Grup Abelian dan Subgrup

A) Grup Komutatif/Grup Abelian

Definisi 1. *Grup* $(G, *)$ *disebut* ***grup komutatif/grup abelian*** *jika untuk setiap* $g_1, g_2 \in G$ *berlaku* $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Contoh:

- $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$
- $(\mathbb{R}^n, +)$
- $(\mathbb{R}[X], +)$
- $(\mathbb{Z}_n, +_n)$
- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{Q}, +)$
- $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$

B) Sifat-sifat Elementer Grup

Inget kembali bahwa munculnya definisi grup termotivasi dari $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan $+$, untuk mempelajari sifat-sifat elementer dari grup akan lebih mudah jika kita juga berangkat dari grup bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +)$.

Kita perhatikan bahwa dalam grup bilangan bulat$(\mathbb{Z}, +)$ hanya terdapat satu elemen netral, yaitu 0. Hal ini dapat juga kita katakan bahwa elemen netral dalam grup $\mathbb{Z}$ tunggal. Selain itu, kita perhatikan juga bahwa untuk setiap elemen di dalam grup $\mathbb{Z}$ mempunyai tepat satu elemen invers, sebagai contoh: invers 2 adalah -2, tidak ada elemen lain selain -2 di $\mathbb{Z}$ yang merupakan invers dari 2. Pernyataan ini secara ringkas dapat kita katakan bahwa invers setiap elemen di dalam grup $\mathbb{Z}$ tunggal. Kedua sifat tersebut selanjutnya perlu kita lihat keberlakuannya pada sebarang grup $(G, *)$. Perhatikan lemma berikut.

Lemma 1. *Jika* $(G, *)$ *merupakan grup, maka:*

(a) Elemen netral pada grup $(G, *)$ *bersifat tunggal.*

(b) Untuk setiap $g \in G$*, invers dari* g *yaitu* g^{-1} *bersifat tunggal.*

Bukti:

(a) Diberikan grup $(G, *)$, akan dibuktikan bahwa elemen netral pada G bersifat tunggal. Andaikan elemen netral di grup $(G, *)$ tidak tunggal, misalkan $e_1, e_2 \in G$ merupakan elemen netral di $(G, *)$ dimana $e_1 \neq e_2$.

- Oleh karena $e_1 \in G$ merupakan elemen netral di $(G, *)$, maka $e_1 * e_2 = e_2$ ... (1).
- Selanjutnya, oleh karena $e_2 \in G$ merupakan elemen netral di $(G, *)$, maka $e_1 * e_2 = e_1$ ... (2).

Karena $(G, *)$ merupakan suatu grup sehingga operasi * bersifat *well-defined*. Akibatnya dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $e_1 * e_2 = e_2 = e_1$. Terjadi kontradiksi sehingga pengandaian diingkar atau terbukti bahwa $e_1 \neq e_2$ salah. Jadi, $e_1 = e_2$ dan elemen netral pada grup $(G, *)$ bersifat tunggal. $\square$

(b) Diberikan grup $(G, *)$, akan dibuktikan bahwa elemen invers pada G bersifat tunggal. Ambil sebarang $g \in G$, dengan $g_1, g_2 \in G$ merupakan invers dari g di mana $g_1 \neq g_2$. Karena g_1, g_2 invers dari g, sehingga berlaku

$$g * g_1 = g_1 * g = e_G \tag{1}$$
$$g * g_2 = g_2 * g = e_G \tag{2}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 * e_G \\ &= g_1 * (g * g_2) \\ &= (g_1 * g) * g_2 \\ &= e_G * g_2 \\ &= g_2 \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $g_1 = g_2$. Jadi, untuk setiap g, invers dari g yaitu g^{-1} bersifat tunggal. □

C) Subgrup

Telah kita ketahui bersama, salah satu contoh grup yang sudah umum diketahui adalah himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahahan $+$. Beberapa himpunan bagian tak kosong yang dimiliki himpunan $\mathbb{Z}$ diantaranya adalah himpunan $2\mathbb{Z}$ (himpunan semua bilangan genap) dan himpunan $2\mathbb{Z} + 1$ (himpunan semua bilangan ganjil).

Kita perhatikan bahwa himpunan $2\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan sebab:

(a) Untuk setiap $a, b \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in 2\mathbb{Z}$

(b) Untuk setiap $a, b, c \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$

(c) Terdapat $0 \in 2\mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $a \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$

(d) Untuk setiap $a \in 2\mathbb{Z}$ terdapat$-a \in 2\mathbb{Z}$ sedemikian hingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Di lain pihak, himpunan $2\mathbb{Z} + 1$ bukan grup terhadap operasi penjumlahan, sebab operasi penjumlahan tidak tertutup pada himpunan $2\mathbb{Z} + 1$ (jumlahan dua bilangan ganjil hasilnya bukan bilangan ganjil). Dengan memperhatikan dua fenomena tersebut, suatu himpunan bagian tak kosong dari suatu grup dapat menjadi suatu grup atau bukan grup (terhadap operasi yang sama pada grupnya). Pada kasus himpunan bagian tak kosong tersebut merupakan grup, memotivasi didefinisikan pengertian subgrup.

Definisi 2. *Diketahui grup $(G, *)$. Himpunan tak kosong $H \subseteq G$ dikatakan **subgrup** dari $(G, *)$ jika H juga merupakan suatu grup terhadap operasi biner $*$ (operasi biner yang sama dengan grup $(G, *)$).*

Contoh:

- $(2\mathbb{Z}, +)$ subrgup dari $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(\mathbb{R}, +)$
- Himpunan semua matriks diagonal berukuran 2×2, yaitu $D_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$, merupakan subgrup dari grup $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.
- Setiap grup $(G, *)$ selalu memuat subgrup, yaitu paling tidak memuat subgrup $\{e_G\}$ disebut dengan **subgrup trivial** dan subgrup G itu sendiri disebut dengan **improper subgrup**.