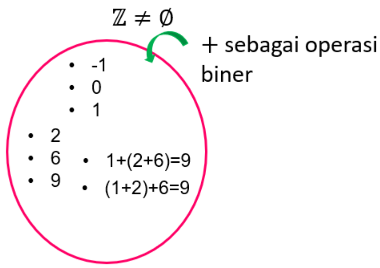
Grup

A) Motivasi Operasi Penjumlahan pada Himpunan $\mathbb{Z}$ sebagai Grup
Perhatikan untuk semua himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berikut ini.



Faktanya :

(a) $\mathbb{Z} \neq \emptyset$

(b) $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\ (a + b) + c = a + (b + c)$ **(sifat asosiatif operasi + pada $\mathbb{Z}$)**

ii. $(\exists 0 \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{Z})\ 0 + a = a = a + 0$ **(adanya suatu elemen yang istimewa di $\mathbb{Z}$, yaitu 0/eksistensi elemen identitas)**

iii. $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists -a \in \mathbb{Z})\ a + (-a) = (-a) + a = 0$ **(setiap elemen di $\mathbb{Z}$ mempunyai pasangan di $\mathbb{Z}$, yang apabila pasangan tersebut dioperasikan menghasilkan 0/eksistensi elemen invers)**

Himpunan $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ terhadap operasi biner + yang memenuhi aksioma i sampai iii disebut grup dengan notasi $(\mathbb{Z}, +)$.

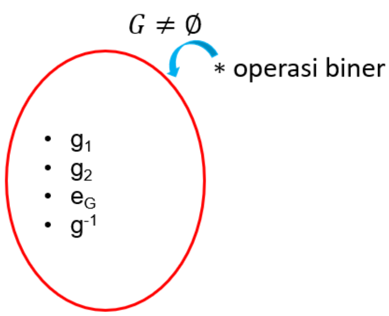
B) Proses Abstraksi dan Pendefinisian Grup

Berdasarkan hal tersebut, kita dapat mengatakan bahwa himpunan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $+$ membentuk suatu sistem.

Apakah hanya himpunan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $+$ saja yang memenuhi sifat i sampai iii seperti di atas? Tentuk tidak, sebagai contoh: $\mathbb{Q}$ terhadap operasi $+$, $\mathbb{R}$ terhadap operasi $+$, himpunan semua matriks 2×2, yaitu $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ terhadap operasi penjumlahan matriks $+$, dan lain sebagainya. Dalam matematika, biasanya kita ingin melihat suatu jenis sistem secara luas. Oleh karena itu, untuk melihat dan mempelajari sistem seperti di atas ($\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $+$) secara luas, kita lakukan proses abstraksi dari sistem tersebut.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{diabstraksikan menjadi}} \text{sebarang himpunan tak kosong } G$$

$$+ \xrightarrow{\text{diabstraksikan menjadi}} \text{sebarang operasi biner } * \text{ pada } G$$



Definisi 1. *Diberikan himpunan $G \neq \emptyset$ dan operasi biner * dengan notasi $(G, *)$. Himpunan G disebut* ***grup*** *terhadap operasi * jika memenuhi beberapa aksioma berikut:*

i. Assosiatif
Untuk setiap $g_1, g_2, g_3 \in G$ berlaku $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.

ii. Eksistensi Elemen Identitas/Netral
Terdapat $e_G \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $g \in G$ berlaku $g * e_G = e_G * g = g$.

iii. Eksistensi Elemen Invers
Untuk setiap $g \in G$ terdapat $g^{-1} \in G$ sedemikian hingga $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e_G$.

Note:

(a) Urutan pembuktian grup:
   i. Buktikan himpunannya tidak kosong
   ii. Buktikan operasinya merupakan operasi biner
   iii. Buktikan aksioma i sampai dengan iii

(b) Penyebutan operasi $+$ assosiatif di $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ assosiatif

Contoh:

1. Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\}$. Apakah $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan grup terhadap operasai perkalian matriks?

   Solusi: Tidak benar, sebab terdapat $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ dimana $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \notin M_2(\mathbb{Z})$. Artinya invers dari matriks $A \in M_2(\mathbb{Z})$ bukan merupakan elemen dari $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$. Apakah $M_2(\mathbb{R})$ merupakan grup terhadap operasai perkalian matriks?
   Solusi:
   Tidak benar, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, namun $\det(A) = 0$ sedemikian hingga matriks A tidak mempunyai invers terhadap operasi perkalian (tidak memenuhi aksioma eksistensi elemen invers).

3. Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \text{ dan } a_1a_4 \neq a_2a_3 \right\}$. Apakah $M_2(\mathbb{R})$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks?
   Solusi:
   Klaim : Himpunan $M_2(\mathbb{R})$ dengan operasi biner perkalian matriks merupakan grup.
   Bukti diserahkan kepada pembaca.

4. Diberikan himpunan $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in Z\}$ dengan operasi $+$. Apakah $2\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi $+$?
   Solusi:
   Klaim : Himpunan $2\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ merupakan grup.
   Bukti diserahkan kepada pembaca.