

# Exercices sur les anneaux

Yassine Ait Mohamed  
SMA-MIP

## Exercice 1

Soit  $A = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ , où  $j = e^{2i\pi/3}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
2. Pour tout  $z \in A$ , montrer que  $N(z) = |z|^2 \in \mathbb{Z}$ .
3. Montrer que  $z \in U(A)$  si et seulement si  $N(z) = 1$ .
4. Décrire le groupe  $U(A)$  et déterminer ses éléments d'ordre 3.
5. Soit  $\Phi : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  défini par  $P \mapsto P(j)$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un morphisme d'anneaux.
  - (b) Déterminer le noyau de  $\Phi$ .
  - (c) Montrer que  $\text{Im } \Phi = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  et que c'est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .
6. Conclure que  $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$ .

## Exercice 2

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $I$  un idéal de  $A$ . On note  $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$  (le radical de  $I$ ).

1. Montrer que  $\sqrt{I}$  est un idéal de  $A$ .
2. Montrer que  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ .
3. Montrer que  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$  et  $\sqrt{I+J} \supseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$ .
4. Exemple : Si  $A = \mathbb{Z}$  et  $I = 3648\mathbb{Z}$ , trouver  $\sqrt{I}$ .

## Exercice 3

Soit  $A$  un anneau. Un élément  $a \in A$  est dit nilpotent s'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Montrer que si  $a$  est nilpotent, alors  $1 - a$  est inversible.
2. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents forme un idéal dans  $A$  (noté  $\text{Nil}(A)$ ) si  $A$  est commutatif.
3. Montrer que  $\text{Nil}(A)$  est contenu dans tout idéal premier de  $A$ .
4. Calculer  $\text{Nil}(A)$  si  $A = \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ .

## Exercice 4

Soit  $A$  un anneau principal et commutatif.

1. Montrer que  $a$  divise  $b$  si et seulement si  $(b) \subseteq (a)$ .
2. La relation  $a | b$  définit-elle un ordre sur  $A$  ?

## Exercice 6

1. Soit  $A$  un corps. Montrer que l'anneau  $A[X]$ , des polynômes à une variable avec des coefficients dans  $A$ , est un anneau principal.
2. Soit  $A$  un anneau commutatif, unitaire et intègre. Montrer que si  $A[X]$  est un anneau principal alors  $A$  est un corps.

## Exercice 7 : Localisation d'un anneau commutatif

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ , c'est-à-dire que  $S$  contient 1, et si  $s, t \in S$ , alors  $st \in S$ . On veut définir la localisation  $S^{-1}A$  de  $A$  par rapport à  $S$ .

1. Montrer qu'on peut définir une relation d'équivalence sur  $A \times S$  comme suit :  $(a, s)$  est équivalent à  $(b, t)$  s'il existe  $u \in S$  tel que  $u(at - bs) = 0$ . Soit  $S^{-1}A$  l'ensemble des classes d'équivalences. On écrira  $\frac{a}{s}$  pour désigner la classe d'équivalence de  $(a, s)$ .
2. Montrer que  $S^{-1}A$ , muni des opérations

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st},$$

est un anneau commutatif.

3. Montrer que si  $0 \in S$ , alors  $S^{-1}A$  est un anneau trivial.
4. Montrer que l'application  $f : A \rightarrow S^{-1}A$  définie par  $f(a) = \frac{a}{1}$  est un morphisme d'anneaux. Montrer que  $f$  est injectif si  $S$  ne contient pas de diviseurs de zéro.

5. **Cas particulier : corps des fractions.** Supposons que  $A$  est intègre, et que  $S = A \setminus \{0\}$ . Montrer que  $S^{-1}A$  est un corps, appelé le *corps des fractions* de  $A$ .
6. **Cas particulier : localisation en un idéal premier.** Soit  $P$  un idéal premier de  $A$ . Montrer que  $S = A \setminus P$  est une partie multiplicative de  $A$ . On note  $A_P$  pour désigner  $S^{-1}A$  dans ce cas.
7. **Cas particulier :** Montrer que l'idéal engendré par l'image de  $P$  dans  $A_P$  est le seul idéal maximal de  $A_P$ .

## Exercice 8

On considère le sous-anneau  $A$  de  $\mathbb{C}$  engendré par  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , c'est-à-dire :

$$A = \mathbb{Z}[\varphi] = \{P(\varphi) : P \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

1. Vérifier que  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ . En déduire que  $A = \{a + b\varphi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ .
2. On note  $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$  et, si  $w = a + b\varphi \in A$ , on pose  $\bar{w} = a + b\bar{\varphi}$ . Montrer que l'application  $w \mapsto \bar{w}$  est un automorphisme de  $A$ .
3. On définit  $N : A \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $w = a + b\varphi \mapsto w\bar{w} = (a + b\varphi)(a + b\bar{\varphi})$ .
  - (a) Montrer que  $x \in A$  est inversible si et seulement si  $N(x) = \pm 1$ .
  - (b) Montrer que  $\varphi$  est inversible dans  $A$ , d'inverse  $-\bar{\varphi} = \varphi - 1$ .
4. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de Fibonacci, définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .
  - (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$ .
  - (b) En déduire que l'ensemble des inversibles de  $A$  est de cardinalité infinie.
  - (c) En déduire que  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$  est infini.

## Exercice 9

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $x \in A$  un élément non nul. On considère l'application  $f : A \rightarrow A$  donnée par  $a \mapsto xa$ .

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $x$  n'est pas un diviseur de zéro.
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $x$  est inversible.
3. Montrer que si  $A$  est de cardinalité finie, alors tout élément non nul de  $A$  est soit inversible soit un diviseur de zéro.
4. Même question lorsque  $A$  est une  $K$ -algèbre de dimension finie.
5. Donner un exemple d'anneau admettant des éléments non inversibles et non diviseurs de zéro.