Yassine Ait Mohamed
SMA-MIP

Devoir 1: Groupes

Exercice 1

Soit l'ensemble $G = \{e^{2i\pi x} \mid x \in \mathbb{Q}\} \subset S^1$, où S^1 désigne le cercle unité dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de S^1.
2. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini.
3. Montrer que pour tout élément $g \in G$ et tout entier naturel non nul n, il existe $h \in G$ tel que $g = h^n$ (on dit que G est divisible).

Exercice 2

Soit G un groupe, pour tout $h \in G$, on définit l'application :

$$\varphi_h : G \to G, \quad g \mapsto hgh^{-1}.$$

I)

1. Montrer que, pour tout $h \in G$, $\varphi_h \in \mathrm{Aut}(G)$. Un élément de $\mathrm{Aut}(G)$ de la forme φ_h est appelé un *automorphisme intérieur*.
2. Considérons l'application :

   $$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G), \quad h \mapsto \varphi_h.$$

   Montrer que φ est un morphisme de groupes. En déduire que $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_h \mid h \in G\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ appelé *groupe des automorphismes intérieurs*.
3. Le noyau de φ est appelé le *centre* de G et noté $Z(G)$. Décrire le centre lorsque G est commutatif.
4. Montrer que $Z(G)$ est invariant par tout élément de $\mathrm{Aut}(G)$ (on dit que c'est un groupe caractéristique).
5. Déterminer $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ où $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

II) On appelle *commutateur* de x et y l'élément :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

On appelle *sous-groupe dérivé* de G, noté $D(G)$, le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs.

(i) Décrire $D(G)$ lorsque G est commutatif.

(ii) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique.

Exercice 3

Notation:

- $U := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Dans tout le problème, G est un groupe noté multiplicativement de neutre e.

I)

1. Montrer que U est un groupe.
2. Justifier pour $n \in \mathbb{N}^*$ que U_n est un sous-groupe de U.
3. Soit G un groupe fini, $g \in G$, et $f : \mathbb{Z} \to G$ l'application définie par $f(k) = g^k$. Montrer que f est un morphisme de groupes et que $\ker f = o(g)\mathbb{Z}$.

II) Soit G un groupe abélien fini d'ordre n, et a un élément de G. On pose $p = \prod_{g \in G} g$.

4. Montrer que l'application $s : G \to G$ définie par $s(g) = ag$ est bijective, et en déduire que $G = \{ag \mid g \in G\}$.
5. Montrer que $p = a^n p$.
6. En déduire que $a^n = e$.
7. Montrer que $o(a)$ divise n.

III)

8. Justifier que θ (caractère trivial) est l'élément neutre de $\widehat{G}$.
9. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe abélien.
10. Soit $\varphi \in \widehat{G}$ avec $\varphi \neq \theta$.
    (a) Justifier qu'il existe $g_0 \in G$ tel que $\varphi(g_0) \neq 1$.
    (b) Montrer que $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.

IV)

11. Soit $\varphi \in \widehat{G}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $g \in G$, $\varphi(g^k) = (\varphi(g))^k$.
12. En déduire que $|\varphi(g)| = 1$ et que $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$.
13. Pour $\varphi, \psi \in \widehat{G}$, on pose :
$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}.$$
    (a) Montrer que $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$.
    (b) Montrer que si $\varphi \neq \psi$, alors $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.