Rangkuman Materi Aljabar 1

Yassin Dwi Cahyo LaTeX

Daftar Isi

Note:

1. Maaf kalau file ini banyak typo atau salah ngitungnya
2. Semoga file ini bisa bermanfaat buat kita semua. Doain juga semoga yang nulis makin banyak rezekinya dan hidupnya nyaman. Aamiin
3. Semangat UAS nyaaaa

0.1 Teorema Fundamental Homomorfisma Grup

Misalkan G dan S masing-masing adalah grup dan $f : G \to S$ adalah homomorfisma grup. Dari materi sebelumnya, telah diketahui bahwa $Ker(f)$ merupakan subgrup normal di G. Dengan demikian, dapat dibentuk suatu grup faktor $G/Ker(f)$. Selain itu, telah diketahui pula bahwa $Im(f)$ merupakan subgrup dari S. Pada subbab ini, akan dilihat hubungan antara grup faktor $G/Ker(f)$ dengan $Im(f)$. Perhatikan diagram di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Im(f) \leq S \\
G/Ker(f) \arrow[ur, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Telah diketahui $f : G \to G$ adalah homomorfisma grup. Pengaitan $\pi : G \to G/Ker(f)$ pada diagram di atas didefinisikan sebagai homomorfisma natural. Selanjutnya, pengaitan $h : G/Ker(f) \to S$ didefinisikan sebagai berikut.

$$h : G/Ker(f) \to S$$
$$aKer(f) \mapsto h(aKer(f)) \overset{def.}{=} f(a)$$

Lebih lanjut, untuk memudahkan notasi saja, misalkan $Ker(f) = K$. Sehingga pengaitan $h : G/K \to S$ didefinisikan sebagai berikut.

$$h : G/K \to S$$
$$aK \mapsto h(aK) \overset{def.}{=} f(a)$$

Akan dibuktikan bahwa h merupakan pemetaan/fungsi. Diambil sebarang $aK, bK \in G/K$ dengan $aK = bK$. Akan dibuktikan bahwa $h(aK) = h(bK)$.Dari hubungan $aK = bK$, didapat $ab^{-1} \in K = Ker(f)$ atau $f(ab^{-1}) = e'$. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
f\left(ab^{-1}\right) &= e' \\
f(a)f\left(b^{-1}\right) &= e' && \textbf{[Definisi homomorfisma } f] \\
f(a)\left[f(b)\right]^{-1} &= e' \\
f(a)\underbrace{\left[f(b)\right]^{-1} f(b)}_{e'} &= e' f(b) \\
f(a) &= f(b) \\
\varphi(aK) &= \varphi(bK)
\end{aligned}
$$

Jadi, h adalah pemetaan.

Akan dibuktikan bahwa h merupakan homomorfisma grup. Diambil sebarang $aK, bK \in G/K$. Akan dibuktikan bahwa $h((aK)(bK)) = h(aK)h(bK)$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
h((aK)(bK)) = h((ab)K) &\overset{def.}{=} f(ab) \\
&= f(a)f(b) && \textbf{[Definisi homomorfisma } f\textbf{]} \\
&\overset{def.}{=} \varphi(aK)\varphi(bK)
\end{aligned}
$$

Jadi, h adalah homomorfisma grup.

Setelah memahami definisi-definisi homomorfisma di atas, sekarang kita bisa dengan mudah memahami diagram di bawah ini.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Im(f) \leq S \\
G/K \arrow[ur, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(a) \\
aK \arrow[ur, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

yakni berlaku $f = h \circ \pi$.

Selanjutnya, dapat diperlihatkan bahwa *image* dari homomorfisma h sama dengan *image* dari homomorfisma f

$$
\begin{aligned}
Im(h) &= \{h(aK) \mid aK \in G/K\} \\
&\overset{def.}{=} \{f(a) \mid a \in G\} \\
&= Im(f).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, dengan mengambil kodomain dari f hanya himpunan $Im(f) \subseteq S$ saja, maka didapatkan

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Im(f) = Im(h) \\
G/K \arrow[ur, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(a) \\
aK \arrow[ur, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}
$$

Akan dibuktikan bahwa h bersifat injektif.
Diambil sebarang $aK, bK \in G/K$ dengan $h(aK) = h(bK)$. Akan dibuktikan bahwa $aK = bK$. Dari kesamaan $h(aK) = h(bK)$ didapatkan bahwa $f(a) = f(b)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow fa[f(b)]^{-1} = f(b)[f(b)]^{-1} \\ &\Rightarrow f(a)f(b^{-1}) = e_S && \textbf{[Eksistensi elemen netral } e_S \in S\textbf{]} \\ &\Rightarrow f(ab^{-1}) = e_S && \textbf{[Definisi homomorfisma } f\textbf{]} \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in K = Ker(f) && \textbf{[Definisi kernel]} \\ aK &= bK \end{aligned}$$

Jadi, h bersifat injektif.
Akan dibuktikan bahwa h bersifat surjektif.
Diambil sebarang $y \in Im(f)$, maka akan selalu terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $y = f(x)$. Oleh karena $x \in G$, maka terdapat $xK \in G/K$ dan $\varphi(xK) = f(x)$. Ini berarti $y = f(x) = \varphi(xK)$ dengan $xK \in G/K$. Jadi h bersifat surjektif.
Dapat disimpulkan bahwa, $h : G/K \to Im(f) = Im(h)$ merupakan isomorfisma grup. Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$G/K \cong Im(f)$$

atau

$$G/Ker(f) \cong Im(f)$$

Selanjutnya, hasil di atas dikemas secara ringkas dalam teorema di bawah ini, yang selanjutnya dinamakan **Teorema Fundamental Homomorfisma Grup (TUHG)**.

Teorema 0.1. Teorema Fundamental Homomorfisma Grup (TUHG)

Jika $f : G \to S$ adalah homomorfisma grup, maka berlaku

$$G/Ker(f) \cong Im(f).$$

Contoh. Diperhatikan homomorfisma $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$, yakni dengan definisi $\beta(n) = \bar{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Mudah dipahami bahwa β bersifat surjektif dan juga mudah diketahui bahwa $Ker(f) = 5\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{Z}_5 \\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "h"] & \end{tikzcd}$$

Berdasarkan TFHG, diperoleh $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$.

Akibat 0.2. Jika $f : G \to S$ adalah epimorfisma grup, maka

$$G \cong S.$$

0.2 How to show two groups are isomorphic

The standard way to show $G \cong H$ is to construct an isomorphism $\phi : G \to H$. When the domain is a quotient, there is another method, due to the **Fundamental Homomorphism Theorem**.
Suppose we want to show that $G/N \cong H$. There are two approaches:

1. Define a map $\phi : G/N \to H$ and prove that it is **well-defined**, a **homomorphism**, and a **bijection**.
2. Define a map $\phi : G \to H$ and prove that it is a **homomorphism**, a **surjection (onto)**, and that $Ker(\phi) = N$