Série 1 (Correction): Formulation d'un programme linéaire (PL)

asma.ghdami@esprit.tn

September 28, 2020

Rappel: Les étapes de formulation d’un PL

Série 1: Correction

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire:

1. Identifier les variables de décision:

Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique.

exp: $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2. Identifier les contraintes:

Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.

exemple de contrainte d'inégalité: $3x_1 + 2x_2 \leq 2$ (ou $3x_1 + 2x_2 \geq 2$).

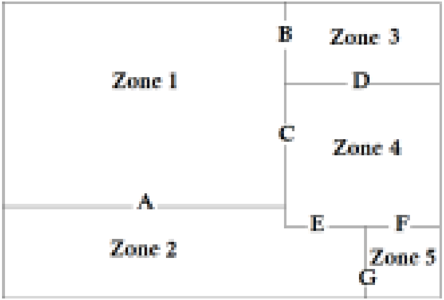
exemple de contrainte d'égalité: $3x_1 + 2x_2 = 2$.

3. Identifier la fonction objectif:

Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision.
Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Application: Problème de couverture

Un musée est partitionné en 5 zones qu'on désire couvrir par des caméras de surveillance. Le plan du musée est donnée par la figure suivante:



Deux zones voisines peuvent être couvertes par une même caméra si celle-ci est placée sur leur frontière commune.
Formuler un problème mathématique qui minimise le nombre total

de caméra de façon à ce que chaque zone soit couverte par au moins une caméra et que la zone 4 soit couverte par au moins deux caméras.

Variables de décision:

Soit x_A= 1 si une caméra est placée sur le point A 0 si non

De même pour x_B, x_C, x_D, x_E, x_F et x_G

Les contraintes:

□□□□□□□□

$x_A + x_B + x_C \geq 1$ (Zone 1) $x_A + x_E + x_G \geq 1$ (Zone 2) $x_B + x_D \geq 1$ (Zone 3)

$x_C + x_D + x_E + x_F \geq 2$ (Zone 4)

□□□□□□□

$x_F + x_G \geq 1$ (Zone 5)

$x_A, . . . , x_G \in \{0, 1\}$

Fonction objectif:

$$\min Z = x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G$$

Exercice 1.

Une usine fabrique des bicyclettes et des scooters; chaque produit passe à travers deux centres de machines. Le premier centre dispose d’un maximum de 120 heures et le second d’un maximum de 180 heures. La construction d’une bicyclette nécessite 6 heures dans le premier centre et 3 heures dans le second; la construction d’un scooter nécessite 4 heures dans le premier centre et 10 heures dans le second. Si le profit par bicyclette est 45*D* et celui d’un scooter 55*D*, le problème est de déterminer le nombre de bicyclettes et de scooters qu’il faudrait construire pour maximiser le profit. Donner le modéle mathématique de ce problème de production.

Objectif: Déterminer le nombre de bicyclettes et de scooters qu'il faudrait construire pour maximiser le profit.

Variables de décision:

- x : le nombre de bicyclettes à fabriquer.
- y : le nombre de scooters à fabriquer.
- $x, y \geq 0$

Les contraintes imposées par le problème:

• La construction d’une bicyclette nécessite 6 heures dans le premier centre. la construction d’un scooter nécessite 4 heures dans le premier centre. Le premier centre dispose d’un maximum de 120 heures.

$\Longrightarrow$ $6x + 4y \leq 120$

• La construction d’une bicyclette nécessite 3 heures dans le second centre. la construction d’un scooter nécessite 10 heures dans le second centre. Le second centre dispose d’un maximum de 180 heures.

$\Longrightarrow$ $3x + 10y \leq 180$

Identification de la fonction objectif:

$Z = 45x + 55y$

Trouver max $Z = 45x + 55y$

(S.C) $6x + 3y \leq$ 180 $x, y \geq 0$ 120 $3x +$ $10y \leq$

Exercice 2.

Une entreprise veut déménager son matériel composé de 450 machines de trois types: M_1, M_2 et M_3. Elle décide de louer des camions. La société de location dispose de trois sortes de véhicules: V_1, V_2 et V_3 dont les tarifs sont respectivement de 50, 80 et 120 dinars par voyage.

La camion V_1 peuvent chacun transporter une machine M_1, 4 machines M_2 et 10 machines M_3. Pour des raisons techniques la place d'une machine d'un type donné ne peut être utilisée pour une machine d’autre type. chaque camion V_2 peut transporter 2 machines M_1, 6 machines M_2 et 20 machines M_3. Alors que le véhicule V_3 a pour capacité maximum 4 machines M_1, 20 machines M_2 et 24 machines M_3.

On veut transporter en un seul convoi 30 machines M_1, 120 machines M_2 et 300 machines M_3.

l’entreprise veut déterminer le nombre de véhicules à louer pour minimiser le cout total de transport.

Donner le modèle linéaire de ce problème.

Objectif: Déterminer le nombre de véhicules à louer pour minimiser le cout total de transport.

Variables de décisions:

- x_1 : le nombre de camion de type V_1
- x_2 : le nombre de camion de type V_2
- x_3 : le nombre de camion de type V_3
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Les contraintes imposées par le

problème: • $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 30$.

• $4x_1 + 6x_2 + 20x_3 \leq 120$.

• $10x_1 + 20x_2 + 24x_3 \leq 300$.

Identification de la fonction objectif:

$$Z = 50x_1 + 80x_2 + 120x_3$$

Trouver min $Z = 50x_1 + 80x_2 + 120x_3$

$x_1 + 2x_2 +$ $20x_2 + 24x_3$

(S.C) $4x_3 \leq 30$ $4x_1$ ≤ 300 $x_1, x_2,$

□□□□ □□□ $+ 6x_2 + 20x_3$ $x_3 \geq 0$

≤ 120 $10x_1 +$

Exercice 3.

Pour fabriquer deux produits *P*1 et *P*2 on doit effectuer des opérations sur trois machines *M*1, *M*2 et *M*3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d’exécution sont donnés par le tableau suivant:

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité. La disponibilité pour chaque machine sont:

- 165 heures pour la machine $M1$;
- 140 heures pour la machine $M2$;
- 160 heures pour la machine $M3$.

Le produit $P1$ donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit $P2$ un profit unitaire de 1000 dinars.
Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits $P1$ et $P2$ pour avoir un profit total maximum? Objectif: combien doit-on fabriquer mensuellement de produits $P1$ et $P2$ pour avoir un profit total maximum?

Variables de décision:

- x : nombre d'unités de produit P_1 à fabriquer
- y : nombre d'unités de produit P_2 à fabriquer
- $x, y \geq 0$.

Les contraintes imposées par le

problème: • $11x + 9y \leq 9900$.

• $7x + 12y \leq 8800$.

• $6x + 16y \leq 9600$.

Identification de la fonction objectif:

$$Z = 900x + 1000y$$

Trouver max $Z = 900x + 1000y$

(S.C)

$11x + 9y \leq 9900$ $7x + 12y \leq$ 8800 $6x + 16y \leq$ 9600 $x, y \geq 0$

Exercice 4.

On considère un lieu de travail où il existe des besoins quotidiens en ouvriers. Les besoins en nombre d'ouvriers par jour sont données par le tableau suivant:

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
18	13	16	19	12	16	11

Il faut que tout ouvrier soit engagé plein temps.
Chaque ouvrier travaille 5 jours consécutif et il se repose 2 jours.
Le travail durant les samedis et les dimanches doit être payé deux fois plus que le travail durant le reste des jours.
Le salair par jour s'élève à 100*D*.
Déterminer le programme linéaire qui aidera le RDH à prondre les bonnes décisions.

Variables de décision

x_i le nombre d'ouvriers qui comencent leurs travaux le i_ème jour de la semaine $i=1\ldots7$

Les contraintes:

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
\text{lundi} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 18 \\
\text{mardi} & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 13 \\
\text{mercredi} & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 & \geq 16 \\
\text{jeudi} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 & \geq 19 \\
\text{vendredi} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq 12 \\
\text{samedi} & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \geq 16 \\
\text{dimanche} & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 11 \\
 & x_i \in \mathbb{N} \text{ pour } i=1\ldots7 &
\end{array}
\right\} \text{Contr}
$$

Fonction objectif

Fonction-Objectif

$$\text{Min } Z=500\,(x_1)+600\,(x_2+x_7)+700\,(x_3+x_4+x_5+x_6)$$

Exercice 5. (Sélection de projets)

5 projets doivent être évalués sur 3 ans. Etant donnée le coût de chaque projet pour chaque année et le profit obtenu par

l'exécution d'un projet.

	Coût par année			Profit P_i
Projet	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Budget	25	25	25	

Décider quels projets exécuter sans dépasser le budget disponible pour chaque année.

Variables de décision:

1 si l'objet i est choisi 0 si non

Soit x_1=

De même pour x_2, x_3, x_4, x_5.

Les contraintes:

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25\ x_1 +$$
$$7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25\ 8x_1 + 10x_2$$
$$+ 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

$$x_1, \dots, x_5 \in \{0, 1\}$$

Fonction objectif:

$$\min Z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

Exercice 6.

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main doeuvre et de 440 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande une heure de main d'oeuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'oeuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars. Le bureau du périmetre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. L'agriculteur veut savoir quelle est la meilleure allocation de surface. Donner le modèle linéaire de ce problème sans résoudre.

Objectif: L'agriculteur veut savoir quelle est la meilleure allocation de surface?

Variables de décision:

- x : surface alloué à la culture de tomates.
- y : surface alloué à la culture de piments.
- $x, y \geq 0$.

Les contraintes imposées par le problème:

- Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments.

$\Longrightarrow x + y \leq 150$

• Il dispose de 480 heures de main doeuvre. Un hectare de tomates demande une heure de main d'oeuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'oeuvre.

$\Longrightarrow x + 4y \leq 480$

• Il dispose de 440 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande 4 m^3 et un hectare de piments demande 2 m^3 d'eau.

$\Longrightarrow 4x + 2y \leq 440$

• Le bureau du périmetre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. $\Longrightarrow x \leq 90$

Identification de la fonction objectif:

$$Z = 100x + 200y$$

Trouver max $Z = 100x + 200y$

(S.C)

$5x + y \le 150$

$4x + 2y \le 440$

$x + 4y \le 480$

$x \le 90$

$x, y \ge 0$