# Logique, Ensembles et applications, Polynômes et Fractions rationnelles

Yassine Ait Mohamed

## 1 Bases de la logique

### A/ Propositions et opérateurs logiques

1. Une **proposition** (ou **assertion**) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux.

2. La **négation** de la proposition $P$ est la proposition qui est vraie si et seulement si $P$ est fausse. Elle est notée $\neg P$.

3. Si $P$ et $Q$ sont deux propositions, $P$ **et** $Q$ est la proposition qui est vraie si et seulement si $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies.

4. Si $P$ et $Q$ sont deux propositions, $P$ **ou** $Q$ est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions $P$ ou $Q$ est vraie.

### B/ Lois de De Morgan

Les opérateurs non, et, ou, sont reliés par les formules suivantes :

$$\neg(P \text{ et } Q) = (\neg P) \text{ ou } (\neg Q).$$
$$\neg(P \text{ ou } Q) = (\neg P) \text{ et } (\neg Q).$$

### C/ Implication

L'**implication** $P \implies Q$ est la proposition $\neg P$ ou $Q$. Pour démontrer $P \implies Q$, on suppose que $P$ est vraie et on démontre que $Q$ est vraie. La négation de la proposition $P \implies Q$ est donc la proposition $P$ et $\neg Q$.

### D/ Équivalence

On dit que les propositions $P$ et $Q$ sont **équivalentes** lorsque l'on a à la fois $P \implies Q$ et $Q \implies P$ qui sont vraies. On note alors $P \iff Q$.

### E/ Contraposée

La **contraposée** de la proposition $P \implies Q$ est la proposition $\neg Q \implies \neg P$. Les deux propositions $P \implies Q$ et $\neg Q \implies \neg P$ sont équivalentes. L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie.

## F/ Quantificateurs

(a) Le quantificateur **pour tout** ou **quel que soit** est noté $\forall$. La proposition $\forall x \in E, P(x)$ est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie.

(b) Le quantificateur **il existe** (au moins un) est noté $\exists$. La proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

(c) Le quantificateur **il existe un unique** est noté $\exists!$. La proposition $\exists! x \in E, P(x)$ est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

(d) La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, \neg P(x)$.

(e) La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E, \neg P(x)$.

## G/ Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Lorsque $P \Longrightarrow Q$, on dit que $P$ est une **condition suffisante** à $Q$, et que $Q$ est une **condition nécessaire** à $P$.

## H/ Méthodes de raisonnement

1. **Par implication** : pour prouver que $P \Longrightarrow Q$, on suppose que $P$ est vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que $Q$ est vraie.

2. **Par double implication / par équivalence** : Pour démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$, il y a deux méthodes standard :

   (i) On raisonne par double implication : on suppose d'abord que $P$ est vraie, et on démontre que $Q$ est vraie. Ensuite, on suppose que $Q$ est vraie, et on démontre que $P$ est vraie.

   (ii) On passe de $P$ à $Q$ en utilisant uniquement des équivalences. C'est une méthode souvent déconseillée, car il faut faire très attention à ce que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence.

3. **Par contraposée** : pour démontrer que $P \Longrightarrow Q$, il suffit de démontrer la contraposée de cette proposition, c'est-à-dire $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

4. **Par l'absurde** : pour démontrer que $P \Longrightarrow Q$, on peut supposer que $P$ et $\neg Q$ sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction ; pour démontrer que $P$ est vraie, on peut supposer que $\neg P$ est vraie et obtenir une contradiction.

5. **Par récurrence** : Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer des propriétés qui dépendent d'un entier $n$. Il est basé sur le principe suivant :

   > Soit $P(n)$ une propriété concernant un entier naturel $n$. On suppose que $P(0)$ est vraie et que, pour tout entier naturel $k$, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Pour bien rédiger une démonstration par récurrence, il est nécessaire de faire apparaître clairement les 4 étapes : définir précisément quelle est la propriété $P(n)$ que l'on souhaite démontrer, écrire la phase d'initialisation, la phase d'hérédité, puis la conclusion. Il existe deux erreurs fréquentes de rédaction de la phase d'hérédité.

(i) Commencer cette phase par la phrase : "supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie et prouvons $P(n+1)$". Si $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$, il n'y a plus rien à prouver !

(ii) Commencer cette phase par la phrase : "supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et prouvons $P(n+1)$". L'erreur est plus subtile. Le principe de récurrence s'écrit formellement $P(0)$ vraie ET $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie. La dernière rédaction serait correcte si le principe de récurrence s'écrivait $P(0)$ vraie ET $(\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie, ce qui est faux.

# 2 Ensembles, applications, relations

## A/ Élément d'un ensemble

On appelle **élément** d'un ensemble $E$ tout objet qui appartient à $E$.

## B/ Partie, sous-ensemble, inclusion

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles, on dit que $E$ est une **partie** de $F$, que $E$ est un **sous-ensemble** de $F$, ou encore que $E$ est **inclus** dans $F$ si tout élément de $E$ est aussi élément de $F$. On note $E \subset F$.

## C/ Ensemble vide

Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément, l'**ensemble vide**. Il est noté $\emptyset$.

## D/ Extension et compréhension

Un ensemble peut être écrit en **extension**, c'est-à-dire que l'on donne la liste de tous ses éléments, ou en **compréhension**, c'est-à-dire que l'on définit cet ensemble par une propriété. Par exemple, $E = \{a, b, c, d\}$ est défini en extension, et $F = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n < 6\}$ est défini en compréhension.

## E/ Ensemble des parties

L'**ensemble des parties** de $E$ est lui-même un autre ensemble, appelé ensemble des parties et noté $\mathcal{P}(E)$.

## F/ Opérations sur les ensembles

Étant donné un ensemble $E$ et deux parties $A$ et $B$ de $E$, on peut définir :

(i) La **réunion** de $A$ et $B$, notée $A \cup B$. $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ ou à $B$.

On a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

(ii) L'**intersection** de $A$ et $B$, notée $A \cap B$. $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ et à $B$.

On a toujours $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

(iii) La **différence** $A \setminus B$ : $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans $A$, mais pas dans $B$.

(iv) Le **complémentaire** de $A$ dans $E$, noté $\overline{A}$, ou $C_E A$, ou $E \setminus A$, l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $A$.

(v) Si $E$ et $F$ sont deux ensembles, le **produit cartésien** de $E$ et $F$, noté $E \times F$, est l'ensemble constitué de tous les couples $(x, y)$, où $x$ est un élément de $E$ et $y$ est un élément de $F$.

# 3 Applications

## A/ Définition

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une **application** de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$. L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{F}(E, F)$, ou $F^E$.

## B/ Graphe

On appelle **graphe** de l'application $f : E \to F$ la partie $\Gamma$ de $E \times F$ définie par

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

## C/ Application indicatrice

Si $A$ est une partie de $E$, l'**application indicatrice** de $A$, notée $\mathbf{1}_A$, est la fonction définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## D/ Application identité

Si $E$ est un ensemble, l'**application identité** de $E$ est la fonction $\mathrm{Id}_E$, définie de $E$ dans $E$ par $\mathrm{Id}_E(x) = x$.

## E/ Restriction

Si $f$ est une fonction de $E$ dans $F$, on appelle **restriction** de $f$ à $A$, et on note $f|_A$ la fonction définie sur $A$ par

$$f|_A(x) = f(x).$$

### F/ Image directe

Si $f$ est une application de $E$ dans $F$ et si $A$ est une partie de $E$, on appelle **image directe** de $A$ par $f$ l'ensemble $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$. Ainsi, $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$.

### G/ Image réciproque

Si $f$ est une application de $E$ dans $F$ et si $B$ est une partie de $F$, on appelle **image réciproque** de $B$ par $f$ l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$. Ainsi, $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

### H/ Application composée

Si $E$, $F$ et $G$ sont trois ensembles et si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, on appelle **application composée** de $f$ et $g$ l'application notée $g \circ f : E \to G$ définie par la formule

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

## 4 Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est :

1. **injective** pour tout couple $(x, x') \in E^2$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
2. **surjective** si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution $x \in E$.
3. **bijective** si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution $x \in E$.

## 5 Relations binaires

On appelle **relation binaire** sur un ensemble $E$ la donnée d'une partie $\Gamma$ de $E \times E$. On dit que $x$ est en relation avec $y$ et on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in \Gamma$.

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est :

(i) **réflexive** si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

(ii) **symétrique** si, pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

(iii) **anti-symétrique** si, pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

(iv) **transitive** si, pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

### 1) Relation d'équivalence

Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique, transitive.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et $x$ est un élément de $E$, on appelle **classe d'équivalence** de $x$ l'ensemble des éléments $y$ de $E$ tels que $x\mathcal{R}y$. Soit $E$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ forment une partition de $E$.

### 2) Relation d'ordre

Une **relation d'ordre** est une relation réflexive, anti-symétrique, transitive.

Si $\prec$ est une relation d'ordre sur $E$, alors :

(a) On dit que l'ordre est **total** si on peut toujours comparer deux éléments de $E$ : pour tous $x, y \in E$, on a $x \prec y$ ou $y \prec x$. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est **partiel**.

(b) Si $A$ est une partie de $E$ et $M$ est un élément de $E$, on dit que $M$ est un **majorant** de $A$ si, pour tout $x \in A$, on a $x \prec M$.

# 6 Polynômes

**$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

## A/ Définition

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite finie $(a_0, \ldots, a_N)$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note ce polynôme $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, où $X$ est appelée l'**indéterminée**. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

## B/ Opérations

On définit sur $\mathbb{K}[X]$ les opérations suivantes :

Si $P(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ (où les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont nulles à partir d'un certain rang), on pose

$$(P+Q)(X) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n$$

$$(PQ)(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \quad \text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ces deux opérations font de $\mathbb{K}[X]$ un anneau.

## C/ Composition

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B = \sum_{n=0}^{N} b_n X^n$. Alors on appelle **composé** de $A$ par $B$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$

$$B \circ A = \sum_{n=0}^{N} b_n A^n.$$

## D/ Degré

Si $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ n'est pas nul, il existe un plus grand indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$. Cet entier s'appelle le **degré** de $P$, noté $\deg(P)$. Le coefficient $a_n$ correspondant s'appelle le **coefficient dominant** de $P$. Par convention, si $P$ est nul, son degré vaut $-\infty$.

## E/ Polynôme unitaire

Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est appelé **unitaire**.

## F/ Propriétés du degré

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, on a

$$\begin{aligned}\deg(P+Q) &\leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P \circ Q) &= \deg(P) \times \deg(Q).\end{aligned}$$

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à $n$.

## G/ Dérivation

Pour $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, on note $P' = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}$ appelé **polynôme dérivé** de $P$. Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

(i) **Formule de Leibniz** : Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

(ii) **Formule de Taylor** : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n.$$

## H/ Divisibilité, division euclidienne

1. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q$ non nul. On dit que $Q$ **divise** $P$ s'il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$. On dit aussi que $Q$ est un **diviseur** de $P$ ou que $P$ est un **multiple** de $Q$.

2. Deux polynômes non nuls $P$ et $Q$ de $\mathbb{K}[X]$ sont dits **associés** si $P$ divise $Q$ et si $Q$ divise $P$. Ceci revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha Q$.

3. **Théorème (division euclidienne des polynômes)** : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q$ non nul. Il existe un unique couple $(A, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$.

4. **Fonction polynomiale, racine** :

   Un polynôme $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ définit une **fonction polynomiale** $\tilde{P} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ par $\tilde{P}(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Le plus souvent, on identifie polynôme et fonction polynomiale.

   On dit que $a$ est une **racine** de $P$ si $P(a) = 0$. Ceci est équivalent à dire que $(X-a)$ divise $P$.

(i) Si $a_1, \dots, a_p$ sont des racines distinctes de $P$, alors $(X - a_1) \cdots (X - a_p)$ divise $P$.

(ii) Un polynôme de degré $n \geq 0$ admet au plus $n$ racines.

(iii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que $a$ est **racine d'ordre de multiplicité** $m$ si

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. $a$ est racine de $P$ de multiplicité $m$.

ii. $(X - a), \dots, (X - a)^m$ divisent $P$, et $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas $P$.

(iv) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $m$ est dit **scindé** s'il se factorise en

$$P(X) = a_m \prod_{j=1}^{m} (X - z_j).$$

## 5) Arithmétique des polynômes

Soit $P, Q$ dans $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Tout diviseur commun à $P$ et $Q$ de degré maximal est appelé **pgcd** de $P$ et $Q$. Tous les pgcd de $P$ et $Q$ sont associés. En particulier, un seul est unitaire, on l'appelle parfois le pgcd de $P$ et $Q$. Il est noté $P \wedge Q$. Comme pour les entiers, le pgcd de deux polynômes peut se calculer à l'aide de divisions euclidiennes successives et de l'algorithme d'Euclide.

On dit que $P$ et $Q$ sont **premiers entre eux** si $P \wedge Q = 1$.

(i) **Théorème de Bézout** : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Alors $P \wedge Q = 1$ si et seulement s'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.

(ii) **Lemme de Gauss** : Soient $P, Q, T \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. On suppose que $P \wedge Q = 1$. Alors si $P \mid QT$, on a $P \mid T$.

Soient $P, Q$ dans $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Tout multiple commun à $P$ et $Q$ de degré minimal est appelé **ppcm** de $P$ et $Q$. Tous les ppcm de $P$ et $Q$ sont associés. En particulier, un seul est unitaire, on l'appelle parfois le ppcm de $P$ et $Q$. Il est noté $P \vee Q$.

## 6) Polynômes irréductibles

(a) **Théorème de d'Alembert-Gauss** : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

(b) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **irréductible** s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si tous ses diviseurs sont les polynômes constants ou les polynômes associés à $P$ (c'est-à-dire les polynômes qui s'écrivent $\lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

(c) **Décomposition en produit d'irréductibles sur** $\mathbb{C}[X]$ :

(i) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

(ii) Tout polynôme non nul est produit de son coefficient dominant et de polynômes irréductibles unitaires. Cette décomposition est unique à l'ordre des termes près.

En particulier, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant se factorise en

$$P(X) = a_N \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\mu_k}$$

où $z_1, \ldots, z_r$ sont les racines distinctes de $P$ dans $\mathbb{C}$ de multiplicités respectives $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

**Corollaire** : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q$ non nul. Alors $Q$ divise $P$ si et seulement si toutes les racines de $Q$ sont des racines de $P$, et leur multiplicité en tant que racine de $P$ est supérieure ou égale à leur multiplicité en tant que racine de $Q$.

En particulier, deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racines communes.

(d) **Décomposition en produit d'irréductibles sur** $\mathbb{R}[X]$ :

(i) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

(ii) Tout polynôme non nul est produit de son coefficient dominant et de polynômes irréductibles unitaires. Cette décomposition est unique à l'ordre des termes près.

# 7 Corps des fractions, opérations, degré

## a) Définition

Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$. Par définition, $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ si et seulement si $PS = QR$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions à coefficients dans $\mathbb{K}$.

## b) Opérations

On définit l'addition et la multiplication de fractions rationnelles de façon naturelle :

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}.$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{K}(X)$ est un corps.

## c) Degré

Le **degré** d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est par définition $\deg(P) - \deg(Q)$. C'est un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

## e) Fraction irréductible, zéros, pôles

(i) Une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit $\frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux. Cette écriture est unique, à un facteur multiplicatif près. Elle s'appelle la **représentation irréductible** de $F$.

(ii) Si $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$, alors les **zéros** de $F$ sont les zéros de $P$, les **pôles** de $F$ sont les zéros de $Q$. La multiplicité d'un zéro ou d'un pôle de $F$ est par définition sa multiplicité en tant que zéro de $P$ ou de $Q$.

## c) Décomposition en éléments simples

(i) Si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on appelle **partie entière** de $F$ le quotient dans la division euclidienne de $P$ par $Q$.

(ii) **Théorème** : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle. Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$, des uniques polynômes irréductibles $H_1, \ldots, H_p$ des uniques polynômes $J_{i,k}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq k \leq n_i$ avec $\deg(J_{i,k}) < \deg(H_i)$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left( \frac{J_{i,1}}{H_i} + \frac{J_{i,2}}{H_i^2} + \cdots + \frac{J_{i,n_i}}{H_i^{n_i}} \right).$$

De plus, $E$ est la partie entière de $F$, et si $\frac{P}{Q}$ est une représentation irréductible de $F$, alors on a

$$Q = \lambda H_1^{n_1} \cdots H_p^{n_p}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

(iii) **Décomposition en éléments simples sur** $\mathbb{C}$ : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ non nulle écrite sous forme irréductible et soit $E$ la partie entière de la fraction rationnelle. Si $Q$ se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme $\prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\mu_k}$, alors il existe une unique famille $(\lambda_{k,j})$ de complexes telle que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right).$$

(iv) **Décomposition en éléments simples sur** $\mathbb{R}$ : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ non nulle écrite sous forme irréductible et soit $E$ la partie entière de la fraction rationnelle. Si $Q$ se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme $\prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{s} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{\nu_k}$ avec $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$, alors il existe trois uniques familles $(\lambda_{k,j}), (\theta_{k,j})$ et $(\tau_{k,j})$ de réels telle que

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right) + \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\theta_{k,j} X + \tau_{k,j}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^j} \right).$$