Yassine Ait Mohamed
SMA-S5

Devoir 1: Mesures et Intégration

Définition 1. *Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ). On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu \ll \mu$ si*

$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$

pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème 1 (Radon-Nikodym). *Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ). Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :*

$$\int_\Omega F(x)\, d\nu(x) = \int_\Omega F(x)h(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1.

1. Posons
$$\alpha = \mu + 2\nu, \quad \omega = 2\mu + \nu.$$
On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ donnée par :
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\, d\omega(x).$$
Montrer que $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.

2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:
$$\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu = \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.$$

3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \left\{x \in \Omega,\ g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\right\}$ et $S_{2l} := \left\{x \in \Omega,\ g(x) > 2 + \frac{1}{l}\right\}$ où $l \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'on peut choisir la fonction g de telle manière que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. Montrer que l'ensemble $Z = \left\{x \in \Omega : g(x) = \frac{1}{2}\right\}$ est de μ-mesure 0.

4. Montrer que la fonction
$$h(x) = \frac{2 - g(x)}{2g(x) - 1}$$
est bien définie, positive, appartient à $L^1(\Omega, \mu)$ et satisfait (1).

Exercice 2

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}\,ds$, montrer que

$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1}\,dr$$

2. Démontrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\,dx$ en fonction de la fonction Bêta.