

Exercices sur les anneaux

Yassine Ait Mohamed
SMA-MIP

Exercice 1

Soit $A = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, où $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de \mathbb{C} .
2. Pour tout $z \in A$, montrer que $N(z) = |z|^2 \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $z \in U(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.
4. Décrire le groupe $U(A)$ et déterminer ses éléments d'ordre 3.
5. Soit $\Phi : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $P \mapsto P(j)$.
 - (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.
 - (b) Déterminer le noyau de Φ .
 - (c) Montrer que $\text{Im } \Phi = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous-corps de \mathbb{C} .
6. Conclure que $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . On note $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$ (le radical de I).

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A .
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I + J} \supseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Exemple : Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = 3648\mathbb{Z}$, trouver \sqrt{I} .

Exercice 3

Soit A un anneau. Un élément $a \in A$ est dit nilpotent s'il existe un entier $n > 0$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible.
2. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents forme un idéal dans A (noté $\text{Nil}(A)$) si A est commutatif.
3. Montrer que $\text{Nil}(A)$ est contenu dans tout idéal premier de A .
4. Calculer $\text{Nil}(A)$ si $A = \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Soit A un anneau principal et commutatif.

1. Montrer que a divise b si et seulement si $(b) \subseteq (a)$.
2. La relation $a \mid b$ définit-elle un ordre sur A ?

Exercice 6

1. Soit A un corps. Montrer que l'anneau $A[X]$, des polynômes à une variable avec des coefficients dans A , est un anneau principal.
2. Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre. Montrer que si $A[X]$ est un anneau principal alors A est un corps.

Exercice 7 : Localisation d'un anneau commutatif

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A , c'est-à-dire que S contient 1, et si $s, t \in S$, alors $st \in S$. On veut définir la localisation $S^{-1}A$ de A par rapport à S .

1. Montrer qu'on peut définir une relation d'équivalence sur $A \times S$ comme suit : (a, s) est équivalent à (b, t) s'il existe $u \in S$ tel que $u(at - bs) = 0$. Soit $S^{-1}A$ l'ensemble des classes d'équivalences. On écrira $\frac{a}{s}$ pour désigner la classe d'équivalence de (a, s) .
2. Montrer que $S^{-1}A$, muni des opérations

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st},$$

est un anneau commutatif.

3. Montrer que si $0 \in S$, alors $S^{-1}A$ est un anneau trivial.
4. Montrer que l'application $f : A \rightarrow S^{-1}A$ définie par $f(a) = \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux. Montrer que f est injectif si S ne contient pas de diviseurs de zéro.

5. **Cas particulier : corps des fractions.** Supposons que A est intègre, et que $S = A \setminus \{0\}$. Montrer que $S^{-1}A$ est un corps, appelé le *corps des fractions* de A .
6. **Cas particulier : localisation en un idéal premier.** Soit P un idéal premier de A . Montrer que $S = A \setminus P$ est une partie multiplicative de A . On note A_P pour désigner $S^{-1}A$ dans ce cas.
7. **Cas particulier :** Montrer que l'idéal engendré par l'image de P dans A_P est le seul idéal maximal de A_P .

Exercice 8

On considère le sous-anneau A de \mathbb{C} engendré par $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire :

$$A = \mathbb{Z}[\varphi] = \{P(\varphi) : P \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

1. Vérifier que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. En déduire que $A = \{a + b\varphi : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
2. On note $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$ et, si $w = a + b\varphi \in A$, on pose $\bar{w} = a + b\bar{\varphi}$. Montrer que l'application $w \mapsto \bar{w}$ est un automorphisme de A .
3. On définit $N : A \rightarrow \mathbb{Z}$, $w = a + b\varphi \mapsto w\bar{w} = (a + b\varphi)(a + b\bar{\varphi})$.
 - (a) Montrer que $x \in A$ est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
 - (b) Montrer que φ est inversible dans A , d'inverse $-\bar{\varphi} = \varphi - 1$.
4. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$.
 - (b) En déduire que l'ensemble des inversibles de A est de cardinalité infinie.
 - (c) En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$ est infini.

Exercice 9

Soit A un anneau commutatif et $x \in A$ un élément non nul. On considère l'application $f : A \rightarrow A$ donnée par $a \mapsto xa$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si x n'est pas un diviseur de zéro.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si x est inversible.
3. Montrer que si A est de cardinalité finie, alors tout élément non nul de A est soit inversible soit un diviseur de zéro.
4. Même question lorsque A est une K -algèbre de dimension finie.
5. Donner un exemple d'anneau admettant des éléments non inversibles et non diviseurs de zéro.