Домашняя работа. Мишина Дарья

№17

?: главные напр. и дисперсии по гл. комп.

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

$N=5$

I. $$X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \overline{X}=(2\ 0\ 1)$$

$$X_c = X - \overline{X}\cdot 1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

X_c - центрир. матрица

$$C = X_c^T \cdot X_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \frac{1}{N-1}\cdot C = \frac{1}{5-1}\cdot C = \frac{1}{4}C$$

Сл-но собств. числа и собств. век-ра матрицы C

$\det(C-\lambda I)=0$, сл-но

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Подсчитаем:

$$-\lambda^2 + 66\lambda^2 - (22^2 - 21^2 + (22^2-9^2)2)\lambda + (22(22^2-9^2)) - 21(22\cdot 21 - 9^2) - 9(-9\cdot 21 + 22\cdot 9)) = 0$$

$$-\lambda^3 + 66\lambda^2 - 849\lambda + 784 = 0$$

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ – главные компоненты

$$\lambda_1 = 49, \quad \lambda_2 = 16, \quad \lambda_3 = 1$$

1) $\lambda_1 = 49$

$$\begin{pmatrix} -27 & 21 & -9 \\ 21 & -27 & -9 \\ -9 & -9 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v_1} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 16$

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & -9 \\ 21 & 6 & -9 \\ -9 & -9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v_2} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 21 & 21 & -9 \\ 21 & 21 & -9 \\ -9 & -9 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(C_k) = \frac{1}{4}\lambda(C)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{49}{4} \Leftarrow \sigma_1^2 \\ \lambda_2 = \dfrac{16}{4} \Leftarrow \sigma_2^2 \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{4} \Leftarrow \sigma_3^2 \end{cases}$$

N 4.1

Док-ть:
$v_0 = \bar{x}$
$v_0 : Q \to \min$ до W_k
(данные центр-ы)
$x^{(i)} \leftarrow x^{(i)} - \bar{x}$ $(i = \overline{1, N})$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \| x_i - v_0 - \sum_{j=1}^{k} (x_i - v_0, v_j) v_j \|^2,$$

$$W_k = v_0 + L(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - v_0 - \sum_j (x_i - v_0, v_j) v_j,\ x_i - v_0 - \sum_j (x_i - v_0, v_j) v_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \{ (x_i, x_i) - 2(x_i, v_0) + (v_0, v_0) - 2\sum_j (x_i - v_0, v_j)(v_j, x_i) +$$

$$2\sum_j (x_i - v_0, v_j)(v_0, v_j) + \sum_j (x_i - v_0, v_j)^2 \} = \sum_{i=1}^{N} \{ (x_i, x_i) - 2(x_i, v_0)$$

$$+ (v_0, v_0) - \sum_j (x_i - v_0, v_j)^2 \}$$

$$\nabla Q = \sum_{i=1}^{N} \{ -2x_i + 2v_0 + 2\sum_j (x_i - v_0, v_j) v_j \} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(v_0 - \sum_j (v_0, v_j) v_j\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \sum_j (x_i, v_j) v_0\right)$$

$$\nabla^2 Q = \sum_{i=1}^{N} 2I - 2\sum_{j=1}^{k} v_0 v_j^T \geq 0$$

Если иначе рав-е до W_0:

$$\sum_{i=1}^{N} v_0 = \sum_{i=1}^{N} x_i \iff v_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x}_i$$

$$\nabla^2 Q = 2I > 0.$$

$$v_0 = \bar{x}$$

Ч.Т.Д.