Logika dan Teknik Pembuktian

Logika Proposisi, Validitas Argumen, dan Bukti Formal

Yassin Dwi Cahyo - Kelompok Fourier

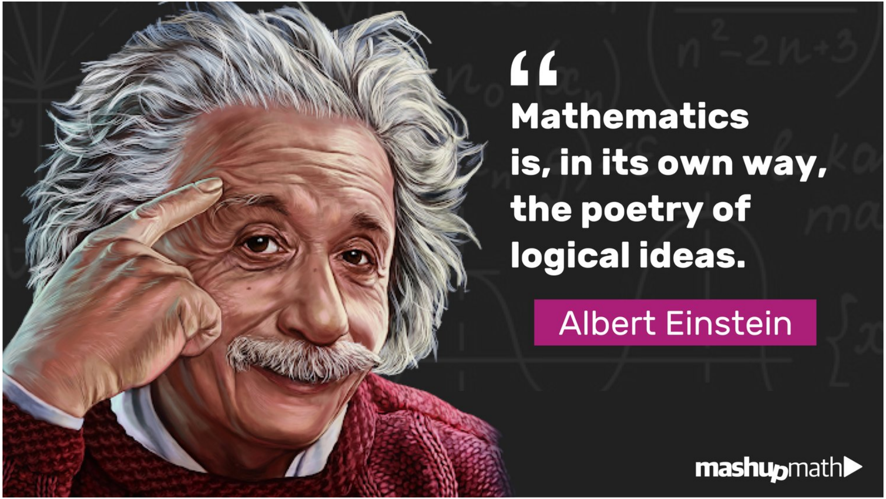
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

18 Oktober 2023

Daftar Isi

Motivasi

Matematika? Ngitung?



Ceritanya, Fuad & Afifah mau makan seblak bareng.

FUAD: Kalau nanti malem ujan, kita ngga jadi makan seblak ya.
AFIFAH: Oke.

Ternyata, malem itu ngga hujan, tapi si Fuad ngga ke kos Afifah untuk makan seblak. Terus si Afifah bete, Afifah ngarep si Fuad dateng ke kosnya.

AFIFAH: Beb, malem ini kan ngga hujan, kok kamu ngga ke kos ku?
FUAD: Lah kan aku ngga janjiin apa-apa kalau malam ngga hujan.

Kalimat Kalau nanti malem ujan, kita ngga jadi makan seblak ya tidak berarti kalau nanti malem ngga ujan, kita jadi makan seblak ya. Jadi, Afifah jangan bete yaa, belajar dulu **Logika Matematika.**

Logika adalah ilmu yang mempelajari cara berpikir dan pembentukan argumen yang valid.

Kenapa harus belajar logika dan teknik pembuktian?

Matematika itu ngga jauh-jauh dari istilah "teorema" dan "teorema" itu harus dibuktiin kebenarannya, ngga asal pake "teorema", untuk buktiin teorema, butuh logika dan teknik pembuktian yang baik dan benar.

Logika Proposisi

Definisi 1 (Proposisi)

Proposisi merupakan kalimat deklaratif atau pernyataan yang memiliki nilai kebenaran benar atau salah, tetapi tidak keduanya.

Contoh 1

1. Digit terakhir dari $2023^{2024!}$ adalah 7;
2. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, bilangan $2n - 1$ merupakan bilangan ganjil;
3. Untuk setiap $x \in \mathbb{N}$, nilai $2x + 4x - 6x = 0$.

Latihan

Tentukan apakah kalimat-kalimat berikut merupakan proposisi.

1. Teoh adalah salah satu anggota kelompok Foyeh;
2. Nukma berasal dari Wonosobo;
3. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku $x + 3 \geq 2023$;
4. Dalvin, kerjakan tugasnya!;
5. Terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $2023 < x < 2024$.

Note:

Kemungkinan nilai kebenaran suatu proposisi, yaitu

1. Benar, notasi "B", "T", atau "1";
2. Salah, notasi "S", "F", atau "0".

Definisi 2 (Negasi/Ingkaran)

Diberikan proposisi P. Proposisi baru yang bernilai dengan "tidak/bukan P" disebut **negasi** dari P, notasi $\neg P$.

P	$\neg P$
B	S
S	B

Definisi 3 (Disjungsi)

DIberikan proposisi P dan Q. Proposisi P dan Q disebut **disjungsi**, notasi $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Pada disjungsi, menghasilkan nilai salah jika kedua proposisi tersebut salah.

Definisi 4 (Konjungsi)

DIberikan proposisi P dan Q. Proposisi P dan Q disebut **konjungsi**, notasi $P \wedge Q$.

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Pada konjungsi, menghasilkan nilai benar jika kedua proposisi tersebut benar.

Definisi 5 (Implikasi)

Diberikan proposisi P dan Q. Proposisi "jika P, maka Q" disebut **implikasi**, notasi $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dalam hal ini, P dikatakan sebagai **premis**, sedangkan Q dikatakan sebagai **konklusi**.

Definisi 6 (Kontraposisi, Konvers, Invers)

Diberikan implikasi $P \Rightarrow Q$.

1. **Kontraposisi** dari $P \Rightarrow Q$ adalah $\neg Q \Rightarrow \neg P$;
2. **Konvers** dari $P \Rightarrow Q$ adalah $Q \Rightarrow P$;
3. **Invers** dari $P \Rightarrow Q$ adalah $\neg P \Rightarrow \neg Q$

Terkadang dua buah proposisi majemuk dapat dikombinasikan dalam berbagai cara namun semua kombinasi tersebut tetap menghasilkan tabel kebenaran yang sama. Hal seperti ini disebut **ekuivalen** *secara logika dan dinyatakan dalam definisi sebagai berikut.*

Definisi 7 (Ekuivalen)

Diberikan proposisi P dan Q. Proposisi P dikatakan **ekuivalen** dengan proposisi Q secara logika jika keduanya memiliki tabel kebenaran yang identik, notasi $P \equiv Q$.

Perhatikan tabel kebenaran berikut.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$Q \Rightarrow P$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	B	B
S	B	B	S	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B	B

Teorema 1

Setiap implikasi ekuivalen (atau setara) dengan kontraposisinya.

Latihan:

Tentukan keekuivalenan proposisi berikut.

1. $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \equiv \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$
2. $(\kappa \wedge \neg\delta) \vee (\psi \wedge \neg\kappa) \equiv (\kappa \Rightarrow \delta) \Rightarrow \neg(\psi \vee \kappa)$
3. $(A \wedge (B) \Rightarrow (A \wedge C) \equiv \vee\neg B \vee C$

Definisi 8 (Biimplikasi)

Diberikan proposisi P dan Q. Proposisi "P jika dan hanya jika Q" disebut **biimplikasi**, notasi $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Definisi 9 (Tautologi)

Sebuah kalimat majemuk disebut Tautologi jika ia benar untuk semua kasus.

Latihan:

Tentukan apakah proposisi berikut merupakan tautologi atau tidak.

1. $(((P \wedge Q) \wedge R) \wedge S) \wedge T) \Rightarrow (\neg P \vee T)$
2. $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))$
3. $((A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_1 \Rightarrow A_3)) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \wedge A_3))$

Argumen dan Validitas Argumen

Definisi 10 (Argumen)

Argumen adalah serangkaian pernyataan yang terdiri dari premis-premis dan kesimpulan.

Dari definisi tersebut, sebuah argumen mungkin valid atau tidak valid.

Definisi 11 (Argumen Valid dan Argumen Invalid)

Diberikan himpunan berhingga premis $P = \{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n\}$ dan kesimpulan K. Suatu argumen dikatakan **valid** jika dan hanya jika terdapat implikasi dari premis P menjadi kesimpulan K sedemikian sehingga

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n \Rightarrow K$$

adalah tautologi. Jika implikasi $P \Rightarrow K$ tidak merupakan tautologi, maka argumen tersebut dikatakan **invalid**.

Bagaimana membuktikan validitas argumen? Secara umum, membuktikan validitas argumen dapat dilakukan dengan

1. Tabel kebenaran, dengan syarat harus berupa tautologi.
2. Bukti formal. Apa itu bukti formal?

Bagaimana membuktikan invaliditas argumen? Cari *counterexample*.

Contoh Pembuktian Invaliditas

Apakah $[(P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \Rightarrow P) \wedge Q] \Rightarrow \neg R$ merupakan argumen yang valid?

Jawab:

Tidak, sebab dipilih *counterexample* $P = 0, Q = 1$, dan $R = 1$. Perhatikan

$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{(P \Rightarrow \neg Q)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg R \Rightarrow P)}_{1} \wedge \underbrace{Q}_{1}]}_{1} \Rightarrow \underbrace{\neg R}_{0}}_{0}$$

Jadi, terbukti bahwa argumen $[(P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \Rightarrow P) \wedge Q] \Rightarrow \neg R$ tidak valid ■

Pertanyaan

Jika $100 < 3$ maka $2023 < 12$.

$100 < 3$,

Kesimpulan: $2023 < 12$.

Valid atau Tidak?

Bukti Formal

Pertanyaan

Jika $100 < 3$ maka $2023 < 12$.
$100 < 3$,
Kesimpulan: $2023 < 12$.
Valid atau Tidak?
Jawab: Valid. Bukti? pakai bukti formal. Apa itu bukti formal?

Definisi 12 (Bukti Formal)

Bukti formal adalah serangkaian langkah untuk membuktikan validitas argumen dengan aturan-aturan tertentu yang disebut "*rule of inference*" dan "*rule of replacement*".

Definisi 13 (*Rule of Inference*)

Rule of inference adalah aturan yang digunakan dalam bukti formal untuk mengambil kesimpulan yang benar dari premis-premis yang diberikan. Beberapa jenis *rule of inference*, yaitu modus ponen, modus tollens, simplifikasi, konjungsi, *hypothetical sylogism, disjunctive sylogism, constructive dilemma, destructive dilemma*, dan *addition*.

Teorema 2 (Modus Ponen (MP))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge P$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$ merupakan **tautologi** ■

Teorema 3 (Modus Tollens (MT))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$
B	B	B	S	S	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$ merupakan **tautologi** ■

Teorema 4 (*Hypothetical Sylogism* (HS))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline \therefore P \Rightarrow R \end{array}$$

Argumen di samping **valid**, sebab $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel di atas, terbukti bahwa $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ merupakan **tautologi** ■

Teorema 5 (*Disjunctive Sylogism* (DS))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $[(P \vee Q) \wedge (\neg P)] \Rightarrow Q$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P)$	$[(P \vee Q) \wedge (\neg P)] \Rightarrow Q$
B	B	S	B	S	B
B	S	S	B	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	B	S	S	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $[(P \vee Q) \wedge (\neg P)] \Rightarrow Q$ merupakan **tautologi** ■

Teorema 6 (*Addition* (Add))

Perhatikan argumen berikut!

$$\frac{P}{\therefore P \vee Q}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $P \Rightarrow (P \vee Q)$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
B	B	B	B
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $P \Rightarrow (P \vee Q)$ merupakan **tautologi**■

Teorema 7 (Simplifikasi (Simpl))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ merupakan **tautologi.**

Bukti:
Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ merupakan **tautologi**■

Teorema 8 (Konjungsi (Conj))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \\ \underline{Q \qquad\quad} \\ \therefore P \wedge Q \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ merupakan **tautologi.**

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ merupakan **tautologi**■

Teorema 9 (*Constructive Dilemma* (CD))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \\ P \vee R \\ \hline \therefore Q \vee S \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (P \vee R)] \Rightarrow (Q \vee S)$ merupakan **tautologi.**

Bukti: Pembuktian diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 10 (*Destructive Dilemma* (DD))

Perhatikan argumen berikut!

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \\ \neg Q \vee \neg S \\ \hline \therefore \neg P \vee \neg R \end{array}$$

Argumen di atas **valid,** sebab $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)] \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$ merupakan **tautologi.**

Bukti: Pembuktian diserahkan kepada pembaca ■

Definisi 14 (*Rule of Replacement*)

Rule of replacement adalah aturan yang digunakan dalam bukti formal untuk menggantikan suatu bentuk pernyataan logika dengan bentuk ungkapan pernyataan yang lain, dengan syarat bahwa keduanya setara atau ekuivalen dengan tujuan untuk membantu dalam menyederhanakan atau membuktikan pernyataan logika. Beberapa jenis *rule of replacement*, yaitu De Morgan, komutatif, assosiatif, distributif, *double negation*, *transposition*, *material implication, material equivalent, exportation,* dan tautologi.

Jika sebagian atau keseluruhan dari sebuah pernyataan majemuk diganti dengan suatu pernyataan lain yang ekivalen secara logis dengan yang diganti itu, maka nilai pernyataan majemuk yang baru adalah sama dengan nilai kebenaran pernyataan majemuk semula.

Teorema 11 (De Morgan (deM))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$;
2. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

Bukti:

Perhatikan tabel kebenaran berikut!

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$
B	B	S	S	S	S	S	S
B	S	S	B	B	S	B	S
S	B	B	S	B	S	B	S
S	S	B	B	B	B	B	B

Dari tabel kebenaran di atas, terbukti bahwa $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ dan $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ ■

Teorema 12 (Komutatif(Comm))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $P \vee Q \equiv Q \vee P$;
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.

Bukti:

Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 13 (Assosiatif(Ass))

Diberikan pernyataan P, Q dan R, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$;
2. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$.

Bukti:

Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 14 (Distributif(Distr))

Diberikan pernyataan P, Q dan R, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
2. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Bukti:

Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 15 (*Double Negation* (DN))

Diberikan pernyataan P, berlaku $P \equiv \neg\neg P$.

Bukti:

Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 16 (*Transposition*(Trans))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.

Bukti:

Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 17 (Tautologi (Taut))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $P \equiv P \vee P$;
2. $P \equiv P \wedge P$.

Bukti:
Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 18 (*Material Equivalent*(Equiv))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku pernyataan-pernyataan ekuivalen sebagai berikut.

1. $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$;
2. $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Bukti:
Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 19 (*Exportation* (Exp))

Diberikan pernyataan P, Q, dan R, berlaku $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Bukti:
Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Teorema 20 (*Material Implication*(Impl))

Diberikan pernyataan P dan Q, berlaku $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.

Bukti:
Bukti diserahkan kepada pembaca ■

Latihan Soal

Nomor 1

Buatlah simbolisasi logika matematika dari setiap pernyataan berikut dan periksa validitasnya dengan bukti formal!

"Teoh adalah seorang mahasiswa atau pekerja. Jika Teoh adalah seorang mahasiswa, maka ia memiliki jadwal kuliah yang padat. Ternyata Teoh tidak memiliki jadwal kuliah yang padat. Jadi, Teoh adalah seorang pekerja."

Penyelesaian:

Nomor 1

Buatlah simbolisasi logika matematika dari setiap pernyataan berikut dan periksa validitasnya dengan bukti formal!

"Teoh adalah seorang mahasiswa atau pekerja. Jika Teoh adalah seorang mahasiswa, maka ia memiliki jadwal kuliah yang padat. Ternyata Teoh tidak memiliki jadwal kuliah yang padat. Jadi, Teoh adalah seorang pekerja."

Penyelesaian:

Misalkan

P = Teoh adalah seorang mahasiswa; Q = Teoh adalah pekerja;
R = Teoh memiliki jadwal kuliah yang padat

Simbolisasi untuk peryataan tersebut adalah

$$P \vee Q$$
$$P \Rightarrow R$$
$$\neg R$$
$$\therefore Q$$

Bukti formal untuk validitas soal nomor 1 sebagai berikut.

1.	$P \vee Q$	Pr.
2.	$P \Rightarrow R$	Pr.
3.	$\neg R$	Pr.$\backslash \therefore Q$
4.	$\neg P$	$2, 3,$ MT.
5.	Q	$1, 4,$ DS.

Jadi, dengan menggunakan bukti formal, dapat disimpulkan bahwa Teoh adalah seorang pekerja. Oleh karena itu, argumen tersebut valid. ■

Nomor 2 - UAS TA 2019/2020

Dengan menggunakan metodee *Reductio Ad Absurdum* (kontradiksi), buktikan bahwa untuk semua bilangan asli a dan b berlaku $a^2 - 4ab \neq 2$.

Penyelesaian:

Nomor 2 - UAS TA 2019/2020

Dengan menggunakan metodee *Reductio Ad Absurdum* (kontradiksi), buktikan bahwa untuk semua bilangan asli a dan b berlaku $a^2 - 4ab \neq 2$.

Penyelesaian:
Diandaikan terdapat bilangan asli a dan b sedemikian sehingga $a^2 - 4ab = 2$ atau $a^2 = 2 + 4ab = 2(1 - 2b) \in 2\mathbb{N}$. Oleh karena $a^2 \in 2\mathbb{N}$, maka berakibat $a \in 2\mathbb{N}$ dan a dapat dinyatakan sebagai $a = 2k$ untuk setiap bilangan asli k. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a^2 &= 2 + 4b \\ \Leftrightarrow (2k)^2 &= 2 + 4b \\ \Leftrightarrow 4k^2 &= 2 + 4b \\ \Leftrightarrow 2k^2 &= 1 + 2b \end{aligned}$$

Pad ruas kiri, berlaku $2k^2 \in 2\mathbb{N}$ tetapi pada ruas kanan, berlaku $2b + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$. Terjadi kontradiksi, yaitu $2k^2$ meerupakan bilangan genap dan $2k^2$ merupakan bilangan ganjil. Jadi, terbukti bahwa untuk semua bilangan asli a dan b berlaku $a^2 - 4ab \neq 2$. ■

Nomor 3 (UTS TA 2022/2023)

Buktikan validitas argumen di bawah ini.

(UTS TA 2022/2023 Kelas A, C)

1. $(S \vee W) \Rightarrow (B \wedge T)$ Pr
2. $(T \vee H) \Rightarrow M$ Pr. $/ \therefore S \Rightarrow M$

Penyelesaian:

1. $(S \vee W) \Rightarrow (B \wedge T)$	Pr
2. $(T \vee H) \Rightarrow M$	Pr.
3. S	(CP) $/ \therefore$
4. $S \vee W$	3, *Ad*
5. $B \wedge T$	1, 4, *MP*
6. $T \wedge B$	5, *Comm*
7. T	6, *Simp*
8. $T \vee H$	7, *Add*
9. M	2, 8, *MP*

Nomor 4 - UTS TA 2022/2023

Apakah proposisi $(P \vee Q) \Rightarrow Q$ ekuivalen dengan proposisi $\neg P \vee (P \wedge Q)$? Jelaskan.

Penyelesaian:

Untuk mengetahui keekuivalensian proposisi $(P \vee Q) \Rightarrow Q$ dengan proposisi $\neg P \vee (P \wedge P)$, perhatikan tabel kebenaran berikut.

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$\neg P \vee (P \wedge Q)$
B	B	B	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	S
S	B	B	B	B	S	B
S	S	S	B	B	S	B

Berdasarkan tabel kebenaran di atas, diperoleh bahwa proposisi $(P \vee Q) \Rightarrow Q$ ekuivalen dengan proposisi $\neg P \vee (P \wedge Q)$.

Nomor 5 (UTS TA 2022/2023)

Buktikan validitas argumen di bawah ini.

(UTS TA 2022/2023 Kelas B, D; UTS TA 2021/2022 Kelas A, B)

1.	$(S \vee W) \Rightarrow (B \wedge T)$	Pr
2.	$(T \vee H) \Rightarrow M$	Pr
3.	S	Pr/ $\therefore M$

Penyelesaian:

Bukti validitas

1.	$(S \vee W) \Rightarrow (B \wedge T)$	Pr
2.	$(T \vee H) \Rightarrow M$	Pr.
3.	S	Pr. $\therefore M$
4.	$S \vee W$	3, *Ad*
5.	$B \wedge T$	1, 4, *MP*
6.	$T \wedge B$	5, *Comm*
7.	T	6, *Simp*
8.	$T \vee H$	7, *Add*
9.	M	2, 8, *MP*

Nomor 6

Buktikan validitas argumen

1.	$(P \Rightarrow Q) \vee R$	Pr.
2.	$[(P \Rightarrow Q) \vee R] \Rightarrow \neg R$	Pr.
3.	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	Pr. / $\therefore \neg Q$

Penyelesaian:
Bukti formal untuk validitas soal nomor 6 sebagai berikut.

1.	$(P \Rightarrow Q) \vee R$	Pr.
2.	$[(P \Rightarrow Q) \vee R] \Rightarrow \neg R$	Pr.
3.	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	Pr. / $\therefore \neg Q$
4.	$\neg R$	2, 1 MP.
5.	$P \Rightarrow Q$	1, 4 DS.
6.	$Q \Rightarrow R$	3, 5 MP
7.	$\neg Q$	6, 4 MT

Jadi, dengan menggunakan bukti formal, terbukti bahwa argumen tersebut valid. ■

Nomor 7

Buktikan validitas argumen

1.	$\Psi \Rightarrow (\Delta \wedge \neg\Omega)$	Pr.
2.	$(\Delta \vee \Omega) \Rightarrow \Theta$	Pr.
3.	Ψ	Pr./ $\therefore \Theta$

Penyelesaian:

Bukti formal untuk validitas soal nomor 7 sebagai berikut.

1.	$\Psi \Rightarrow (\Delta \wedge \neg\Omega)$	Pr.
2.	$(\Delta \vee \Omega) \Rightarrow \Theta$	Pr.
3.	Ψ	Pr./ $\therefore \Theta$
4.	$\Delta \wedge \neg\Omega$	1, 3 MP.
5.	Δ	4 Simp.
6.	$\Delta \vee \Omega$	5 Add.
7.	Θ	2, 6 MP.

Jadi, dengan menggunakan bukti formal, terbukti bahwa argumen tersebut valid. ■

Latihan

1. If P, Q and R are the variables of a sentences, show the truth value of the following sentences.
   1. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \equiv ((P \land Q) \Rightarrow R)$;
   2. $(P \Rightarrow (Q \lor R)) \equiv ((P \land \neg Q) \Rightarrow R)$.
2. Tanpa tabel kebenaran, jelaskan apakah pernyataan berikut merupakan tautologi atau bukan

$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \land Q) \Rightarrow R)$$

3. Tulis pernyataan ini dalam bentuk simbolik dan selidiki validitasnya.
   "Izat memuji Ferdi hanya jika Ferdi dapat dibanggakan. Ferdi berprestasi dalam bidang sport jika dan hanya jika Ferdi dapat dibanggakan. Jika Ferdi belajar keras, maka Ferdi tidak berprestasi dalam bidang sport. Oleh karena itu, jika Izat memuji saya, maka Ferdi tidak belajar keras."