Aljabar 2

Ring, Subring, Jenis-Jenis Ring, Ideal, Ideal Utama

Yassin Dwi Cahyo - Kelas B

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

16 Oktober 2023

Ring dan Subring

Pada mata kuliah **"Aljabar 1"**, telah ditetahui bersama bahwa himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan grup abelian. Juga telah diketahui bersama bahwa selain operasi pejumlahan $(+)$ pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ juga dapat didefinisikan operasi perkalian $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}$.
Operasi $+$ dan $\cdot$ merupakan operasi biner (bukti diserahkan kepada pembaca).

Fakta:

Terhadap operasi penjumlahan $+$ berlaku:

1. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku
$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$
2. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku
$$0 + x = x + 0 = x;$$
3. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, terdapat $-x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga
$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$
4. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku
$$x + y = y + x.$$

Dengan kata lain, $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.

Fakta lanjutan:

Terhadap operasi perkalian $\cdot$ berlaku:

1. **(Assosiatif)** Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$x \cdot (y \cdot z) = (z \cdot y) \cdot z.$$

Dengan kata lain, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ merupakan semigrup.

Terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$ berlaku:

1. **(Distributif Kiri)** Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

2. **(Distributif Kanan)** Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Termotivasi dari sifat-sifat himpunan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$, dilakukan proses abstraksi dan didefinisikan struktur abstrak yang disebut **ring/gelanggang.**

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{diabstraksikan menjadi}} \text{sebarang himpunan tak kosong } G$$

$$+ \xrightarrow{\text{diabstraksikan menjadi}} \text{sebarang operasi biner } \oplus \text{ pada } G$$

$$\cdot \xrightarrow{\text{diabstraksikan menjadi}} \text{sebarang operasi biner } * \text{ pada } G$$

Definisi 1 (Ring)

Himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner $\oplus$ dan $*$ disebut **ring** dengan notasi $(R, \oplus, *)$ jika memenuhi:

1. $(R, \oplus)$ merupakan grup abelian;
2. Operasi $*$ di R bersifat assosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in R, (a * b) * c = a * (b * c)$;
3. Operasi $\oplus$ dan $*$ di R bersifat:
   1. Distributif kiri
   $$\forall a, b, c \in R, a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$
   2. Distributif kanan
   $$\forall a, b, c \in R, (b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$$

Contoh 1

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$, himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, dan himpunan semua bilangan kompleks $\mathbb{C}$ juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ bilangan-bilangan yang sudah kita kenal sehari-hari. Oleh karena itu, dapat dituliskan dengan notasi

- Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- Ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- Ring $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Contoh 2

Perhatikan himpunan matriks persegi berukuran 2×2 dengan komponen-komponen bilangan real, yakni

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2 \right\}.$$

Dari sifat-sifat penjumlahan dan perkalian matriks yang sudah dipelajari dalam mata kuliah **"Aljabar Linear Elementer"**, dapat ditunjukkan bahwa $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.Selanjutnya untuk setiap bilangan asli n, dapat ditunjukkan bahwa

$$M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

merupakan ring terhadap operasi terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Sehingga dapat dinyatakan dengan ring

$$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

Proses memperluas dari $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ke $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ merupakan salah contoh proses **generalisasi**.

Contoh 3

Perhatikan himpunan semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ sebagai berikut

$$F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ fungsi}\}.$$

Dari mata kuliah **"Kalkulus"**, dapat didefinisikan operasi penjumlahan fungsi dan juga perkalian fungsi sebagai berikut. Untuk sebarang $f, g \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$didefinisikan $f + g$ dan $f \cdot g$ sebagai berikut:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan sifat-sifat dalam kalkulus, dapat ditunjukkan bahwa $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ merupakan ring. Sehingga dapat dinyatakan dengan ring

$$(F(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$$

Contoh 4

Dari mata kuliah **"Teori Himpunan dan Relasi"**, sudah diketahui bahwa jika A adalah sebarang himpunan maka himpunan kuasa dari A, yaitu himpunan semua himpunan bagian A, yang dinotasikan dengan

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(2^A, +, \cdot)$merupakan ring, dengan operasi penjumlahan dan perkaliannya didefinisikan sebagai berikut:

$$(\forall S_1, S_2 \in 2^A) S_1 + S_2 = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1)$$

dan

$$(\forall S_1, S_2 \in 2^A) S_1 \cdot S_2 = S_1 \cap S_2$$

Contoh 5

Dari mata kuliah **"Aljabar 1"**, telah diketahui bahwa jika $(G, +)$ adalah grup abelian, maka dapat dibentuk himpunan semua endomorfisma dari G ke G, yakni

$$\text{End}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ homomorfisma}\}.$$

Telah diketahui bersama bahwa $(\text{End}(G), +)$ merupakan grup abelian. Selain itu, dapat didefinisikan operasi komposisi $\circ$ pada $\text{End}(G)$, yakni

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \ \ \forall x \in G.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(\text{End}(G), +, \circ)$ merupakan ring.

Latihan Soal 1

1. Diberikan himpunan bilangan bulat genap $(2\mathbb{Z})$ di mana

$$2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pada himpunan $2\mathbb{Z}$ didefinisikan operasi $+$ dan $\cdot$ sebagai berikut.

$$2m + 2n \overset{def.}{=} 2(m+n)$$
$$(2m) \cdot (2n) \overset{def.}{=} 2(m \cdot 2n)$$

Untuk setiap $2m, 2n \in 2\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan suatu ring.

Penyelesaian:

1. Akan dibuktikan bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.
    1. *Closed*
       Diambil sebarang $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan $2a + 2b \in 2\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa

       $$2a + 2b \overset{def.}{=} 2(\underbrace{a + b}_{\mathbb{Z}}) \quad \text{operasi } + \text{ closed di } \mathbb{Z}$$
       $$\in 2\mathbb{Z}.$$

    2. *Well-defined*
       Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ juga merupakan elemen di $\mathbb{Z}$ dan operasi $+$ *well-defined* di $\mathbb{Z}$, akibatnya sifat $+$ juga *well-defined* di $2\mathbb{Z}$.

    Dari 1.1 dan 1.2, dapat disimpulkan bahwa operasi $+$ merupakan operasi biner di $2\mathbb{Z}$.
2. Akan dibuktikan bahwa operasi $+$ bersifat assosiatif di $2\mathbb{Z}$.
   Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan dengan memandang setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ sebagai elemen di $\mathbb{Z}$, akibatnya operasi $+$ yang bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$ akan diwariskan pada $2\mathbb{Z}$.

3. Eksistensi elemen netral.
   Terdapat $0 \in 2\mathbb{Z}$ dengan $0 = 2 \cdot 0$ untuk suatu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga untuk setiap $2a \in 2\mathbb{Z}$ berlaku
   $$2a + 0 = 0 + 2a = 2a$$
4. Eksistensi elemen invers
   Diambil sebarang $2a \in 2\mathbb{Z}$ dengan $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-2a = 2(-a) \in 2\mathbb{Z}$ dengan $-a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku
   $$2a + (-2a) = (-2a) + 2a = 0$$
5. Akan dibuktikan bahwa operasi $+$ bersifat komutatif di $2\mathbb{Z}$.
   Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan dengan memandang setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ sebagai elemen di $\mathbb{Z}$, akibatnya operasi $+$ yang bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$ akan diwariskan pada $2\mathbb{Z}$.

   Dari 1 sampai dengan 5, dapat disimpulkan bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.

6. Akan dibuktian bahwa $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ merupakan semigrup.

   1. *Closed*
      Diambil sebarang $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$ di mana $a, b \in \mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $2a \cdot 2b \in 2\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa

      $$(2a) \cdot (2b) \stackrel{def.}{=} 2(\underbrace{a \cdot 2b}_{\mathbb{Z}}) \quad \text{operasi } \cdot \text{ } \textit{closed} \text{ di } \mathbb{Z}$$
      $$\in 2\mathbb{Z}$$

   2. *Well-defined*
      Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan dengan memandang setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ sebagai elemen di $\mathbb{Z}$, akibatnya operasi $\cdot$ yang bersifat *well-defined* di $\mathbb{Z}$ akan diwariskan pada $2\mathbb{Z}$.

   3. Akan dibuktikan bahwa operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $2\mathbb{Z}$.
      Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan dengan memandang setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ sebagai elemen di $\mathbb{Z}$, akibatnya operasi $\cdot$ yang bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$ akan diwariskan pada $2\mathbb{Z}$.

Dari 6.1 sampai dengan 6.3, dapat disimpulkan bahwa $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ merupakan semigrup.

7. Operasi $+$ dan $\cdot$ di $2\mathbb{Z}$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.
   Oleh karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan dengan memandang setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ sebagai elemen di $\mathbb{Z}$, akibatnya operasi $+$ dan $\cdot$ yang memenuhi hukum distributif kiri dan distributif kanan di $\mathbb{Z}$ [karena $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring] akan diwariskan pada $2\mathbb{Z}$.

   Dari 1 sampai dengan 7, terbukti bahwa $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan suatu ring $\square$.

Latihan Soal 2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ yang dilengkapi operasi $+_6$ dan $\cdot_6$. Apakah $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ merupakan ring?

Penyelesaian:

1. Bukti diserahkan kepada pembaca, diperoleh $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ merupakan grup abelian.
2. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6)$ merupakan semigrup.
   1. Perhatikan tabel di bawah ini!

$\cdot_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

   Dari tabel di atas, terbukti bahwa operasi $\cdot_6$ bersifat *closed* dan *well-defined*. Jadi, operasi $\cdot_6$ merupakan operasi biner.

   2. Perhatikan tabel di bawah ini!

$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{a} \cdot_6 (\overline{b} \cdot_6 \overline{c})$	$(\overline{a} \cdot_6 \overline{b}) \cdot_6 \overline{c}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   Isian tabel dilanjutkan oleh pembaca sehingga diperoleh bahwa $\cdot_6$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}_6$.

Dari 2.1 dan 2.2, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6)$ merupakan semigrup.

3. Operasi $+_6$ dan $\cdot_6$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan di $\mathbb{Z}_6$.
   1. Distributif kiri
      Perhatikan tabel di bawah ini!

$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{a} \cdot_6 (\overline{b} +_6 \overline{c})$	$(\overline{a} \cdot_6 \overline{b}) +_6 (\overline{a} \cdot_6 \overline{c})$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   2. Distributif kanan
      Isian tabel dilanjutkan oleh pembaca sehingga diperoleh bahwa $\cdot_6$ dan $+_6$ bersifat distributif kiri dan kanan di $\mathbb{Z}_6$.

Dari 1 sampai dengan 3, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ merupakan ring, lebih lanjut dapat dikatakan ring berhingga. $\square$

Latihan Mandiri 1

Latihan Mandiri 2

Latihan Mandiri 3

Definisi 2

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $x, y \in R$. Operasi pengurangan $(-)$ di R antara x dan y, dinotasikan dengan $x - y$, didefinisikan sebagai

$$x - y := x + (-y)$$

di mana $-y$ menyatakan invers dari elemen y terhadap operasi penjumlahan di R. Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\text{sebanyak } n}$$

Teorema 1

Jika ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan, yaitu 1_R, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. Untuk setiap $x \in R$ berlaku $0_R \cdot x = x \cdot 0_R = 0_R$
2. Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku
   1. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ dan
   2. $(-x) \cdot (-y) = xy$
3. Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ dan $(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$

Bukti.

Diketahui $(R, +, \cdot)$ merupakan sebuah ring.

1. Diambil sebarang $x \in R$, dengan memandang $0_R \in R$ sebagai elemen netral operasi $+$ di R, maka $0_R + 0_R = 0_R$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
0_R \cdot x &= (0_R + 0_R) \cdot x \\
0_R \cdot x &= 0_R \cdot x + 0_R \cdot x \quad \textbf{Hukum distributif kanan pada ring } (R, +, \cdot) \\
0_R \cdot x + (-(0_R \cdot x)) &= [0_R \cdot x + 0_R \cdot x] + (-(0_R \cdot x)) \quad \textbf{Operasi } + \textbf{ di } R \textbf{ bersifat well-defined} \\
0_R &= 0_R \cdot x + [0_R \cdot x + (-(0_R \cdot x))] \quad \textbf{Sifat invers dan assosiatif } + \textbf{ di grup } (R, +) \\
0_R &= 0_R \cdot x + 0_R \quad \textbf{Sifat invers di grup}(R, +) \\
0_R &= 0_R \cdot x \quad \textbf{Eksistensi elemen netral di grup}(R, +)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan kembali bahwa

$$\begin{aligned}
x \cdot 0_R &= x \cdot (0_R + 0_R) \\
x \cdot 0_R &= x \cdot 0_R + x \cdot 0_R \quad \textbf{Hukum distributif kiri pada ring } (R, +, \cdot) \\
-(x \cdot 0_R) + x \cdot 0_R &= -(x \cdot 0_R) + [x \cdot 0_R + x \cdot 0_R] \quad \textbf{Operasi } + \textbf{ di } R \textbf{ bersifat well-defined} \\
0_R &= [-(x \cdot 0_R) + x \cdot 0_R] + x \cdot 0_R \quad \textbf{Sifat invers dan assosiatif } + \textbf{ di grup } (R, +) \\
0_R &= 0_R + x \cdot 0_R \quad \textbf{Sifat invers di grup}(R, +) \\
0_R &= x \cdot 0_R \quad \textbf{Eksistensi elemen netral di grup}(R, +)
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa $0_R \cdot x = x \cdot 0_R = 0_R$.

Bukti.

2. Diambil sebarang $x, y \in R$, diperoleh $x \cdot y \in R$.
   1. Akan dibuktikan bahwa $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Oleh karena $(R, +)$ merupakan grup abelian sedemikian sehingga $x \cdot y$ mempunyai elemen invers terhadap operasi $+$ di R, yaitu $-(xy)$. Untuk membuktikan $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$, sama halnya dengan membuktikan $(-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ merupakan elemen invers dari $x \cdot y$ terhadap operasi $+$ di R, artinya harus dibuktikan $(-x) \cdot y + x \cdot y = 0_R$ dan $x \cdot (-y) + x \cdot y = 0_R$.

      Perhatikan bahwa

      $$\begin{aligned} -(x) \cdot y + x \cdot y &= [(-x) + x] \cdot y \quad \textbf{Hukum distributif kanan di ring}(R, +, \cdot) \\ &= 0_R \cdot y \quad \textbf{Sifat invers di grup}(R, +) \\ &= 0_R \quad \textbf{Teorema 1 bagian 1} \end{aligned}$$

      Lalu, perhatikan kembali bahwa

      $$\begin{aligned} x \cdot (-y) + x \cdot y &= x \cdot [(-y) + y] \quad \textbf{Hukum distributif kiri di ring}(R, +, \cdot) \\ &= x \cdot 0_R \quad \textbf{Sifat invers di grup}(R, +) \\ &= 0_R \quad \textbf{Teorema 1 bagian 1} \end{aligned}$$

      Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

□

Bukti.

2 2 Selanjutnya akan dibuktikan $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Oleh karena $x, y \in R$ dan $(R, +)$ merupakan grup abelian, maka $-x, -y \in R$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (-x) \cdot (-y) &= -(x \cdot (-y)) && \textbf{Teorema 1 bagian 2.1} \\ &= -(-(x \cdot y)) && \textbf{Teorema 1 bagian 2.1} \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

$\square$

Bukti.

3. Diambil sebarang $x, y, z \in R$, dengan mengingat bahwa $y - z = y + (-z)$. Akan dibuktikan bahwa $x \cdot (y - z) = x \cdot y - y \cdot z$ dan $(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x \cdot (y - z) &= x \cdot (y + (-z)) \\ &= x \cdot y + x \cdot (-z) \quad \textbf{Hukum distributif kiri di ring } (R, +, \cdot) \\ &= x \cdot y + (-(x \cdot z)) \quad \textbf{Teorema 1 bagian 2.1} \\ &= x \cdot y - x \cdot z \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan kembali bahwa

$$\begin{aligned} (x - y) \cdot z &= (x + (-y)) \cdot z \\ &= x \cdot z + (-y) \cdot z \quad \textbf{Hukum distributif kanan di ring } (R, +, \cdot) \\ &= x \cdot z + (-(y \cdot z)) \quad \textbf{Teorema 1 bagian 2.1} \\ &= x \cdot z - y \cdot z \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa $x \cdot (y - z) = x \cdot y - y \cdot z$ dan $(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$. □

Definisi 3

Diberikan suatu ring $(R, +, \cdot)$.

1. Ring R disebut **ring komutatif** jika R komutatif terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $r \cdot s = s \cdot r$.
2. Ring R disebut **ring dengan elemen satuan** jika R mempunyai elemen satuan terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu terdapat $1_R \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $r \in R$ berlaku $r \cdot 1_R = 1_R \cdot r = r$.
3. Ring R disebut **ring pembagiann (division ring)** jika R mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nol di R mempunyai elemen invers terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu untuk setiap $0_R \neq r \in R$, terdapat $r^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1_R$.
4. Ring R disebut **Lapangan (Field)** jika R merupakan ring pembagian yang komutatif

Contoh 6

Ring $(\mathbb{C}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Lebih lanjut, $(\mathbb{C}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ merupakan lapangan.

Telah diketahui bersama bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring. Himpunan semua bilangan bulat genap dapat dinotasikan sebagai

$$2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

yang merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}$. Telah ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ juga merupakan ring. Hal ini berbeda dengan himpunan semua bilangan bulat ganjil yang dinyatakan sebagai

$$2\mathbb{Z} + 1 = \{2z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

yang juga merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}$. Namun, operasi $+$ di $2\mathbb{Z} + 1$ bukan merupakan operasi biner, sebab terdapat $1, 2023 \in 2\mathbb{Z} + 1$ tetapi $1 + 2023 = 2024 \notin 2\mathbb{Z} + 1$. Jadi, $(2\mathbb{Z} + 1, +, \cdot)$ bukan merupakan ring. Dari perbandingan antara $2\mathbb{Z}$ dan $2\mathbb{Z} + 1$ tersebut disimpulkan bahwa himpunan bagian dari suatu ring belum tentu ring terhadap operasi yang sama. Fakta ini memunculkan definisi subring.

Definisi 4 (Subring)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $\emptyset \neq S \subseteq R$. Himpunan S disebut subring dari R jika S juga merupakan ring terhadap operasi $+$ dan $\cdot$ yang sama pada R.

Dari definisi 4, dapat disimpulkan bahwa suatu himpunan bagian tak kosong S **[Note: cek 2]** dari suatu ring $(R, +, \cdot)$ merupakan ring jika

R1. $(S, +)$ merupakan grup abelian; **[Note: cek 6 aksioma]**

R2. $(S, \cdot)$ merupakan semigrup; dan **[Note: cek 3 aksioma]**

R3. Operasi $+$ dan $\cdot$ bersifat distributif kiri dan kanan.**[Note: cek 2 aksioma]**

Total: cek 13 aksioma untuk membuktikan subring. CAPEK? WKWK.

PERHATIKAN BAIK-BAIK!

1. Pada syarat R1 ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa S merupakan subgrup dari grup $(R, +)$, artinya cukup membuktikan bahwa
$$(\forall s_1, s_2 \in S) s_1 - s_2 \in S.$$
2. Lalu untuk syarat R2, untuk menunjukkan $(S, \cdot)$ itu semigrup, hanya perlu cek ketertutupan operasi $\cdot$ di dalam S, yaitu
$$(\forall s_1, s_2 \in S) s_1 \cdot s_2 \in S$$
Untuk sifat *well-defined* dan assosiatif $\cdot$ di S itu diwariskan

Teorema 2 (Syarat Perlu dan Syarat Cukup Subring)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan himpunan bagian tak kosong S di dalam R. Himpunan S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ berlaku

1. $s_1 - s_2 \in S$ dan
2. $s_1 \cdot s_2 \in S$.

Contoh 7

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ subring dari $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
2. $(D_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ subring dari $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Latihan Soal 3

Diberikan himpunan $2\mathbb{Z} - \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Apakah $2\mathbb{Z}$ merupakan subring dari ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

Penyelesaian:

1. Himpunan $2\mathbb{Z} \neq \emptyset$, sebab ada $4 = 2 \cdot 2 \in 2\mathbb{Z}$ untuk suatu $2 \in \mathbb{Z}$.
2. Akan dibuktikan $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Diambil sebarang $2k \in 2\mathbb{Z}$ di mana $k \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $2k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena $2, k \in \mathbb{Z}$, dari sifat *closed* operasi $\cdot$ di $\mathbb{Z}$ maka $2k \in 2\mathbb{Z}$. Jadi, terbukti bahwa $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

3. Diambil sebarang $a = 2k, b = 2l \in 2\mathbb{Z}$ untuk suatu $k, l \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a - b &= 2k - 2l \\ &= 2(k - l) \quad \textbf{Hukum distributif kiri di ring}(\mathbb{Z}, +, \cdot) \\ &= 2(k + (-l)) \\ &\in 2\mathbb{Z} \quad \textbf{Sebab } k, -l \in \mathbb{Z} \textbf{ dan sifat closed} + \textbf{ di grup } (\mathbb{Z}, +) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2k) \cdot (2l) \\ &= 2((k)(2l)) \quad \textbf{Sifat assosiatif } \cdot \textbf{ di } \mathbb{Z} \\ &= 2((k \cdot 2)l) \quad \textbf{Sifat assosiatif } \cdot \textbf{ di } \mathbb{Z} \\ &\in 2\mathbb{Z} \quad \textbf{Sebab } 2, k, l \in \mathbb{Z} \textbf{ dan sifat closed } \cdot \textbf{ di } \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dari 1 sampai dengan 3 berdasarkan **teorema 2**, terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan subring dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Daerah Integral

Telah diketahui bersama bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan suatu ring dengan elemen satuan, yaitu $1_{\mathbb{Z}}$. Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ hanya memiliki dua elemen yang memiliki invers terdapat operasi $\cdot$ di $\mathbb{Z}$, yaitu 1 dan -1 sebab $1 \cdot 1 = 1$ dan $(-1) \cdot (-1) = 1$. Namun, $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring yang tidak memiliki elemen satuan, akibatnya setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ tidak memiliki invers terhadap operasi $\cdot$. Dari fenomena tersebut, diperoleh pernyataan

Fakta:

Ring $(R, +, \cdot)$ tidak selalu memiliki elemen satuan dan tidak selalu pula memiliki invers terhadap operasi $\cdot$ untuk setiap elemennya.

Dengan fakta tersebut, jika suatu elemen di ring $(R, +, \cdot)$ memiliki invers terhadap operasi $\cdot$, maka elemen tersebut dikenal dengan istilah elemen unit.

Definisi 5

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Suatu elemen $u \in R$ disebut **unit** jika u memiliki invers terhadap operasi $\cdot$, yaitu terdapat $v \in R$ sedemikian sehingga $u \cdot v = v \cdot u = 1_R$.

Contoh 8

1. Unit di ring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ hanya $\overline{1}$ dan $\overline{5}$;
2. Unit di ring $(\mathbb{Z}_8, +_8, \cdot_8)$, yaitu $\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}$, dan $\overline{7}$.

Ditinjau untuk ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ di mana $a \cdot b = 0$ berakibat salah satu elemennya adalah 0, yaitu $a = 0$ atau $b = 0$. Namun, pada ring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_6$ di mana $\overline{a} \cdot_6 \overline{b} = \overline{0}$, maka kemungkinan yang terjadi untuk $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ adalah

1. $\overline{a} = \overline{0}$ atau $\overline{b} = \overline{0}$, sebagai contoh $\overline{0} \cdot_6 \overline{0} = \overline{0}, \overline{1} \cdot_6 \overline{0} = \overline{0}, \overline{0} \cdot_6 \overline{2} = \overline{0}$;
2. $\overline{a} \neq \overline{0}$ dan $\overline{b} \neq \overline{0}$, sebagai contoh $\overline{2} \cdot_6 \overline{3} = \overline{0}$.

Dari fenomena tersebut, didefinisikan elemen pembagi nol.

Definisi 6 (Pembagi Nol)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan elemen $a \in R$.

1. Elemen $a \in R$ disebut **pembagi nol kiri** jika terdapat $0 \neq b \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot b = 0_R$;
2. Elemen $a \in R$ disebut **pembagi nol kiri** jika terdapat $0 \neq b \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot b = 0_R$;
3. Elemen $a \in R$ disebut **pembagi nol** jika a merupakan pembagi nol kiri sekaligus kanan.

Akibat 1

Untuk setiap ring $(R, +, \cdot)$ akan selalu mempunyai pembagi nol trivial, yaitu 0_R sebab untuk setiap $0 \neq a \in R$ berlaku $a \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot a$.

Dari contoh ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$, diperoleh fakta

1. Pada ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ hanya dipunyai pembagi nol trivial (tak memuat pembagi nol non trivial);
2. Pada ring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ memuat pembagi nol non trivial, yaitu $\overline{2}$ dan $\overline{3}$.

Note: Pembagi nol non trivial itu maksudnya yang $a \neq 0$ ya guys :)

Definisi 7 (Daerah Integral)

Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(R, +, \cdot)$. Ring R disebut **daerah integral** jika hanya memuat pembagi nol trivial.

Contoh 9

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;
2. $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$.

Teorema 3

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Hukum kanselasi di ring R berlaku jika dan hanya jika R hanya memuat pembagi nol trivial.

Teorema 4

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Jika R adalah lapangan, maka R merupakan daerah integral.

D

iketahui R adalah lapangan, artinya R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, yaitu 1_R dan untuk setiap $a \in R \backslash \{0\}$ terdapat $a^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$. Akan dibuktikan bahwa R merupakan daerah integral, artinya perlu ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in R$ jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Diambil sebarang $a, b \in R$ dengan $a \cdot b = 0$.

K1 Saat $a \neq 0$.
Oleh karena $0 \neq a \in R$, maka $a^{-1} \in R$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 && \text{Sifat well-defined operasi } \cdot \text{ di } R \\ &\Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0 && \text{Sifat assosiatif operasi } \cdot \text{ di } R \\ &\Leftrightarrow 1_R \cdot b = a^{-1} \cdot 0 && \text{Sebab } 1_R \text{ elemen satuan di } R \\ &\Leftrightarrow b = 0 && \text{Teorema 1} \end{aligned}$$

Bukti.

K2 Saat $b \neq 0$.
Oleh karena $0 \neq b \in R$, maka $b^{-1} \in R$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow (a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} \quad \text{Sifat well-defined operasi } \cdot \text{ di } R \\ &\Leftrightarrow a \cdot (b \cdot b^{-1}) = 0 \cdot b^{-1} \quad \text{Sifat assosiatif operasi } \cdot \text{ di } R \\ &\Leftrightarrow a \cdot 1_R = 0 \cdot b^{-1} \quad \text{Sebab } 1_R \text{ elemen satuan di } R \\ &\Leftrightarrow a = 0 \quad \text{Teorema 1} \end{aligned}$$

Jadi, jika a dan b merupakan elemen di lapangan R di mana $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$ sehingga terbukti bahwa R merupakan daerah integral. $\square$

Ideal

Pada matakuliah **aljabar 1**, telah diketahui bahwa dari suatu grup dapat dibentuk grup baru dengan memanfaatkan subgrup normal. Grup tersebut dinamakan grup faktor. Sejalan dengan ide pembentukan gup faktor tersebut, dapat dibentuk ring faktor. Dalam proses pembentukan ring faktor ini, memotivasi munculnya definisi ideal dari suatu ring.
Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan subring S di dalam R. Oleh karena S merupakan subring dalam R, maka $(S, +)$ merupakan suatu grup abelian sehingga S merupakan subgrup normal dalam R. Oleh karena $S \trianglelefteq R$, sehingga dapat dibentuk suatu grup faktor $(R/S, +)$ dengan

$$R/S = \{r + S \mid r \in R\}.$$

Selanjutnya, muncul pertanyaan apakah operasi perkalian

$$\begin{aligned} \cdot : R/S \times R/S &\to R/S \\ r + S, r' + S &\mapsto \cdot(r + S, r' + S) \overset{def.}{=} r \cdot r' + S, \quad \forall r + S, r' + S \in R/S \end{aligned}$$

sedemikian sehingga $(R/S, +, \cdot)$ merupakan ring? Oleh karena operasi $+$ di R/S sudah bersifat *closed* dan *well-defined*. Bagaimana dengan operasi $\cdot$ di R/S? akan dicek apakah operasi $\cdot$ di R/S juga *well-defined*.

Diambil sebarang $r_1 + S, r_1' + S, r_2 + S, r_2' + S \in R/S$ di mana $r_1 + S = r_1' + S$ dan $r_2 + S = r_2' + S$, akan dibuktikan bahwa

$$(r_1 + S) \cdot (r_2 + S) = (r_1' + S) \cdot (r_2' + S)$$

atau dicek

$$r_1 \cdot r_2 + S = r_1' \cdot r_2' + S \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 - r_1' \cdot r_2' \in S$$

Dari kesamaan koset, diperoleh bahwa

$$r_1 + S = r_1' + S \Leftrightarrow r_1 - r_1' \in S$$
$$(\exists s_1 \in S) r_1 - r_1' = s_1 \tag{1}$$

dan

$$r_2 + S = r_2' + S \Leftrightarrow r_2 - r_2' \in S$$
$$(\exists s_2 \in S) r_2 - r_2' = s_2 \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$r_1 - r_1' = s_1 \Leftrightarrow r_1 = r_1' + s_1 \tag{3}$$
$$r_2 - r_2' = s_2 \Leftrightarrow r_2 = r_2' + s_2 \tag{4}$$

Akan dicek apakah $r_1 \cdot r_2 - r_1' \cdot r_2' = s_3$ untuk suatu $s_3 \in S$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 - r_1' \cdot r_2' &= (r_1' + s_1) \cdot (r_2' + s_2) - r_1' \cdot r_2' \\ &= r_1' \cdot (r_2' + s_2) + s_1 \cdot (r_2' + s_2) - r_1' \cdot r_2' \\ &= r_1' \cdot r_2' + r_1' \cdot s_2 + s_1 \cdot r_2' + s_1 \cdot s_2 - r_1' \cdot r_2' \\ &= r_1' \cdot s_2 + s_1 \cdot r_2' + \underbrace{s_1 \cdot s_2}_{\in S} \end{aligned}$$

Oleh karena S subring dari R, sehingga untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ berlaku $s_1 \cdot s_2 \in S$. Bagaimana dengan $s_1 \cdot r_2'$ dan $r_1' \cdot s_2$? ternyata $s_1.r_2'$ dan $r_1'.s_2$ belum tentu berada di S, sehingga $r_1 \cdot r_2 - r_1' \cdot r_2' = s_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot r_2' + r_1' \cdot s_2$ juga belum tentu ada di S. Jadi, operasi $\cdot$ di R/S belum tentu bersifat *well-defined*. Kesimpulannya, agar $\cdot$ di R/S itu *well-defined*, maka diberikan syarat bahwa

1. Himpunan S dengan operasi $+$ dan $\cdot$ merupakan subring dari R;
2. Untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $s \in S$, berlaku:
   1. $r \cdot s \in S$
   2. $s \cdot r \in S$

Dari fenomena di atas, memunculkan definisi ideal.

Definisi 8 (Ideal)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $\emptyset \neq I \subseteq R$. Subset I disebut ideal dari R jika memenuhi

1. $(\forall i_1, i_2 \in I) i_1 - i_2 \in I$ dan
2. $(\forall i \in I)(\forall r \in R) i \cdot r, r \cdot i \in I$.

Contoh 10

1. Subset $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal di ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Secara umum, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^{>0}, n\mathbb{Z}$ merupakan ideal di ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
2. Subset $M_{2\times 2}(n\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}^{>0}$ merupakan ideal di ring $(M_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.
3. Subring $(\{\overline{0}, \overline{2}\}, +_4, \cdot_4)$ merupakann ideal di ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$.
4. Subring $(\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}, +_{12}, \cdot_{12})$ merupakan ideal di ring $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$.
5. Namun, $\mathbb{Z}$ bukan merupakan ideal di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, sebab terdapat $2 \in \mathbb{Z}$ dan $\dfrac{1}{2023} \in \mathbb{Q}$ di mana
$$2 \cdot \frac{1}{2023} = \frac{2}{2023} \notin \mathbb{Z}.$$

Kesimpulan: tidak setiap subring merupakan ideal.

Definisi 9 (Ideal Kanan)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $\emptyset \neq I \subseteq R$. Subset I disebut ideal dari R jika memenuhi

1. $(\forall i_1, i_2 \in I) i_1 - i_2 \in I$ dan
2. $(\forall i \in I)(\forall r \in R) i \cdot r \in I$.

Definisi 10 (Ideal Kiri)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $\emptyset \neq I \subseteq R$. Subset I disebut ideal dari R jika memenuhi

1. $(\forall i_1, i_2 \in I) i_1 - i_2 \in I$ dan
2. $(\forall i \in I)(\forall r \in R) r \cdot i \in I$.

Contoh 11

Diberikan ring $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Didefinisikan $I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ dan $I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Ideal I_1 merupakan ideal kiri di $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dan Ideal I_2 merupakan ideal kanan di $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Teorema 5

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan dua ideal kiri (ideal kanan, ideal) I dan J di R. Berlaku $I \cap J$ juga merupakan ideal kiri (ideal kanan, ideal) di R.

Bukti.

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan dua ideal kiri (ideal kanan, ideal) I dan J di R. Diambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I \cap J$, artinya $x, y \in I$ dan $x, y \in J$. Oleh karena I dan J merupakan ideal kiri di R, maka dipenuhi kondisi:

1. $x - y \in I$ dan $x - y \in J$, sehingga $x - y \in I \cap J$
2. $r \cdot x \in I$ dan $r \cdot x \in J$, sehingga $r \cdot x \in I \cap J$

Dengan demikian, terbukti bahwa jika dua ideal kiri I dan J di R, maka $I \cap J$ merupakan ideal kiri di ring $(R, +, \cdot)$.
Bukti untuk ideal kanan (ideal) analog. $\square$