Persamaan differensial biasa

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

August 23, 2022

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah ini mempelajari persamaan differensial biasa yang meliputi mempelajari persamaan differensial order I baik homogen maupun non homogen dengan koefisien konstan mapun linear beserta solusinya, persamaan differensial exact, persamaan differensial dengan faktor integral, persamaan differensial linear, persamaan differensial Bernaoulli, persamaan differensial order dua linear homogen dan tak homogen, sistem persamaan differensial, solusi persamaan differensial dengan metode deret, serta mempelajari transformasi Laplace dan invers transformasi Laplace.

Penilaian

Keaktifan 5%
KUIS/TUGAS 20%
UTS 35%
UAS 40%

Referensi

1. Boyce and de Prima, 1992, Elementary Diferential Equation and Boundary Value Problems, 5th edition, John Wiley.
2. Kreyzig E, 1988, Advanced Engineering Mathematics, 6 th edition, John Wiley & Sons Inc, New York.
3. Kartono, 2005, Maple untuk persamaan diferensial, edisi 2, Graha Ilmu, Yogyakarta.
4. Gabriel Nagy, 2017, Ordinary Differential Equation, Mathematics Department, Michigan State University,

Pertemuan 1 Pengantar Persamaan differensial biasa

Tujuan pembelajaran

1. Mahasiswa mampu menjelaskan mengenai apa itu persamaan differensial.
2. Mahasiswa mampu mengklasifikasikan jenis-jenis persamaan differensial

Ingat Kembali!

Misalkan $y(t)$ menyatakan fungsi terhadap waktu.
Perubahan y terhadap t dapat dinyatakan dalam

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

Jika $\Delta t \to 0$ maka

$$\frac{dy}{dt} = f'(t)$$

Pada suatu ekosistem, terdapat segerombolan tikus, tikus tersebut berkembang 0.5 kali lipat tiap satuan waktu t (Misalkan t dalam bulan). Misalkan $y(t)$ menyatakan banyak tikus maka ilustrasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.5y(t)$$

Pertanyaanya..

$$y(t) = \cdots ?$$

Pada suatu ekosistem, terdapat segerombolan tikus, tikus tersebut berkembang 0.5 kali lipat tiap satuan waktu t (Misalkan t dalam bulan). Misalkan $y(t)$ menyatakan banyak tikus maka ilustrasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.5y(t)$$

Pertanyaanya..

$$y(t) = \cdots ?$$

Coba gunakan $y(t) = e^{0.5t}$

Pada suatu ekosistem, terdapat segerombolan tikus, tikus tersebut berkembang 0.5 kali lipat tiap satuan waktu t (Misalkan t dalam bulan). Misalkan $y(t)$ menyatakan banyak tikus maka ilustrasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.5y(t)$$

Pertanyaanya..

$$y(t) = \cdots ?$$

Coba gunakan $y(t) = e^{0.5t}$
Bagaimana jika $y(t) = 10e^{0.5t}$

Budi memiliki kekayaan yang terus bertambah setiap satuan waktu dengan kenaikan setiap satuan waktunya adalah 0.2 kali lipat dari kekayaan sebelumnya. Namun budi setiap waktu selalu menggunakan $\$1$ setiap satuan waktu sehingga mengurangi kekayaannya. Jika $x(t)$ adalah fungsi yang menyatakan kekayaan budi. Bagaimana ilustrasi persamaan tersebut?

Budi memiliki kekayaan yang terus bertambah setiap satuan waktu dengan kenaikan setiap satuan waktunya adalah 0.2 kali lipat dari kekayaan sebelumnya. Namun budi setiap waktu selalu menggunakan $\$1$ setiap satuan waktu sehingga mengurangi kekayaannya. Jika $x(t)$ adalah fungsi yang menyatakan kekayaan budi. Bagaimana ilustrasi persamaan tersebut?

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.2x(t) - 1$$

Sebuah benda jatuh bebas dari atas permukaan tanah.

$$F_g = -mg$$

Menurut hukum Newton $F = ma$ Sehingga

$$ma = -mg$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Sebuah benda jatuh bebas dari atas permukaan tanah.

$$F_g = -mg$$

Menurut hukum Newton $F = ma$ Sehingga

$$ma = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \int -gdt$$

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C$$

$$\int dx = \int -gt + Cdt$$

$$x = -gt^2 + Ct + D$$

Definisi persamaan diferensial

Suatu persamaan diferensial biasa adalah sebuah persamaan dalam bentuk

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$$

Contoh:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Definisi persamaan diferensial

Suatu persamaan diferensial biasa adalah sebuah persamaan dalam bentuk

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$$

Contoh:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Coba gunakan $y(t) = e^t$. Apakah memenuhi persamaan?
Bagaimana jika $y(t) = e^{3t}$?

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 2 - Persamaan diferensial separabel

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

August 30, 2022

Persamaan diferensial separabel

Definisi 1.1

Persamaan diferensial separabel adalah persamaan diferensial yang berbentuk

$$A(x)B(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Teknik penyelesaiannya adalah dengan membagi kedua ruas dengan $B(y)P(x)$ sedemikian sehingga

$$\frac{A(x)B(y)}{B(y)P(x)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{B(y)P(x)}dy = 0$$

$$\frac{A(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{B(y)}dy = 0$$

Kemudian integrasikan kedua ruasnya sehingga diperoleh solusi.

Contoh (1)

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$(x-4)y^4 - x^3(y^2-3)dy = 0$$

Solusi..

Dengan membagi kedua ruas dengan y^4x^3 maka diperoleh

$$\begin{aligned}(x-4)y^4 - x^3(y^2-3)dy &= 0\\ \frac{(x-4)y^4}{y^4x^3}dx - \frac{x^3(y^2-3)}{y^4x^3}dy &= 0\\ \frac{x-4}{x^3}dx - \frac{y^2-3}{y^4}dy &= 0\end{aligned}$$

Solusi

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx-\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy &= dC\\
\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy &= \int dC\\
-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} &= C
\end{aligned}
$$

Contoh (2)

Contoh(2)

Selesaikan PD berikut

$$6x^2ydx - (x^3+1)dy = 0$$

Solusi:

Dengan membagi ruas kanan dengan $y(x^3+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 6x^2ydx - (x^3+1)dy &= 0 \\ \frac{6x^2y}{y(x^3+1)}dx - \frac{x^3+1}{y(x^3+1)}dy &= 0 \\ \frac{6x^2}{x^3+1}dx - \frac{1}{y}dy &= dC \end{aligned}$$

Contoh (2)

$$\frac{6x^2}{x^3+1}dx - \frac{1}{y}dy = dC$$

$$\int \frac{6x^2}{x^3+1}dx - \int \frac{1}{y}dy = \int dC$$

$$\int \frac{6}{x^3+1}\frac{d(x^3+1)}{3} - \int \frac{1}{y}dy = \int dC$$

$$2\ln|x^3+1| + \ln|y| = C$$

$$\ln y(x^3+1)^2 = C$$

$$|y|(x^3+1)^2 = C$$

$$|y| = \frac{C}{(x^3+1)}$$

$$\frac{d(x^3+1)}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{d(x^3+1)}{3} = x^2dx$$

Contoh (3)

Selesaikan PD berikut

$$x \sin y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0$$

Solusi:

Dengan membagi kedua ruas $(x^2 + 1) \sin y$ diperoleh

$$\frac{x \sin y}{(x^2 + 1) \sin y} dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{(x^2 + 1) \sin y} dy = 0$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{\cos y}{\sin y} dy = 0$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} \frac{d(x^2 + 1)}{2} + \frac{d(\sin y)}{\sin y} = dC$$

$$\frac{d(x^2 + 1)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(x^2 + 1)}{2} = x dx$$

$$\frac{d(\sin y)}{y} = \cos y$$

$$d(\sin y) = \cos y dy$$

Contoh (3)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} &= \int dC \\
\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \ln|\sin y| &= C \\
\ln \sqrt{|x^2+1|}\sin|y| &= C \\
\sqrt{|x^2+1|}\sin|y| &= C \\
\sin|y| &= \frac{C}{\sqrt{|x^2+1|}} \\
|y| &= \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{|x^2+1|}}\right)
\end{aligned}
$$

Contoh (4)

Selesaikan PD berikut

$$(8x^3y - 12x^3)dx + (x^4 + 1)dy = 0$$

Solusi:

$$\begin{aligned}
(8x^3y - 12x^3)dx + (x^4 + 1)dy &= 0 \\
x^3(8y - 12)dx + (x^4 + 1)dy &= 0 \\
\frac{x^3(8y - 12)}{(8y - 12)(x^4 + 1)}dx + \frac{x^4 + 1}{(8y - 12)(x^4 + 1)}dy &= 0 \\
\frac{x^3}{x^4 + 1}dx + \frac{1}{(8y - 12)}dy &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^4 + 1)}{dx} &= 4x^3 \\
\frac{d(x^4 + 1)}{4} &= x^3 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(8y - 12)}{dy} &= 8 \\
\frac{d(8y - 12)}{8} &= dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x^4+1)}{4(x^4+1)} + \frac{d(8y-12)}{8(8y-12)} &= dC \\
\int \frac{d(x^4+1)}{4(x^4+1)} + \int \frac{d(8y-12)}{8(8y-12)} &= \int dC \\
\frac{1}{4}\ln|x^4+1| + \frac{1}{8}\ln|8y-12| &= C \\
\ln\left(\sqrt[4]{|x^4+1|}\,\sqrt[8]{|8y-12|}\right) &= C \\
\sqrt[4]{|x^4+1|}\,\sqrt[8]{|8y-12|} &= C \\
\sqrt[8]{|8y-12|} &= \frac{C}{\sqrt[4]{|x^4+1|}} \\
|8y-12| &= \frac{C}{|x^4+1|^2}
\end{aligned}
$$

Latihan

1. $(xy - 3x - 2y + 6)dx - dy = 0$
2. $e^{x-3y^2}dx - ydy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2y}{y^2-1}$
4. $\frac{dy}{dx} - 3x^2y^2 = -3x^2$
5. $(e^y + 1)\cos x dx + e^y(1 + \sin x)dy = 0$

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 3 - Persamaan diferensial homogen

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

September 6, 2022

Persamaan diferensial Homogen

Definisi 1.1

Diberikan persamaan diferensial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Persamaan diferensial tersebut disebut persamaan diferensial Homogen jika ditulis dalam bentuk $\frac{dy}{dx}$ terdapat fungsi g sedemikian sehingga

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Teknik penyelesaian:
Gunakan transformasi $y = vx$

Contoh (1)

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$(x+y)dx - xdy = 0$$

Solusi:

Pertama, tunjukkan PD tersebut **Homogen**

$$\begin{aligned}(x+y)dx - xdy &= 0\\(x+y)dx &= xdy\\\frac{dy}{dx} &= \frac{x+y}{x}\\\frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Terdapat $g(x) = 1 + x$ sedemikian sehingga $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$

Selanjutnya dengan memisalkan $y = vx$ maka

$$\begin{aligned} y &= vx \\ dy &= d(vx) \\ dy &= vdx + xdv \\ \frac{dy}{dx} &= v + x\frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{y}{x} \\
v + x\frac{dv}{dx} &= 1 + \frac{vx}{x} \\
x\frac{dv}{dx} &= 1 \\
dv &= \frac{1}{x}dx \\
\int dv &= \int \frac{1}{x}dx \\
v &= \ln|x| + C \\
\frac{y}{x} &= \ln|x| \Leftrightarrow y = x\ln|x| + Cx
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

Solusi:
Pertama, buktikan terlebih dahulu persaman diferensial tersebut **Homogen**.

$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xy = 0$$
$$2xydy = \left(3y^2 - x^2\right) dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3y^2 - x^2)}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2}{2xy} - \frac{x^2}{2xy}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2\frac{y}{x}}$$

Misalkan $y = vx$

$$\begin{aligned} dy &= d(vx) \\ dy &= v\,dx + x\,dv \\ \frac{dy}{dx} &= v\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= v + x\frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \\ v + x\frac{dv}{dx} &= \frac{3}{2}\left(\frac{vx}{x}\right) - \frac{1}{2\left(\frac{vx}{x}\right)} \\ v + x\frac{dv}{dx} &= \frac{3}{2}v - \frac{1}{2v} \\ x\frac{dv}{dx} &= \frac{v^2-1}{2v} \\ \frac{2v}{v^2-1}dv &= \frac{1}{x}dx \\ \int \frac{1}{v^2-1}d(v^2-1) &= \int \frac{1}{x}dx \\ \ln|v^2-1| &= \ln|x| + C \\ \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

Contoh 3

Selesaikan PD berikut

$$x^2\frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0$$

Solusi:

Pertama-tama, buktikan PD homogen.

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0 \\
x^2\frac{dy}{dx} &= y^2 + 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama misalkan $y = vx$ diperoleh

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)^2 + 2\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)$$
$$\mathrm{v} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \left(\frac{\mathrm{vx}}{\mathrm{x}}\right)^2 + 2\left(\frac{\mathrm{vx}}{\mathrm{x}}\right)$$
$$\mathrm{v} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{v}^2 + 2\mathrm{v}$$
$$\mathrm{x}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{v}^2 + v$$

$$\frac{1}{v(v+1)}dv = \frac{1}{x}dx$$
$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv = \frac{1}{x}dx$$
$$\int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|v| - \ln|v+1| = \ln|x| + C$$
$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + C$$

Contoh 4

Selesaikan PD berikut

$$\left(x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Solusi:

Pertama akan dibuktikan PD **Homogen**

$$\begin{aligned}
\left(x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy &= 0\\
x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy &= \left(y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) \\
v + x\frac{dv}{dx} &= \frac{vx}{x} - \operatorname{tg}\left(\frac{vx}{x}\right) \\
v + x\frac{dv}{dx} &= v - \operatorname{tg} v \\
x\frac{dv}{dx} &= -\operatorname{tg} v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\operatorname{tg} v}dv &= \frac{1}{x}dx \\
-\frac{\cos v}{\sin v}dv &= \frac{1}{x}dx \\
-\frac{1}{\sin v}d(\sin v) &= \frac{1}{x}dx \\
-\int \frac{1}{\sin v}d(\sin v) &= \int \frac{1}{x}dx \\
-\ln|\sin v| &= \ln|x| + C \\
-\ln\left|\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| &= \ln|x| + C
\end{aligned}
$$

Contoh 5

Selesaikan PD berikut

$$\left(x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} - y^2\right) dx + xydy = 0$$

Solusi:

Pertama dibuktikan dulu PD Homogen

$$\left(x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} - y^2\right) dx + xydy = 0$$

$$xydy = \left(y^2 - x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}}\right) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(y^2 - x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}}\right)}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{e^{-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Dengan memisalkan $y = vx$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} - \frac{e^{-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)} \\
v + x\frac{dv}{dx} &= \frac{vx}{x} - \frac{e^{-\left(\frac{vx}{x}\right)^2}}{\left(\frac{vx}{x}\right)} \\
v + x\frac{dv}{dx} &= v - \frac{e^{-v^2}}{v} \\
x\frac{dv}{dx} &= -\frac{e^{-v^2}}{v} \\
-ve^{v^2}dv &= \frac{1}{x}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathrm{ve}^{\mathrm{v}^2}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{v}^2\right)}{2\mathrm{v}} &= \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\
-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{v}^2}\ \mathrm{d}\left(\mathrm{v}^2\right) &= \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\
-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{v}^2}\ \mathrm{d}\left(\mathrm{v}^2\right) &= \int \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} \qquad (1) \\
-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{v}^2} &= \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C} \\
-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)^2} &= \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

Latihan

1. $2ydx - xdy = 0$
2. $(x^2 + 2y^2)dx - 2xydy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
5. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$
6. $(4x^4 - x^3y + y^4)dx + x^4dy = 0$

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 3 - Persamaan diferensial eksak

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

September 13, 2022

Persamaan diferensial Eksak

Definisi 4.1: Persamaan diferensial eksak

Diberikan persamaan diferensial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

Persamaan diferensial (1) disebut persamaan diferensial eksak jika dan hanya jika berlaku

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Contoh 1

Diketahui persamaan diferensial:

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dx = 0 \tag{2}$$

Tentukan apakah persamaan (2) tersebut PD eksak atau bukan!

Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(3x^2 + 4xy\right)}{\partial y} = 0 + 4x = 4x \tag{3}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(2x^2 + 2y\right)}{\partial x} = 4x + 0 = 4x \tag{4}$$

Karena (3)=(4) maka (2) adalah PD Eksak.

Contoh 2

Diketahui persamaan diferensial:

$$\mathrm{ydx} + 2\mathrm{xdy} = 0 \tag{5}$$

Tentukan apakah persamaan (5) tersebut PD eksak atau bukan!

$$\frac{\partial \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial (2\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} = 2 \tag{7}$$

Karena (6)$\neq$ (7) maka (5) bukan PD eksak.

Teknik penyelesaian PD Eksak:
Misalkan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Solusi dari PD eksak adalah $F(x,y) = 0$ sedemikian sehingga

$$F_x(x,y) = M(x,y) \text{ dan } F_y(x,y) = N(x,y)$$

Keterangan:

$$F_x(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$
$$F_y(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

Contoh 3

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0 \tag{8}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(3x^2 + 4xy)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(2x^2 + 2y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x \tag{9}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x \tag{10}$$

Karena (9)=(10) maka (8) adalah PD eksak.

Solusi

$$\underbrace{(3x^2+4xy)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx}+\underbrace{(2x^2+2y)}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy}=0$$

Solusi dari persamaan diatas adalah $F(x,y)=0$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 3x^2+4xy \\ F(x,y) &= \int (3x^2+4xy)dx \\ F(x,y) &= x^3+2x^2y+g(y) \end{aligned}$$

Diketahui $F_y(x,y)=N(x,y)$ maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3+2x^2y+g(y)\right] &= 2x^2+2y \\ 2x^2+g'(y) &= 2x^2+2y \\ g'(y) &= 2y \\ \int d[g(y)] &= \int 2ydy \\ g(y) &= y^2+C \end{aligned}$$

Jadi, Solusinya adalah

$$\boxed{x^3+2x^2y+y^2=C}$$

Contoh 4

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(\cos x - x\sin x + y^2)dx + 2xydy = 0 \tag{11}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{\cos x - x\sin x + y^2}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(2xy)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \tag{12}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y \tag{13}$$

Karena (12)=(13) maka (11) adalah PD eksak.

Solusi

$$\underbrace{\cos x - x\sin x + y^2}_{\mathrm{M(x,y)}}\,\mathrm{dx} + \underbrace{(2xy)}_{\mathrm{N(x,y)}}\,\mathrm{dy} = 0$$

Solusi dari persamaan diatas adalah $\mathrm{F(x,y) = 0}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\mathrm{F_y(x,y)} &= \mathrm{2xy}\\ \mathrm{F(x,y)} &= \int \mathrm{(2xy)dy}\\ &= \mathrm{xy^2 + h(x)}\end{aligned}$$

Diketahui $\mathrm{F_x(x,y) = M(x,y)}$ maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left[\mathrm{xy^2 + h(x)}\right] &= \mathrm{\cos x - x\sin x + y^2}\\ \mathrm{y^2 + h'(x)} &= \mathrm{\cos x - x\sin x + y^2}\\ \mathrm{h'(x)} &= \mathrm{\cos x - x\sin x}\\ \int \mathrm{d(h(x))} &= \int \mathrm{(\cos x - x\sin x)dx}\\ \mathrm{h(x)} &= \mathrm{x\cos x + C}\end{aligned}$$

Jadi, Solusinya adalah

$$\boxed{\mathrm{xy^2 + x\cos x = C}}$$

Contoh 5

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(2xy^3 - y)dx + (3x^2y^2 - x)dy = 0 \tag{14}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{2xy^3 - y}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(3x^2y^2 - x)}_{N(x,y)}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 6xy^2 - 1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 6xy^2 - 1 \tag{16}$$

Karena (15)=(16) maka (14) adalah PD eksak.

Solusi

$$\underbrace{2xy^3 - y}_{\mathrm{M(x,y)}}\,\mathrm{dx} + \underbrace{(3x^2y^2 - x)}_{\mathrm{N(x,y)}}\,\mathrm{dy} = 0$$

Solusi dari persamaan diatas adalah $\mathrm{F(x,y)} = 0$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \mathrm{F_x(x,y)} &= \mathrm{2xy^3 - y} \\ \mathrm{F(x,y)} &= \int \mathrm{(2xy^3 - y)dx} \\ &= \mathrm{x^2y^3 - xy + g(y)} \end{aligned}$$

Diketahui $\mathrm{F_y(x,y)} = \mathrm{N(x,y)}$ maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left[\mathrm{x^2y^3 - xy + g(y)}\right] &= \mathrm{3x^2y^2 - x} \\ \mathrm{3x^2y^2 - x + g'(y)} &= \mathrm{3x^2y^2 - x} \\ \mathrm{g'(y)} &= 0 \\ \int \mathrm{d[g(y)]} &= \int \mathrm{dC} \\ \mathrm{g(y)} &= \mathrm{C} \end{aligned}$$

Jadi, Solusinya adalah

$$\boxed{\mathrm{x^2y^3 - xy = C}}$$

Contoh 6

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0 \tag{17}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(2x\cos y + 3x^2y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^3 - x^2\sin y - y)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2 \tag{18}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2x\sin y \tag{19}$$

Karena (15)=(16) maka (14) adalah PD eksak.

Solusi

$$\underbrace{(2x\cos y + 3x^2 y)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx} + \underbrace{(x^3 - x^2\sin y - y)}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy} = 0$$

Solusi dari persamaan diatas adalah $F(x,y) = 0$ sedemikian sehingga

$$\mathrm{F_x(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y}$$

$$\mathrm{F(x,y)} = \int \mathrm{(2x\cos y + 3x^2 y)dx}$$

$$= \mathrm{x^2\cos y + x^3 y + g(y)}$$

Diketahui $\mathrm{F_y(x,y) = N(x,y)}$ maka

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left[\mathrm{x^2\cos y + x^3 y + g(y)}\right] = \mathrm{x^3 - x^2\sin y - y}$$

$$\mathrm{-x^2\sin y + x^3 + g'(y) = x^3 - x^2\sin y - y}$$

$$\mathrm{g'(y) = -y}$$

$$\int \mathrm{d(g(y))} = \int \mathrm{-ydy}$$

$$\mathrm{g(y)} = -\frac{\mathrm{y^2}}{2} + \mathrm{C}$$

Jadi, Solusinya adalah

$$\boxed{\mathrm{x^2\cos y + x^3 y} - \frac{\mathrm{y^2}}{2} = \mathrm{C}}$$

Latihan!

Tentukan apakah persamaan diferensial berikut merupakan persamaan diferensial eksak, jika iya tentukan solusinya.

1. $\frac{y}{x-1}dx + [\ln(x-1) + 2y]dy = 0$
2. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
3. $2\cos(2x - y)dx - \cos(2x - y)dy = 0$
4. $ye^x dx + e^x dy = 0$
5. $(3y^2 + 10xy^2)dx + (6xy - 2 + 10x^2y)dy = 0$
6. $(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 5 - Persamaan diferensial tak-eksak

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

September 15, 2022

Persamaan diferensial tak-eksak

Definisi 5.1: Persamaan diferensial tak-eksak

Diberikan persamaan diferensial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

Persamaan diferensial (1) disebut persamaan diferensial tak-eksak jika dan hanya jika berlaku

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Teknik penyelesaian PD tak-eksak

Teorema 5.1: Faktor Integral

Misalkan diberikan persamaan diferensial dalam bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

1. Jika
$$\frac{1}{N(x, y)}[M_y(x, y) - N_x(x, y)] = h(x)$$
adalah fungsi terhadap x saja, maka $e^{\int h(x)dx}$ adalah faktor integral.
2. Jika
$$\frac{1}{M(x, y)}[N_x(x, y) - M_y(x, y)] = k(y)$$
adalah fungsi terhadap y saja maka $e^{\int k(y)dy}$ adalah faktor integral.

Contoh 1

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$$(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0 \tag{2}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(5xy + 4y^2 + 1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$M_y(x, y) = \frac{\partial(5xy + 4y^2 + 1)}{\partial y} = 5x + 8y \quad (3) \qquad N_x(x, y) = \frac{\partial(x^2 + 2xy)}{\partial x} = 2x + 2y \tag{4}$$

Karena (3)$\neq$(4) maka (2) merupakan PD tak-eksak.

Mencari faktor integral

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(x,y)}[M_y(x,y) - N_x(x,y)] &= \frac{1}{x^2+2xy}[(5x+8y)-(2x+2y)] \\ &= \frac{3x+6y}{x^2+2xy} = \frac{3}{x}\frac{\cancel{x+2y}}{\cancel{x+2y}} = \boxed{\frac{3}{x}} \\ \frac{1}{M(x,y)}[N_x(x,y) - M_y(x,y)] &= \frac{1}{5xy+4y^2+1}[(2x+2y)-(5x+8y)] \\ &= \frac{-3x-6y}{5xy+4y^2+1}\end{aligned}$$

Sehingga faktor integralnya adalah

$$e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3 \tag{5}$$

Kalikan dengan faktor integralnya

Kalikan persamaan (2) dengan faktor integralnya diperoleh persamaan diferensial baru yang ekivalen yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{x}^3(5\mathrm{xy}+4\mathrm{y}^2+1)\mathrm{dx}+\mathrm{x}^3(\mathrm{x}^2+2\mathrm{xy})\mathrm{dy} &= 0 \\ \underbrace{\left(5x^4y+4x^3y^2+x^3\right)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx}+\underbrace{\left(x^5+2x^4y\right)}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} M_y(x,y) &= \frac{\partial(5x^4y+4x^3y^2+x^3)}{\partial y} \\ &= 5x^4+8x^3y \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} N_x(x,y) &= \frac{\partial(x^5+2x^4y)}{\partial x} \\ &= 5x^4+8x^3y \end{aligned} \tag{8}$$

Karena persamaan (7)=(8) maka PD (6) merupakan PD eksak.

Mencari solusi PD eksak

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{\left(5x^4y + 4x^3y^2 + x^3\right)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx} + \underbrace{\left(x^5 + 2x^4y\right)}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy} = 0$$

Solusinya adalah $F(x,y) = 0$ s.d.h

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_y(x,y)} &= \mathrm{N(x,y)} \\
\mathrm{F_y(x,y)} &= \mathrm{x^5 + 2x^4y} \\
\mathrm{F(x,y)} &= \int \mathrm{x^5 + 2x^4ydy} \\
&= \mathrm{x^5y + x^4y^2 + h(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_x(x,y)} &= \mathrm{M(x,y)} \\
\mathrm{5x^4y + 4x^3y^2 + h'(x)} &= \mathrm{5x^4y + 4x^3y^2 + x^3} \\
\mathrm{h'(x)} &= \mathrm{x^3} \\
\mathrm{h(x)} &= \int \mathrm{x^3dx} \\
&= \mathrm{\frac{x^4}{4} + C}
\end{aligned}$$

Sehingga solusinya adalah

$$\boxed{x^5y + x^4y^2 + \frac{x^4}{4} = C}$$

Contoh 2

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$$(2\mathrm{y} - \mathrm{x}^2)\mathrm{dx} + \mathrm{xdy} = 0 \tag{9}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(2y - x^2)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx} + \underbrace{x}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy} = 0$$

$$\mathrm{M_y(x,y)} = \frac{\partial(2\mathrm{y} - \mathrm{x}^2)}{\partial \mathrm{y}} = 2 \tag{10}$$

$$\mathrm{N_x(x,y)} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}} = 1 \tag{11}$$

Karena (10)≠(11) maka (9) merupakan PD tak-eksak.

Mencari faktor integral

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{N(x,y)}[M_y(x,y) - N_x(x,y)] = \frac{1}{x}[2-1] = \boxed{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{M(x,y)}[N_x(x,y) - M_y(x,y)] = \frac{1}{2y-x^2}[1-2] = \frac{-1}{2y-x^2}$$

Sehingga faktor integralnya adalah

$$e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x \tag{12}$$

Kalikan dengan faktor integralnya

Kalikan persamaan (9) dengan faktor integralnya pada persamaan (??) diperoleh persamaan diferensial baru yang ekivalen yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(2\mathrm{y}-\mathrm{x}^2)\mathrm{dx}+\mathrm{x}(\mathrm{x})\mathrm{dy} &= 0 \\ \underbrace{(2xy-x^3)}_{\mathrm{M(x,y)}}\mathrm{dx}+\underbrace{x^2}_{\mathrm{N(x,y)}}\mathrm{dy} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} M_y(x,y) &= \frac{\partial(2xy-x^3)}{\partial y} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} N_x(x,y) &= \frac{\partial x^2}{\partial x} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{15}$$

Karena persamaan (14)=(??) maka PD (13) merupakan PD eksak.

Mencari solusi PD eksak

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(2xy - x^3)}_{\mathrm{M(x,y)}}\,\mathrm{dx} + \underbrace{x^2}_{\mathrm{N(x,y)}}\,\mathrm{dy} = 0$$

Solusinya adalah $F(x, y) = 0$ s.d.h

$$\begin{aligned} F_y(x, y) &= N(x, y) \\ F_y(x, y) &= x^2 \\ F(x, y) &= \int x^2 dy \\ &= x^2 y + h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= M(x, y) \\ 2xy + h'(x) &= 2xy - x^3 \\ h'(x) &= -x^3 \\ h(x) &= -\int x^3 dx \\ &= -\frac{x^4}{4} + C \end{aligned}$$

Sehingga solusinya adalah

$$\boxed{x^2 y - \frac{x^4}{4} = C}$$

Contoh 3

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

$$(2x + \tan y)dx + (x - x^2 \tan y)dy = 0 \tag{16}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(2x + \tan y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x - x^2 \tan y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$M_y(x, y) = \frac{2x + \tan y}{\partial y} = \sec^2 y \tag{17}$$

$$N_x(x, y) = \frac{\partial(x - x^2 \tan y)}{\partial y} = 1 - 2x \tan y \tag{18}$$

Karena (17)≠(18) maka (16) merupakan PD tak-eksak.

Mencari faktor integral

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{N(x,y)}[M_y(x,y) - N_x(x,y)] = \frac{1}{x - x^2\tan y}[1 - 2x\tan y - \sec^2 y]$$
$$= \frac{-2x\tan y - \tan^2 y}{x - x^2\tan y}$$
$$\frac{1}{M(x,y)}[N_x(x,y) - M_y(x,y)] = \frac{1}{2x + \tan y}[\sec^2 y - 1 + 2x\tan y]$$
$$= \frac{\tan^2 y + 2x\tan y}{2x + \tan y} = \frac{\tan y\cancel{(2x + \tan y)}}{\cancel{2x + \tan y}}$$

Sehingga faktor integralnya adalah

$$e^{\int \tan y dy} = e^{\ln \cos y} = \cos y \tag{19}$$

Kalikan dengan faktor integralnya

Kalikan persamaan (16) dengan faktor integralnya pada persamaan (19) diperoleh persamaan diferensial baru yang ekivalen yaitu

$$\begin{aligned} \cos y(2x + \tan y)dx + \cos y(x - x^2 \tan y)dy &= 0 \\ \underbrace{(2x \cos y + \sin y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{x \cos y - x^2 \sin y}_{N(x,y)} dy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} M_y(x, y) &= \frac{\partial(2x \cos y + \sin y)}{\partial y} \\ &= \cos y - 2x \sin y \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} N_x(x, y) &= \frac{\partial x \cos y - x^2 \sin y}{\partial x} \\ &= \cos y - 2x \sin y \end{aligned} \tag{22}$$

Karena persamaan (21)=(22) maka PD (20) merupakan PD eksak.

Mencari solusi PD eksak

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{(2x\cos y + \sin y)}_{\mathrm{M(x,y)}}\,\mathrm{dx} + \underbrace{x\cos y - x^2\sin y}_{\mathrm{N(x,y)}}\,\mathrm{dy} = 0$$

Solusinya adalah $F(x, y) = 0$ s.d.h

$$\begin{aligned} \mathrm{F_x(x,y)} &= \mathrm{M(x,y)} \\ \mathrm{F_x(x,y)} &= \mathrm{2x\cos y + \sin y} \\ \mathrm{F(x,y)} &= \int \mathrm{2x\cos y + \sin y dx} \\ &= \mathrm{x^2\cos y + x\sin y + g(y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F_y(x,y)} &= \mathrm{N(x,y)} \\ \mathrm{-x^2\sin y + x\cos y + g'(y)} &= \mathrm{x\cos y - x^2\sin y} \\ \mathrm{g'(y)} &= 0 \\ \mathrm{g(y)} &= \int \mathrm{dC} \\ &= \mathrm{C} \end{aligned}$$

Sehingga solusinya adalah

$$\boxed{\mathrm{x^2\cos y + x\sin y = C}}$$

Latihan!

Selesaikan persamaan diferensial berikut

1. $(3y - e^x)dx + xdy = 0$
2. $(x + y\cos x)dx + \sin y dy = 0$
3. $(x^2 + y^2 - x)dx - ydy = 0$
4. $(y + \ln x)dx - ydy = 0$
5. $(3x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
6. $(\csc x \tan x)dx - (y\csc x - \tan^2 x)dy = 0$

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 6 - Persamaan diferensial linear orde 1 dan Bernoulli

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

September 27, 2022

Persamaan diferensial linear orde satu

Pendahuluan

Persamaan diferensial linear orde satu adalah PD dalam bentuk

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{P(x)y} = \mathrm{Q(y)}$$

dengan P dan Q adalah fungsi terhadap x saja.

Contoh:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \frac{3\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{e^x}}{\mathrm{x^3}} \qquad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - \frac{3\mathrm{y}}{\mathrm{x}+1} = (\mathrm{x}+1)^4$$

Teknik penyelesaiannya dengan menggunakan **Faktor integral** $e^{\int P(x)dx}$

Contoh 1

Tentukan solusi persamaan diferensial berikut

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \frac{3\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{e^x}}{\mathrm{x^3}} \tag{1}$$

1. Tentukan $P(x)$ dan $Q(x)$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \underbrace{\frac{3}{\mathrm{x}}}_{\mathrm{P(x)}}\mathrm{y} = \underbrace{\frac{\mathrm{e^x}}{\mathrm{x^3}}}_{\mathrm{Q(x)}}$$

2. Mencari faktor integral

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{e}^{\int \mathrm{P(x)dx}} \\ &= \mathrm{e}^{\int \frac{3}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}} = \mathrm{e}^{\ln \mathrm{x}^3} = \mathrm{x}^3 \end{aligned}$$

3. Kalikan dengan faktor integralnya

$$\begin{aligned} \mathrm{x^3}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 3\mathrm{x^2y} &= \mathrm{e^x} \\ \mathrm{x^3dy} + 3\mathrm{x^2ydx} &= \mathrm{e^xdx} \\ \mathrm{d(x^3y)} &= \mathrm{d(e^x)} \\ \int \mathrm{d(x^3y)} &= \int \mathrm{d(e^x)} \\ \mathrm{x^3y} &= \mathrm{e^x} + \mathrm{C} \end{aligned}$$

$\therefore$ Solusi (1) adalah $\boxed{\mathrm{x^3y} - \mathrm{e^x} = \mathrm{C}}$

Contoh 2

Tentukan solusi persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos^3 x \qquad (2)$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\tan x}_{P(x)} y = \underbrace{\cos^3 x}_{Q(x)}$$

1. Tentukan faktor integral

$$\begin{aligned} I &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int \tan x dx} = e^{\ln \sec x} = \sec x \end{aligned}$$

2. Kalikan dengan faktor integralnya

$$\begin{aligned} \sec x \frac{dy}{dx} + (\sec x \tan x)y &= \sec x \cos^3 x \\ \sec x dy + \sec x \tan x \ dy &= \cos^2 x \ dx \\ d(y \sec x) &= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} dx \\ \int d(y \sec x) &= \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} dx \\ y \sec x &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

$\therefore$ solusi (2) adalah

$$\boxed{y \sec x - \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) = C}$$

Persamaan diferensial Bernoulli

Bentuk umum:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{P(x)y} = \mathrm{Q(x)y^n}$$

Teknik penyelesaian:

1. Jika $n = 0$ maka PD Bernoulli menjadi PD linier orde 1
2. Jika $n \geq 1$ maka gunakan transformasi $u = y^{1-n}$

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\mathrm{P(x)}} \mathrm{y} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\mathrm{Q(x)}} \mathrm{y}^2$$

Karena terdapat y^{n} dengan $n = 2$ sebagai pengali $\mathrm{Q(x)}$ maka PD (3) merupakan PD Bernoulli

Misalkan

$$\mathrm{u} = \mathrm{y}^{1-2} = \frac{1}{\mathrm{y}} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{u}} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{y}^2}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{u}^2}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}} \tag{5}$$

Subtitusi persamaan (4)-(5) ke (3)

$$-\frac{1}{\mathrm{u}^2}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} - \frac{1}{\mathrm{ux}} = \frac{1}{\mathrm{xu}^2}$$

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} + \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{x}} \tag{6}$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial (6) merupakan PD linear orde 1 dengan Faktor integralnya adalah

$$e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

Kalikan persmaan (6) dengan faktor integralnya diperoleh

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u &= 1 \\ x\,du + u\,dx &= dx \\ ux &= x + C \\ \frac{x}{y} &= x + C \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh solusinya adalah

$$\boxed{\frac{x}{y} - x = C}$$

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \tag{7}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{1}_{P(x)} y = \underbrace{x}_{Q(x)} y^3$$

Karena terdapat y^n dengan $n = 3$ sebagai pengali $Q(x)$ maka PD (7) merupakan PD Bernoulli

Misalkan

$$u = y^{1-3} = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{u}}} \tag{8}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{u^3}}\frac{dy}{dx}} \tag{9}$$

Subtitusi persamaan (8)-(9) ke (7)

$$-\frac{1}{2\sqrt{u^3}}\frac{du}{dx} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u^3}}$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = -2x \tag{10}$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial (10) merupakan PD linear orde 1 dengan Faktor integralnya adalah

$$e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

Kalikan persmaan (10) dengan faktor integralnya diperoleh

$$e^{-2x}\frac{du}{dx} - 2ue^{-2x} = -2xe^{-2x}$$

$$\int e^{-2x}\, du + -2ue^{-2x}\, dx = \int -2xe^{-2x}\, dx$$

$$ue^{-2x} = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Sehingga diperoleh solusinya adalah

$$\boxed{ue^{-2x} = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C}$$

Latihan!

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$
2. $\frac{dy}{dx} + 5y \sin x = \sin x$
3. $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3} = e^x y^4$
6. $x^2y - x^3\frac{dy}{dx} = y^4 \cos x$
7. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$

Persamaan differensial biasa

Pertemuan 7 - Persamaan diferensial bentuk khusus

Hafidh Khoerul Fata S.Si., M.Si.

Universitas Diponegoro

Semarang

September 17, 2022

Persamaan diferensial linear bentuk khusus

Diberikan persamaan diferensial

$$(ax + by + c)\ dx + (px + qy + r)\ dy = 0$$

dengan $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$

Kasus 1. Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ maka bagi kedua ruas dengan

$$ax + by + c$$

Kasus 2. Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ maka gunakan transformasi

$$z = ax + by$$

Kasus 3. Jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ tidak terpenuhi, maka gunakan transformasi

$$\begin{aligned} x &= u + x_0 \\ y &= v + y_0 \end{aligned}$$

dengan (x_0, y_0) diperoleh dari solusi SPL

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ px + qy + r &= 0 \end{aligned}$$

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

$$(2x + 4y + 3)dx + (6x + 12y + 9)dy = 0 \tag{1}$$

Solusi:
Diketahui $a = 2, b = 4, c = 3, p = 6, q = 12, r = 9$. Perhatikan bahwa $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ **kasus 1** maka bagi kedua ruas dengan $(2x + 4y + 3)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{2x + 4y + 3}{2x + 4y + 3}dx + \frac{6x + 12y + 9}{2x + 4y + 3}dy &= 0 \\
dx + 3dy &= 0 \\
\int dx + 3\int dy &= \int dC \\
x + 3y &= C
\end{aligned}$$

Jadi solusi PD (1) adalah $\boxed{x + 3y = C}$

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0$$

Solusi:

Diketahui $\mathrm{a} = 2, \mathrm{b} = 3, \mathrm{c} = 3, \mathrm{p} = 4, \mathrm{q} = 6, \mathrm{r} = 1$. Perhatikan bahwa $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{q}} \neq \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{r}}$.
Misalkan

$$\mathrm{z} = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y}$$

maka

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{z} - 2\mathrm{x}}{3}$$
$$\mathrm{dy} = \frac{1}{3}(\mathrm{dz} - 2\mathrm{dx})$$

$$
\begin{aligned}
(z+1)dx + \frac{1}{3}(2z+1)\left(dz - 2dx\right) &= 0 \\
(z+1)dx + \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right)dz - \left(\frac{4}{3}z + \frac{2}{3}\right)dz &= 0 \\
-(z-1)dx + (2z+1)dz &= 0 \\
\frac{2z+1}{z-1}dz &= dx \\
\left(2 - \frac{3}{z-1}\right)dz &= dx \\
\int \left(2 - \frac{3}{z-1}\right)dz &= \int dx \\
2z - 3\ln|z-1| &= x + c \\
x + 2y - \ln|2x+3y-1| &= C
\end{aligned}
$$

Contoh 3

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

$$(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dx = 0$$

Solusi:

Diketahui $a = 5, b = 2, c = 1p = 2, q = 1, r = 1.$

Perhatikan bahwa $\frac{a}{p} = \frac{5}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{b}{q} \Rightarrow$ **Kasus 3**

Perhatikan bahwa

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 2x + y &= -1 \end{aligned}\right\} 5x + 2(-2x - 1) = -1$$

Jadi, $\boxed{(x_0, y_0) = (1, -3)}$

Sehingga diperoleh transformasi

$$x = u + 1 \Leftrightarrow dx = du$$
$$y = v - 3 \Leftrightarrow dy = dv$$

Gunakan permisalan $v = uw$ diperoleh

$$dv = w\,du + u\,dw$$

$$\frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du}$$

$$
\begin{aligned}
[5x + 2y + 1]dx + [2x + y + 1]dy &= 0 \\
[5(u + 1) + 2(v - 3) + 1]du + [2(u + 1) + (v - 3) + 1]dv &= 0 \\
[5u + 2v]du + [2u + v]dv &= 0 \\
-\frac{5u + 2v}{2u + v} &= \frac{dv}{du} \\
-\frac{5 + 2\frac{v}{u}}{2 + \frac{v}{u}} &= \frac{dv}{du} \\
-\frac{5 + 2w}{2 + w} &= w + u\frac{dw}{du} \\
-\frac{w^2 + 2w}{2 + w} - \frac{5 + 2w}{2 + w} &= u\frac{dw}{du} \\
-\frac{w^2 + 4w + 5}{2 + w} &= u\frac{dw}{du}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2+w}{w^2+4w+5}dw &= \frac{du}{u}\\
\frac{dB}{2B} &= \frac{du}{u}\\
\frac{1}{2}\int \frac{dB}{B} &= \int \frac{du}{u}\\
\frac{1}{2}\ln B &= \ln u + C\\
\ln\sqrt{B} &= \ln Cu\\
\sqrt{w^2+4w+5} &= Cu\\
\sqrt{\frac{v^2}{u^2}+4\frac{v}{u}=5} &= Cu\\
\sqrt{\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}+4\frac{(y+3)}{x-1}+5} &= C(x-1)
\end{aligned}
$$

Misalkan

$$
\begin{aligned}
B &= w^2+4w+5\\
dB &= 2w+4\ dw\\
\frac{dB}{2} &= w+2\ dw
\end{aligned}
$$

Latihan!

Kerjakan latihan soal berikut.

1. $(x + 4y + 2)dx + (4x + 16y + 8)dy = 0$
2. $(2x - 5y + 3)dx + (4x + 10y + 1)dy = 0$
3. $(8x - 6y - 7)dx + (4x - 3y - 2)dy = 0$
4. $(3x - y - 6)dx + (x + y + 2)dy = 0$
5. $(3x - y + 1)dx + (6x - 2y - 3)dy = 0$