

Asistensi Kalkulus 3

Limit dan Kekontinuan, Turunan Parsial, dan Masalah Ekstrem

Yassin Dwi Cahyo
24010122130053

Bidang Riset
Asosiasi Matematika Terapan



Kamis, 12 Oktober 2023

Note:

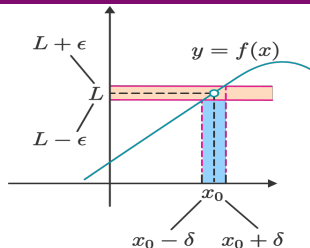
File ini tidak mencakup semua materi yang dipelajari dari pertemuan 1 sampai dengan 7, tetapi telah disesuaikan dengan materi yang akan diujikan pada UTS Kalkulus 3, sesuai dengan kisi-kisi yang diberikan oleh Bu Zani.

Kisi-kisi UTS Kalkulus 3 (Bu Zani)

- 1 Limit dan Kekontinuan;
- 2 Turunan;
- 3 Kasus minimum/maksimum dengan pengali Lagrange.

Mohon maaf jika terdapat banyak kekurangan (*typo*, salah ngitung, dll). Semoga *file* ini bermanfaat dan doakan penulis agar selalu sehat dan sukses. Aamiin YRA

Limit dan Kekontinuan Fungsi Multivariabel



Definisi 1 (Limit Fungsi Satu Variabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 titik kluster himpunan A , dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di x_0 , jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - x_0| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definisi 2 (Limit Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (a, b) titik kluster himpunan A , dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di (a, b) , jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x, y) \in A$ dengan $0 < \|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$, berlaku $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

Definisi 3 (Limit Fungsi Multivariabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$, (a_1, a_2, \dots, a_n) titik kluster himpunan A , dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di (a_1, a_2, \dots, a_n) , jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ dengan $0 < \|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (a_1, a_2, \dots, a_n)\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$, berlaku $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \epsilon$.

Teorema 1 (Sifat-Sifat Limit)

Jika $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ dan $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$, maka

① $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k$, di mana $k \in \mathbb{R}$;

② $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$;

③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$;

④ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L + M$;

⑤ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \times g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L \times M$;

⑥ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$;

⑦ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [a \times g(x,y)] = a \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = a \times M$, di mana $a \in \mathbb{R}$.

Contoh 1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-2)} x^2 \stackrel{1.1.5}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-2)} x \times \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-2)} x$$

$$\stackrel{1.1.2}{=} 3 \times 3 = 9$$

Contoh 2

Nilai

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{-4 + 2x - 4x^2 + 2x^3 + y + x^2y - 4y^2 + 2xy^2 + y^3}{2x + y - 4}$$

Tidak dapat langsung dihitung dengan menggunakan **Teorema 1**, sebab nilai $2x + y - 4 = 0$ untuk $(x, y) = (1, 2)$. Tetapi bentuk limit tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(1 + x^2 + y^2)(\cancel{2x + y - 4})}{\cancel{2x + y - 4}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 1 + x^2 + y^2 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Bentuk $2x + y - 4$ dapat di-*cancel*, sebab, pada limit dituntut $(x, y) \neq (1, 2)$ atau $2x + y - 4 \neq 0$.

Teorema 2

Jika $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ ada, maka nilai limitnya tunggal.

Teorema 2

Jika $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ ada, maka nilai limitnya tunggal.

Akibat 1

Misalkan K_1 dan K_2 dua subhimpunan di daerah domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan (a,b) merupakan titik limit dari K_1 dan K_2 . Jika

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in K_1}} f(x,y) & \neq & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in K_2}} f(x,y) \end{array}$$

maka $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ tidak ada.

Definisi 4 (Definisi Kekontinuan)

Diberikan fungsi dengan domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dan titik $(a, b) \in D_f$. Fungsi f kontinu di (a, b) jika

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Definisi 5 (Definisi Formal Kekontinuan)

Diberikan fungsi f dengan domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dan titik $(a, b) \in D_f$. Fungsi f dikatakan kontinu di titik (a, b) jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $(x, y) \in D_f$ yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta,$$

maka

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon.$$

Dengan kata lain, untuk mengecek $f(x, y)$ kontinu di (a, b) haruslah memenuhi ketiga kondisi berikut.

- ❶ $f(a, b)$ ada;
- ❷ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y);$
- ❸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$

Teorema 3

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) dan fungsi $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) , maka

- ❶ $(f + g)$ kontinu di (a, b) ;
- ❷ $(f - g)$ kontinu di (a, b) ;
- ❸ $(f \cdot g)$ kontinu di (a, b) ;
- ❹ $\left(\frac{f}{g}\right)$ kontinu di (a, b) , asalkan $g(a, b) \neq 0$.

Teorema 4

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) dan fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di $f(a, b)$, maka $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) .

Contoh 3 (UTS TA 2022/2023)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x)^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

- Dekati sepanjang $y = -x$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-(-x))^2}{x^2 + (-x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x)^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Oleh karena $(1) \neq (2)$, diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$ tidak ada.

Contoh 4 (UTS TA 2021/2022)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Penyelesaian:

Gunakan transformasi $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta + r \sin \theta \sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r}(\cos \theta + r \sin \theta)}{\cancel{r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \end{aligned}$$

Oleh karena nilai limit bergantung pada besaran sudut θ , akibatnya nilai limit akan berbeda-beda

sehingga $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tidak ada.

Contoh 5 (UTS TA 2020/2021)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2y^2 - 1}{\sqrt{xy} - 1}.$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2y^2 - 1}{\sqrt{xy} - 1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2y^2 - 1}{\sqrt{xy} - 1} \times \left(\frac{\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\cancel{(xy - 1)}(xy + 1)(\sqrt{xy} + 1)}{\cancel{xy - 1}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (xy + 1)(\sqrt{xy} + 1) \\ &= (1 \cdot 1 + 1)(\sqrt{1 \cdot 1} + 1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa nilai $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2y^2 - 1}{\sqrt{xy} - 1} = 4.$

Contoh 6 (UTS TA 2020/2021)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2x}{x^4 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot 3x}{\cancel{x^2}(x^2 + 1)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- Dekati sepanjang $y = x^2$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Oleh karena (3) \neq (4), diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}$ tidak ada.

Contoh 7 (UTS TA 2019/2020)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}^2}{2 \cdot \cancel{(x-1)}^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

- Dekati sepanjang $y = x^2$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)^2 + (x^2-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}^2(x+1)}{\cancel{(x-1)}^2(1+(x+1)^2)} \\ &= \frac{2}{1+4} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (6)$$

Oleh karena (5) \neq (6), diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ tidak ada.

Contoh 8 (UTS TA 2022/2023)

Tentukan nilai k (jika ada) agar fungsi $f(x, y)$ kontinu di $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ k; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Penyelesaian:

Agar fungsi $f(x, y)$ kontinu di $(0, 0)$, maka haruslah dipenuhi semua syarat berikut.

- ❶ Nilai $f(0, 0)$ ada;
- ❷ Nilai $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ ada; dan
- ❸ Nilai $f(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

Berdasarkan pada kesimpulan **contoh 1**, yaitu $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ tidak ada, akibatnya tidak ada $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x, y)$ kontinu di $(0, 0)$

Latihan Mandiri

- 1 Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2024x + 2023y) - 2024x - 2023y}{\sqrt{2024x^{2023} + 2023y^{2024}}}.$$

- 2 Dengan definisi limit $\epsilon - \delta$, buktikan bahwa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 e^{xy}}{x^2 + e^y} = 0.$$

- 3 Tentukan nilai t (jika ada) agar fungsi $f(x, y)$ kontinu di $(0, 0)$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [1 + \cos(x^2 + y^2)] ; & (x, y) \neq (0, 0) \\ t; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 4 Tentukan nilai u (jika ada) agar fungsi $g(x, y)$ kontinu di $(0, 0)$

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^4 + (x + \sqrt[3]{y})^2 + y^4}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ u; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Turunan Parsial

Definisi 6 (Turunan Parsial Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- ❶ Jika x berubah-ubah dan y dijaga agar tetap konstan, katakanlah $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel x . Turunan di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di $(x_0, y_0) \in D$, yaitu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- ❷ Jika y berubah-ubah dan x dijaga agar tetap konstan, katakanlah $x = x_0$, maka $f(x_0, y)$ adalah fungsi satu variabel y . Turunan di $y = y_0$ disebut turunan parsial f terhadap y di $(x_0, y_0) \in D$, yaitu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Note:

Jika $z = f(x, y)$, maka turunan parsial dapat dinyatakan dengan notasi lain sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f; \\ f_y(x, y) = f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f \end{aligned}$$

Contoh 9

Diketahui fungsi $f(x, y) = x^2 + 2y$. Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Penyelesaian:

- Turunan parsial f terhadap x

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2y - (x^2 + 2y)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y - x^2 - 2y}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

- Turunan parsial f terhadap y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y} &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2(y + \Delta y) - (x^2 + 2y)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2y + 2\Delta y - x^2 - 2y}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{2\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Aturan menentukan turunan parsial fungsi $z = f(x, y)$

- 1 Untuk menentukan f_x , **pandang y sebagai konstanta** dan turunkan $f(x, y)$ terhadap x ;
- 2 Untuk menentukan f_y , **pandang x sebagai konstanta** dan turunkan $f(x, y)$ terhadap y .

Contoh 10

Diketahui fungsi $f(x, y) := x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tentukan $f_x(2, 1)$ dan $f_y(2, 1)$!

Penyelesaian:

- 1 Turunkan parsial f terhadap x

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \Rightarrow f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 \\ = 16$$

- 2 Turunkan parsial f terhadap y

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y \Rightarrow f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \\ = 8$$

Contoh 11

Diketahui $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{jika } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jika } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Tentukan $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$!

Penyelesaian:

- Untuk $(x, y) \neq (0, 0)$
 - Turunan parsial f terhadap x

$$f_x = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Turunan parsial f terhadap y

$$f_y = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Untuk $(x, y) = (0, 0)$
 - Turunan parsial f terhadap x

$$\begin{aligned}f_x(0, 0) &\stackrel{def.}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} \\&= 0\end{aligned}$$

- Turunan parsial f terhadap y

$$\begin{aligned}f_y(0, 0) &\stackrel{def.}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \\&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} \\&= 0\end{aligned}$$

Definisi 7 (Turunan Parsial Fungsi Multivariabel)

Diberikan fungsi n variabel $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Turunan parsial f terhadap x_i (variabel ke $-i$) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Contoh 12

Jika $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$, maka

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

$$f_y = xe^{xy} \ln z$$

$$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

Contoh 13

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, maka

$$f_x = y + 3z$$

$$f_y = x + 2z$$

$$f_z = 2y + 3x$$

Diketahui fungsi dua variabel $z = f(x, y)$. Jika f dapat diturunkan, maka dapat didefinisikan dua fungsi bernilai real yang nilainya di titik (x, y) masing masing adalah

$$D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) \text{ dan } D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$$

Misalkan pula fungsi ini dapat diturunkan, maka dikenalkan turunan parsial dari $D_1 f(x, y)$ terhadap x dan y , masing-masing ditulis sebagai

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{11}^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{12}^2 f(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

yang disebut **turunan parsial order 2**. Turunan parsial order 2 lainnya diperoleh dengan menurun secara parsial $D_2 f(x, y)$ terhadap x dan y yang masing-masing ditulis sebagai

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{21}^2 f(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{22}^2 f(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

Teorema 5 (Teorema Clairaut)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ dalam domain D yang memuat (a, b) . Jika f_{xy} dan f_{yx} keduanya **kontinu** di D , maka

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Contoh 14

Diberikan fungsi $f(x, y) := x^m y^n$. Turunan parsial pertama fungsi $f(x, y)$ adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}.$$

Sedangkan turunan parsial order dua adalah

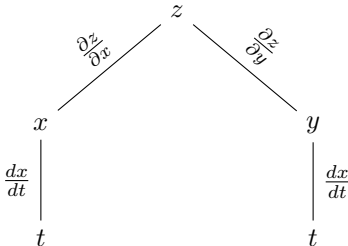
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)x^m y^{n-2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = mn x^{m-1} y^{n-1}$$

Teorema 6 (Aturan Rantai (1))

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan terhadap variabel x dan y , di mana $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ yang keduanya terdiferensialkan terhadap t , maka z fungsi yang terdiferensialkan terhadap t dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ilustrasi:

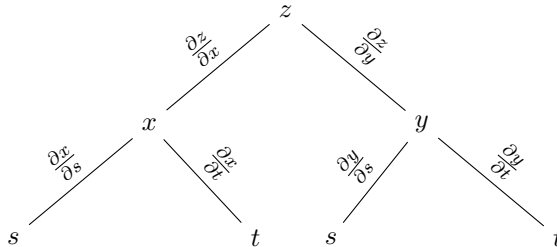


Teorema 7 (Aturan Rantai (2))

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan terhadap variabel x dan y , di mana $x = g(s, t)$ dan $y = h(s, t)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan terhadap s dan t , maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ilustrasi:



Contoh 15

Diketahui $z = f(x, y)$ di mana $x = r^2 + s^2$ dan $y = 2rs$. Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$..

Penyelesaian:

Dengan aturan rantai, diperoleh bahwa

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} 2s + \frac{\partial z}{\partial y} 2r$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} 2s \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} 2r \right) = 2s \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= 2s \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right] + 2r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right] + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= 2s \cdot \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (2r) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} (2s) \right] + 2r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (2s) \right] + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} &= 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (4r^2 + 4s^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

Akibat 2 (Turunan Parsial Fungsi Implisit)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ dan memenuhi $F(x, y, z) = 0$ sehingga $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 0$. Turunan parsial F terhadap x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Turunan parsial F terhadap y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

dengan syarat $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Bukti: Dengan aturan turunan, perhatikan bahwa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Dengan cara analog, diperoleh $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ ■.

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$. Turunan parsial f_x itu hanya mengukur perubahan suatu nilai dalam sumbu x saja dan f_y itu hanya mengukur perubahan suatu nilai dalam sumbu y saja. Bagaimana jika ada perubahan terhadap arah yang lain?

Misalkan $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{i} = (1, 0)$, dan $\vec{j} = (0, 1)$. Turunan parsial dari $f(x, y)$ dapat didefinisikan ulang sebagai

$$f_x(\vec{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{p} + h\vec{i}) - f(\vec{p})}{h} \quad \text{dan} \quad f_y(\vec{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{p} + h\vec{j}) - f(\vec{p})}{h}$$

Oleh karena vektor satuan tidak hanya \vec{i} dan \vec{j} , katakanlah $\vec{u} = (u_1, u_2)$, maka turunan berarah f dalam arah \vec{u} dapat didefinisikan.

Definisi 8 (Turunan Berarah)

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$ dan vektor satuan $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Turunan berarah dari f di $\vec{p} = (x_0, y_0)$ dalam arah \vec{u} adalah

$$D_{\vec{u}}f(\vec{p}) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{p} + h\vec{u}) - f(\vec{p})}{h}$$

atau

Teorema 8

Jika f terdiferensialkan (linear secara lokal) di \vec{p} , maka f mempunyai turunan berarah di \vec{p} dalam arah vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ dan

$$D_{\vec{u}}f(\vec{p}) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{p}) = u_1 f_x(\vec{p}) + u_2 f_y(\vec{p}).$$

Lebih lanjut, $\nabla f(\vec{p})$ disebut dengan gradien dari fungsi f .

Contoh 16

Turunan parsial dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di titik $(1, 2)$ adalah

$$D_{\vec{i}}f(1, 2) = 2x \Big|_{(1,2)} = 2; \quad D_{\vec{j}}f(1, 2) = 2y \Big|_{(1,2)} = 4.$$

Turunan berarah dari f di $(1, 2)$ dalam vektor $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ adalah

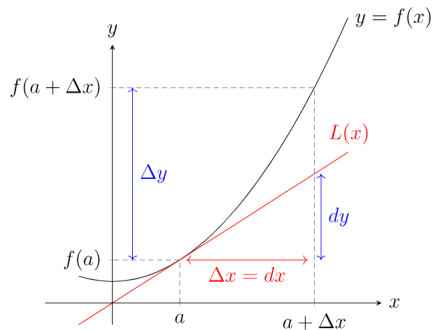
$$D_{\vec{u}}f(1, 2) = (2, 4) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1.2 + 3.2 = 4.4$$

Latihan Mandiri

- 1 Seekor lebah berada dalam suatu ruangan dengan suhu pada titik (x, y, z) adalah $T(x, y, z) = \frac{120}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$. Jika lebah tersebut berada pada posisi $(1, 1, 1)$, ke arah mana lebah tersebut harus terbang agar suhunya menurun paling cepat?
- 2 Pasir jatuh ke bawah sedikit demi sedikit dengan laju 2 cm^3 per detik dan setiap saat membentuk kerucut. Ketika tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm , laju pertambahan tingginya adalah 1 cm per detik. Hitunglah laju pertambahan jari-jari kerucut pasir pada saat tinggi pasir 3 cm dan jari-jari 1 cm .

Keterdiferensialan dan Bidang Singgung

Motivasi: Diferensial Fungsi Satu Variabel



Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, notasi $f'(a)$, jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada. Lebih lanjut,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dapat diperumum untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = m.$$

Secara intuitif (cek gambar), diperoleh

$$m = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow m \, dx = dy \Leftrightarrow f'(x)dx = dy.$$

Diferensial fungsi f ditulis dengan df didefinisikan sebagai $df = f'(x) \, dx$ dengan dx sebarang bilangan dan disebut dengan diferensial x .

Definisi 9 (Diferensial Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$. Fungsi f dikatakan terdiferensiabel di (x, y) jika

$$dz = f_x(x, y) + f_y(x, y)$$

Lebih lanjut, dz disebut diferensial (diferensial total) z .

Teorema 9

Jika $f(x, y)$ diferensiabel di (x_0, y_0) , maka $f(x, y)$ kontinu di (x_0, y_0) .

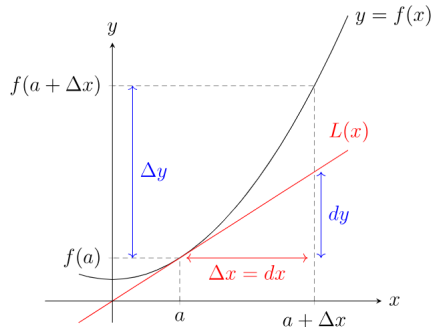
Teorema 10

Jika $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ keduanya kontinu di (x_0, y_0) , maka $f(x, y)$ terdiferensialkan di (x_0, y_0) .

Note:

Untuk membuktikan bahwa $f(x, y)$ terdiferensiabel di (x_0, y_0) , tunjukkan saja bahwa $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ kontinu di (x_0, y_0) .

Motivasi: Diferensial Fungsi Satu Variabel



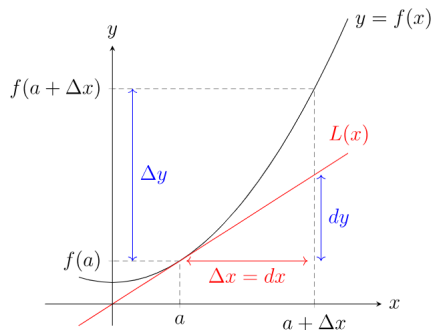
Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, notasi $f'(a)$, jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ada. Perhatikan bahwa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(a) \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x} = 0$

Motivasi: Hampiran Linear Satu Variabel



Berapakah nilai $f(a + \Delta x)$? Untuk Δx yang kecil, diperoleh $f(a + \Delta x) \approx L(a + \Delta x)$ dengan $L(x)$ merupakan hampiran linear dari $f(x)$ di sekitar a .

Dari ilustrasi tersebut, $L(x)$ merupakan persamaan garis singgung terhadap $f(x)$ di $x = a$. Dengan kata lain, persamaan garis singgung melalui $(a, f(a))$ dengan gradien $f'(a)$, yaitu

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Definisi 10 (Persamaan Bidang Singgung)

Diberikan fungsi $z = f(x, y)$ dan titik (a, b) berada pada domain fungsi f . Persamaan bidang singgung $z = f(x, y)$ yang melalui $(a, b, f(a, b))$ adalah

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \Leftrightarrow z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

Contoh 17

Tentukan persamaan bidang singgung pada fungsi $f(x, y) := x^2 + xy + 3y^2$ yang melalui titik $(1, 1)$.

Penyelesaian:

Dari $f(x, y) := x^2 + xy + 3y^2$, diperoleh bahwa

$$f_x(x, y) = 2x + y \xrightarrow{\text{subs.}(1,1)} f_x(1, 1) = 2 + 1 = 3$$

$$f_y(x, y) = x + 6y \xrightarrow{\text{subs.}(1,1)} f_y(1, 1) = 1 + 6 = 7$$

$$f(1, 1) = 1 + 1 + 3 = 5$$

Sehingga, persamaan bidang singgungnya adalah

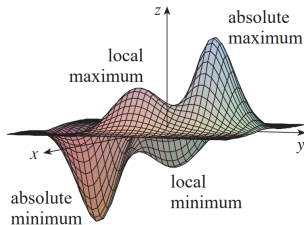
$$\begin{aligned} z &= 3(x - 1) + 7(y - 1) + 5 \\ &= 3x + 7y - 5 \end{aligned}$$

Maksimum dan Minimum Tanpa Kendala Fungsi Multivariabel

Definisi 11 (Maksimum dan Minimum Lokal Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

- ❶ Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum relatif** (lokal) di $(a, b) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a, b) \geq f(x, y)$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai maksimum lokal fungsi f ;
- ❷ Fungsi f dikatakan mencapai **minimum relatif** (lokal) di $(a, b) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a, b) \leq f(x, y)$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai minimum lokal fungsi f ;



Definisi 12 (Maksimum dan Minimum Global Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- ❶ Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum global** di $(a, b) \in D_2$ jika $f(a, b) \geq f(x, y)$ untuk **semua** $(a, b) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai maksimum global fungsi f pada D_2 ;
- ❷ Fungsi f dikatakan mencapai **minimum global** di $(a, b) \in D_2$ jika $f(a, b) \leq f(x, y)$ untuk **semua** $(a, b) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai minimum global fungsi f pada D_2 ;

Teorema 11 (Syarat Perlu Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi f mencapai ekstrem relatif di (a, b) dan f memiliki turunan parsial pertama di (a, b) , maka $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Lebih lanjut, titik $(a, b) \in D$ dikatakan titik kritis dari fungsi f .

Teorema 12 (Syarat Cukup Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$ yang kotinu dan memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang masing-masing juga kontinu. Misalkan (a, b) merupakan titik kritis dari fungsi f dan

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

• Jika $\Delta > 0$ dan

- ① $f_{xx}(a, b) < 0$, maka f mencapai maksimum relatif di (a, b) ;
- ② $f_{xx}(a, b) > 0$, maka f mencapai minimum relatif di (a, b) .

- Jika $\Delta = 0$, maka tidak ada kesimpulan.
- Jika $\Delta < 0$, maka titik (a, b) merupakan titik sadel.

Teorema 13 (Nilai Ekstrem Global Fungsi Dua Variabel)

Jika f kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas $D \subseteq \mathbb{R}^2$, maka terdapat $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ sedemikian sehingga f mencapai maksimum global di (x_1, y_1) dan mencapai minimum global di (x_2, y_2) .

Untuk menentukan nilai ekstrem global pada fungsi f yang kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dapat dilakukan prosedur berikut.

1. Dicari nilai f di titik-titik kritis di dalam D ;
2. Dicari nilai ekstrem f pada batas D ;
3. Nilai terbesar (terkecil) dari langkah 1 dan langkah 2 merupakan nilai maksimum (minimum) global dari fungsi f .

Definisi 13 (Maksimum dan Minimum Lokal Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1 Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum relatif** (lokal) di $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a_1, a_2, \dots, a_n) sedemikian sehingga berlaku $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai maksimum lokal fungsi f ;
- 2 Fungsi f dikatakan mencapai **minimum relatif** (lokal) di $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai minimum lokal fungsi f ;

Definisi 14 (Maksimum dan Minimum Global Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1 Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum global** di $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_2$ jika $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ untuk **semua** $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai maksimum global fungsi f pada D_2 ;
- 2 Fungsi f dikatakan mencapai **minimum global** di $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_2$ jika $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ untuk **semua** $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai minimum global fungsi f pada D_2 ;

Teorema 14 (Syarat Perlu Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi multivariabel f mencapai ekstrem relatif di (a_1, a_2, \dots, a_n) dan f memiliki turunan parsial pertama di (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka $f_{x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, $f_{x_2}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \dots, f_{x_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Lebih lanjut, titik $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ dikatakan titik kritis dari fungsi f .

Teorema 15 (Syarat Cukup Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Multivariabel)

Diberikan fungsi multivariabel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang kontinu dan memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang masing-masing juga kontinu. Misalkan (a_1, a_2, \dots, a_n) merupakan titik kritis dari fungsi f dan matriks hessian

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}. \text{ Didefinisikan partisi dari } H, \text{ yaitu } H_1 = [f_{x_1 x_1}], H_2 = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{bmatrix},$$

dan seterusnya.

- ① Jika $|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, |H_4| > 0, \dots$, maka f mencapai maksimum relatif di (a_1, a_2, \dots, a_n) ;
- ② Jika $|H_1| > 0, |H_2| > 0, |H_3| > 0, |H_4| < 0, \dots$, maka f mencapai minimum relatif di (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Contoh 18

Carilah nilai maksimum dan minimum lokal dari fungsi $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

Penyelesaian:

① Syarat perlu

$$\begin{aligned}
 f_x &= 0 \\
 9x^2 - 9 &= 0 \\
 9(x+1)(x-1) &= 0 \\
 x &= \pm 1 \\
 \text{dan} \\
 f_y &= 0 \\
 2y + 4 &= 0 \\
 2(y+2) &= 0 \\
 y &= -2
 \end{aligned}$$

Titik kritis, yaitu $(-1, -2)$ dan $(1, -2)$.

② Syarat cukup

$$f_{xx} = 18x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 2$$

Diperoleh bahwa $\Delta = 18x \cdot 2 = 36x$. Perhatikan bahwa

(x, y)	Δ	$f_{xx}(x, y)$	Kesimpulan
$(-1, -2)$	$-36 < 0$	$-18 < 0$	Titik sadel
$(1, -2)$	$36 > 0$	$18 > 0$	Minimum lokal

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa titik $(1, -2)$ merupakan titik minimum lokal dari f , dengan nilai minimum lokal, yaitu $f(1, -2) = 3 + 4 - 9 - 8 = -10$.

Contoh 19

Sebuah perusahaan memproduksi barang dengan fungsi keuntungan

$$B(x, y, z) = -2x^3 + 6xz + 2y - y^2 - 6z^2 + 5.$$

Berapakah x , y , dan z agar perusahaan memperoleh keuntungan maksimal?

Penyelesaian:

1 Syarat perlu

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ -6x^2 + 6z &= 0 \quad (7) \\ f_y &= 0 \\ 2 - 2y &= 0 \\ y &= 1 \quad (8) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_z &= 0 \\ 6x - 12z &= 0 \\ z &= \frac{x}{2} \quad (9) \end{aligned}$$

Substitusi (3) ke (1), didapatkan

$$\begin{aligned} -6x^2 + 6\left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \\ -6x^2 + 3x &= 0 \\ -3x(2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{4}$$

Titik kritis, yaitu $(0, 1, 0)$ dan $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$.

2 Syarat cukup

$$f_{xx} = -12x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{xz} = 6; \quad f_{yy} = -2; \quad f_{yz} = 0; \quad f_{zz} = -12.$$

Dibentuk matriks hessian

$$H = \begin{bmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

di mana

$$H_1 = [-12x], H_2 = \begin{bmatrix} -12x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

(x, y, z)	$ H_1 $	$ H_2 $	$ H_3 $	Kesimpulan
$(0, 1, 0)$	0	0	72	Tidak bisa ditarik kesimpulan
$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$	$-6 < 0$	$12 > 0$	$-72 < 0$	Maksimum

Dari uraian di atas, didapatkan bahwa fungsi B akan maksimum saat $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$.

Maksimum dan Minimum dengan Kendala

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;
- 2 Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;
- 2 Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

- 3 Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

❶ Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;

❷ Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

❸ Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

❹ Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

❶ Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;

❷ Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

❸ Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

❹ Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0$, maka f di (a, b) mencapai maksimum lokal;

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

❶ Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;

❷ Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

❸ Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

❹ Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0$, maka f di (a, b) mencapai maksimum lokal;
- Jika $|H_{B_2}| < 0$, maka f di (a, b) mencapai minimum lokal.

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ terjadi pada titik (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Prosedur:

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ terjadi pada titik (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k = 0$;

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ terjadi pada titik (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k = 0$;
- 2 Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k);$$

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ terjadi pada titik (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k = 0$;
- 2 Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k);$$

- 3 Syarat perlu, yaitu

$$L_{x_1} = 0, L_{x_2} = 0, \dots, x_n, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ terjadi pada titik (a_1, a_2, \dots, a_n) , maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Prosedur:

- 1 Ubah $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k = 0$;
- 2 Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k);$$

- 3 Syarat perlu, yaitu

$$L_{x_1} = 0, L_{x_2} = 0, \dots, x_n, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

- 4 Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- 4 Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| > 0, |H_{B_5}| < 0, \dots$, maka f di (a_1, a_2, \dots, a_n) mencapai maksimum lokal;

- 4 Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatas

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| > 0, |H_{B_5}| < 0, \dots$, maka f di (a_1, a_2, \dots, a_n) mencapai maksimum lokal;
- Jika $|H_{B_2}| < 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| < 0, |H_{B_5}| < 0, \dots$, maka f di (a_1, a_2, \dots, a_n) mencapai minimum lokal.

Contoh 20 (UTS TA 2022/2023)

Tentukan nilai maksimum/minimum lokal dan titik sadel (jika ada) dari fungsi

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 6.$$

Penyelesaian:

❶ Syarat perlu

$$f_x = 0$$

$$f_y = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3y^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$3(y^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$y = \pm 1$$

Titik kritis, yaitu

$(-1, -1), (-1, 1),$
 $(1, -1), \text{ dan } (1, 1).$

❷ Syarat cukup

$$f_{xx} = 6x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 6y$$

Diperoleh bahwa $\nabla = 6x \cdot 6y = 36xy$. Perhatikan bahwa

(x, y)	∇	$f_{xx}(x, y)$	Kesimpulan	$f(x, y)$
$(-1, -1)$	$36 > 0$	$-6 < 0$	Maksimum lokal	10
$(-1, 1)$	$-36 < 0$	$-6 < 0$	Titik sadel	
$(1, -1)$	$-36 < 0$	$6 > 0$	Titik sadel	
$(1, 1)$	$36 > 0$	$6 > 0$	Minimum lokal	2

Jadi, diperoleh nilai maksimum lokal, minimum lokal, dan titik sadel masing-masing yaitu 10, 2, $(-1, 1), (1, -1)$.

Contoh 21 (UTS TA 2022/2023)

Sebuah kotak siku-siku tertutup, sisi-sisinya terbuat dari dua bahan berbeda. Alas dan tutup terbuat dari bahan seharga 80 ribu $/m^2$ dan sisi-sisi samping terbuat dari bahan seharga 40 ribu $/m^2$. Jika volume kotak tersebut $16 m^3$, maka tentukan ukuran kotak dan harga bahan dengan harga paling murah.

Penyelesaian:

Misalkan balok berukuran panjang x , lebar y , dan tinggi z .

Dari soal, diperoleh

① Harga alas dan tutup, yaitu $(xy + xy)80.000 = 160.000xy$;

② Harga 4 sisi samping, yaitu
 $(xz + xz + yz + yz)40.000 = 80.000xz + 80.000yz$.

Total: $L(x, y, z) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz$.

Akan diminimalkan $L(x, y, z) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz$ dengan kendala $V(x, y, z) = xyz = 16$. Perhatikan langkah-langkah berikut.

① Ubah $xyz = 16$ menjadi $xyz - 16 = 0$;

② Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, z, \lambda) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz - \lambda(xyz - 16);$$

3 Syarat perlu

$$L_x = 160.000y + 80.000z - \lambda yz = 0 \Leftrightarrow 160.000y + 80.000z = \lambda yz \xRightarrow{\text{kali } x} 160.000xy + 80.000xz = \lambda xyz;$$

$$L_y = 160.000x + 80.000z - \lambda xz = 0; \Leftrightarrow 160.000x + 80.000z = \lambda xz \xRightarrow{\text{kali } y} 160.000xy + 80.000yz = \lambda xyz;$$

$$L_z = 80.000x + 80.000y - \lambda xy = 0; \Leftrightarrow 80.000x + 80.000y = \lambda xy \xRightarrow{\text{kali } z} 80.000xz + 80.000yz = \lambda xyz;$$

$$L_\lambda = -(xyz - 16) = 0.$$

Diperoleh

$$160.000xy + 80.000xz = 160.000xy + 80.000yz \Leftrightarrow x = y$$

$$160.000xy + 80.000xz = 80.000xz + 80.000yz \Leftrightarrow 2x = z$$

Sehingga $xyz = 16 \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x = 2$. Selanjutnya, $y = 2$, $z = 4$, dan $\lambda = 80.000$.

4 Syarat cukup

$$V_x = yz; \quad V_y = xz; \quad V_z = xy; \quad L_{xx} = 0; \quad L_{yy} = 0; \quad L_{zz} = 0;$$

$$L_{xy} = 160.000 - \lambda z; \quad L_{xz} = 80.000 - \lambda y; \quad L_{yz} = 80.000 - \lambda x$$

Dibentuk matriks hessian terbatas, yaitu

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & V_x & V_y & V_z \\ V_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ V_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ V_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & -160.000 & -80.000 \\ 8 & -160.000 & 0 & -80.000 \\ 4 & -80.000 & -80.000 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$H_{B_2} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & -160.000 \\ 8 & -160.000 & 0 \end{vmatrix} = -2.048.000 < 0$$

dan

$$H_{B_3} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & -160.000 & -80.000 \\ 8 & -160.000 & 0 & -80.000 \\ 4 & -80.000 & -80.000 & 0 \end{vmatrix} = -1.228.800.000.000 < 0$$

Oleh karena, $H_{B_2} < 0$ dan $H_{B_3} < 0$, artinya titik $(2, 2, 4)$ mengakibatkan $L(x, y, z)$ mencapai minimal lokal, dengan $L(2, 2, 4) = 1.920.000$

Contoh 22 (UTS TA 2020/2021)

Tentukan nilai maksimum lokal, minimum lokal, dan titik sadel (jika ada) dari

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3(10 - 1)y.$$

Jika domain fungsi tersebut adalah $D = \{(x, y) \mid -4 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 4\}$, maka tentukan maksimum dan minimum global.

Penyelesaian:

❶ Syarat perlu

$$f_x = 0$$

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$f_y = 0$$

$$3y^2 - 27 = 0$$

$$3(y^2 - 9) = 0$$

$$y = \pm 3$$

Titik kritis, yaitu

$(-1, -3), (-1, 3), (0, -3), (0, 3), (1, -3)$, dan $(1, 3)$.

❷ Syarat cukup

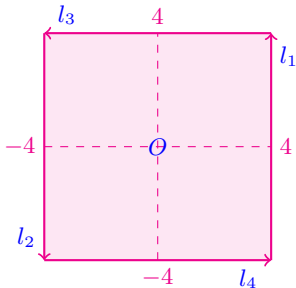
$$f_{xx} = 12x^2 - 4, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y$$

Diperoleh bahwa $\nabla = (12x^2 - 4)(6y) = 72x^2y - 24y$.

Perhatikan tabel berikut.

(x, y)	∇	$f_{xx}(x, y)$	Kesimpulan	$f(x, y)$
$(-1, -3)$	$-144 < 0$	$8 > 0$	Titik sadel	
$(-1, 3)$	$144 > 0$	$8 > 0$	Minimum lokal	-55
$(0, -3)$	$72 > 0$	$-4 < 0$	Maksimum lokal	54
$(0, 3)$	$-72 < 0$	$-4 < 0$	Titik sadel	
$(1, -3)$	$-144 < 0$	$8 > 0$	Titik sadel	
$(1, 3)$	$144 > 0$	$8 > 0$	Minimum lokal	-55

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari titik pada domain D , perhatikan ilustrasi berikut.



- Sepanjang l_1

$$f(4, y) = 4^4 - 2(4)^2 + y^3 - 27y = 224 + y^3 - 27y$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(4, y)$, perhatikan bahwa.

- Titik stasioner

$$f'(y) = 3y^2 - 27 = 0 \Rightarrow y = \pm 3; \quad f(4, 3) = 170; \quad f(4, -3) = 278$$

- Titik batas, yaitu $-4 \leq y \leq 4$; $f(4, 4) = 180$; $f(4, -4) = 268$

- Sepanjang l_2

$$f(-4, y) = (-4)^4 - 2(-4)^2 + y^3 - 27y = 224 + y^3 - 27y = f(4, y)$$

Oleh karena nilai $f(-4, y) = f(4, y)$, akibatnya titik stasionernya juga di $y = \pm 3$, sedangkan titik batasnya pada $-4 \leq y \leq 4$, maka nilai maksimum dan minimum pada l_2 akan sama dengan nilai maksimum dan minimum pada l_1 .

- Sepanjang l_3

$$f(x, 4) = x^4 - 2x^2 + 4^3 - 27(4) = x^4 - 2x^2 - 44$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(x, 4)$, perhatikan bahwa.

- Titik stasioner

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1;$$

$$f(0, 4) = -44; \quad f(-1, 4) = f(1, 4) = -45$$

- Titik batas, yaitu $-4 \leq x \leq 4$

$$f(-4, 4) = f(4, 4) = 180$$

Diperoleh minimum lokal, maksimum lokal, minimum global, maksimum global, dan titik sadel, yaitu $-55, 54, 278, -55, (-1, -3), (0, 3), (1, -3)$

- Sepanjang l_4

$$\begin{aligned} f(x, -4) &= x^4 - 2x^2 + (-4)^3 - 27(-4) \\ &= x^4 - 2x^2 + 44 \end{aligned}$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(x, -4)$, perhatikan bahwa.

- Titik stasioner

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1;$$

$$f(0, -4) = 44; \quad f(-1, -4) = f(1, -4) = 43$$

- Titik batas, yaitu $-4 \leq x \leq 4$

$$f(-4, -4) = f(4, -4) = 268$$