Домашняя работа 1 МО

№35

Рассм. задачу восстановления регрессии с квадратичной ф-цией потерь $L(y', y) = (y' - y)^2$

Док-ть, что если $f^*(x) = \arg\min E((Y-c)^2 | X = x)$, то $f^*(x) = E(Y | X = x)$ (регрессионная ф-ия)

Док-во:

Пускай $y \in \mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $L(f(x), y) = (f(x) - y)^2$

Функц. ср. риска выведем соотв. образом:

$$R(f) = \int\limits_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} L(f(x), y) \cdot p(x, y)\, dx dy = \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_{\mathbb{Y}} L(f(x), y) \cdot p(y|x)\, dy \cdot p(x) dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} p(x) \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{Y}} (f(x) - y)^2 \cdot p(y|x)\, dy}_{*} \; dx$$

Т.к. $p(x) \geq 0$, необходимо минимизировать внутр. интеграл $*$.

Каким образом?

Для фикс. x_0 необходимо найти значение $c = f(x_0)$ при котором:

$$\int\limits_{\mathbb{Y}} (c - y)^2 \cdot p(y|x_0)\, dy \to \min$$

$$\stackrel{\Delta}{=} E_y[(c-y)^2 | x_0]$$

$$\frac{\partial}{\partial c} E_y[(c-y)^2 | x_0] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \int\limits_{\mathbb{Y}} (c-y)^2 p(y|x_0)\, dy = 2\int\limits_{\mathbb{Y}} (c-y) p(y|x_0) dy = 2\Big[c \underbrace{\int\limits_{\mathbb{Y}} p(y|x_0) dy}_{=1}$$

$$- \int\limits_{\mathbb{Y}} y p(y|x_0)\, dy\Big] = 2\Big[c \int\limits_{\mathbb{Y}} p(y|x_0) dy - E_y[y|x_0]\Big] = 2(c - E_y[y|x_0]) = 0$$

$2(c - E_y[y|x_0]) = 0$

$c = E_y[y|x_0]$

Но мы фиксировали произв. x_0, а значит можно обобщить получ. результат для $\forall x \in \mathcal{X}$

$c(x) = f^*(x)$ (теперь c - это не фикс. (·), а ф. завис. от x.

$$c = E_y[y|x_0] \Longrightarrow c(x) = f^*(x) = E_y[y|x]$$

След-но, ср. риск будет выглядеть соотв.

$$R(f^*) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \left[\int_{\mathcal{Y}} (f^*(x) - y)^2 \cdot p(y|x)\, dy \right] dx$$

$$\int_{\mathcal{Y}} (f^*(x) - y)^2 \cdot p(y|x)\, dy = \int_{\mathcal{Y}} (E_y[y|x] - y)^2 \cdot p(y|x)\, dy =$$

$$\int_{\mathcal{Y}} (y - E_y[y|x])^2 \cdot p(y|x)\, dy = E_y[(y - E_y[y|x])^2 | x]$$

$$E_y[(y - E_y[y|x])^2 | x] \triangleq E_x[D_y[y|x]]$$

Ответ: $f^*(x) = E_y[y|x]$, $R(f^*) = E_x[D_y[y|x]]$

№ 36

$L(y', y) = |y' - y|$

Необходимо док-ть, что $f^*(x) = median(Y | X = x)$

$R(f^*) \to min$

Пойдем по схожей схеме из № 35.

$y \in \mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $L(f(x), y) = |f(x) - y|$, $x \in \mathbb{X}$

Ф-ия ср. риска:

$$R(f) = \int\limits_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} L(f(x), y) \cdot p(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\mathbb{X}} p(x) \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{Y}} L(f(x), y) \cdot p(y|x)\, dy}_{*}\, dx$$

Т.к. $p(x) \geq 0$, то минимиз. $(*)$ (поточечно) необходимо найти x_0, $c = f(x_0)$

$$\int\limits_{\mathbb{Y}} L(c, y) \cdot p(y|x_0)\, dy \to min$$

$$\frac{\partial}{\partial c} E_y[L(c, y) | x_0] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \int\limits_{\mathbb{Y}} L(c, y) \cdot p(y|x_0)\, dy = \frac{\partial}{\partial c} \int\limits_{\mathbb{Y}} |c - y| \cdot p(y|x_0)\, dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \int\limits_{\mathbb{Y} \setminus \{c\}} |c - y| \cdot p(y|x_0)\, dy = \int\limits_{\mathbb{Y} \setminus \{c\}} sign(c - y) \cdot p(y|x_0)\, dy =$$

$$\int\limits_{\{c > y\}} \overbrace{sign(c - y)}^{1} \cdot p(y|x_0)\, dy + \int\limits_{\{c < y\}} \overbrace{sign(c - y)}^{-1} \cdot p(y|x_0)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\{c>y\}} 1 \cdot p(y|x_0)\,dy - \int\limits_{\{c<y\}} p(y|x_0)\,dy = P(\{c>y\}|x_0) - P(\{c<y\}|x_0) = 0$$

$$\Rightarrow P(\{c>y\}|x_0) = P(\{c<y\}|x_0)$$

Пусть $p(y|x)$ непрерывно $\Rightarrow P(\{c=y\}|x_0) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} P(\{c \geq y\}|x_0) = \frac{1}{2} \\ P(\{c<y\}|x_0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = \mathrm{median}(\mathbb{Y}|\mathbb{X} = x_0)$$

Обобщим для $\forall x \in \mathbb{X}$: $c \to c(x) = f^*(x) \Rightarrow$

$c = \mathrm{median}(\mathbb{Y}|\mathbb{X} = x_0) \to c(x) = f^*(x) = \mathrm{median}(\mathbb{Y}|\mathbb{X} = x)$

№37

$R(f) \to \min_f \iff E_y[L(c,y) | X_0] \to \min_c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} L(c,y) \cdot p(y, X_0)\, dy \to \min_c}$ (*)

$f^*(x) = \text{mode}(Y | X = x) \Rightarrow p(c|x) \to \max_c$

Если фикс. $X_0 \Rightarrow f^*(X_0) = c^*$

$c^* = \text{mode}(y|X_0) \Rightarrow p(c^*|X_0) = \max_y p(y|X_0) \Rightarrow$

$c^* = \text{mode}(y|X_0) \Rightarrow \boxed{-p(c^*|X_0) = \min_c (-p(c|X_0))}$ (☆)

Основываясь на (*) и (☆):

$\int_{\mathbb{R}} L(c,y) \cdot p(y|X_0)\, dy = -p(c|X_0)$

Введем ф-ию $\hat{L}(c,y) = -L(c,y) \Rightarrow$

$\int_{\mathbb{R}} \hat{L}(c,y) \cdot p(y|X_0) = p(c|X_0)$

Этому усл. что удовл. дельта ф-ия Дирака:

$\hat{L}(c,y) = \delta(c-y) = \delta(y-c)$, обладающ. св-вом:

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$

Сл-но $L(c,y) = -\delta(y-c)$, но $L(c,y) \geq 0$, а $\delta(y-c) \geq 0$, поэтому введем знач. $c_0 > 0 \Rightarrow$

$L(c,y) = c_0 - \delta(y-c) \Rightarrow$

$E_y[L(c,y) | X_0] = \int_{\mathbb{R}} L(c,y) \cdot p(y|X_0)\, dy =$

$= c_0 \int\limits_{\mathbb{R}} p(y|x_0)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(y-c)\,p(y|x_0)\,dy = c_0 \int\limits_{\mathbb{R}} p(y|x_0)\,dy -$

$- p(c|x_0) = c_0 - p(c|x_0) \to \min\limits_{c} \Rightarrow p(c|x_0) \to \max\limits_{c} \Rightarrow$

$c = f^*(x_0) = \mathrm{mode}\,(y|x_0)$

Ответ: $h(y', y) = c_0 - \delta(y - y');\ c_0 > 0$

№38

$$h(0,0) = h(1,1) = 0$$

$$h(1,0) = l_1, \quad h(0,1) = l_2$$

Необходимо минимизировать ср. риск:

$$R(f) = \int_X \sum_{y=1}^{k} h(f(x), y) \cdot P_r(y|x)\, p(x)\, dx$$

Подставим знач. ф-ии потерь:

$$R(f) = \int_X \left(l_1 (1 - P_r(f(x)|x)) + l_2 (1 - P_r(f(x)|x)) \right) p(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad f^*(x) = \arg\min R(f)$$

$$f^*(x) = \arg\min_{y \in X} l_y (1 - P_r(y|x)) = \arg\max_{y \in \{0,1\}} l_y P_r(y|x)$$

№39

По аналогии с 38,

$$R(f) = \int_X \sum_{y=1}^{k} l_y P_r(y|x)) p(x)\,dx - \int_X \Big(\Big(\sum_{y=1}^{k} l_y (1 - P_r(f(x)|x))$$

$$p(x)\,dx \Rightarrow$$

$$f^*(x) = \operatorname*{argmin}_{s \in \mathcal{Y}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} l_{y_s} (1 - P_r(y|x)) = \operatorname*{argmax}_{s \in \mathcal{Y}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} l_{y_s} P_r(f(x)|x))$$