# Teori Himpunan dan Relasi

## Pendahuluan, Operasi Himpunan, Pembuktian Proposisi Himpunan

**Yassin Dwi Cahyo - Kelompok Fourier**

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

14 Oktober 2023

# Pendahuluan

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

Contoh tak *well-defined*

1. Kumpulan mahasiswa di kelompok Fourier yang cantik;
2. Kumpulan semua orang baik;
3. Kumpulan matriks yang menarik.

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

Contoh tak *well-defined*

1. Kumpulan mahasiswa di kelompok Fourier yang cantik;
2. Kumpulan semua orang baik;
3. Kumpulan matriks yang menarik.

Apakah $\{1, 2, 2, 3, 4, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$?

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

Contoh tak *well-defined*

1. Kumpulan mahasiswa di kelompok Fourier yang cantik;
2. Kumpulan semua orang baik;
3. Kumpulan matriks yang menarik.

Apakah $\{1, 2, 2, 3, 4, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$? Ya.

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

Contoh tak *well-defined*

1. Kumpulan mahasiswa di kelompok Fourier yang cantik;
2. Kumpulan semua orang baik;
3. Kumpulan matriks yang menarik.

Apakah $\{1, 2, 2, 3, 4, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$? Ya.

## Definisi 2 (Elemen Himpunan)

Diberikan himpunan tak kosong $A$. Objek $a$ dikatakan elemen dari himpunan $A$ jika $a$ termuat di dalam himpunan $A$. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $a \in A$.

## Definisi 1 (Himpunan)

Himpunan adalah sekumpulan objek-objek yang berbeda dan terdefinisi dengan baik ( *well-defined* )

Contoh *well-defined*

1. Himpunan mahasiswa di kelompok Fourier yang berkacamata;
2. Himpunan semua bilangan bulat genap;
3. Himpunan matriks yang invertibel.

Contoh tak *well-defined*

1. Kumpulan mahasiswa di kelompok Fourier yang cantik;
2. Kumpulan semua orang baik;
3. Kumpulan matriks yang menarik.

Apakah $\{1,2,2,3,4,4\} = \{1,2,3,4\}$? Ya.

## Definisi 2 (Elemen Himpunan)

Diberikan himpunan tak kosong $A$. Objek $a$ dikatakan elemen dari himpunan $A$ jika $a$ termuat di dalam himpunan $A$. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $a \in A$.

Contoh: Diberikan $H = \{1,2,3,4\}$.

1. $1 \in H$;
2. $5 \notin H$.

Catatan:

1. Himpunan ditulis dengan huruf kapital, misal $A, B, C, \cdots$ atau bisa ditulis $\{...\}$.
2. Untuk melambangkan elemen, ditulis dengan huruf kecil.

Terdapat beberapa jenis himpunan yang sudah baku dan umum digunakan di seluruh dunia, diantaranya:

1. Himpunan semua bilangan kompleks yang dinotasikan dengan $\mathbb{C}$;
2. Himpunan semua bilangan real yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}$;
3. Himpunan semua bilangan rasional yang dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$;
4. Himpunan semua bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$;
5. Himpunan semua bilangan asli yang dinotasikan dengan $\mathbb{N}$.

Suatu himpunan dapat didefinisikan dalam beberapa cara antara lain sebagai berikut.

1. Deskripsi
   Contoh:
   $A = \{$Himpunan semua bilangan bulat genap positif$\}$
2. Notasi Pembentuk
   Contoh:
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ genap } \}$
3. Mendaftarkan semua anggotanya
   Contoh:
   $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \cdots\}$

**Definisi 3 (Kardinalitas)**

Diberikan suatu himpunan $A$. Banyaknya elemen di dalam himpunan $A$ disebut dengan kardinalitas. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $F = \{1, 2, \cdots, 2024\}$, diperoleh $|F| = 2024$;
2. Diberikan himpunan $O = \{x \mid x \text{ adalah huruf penyusun kata "yassin"}\}$, diperoleh $|O| = 5$;
3. Diberikan himpunan $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

## Definisi 3 (Kardinalitas)

Diberikan suatu himpunan $A$. Banyaknya elemen di dalam himpunan $A$ disebut dengan kardinalitas. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $F = \{1, 2, \cdots, 2024\}$, diperoleh $|F| = 2024$;
2. Diberikan himpunan $O = \{x \mid x \text{ adalah huruf penyusun kata "yassin"}\}$, diperoleh $|O| = 5$;
3. Diberikan himpunan $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, diperoleh $|Y| = \infty$;
4. Diberikan himpunan $E = \emptyset$,

## Definisi 3 (Kardinalitas)

Diberikan suatu himpunan $A$. Banyaknya elemen di dalam himpunan $A$ disebut dengan kardinalitas. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $F = \{1, 2, \cdots, 2024\}$, diperoleh $|F| = 2024$;
2. Diberikan himpunan $O = \{x \mid x \text{ adalah huruf penyusun kata "yassin"}\}$, diperoleh $|O| = 5$;
3. Diberikan himpunan $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, diperoleh $|Y| = \infty$;
4. Diberikan himpunan $E = \emptyset$, diperoleh $|E| = 0$;
5. Diberikan himpunan $H = \{\emptyset\}$,

## Definisi 3 (Kardinalitas)

Diberikan suatu himpunan $A$. Banyaknya elemen di dalam himpunan $A$ disebut dengan kardinalitas. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $F = \{1, 2, \cdots, 2024\}$, diperoleh $|F| = 2024$;
2. Diberikan himpunan $O = \{x \mid x \text{ adalah huruf penyusun kata "yassin"}\}$, diperoleh $|O| = 5$;
3. Diberikan himpunan $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, diperoleh $|Y| = \infty$;
4. Diberikan himpunan $E = \emptyset$, diperoleh $|E| = 0$;
5. Diberikan himpunan $H = \{\emptyset\}$, diperoleh $|H| = 1$.

## Definisi 4 (Himpunan Kosong)

Diberikan himpunan $A$. Himpunan $A$ dikatakan himpunan kosong ( *empty set* ) jika dan hanya jika $|A| = 0$. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $\emptyset$ atau $\{\}$.

Contoh:

1. Himpunan $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2023 < x < 2024\}$;
2. Himpunan $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2023 = 0\}$;
3. Himpunan $Y = \left\{ \Delta = \begin{bmatrix} y^3 & 2024 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{N} \wedge \det(\Delta) \neq 0 \right\}$;
4. Himpunan $E = \left\{ \lim_{x \to a} f(x) \text{ ada } \mid \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \right\}$;
5. Himpunan $H = \{k \in 2\mathbb{Z} \mid 1 + (-1)^k = 0\}$.

## Definisi 5 (Himpunan Bagian ( *Subset* ))

Diberikan dua himpunan, yaitu $A$ dan $B$. Himpunan $A$ disebut himpunan bagian dari himpunan $B$ jika untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in B$. Lebih lanjut, dapat dinotasikan $A \subseteq B$.

Contoh:

1. $\{5\} \subseteq \{1, 5\}$;
2. $\{t, e, o, h\} \subseteq \{t, e, o, h\}$;
3. $\{t, a, i\} \subseteq \{i, z, a, t\}$
4. $\{2, 0, 4, 2024\} \subseteq 2\mathbb{Z}$.

## Teorema 1

Diberikan himpunan $A, B$, dan $C$. Pada himpunan-himpunan tersebut, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

1. $A \subseteq A$;
2. $\emptyset \subseteq A$;
3. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$.

## Definisi 6 (Kesamaan Dua Himpunan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh:

## Definisi 6 (Kesamaan Dua Himpunan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 2024\}$ dan himpunan $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2024\}$, selanjutnya $A = B$;
2. $\{t, e, o, h\} = \{t, o, e, h\} = \{h, e, o, t\}$.

**Definisi 6 (Kesamaan Dua Himpunan)**

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 2024\}$ dan himpunan $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2024\}$, selanjutnya $A = B$;
2. $\{t, e, o, h\} = \{t, o, e, h\} = \{h, e, o, t\}$.

**Definisi 7 (Ekuivalensi Dua Himpunan)**

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A$ dikatakan ekuivalen dengan himpunan $B$ $(A \sim B)$ jika dan hanya jika $|A| = |B|$.

Contoh:

### Definisi 6 (Kesamaan Dua Himpunan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh:

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 2024\}$ dan himpunan $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2024\}$, selanjutnya $A = B$;
2. $\{t, e, o, h\} = \{t, o, e, h\} = \{h, e, o, t\}$.

### Definisi 7 (Ekuivalensi Dua Himpunan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A$ dikatakan ekuivalen dengan himpunan $B$ $(A \sim B)$ jika dan hanya jika $|A| = |B|$.

Contoh:

- $\{a, f, i, f, a, h\} \sim \{f, u, a, d\}$;
- $\{y, a, s, s, i, n\} \sim \{f, e, r, d, i\}$;
- $\{s, e, k, a, r\} \sim \{n, u, k, m, a\}$;
- $\{a, l, f, i\} \sim \{z, i, a, n\}$
- $\{w, y, n, e\} \sim \{f, e, b, i\}$;
- $\{h, u, m, a, i, r, a\} \sim \{d, a, l, v, i, n\}$;
- $\{h, a, n, i, f, a, h\} \sim \{s, i, n, t, a\} \sim \{r, e, n, a, t, a\}$;
- $\{i, z, a, t\} \sim \{t, e, o, h\}$.

**Definisi 8 (Himpunan Saling Lepas ( *disjoint set* ))**

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Himpunan $A$ dan $B$ dikatakan saling lepas jika dan hanya jika tidak ada elemen yang sama pada keduanya
atau
dengan kata lain, $A$ saling lepas dengan $B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

Contoh:

1. Himpunan $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2023\}$ dan himpunan $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2023\}$, sehingga $F$ saling lepas dengan $U$;
2. Himpunan $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dan himpunan $D = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, sehingga $A$ saling lepas dengan $D$;
3. $\emptyset$ saling lepas dengan $\emptyset$.

## Definisi 9 (Himpunan Kuasa ( *power set* ))

Diberikan himpunan A. Himpunan kuasa dari himpunan $A$, yang dinotasikan dengan $\mathcal{P}(A)$ adalah himpunan yang elemennya berupa semua himpunan bagian dari himpunan $A$, yaitu

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{def.}{=} \{B \mid B \subseteq A\}.$$

## Teorema 2

Diberikan himpunan $A$ dengan kardinalitas sebanyak $n$. Kardinalitas dari $\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Contoh:

1. Diberikan $K = \{t, e, o, h\}$. Himpunan kuasa $\mathcal{P}(K) = \{\emptyset, \{t\}, \{e\}, \{o\}, \{h\}, \{t, e\}, \{t, o\}, \{t, h\}, \{e, o\}, \{e, h\}, \{o, h\}, \{t, e, o\}, \{t, e, h\}, \{t, o, h\}, \{e, o, h\}, \{t, e, o, h\}\}$;
2. Diberikan $L = \{\spadesuit, \clubsuit\}$. Himpunan kuasa $\mathcal{P}(L) = \{\emptyset, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}\}$.

Diperoleh:

1. $\mathcal{P}(K) = 16$;
2. $\mathcal{P}(L) = 4$

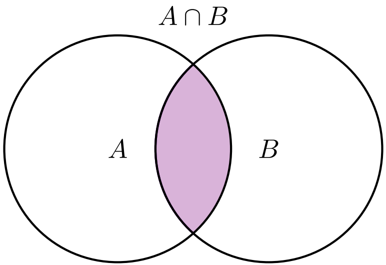
# Operasi-Operasi pada Himpunan

## Definisi 10 (Irisan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Irisan dari himpunan $A$ dan $B$ adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan $A$ dan himpunan $B$. Lebih lanjut

$$A \cap B \overset{def.}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Ilustrasi**




Contoh:

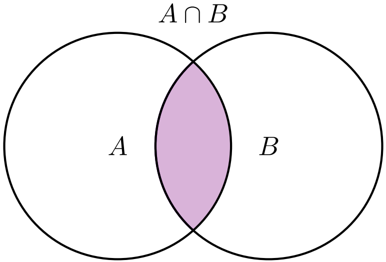
1. $\{f, e, r, d, i\} \cap \{s, e, k, a, r\} = \{e, r\}$;
2. $\{t, e, o, h\} \cap \{g, e, o, h\} \cap \{y, a, s, i, n\} = \emptyset$;
3. Himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2024\}$ dan himpunan $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 10\}$, sehingga $A \cap B =$

## Definisi 10 (Irisan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Irisan dari himpunan $A$ dan $B$ adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan $A$ dan himpunan $B$. Lebih lanjut

$$A \cap B \overset{def.}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Ilustrasi**




Contoh:

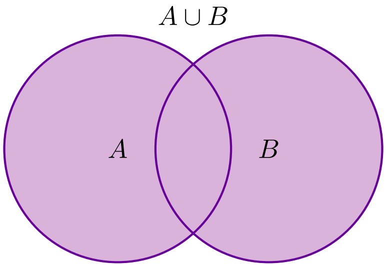
1. $\{f, e, r, d, i\} \cap \{s, e, k, a, r\} = \{e, r\}$;
2. $\{t, e, o, h\} \cap \{g, e, o, h\} \cap \{y, a, s, i, n\} = \emptyset$;
3. Himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2024\}$ dan himpunan $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 10\}$, sehingga $A \cap B = \{(1017, 1007)\}$.

## Definisi 11 (Gabungan)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Gabungan dari himpunan $A$ dan $B$ adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan $A$ atau himpunan $B$. Lebih lanjut

$$A \cup B \overset{def.}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

**Ilustrasi**




Contoh:

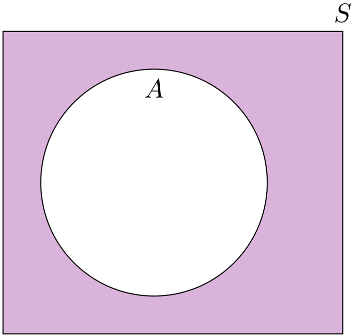
1. $\{f, e, b, i\} \cup \{d, a, l, v, i, n\} = \{a, b, d, e, f, i, l, n, v\}$;
2. $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$.

## Definisi 12 (Komplemen)

Diberikan himpunan bagian $A$ dari himpunan semesta $S$. Komplemen dari $A$ terhadap himpunan semesta $S$, yang dinotasikan $A^c$, adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan $S$ yang bukan elemen di himpunan $A$. Lebih lanjut

$$A^c \overset{def.}{=} \{x \mid x \in S \land x \notin A\}.$$

**Ilustrasi**

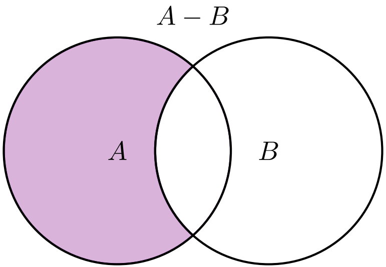


## Definisi 13 (Selisih)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Selisih $A - B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan elemen himpunan $A$ tetapi bukan merupakan elemen himpunan $B$. Lebih lanjut

$$A - B = A \cap B^c \overset{def.}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

### Ilustrasi



## Definisi 14 (Beda Setangkup)

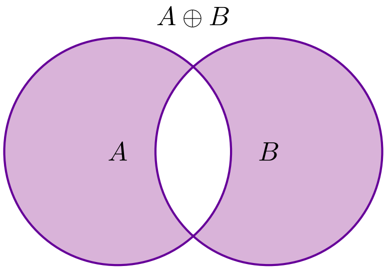
Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. Beda setangkup $A \oplus B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan elemen himpunan $A$ atau $B$ tetapi tidak pada $A$ dan $B$. Lebih lanjut

$$A \oplus B \stackrel{def.}{=} \{x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}.$$

**Note:**

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

**Ilustrasi**




## Teorema 3

Diberikan himpunan $A, B$, dan $C$. Pada himpunan-himpunan tersebut, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

1. $A \oplus B = B \oplus A$;
2. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$.

### Definisi 15 (Kesamaan Pasarangan Terurut)

Diberikan pasangan terurut $n-$ tupel $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ dan $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$. Pasangan terurut tersebut dikatakan **sama** jika dan hanya jika $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, $\cdots$, $x_n = y_n$.

### Definisi 16 (*Cartesian Product*)

Diberikan himpunan $A$ dan himpunan $B$. *Cartesian Product* dari himpunan $A$ dan $B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan pasangan terurut $2-$tupel di mana elemen pertama dari himpunan $A$ dan elemen kedua dari himpunan $B$. Lebih lanjut

$$A \times B \overset{def.}{=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Dapat digeneralisasi, diberikan keluarga himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_n$, didefinisikan

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n \overset{def.}{=} \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

# Pembuktian Proposisi Himpunan

## Teorema 4 (Hukum-Hukum Aljabar Himpunan)

Diberikan himpunan $A, B, C$, pada himpunan semesta $S$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

| | |
|---|---|
| Komplemen | $A \cup A^c = S$<br>$A \cap A^c = \emptyset$ |
| Komutatif | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| Assosiatif | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributif | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

| | |
|---|---|
| Identitas | $A \cup \emptyset = A$<br>$A \cap S = A$ |
| De Morgan | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$<br>$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ |
| *null*/dominasi | $A \cup S = S$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Absorpsi | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| Involusi | $(A^c)^c = A$ |
| Idempoten | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ |

**Bukti**: Pembuktian diserahkan kepada pembaca. ■

Proposisi himpunan adalah pernyataan yang mengandung notasi himpunan. Untuk membuktikan kebenaran proposisi himpunan, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, antara lain:

1. Pembuktian Proposisi Himpunan dengan Menggunakan Definisi;
2. Pembuktian Proposisi Himpunan dengan Menggunakan Aljabar Himpunan.

## Nomor 1 (UTS TA 2022/2023)

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Penyelesaian:**

Akan dibuktikan $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ artinya akan dibuktikan $A \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cup (B \cap C) \Leftarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Rightarrow$) Diambil sebarang $b \in A \cup (B \cap C)$, selanjutnya, perhatikan saat

(1) Jika $b \in A$, maka $b \in (A \cup B)$ dan $b \in (A \cup C)$.

(2) Jika $b \notin A$, maka haruslah dipenuhi kondisi $b \in B$ dan $b \in C$ dengan kata lain $b \in (A \cup B)$ dan $b \in (A \cup C)$.

Dari kasus 1 dan kasus 2, terbukti bahwa $A \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, **berdasarkan definisi irisan** didapatkan $a \in (A \cup B)$ dan $a \in (A \cup C)$. Selanjutnya, perhatikan saat

(3) $a \in (A \cup B) \overset{def.}{\Rightarrow} a \in A \vee a \in B$ dan

(4) $a \in (A \cup C) \overset{def.}{\Rightarrow} a \in A \vee a \in C$.

Dari kasus 3 dan kasus 4, terbukti bahwa $A \cup (B \cap C) \Leftarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$.■

## Nomor 2 (Kuis Kelas C)

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $A$ merupakan gabungan disjoin dari $(A - B)$ dan $(A \cap B)$.

**Penyelesaian:**
Akan dibuktikan bahwa $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(A - B) \cap (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap B) \quad \textbf{definisi selisih} \\
&= (A \cap B^c) \cap (B \cap A) \quad \textbf{sifat komutatif} \\
&= [(A \cap B^c) \cap B] \cap A \quad \textbf{sifat assosiatif} \\
&= [A \cap (B^c \cap B)] \cap A \quad \textbf{sifat assosiatif} \\
&= (A \cap \emptyset) \cap A \quad \textbf{sifat komplemen} \\
&= \emptyset \cap A \quad \textbf{sifat null} \\
&= \emptyset \quad \textbf{sifat null}
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A$ merupakan gabungan disjoin dari $(A - B)$ dan $(A \cap B)$.■

## Nomor 3 (UTS TA 2022/2023)

Diberikan himpunan-himpunan $P, Q, R$ dan $S$. Buktikan bahwa jika $R \subset P$ dan $S \subset Q$, maka $(R \times Q) \cap (P \times S) = R \times S$.

**Penyelesaian:**
Diambil sebarang $(a, b) \in (R \times Q) \cap (P \times S)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(R \times Q) \cap (P \times S) &= \{(a, b) \mid (a, b) \in (R \times Q) \wedge (a, b) \in (P \times S)\} && \textbf{definisi irisan} \\
&= \{(a, b) \mid a \in R \wedge b \in Q \wedge a \in P \wedge b \in S\} && \textbf{definisi cartesian product} \\
&= \{(a, b) \mid a \in R \wedge a \in P \wedge b \in Q \wedge b \in S\} && \textbf{sifat komutatif} \\
&= \{(a, b) \mid a \in (R \cap P) \wedge b \in (Q \cap S)\} && \textbf{definisi irisan}
\end{aligned}$$

Oleh karena $R \subset P$, maka $R \cap P = R$ dan $S \subset Q$, maka $S \cap Q = S$. Hal ini, berakibat $(R \cap P) \wedge (Q \cap S) = R \cap S$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $(R \times Q) \cap (P \times S) \subseteq R \times S$.

Diambil sebarang $(c, d) \in R \times S$, **berdasarkan definisi cartesian product** diperoleh fakta $c \in R$ dan $d \in S$. Bukti $R \times S \subseteq (R \cap P) \cap (Q \cap S)$ dilanjutkan oleh pembaca ■

## Nomor 4

Diberikan himpunan-himpunan $A$ dan $B$. Buktikan bahwa $A-(A\cap B)=A-B$.

**Penyelesaian:**

Akan dibuktikan bahwa $A-(A\cap B)=A-B$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
A-(A\cap B) &= A\cap(A\cap B)^c \quad \textbf{definisi selisih}\\
&= A\cap(A^c\cup B^c) \quad \textbf{sifat De Morgan}\\
&= (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c) \quad \textbf{sifat distributif}\\
&= \emptyset\cup(A\cap B^c) \quad \textbf{sifat komplemen}\\
&= (A\cap B^c) \quad \textbf{sifat null}\\
&= A-B \quad \textbf{definisi selisih}
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A-(A\cap B)=A-B.\blacksquare$

## Latihan Nomor 5

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

**Penyelesaian:**
Untuk membuktikan $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$, akan dibuktikan bahwa $(A - B) - C \subseteq (A - C) - (B - C)$ dan $(A - C) - (B - C) \subseteq (A - B) - C$. Diperhatikan bahwa

- Akan dibuktikan bahwa $(A - B) - C \subseteq (A - C) - (B - C)$.
  Diambil sebarang $k \in (A - B) - C$. **Berdasarkan definisi selisih** diperoleh $k \in (A \cap B^c) \cap C^c$, selanjutnya **berdasarkan sifat komutatif dan assosiatif** diperoleh $k \in (A \cap C^c) \cap B^c$.

  (1) Saat $k \in (A \cap C^c)$, **berdasarkan definisi selisih**, maka $k$ dapat dinyatakan $k \in A - C$ dan
  (2) Saat $k \in B^c$, ekuivalen dengan menyatakan $k \notin B$, **berdasarkan definisi irisan dan selisih** diperoleh $k \notin B \cap C^c$ atau $k \notin B - C$.

  Dari uraian tersebut, diperoleh bahwa $k \in (A - C) \wedge k \notin (B - C)$, dengan kata lain $k \in (A - C) - (B - C)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(A - B) - C \subseteq (A - C) - (B - C)$

- Akan dibuktikan bahwa $(A - C) - (B - C) \subseteq (A - B) - C$.
  Diambil sebarang $p \in (A - C) - (B - C)$. **Berdasarkan definisi selisih**, maka $p$ dapat dinyatakan $p \in (A - C) \land p \notin (B - C)$

  (1) Saat $p \in (A - C)$, **berdasarkan definisi selisih**, diperoleh $p \in A \land p \notin C$ dan
  (2) Saat $p \notin (B - C)$, **berdasarkan definisi komplemen**, diperoleh $p \in (B - C)^c$, **berdasarkan definisi selisih dan sifat De Morgan**, $p$ dapat dinyatakan sebagai $p \in B^c \lor p \in C$, dengan kata lain $p \notin B \lor p \in C$.

  Dari (1), dapat disimplifikasi $p \notin C$, **berdasarkan disjunctive syllogism** dengan (2) diperoleh bahwa $p \in B^c$, sehingga $p \in (A - C)$ juga berarti $p \in A \land p \in B^c$ atau $p \in (A - B)$. Dari (1), juga didapatkan $p \notin C$, artinya $p \in (A - B) - C$. Dengan demikian terbukti bahwa $(A - C) - (B - C) \subseteq (A - B) - C$.

Dari uraian di atas,oleh karena $(A - B) - C \subseteq (A - C) - (B - C)$ dan $(A - C) - (B - C) \subseteq (A - B) - C$ sehingga terbukti bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ ■

Akan dibuktikan bahwa $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \quad \textbf{definisi selisih}\\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \quad \textbf{sifat De Morgan}\\
&= [(A\cap C^c)\cap B^c]\cup[(A\cap C^c)\cap C] \quad \textbf{sifat distributif}\\
&= [(A\cap C^c)\cap B^c]\cup[A\cap(C^c\cap C)] \quad \textbf{sifat assosiatif}\\
&= [(A\cap C^c)\cap B^c]\cup(A\cap\emptyset) \quad \textbf{sifat komplemen}\\
&= [(A\cap C^c)\cap B^c]\cup\emptyset \quad \textbf{sifat null}\\
&= [(A\cap C^c)\cap B^c] \quad \textbf{sifat null}\\
&= A\cap(C^c\cap B^c) \quad \textbf{sifat assosiatif}\\
&= A\cap(B^c\cap C^c) \quad \textbf{sifat komutatif}\\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \quad \textbf{sifat assosiatif}\\
&= (A-B)-C \quad \textbf{definisi selisih}
\end{aligned}
$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.■

## Latihan Nomor 6

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $(A - B) \cup (B - C) = A - C$

**Penyelesaian:**
Tidak terbukti $(A - B) \cup (B - C) = A - C$, sebab terdapat *counterexample*, yaitu saat $A = \{t, e, o, h\}, B = \emptyset,$ dan $C = \{t, e, o, h\}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A - B &= \{t, e, o, h\} - \emptyset & (A - B) \cup (B - C) &= \{t, e, o, h\} \cup \emptyset \\ &= \{t, e, o, h\} & &= \{t, e, o, h\} & (1) \\ B - C &= \emptyset - \{t, e, o, h\} & A - C &= \{t, e, o, h\} - \{t, e, o, h\} \\ &= \emptyset & &= \emptyset & (2) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, didapatkan $(1) \neq (2)$, dengan kata lain terdapat $A = \{t, e, o, h\}, B = \emptyset,$ dan $C = \{t, e, o, h\}$ sedemikian sehingga $(A - B) \cup (B - C) \neq A - C$. Jadi, tidak terbukti bahwa $(A - B) \cup (B - C) = A - C$.■

## Latihan Nomor 7

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

**Penyelesaian:**
Akan dibuktikan bahwa $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c && \textbf{definisi selisih} \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) && \textbf{sifat De Morgan} \\ &= (A \cap A) \cap (B^c \cap C^c) && \textbf{sifat idempoten} \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) && \textbf{sifat komutatif} \\ &= (A - B) \cap (A - C) && \textbf{definisi selisih} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.■

## Latihan Nomor 8

Diberikan himpunan-himpunan $A, B$, dan $C$. Buktikan bahwa $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

**Penyelesaian:**
Akan dibuktika bahwa $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c && \textbf{definisi selisih} \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) && \textbf{sifat De Morgan} \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) && \textbf{sifat distributif} \\ &= (A - B) \cup (A - C) && \textbf{definisi selisih} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.■

## Latihan Nomor 9

Diberikan himpunan-himpunan $A$ dan $B$. Buktikan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $B^c \subseteq A^c$.

**Penyelesaian:**

Untuk membuktikan $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $B^c \subseteq A^c$ sama halnya dengan membuktikan $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$ dan $A \subseteq B \Leftarrow B^c \subseteq A^c$.

($\Rightarrow$) Diketahui $A \subseteq B$. Diambil sebarang $t \in B^c$, artinya $t \notin B$. Dari diketahui bahwa $A \subseteq B$, artinya jika $k \in A$, maka $k \in B$. Hal ini, berlaku kontraposisi, yaitu jika $k \notin B$, maka $k \notin A$. Analog, saat $t \notin B$ dan $A \subseteq B$, diperoleh $t \notin A$ atau jika $t \in B^c$, maka $t \in A^c$. Terbukti bahwa jika $A \subseteq B$, maka $B^c \subseteq A^c$.

($\Leftarrow$) Diketahui $B^c \subseteq A^c$. Diambil sebarang $s \in A$. Dari diketahui $B^c \subseteq A^c$, artinya jika $l \in B^c$, maka $l \in A^c$. Hal ini, berlaku kontraposisi, yaitu jika $l \notin A^c$, maka $l \notin B^c$, dengan kata lain, jika $l \in A$, maka $l \in B$. Analog, saat $s \in A$ dan $B^c \subseteq A^c$, diperoleh $s \in B$. Terbukti bahwa $A \subseteq B$.

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $B^c \subseteq A^c$.$\blacksquare$

## Latihan Nomor 10

Diberikan himpunan-himpunan $A$ dan $B$. Buktikan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$.

**Penyelesaian:**

Bukti diserahkan kepada pembaca. ■

## Latihan Nomor 11

Diberikan himpunan-himpunan $A$ dan $B$. Buktikan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$.

**Penyelesaian:**

Bukti diserahkan kepada pembaca. ■

## Latihan Nomor 12

Diberikan himpunan-himpunan $A$ dan $B$. Buktikan bahwa $A - B = B^c - A^c$.

**Penyelesaian:**

Akan dibuktikan bahwa $A - B = B^c - A^c$. Dengan aljabar himpunan, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B^c \quad \textbf{definisi selisih} \\ &= (A^c)^c \cap B^c \quad \textbf{sifat involusi} \\ &= B^c \cap (A^c)^c \quad \textbf{sifat komutatif} \\ &= B^c - A^c \quad \textbf{definisi selisih} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $A - B = B^c - A^c$.$\blacksquare$

# Soal

## Soal

Diberikan himpunan-himpunan $A, B,$ dan $C$ dalam semesta $S$. Buktikan bahwa

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \cup B = S$.
3. $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$.
4. $A \subseteq C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
5. Jika $A \subseteq B$ dan $A \subseteq C$, maka $A \subseteq B \cap C$.
6. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \cup B \subseteq C$.
7. Jika $A \cap B = A \cap C$ dan $A \cup B = A \cup C$, maka $B = C$.
8. Jika $A \times B = A \times C$ dan $A \neq \emptyset$, maka $B = C$.

NoteL

**Semangat UTS nya!** semoga hasilnya memuaskan. Mohon maaf jika terdapat buanyaaak kesalahan di *file* ini, banyak *typo*, dll. Semoga *file* ini bisa bermanfaat untuk kalian semua. Doakan penulis agar sehat dan sukses selalu. Aamiin YRA