Author : Yassine EL MAAZOUZ

Supervised by : Tony Lelievre and Grégoire Allaire

MAP411 Project

# A greedy algorithm to solve high dimensional elliptic symmetric problems.

### Abstract

The Objective of this project is to study a greedy algorithm that uses discretization to approximate the exact solution of an equation of the forme:

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \Omega : -\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y) \\ \forall (x,y) \in \partial\Omega : \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 0 \end{cases}$$

where $\Omega = ]0,1[^2$ and $n$ is the outgoing normal to $\partial\Omega$

For the function $f : (x,y) \to cos(3\pi x)cos(3\pi y) + x^2 y e^{sin(y)}$ the algorithm returns the following approximation of the solution :

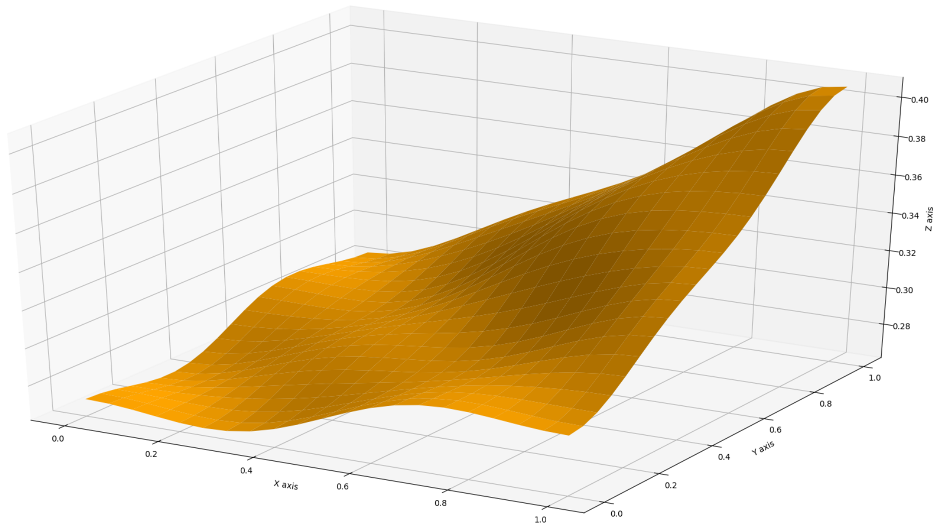


Figure 1 – The approximate solution for the given function $f$

As the project was to be presented at Ecole Polytechnique, the rest of the paper is written in French.

## 1- Formulation Variationnelle

Soit $u$ une solution de l'équation de Laplace (1). Pour $v \in C^1(\bar{\Omega})$:

$$\forall x, y \in \Omega : -\Delta u(x,y).v(x,y) + u(x,y).v(x,y) = f(x,y).v(x,y)$$

Donc en intégrant sur $\Omega$ on trouve:

$$\forall v \in C^1(\bar{\Omega}) : -\int_\Omega \Delta u.v + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$$

Or par une intégration par partie (et grâce aux conditions aux bords sur $u$) on a:

$$\int_\Omega \Delta u.v = -\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_{\partial\Omega} v.\vec{\nabla} u.\vec{n} = -\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial n} = -\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v$$

Donc :

$$\forall v \in C^1(\bar{\Omega}) : \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$$

Réciproquement,

Soit $u \in V \ tq \ \forall v \in C^1(\bar{\Omega}) : \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$

En faisant une intégration par parties "à l'envers", on obtient :

$$\forall v \in C^1(\bar{\Omega}) : -\int_\Omega \Delta u.v + \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial n} + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$$

En remarquant que l'on peut se restreindre aux fonctions $v \in C^1(\bar{\Omega})$ à support compact dans $\Omega$, on a:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ \forall v \in C^1(\bar{\Omega}) \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet d'affirmer que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$

Donc la formulation variationnelle de l'équation de Laplace (1) est:

Trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$$

## 2- Discretisation de la solution

La formulation variationnelle associée à l'espace vectoriel $V_h$ est la suivante:

Trouver $u \in V_h$ tel que: (*) pour tout $v \in V_h$ : $\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v$

Puisque $V_h$ est de dimension finie, et grâce à la linéarité, (*) est équivalente à:

$$\forall i,j = 0,...,I : \int_\Omega \vec{\nabla} u \vec{\nabla}(\phi_i \otimes \phi_j) + \int_\Omega u.(\phi_i \otimes \phi_j) = \int_\Omega f.(\phi_i \otimes \phi_j)$$

Soient $k,l \in \{0,I\}$ et $U_{i,j}$ les coordonées de $u_h$ dans la base de $V_h$ *i.e*:

$$u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$$

On a:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \vec{\nabla} u_h \vec{\nabla}(\phi_k \otimes \phi_l) &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} \int_\Omega \vec{\nabla}(\phi_i \otimes \phi_j)\vec{\nabla}(\phi_k \otimes \phi_l) \\ &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} \int_\Omega (\phi_i'\phi_k' \otimes \phi_j\phi_l + \phi_i\phi_k \otimes \phi_j'\phi_l') \\ &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l})\end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_h.(\phi_k \otimes \phi_l) &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} \int_\Omega (\phi_i \otimes \phi_j)(\phi_k \otimes \phi_l) \\ &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} \int_\Omega \phi_i\phi_k \otimes \phi_j\phi_l \\ &= \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j} M_{i,k} M_{j,l}\end{aligned}$$

On en déduit qu'on peut discrétiser le problème (1) sous la forme:

$$\forall k, l \in \{0, ..., I\} : \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l} + M_{i,k}M_{j,l}) = F_{k,l}$$

Enfin, comme dans le cas où $d = 1$, le problème est bien posé car l'application qui à $(D, M, F)$ associe $U$ est bien définie et continue. La taille des données à stocker est proportionelle à $I^d$.

## 3: Un problème de minimisation équivalent

La fonctionnelle $\mathcal{E}$ est différentiable sur $V_h \otimes V_h$ de plus pour $u, v \in V_h$:

$$d_u\mathcal{E}(v) =< \mathcal{E}'(u), v >= \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v - \int_\Omega f.v$$

Donc pour $u, v \in V_h$:

$$< \mathcal{E}'(u) - \mathcal{E}'(v), u - v >= \textstyle\int_\Omega (\vec{\nabla} u - \vec{\nabla} v)^2 + \int_\Omega (u - v)^2$$

Donc $\mathcal{E}$ est strictement convexe, et puisque $\mathcal{E}(u) \xrightarrow[||u|| \to +\infty]{} +\infty$ car $\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - ||f||||u||$. Et $V_h$ est de dimension finie, $\mathcal{E}$ admet un unique minimisant $u_h$ sur $V_h \otimes V_h$ et ce minimisant est l'unique solution de l'équation d'Euler:

$$\forall v \in V_h \otimes V_h : \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + \int_\Omega u.v - \int_\Omega f.v = 0$$

Ainsi le problème (3) est équivalent au problème de minimisation de $\mathcal{E}$ suivant:

Trouver $u_h \in V_h \otimes V_h$ ( ou $U \in \mathbb{R}^{(I+1)} \times \mathbb{R}^{(I+1)}$) tel que,

$$u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j = \underset{v_h \in V_h \otimes V_h}{\mathcal{E}(v_h)}$$

## 4-Algorithme Glouton

L'algorithme (5) est dit glouton parceque à chaque itération on cherche les solutions $(r_n \otimes s_n)$ de (5) dans l'ensemble des fonction factorisées $V_h \times V_h$, et en "avalant" les $(r_k \otimes s_k)$ on espère approcher la solution $u_h$ du problème (4) par leur somme. C'est une approche gourmande mais cela reste une approximation.

A l'itération $n$, le nombre de coefficients à stocker pour définir $u_{n-1}$ est $(I+1)^d$ qui correspondent à ses coordonnées dans la base naturelle de $V_h \otimes V_h \otimes ... \otimes V_h$. Pour définir $(r_n^{(1)}, ...., r_n^{(d)}) = \mathcal{E}(u_{n-1} + r_n^{(1)} \otimes .... \otimes r_n^{(d)})$ il faut stocker $(I+1)^d$ coefficients.

Donc pour l'algorithme glouton on aura besoin de stocker $2(I+1)^d$ coefficients.

Si on dispose d'une représentation de f sous la forme: $f(x_1, ..., x_d) = \sum_{p=1}^{P} f_1^p(x_1)...f_d^p(x_d)$ le calcul de l'intégrale $\int_\Omega f.u$ pour $u$ de la forme $\sum_{i_1,...,i_d=0}^{I} U_{i_1,...,i_d}\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$ se réduit au calcul de $dP(I+1)$ termes de la forme $\int_{[0,1]} f_j^k.\phi_{i_j}$ par théorème de Fubini.

## 5 Equations d'Euler associées au problème de minimisation

Soit $u \in V_h \otimes V_h$. Posons la fonctionnelle $\widetilde{\mathcal{E}}$ définie sur $V_h \times V_h$ par:

$$\forall (r,s) \in V_h \times V_h : \widetilde{\mathcal{E}}(r,s) = \mathcal{E}(u + r \otimes s)$$

D'après la question 3, $\widetilde{\mathcal{E}}$ est continue différentiable et de plus : $\widetilde{\mathcal{E}}(r,s) \xrightarrow[||(r,s)|| \to +\infty]{} +\infty$, Car $\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - ||f||_2.||u||$ avec $||u||$ la norme définie à la question 7.

L'espace $V_h \times V_h$ étant de dimension finie, $\widetilde{\mathcal{E}}$ admet un minimiseur. Ceci étant vrai pour tout $u$ de $V_h$ on en déduit que le problème (5) amdet une solution.

Soient $(r,s), (\delta r, \delta s)$ de $V_h \times V_h$ et $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u + (r+\delta r) \otimes (s + \delta s)) &= \mathcal{E}(u + r \otimes s + \delta r \otimes s + r \otimes \delta s + \delta r \otimes \delta s)) \\ &= \mathcal{E}(u + r \otimes s) + < \mathcal{E}'(u + r \otimes s), \delta r \otimes s + r \otimes \delta s > + o(\delta r, \delta s)\end{aligned}$$

Donc $\quad \widetilde{\mathcal{E}}(r+\delta r, s+\delta s) = \widetilde{\mathcal{E}}(r,s) + < \mathcal{E}'(u + r \otimes s), \delta r \otimes s + r \otimes \delta s > + o(\delta r, \delta s)$

Donc l'équation d'Euler que vérifie par $(r_n, s_n)$ est:

$$\forall (\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h : \quad < \mathcal{E}'(u_{n-1} + r_n \otimes s_n), \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s >= 0$$

Qui s'écrit encore (d'après la formule de la différentielle de $\mathcal{E}$ de la question 3):

(1) $\int_\Omega \nabla(u_{n-1} + r_n \otimes s_n)\nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) + \int_\Omega (u_{n-1} + r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_\Omega f.(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) =$

*ie*:

$$\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\nabla(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)+\int_\Omega (r_n\otimes s_n)(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)$$

$$=\int_\Omega f.(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)-\int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)+\int_\Omega u_{n-1}.(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)$$

L'équation (1) est bilinéaire en $(\delta r,\delta s)$ donc elle est équivalente au system des deux équations résultantes en annulant $\delta r$ puis $\delta s$ comme suit:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\nabla(\delta r\otimes s_n)+\int_\Omega (r_n\otimes s_n)(\delta r\otimes s_n) & = & \int_\Omega f.(\delta r\otimes s_n)-\int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(\delta r\otimes s_n)\\ & - & \int_\Omega u_{n-1}.(\delta r\otimes s_n)\\ & & \\ \int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\nabla(r_n\otimes \delta s)+\int_\Omega (r_n\otimes s_n)(r_n\otimes \delta s) & = & \int_\Omega f.(\delta r\otimes s_n)-\int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(r_n\otimes \delta s)\\ & - & \int_\Omega u_{n-1}.(\delta r\otimes s_n)\end{array}\right.$$

## 6-Convergence de l'algorithme: partie 1

Puisque $u_n=u_{n-1}+r_n\otimes s_n$ d'après l'equation (1) de la question 5 on a:

$$(2)\quad \forall(\delta r,\delta s)\in V_h\times V_h:\quad a(u_n,\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)=\int_\Omega f.(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)$$

Puique $u_h$ est solution du problème (4), elle vérifie l'équation d'Euler:

$$(0)\quad \forall v\in V_h\otimes V_h:\int_\Omega \vec\nabla u_h.\vec\nabla v+\int_\Omega u_h.v=\int_\Omega f.v$$

Or, pour $(\delta r,\delta s)\in V_h\times V_h$, on a $v=\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s\in V_h\otimes V_h$.

Donc,

$$a(u_h,\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)=\int_\Omega \vec\nabla u_h.\vec\nabla(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)+\int_\Omega u.(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)=\int_\Omega f.(\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)$$

On en déduit que pour tout $(\delta r,\delta s)\in V_h\times V_h$:

$$a(u_h,\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)=a(u_n,\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)$$

$i.e$ par bilinéarité de $a$:

$$\forall(\delta r,\delta s)\in V_h\times V_h:\quad a(g_n,\delta r\otimes s_n+r_n\otimes\delta s)=0$$

On a $g_{n-1}=u_h-u_{n-1}=g_n+r_n\otimes s_n$, et d'après ce qui précède: $a(g_n,r_n\otimes s_n)=0$, alors grâce à la bilinéarité de $a$:

$$(3)\quad a(g_{n-1},g_{n-1})=a(g_n+r_n\otimes s_n,g_n+r_n\otimes s_n)=a(g_n,g_n)+a(r_n\otimes s_n,r_n\otimes s_n)$$

On a de plus:

$$\begin{aligned}
E_n &= \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) = \mathcal{E}(u_{n-1} + r_n \otimes s_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega 2\nabla u_{n-1}\nabla(r_n \otimes s_n) + (\nabla(r_n \otimes s_n))^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega 2u_{n-1}(r_n \otimes s_n) + (r_n \otimes s_n)^2 \\
&\quad + \int_\Omega f(r_n \otimes s_n) \\
&= \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(r_n \otimes s_n))^2 + (r_n \otimes s_n)^2) - \int_\Omega f.(r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) \\
&= \frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) - \int_\Omega f.(r_n \otimes s_n)
\end{aligned}$$

Or, d'après l'identité (2): $\int_\Omega f.(r_n \otimes s_n) = a(u_n, r_n \otimes s_n)$
Donc:

$$E_n = \frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) - a(u_n, r_n \otimes s_n) = -\frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$$

On a $E_n = \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1})$.

Donc par téléscopage, la série $\sum E_n$ converge si et seulement si la suite $(\mathcal{E}(u_n))_{n>0}$ est bornée, car $E_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.

On a pour $u \in V_h \otimes V_h$, par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mid \int_\Omega f.u \mid^2 \leq \int_\Omega f^2 . \int_\Omega u^2$$

Donc, il existe $M \geq 0$ tel que:

$$\mid \int_\Omega f.u \mid \leq M.\sqrt{a(u,u)}$$

On en déduit que:

$$\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2}a(u,u) - M.\sqrt{a(u,u)}$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - Mx$ est minorée donc le suite $(\mathcal{E}(u_n))_{n>0}$ est minorée.

Et par définition des $u_n$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\quad \mathcal{E}(u_n) \leq 0$ car $\quad \mathcal{E}(0) = 0$

Donc la suite $(\mathcal{E}(u_n))_{n>0}$ est bornée, ce qui permet de conclure que les deux séries $\sum E_n$ et $\sum a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$ convergent.

## 7-Convergence de l'algorithme: partie 2

La série $\sum a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$ est convergente d'après ce qui précède. Et puisque $a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) = a(g_{n-1}, g_{n-1}) - a(g_n, g_n)$, alors la suite $(a(g_n, g_n))_{n\geq 1}$ est bornée.

Or $v_h \in V_h \otimes V_h \to \sqrt{a(v_h, v_h)}$ définit une norme, la suite $(g_n)$ est alors bornée sur $V_h \otimes V_h$ qui est de dimension finie.

Donc $(g_n)$ admet une sous suite convergente $(g_{\varphi(n)})$ dans $V_h \otimes V_h$ vers une limite $g_\infty \in V_h \otimes V_h$.

D'après la définition (5) des $u_n$, on a $\forall \delta r, \delta s \in V_h$ : $\quad \mathcal{E}(u_n) \leq \mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \otimes \delta s)$

Donc pour $\delta r, \delta s \in V_h$ :

$$\begin{aligned}
E_n = \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) &\leq \mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \otimes \delta s) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega 2\nabla u_{n-1}\nabla(\delta r \otimes \delta s) + (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega 2u_{n-1}(\delta r \otimes \delta s) + (\delta r \otimes \delta s)^2 \\
&\quad + \int_\Omega f(\delta r \otimes \delta s) \\
&\leq \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) - \int_\Omega f.(\delta r \otimes \delta s) + a(u_{n-1}, \delta r \otimes \delta s)
\end{aligned}$$

Or d'après l'équation d'Euler (0) vérifiée par $u_h$ on a:

$$a(u_h, \delta r \otimes \delta s) = \int_\Omega \vec{\nabla} u_h.\vec{\nabla}(\delta r \otimes \delta s) + \int_\Omega u_h.(\delta r \otimes \delta s) = \int_\Omega f.(\delta r \otimes \delta s)$$

Donc:

$$\begin{aligned}
E_n &\leq \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) - \int_\Omega f.(\delta r \otimes \delta s) + a(u_{n-1}, \delta r \otimes \delta s) \\
&= \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) - a(u_h, \delta r \otimes \delta s) + a(u_{n-1}, \delta r \otimes \delta s) \\
&= \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) - a(g_{n-1}, \delta r \otimes \delta s)
\end{aligned}$$

D'où :

$$E_n \leq \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) - a(g_{n-1}, \delta r \otimes \delta s)$$

Puisque $g_{\varphi(n)} \to g_\infty$ et $V_h \otimes V_h$ est de dimension finie on a $a$ est bilinéaire continue sur $V_h \otimes V_h$ d'où:

$$\forall \delta r, \delta s \in V_h \times V_h : \quad a(g_{\varphi(n)}, \delta r \otimes \delta s) \to a(g_\infty, \delta r \otimes \delta s)$$

Or la suite $E_n$ tends vers 0 car la série $\sum E_n$ est convergente. On en déduit alors en tendant n vers $+\infty$ que:

$$\forall \delta r, \delta s \in V_h \times V_h : \quad a(g_\infty, \delta r \otimes \delta s) \leq \frac{1}{2}(\int_\Omega (\nabla(\delta r \otimes \delta s))^2 + (\delta r \otimes \delta s)^2) = \frac{1}{2}\left\|\delta r \otimes \delta s\right\|^2$$

Donc puisque $a$ est linéaire en son deuxième argument:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall \delta r, \delta s \in V_h \times V_h : \quad \epsilon a(g_\infty, \delta r \otimes \delta s) \leq \epsilon^2 \frac{1}{2}\left\|\delta r \otimes \delta s\right\|^2$$

Enfin (en tendant $\epsilon$ vers 0):

$$\forall \delta r, \delta s \in V_h \times V_h : \quad a(g_\infty, \delta r \otimes \delta s) \leq 0$$

$i.e$ (encore grâce à la linéarité):

$$\forall \delta r, \delta s \in V_h \times V_h : \quad a(g_\infty, \delta r \otimes \delta s) = 0$$

Or $g_\infty \in Vect\{\phi_i \otimes \phi_j / i, j = 0, ..., I\}$ donc par ce qui précède et par bilinéarité de $a$: $a(g_\infty, g_\infty) = \|g_\infty\|^2 = 0$

Donc $g_\infty = 0$

On vient de montrer que $O$ est la seule valeur d'adhérence de $(g_n)_{n\geq 1}$ qui est bornée.

Donc: $g_n \to 0$

D'où la convergence de l'algorithme glouton.

## 8-Problème matriciel équivalent

Les equations d'Euler s'écrivent:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n)\nabla(\delta r \otimes s_n) + \int_\Omega (r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n) & = & \int_\Omega f.(\delta r \otimes s_n) - \int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(\delta r \otimes s_n) \\ & - & \int_\Omega u_{n-1}.(\delta r \otimes s_n) \\ & & \\ \int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n)\nabla(r_n \otimes \delta s) + \int_\Omega (r_n \otimes s_n)(r_n \otimes \delta s) & = & \int_\Omega f.(\delta r \otimes s_n) - \int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(r_n \otimes \delta s) \\ & - & \int_\Omega u_{n-1}.(\delta r \otimes s_n) \end{array}\right.$$

Soit $i \in \{0, ..., I\}$. On a:

$$\nabla(r_n \otimes s_n)\nabla(\phi_i \otimes s_n) + (r_n \otimes s_n).(\phi_i \otimes s_n) = r'_n\phi'_i \otimes s_n^2 + r_n\phi_i \otimes s_n'^2 + r_n\phi_i \otimes s_n^2$$

En intégrant cette equation sur $\Omega$ et en remplaçant $r_n$ et $s_n$ par leurs décompositions sur la base $(\phi_i)_{\{i=0,...,I\}}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n)\nabla(\phi_i \otimes s_n) + (r_n \otimes s_n).(\phi'_i \otimes s_n) &= (S_n^T M S_n)(DR_n)_i + (S_n^T D S_n)(MR_n)_i \\ &\quad + (S_n^T M S_n)(MR_n)_i \\ &= (\mathcal{M}(S_n)R_n)_i \end{aligned}$$

De plus:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f.(\phi_i \otimes s_n) &= \sum_{p=0}^{P} \int_\Omega (f_1 \otimes f_2).(\phi_i \otimes s_n) \\
&= \sum_{p=1}^{P} \int_\Omega f_1^p \phi_i . \int_\Omega f_2^p (\sum_{j=0}^{I} S_n^j \phi_j) \\
&= \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=0}^{I} S_n^j \int_\Omega f_1^p \phi_i . \int_\Omega f_2^p \phi_j \\
&= \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=0}^{I} S_n^j (F_1^p)_i . (F_2^p)_j \\
&= \big( \sum_{p=1}^{P} (S_n^T F_2^p) F_1^p \big)_i
\end{aligned}$$

de plus:

$$\int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(\phi_i \otimes s_n) + \int_\Omega u_{n-1}.(\phi_i \otimes s_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k).\nabla(\phi_i \otimes s_n) + (r_k \otimes s_k)(\phi_i \otimes s_n)$$

Or:

$$\nabla(r_k \otimes s_k)\nabla(\phi_i \otimes s_k) + (r_k \otimes s_k).(\phi_i \otimes s_k) = r_k' \phi_i' \otimes s_k s_n + r_k \phi_i \otimes s_k' s_n' + r_k \phi_i \otimes s_k s_n$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u_{n-1}.\nabla(\phi_i \otimes s_n) + \int_\Omega u_{n-1}.(\phi_i \otimes s_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k).\nabla(\phi_i \otimes s_n) + (r_k \otimes s_k)(\phi_i \otimes s_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_\Omega r_k' \phi_i' \otimes s_k s_n + r_k \phi_i \otimes s_k' s_n' + r_k \phi_i \otimes s_k s_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (DR_k)_i (S_k^T M Q_n) + (MR_k)_i (S_k^T D S_n) \\
&\qquad + (MR_k)_i (S_k M S_n)
\end{aligned}$$

Par ce qui précède: $(\mathcal{M}(S_n)R_n)_i = (\mathcal{F}_n(S_n))_i$, et donc $\mathcal{M}(S_n)R_n = \mathcal{F}_n(S_n)$.
Par un calcul similaire:

$$\mathcal{M}(R_n)S_n = \mathcal{G}_n(R_n)$$

Donc les equations d'Euler dans l'espace considéré sont équivalente au system matriciel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}(S_n)R_n &=& \mathcal{F}_n(S_n) \\ \mathcal{M}(R_n)S_n &=& \mathcal{G}_n(R_n) \end{array} \right.$$

## 9-Implémentation et tests numériques

Lorsque le paramètre $I$ dépasse 30 dans l'algorithme. Ce dernier ne trace plus la fonction qui devrait être solution de l'équation. Il semble que cela est dû au fait qu'il intègre sur un intervalle de longueur $h = \frac{1}{I+1}$ trop petite, ce qui fait que le résultat est typiquement inférieur à $10^{-18}$ et ne peut être stocké en mémoire (la valeur considérée est alors 0).