Asistensi Kalkulus 3

Limit dan Kekontinuan, Turunan Parsial, dan Masalah Ekstrem

Yassin Dwi Cahyo
24010122130053

Bidang Riset
Asosiasi Matematika Terapan

Kamis, 12 Oktober 2023

Note:

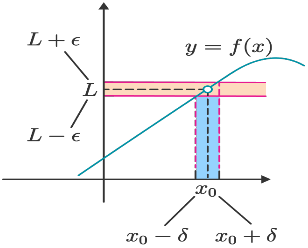
File ini tidak mencakup semua materi yang dipelajari dari pertemuan 1 sampai dengan 7, tetapi telah disesuaikan dengan materi yang akan diujikan pada UTS Kalkulus 3, sesuai dengan kisi-kisi yang diberikan oleh Bu Zani.

Kisi-kisi UTS Kalkulus 3 (Bu Zani)

1. Limit dan Kekontinuan;
2. Turunan;
3. Kasus minimum/maksimum dengan pengali Lagrange.

Mohon maaf jika terdapat banyak kekurangan (*typo*, salah ngitung, dll). Semoga *file* ini bermanfaat dan doakan penulis agar selalu sehat dan sukses. Aamiin YRA

Limit dan Kekontinuan Fungsi Multivariabel



Definisi 1 (Limit Fungsi Satu Variabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 titik kluster himpunan A, dan $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di x_0, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - x_0| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definisi 2 (Limit Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (a, b) titik kluster himpunan A, dan $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di (a, b), jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x, y) \in A$ dengan $0 < ||(x, y) - (a, b)|| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, berlaku $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

Definisi 3 (Limit Fungsi Multivariabel)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ titik kluster himpunan A, dan $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut sebagai limit fungsi f di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ dengan
$0 < ||(x_1, x_2, \cdots, x_n) - (a_1, a_2, \cdots, a_n)|| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} < \delta$, berlaku $|f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - L| < \epsilon$.

Teorema 1 (Sifat-Sifat Limit)

Jika $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, maka

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} k = k$, di mana $k \in \mathbb{R}$;
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$;
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$;
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L + M$;
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \times g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \times \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L \times M$;
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \dfrac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$;
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [a \times g(x,y)] = a \times \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = a \times M$, di mana $a \in \mathbb{R}$.

Contoh 1

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(3,-2)} x^2 &\overset{1.1.5}{=} \lim_{(x,y)\to(3,-2)} x \times \lim_{(x,y)\to(3,-2)} x \\ &\overset{1.1.2}{=} 3 \times 3 = 9\end{aligned}$$

Contoh 2

Nilai

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{-4+2x-4x^2+2x^3+y+x^2y-4y^2+2xy^2+y^3}{2x+y-4}$$

Tidak dapat langsung dihitung dengan menggunakan **Teorema 1**, sebab nilai $2x+y-4=0$ untuk $(x,y)=(1,2)$. Tetapi bentuk limit tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(1+x^2+y^2)(\cancel{(2x+y-4)})}{\cancel{(2x+y-4)}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 1+x^2+y^2 = 1+1+4=6.$$

Bentuk $2x+y-4$ dapat di-*cancel*, sebab, pada limit dituntut $(x,y)\neq(1,2)$ atau $2x+y-4\neq 0$.

Teorema 2

Jika $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ada, maka nilai limitnya tunggal.

Teorema 2

Jika $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ada, maka nilai limitnya tunggal.

Akibat 1

Misalkan K_1 dan K_2 dua subhimpunan di daerah domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan (a,b) merupakan titik limit dari K_1 dan K_2. Jika

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in K_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in K_2}} f(x,y)$$

maka $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ tidak ada.

Definisi 4 (Definisi Kekontinuan)

Diberikan fungsi dengan domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dan titik $(a, b) \in D_f$. Fungsi f kontinu di (a, b) jika

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Definisi 5 (Definisi Formal Kekontinuan)

Diberikan fungsi f dengan domain $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ dan titik $(a, b) \in D_f$. Fungsi f dikatakan kontinu di titik (a, b) jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $(x, y) \in D_f$ yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta,$$

maka

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon.$$

Dengan kata lain, untuk mengecek $f(x, y)$ kontinu di (a, b) haruslah memenuhi ketiga kondisi berikut.

1. $f(a, b)$ ada;
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$;
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Teorema 3

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) dan fungsi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinu di (a, b), maka

1. $(f + g)$ kontinu di (a, b);
2. $(f - g)$ kontinu di (a, b);
3. $(f \cdot g)$ kontinu di (a, b);
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ kontinu di (a, b), asalkan $g(a, b) \neq 0$.

Teorema 4

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinu di (a, b) dan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu di $f(a, b)$, maka $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinu di (a, b).

Contoh 3 (UTS TA 2022/2023)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-x)^2}{x^2+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^2} \\ &= 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

- Dekati sepanjang $y = -x$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-(-x))^2}{x^2+(-x)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+x)^2}{x^2+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} \\ &= 2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Oleh karena $(1) \neq (2)$, diperoleh kesimpulan bahwa $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ tidak ada.

Contoh 4 (UTS TA 2021/2022)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Penyelesaian:

Gunakan transformasi $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta + r\sin\theta\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r}(\cos\theta + r\sin\theta)}{\cancel{r}} \\
&= \lim_{r\to 0} \cos\theta
\end{aligned}$$

Oleh karena nilai limit bergantung pada besaran sudut θ, akibatnya nilai limit akan berbeda-beda sehingga $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tidak ada.

Contoh 5 (UTS TA 2020/2021)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^2-1}{\sqrt{xy}-1}.$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^2-1}{\sqrt{xy}-1} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^2-1}{\sqrt{xy}-1} \times \left(\frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{xy}+1}\right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cancel{(xy-1)}(xy+1)(\sqrt{xy}+1)}{\cancel{xy-1}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (xy+1)(\sqrt{xy}+1) \\
&= (1\cdot 1+1)(\sqrt{1\cdot 1}+1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa nilai $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^2-1}{\sqrt{xy}-1} = 4.$

Contoh 6 (UTS TA 2020/2021)

Hitunglah nilai limit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2x}{x^4+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\cdot 3x}{\cancel{x^2}(x^2+1)} \\ &= 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

- Dekati sepanjang $y = x^2$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} \\ &= \frac{3}{2} \qquad (4)\end{aligned}$$

Oleh karena $(3) \neq (4)$, diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$ tidak ada.

Contoh 7 (UTS TA 2019/2020)

Hitunglah nilai kimit

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Penyelesaian:

- Dekati sepanjang $y = x$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^2}}{2\cdot\cancel{(x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \qquad (5)\end{aligned}$$

- Dekati sepanjang $y = x^2$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)^2+(x^2-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^2}(x+1)}{\cancel{(x-1)^2}(1+(x+1)^2)} \\ &= \frac{2}{1+4} \\ &= \frac{2}{5} \qquad (6)\end{aligned}$$

Oleh karena $(5) \neq (6)$, diperoleh kesimpulan bahwa $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ tidak ada.

Contoh 8 (UTS TA 2022/2023)

Tentukan nilai k (jika ada) agar fungsi $f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ k; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Penyelesaian:

Agar fungsi $f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$, maka haruslah dipenuhi semua syarat berikut.

1. Nilai $f(0,0)$ ada;
2. Nilai $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ada; dan
3. Nilai $f(0,0) = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Berdasarkan pada kesimpulan **contoh 1**, yaitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tidak ada, akibatnya tidak ada $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$

Latihan Mandiri

1. Hitunglah nilai limit
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2024x+2023y)-2024x-2023y}{\sqrt{2024x^{2023}+2023y^{2024}}}.$$

2. Dengan definisi limit $\epsilon-\delta$, buktikan bahwa
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5e^{xy}}{x^2+e^y}=0.$$

3. Tentukan nilai t (jika ada) agar fungsi $f(x,y)$ kontinu di $(0,0)$
$$f(x,y):=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]; & (x,y)\neq(0,0)\\ t; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. Tentukan nilai u (jika ada) agar fungsi $g(x,y)$ kontinu di $(0,0)$
$$g(x,y):=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^4+(x+\sqrt[3]{y})^2+y^4}; & (x,y)\neq(0,0)\\ u; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Turunan Parsial

Definisi 6 (Turunan Parsial Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Jika x berubah-ubah dan y dijaga agar tetap konstan, katakanlah $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel x. Turunan di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di $(x_0, y_0) \in D$, yaitu

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

2. Jika y berubah-ubah dan x dijaga agar tetap konstan, katakanlah $x = y_0$, maka $f(x_0, y)$ adalah fungsi satu variabel y. Turunan di $y = y_0$ disebut turunan parsial f terhadap y di $(x_0, y_0) \in D$, yaitu

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \overset{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Note:

Jika $z = f(x, y)$, maka turunan parsial dapat dinyatakan dengan notasi lain sebagai berikut:

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f;$$
$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Contoh 9

Diketahui fungsi $f(x, y) = x^2 + 2y$. Tentukan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Penyelesaian:

- Turunan parsial f terhadap x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &\overset{def.}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2y - (x^2 + 2y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y - x^2 - 2y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

- Turunan parsial f terhadap y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &\overset{def.}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 2(y + \Delta y) - (x^2 + 2y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 2y + 2\Delta y - x^2 - 2y}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Aturan menentukan turunan parsial fungsi $z = f(x, y)$

1. Untuk menentukan f_x, pandang y sebagai konstanta dan turunkan $f(x, y)$ terhadap x;
2. Untuk menentukan f_y, pandang x sebagai konstanta dan turunkan $f(x, y)$ terhadap y.

Contoh 10

Diketahui fungsi $f(x, y) := x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tentukan $f_x(2, 1)$ dan $f_y(2, 1)$!

Penyelesaian:

1. Turunkan parsial f terhadap x

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \Rightarrow f_x(2, 1) &= 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2. Turunkan parsial f terhadap y

$$\begin{aligned} f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y \Rightarrow f_y(2, 1) &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Contoh 11

Diketahui $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jika } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jika } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Tentukan $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$!

Penyelesaian:

- Untuk $(x,y) \neq (0,0)$
  - Turunan parsial f terhadap x

$$f_x = \frac{y(x^2+y^2) - 2x(xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

  - Turunan parsial f terhadap y

$$f_y = \frac{x(x^2+y^2) - 2y(xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- Untuk $(x, y) = (0, 0)$
  - Turunan parsial f terhadap x

$$f_x(0,0) \stackrel{def.}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{0}{h^2} - 0}{h}$$
$$= 0$$

  - Turunan parsial f terhadap y

$$f_y(0,0) \stackrel{def.}{=} \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{0}{k^2} - 0}{k}$$
$$= 0$$

Definisi 7 (Turunan Parsial Fungsi Multivariabel)

Diberikan fungsi n variabel $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Turunan parsial f terhadap x_i (variabel ke $-i$) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{def.}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Contoh 12

Jika $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$, maka

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$
$$f_y = xe^{xy} \ln z$$
$$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

Contoh 13

Jika $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx$, maka

$$f_x = y + 3z$$
$$f_y = x + 2z$$
$$f_z = 2y + 3x$$

Diketahui fungsi dua variabel $z = f(x, y)$. Jika f dapat diturunkan, maka dapat didefinisikan dua fungsi bernilai real yang nilainya di titik (x, y) masing masing adalah

$$\boxed{D_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \text{ dan } D_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y)}$$

Misalkan pula fungsi ini dapat diturunkan, maka dikenalkan turunan parsial dari $D_1 f(x, y)$ terhadap x dan y, masing-masing ditulis sebagai

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{11}^2 f(x,y) = f_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{12}^2 f(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

yang disebut turunan parsial order 2. Turunan parsial order 2 lainnya diperoleh dengan menurun secara parsial $D_2 f(x, y)$ terhadap x dan y yang masing-masing ditulis sebagai

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{21}^2 f(x,y) = f_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{22}^2 f(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

Teorema 5 (Teorema Clairaut)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ dalam domain D yang memuat (a, b). Jika f_{xy} dan f_{yx} keduanya kontinu di D, maka

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Contoh 14

Diberikan fungsi $f(x, y) := x^m y^n$. Turunan parsial pertama fungsi $f(x, y)$ adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}.$$

Sedangkan turunan parsial order dua adalah

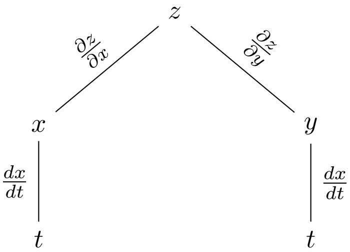
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-1}y^n; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)x^m y^{n-1}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = mnx^{m-1}y^{n-1}$$

Teorema 6 (Aturan Rantai (1))

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan terhadap variabel x dan y, di mana $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ yang keduanya terdiferensialkan terhadap t, maka z fungsi yang terdiferensialkan terhadap t dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ilustrasi:

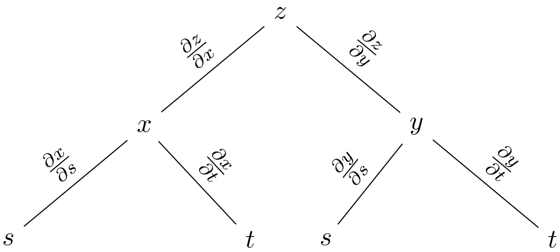


Teorema 7 (Aturan Rantai (2))

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan terhadap variabel x dan y, di mana $x = g(s, t)$ dan $y = h(s, t)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan terhadap s dan t, maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ilustrasi:



Contoh 15

Diketahui $z = f(x, y)$ di mana $x = r^2 + s^2$ dan $y = 2rs$. Tentukan $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ dan $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$..

Penyelesaian:
Dengan aturan rantai, diperoleh bahwa

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}2s + \frac{\partial z}{\partial y}2r$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}2s\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}2r\right) &= 2s \cdot \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + 2r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= 2s \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right] + 2r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right] + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= 2s \cdot \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}(2s)\right] + 2r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)\right] + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} &= 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (4r^2 + 4s^2)\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}$$

Akibat 2 (Turunan Parsial Fungsi Implisit)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ dan memenuhi $F(x, y, z) = 0$ sehingga $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 0$. Turunan parsial F terhadap x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Turunan parsial F terhadap y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

dengan syarat $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Bukti: Dengan aturan turunan, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\
0 &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}
\end{aligned}$$

Dengan cara analog, diperoleh $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ ■.

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$. Turunan parsial f_x itu hanya mengukur perubahan suatu nilai dalam sumbu x saja dan f_y itu hanya mengukur perubahan suatu nilai dalam sumbu y saja. Bagaimana jika ada perubahan terhadap arah yang lain?

Misalkan $\vec{p} = (x, y), \vec{i} = (1, 0)$, dan $\vec{j} = (0, 1)$. Turunan parsial dari $f(x, y)$ dapat didefinisikan ulang sebagai

$$f_x(\vec{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h\vec{i}) - f(\vec{p})}{h} \quad \text{dan} \quad f_y(\vec{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p}) + h\vec{j}) - f(\vec{p})}{h}$$

Oleh karena vektor satuan tidak hanya $\vec{i}$ dan $\vec{j}$, katakanlah $\vec{u} = (u_1, u_2)$, maka turunan berarah f dalam arah $\vec{u}$ dapat didefinisikan.

Definisi 8 (Turunan Berarah)

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$ dan vektor satuan $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Turunan berarah dari f di $\vec{p} = (x_0, y_0)$ dalam arah $\vec{u}$ adalah

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) \stackrel{def.}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{p} + h\vec{u}) - f(\vec{p})}{h}$$

atau

Teorema 8

Jika f terdiferensialkan (linear secara lokal) di $\vec{p}$, maka f mempunyai turunan berarah di $\vec{p}$ dalam arah vektor $\vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ dan

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{p}) = u_1 f_1(\vec{p}) + u_2 f_y(\vec{p}).$$

Lebih lanjut, $\nabla f(\vec{p})$ disebut dengan gradien dari fungsi f.

Contoh 16

Turunan parsial dari $f(x, y) = x^2 + y^2$ di titik $(1, 2)$ adalah

$$D_{\vec{i}} f(1,2) = 2x\Big|_{(1,2)} = 2; \quad D_{\vec{j}} f(1,2) = 2y\Big|_{(1,2)} = 4.$$

Turunan berarah dari f di $(1, 2)$ dalam vektor $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ adalah

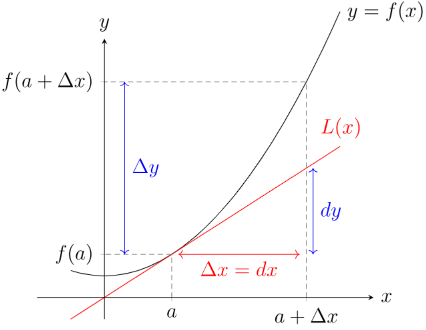
$$D_{\vec{u}} f(1,2) = (2,4) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1.2 + 3.2 = 4.4$$

Latihan Mandiri

1. Seekor lebah berada dalam suatu ruangan dengan suhu pada titik (x, y, z) adalah $T(x, y, z) = \dfrac{120}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$. Jika lebah tersebut berada pada posisi $(1, 1, 1)$, ke arah mana lebah tersebut harus terbang agar suhunya menurun paling cepat?
2. Pasir jatuh ke bawah sedikit demi sedikit dengan laju $2\ cm^3$ per detik dan setiap saat membentuk kerucut. Ketika tinggi pasir $3\ cm$ dan jari-jari $1\ cm$, laju pertambahan tingginya adalah $1\ cm$ per detik. Hitunglah laju pertambahan jari-jari kerucut pasir pada saat tinggi pasir $3\ cm$ dan jari-jari $1\ cm$.

Keterdiferensialan dan Bidang Singgung

Motivasi: Diferensial Fungsi Satu Variabel



Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, notasi $f'(a)$, jika $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada. Lebih lanjut,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Dapat diperumum untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = m.$$

Secara intuitif (cek gambar), diperoleh

$$m = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow m\ dx = dy \Leftrightarrow f'(x)dx = dy.$$

Diferensial fungsi f ditulis dengan df didefinisikan sebagai $df = f'(x)\ dx$ dengan dx sebarang bilangan dan disebut dengan diferensial x.

Definisi 9 (Diferensial Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi dua variabel $z = f(x, y)$. Fungsi f dikatakan terdiferensiabel di (x, y) jika

$$dz = f_x(x, y) + f_y(x, y)$$

Lebih lanjut, dz disebut diferensial (diferensial total) z.

Teorema 9

Jika $f(x, y)$ diferensiabel di (x_0, y_0), maka $f(x, y)$ kontinu di (x_0, y_0).

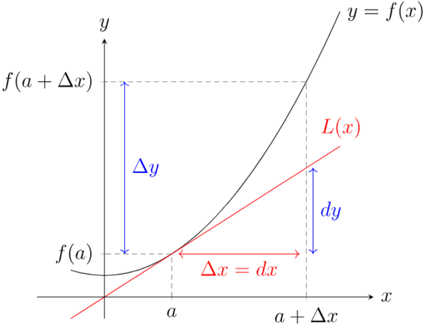
Teorema 10

Jika $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ keduanya kontinu di (x_0, y_0), maka $f(x, y)$ terdiferensialkan di (x_0, y_0)

Note:

Untuk membuktikan bahwa $f(x, y)$ terdiferensiabel di (x_0, y_0), tunjukkan saja bahwa $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ kontinu di (x_0, y_0).

Motivasi: Diferensial Fungsi Satu Variabel



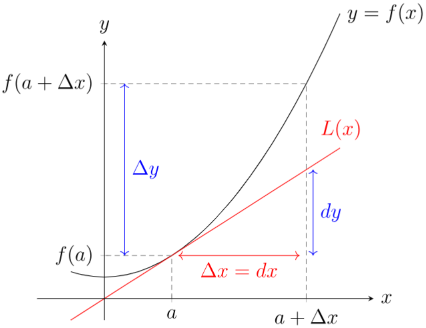
Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, notasi $f'(a)$, jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada. Perhatikan bahwa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(a)\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

Turunan fungsi f terhadap x di titik a ada, jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x} = 0$

Motivasi: Hampiran Linear Satu Variabel



Berapakah nilai $f(a + \Delta x)$? Untuk Δx yang kecil, diperoleh $f(a + \Delta x) \approx L(a + \Delta x)$ dengan $L(x)$ merupakan hampiran linear dari $f(x)$ di sekitar a.

Dari ilustrasi tersebut, $L(x)$ merupakan persamaan garis singgung terhadap $f(x)$ di $x = a$. Dengan kata lain, persamaan garis singgung melalui $(a, f(a))$ dengan gradien $f^{'}(a)$, yaitu

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f^{'}(a)(x - a) \\ f(x) &= f(a) + f^{'}(a)(x - a) \\ L(x) &= f(a) + f^{'}(a)(x - a) \end{aligned}$$

Definisi 10 (Persamaan Bidang Singgung)

Diberikan fungsi $z = f(x, y)$ dan titik (a, b) berada pada domain fungsi f. Persamaan bidang singgung $z = f(x, y)$ yang melalui $(a, b, f(a, b))$ adalah

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \Leftrightarrow z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

Contoh 17

Tentukan persamaan bidang singgung pada fungsi $f(x,y) := x^2 + xy + 3y^2$ yang melalui titik $(1,1)$.

Penyelesaian:

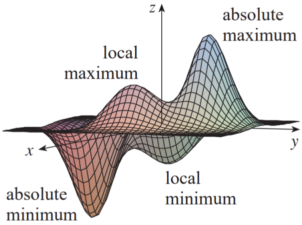
Dari $f(x,y) := x^2 + xy + 3y^2$, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + y \overset{\textbf{subs.}(1,1)}{\Longrightarrow} f_x(1,1) = 2 + 1 = 3 \\ f_y(x,y) &= x + 6y \overset{\textbf{subs.}(1,1)}{\Longrightarrow} f_y(1,1) = 1 + 6 = 7 \\ f(1,1) &= 1 + 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Sehingga, persamaan bidang singgungnya adalah

$$\begin{aligned} z &= 3(x-1) + 7(y-1) + 5 \\ &= 3x + 7y - 5 \end{aligned}$$

Maksimum dan Minimum Tanpa Kendala Fungsi Multivariabel



Definisi 11 (Maksimum dan Minimum Lokal Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D_1 \to \mathbb{R}$.

1. Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum relatif** (lokal) di $(a, b) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a, b) \geq f(x, y)$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai maksimum lokal fungsi f;
2. Fungsi f dikatakan mencapai **minimum relatif** (lokal) di $(a, b) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a, b) \leq f(x, y)$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai minimum lokal fungsi f;

Definisi 12 (Maksimum dan Minimum Global Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D_2 \to \mathbb{R}$.

1. Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum global** di $(a, b) \in D_2$ jika $f(a, b) \geq f(x, y)$ untuk **semua** $(a, b) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai maksimum global fungsi f pada D_2;
2. Fungsi f dikatakan mencapai **minimum global** di $(a, b) \in D_2$ jika $f(a, b) \leq f(x, y)$ untuk **semua** $(a, b) \in D_2$.Selanjutnya, bilangan $f(a, b)$ dikatakan sebagai nilai minimum global fungsi f pada D_2;

Teorema 11 (Syarat Perlu Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Dua Variabel)

Diberikan daerah $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi $f : D \to \mathbb{R}$. Jika fungsi f mencapai ekstrem relatif di (a, b) dan f memiliki turunan parsial pertama di (a, b), maka $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Lebih lanjut, titik $(a, b) \in D$ dikatakan titik kritis dari fungsi f.

Teorema 12 (Syarat Cukup Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Dua Variabel)

Diberikan fungsi dua variabel $f(x, y)$ yang kotinu dan memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang masing-masing juga kontinu. Misalkan (a, b) merupakan titik kritis dari fungsi f dan

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2 .$$

- Jika $\Delta > 0$ dan
  1. $f_{xx}(a, b) < 0$, maka f mencapai maksimum relatif di (a, b);
  2. $f_{xx}(a, b) > 0$, maka f mencapai minimum relatif di (a, b).
- Jika $\Delta = 0$, maka tidak ada kesimpulan.
- Jika $\Delta < 0$, maka titik (a, b) merupakan titik sadel.

Teorema 13 (Nilai Ekstrem Global Fungsi Dua Variabel)

Jika f kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas $D \subseteq \mathbb{R}^2$, maka terdapat $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ sedemikian sehingga f mencapai maksimum global di (x_1, y_1) dan mencapai minimum global di (x_2, y_2).

Untuk menentukan nilai ekstem global pada fungsi f yang kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dapat dilakukan prosedur berikut.

1. Dicari nilai f di titik-titik kritis di dalam D;
2. Dicari nilai ekstrem f pada batas D;
3. Nilai terbesar (terkecil) dari langkah 1 dan langkah 2 merupakan nilai maksimum (minimum) global dari fungsi f.

Definisi 13 (Maksimum dan Minimum Lokal Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D_1 \to \mathbb{R}$.

1. Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum relatif** (lokal) di $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ sedemikian sehingga berlaku $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai maksimum lokal fungsi f;
2. Fungsi f dikatakan mencapai **minimum relatif** (lokal) di $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_1$ jika terdapat titik **persekitaran** di (a, b) sedemikian sehingga berlaku $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai minimum lokal fungsi f;

Definisi 14 (Maksimum dan Minimum Global Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D_2 \to \mathbb{R}$.

1. Fungsi f dikatakan mencapai **maksimum global** di $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_2$ jika $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ untuk **semua** $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_2$. Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai maksimum global fungsi f pada D_2;
2. Fungsi f dikatakan mencapai **minimum global** di $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_2$ jika $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ untuk **semua** $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D_2$.Selanjutnya, bilangan $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dikatakan sebagai nilai minimum global fungsi f pada D_2;

Teorema 14 (Syarat Perlu Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Multivariabel)

Diberikan daerah $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f : D \to \mathbb{R}$. Jika fungsi multivariabel f mencapai ekstrem relatif di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dan f memiliki turunan parsial pertama di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka $f_{x_1}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$, $f_{x_2}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0, \cdots, f_{x_n}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$. Lebih lanjut, titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$ dikatakan titik kritis dari fungsi f.

Teorema 15 (Syarat Cukup Nilai Ekstrem Relatif Fungsi Multivariabel)

Diberikan fungsi multivariabel $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ yang kotinu dan memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang masing-masing juga kontinu. Misalkan $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ merupakan titik kritis dari fungsi f dan matriks hessian

$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$. Didefinisikan partisi dari H, yaitu$H_1 = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$, dan seterusnya.

1. Jika $|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, |H_4| > 0, \cdots$, maka f mencapai maksimum relatif di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$;
2. Jika $|H_1| > 0, |H_2| > 0, |H_3| > 0, |H_4| < 0, \cdots$, maka f mencapai minimum relatif di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Contoh 18

Carilah nilai maksimum dan minimum lokal dari fungsi $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

Penyelesaian:

1. Syarat perlu

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ 9x^2 - 9 &= 0 \\ 9(x+1)(x-1) &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f_y &= 0 \\ 2y + 4 &= 0 \\ 2(y+2) &= 0 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Titik kritis, yaitu $(-1, -2)$ dan $(1, -2)$.

2. Syarat cukup

$$f_{xx} = 18x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 2$$

Diperoleh bahwa $\Delta = 18x \cdot 2 = 36x$. Perhatikan bahwa

(x, y)	Δ	$f_{xx}(x, y)$	Kesimpulan
$(-1, -2)$	$-36 < 0$	$-18 < 0$	Titik sadel
$(1, -2)$	$36 > 0$	$18 > 0$	Minimum lokal

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa titik $(1, -2)$ merupakan titik minimum lokal dari f, dengan nilai minimum lokal, yaitu $f(1, -2) = 3 + 4 - 9 - 8 = -10$.

Contoh 19

Sebuah perusahaan memproduksi barang dengan fungsi keuntungan

$$B(x,y,z) = -2x^3 + 6xz + 2y - y^2 - 6z^2 + 5.$$

Berapakah x, y, dan z agar perusahaan memperoleh keuntungan maksimal?

Penyelesaian:

1. Syarat perlu

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ -6x^2 + 6z &= 0 \quad (7) \\ f_y &= 0 \\ 2 - 2y &= 0 \\ y &= 1 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_z &= 0 \\ 6x - 12z &= 0 \\ z &= \frac{x}{2} \quad (9) \end{aligned}$$

Substitusi (3) ke (1), didapatkan

$$\begin{aligned} -6x^2 + 6\left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \\ -6x^2 + 3x &= 0 \\ -3x(2x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 0 \vee z = \frac{1}{4}$$

Titik kritis, yaitu $(0,1,0)$ dan $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$.

2. Syarat cukup

$$f_{xx} = -12x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{xz} = 6; \quad f_{yy} = -2; \quad f_{yz} = 0; \quad f_{zz} = -12.$$

Dibentuk matriks hessian

$$H = \begin{bmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

di mana

$$H_1 = \begin{bmatrix} -12x \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -12x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

(x, y, z)	$\lvert H_1 \rvert$	$\lvert H_2 \rvert$	$\lvert H_3 \rvert$	Kesimpulan
$(0, 1, 0)$	0	0	72	Tidak bisa ditarik kesimpulan
$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$	$-6 < 0$	$12 > 0$	$-72 < 0$	Maksimum

Dari uraian di atas, didapatkan bahwa fungsi B akan maksimum saat $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$.

Maksimum dan Minimum dengan Kendala

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x,y)=k$ terjadi pada titik (a,b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a,b) = \lambda \cdot \nabla g(a,b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x,y)=k$ menjadi $g(x,y)-k=0$;

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$

3. Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x,y)=k$ terjadi pada titik (a,b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a,b) = \lambda \cdot \nabla g(a,b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x,y)=k$ menjadi $g(x,y)-k=0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-k);$$

3. Syarat perlu, yaitu

$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi

$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x,y)=k$ terjadi pada titik (a,b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a,b) = \lambda \cdot \nabla g(a,b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x,y)=k$ menjadi $g(x,y)-k=0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-k);$$
3. Syarat perlu, yaitu
$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$
4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi
$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$
yang memenuhi
    - Jika $|H_{B_2}| > 0$, maka f di (a,b) mencapai maksimum lokal;

Teorema 16 (Pengali Lagrange Fungsi Dua Variabel)

Diberikan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x, y) = k$ terjadi pada titik (a, b), maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a, b) = \lambda \cdot \nabla g(a, b).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x, y) = k$ menjadi $g(x, y) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k);$$
3. Syarat perlu, yaitu
$$L_x = 0, L_y = 0, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$
4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi
$$H_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$
yang memenuhi
   - Jika $|H_{B_2}| > 0$, maka f di (a, b) mencapai maksimum lokal;
   - Jika $|H_{B_2}| < 0$, maka f di (a, b) mencapai minimum lokal.

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ terjadi pada titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Prosedur:

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ terjadi pada titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k = 0$;

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ terjadi pada titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k);$$

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ terjadi pada titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu
$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k);$$
3. Syarat perlu, yaitu
$$L_{x_1} = 0, L_{x_2} = 0, \cdots, x_n, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

Teorema 17 (Pengali Lagrange Fungsi Multi Variabel)

Diberikan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan dua fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu. Jika nilai maksimum (atau minimum) dari f dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ terjadi pada titik $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka terdapat bilangan λ sedemikian sehingga

$$\nabla f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lambda \cdot \nabla g(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Prosedur:

1. Ubah $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ menjadi $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu
$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda(g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - k);$$
3. Syarat perlu, yaitu
$$L_{x_1} = 0, L_{x_2} = 0, \cdots, x_n, \text{ dan } L_\lambda = 0;$$

4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| > 0, |H_{B_5}| < 0, \cdots$, maka f di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ mencapai maksimum lokal;

4. Syarat cukup, yaitu untuk matriks hessian terbatasi

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi

- Jika $|H_{B_2}| > 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| > 0, |H_{B_5}| < 0, \cdots$, maka f di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ mencapai maksimum lokal;
- Jika $|H_{B_2}| < 0, |H_{B_3}| < 0, |H_{B_4}| < 0, |H_{B_5}| < 0, \cdots$, maka f di $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ mencapai minimum lokal.

Contoh 20 (UTS TA 2022/2023)

Tentukan nilai maksimum/minimum lokal dan titik sadel (jika ada) dari fungsi

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 6.$$

Penyelesaian:

1. Syarat perlu

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3(x^2-1) &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_y &= 0 \\ 3y^2 - 3 &= 0 \\ 3(y^2-1) &= 0 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$$

Titik kritis, yaitu $(-1,-1), (-1,1),$ $(1,-1),$ dan $(1,1)$.

2. Syarat cukup

$$f_{xx} = 6x; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 6y$$

Diperoleh bahwa $\nabla = 6x \cdot 6y = 36xy$. Perhatikan bahwa

(x,y)	∇	$f_{xx}(x,y)$	Kesimpulan	$f(x,y)$
$(-1,-1)$	$36 > 0$	$-6 < 0$	Maksimum lokal	10
$(-1,1)$	$-36 < 0$	$-6 < 0$	Titik sadel	
$(1,-1)$	$-36 < 0$	$6 > 0$	Titik sadel	
$(1,1)$	$36 > 0$	$6 > 0$	Minimum lokal	2

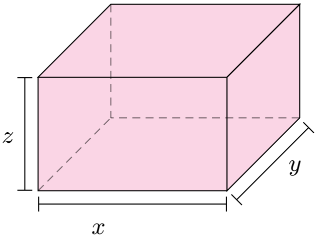
Jadi, diperoleh nilai maksimum lokal, minimum lokal, dan titik sadel masing-masing yaitu 10, 2, $(-1,1), (1,-1)$.

Contoh 21 (UTS TA 2022/2023)

Sebuah kotak siku-siku tertutup, sisi-sisinya terbuat dari dua bahan berbeda. Alas dan tutup terbuat dari bahan seharga 80 ribu $/m^2$ dan sisi-sisi samping terbuat dari bahan seharga 40 ribu $/m^2$. Jika volume kotak tersebut 16 m^3, maka tentukan ukuran kotak dan harga bahan dengan harga paling murah.

Penyelesaian:

Misalkan balok berukuran panjang x, lebar y, dan tinggi z.



Dari soal, diperoleh

1. Harga alas dan tutup, yaitu $(xy + xy)80.000 = 160.000xy$;
2. Harga 4 sisi samping, yaitu $(xz + xz + yz + yz)40.000 = 80.000xz + 80.000yz$.

Total: $L(x, y, z) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz$.

Akan diminimalkan $L(x, y, z) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz$ dengan kendala $V(x, y, z) = xyz = 16$. Perhatikan langkah-langkah berikut.

1. Ubah $xyz = 16$ menjadi $xyz - 16 = 0$;
2. Dibentuk persamaan lagrange, yaitu

$$L(x, y, z, \lambda) = 160.000xy + 80.000xz + 80.000yz - \lambda(xyz - 16);$$

3. Syarat perlu

$$L_x = 160.000y + 80.000z - \lambda yz = 0 \Leftrightarrow 160.000y + 80.000z = \lambda yz \overset{\textbf{kali } x}{\Rightarrow} 160.000xy + 80.000xz = \lambda xyz;$$

$$L_y = 160.000x + 80.000z - \lambda xz = 0; \Leftrightarrow 160.000x + 80.000z = \lambda xz \overset{\textbf{kali } y}{\Rightarrow} 160.000xy + 80.000yz = \lambda xyz;$$

$$L_z = 80.000x + 80.000y - \lambda xy = 0; \Leftrightarrow 80.000x + 80.000y = \lambda xy \overset{\textbf{kali } z}{\Rightarrow} 80.000xz + 80.000yz = \lambda xyz;$$

$$L_\lambda = -(xyz - 16) = 0.$$

Diperoleh

$$160.000xy + 80.000xz = 160.000xy + 80.000yz \Leftrightarrow x = y$$
$$160.000xy + 80.000xz = 80.000xz + 80.000yz \Leftrightarrow 2x = z$$

Sehingga $xyz = 16 \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x = 2$. Selanjutnya, $y = 2$, $z = 4$, dan $\lambda = 80.000$.

4. Syarat cukup

$$V_x = yz; \quad V_y = xz; \quad V_z = xy; L_{xx} = 0; \quad L_{yy} = 0; \quad L_{zz} = 0;$$
$$L_{xy} = 160.000 - \lambda z; \quad L_{xz} = 80.000 - \lambda y; \quad L_{yz} = 80.000 - \lambda x$$

Dibentuk matriks hessian terbatasi, yaitu

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & V_x & V_y & V_z \\ V_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ V_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ V_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & -160.000 & -80.000 \\ 8 & -160.000 & 0 & -80.000 \\ 4 & -80.000 & -80.000 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$H_{B_2} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & -160.000 \\ 8 & -160.000 & 0 \end{vmatrix} = -2.048.000 < 0$$

dan

$$H_{B_3} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & -160.000 & -80.000 \\ 8 & -160.000 & 0 & -80.000 \\ 4 & -80.000 & -80.000 & 0 \end{vmatrix} = -1.228.800.000.000 < 0$$

Oleh karena, $H_{B_2} < 0$ dan $H_{B_3} < 0$, artinya titik $(2, 2, 4)$ mengakibatkan $L(x, y, z)$ mencapai minimal lokal, dengan $L(2, 2, 4) = 1.920.000$

Contoh 22 (UTS TA 2020/2021)

Tentukan nilai maksimum lokal, minimum lokal, dan titik sadel (jika ada) dari

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3(10-1)y.$$

Jika domain fungsi tersebut adalah $D = \{(x,y) \mid -4 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 4\}$, maka tentukan maksimum dan minimum global.

Penyelesaian:

1. Syarat perlu

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2-1) &= 0 \\ x = 0 \vee x &= \pm 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_y &= 0 \\ 3y^2 - 27 &= 0 \\ 3(y^2-9) &= 0 \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

Titik kritis, yaitu
$(-1,-3)$,$(-1,3)$, $(0,-3)$,$(0,3)$,$(1,-3)$, dan $(1,3)$.

2. Syarat cukup

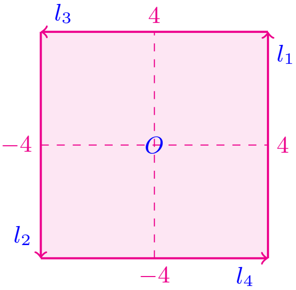
$$f_{xx} = 12x^2 - 4, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y$$

Diperoleh bahwa $\nabla = (12x^2-4)(6y) = 72x^2y - 24y$.

Perhatikan tabel berikut.

(x,y)	∇	$f_{xx}(x,y)$	Kesimpulan	$f(x,y)$
$(-1,-3)$	$-144<0$	$8>0$	Titik sadel	
$(-1,3)$	$144>0$	$8>0$	Minimum lokal	-55
$(0,-3)$	$72>0$	$-4<0$	Maksimum lokal	54
$(0,3)$	$-72<0$	$-4<0$	Titik sadel	
$(1,-3)$	$-144<0$	$8>0$	Titik sadel	
$(1,3)$	$144>0$	$8>0$	Minimum lokal	-55

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari titik pada domain D, perhatikan ilustrasi berikut.



- Sepanjang l_1

$$f(4,y)=4^4-2(4)^2+y^3-27y=224+y^3-27y$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(4,y)$, perhatikan bahwa.

- Titik stasioner

$$f'(y)=3y^2-27=0\Rightarrow y=\pm 3;\quad f(4,3)=170;\quad f(4,-3)=278$$

- Titik batas, yaitu $-4\le y\le 4$; $\quad f(4,4)=180;\quad f(4,-4)=268$

- Sepanjang l_2

$$f(-4,y) = (-4)^4 - 2(-4)^2 + y^3 - 27y = 224 + y^3 - 27y = f(4,y)$$

Oleh karena nilai $f(-4,y) = f(4,y)$, akibatnya titik stasionernya juga di $y = \pm 3$, sedangkan titik batasnya pada $-4 \leq y \leq 4$, maka nilai maksimum dan minimum pada l_2 akan sama dengan nilai maksimum dan minimum pada l_1.

- Sepanjang l_3

$$f(x,4) = x^4 - 2x^2 + 4^3 - 27(4) = x^4 - 2x^2 - 44$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(x,4)$, perhatikan bahwa.

  - Titik stasioner

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1;$$

$$f(0,4) = -44; \quad f(-1,4) = f(1,4) = -45$$

  - Titik batas, yaitu $-4 \leq x \leq 4$

$$f(-4,4) = f(4,4) = 180$$

- Sepanjang l_4

$$\begin{aligned} f(x,-4) &= x^4 - 2x^2 + (-4)^3 - 27(-4) \\ &= x^4 - 2x^2 + 44 \end{aligned}$$

Akan dicari nilai maksimum/minimum dari $f(x,-4)$, perhatikan bahwa.

  - Titik stasioner

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1;$$

$$f(0,-4) = 44; \quad yuf(-1,-4) = f(1,4) = 43$$

  - Titik batas, yaitu $-4 \leq x \leq 4$

$$f(-4,4) = f(4,4) = 268$$

Diperoleh minimum lokal, maksimum lokal, minimum global, maksimum global, dan titik sadel, yaitu -55, 54, 278, -55, $(-1,-3), (0,3), (1,-3)$