TD n° 1
Algèbre 1

Yassine Ait Mohamed

Exercice 1

Soient les quatre assertions suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) & \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, & x+y>0 \\ (b) & \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, & x+y>0 \\ (c) & \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, & x+y>0 \\ (d) & \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, & y^2>x. \end{array}$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leur négation.

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.

2. L'application f est croissante.

3. L'application f est croissante et positive.

4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.

5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 3

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;

2. f est bornée ;

3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

Exercice 4

Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B,$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C.$

Exercice 5 (Différences symétriques)

Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E. On rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$ et on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition.
2. Soient A, B, C, D des sous-ensembles de E. Prouver que
   (i) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
   (ii) $A \triangle B = \emptyset$ ssi $A = B$
   (iii) Si $A \triangle B = A \triangle C$ alors $B = C$
   (iv) Si $A \triangle B = A \cap B$ alors $A = B = \emptyset$.

Exercice 6

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

$$\begin{aligned}
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B)),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\\
&\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).
\end{aligned}$$

Exercice 7 (Injective, surjective, bijective)

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, bijective, surjective ?

$$\begin{array}{cccc}
\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} &
\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} &
\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} &
\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \\[1em]
\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} &
\begin{aligned} f : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} &
\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} & \\[1em]
f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
n \mapsto n+1 & n \mapsto n+1 & n \mapsto 2n & n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}
\end{array}$$

Exercice 8

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = \mathrm{id}$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 9 (Application caractéristique)

On définit, pour E ensemble, et A partie de E, l'application caractéristique de A par :

$$\chi_A : E \to \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. L'application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ définie par $A \mapsto \chi_A$ est bijective.
2. $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$
3. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
4. $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$

5. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$
6. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$
7. $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B = (\chi_A - \chi_B)^2 = |\chi_A - \chi_B|$

Exercice 10

Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective
2. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective

Exercice 11

Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E, c'est-à-dire une application vérifiant :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

On définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \quad \text{et} \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$

où $f \circ g$ désigne la fonction composée de g par f définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

pour tout $x \in E$ et toute application $g : E \to E$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est injective.
2. Montrer que si f surjective, on a de même pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est surjective.

Exercice 12

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 13

Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :

$$A\mathcal{R}B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \overline{B},$$

où $\overline{B}$ est le complémentaire de B (dans E). Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 14

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Deux parties B et C de E sont en relation, noté $B\mathcal{R}C$, si $B \triangle C \subset A$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la classe de B est $\{(B \cap A^c) \cup K \mid K \in \mathcal{P}(A)\}$.

Exercice 15

Effectuer les divisions euclidiennes de

- $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
- $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
- $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 16

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Exercice 17

Calculer $\mathrm{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 18

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Exercice 19

1. Décomposer $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

3. Décomposer $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\dfrac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\dfrac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
6. Décomposer $\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
7. Décomposer $\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
8. Décomposer $\dfrac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
9. Décomposer $\dfrac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
10. Décomposer $\dfrac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
11. Décomposer $\dfrac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
12. Décomposer $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
13. Décomposer $\dfrac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. Décomposer $\dfrac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. Décomposer $\dfrac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. Décomposer $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. Décomposer $\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. Décomposer $\dfrac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. Décomposer $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. Décomposer $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.