

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Un quadripôle est par définition un réseau qui comporte quatre bornes de liaisons avec les circuits extérieurs. Il s'agit souvent d'un ensemble d'éléments permettant de traiter des signaux ou de transférer de l'énergie fournie par un générateur pour les restituer sous une forme quelconque à une charge extérieure. Les échanges avec l'extérieur se font au travers de deux bornes utilisées comme bornes d'entrée (côté générateur) et vers deux autres bornes utilisées comme sortie (côté charge).



D'une façon générale, un quadripôle est défini par deux équations caractéristiques qui décrivent complètement son fonctionnement :

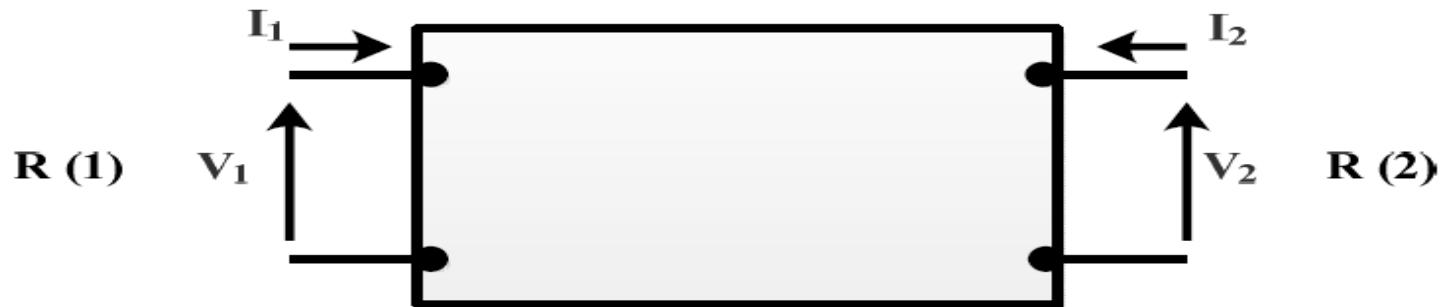
$$F_1(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

$$F_2(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

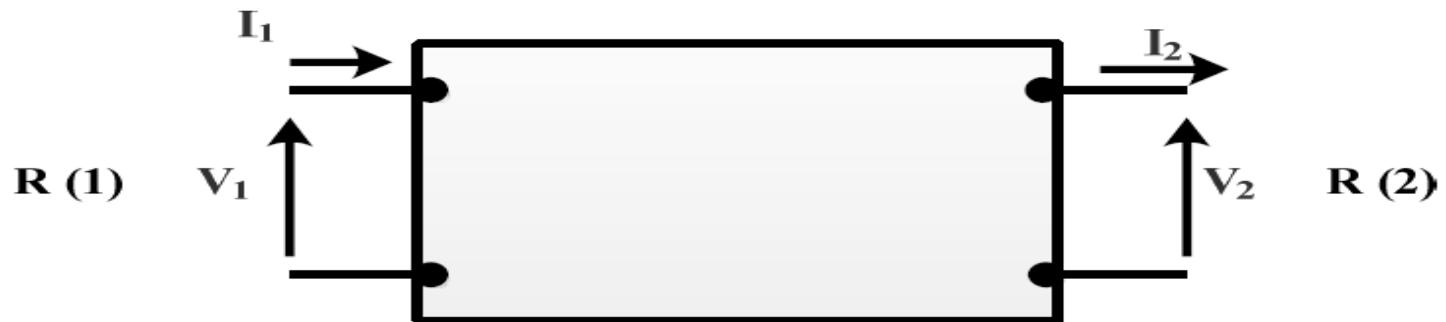
# Quadripôle électrique

# Module Electricité

## Système récepteur



## Système générateur



## Représentation matricielle

### Matrice impédance $Z$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice  $Z$  se définissent comme suit :

$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$  : Impédance d'entrée, sortie ouverte.

$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$  : Impédance de transfert direct, sortie ouverte.

$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$  : Impédance de transfert inverse, entrée ouverte.

$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$  : Impédance de sortie, entrée ouverte.

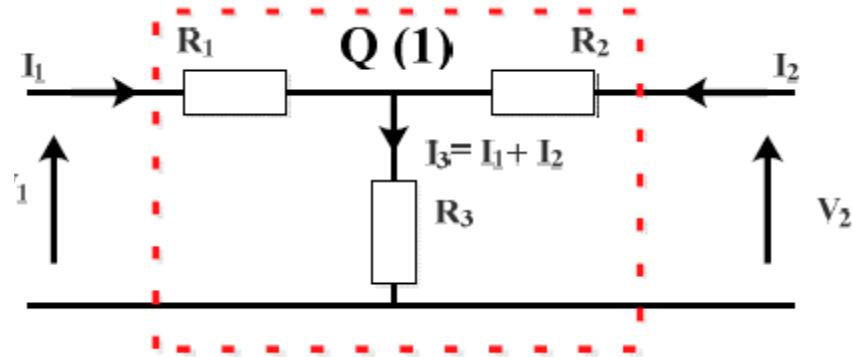
# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Exemples D'application :

I. Détermination des paramètres d'impédance d'un quadripôle type T représenté par le circuit ci-dessous.

$$R_1 = 4\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 3\Omega$$



On exprime les tensions  $V_1, V_2$  en fonction des courants  $I_1, I_2$ . Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances  $Z$  (résistances).

$$V_1 = f(I_1, I_2) \text{ et } V_2 = f(I_1, I_2)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

On cherche la matrice  $[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$

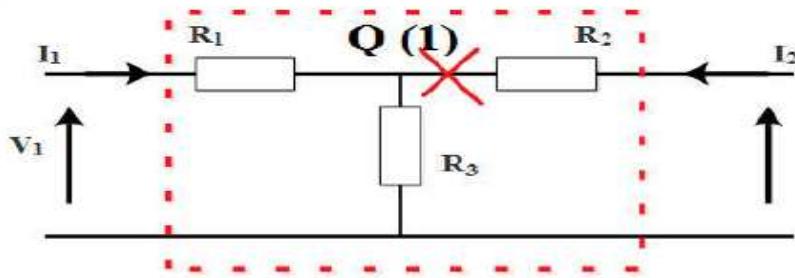
Cas  $I_2 = 0$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + \cancel{Z_{12}I_2} \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + \cancel{Z_{22}I_2} \end{aligned}$$

Donc

$$si I_2 = 0 \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \\ V_2 = Z_{21}I_1 \Rightarrow Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \end{cases}$$

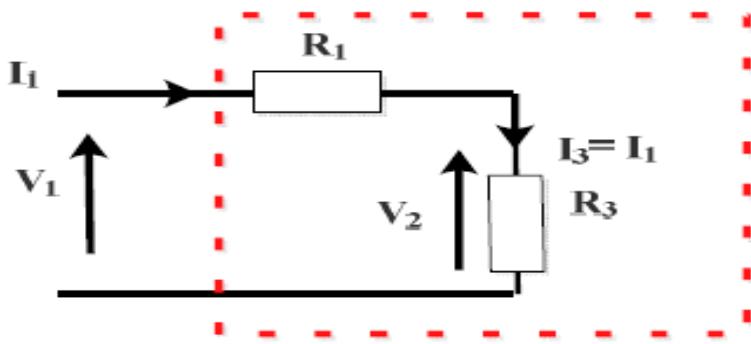
si la sortie est en circuit ouvert ( $I_2 = 0$ ) alors  $I_3 = I_1$



# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Et le circuit devient comme suit :



$$\text{Il résulte que } V_1 = (R_1 + R_3)I_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 + R_3 = 4 + 3 = 7\Omega$$

$$\text{En utilisant le diviseur de tension } V_2 = \frac{R_3}{R_1+R_3} V_1$$

$$\text{en remplaçant } V_1 = Z_{11} \cdot I_1 \text{ on aura } V_2 = \frac{R_3}{R_1+R_3} Z_{11} \cdot I_1$$

$$\text{Par définition } Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_1+R_3} Z_{11} = \frac{R_3}{R_1+R_3} (R_1 + R_3) = \frac{3}{3+4} 7 = 3\Omega$$

# Quadripôle électrique

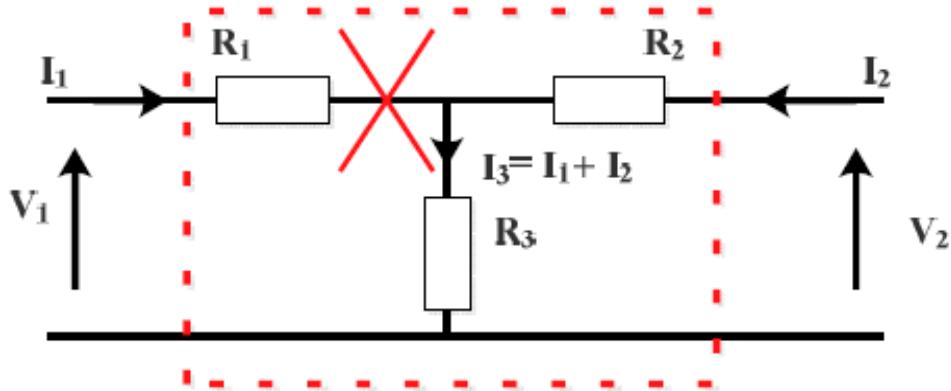
# Module Electricité

Cas  $I_1 = 0$

$$\begin{aligned}V_1 &= \cancel{Z_{11}I_1} + Z_{12}I_2 \\V_2 &= \cancel{Z_{21}I_1} + Z_{22}I_2\end{aligned}$$

$$si I_1 = 0 \begin{cases} V_1 = Z_{21}I_2 \Rightarrow Z_{21} = \frac{V_1}{I_2} \\ V_2 = Z_{22}I_2 \Rightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \end{cases}$$

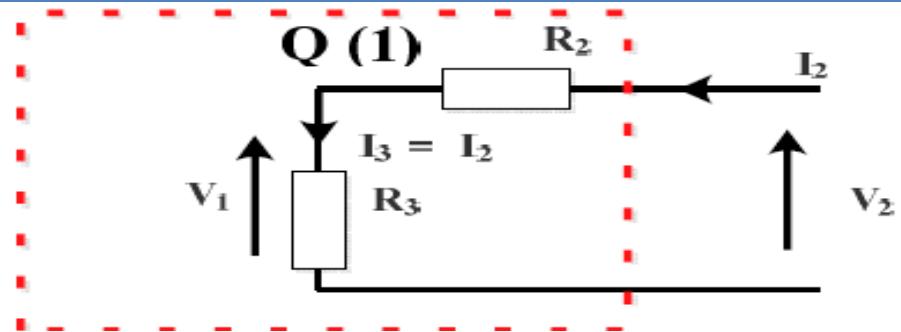
si l'entrée est en circuit ouvert ( $I_1 = 0$ ) alors  $I_3 = I_2$



# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Et le circuit devient comme suit :



$$\text{Il résulte que } V_2 = (R_2 + R_3)I_2 \Rightarrow Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = R_2 + R_3 = 2 + 3 = 5\Omega$$

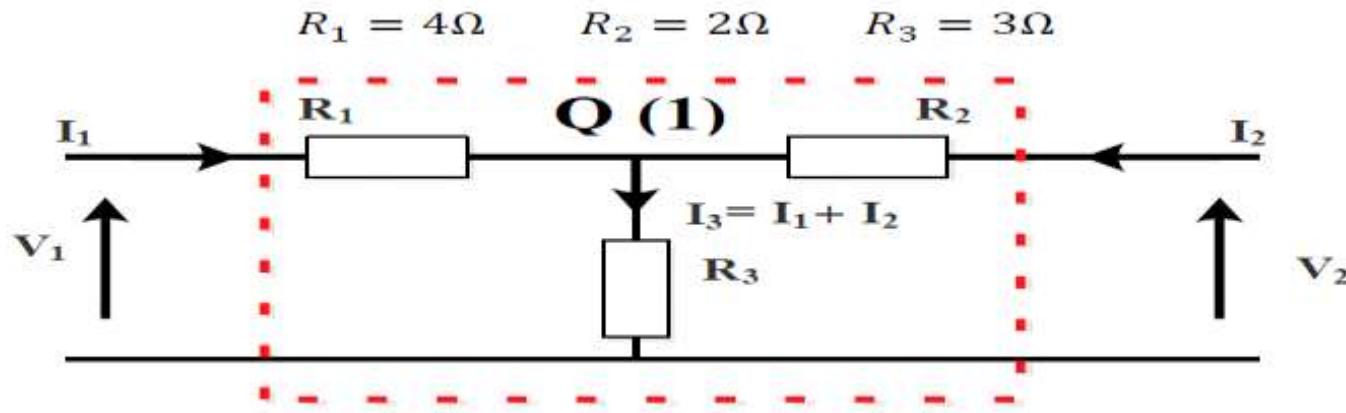
$$\text{En utilisant le diviseur de tension } V_1 = \frac{R_3}{R_2+R_3} V_2$$

$$\text{en remplaçant } V_2 = Z_{22} \cdot I_2 \text{ on aura } V_1 = \frac{R_3}{R_2+R_3} Z_{22} \cdot I_2$$

$$\text{Par définition } Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_2+R_3} Z_{22} = \frac{R_3}{R_2+R_3} (R_2 + R_3) = \frac{3}{3+2} 5 = 3\Omega$$

$$\text{On obtient la matrice } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ Et } \begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Déterminer les paramètres d'admittance du quadripôle type T représenté par le circuit ci-dessous.



On exprime les courants  $I_1$   $I_2$  en fonction des tensions  $V_1$ ,  $V_2$ . Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances.

$$I_1 = f(V_1, V_2) \quad I_2 = f(V_1, V_2)$$

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

$$\begin{aligned}I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On cherche la matrice  $[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$

$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$  : Admittance d'entrée, sortie court-circuitée.

$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$  : Admittance de transfert direct, sortie court-circuitée.

$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$  : Admittance de transfert inverse, entrée court-circuitée.

$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$  : Admittance E de sortie, entrée court-circuitée.

# Quadripôle électrique

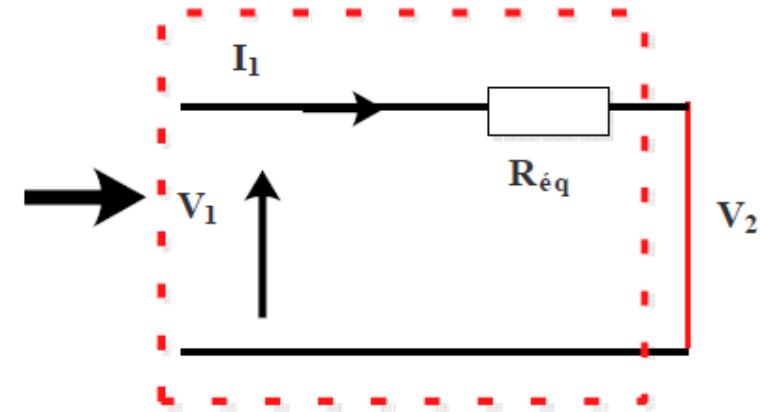
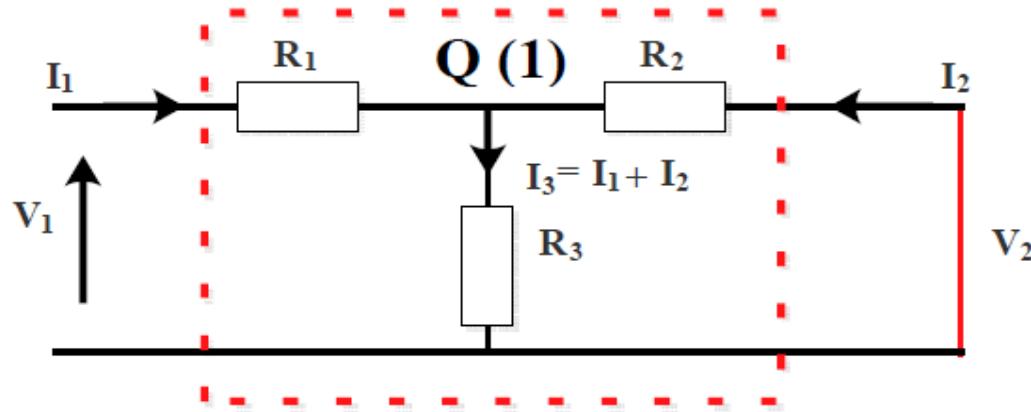
# Module Electricité

Supposons  $V_2 = 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + \cancel{Y_{12}V_2} \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + \cancel{Y_{22}V_2} \end{aligned}$$

si  $V_2 = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} I_1 = Y_{11}V_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \\ I_2 = Y_{21}V_1 \Rightarrow Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \end{array} \right.$

si la sortie est circuit-circuitée ( $V_2 = 0$ ) alors



# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Il résulte que  $V_1 = R_1 + (R_2 // R_3)I_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{5}{26}$

En utilisant les deux équations d'impédances

$$\begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \quad V_2 = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ 0 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Nous obtiendrons  $I_1 = \frac{-5I_2}{3}$  remplaçons l'expression de  $I_1$  dans l'équation suivante

$$V_1 = 7 \frac{-5I_2}{3} + 3I_2$$

De cette manière nous avons trouvé l'expression qui lie la grandeur de l'entrée  $V_1$  et le courant de sortie  $I_2$ . Donc  $Y_{21}$ .

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{-35+9}{3}} = \frac{-3}{26}$$

# Quadripôle électrique

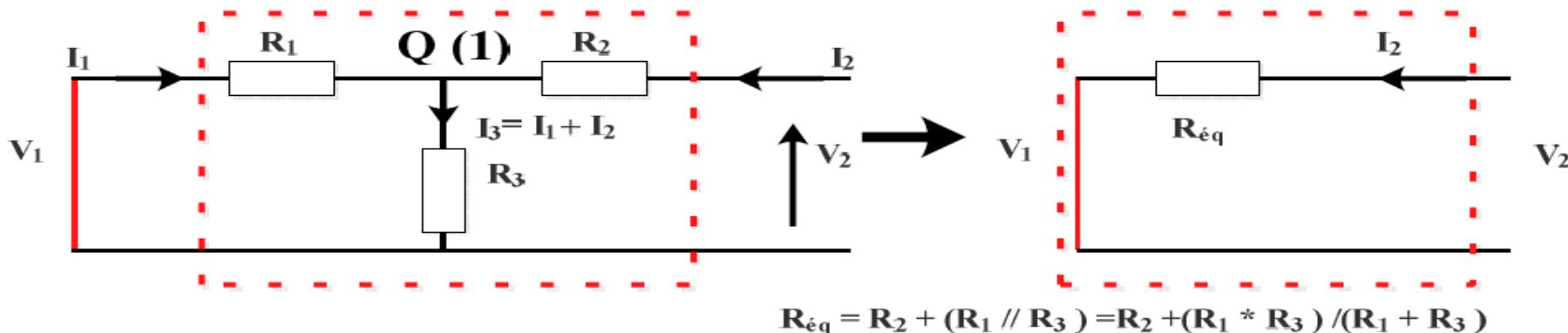
# Module Electricité

Supposons  $V_1 = 0$

pour trouver les deux autres paramètres  $Y_{12}, Y_{22}$  on court-circuite l'entrée du circuit  $V_1 = 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= \cancel{Y_{11}V_1} + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= \cancel{Y_{21}V_1} + Y_{22}V_2 \end{aligned}$$

si l'entrée est circuit-circuitée ( $V_1 = 0$ ) alors le circuit peut être représenté comme suit :quadripo



$$\text{Alors } Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 & V_1 = 0 \Rightarrow 0 = 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 & V_2 = 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

Nous obtiendrons  $I_2 = \frac{-1}{3}I_1$  remplaçons l'expression de  $I_2$  dans l'équation suivante

$$V_2 = 3I_1 + 5I_2 \text{ Nous aurons alors } V_2 = 3I_1 - 5\frac{I_1}{3}$$

De cette manière nous avons trouvé l'expression qui lie la grandeur de l'entrée  $I_1$  et le courant de sortie  $V_2$ . Donc  $Y_{12}$ .

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{\frac{-35+9}{3}} = \frac{-3}{26}$$

De La même façon qu'on trouvera  $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}$

$$\begin{aligned} V_1 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned} \quad V_1 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 7I_1 + 3I_2 \\ V_2 &= 3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Nous aurons  $I_1 = \frac{-3I_2}{7}$  et  $V_2 = -3\frac{3I_2}{7} + 5I_2$  donc  $\frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{\frac{-9+35}{7}} = \frac{7}{26}$ .

Donc la matrice  $Y = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & \frac{-3}{26} \\ \frac{-3}{26} & \frac{7}{26} \end{bmatrix}$ . Et  $I_1 = \frac{5}{26}V_1 + \frac{-3}{26}V_2$   
 $I_2 = \frac{-3}{26}V_1 + \frac{7}{26}V_2$

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

**Le passage matriciel** (Deuxième méthode de calcul de  $Y = Z^{-1}$ ) :

On sait que  $Y = Z^{-1}$  il suffit de calculer la matrice inverse de  $Z$  pour trouver les paramètres de  $Y$ .

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , avec

$$\det(A) = (a * d) - (b * c) \neq 0.$$

La comatrice est  $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ , sa transposée est  $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

Alors la matrice inverse de  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  est donc  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

On  $[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

Et  $Z^{-1} = \frac{1}{\det(Z)} \text{com}Z^T$

# Quadripôle électrique

# Module Electricité

La transposée de  $Z$  est  $Z^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Et sa comatrice est  $\text{com}Z^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ .

Alors la matrice inverse de  $Z = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  est donc  $Z^{-1} = Y = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & \frac{-3}{26} \\ \frac{-3}{26} & \frac{7}{26} \end{bmatrix}$ .