

Plan

- Inertie / valeurs propres
- Interprétation simultanée des lignes et des colonnes
- Propriétés barycentriques
- Qualité de représentation et contribution
- Nombre maximum d'axes et V de Cramer

Inerties /valeurs propres

TABLEAU 37
REPONSES SIMULTANÉES A DES QUESTIONS D'OPINION

La famille idéale est celle où :	Activité convenant le mieux à une mère de famille quand les enfants vont à l'école :			
	rester au foyer	travailler à mi-temps	travailler à plein-temps	
les deux conjoints travaillent également	13	142	106	261
le mari a un métier plus absorbant que celui de sa femme	30	408	117	555
seul le mari travaille	241	573	94	908
	284	1 123	317	1 724

Inerties = valeurs propres
Inertie = variance des facteurs
Somme des inerties = ϕ^2

	Inertie	Inertie (%)
F1	0.117	86.292
F2	0.019	13.708
Somme	0.135	100

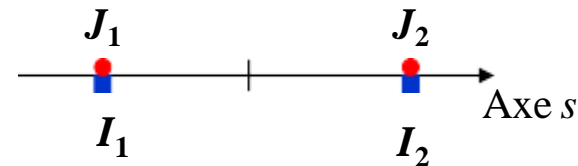
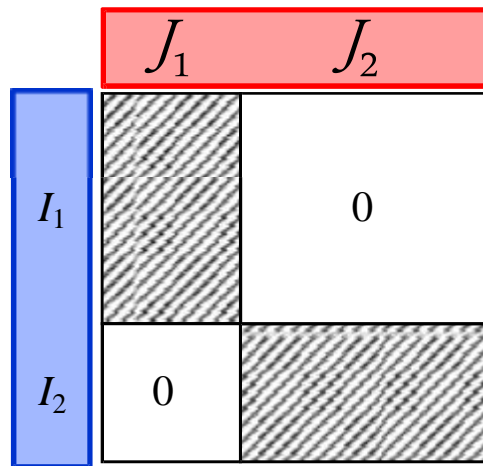
$\lambda_1 = 0.117$ 1 \Rightarrow on est loin d'une association exclusive entre une ligne et une colonne

$\Phi^2 = 0.135$ 2 \Rightarrow on est loin d'une liaison parfaite, i.e. d'une association exclusive entre les modalités des deux variables

Inerties /valeurs propres

En AFC : $0 \leq \lambda_s \leq 1$ En ACP (normée) : $1 \leq \lambda_s$

A quelle structure correspond une valeur propre de 1 ?



⇒ Partition en deux classes des lignes et des colonnes

⇒ Association exclusive des classes

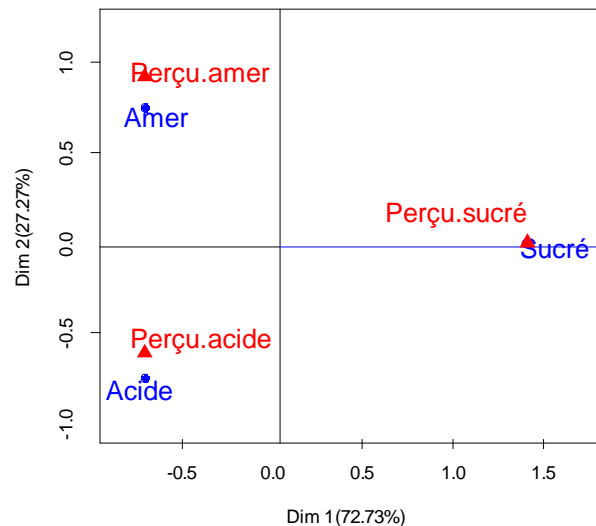
Inerties /valeurs propres

Données : reconnaissance de trois saveurs (sucré, acide, amer)

Pour chaque saveur, on a demandé à dix personnes de reconnaître la saveur d'une solution qui leur était présentée

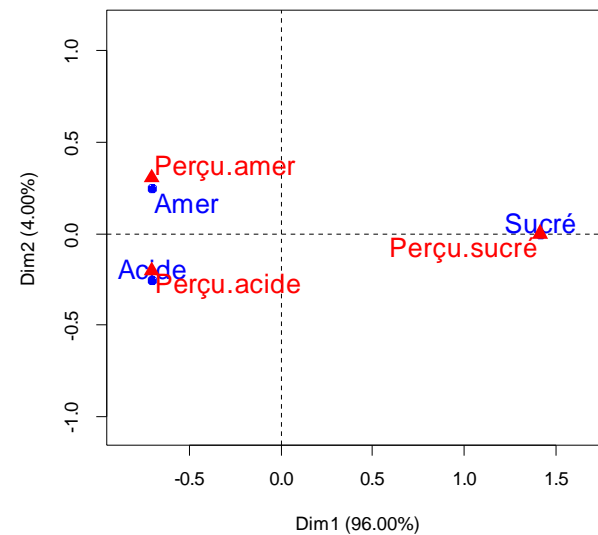
	Perçu sucré	Perçu acide	Perçu amer
Sucré	10	0	0
Acide	0	9	1
Amer	0	3	7

AFC	V. Propre	%
Axe 1	1	72,727
Axe 2	0,375	27,273
Somme	1,375	100



	Perçu sucré	Perçu acide	Perçu amer
Sucré	10	0	0
Acide	0	7	3
Amer	0	5	5

AFC	V. Propre	%
Axe 1	1	96
Axe 2	0,042	4
Somme	1,042	100



INTERPRÉTATION SIMULTANÉE DES LIGNES ET DES COLONNES

Dualité des 2 ACPs

Formules de transitions :

$$F_s(i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} \sum_j \frac{f_{ij}}{f_{i.}} G_s(j)$$

$$G_s(j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} \sum_i \frac{f_{ij}}{f_{.j}} F_s(i)$$

$F_s(i)$: coord. de la ligne i sur l'axe de rang s

$\frac{f_{ij}}{f_{i.}}$: jème élément du profil i

$G_s(j)$: coord. de la colonne j sur l'axe de rang s

λ_s : inertie associée à l'axe s (en AFC $\lambda_s \leq 1$)

Les 2 ACPs (profils lignes et colonnes) conduisent aux mêmes valeurs propres

Lien entre les deux analyses : les relations de transitions

Conséquence : On ne réalise qu'une ACP (celle avec le moins de modalités)

Moyennes et variances des facteurs :

- Moyennes nulles
- Variances égales aux valeurs propres $\lambda_s = \text{Var}(F_s) = \text{Var}(G_s)$
- Covariances nulles

Les saveurs sont au barycentre des perceptions des saveurs
à $1/\sqrt{\lambda_s}$ près.

Les perceptions des saveurs sont au barycentre des saveurs
à $1/\sqrt{\lambda_s}$ près.

Représentation simultanée des lignes et colonnes

Relation de transition = propriétés barycentriques

Le long de l'axe de rang s , on calcule le barycentre de toutes les colonnes, chaque colonne j étant affectée du poids f_{ij}/f_i .

Le barycentre est ensuite d'autant plus écarté de l'origine que λ_s est petit : $1/\sqrt{\lambda_s} \geq 1$

- Une saveurs est proche de sa perception et loin des autres.
- Une perception est proche de sa saveurs loin de celle qui est différente.

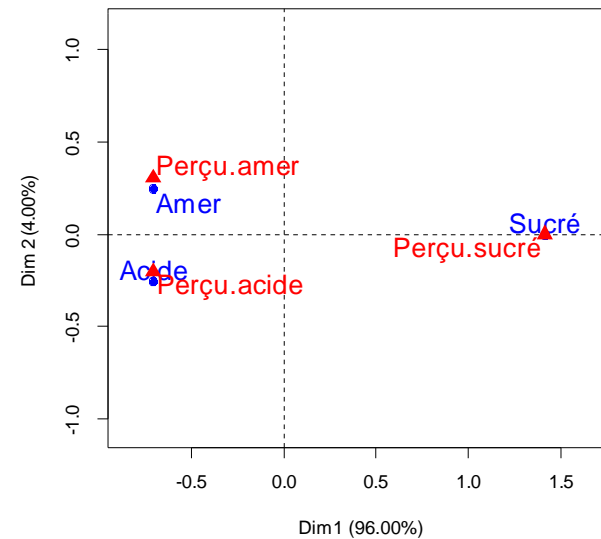
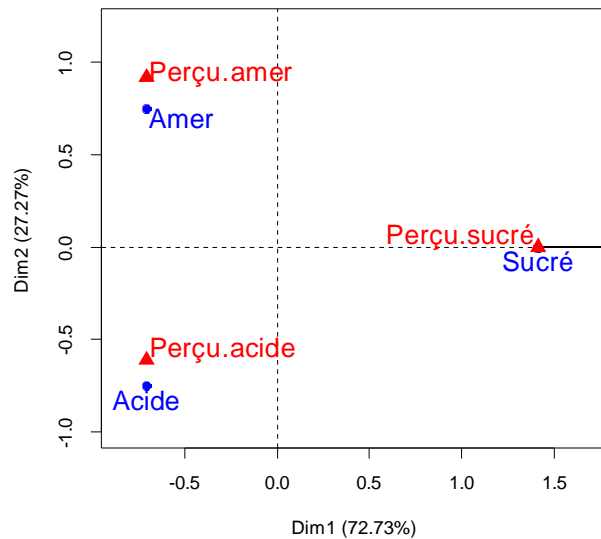
Représentation simultanée et inertie

	Perçu sucré	Perçu acide	Perçu amer
Sucré	10	0	0
Acide	0	9	1
Amer	0	3	7

AFC	V. Propre	%
Axe 1	1	72,727
Axe 2	0,375	27,273
Somme	1,375	100

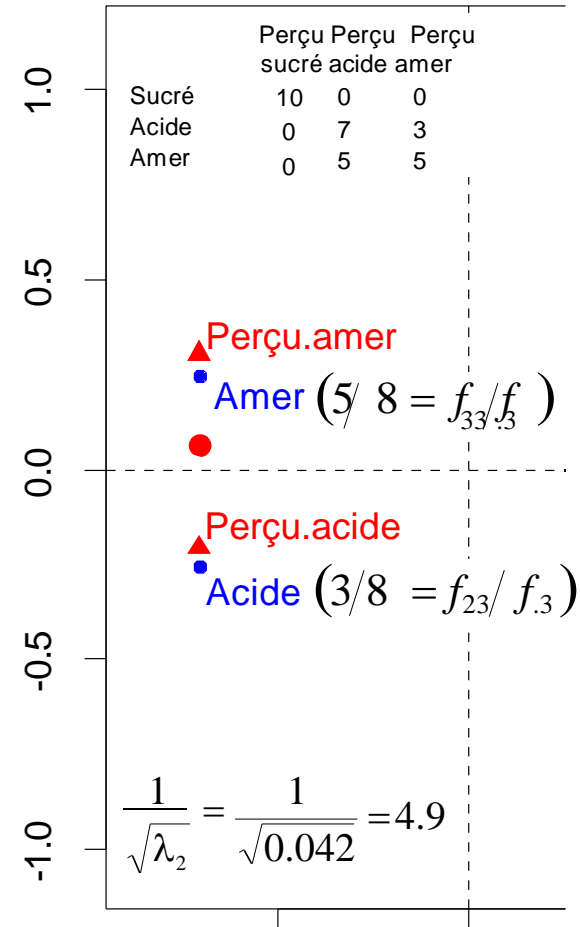
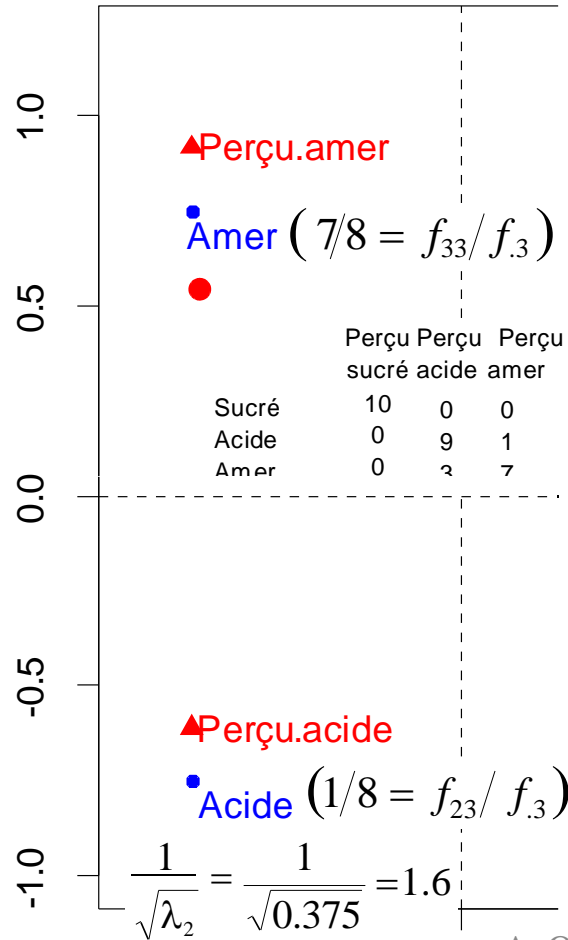
	Perçu sucré	Perçu acide	Perçu amer
Sucré	10	0	0
Acide	0	7	3
Amer	0	5	5

AFC	V. Propre	%
Axe 1	1	96
Axe 2	0,042	4
Somme	1,042	100



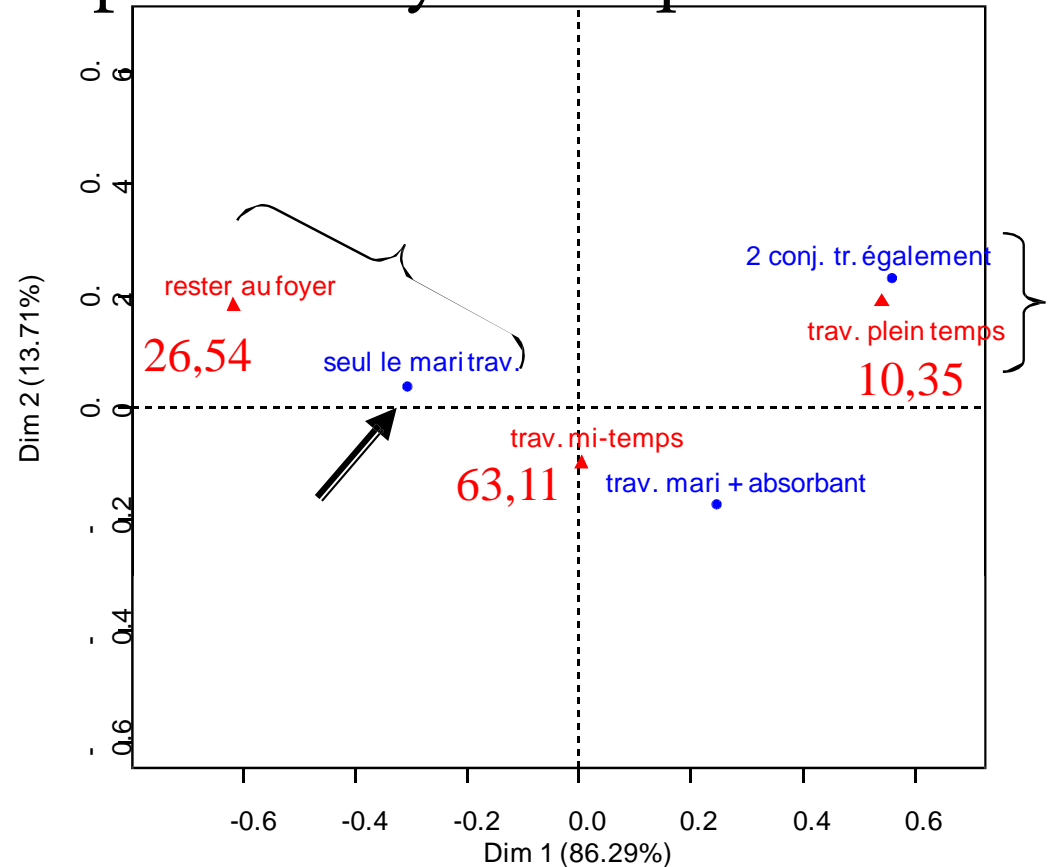
PROPRIÉTÉS BARYCENTRIQUES

Représentation simultanée et inertie



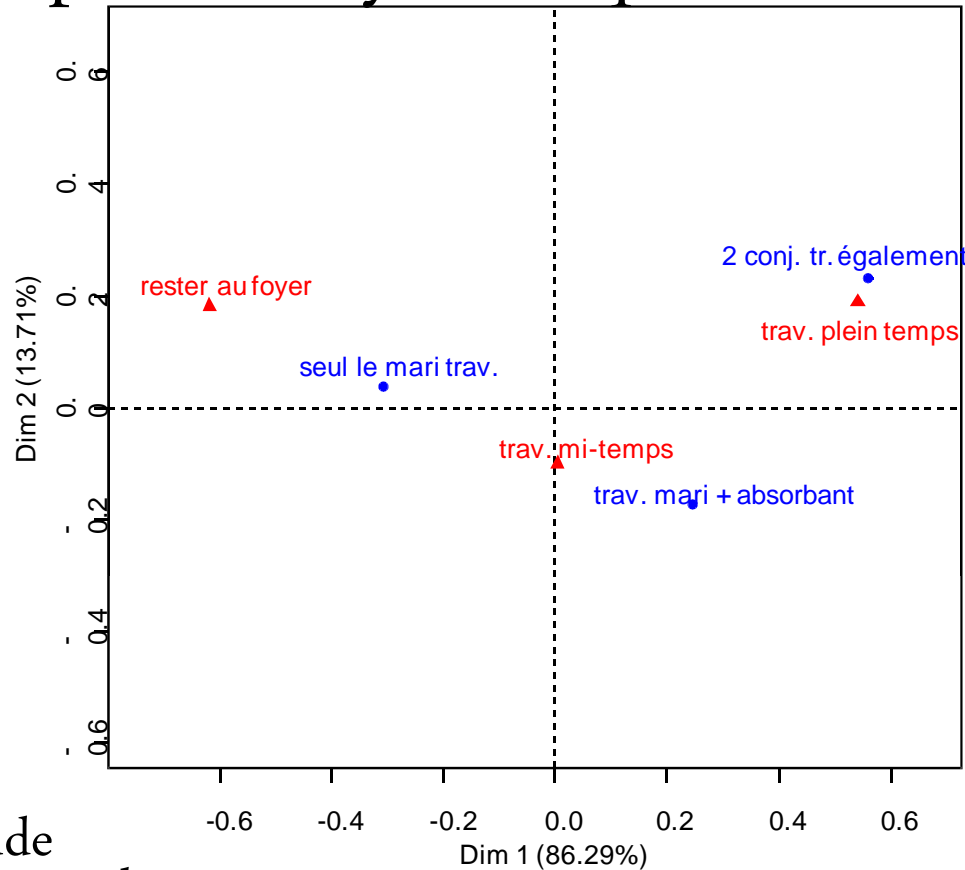
Propriété barycentrique

Seul le mari trav. est le barycentre de **rester au foyer**, **trav. à mi-temps** et **trav. à plein temps**.



	rester au foyer	trav. à mi-temps	trav. à plein temps	Σ
2 conj. tr. également	4.98	54.41	40.61	100
trav. mari + absorbant	5.41	73.51	21.08	100
seul le mari travaille	26.54	63.11	10.35	100
$O = G_I$	16.47	65.14	18.39	100

Propriété barycentrique



1er axe : attitude
duelle à l'égard du travail
féminin :

-> lignes et colonnes

⇒ Dualité

	rester au foyer	trav. à mi- temps	trav. à plein temps	O = G _j
2 conj. tr. également	4.58	12.64	33.44	15.14
trav. mari + absorbant	10.56	36.33	36.91	32.19
seul le mari travaille	84.86	51.02	29.65	52.67

Données du tableau

Pourquoi *rester au foyer* est plus défavorable à l'égard du travail féminin que *seul le mari travaille* ?

TABLEAU 37
REPONSES SIMULTANÉES A DES QUESTIONS D'OPINION

La famille idéale est celle où :	Activité convenant le mieux à une mère de famille quand les enfants vont à l'école :			
	rester au foyer	travailler à mi-temps	travailler à plein-temps	
les deux conjoints travaillent également	13	142	106	261
le mari a un métier plus absor- bant que celui de sa femme	30	408	117	555
seul le mari travaille	241	573	94	908
	284	1 123	317	1 724

Dans \mathbb{R}^I , $d_{\chi^2}^2(\text{rester au foyer}, G_J) = 0.416$

Dans \mathbb{R}^J , $d_{\chi^2}^2(\text{seul le mari travaille}, G_I) = 0.097$

QUALITÉ DE REPRÉSENTATION ET CONTRIBUTION

Equivalence distributionnelle

Equivalence distributionnelle :

- si plusieurs lignes ayant le même profil sont regroupées en une seule,
➤ les résultats de l'AFC sont strictement équivalents (idem pour le regroupement de colonnes)

Application en analyse textuelle :

Grâce à l'équivalence distributionnelle,

- si 2 mots (ou plus) sont employés dans les mêmes circonstances, leurs coordonnées sont proches et
➤ faire l'analyse avec les deux termes ou avec un terme unique qui regroupe ces deux notions est strictement équivalent
⇒ notion très utile (regroupement des singuliers et pluriels, des conjugaisons des verbes, etc.)

Contribution des modalités i à la construction de F_1

La formule de la contribution d'un profil i à l'axe 1 est la suivante :

$$CTR_1(i) = \frac{f_i \cdot F_1(i)^2}{\lambda_1}$$

$CTR_1(i)$ fort \Leftrightarrow

- Point fortement explicatif de F_1
- Point contribuant fortement à la construction de l'axe

Aides à l'interprétation : contribution

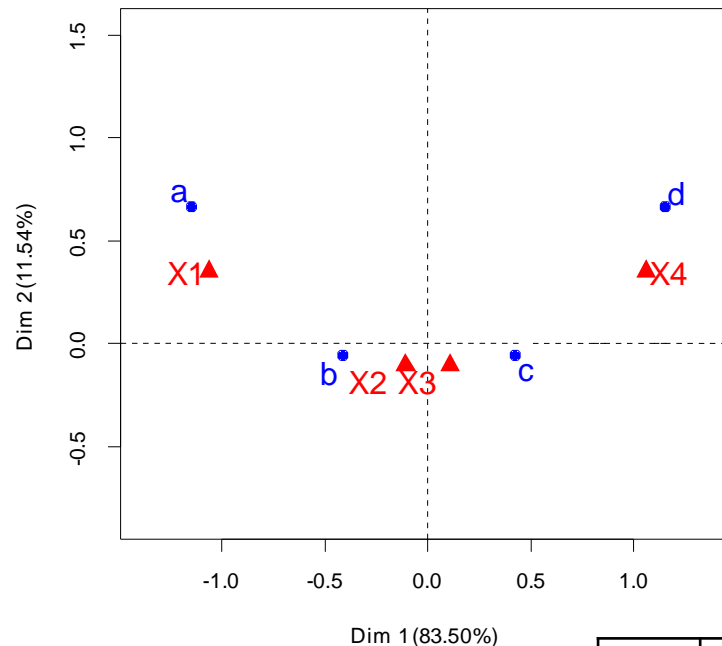
Indicateur brut : inertie projetée de M_i sur $u_s = f_i(OH_i^s)^2$

Indicateur relatif :
$$\frac{\text{inertie proj. de } M_i \text{ sur } u_s}{\text{inertie de l'axe } s} = \frac{f_i(OH_i^s)^2}{\lambda_s}$$

- On peut additionner les contributions de plusieurs éléments
- Elles indiquent dans quelle mesure on peut considérer qu'un axe est dû à un élément ou à quelques éléments
- Compromis opérationnel entre distance à l'origine et poids
- Utiles pour les grands tableaux pour sélectionner un sous-ensemble d'éléments au début de l'interprétation (conjointement à la qualité de représentation)

Contribution : exemple

	X1	X2	X3	X4
a	1	1	0	0
b	5	10	10	0
c	0	10	10	5
d	0	0	1	1



	Inertie	%
Axe 1	0.258	83.501
Axe 2	0.036	11.538
Axe 3	0.015	4.96

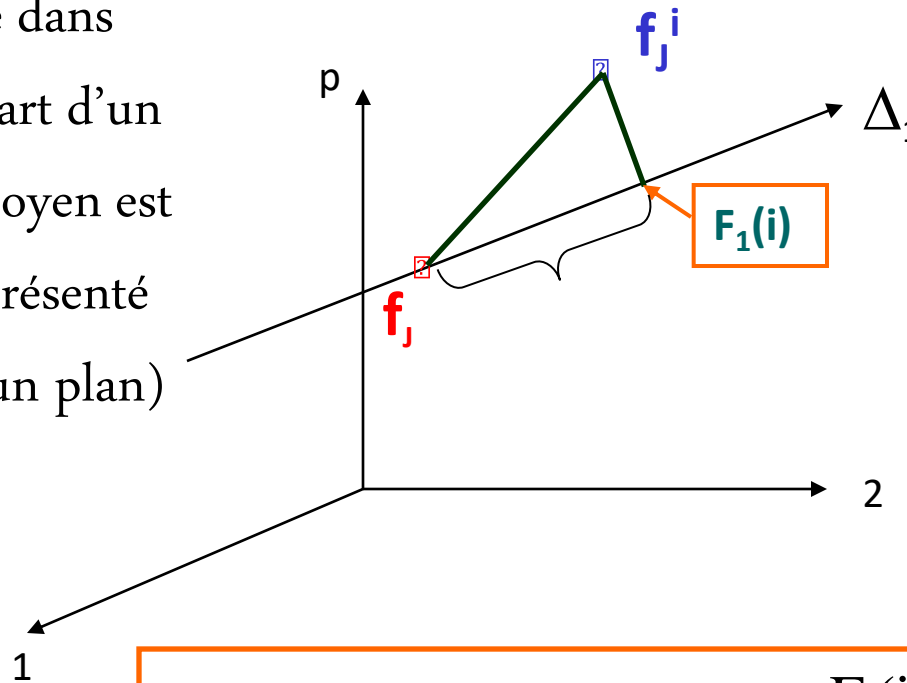
	Axe1	Axe2
a	18.879	46.296
b	31.121	3.704
c	31.121	3.704
d	18.879	46.296
Σ	100	100

⇒ Les points extrêmes ne sont pas nécessairement ceux qui contribuent le plus à la construction des axes

	X1	X2	X3	X4	fi.
a	0,166	0,047	0	0	0,214
b	0,833	0,476	0,476	0	1,785
c	0	0,476	0,476	0,833	1,785
d	0	0	0,047	0,166	0,214

Qualité de représentation du point i sur le premier axe principal : Cosinus carré

Indicateur montre dans quelle mesure l'écart d'un profil au profil moyen est complètement représenté par l'axe (ou par un plan)



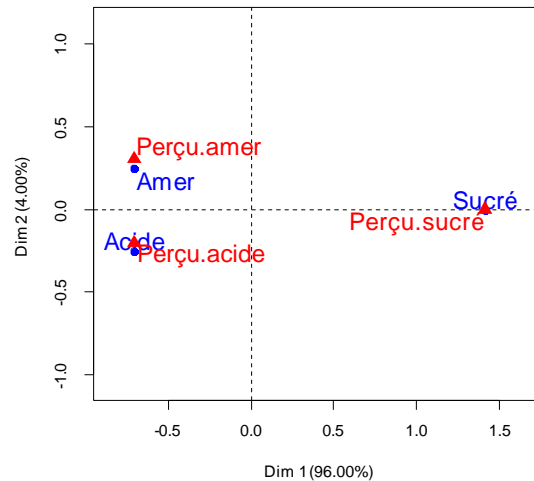
$$\text{Cos}_1^2(i) = \text{Cos}^2(\vec{f_J f_J^i}, \Delta_1) = \frac{F_1(i)^2}{d^2(f_J^i, f_J)}$$

- $\text{Cos}_1^2(i)$ fort \iff
- Point fortement expliqué par l'axe Δ_1
 - Point bien représenté sur l'axe Δ_1

Qualité de représentation : exemple

	Perçu sucré	Perçu acide	Perçu amer
Sucré	10	0	0
Acide	0	7	3
Amer	0	5	5

AFC	V. Propre	%
Axe1	1	96
Axe2	0,042	4
Somme	1,042	100



Qualité de représentation (cos ²)		
	Axe1	Axe2
Sucré	1.000	0.000
Acide	0.889	0.111
Amer	0.889	0.111
Perçu.sucré	1.000	0.000
Perçu.acide	0.923	0.077
Perçu.amer	0.842	0.152

⇒ Interprétation des graphes basée sur points remarquables ayant une bonne qualité de représentation

V DE CRAME

V de Cramer

Nuage des lignes : I points dans un espace à J dimensions

$$\left. \begin{array}{l} J \text{ dim. mais 1 contrainte (profils)} \Rightarrow S \leq J - 1 \\ I \text{ points évoluent dans au plus } I - 1 \text{ dim.} \Rightarrow S \leq I - 1 \end{array} \right\} S \leq \min(I - 1, J - 1)$$

$$\Rightarrow \Phi^2 = \sum_{k=1}^{\min(I-1, J-1)} \lambda_k \leq \min(I - 1, J - 1)$$

d'où l'idée d'un indicateur borné de la liaison entre 2 variables :

$$V \text{ de Cramer} = \frac{\Phi^2}{\min(I - 1, J - 1)} \in [0; 1]$$

Travail féminin			Trois saveurs			Trois saveurs		
$V = 0.135/2 = 0.0675$			$V = 1.375/2 = 0.6875$			$V = 1.042/2 = 0.521$		
AFC V. Propre	%		AFC	V. Propre	%	AFC V. Propre	%	
Axe 10,117	86,292		Axe 1	1	72,727	Axe 1 1	96	
Axe 20,019	13,708		Axe 2	0,375	27,273	Axe 20,042	4	
Somme 0,135	100		Somme	1,375	100	Somme 1,042	100	

Généralisations de l'AFC

- Les 'catégories' des questionnaires sont souvent mutuellement exclusives :
 - Sexe : H ou F
 - Politique : gauche, centre, droite→ Tableau disjonctif
- Aux croisements de plus de deux caractéristiques : Analyse des Composantes Multiples (ACM)
 - Bac X Orientation X sexe→ Tableau de Burt

1	0	0	0	1	0	1	0
0	2	0	1	1	1	1	1
0	0	2	1	1	1	0	0
0	1	1	2	0	1	1	0
1	1	1	0	3	1	1	1
0	1	1	1	1	2	0	0
1	1	0	1	1	0	2	0
0	1	0	0	1	0	0	1