdales de même fréquence comme l'adition, la soustraction la dérivation et l'intégration. Dans cette représentation, on associe à toute grandeur électrique $\boldsymbol{u(t) = U_M \sin(\omega \, t + \varphi_u)}$ un vecteur $\vec{V}$ qui tourne à la vitesse angulaire autour de l'origine (voir la figure suivante). A chaque instant, la grandeur sera égale à la projection du vecteur sur un axe de référence.