Feuille d'exercices : Topologie générale

Yassine Ait Mohamed

Exercice 1

A) Applications et ensembles

Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles de E. Montrer que $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ et que si f est injective alors on a égalité. Réciproquement, montrer que si on a toujours égalité, alors f est injective.

2. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

3. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

B) Distances

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application croissante qui vérifie que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x, y \geq 0$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

   On suppose que f ne soit pas identiquement nulle et l'on considère un espace métrique (E, d). Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(d(x, y))$ une distance sur E.

2. Vérifier que, sur $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ est une distance.

3. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que l'application η définie sur $E \times E$ par

$$\eta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \text{pour } x, y \in E,$$

   est une distance.

C) Distance induite

1. Soient (E, d) un espace métrique, F un ensemble et $\psi : E \to F$ une bijection.

   (a) Montrer que $d_\psi : F \times F \to \mathbb{R}^+$ définie par $d_\psi(x, y) = d(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))$ une distance sur F.

   (b) Montrer que ψ une isométrie de (E, d) sur (F, d_ψ).

Exercice 2

Soient A, B deux parties d'un espace topologique X.

(a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Montrer l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(c) Montrer l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 3

On pose $X :=]0, +\infty[$ et pour tout $\alpha \leq 0$, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[\subset X$. On considère τ la famille de parties de X donné par

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{\theta_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^+\}.$$

1. Montrer que τ est une topologie sur X.
2. Déterminer les fermés de (X, τ).
3. Donner $\mathrm{int}(A)$ et $\mathrm{adh}(A)$ dans des cas suivants :

$$A =]0, 1[, \quad A := \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Exercice 4

Soit $X := \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments et soit τ la famille de $\mathcal{P}(X)$ suivante :

$$\tau := \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}.$$

1. Montrer que τ est une topologie sur X.
2. Donner les fermés de (X, τ).

Exercice 5

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes

(i) f est continue.

(ii) $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iii) $\forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(iv) $\forall B \subset Y$, $f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

sont équivalentes.

Exercice 6

Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer que si A est un ouvert. Alors on a

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

Exercice 7

Soit (X, τ) un espace topologique et soient U et V deux ouverts disjoints de X. Montrer que on a :

$$\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset.$$

Exercice 8

Soient (X, τ) un espace topologique et Y une partie non vide de X. Montrer que la famille τ_Y de parties de Y définie par :

$$\tau_Y := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}.$$

est une topologie sur Y.

Exercice 9

Soit (X, τ) un espace topologique. Pour tout $x \in X$, on désigne par $\mathcal{F}_x$ l'ensemble de tous les voisinages fermés de x. Montrer que X est séparé si et seulement si on a :

$$\forall x \in X, \quad \bigcap_{V \in \mathcal{F}_x} V = \{x\}.$$

Exercice 10

Soient (X, τ) un espace topologique et $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ l'application qui associe à toute partie A de E, la partie $\gamma(A) := \overset{\circ}{\overline{A}}$ de X.

1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on a :
$$A \subseteq B \Longrightarrow \gamma(A) \subseteq \gamma(B).$$
2. Montrer que pour toute partie ouverte A de X, on a :
$$A \subseteq \gamma(A).$$
3. Montrer que pour toute partie A de X, on a
$$\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A).$$
4. Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints de X, alors $\gamma(U)$ et $\gamma(V)$ sont aussi disjoints.
5. On dit qu'une partie A de X est un **ouvert régulier** si l'on a : $\gamma(A) = A$. Montrer qu'une intersection de deux ouverts réguliers de X donne un ouvert régulier de X.

Exercice 11

Soient X, Y des espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$.

1. Montrer que si A et B sont fermés alors $A \times B$ est fermé.
2. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 12

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. Montrer que si Y est séparé et f est injective et continue alors X est séparé.

Exercice 13

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soient aussi τ une topologie sur X et τ' la topologie la plus fine de Y qui rend l'application

$$f : (X, \tau) \to (F, \tau')$$

continue.

1. Montrer que l'on a
$$\tau' := \{U \in \mathcal{P}(F) \mid f^{-1}(U) \in \tau\}.$$
2. En déduire que si f est une bijection. Alors $f : (X, \tau) \to (F, \tau')$ est un homéomorphisme.

Exercice 14

Vérifier que les espaces suivants sont des espaces métriques :

1. $\mathbb{R}^*$ avec $d(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.
2. $E := \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $d(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.
3. $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.

Exercice 15

Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de E.
2. Montrer que $\{x\}$ est un fermé de E.

Exercice 16

Soient E un ensemble et $d : E^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tous x et y par : $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$, $d(x,y) = 0$ si $x = y$.

1. Démontrer que d est une distance sur E, elle est appelée distance discrète sur E.
2. Déterminer $B(x,r)$ où $x \in E$ et $r > 0$.
3. Déterminer les ouverts puis les fermés de (E,d).

Exercice 17

Soient (X,d) un espace métrique et $x \in X$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Il existe une suite de points de A convergeant vers x.

(iii) $d(x,A) = 0$.

(iv) Tout voisinage de x a une intersection non vide avec A.

Exercice 18

Soit (X,d) un espace métrique. Pour tous $x, y, z \in X$, montrer que

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Exercice 19 (Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$)

On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \leq b$. Montrer que les intervalles fermés $[a,b]$, $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Exercice 20

Soient (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $A \neq \emptyset$.

(ii) Pour toute partie $D \subseteq X$ dense dans X, on a $D \cap A \neq \emptyset$.

Exercice 21

Soit (E,d) un espace métrique. On rappelle que la distance à une partie A de E est la fonction

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}, \quad (x \in E).$$

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction

$$E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x,A)$$

est 1-lipschitzienne i.e. qu'elle vérifie

$$\forall x, y \in E, \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x,A) < d(x,B)\}$ est ouvert.

3. En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V tels que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 22

Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \to F$ deux applications continues.

(a) Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

(b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f \equiv g$ sur A, alors $f \equiv g$ sur E.

(c) Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un fermé dans $E \times F$.