SEANCE DE SOUTIEN

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Convergence de variables aléatoires

Exercice 1.
Soit Y_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ sur $\{0,1\}$ de paramètres respectifs de succès $p_n = \frac{1}{n}$.

a) Si Z est une variable aléatoire intégrable, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(|nY_n - Z|) \geq \mathbb{E}(|Z|) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y_n=1\}}|Z|).$$
En déduire que si la suite nY_n, $n \in \mathbb{N}$ converge vers Z dans L^1, nécessairement $Z = 0$ presque sûrement. Y a-t-il convergence ?

b) Dans cette question, les Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sont supposées mutuellement indépendantes. Que dire des limites presque sûres et dans L^1 de la suite Y_n, $n \in \mathbb{N}$?

c) Mêmes questions si $p_n = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2.
Soit une suite X_n, $n \in \mathbb{N}$, de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X.

a) Construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers n_k, $k \in \mathbb{N}$, telle que, pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}\left(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon) < \infty$. En conclure que la suite X_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, converge vers X presque sûrement.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n,$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda n}(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right),$ pour f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

2. Fonction caractéristique

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, dont la loi a pour fonction caractéristique φ_X.

— Montrer que
$$P(X=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(\theta)d\theta.$$

— Soit à présent une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, avec $P(X_k=+1) = P(X_k=-1) = \frac{1}{2}$, et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$,
$$P(S_{2n}=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(\theta)d\theta.$$

b) Déduire de la question précédente la divergence de la série de terme général $P(S_{2n} = 0)$.

c) Montrer de façon probabiliste que
$$P(S_{2n}=0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 1,$$
et démontrer que $P(S_{2n}=0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
(Indication : faire une transformation pour se ramener à une loi binomiale.)

Exercice 5.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $C(1)$ de paramètre 1 et soient a, b, c, d des nombres réels strictement positifs. Considérons les variables aléatoires X et Y définies par
$$X = aU + bV, \quad Y = cU + dV.$$

(i) Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y) et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

(ii) Calculer la fonction caractéristique φ_{X+Y} de $X+Y$ et en déduire l'égalité des lois $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.

3. Temps d'arrêt

Exercice 6.
On considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On se donne également un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ (précisément $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).

(1) Montrer que le temps d'atteinte de A, $T_A := \inf\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est un temps d'arrêt pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que le temps de second passage dans A, $T_A^2 := \inf\{n > T_A,\ X_n \in A\}$ est également un temps d'arrêt pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Le temps de dernier passage dans A, $S_A := \sup\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est-il un temps d'arrêt pour cette filtration ?

Exercice 7. Exercice 2
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.
$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 \mid \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 8. *Identité de Wald.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. et T un temps d'arrêt associé. On suppose que les espérances $\mathbb{E}[|X_1|]$ et $\mathbb{E}[T]$ sont finies.

(1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{T} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{T\geq k} \ .$$

(2) Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T \geq k)$.

(3) En déduire que $\sum_{k=1}^{T} X_k$ est intégrable et que $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]$.

4. Espérance conditionelle

Exercice 9.
Soit S une variable aléatoire satisfaisant $\mathbb{P}(S > t) = e^{-t}$ for all $t > 0$. Calculer l'espérance conditionelle $\mathbb{E}[S \mid S \wedge t]$, où $S \wedge t := \min(S, t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 10.
Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Exercice 11.
Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$ lorsque la loi du couple (X, Y) admet la densité :
1. $f(x,y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x e^{-y^2/2} \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$
2. $f(x,y) = \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y} - y\right) \mathbb{1}_{\{0,+\infty\}^2(x,y)}$
3. $f(x,y) = \frac{12}{5} x(2-x-y) \mathbb{1}_{[0,1]^2(x,y)}$