

# Introduction to the Longstaff-Schwartz Algorithm

Mohammed-Yassine Barnicha  
Supervised by: Dr. Sergio Pulido

May 24, 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cadre de Modélisation</b>	<b>3</b>
2.1	Équation Différentielle Stochastique (EDS)	3
2.2	Discrétisation de l'équation	3
2.3	Simulations de Prix d'Options	4
<b>3</b>	<b>Méthode Longstaff-Schwartz</b>	<b>6</b>
3.1	Formulation du Problème	6
3.2	Simplification de la Formulation	7
3.3	Règle d'Arrêt Optimal	7
3.4	Valeur de Continuation et Approximations	7
3.5	Algorithme	8
<b>4</b>	<b>Régression des Moindres Carrés</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Choix Techniques dans le Modèle de Pricing</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Prix des Options et Intervalles de Confiance pour un Amer- ican Put</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Simulation avec Saut de Poisson</b>	<b>12</b>
7.1	Comparaison des Prix des Options avec et sans Saut	12
7.2	Interprétation des Résultats	13
<b>8</b>	<b>Améliorations Potentielles</b>	<b>13</b>
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>14</b>

# 1 Introduction

L'algorithme de Longstaff-Schwartz est une méthode pour évaluer les options américaines. Il utilise la méthode Least Squares Monte Carlo (LSM) pour estimer la valeur de continuation de l'option. Développé par Francis Longstaff et Eduardo Schwartz en 2001.

## 2 Cadre de Modélisation

Nous utilisons le modèle de Black-Scholes pour notre analyse. Le modèle de Black-Scholes-Merton suppose que le logarithme des prix de l'actif suit un mouvement brownien géométrique. Ce modèle est largement utilisé en finance pour évaluer le prix des options et autres dérivés financiers.

### 2.1 Équation Différentielle Stochastique (EDS)

L'évolution du prix de l'actif  $S_t$  est décrite par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

où :

- $S_t$  est le prix de l'actif à l'instant  $t$ ,
- $r$  est le taux d'intérêt sans risque, supposé constant,
- $\sigma$  est la volatilité de l'actif, supposée constante,
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

Cette équation modélise la dynamique du prix de l'actif en tenant compte à la fois de la dérive (premier terme) et de la volatilité (deuxième terme).

### 2.2 Discrétisation de l'équation

Pour une période de temps  $[0, T]$  divisée en  $n$  intervalles, nous pouvons approcher la solution de l'EDS en utilisant la méthode de discrétisation suivante :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{i+1} \right) \quad (2)$$

où :

- $\Delta t = \frac{T}{n}$  est la taille de chaque intervalle de temps,

- $Z_{i+1}$  est un incrément du mouvement brownien, normalement distribué avec une moyenne de 0 et une variance de 1.

Cette discrétisation permet de simuler des trajectoires du prix de l'actif  $S_t$  sur la période  $[0, T]$  en utilisant des méthodes numériques. Elle est couramment utilisée dans les simulations de Monte Carlo pour évaluer des options et d'autres dérivés financiers.

## 2.3 Simulations de Prix d'Options

Les simulations de Monte Carlo peuvent être utilisées pour estimer les prix des options en simulant de nombreux chemins possibles pour le prix de l'actif sous-jacent. En particulier, pour les options de vente (put), nous devons comparer le prix actuel de l'actif avec le prix d'exercice pour déterminer s'il est avantageux d'exercer l'option.

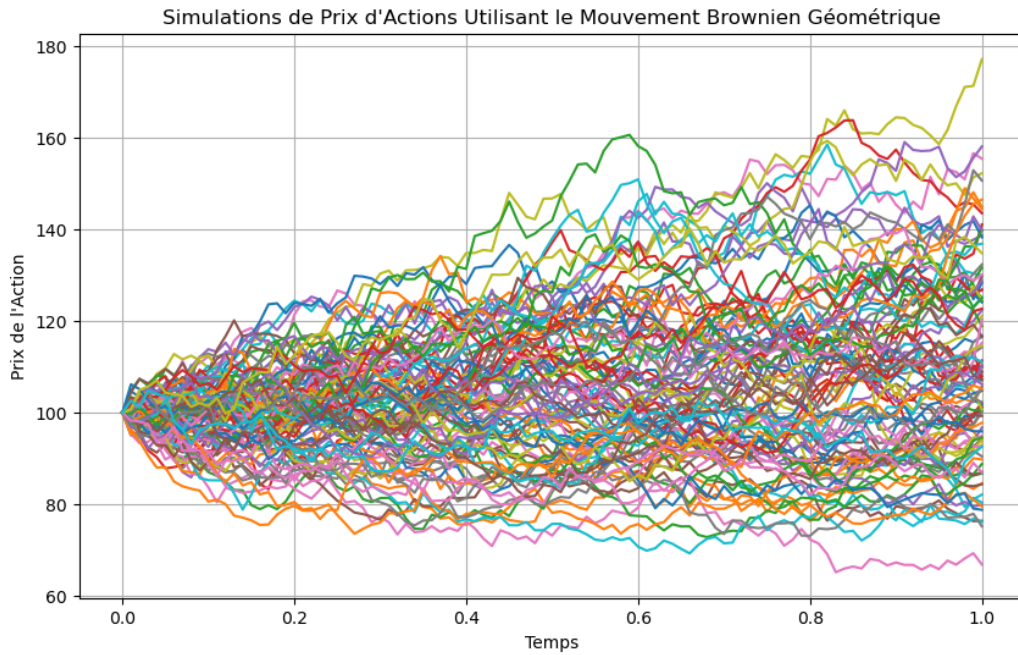


Figure 1: Simulations des prix d'actions utilisant le mouvement brownien géométrique.

- **In-the-Money (ITM):**

- Lorsque le prix actuel de l'actif sous-jacent est inférieur au prix d'exercice ( $S < K$ ).
- Les options de vente ITM ont une valeur intrinsèque et génèreraient un flux de trésorerie positif si elles étaient exercées immédiatement.

**Valeur Intrinsèque** d'une option de vente est  $\max(K - S, 0)$ . **Valeur Temporelle** est la valeur additionnelle d'une option due au temps restant avant l'expiration.

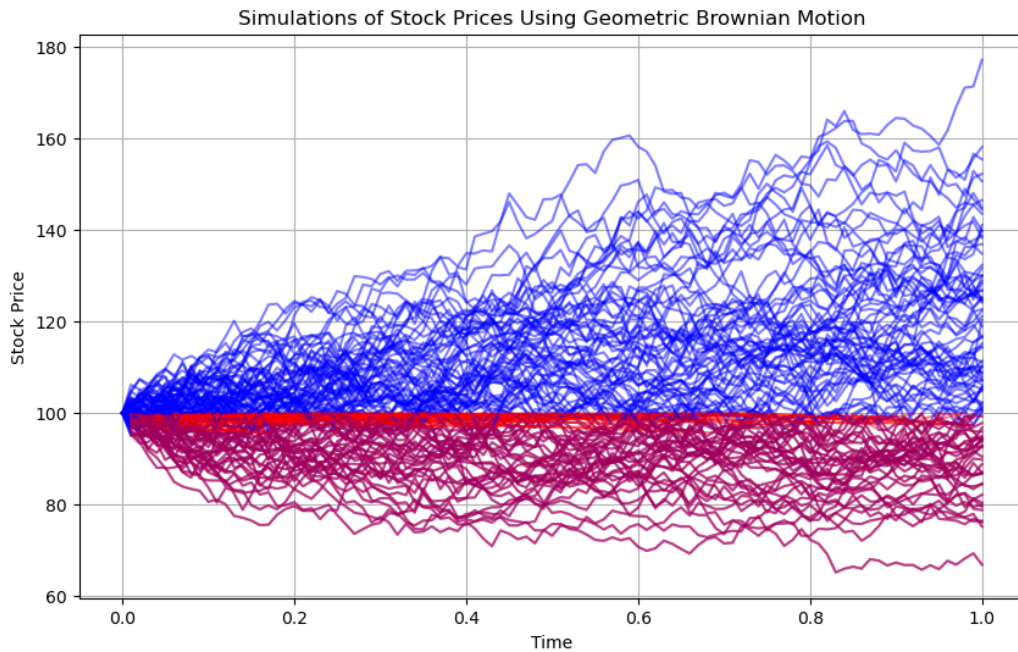


Figure 2: Les chemins bleus indiquent les scénarios ITM pour les options de vente où il serait rentable d'exercer l'option, et les chemins rouges indiquent les scénarios OTM où il ne serait pas rentable.

## 3 Méthode Longstaff-Schwartz

### 3.1 Formulation du Problème

Selon la description du livre de Glasserman, le problème Bermudan (similaire aux options américaines mais avec des dates d'exercice discrètes) peut être formulé comme suit :

$$\tilde{V}_m(x) = \tilde{h}_m(x) \quad (3)$$

$$\tilde{V}_{i-1}(x) = \max \left( \tilde{h}_{i-1}(x), E \left[ D_{i-1,i} \tilde{V}_i(X_i) \mid X_{i-1} = x \right] \right) \quad (4)$$

où :

- $X_i$  est la valeur de l'actif sous-jacent au moment de l'exercice  $t_i$ ,
- $\tilde{V}_i(x)$  est la valeur de l'option au moment  $t_i$  en supposant qu'elle n'a pas été exercée,
- $\tilde{h}_i(x)$  est la valeur d'exercice au moment  $t_i$ ,
- $D_{i-1,i}$  est le facteur d'actualisation pour l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ .

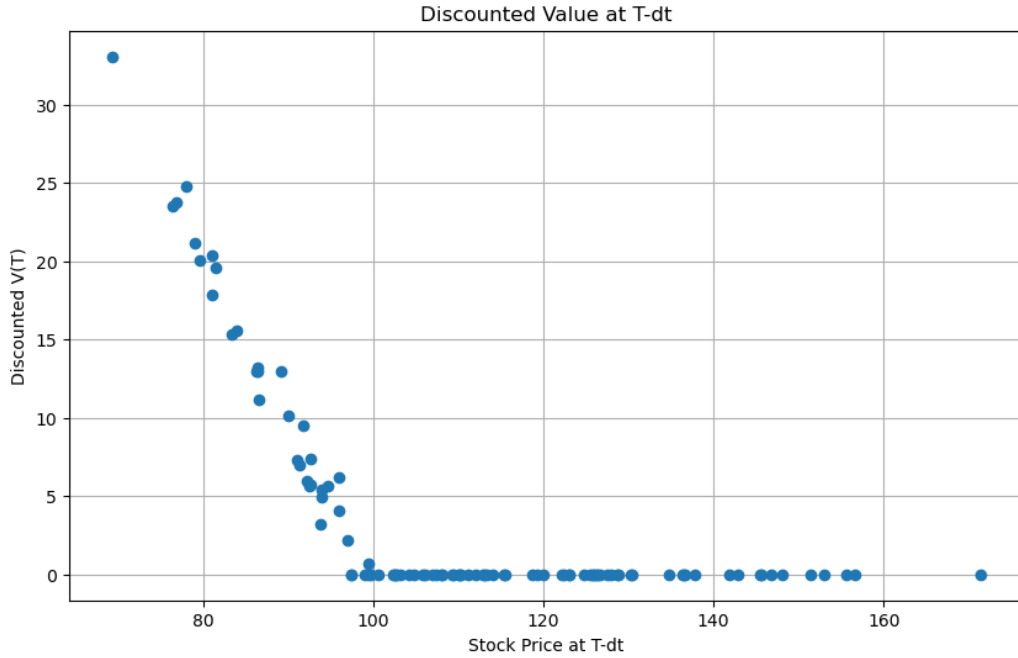


Figure 3: Valeur actualisée  $V(T)$  de l'option à  $T$  / le prix de l'action à  $T$ -dt.

### 3.2 Simplification de la Formulation

En définissant :

$$h_i(x) = D_{0,i} \tilde{h}_i(x) \quad (5)$$

$$V_i(x) = D_{0,i} \tilde{V}_i(x) \quad (6)$$

où  $D_{0,i} = D_{0,1} D_{1,2} \dots D_{i-1,i}$ , nous pouvons simplifier la formulation à :

$$V_m(x) = h_m(x) \quad (7)$$

$$V_{i-1}(x) = \max (h_{i-1}(x), E [V_i(X_i) \mid X_{i-1} = x]) \quad (8)$$

### 3.3 Règle d'Arrêt Optimal

Une autre perspective consiste à considérer les règles d'arrêt  $\tau$ , qui représentent les moments où l'option est exercée. Pour une règle d'arrêt donnée, la valeur initiale de l'option est :

$$V_0(X_0) = E [h_\tau(X_\tau)] \quad (9)$$

La meilleure valeur possible est :

$$V_0(X_0) = \sup_{\tau} E [h_\tau(X_\tau)] \quad (10)$$

ce qui donne un problème d'optimisation.

### 3.4 Valeur de Continuation et Approximations

La valeur de continuation est :

$$C_i(x) = E [V_{i+1}(X_{i+1}) \mid X_i = x] \quad (11)$$

La règle d'arrêt optimale est alors :

$$\tau = \min \{i : h_i(X_i) > C_i(X_i)\} \quad (12)$$

L'approximation de la valeur de continuation conduit à une règle d'arrêt approximative.

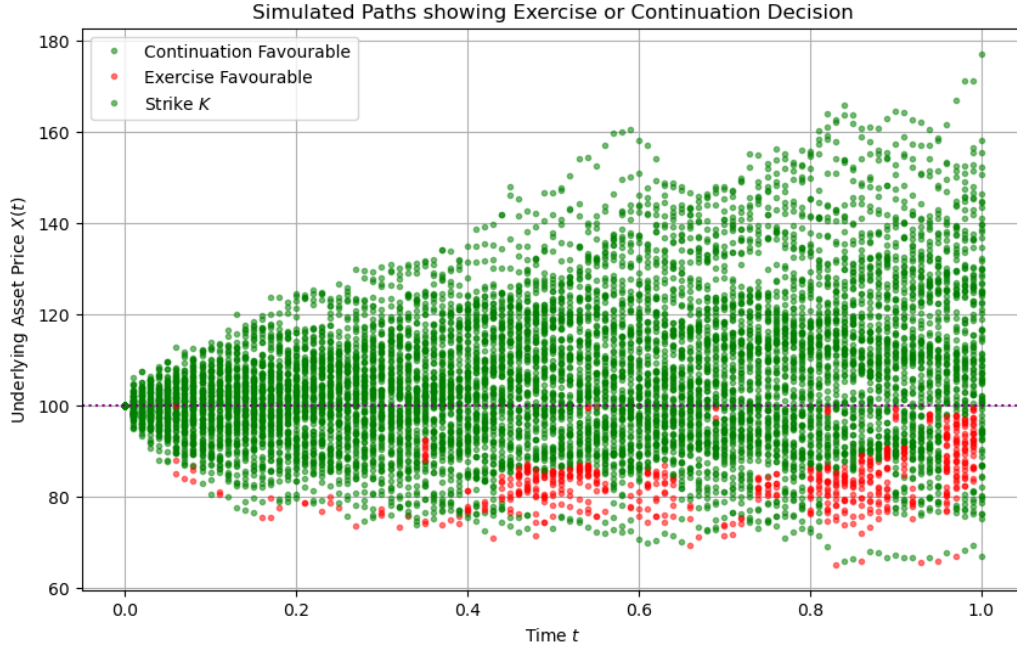


Figure 4: Les points verts indiquent les moments où il est favorable de continuer, tandis que les points rouges indiquent les moments où il est favorable d'exercer

### 3.5 Algorithmme

À l'échéance, la valeur de l'option est :

$$V_m(X_m) = h_m(X_m) \quad (13)$$

À la date d'exercice précédente, la valeur de continuation est :

$$C_{m-1}(x) = E[V_m(X_m) | X_{m-1} = x] \quad (14)$$

Ceci est approximé en utilisant un ensemble de  $R$  fonctions de base comme suit :

$$\hat{C}_{m-1}(x) = \sum_{r=1}^R \beta_r \psi_r(x) \quad (15)$$

Une fois l'approximation de la valeur de continuation obtenue,

Si  $\hat{C}(X_{m-1}) < h_{m-1}(X_{m-1})$ , alors exercer l'option et fixer  $V_{m-1} = h_{m-1}(X_{m-1})$  (16)

Sinon, fixer  $V_{m-1} = V_m$  (17)



## 4 Régression des Moindres Carrés

Comme  $L^2$  est un espace de Hilbert, il possède une base orthonormée dénombrable et l'espérance conditionnelle peut être représentée comme une fonction linéaire des éléments de la base.

Un choix possible de fonctions de base est l'ensemble des polynômes de Laguerre (pondérés) :

$$E[\text{Payoff}|S_t] \approx a_0 L_0(S_t) + a_1 L_1(S_t) + a_2 L_2(S_t) + \dots \quad (18)$$

où les coefficients  $a_i$  sont des constantes et  $L_i(S_t)$  sont les polynômes de Laguerre. L'estimation des coefficients de régression est obtenue en minimisant la somme des carrés des écarts sur les trajectoires **IN THE MONEY !!!** donc pour  $S_{t_i} < K$ :

$$\operatorname{argmin}_{a_i} \sum_{j=1}^N \left( e^{-r(dt)} \text{Payoff}_{t_{j+1}} - \sum_{i=0}^k a_i L_i(S_{t_j}) \right)^2 \quad (19)$$

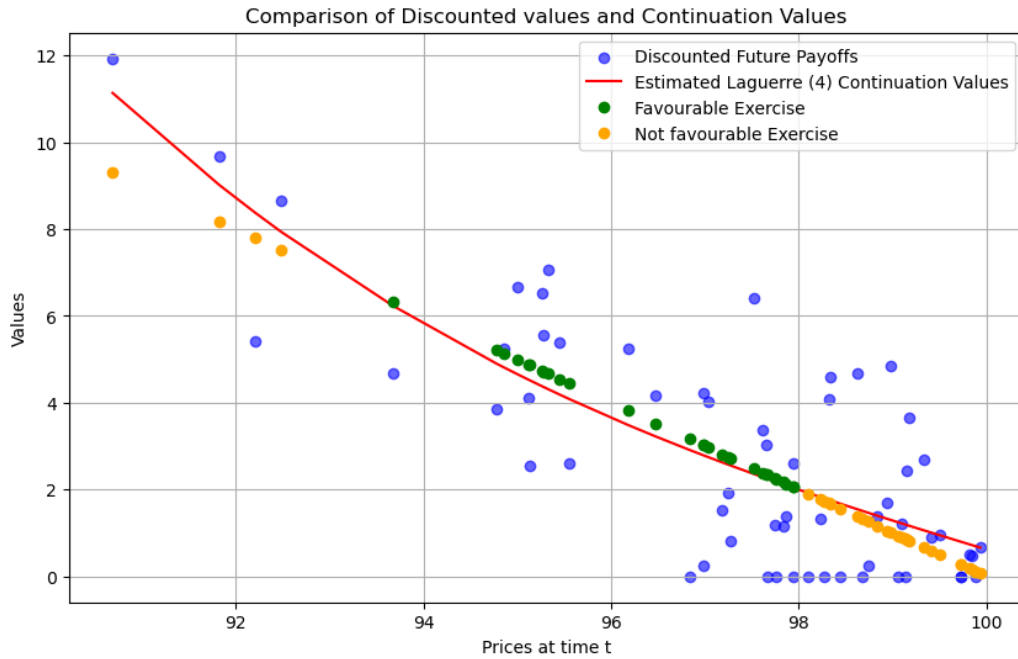


Figure 5: la courbe rouge représente les valeurs de continuation estimées à l'aide de polynômes de Laguerre (4), les points verts indiquent les exercices favorables, et les points orange indiquent les exercices non favorables.

## 5 Choix Techniques dans le Modèle de Pricing

Pour implémenter le modèle de pricing des options américaines en utilisant la méthode Longstaff-Schwartz, plusieurs choix techniques sont cruciaux pour garantir l'efficacité et la précision des calculs. Voici quelques-uns des choix techniques utilisés dans ce modèle :

- **Génération de Nombres Aléatoires** : La génération de nombres aléatoires est essentielle pour la simulation des trajectoires de prix des actifs. Nous utilisons la fonction `np.random.normal` de la bibliothèque NumPy pour générer des échantillons à partir d'une distribution normale. Cette fonction permet de créer des incréments du mouvement brownien utilisés dans le modèle de Black-Scholes.

```
Z = np.random.normal(0, 1, size=(num_simulations, num_time_steps))
```

- **Régression Linéaire** : La régression linéaire est utilisée pour estimer la valeur de continuation à chaque étape temporelle en utilisant les pay-offs futurs actualisés des chemins ITM. La fonction `np.linalg.lstsq` de NumPy permet de résoudre les moindres carrés linéaires de manière efficace.

```
beta, _, _, _ = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)
```

- **Calculs Vectorisés** : L'utilisation des opérations vectorielles permet d'accélérer les calculs en exploitant pleinement les capacités des processeurs modernes. Les opérations vectorisées réduisent le besoin de boucles explicites, rendant le code plus concis et plus rapide.

```
S[:, i+1] = S[:, i] * np.exp((r - 0.5 * sigma**2) * dt + sigma * np.sqrt(dt) * Z[:, i])
```

## 6 Prix des Options et Intervalles de Confiance pour un American Put

S	$\sigma$	T	Prix de l'option américaine simulé	Intervalle de Confiance
36	0.20	1	4.472	[4.470, 4.481]
36	0.20	2	4.821	[4.821, 4.835]
36	0.40	1	7.091	[7.091, 7.114]
36	0.40	2	8.488	[8.467, 8.495]
38	0.20	1	3.244	[3.240, 3.263]
38	0.20	2	3.735	[3.730, 3.744]
38	0.40	1	6.139	[6.133, 6.156]
38	0.40	2	7.669	[7.633, 7.670]
40	0.20	1	2.313	[2.308, 2.319]
40	0.20	2	2.879	[2.866, 2.879]
40	0.40	1	5.308	[5.298, 5.320]
40	0.40	2	6.921	[6.880, 6.930]
42	0.20	1	1.617	[1.607, 1.622]
42	0.20	2	2.206	[2.190, 2.211]
42	0.40	1	4.588	[4.568, 4.592]
42	0.40	2	6.243	[6.196, 6.245]
44	0.20	1	1.118	[1.099, 1.121]
44	0.20	2	1.675	[1.673, 1.683]
44	0.40	1	3.957	[3.930, 3.960]
44	0.40	2	5.622	[5.602, 5.627]

Table 1: Prix des options et intervalles de confiance arrondis à trois décimales, pour 100 000 trajectoires simulées,  $r=0.06$ ,  $K=40$ , l'option exercable 50 fois par an.

## 7 Simulation avec Saut de Poisson

Dans le cadre des simulations de Monte Carlo pour le pricing des options, l'introduction de sauts dans le modèle peut capturer des mouvements brusques du marché. Le modèle de saut de Poisson ajoute un terme de saut à l'équation du mouvement brownien géométrique.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t(e^\theta - 1)dN_t \quad (20)$$

où  $N_t$  est un processus de Poisson avec intensité  $\lambda$ , représentant le nombre de sauts survenus jusqu'à l'instant  $t$ . Les paramètres utilisés sont les suivants :

- $K = 100$
- $S_0 = 90$
- $\mu = 0.06$
- $\sigma = 0.20$
- $T = 1.0$
- $n = 26$
- $num\_trajectories = 1000000$
- $\lambda = 0.05$
- $\theta = 0.20$

Le prix de l'option américaine par le modèle LSM avec saut est de 11.139046085299542, avec un intervalle de confiance à 0.95 de (11.124630597721083, 11.153461572878001).

### 7.1 Comparaison des Prix des Options avec et sans Saut

Pour comparer l'impact des sauts sur les prix des options, nous considérons également un modèle sans saut (c'est-à-dire  $\lambda = 0$ ). Les paramètres pour cette simulation sont :

- $\lambda = 0.0$
- $\theta = 0.30$

Le prix de l'option américaine par le modèle LSM sans saut est de 11.17996441443981, avec un intervalle de confiance à 0.95 de (11.13404448438418, 11.22588434449544).

## 7.2 Interprétation des Résultats

Les résultats montrent que le prix de l'option est légèrement plus élevé dans le modèle sans saut par rapport au modèle avec saut. Cela s'explique par le fait que l'ajout de sauts introduit un risque supplémentaire, ce qui tend à réduire la valeur de l'option.

- **Avec saut** ( $\lambda = 0.05$ ) :
  - Prix de l'option : 11.139046085299542
- **Sans saut** ( $\lambda = 0$ ) :
  - Prix de l'option : 11.17996441443981

## 8 Améliorations Potentielles

- Exploration de Différents Seeds : Essayer différents seeds pour la génération de nombres aléatoires.
- Optimisation du Temps de Calcul : Utiliser le calcul parallèle avec plusieurs CPU et exploiter la puissance des GPU.
- Modèle de Régression Avancé : Utiliser des modèles de régression plus avancés (e.g., Random Forest, Neural Networks).
- Options Asiatiques et Bermudiennes : Inclusion du paramètre  $A_0$  et sa modélisation.

## 9 Conclusion

L'algorithme de Longstaff-Schwartz offre une méthode pratique et efficace pour évaluer les options américaines, en combinant la simulation de Monte Carlo et la régression par moindres carrés. Cette approche est particulièrement utile pour les modèles financiers complexes où les solutions analytiques ne sont pas disponibles.

Dans le cadre de cette étude, nous avons également exploré l'impact des sauts de Poisson sur la valorisation des options américaines. Les simulations montrent que les prix des options sont légèrement plus bas en présence de sauts, en raison du risque additionnel introduit par ces sauts. Cela met en évidence l'importance de prendre en compte les mouvements brusques du marché dans les modèles de pricing des options pour obtenir des évaluations plus précises.

L'introduction des techniques de génération de nombres aléatoires, de régression linéaire, et de calculs vectorisés a permis de rendre les simulations plus efficaces et plus rapides.

En conclusion, la méthode Longstaff-Schwartz, enrichie par les sauts de Poisson, offre une grande flexibilité et précision pour la valorisation des options américaines, ce qui est crucial pour les praticiens de la finance cherchant à optimiser leurs stratégies de couverture et d'investissement.

## References

- [1] Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1):113-147.
- [2] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer Science & Business Media.