Notation complexe des grandeurs électriques

Nous allons voir que l'utilisation des nombre complexes, dont la représentation est semblable aux vecteurs, est plus avantageuse car les opérations sont plus simples à effectuer.

Rappels sur les nombres complexes

Un nombre complexe $\underline{z}$ est défini par l'équation :

$$\underline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$$

Ou $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dont des réels et $\boldsymbol{j}$ un nombre imaginaire tel que : $\boldsymbol{j} = \sqrt{-\mathbf{1}}, et\ (\boldsymbol{j}^2 = -\mathbf{1})$

$\boldsymbol{a}$ Représente la partie réelle de $\underline{z}$ on note $\boldsymbol{a} = \mathcal{R}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})$.

$\boldsymbol{b}$ Représente la partie réelle de $\underline{z}$ on note $\boldsymbol{b} = \mathbf{I}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{z})$.

<u>Remarque :</u> la lettre $\boldsymbol{j}$ est utilisée ici en remplacement de la lettre $\boldsymbol{i}$ (habituellement utilisée en mathématique) pour éviter la confusion avec le symbole $'\boldsymbol{i}'$ du courant.

<u>Module et argument</u>

Le module ou **la norme** de $\underline{z}$ est **:** $\boldsymbol{Z} = |\underline{\boldsymbol{z}}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

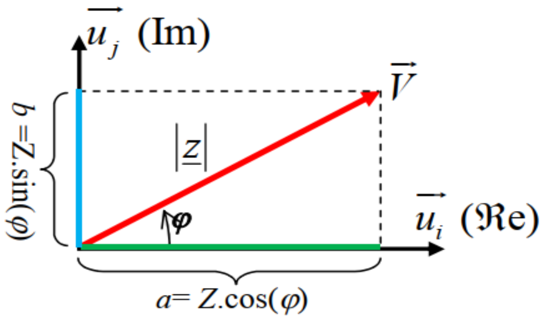
L'argument de $\underline{z}$ est φ tel que $tg(\varphi) = \frac{\mathbf{I}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{z})}{\mathcal{R}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})}$.

Représentation graphique d'un nombre complexe

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\vec{u_i}, \vec{u_j})$, on peut associer au complexe $\underline{z}$ le vecteur :

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{b}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{j}}$$

On dit alors que $\underline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$ est l'affixe de vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$



La forme vue précédemment $\underline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$ mettant en évidence les parties réelles et imaginaires de z est appelé forme algébrique. L'utilisation du module Z et de l'argument φ donne lieu à deux autres formes :

La forme trigonométrique :

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{cos}(\varphi) + \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{sin}(\varphi))}$$

La forme exponentielle :

$$\boxed{\underline{z} = Ze^{j\varphi}}$$

<u>Quelques relations remarquables</u>

φ	$cos(\varphi)$	$sin(\varphi)$	$a = Zcos(\varphi)$	$b = Zsin(\varphi)$	$\underline{z} = Ze^{j\varphi}$	$e^{j\varphi}$
0	1	0	Z	0	Z	1
$\frac{\pi}{2}$	0	+1	0	Z	jZ	j
$-\frac{\pi}{2}$	0	-1	0	$-Z$	$-jZ$	$-j$

Complexe conjugué

On définit le complexe conjugué de $\underline{z}$ ($\underline{z} = a + jb = Ze^{j\varphi}$) comme suit :

$$\underline{z} = a - jb = Ze^{-j\varphi}$$

Propriétés des opérations entre les nombres complexes

Soit deux nombres complexes : $\underline{z_1} = a_1 + jb_1 = Z_1e^{j\varphi_1}$ **et** $\underline{z_2} = a_2 + jb_2 = Z_2e^{j\varphi_2}$

Les nombres complexes obéissent aux mêmes règles de calcul que celles effectuées sur les nombres réels (addition, soustraction, multiplications et division). On obtient ainsi les relations suivantes

<u>Addition (ou soustraction)</u>

$z = \underline{z_1} + \underline{z_2}$ alors

$\underline{z} = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1+a_2) + j(b_1 + b_2)$

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres complexes on utilise de préférence la notation cartésienne.

<u>Produit</u>

$z = \underline{z_1} * \underline{z_2}$ alors

$$\underline{z} = Z_1e^{j\varphi_1} * Z_2e^{j\varphi_2} = Z_1 * Z_2 * e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Pour calculer le produit de deux nombres complexes on utilise de préférence la notation polaire.

Le module du produit est égal au produit des modules.

L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

Division

$$\underline{z} = {}^{\underline{z}_1}/_{\underline{z}_2}$$

$$\underline{z} = {}^{\mathbf{Z_1 e^{j\varphi_1}}}\Big/_{\mathbf{Z_2 e^{j\varphi_2}}} = \frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}\mathbf{e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

Pour calculer le rapport de deux nombres complexes on utilise de préférence la notation polaire.

Le module de la division est égal au rapport des modules.

L'argument de la division est égal à la différence des arguments.

Représentation complexe des grandeurs électriques

Soit la grandeur sinusoïdale : $x(t) = X\sin(\omega\ t + \varphi_x)$

En notation complexe $x(t)$ sera représentée par le complexe :

$$\underline{x} = Xe^{j(\omega\ t+\varphi_x)} = Xe^{j\varphi_x}\, e^{j\omega t} = \underline{X}e^{j\omega t}$$

$\underline{X} = Xe^{j\varphi_x}$ est le module complexe.

Il ya lieu de noter que la grandeur électrique traitée $x(t)$ ne constitue qu'une partie du nombre complexe $\underline{x}$ en effet

$$\underline{x} = Xe^{j(\omega\ t+\varphi_x)} = Xcos(\omega\ t + \varphi_x) + jX\sin(\omega\ t + \varphi_x)$$

Si la grandeur électrique est écrite en fonction du cosinus elle sera représentée par la partie réelle di nombre complexe $x(t) = \Re e(x)$, et si elle est écrite sous forme de sinus elle sera représentée par la partie imaginaire du nombre complexe $x(t) = Im(x)$.

Dans la représentation vectorielle des grandeurs électriques la rotation des vecteurs (du à la pulsation $\boldsymbol{\omega}$) est omise (négligée), ce qui permet de prendre en compte que les phases à l'origine. De même, le terme $\boldsymbol{e^{j\omega t}}$, commun à toutes les grandeurs sinusoïdales, est lui aussi ignoré car s'éliminant tout seul dans les différentes opérations sur les grandeurs électrique (loi de mailles, loi des nœuds…..) néanmoins, ce terme doit apparaitre lorsqu'il s'agit d'effectuer une opération de dérivation ou d'intégration.

L'amplitude complexe $\underline{X} = Xe^{j\varphi_x}$, c'est la notation raccourcie du complexe $\underline{x}$ (représentant le signal $x(t)$ qui contient les deux information essentielles du signal à savoir l'amplitude X et la phase à l'origine φ

On utilise aussi la notation angulaire suivante : $\underline{X} = X\angle\varphi$

$$\boxed{\textbf{Donc } \underline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\angle\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{X}e^{\boldsymbol{j\varphi}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{cos\varphi} + \boldsymbol{j}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi})}$$

Représentation d'une tension :

$$u(t) = U\sin(\omega\ t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{u} = Ue^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u \qquad [\boldsymbol{V}]$$

$$i(t) = I\sin(\omega\ t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{i} = Ie^{j\varphi_i} = U\angle\varphi_u \qquad [\boldsymbol{A}]$$

Représentation d'une impédance :

L'impédance complexe est représentée par $\underline{z} = Ze^{j\varphi}$

Z est l'impédance en ohms (Ω)

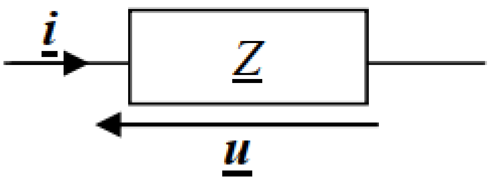
φ est le déphasage entre le courant et la tension.

Application des complexes en électricité

Toutes les relations que nous avons vues en régime alternatif sinusoïdal utilisant la représentation instantanée restent valables en représentation complexe ; loi d'ohm, loi des mailles, loi des nœuds, etc.

<u>Loi d'ohm</u>

$$\underline{u} = \underline{i} * \underline{z}$$



Soit $\begin{cases} \underline{u} = Ue^{j\varphi_u} \\ \underline{i} = Ie^{j\varphi_i} \end{cases}$

Alors $\underline{z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$

Soit $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ l'impédance complexe du dipôle.

Z est le module de l'impédance en ohms **Ω** $Z = {}^{U}/_{I}$

φ est le déphasage provoquée par le dipôle entre u à ses bornes et le courant i qui le traverse $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

On peut aussi écrire la forme cartésienne de $\underline{Z}$:

$$\underline{z} = Ze^{j\varphi} = Z(cos\varphi + j\ sin\varphi) = R_Z + jX_Z$$

Avec $\begin{cases} R_Z = Z(cos\varphi)\ est\ la\ partie\ réelle\ de\ \underline{z}\ , est\ une\ résistance\ \ (\boldsymbol{\Omega}) \\ X_Z = Z(j\ sin\varphi) est\ la\ partie\ imaginaire\ \ de\ \underline{z}\ , est\ une\ réactance\ (\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$

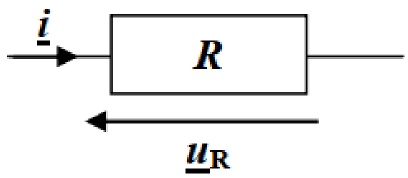
$$Z = |\underline{z}| = \sqrt{{R_Z}^2 + {X_Z}^2}$$

$$\varphi = atg\left(\frac{X_Z}{R_Z}\right) = atg\left(\frac{Im_Z}{Re_Z}\right)$$

<u>Loi d'ohm pour un conducteur ohmique (résistif)</u>

$$\underline{u_R} = Z_R$$

$$Ue^{j\varphi_u} = RIe^{j\varphi_i}$$



Ce qui permet d'écrire $U = RI,\ \varphi_u = \varphi_i$

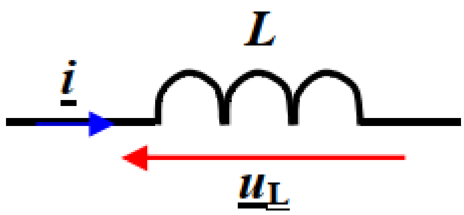
$$\Rightarrow \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$$

L'impédance Z_R est un réel pur

Loi d'ohm pour un conducteur inductif (pour une inductance)

Nous avons $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \underline{u_L} = L\frac{d\underline{i}}{dt}$$



Dans cette relation le courant i est dérivé par rapport au temps, on doit donc écrire son expression complexe à savoir $\underline{i} = Ie^{j(\omega\, t+\varphi_i)}$

$$\Rightarrow \underline{u_L} = L\frac{d\underline{i}}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{u_L} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = LI\frac{de^{j(\omega\, t+\varphi_i)}}{dt} = LI(j\omega)e^{j(\omega\, t+\varphi_i)} = jL\omega Ie^{j(\omega\, t+\varphi_i)}$$

$$\Rightarrow \underline{u_L} = jL\omega\, \underline{i}$$

Sachant que $\underline{u} = \underline{i} * \underline{z_L} \Rightarrow \underline{z_L} = jL\omega = L\omega e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_L = X_L = L\omega \\ \varphi_z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

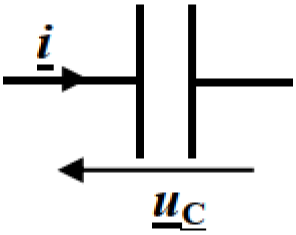
$$\boxed{\text{L'impédance } Z_L \text{ est un imaginaire positif pur}}$$

Loi d'ohm pour un conducteur capacitif (pour une capacité)

Nous avons $u_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

$$\Rightarrow \underline{u_C} = \frac{1}{C}\int I e^{j(\omega\, t+\varphi_i)}dt = \frac{1}{jC\omega}e^{j(\omega\, t+\varphi_i)}$$

$$\Rightarrow \underline{u_C} = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{i}$$



Sachant que $\underline{u} = \underline{i} * \underline{z_c} \Rightarrow \underline{z_C} = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_c = X_c = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi_z = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

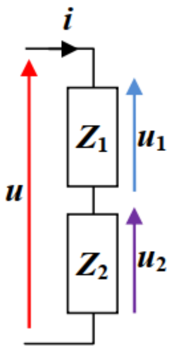
$$\boxed{\text{L'impédance } Z_c \text{ est un imaginaire négatif pur}}$$

Association de dipôles –impédance équivalentes

Association série

D'après la loi des mailles

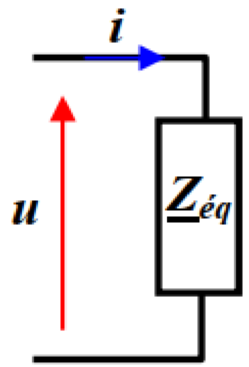
$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$$



Avec $\underline{u}_1 = \underline{z}_1 * i$ **et** $\underline{u}_2 = \underline{z}_2 * i$

$$\Rightarrow \underline{u} = \underline{z}_1 * i + \underline{z}_2 * i = (\underline{z}_1 + \underline{z}_2) * i = \underline{Z} * i$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underline{Z}_{équivalente}$$

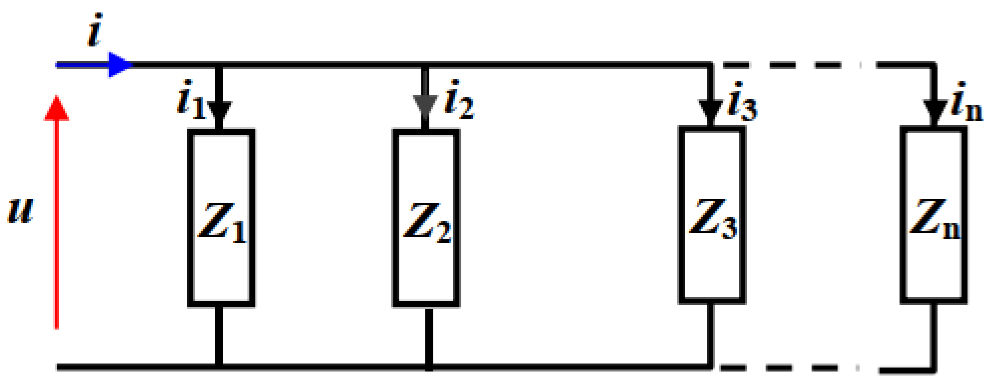


De la même manière, on peut démontrer que pour n dipôles en série :

$$\underline{Z}_{équivalente} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i$$

L'impédance équivalente de plusieurs dipôles en série est la somme des impédances de tous ces dipôles.

<u>Association parallèle :</u>



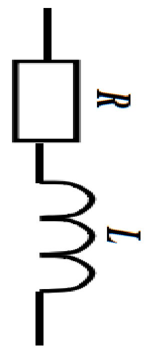
D'après la loi des nœuds $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3$ avec $\underline{i}_i = {}^{\underline{u}}/_{\underline{Z}_i}$

$$\Rightarrow \underline{i} = {}^{\underline{u}}/_{\underline{Z}_1} + {}^{\underline{u}}/_{\underline{Z}_2} + {}^{\underline{u}}/_{\underline{Z}_3} + \cdots {}^{\underline{u}}/_{\underline{Z}_n} = \left({}^{1}/_{\underline{Z}_1} + {}^{1}/_{\underline{Z}_2} + {}^{1}/_{\underline{Z}_3} + \cdots \ldots {}^{1}/_{\underline{Z}_n}\right) * \underline{u} = \frac{1}{\underline{Z}_{equi}}\underline{u}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{equi}} = {}^{1}/_{\underline{Z}_1} + {}^{1}/_{\underline{Z}_2} + {}^{1}/_{\underline{Z}_3} + \cdots \ldots {}^{1}/_{\underline{Z}_n} = \sum_{i=1}^{n} {}^{1}/_{\underline{Z}_i}$$

<u>Exemple d'application</u>

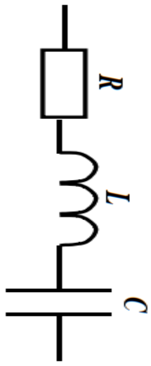
<u>Dipôle R , L série (bobine réelle)</u>



$$\underline{Z}_{éq} = \underline{z}_R + \underline{z}_L = R + jL\omega = Ze^{j\varphi}$$

Avec : $\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \\ tg\varphi_z = \frac{Im(\underline{Z}_{éq})}{Re(\underline{Z}_{éq})} = \frac{L\omega}{R} \end{cases}$

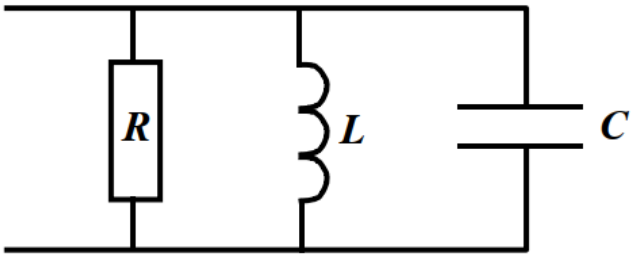
Dipôle R , L, C série



$$\underline{Z}_{éq} = \underline{z}_R + \underline{z}_L + \underline{z}_C = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = Ze^{j\varphi}$$

Avec : $\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ tg\varphi_z = \frac{Im(\underline{Z}_{éq})}{Re(\underline{Z}_{éq})} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{cases}$

Dipôle R , L, C parallèle



$$\frac{1}{\underline{Z}_{éq}} = {}^{1}/_{\underline{Z}_R} + {}^{1}/_{\underline{Z}_L} + {}^{1}/_{\underline{Z}_C} = {}^{1}/_{R} + {}^{1}/_{JL\omega} + {}^{1}/_{\frac{1}{JC\omega}} = {}^{1}/_{R} + {}^{1}/_{JL\omega} + JC\omega$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{equi}} = {}^{1}/_{R} - {}^{J}/_{L\omega} + JC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_{equi} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Ce qui donne en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\underline{Z}_{equi} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{\left(\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)\left(\frac{1}{R} - j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)}$$

$$\underline{Z}_{equi} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Dont le module vaut

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

Avec : $\left\{\begin{array}{l} Z = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} \\ tg\varphi_z = \dfrac{\boldsymbol{Im}(\underline{\boldsymbol{Z}}_{\acute{e}\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{Re}(\underline{\boldsymbol{Z}}_{\acute{e}\boldsymbol{q}})} = \dfrac{-\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{1/R} \end{array}\right.$

Il faut faire attention pour le signe $(-)$ de l'argument de $\underline{z}$ quand il s'agit d'une impédance d'un circuit , ce signe (-) Dû à l'expression de $\underline{z}$ où on voit clairement la partie réelle moins la partie imaginaire

Fin.