TD3 - Espaces de suites ℓ^p

(fin TD2 - Cauchy - Lipschitz)

Exo 2.5.

- $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \quad (*)$

$x \equiv 0$: sol., la solution de condition initiale $x_0 = 0$, ie $x(t_0) = 0$, $\forall t_0$; sol. globale (ie définie sur $\mathbb{R}$) donc maximale.

Supposons, $\forall t$, $x(t) \neq 0$;

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1 \underset{x(t) > 0}{\Longrightarrow} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1$$

($\simeq$ idem si $x(t) < 0$...)

$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{\sqrt{x(s)}} = t$$

$t_0 = 0$

$$\Longrightarrow \left. 2\sqrt{x(s)} \right]_0^t = t$$

$$\underset{x(0)=0}{\Longrightarrow} 2\sqrt{x(t)} = t$$

$$\Longrightarrow x(t) = t^2/4$$: vérifie en effet $(*)$

De même, pour $t<0$, on vérifie que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ est solution ; la fonction ainsi construite est de classe $\mathcal{C}^1$:
- $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- dérivable en $t=0$ (et dérivée est continue en ce pt)

$\Longrightarrow$ on a donc deux sols. maximales de même cond. initiale $x(0) = 0$:

$$x(\underset{\substack{\uparrow\\ t_0}}{0}) = \underset{\substack{\uparrow\\ x_0}}{0}$$

l'hypothèse de locale lip. en x de f est donc nécessairement fausse.

<u>NB</u>. $x(t) = \dfrac{t.|t|}{4}$, $t\in\mathbb{R}$.

<u>Exo 1</u>. $1\leq p<\infty$:

$$(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \ell^p \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|}_{\geq 0}{}^p\right) < \infty$$

On pose $\|(x_k)_k\|_p := \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}$ $(<\infty)$.

Si $p=\infty$: $(x_k)_k \in \ell^\infty \Longleftrightarrow \sup_k |x_k| < \infty$

<u>NB</u>. $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, $k\geq 0$, $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{\nearrow} 1$

$\Longrightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty$, $\|(x_k)\|_\infty = 1$.

- <u>ℓ^∞</u> : i) définie positivité : $\sup_k |x_k| = 0$

$\Longrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})$: $x_k = 0$ (sinon $\exists k$ tq $|x_k|>0\ldots$)

(et positivité évidente)

ii) homogénéité pos. :

$$\sup_k |\lambda . x_k| = \sup_k |\lambda| . |x_k|$$
$$= |\lambda| . \sup_k |x_k| = |\lambda| . \|(x_k)_k\|_\infty$$

iii) inégalité triangulaire :

Soient $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$;

$$\sup_k |x_k + y_k| < \infty \ ?$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; $|x_k + y_k| \leq \underline{|x_k|} + \underline{|y_k|}$

$$\leq \underbrace{\|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty}_{\text{majorant (indép. } k)}$$

$\Rightarrow \sup_k |x_k + y_k| < \infty$

et $\underbrace{\sup_k |x_k + y_k|}_{\|(x_k)_k + (y_k)_k\|_\infty} \leq \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$.

- <u>ℓ^p, $p \in [1, \infty[$</u> : $\ell^p = L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec

$X = \mathbb{N}$
$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$\mu = \mu_d$: $\mu_d(A) = \text{card } A$, $A \subset \mathbb{N}$
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \longmapsto f(k) = f_k$, $f = (f_k)_k$

$$\int_{\mathbb{N}} f(k) \, d\mu_d(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \iff \int_{\mathbb{N}} |x(k)|^q \, \mu_d(k) < \infty$$

$$\iff x(\cdot) \in L^p$$

On sait que (cf. Mi 1) $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un ev (cf. Minkowsky, cf. Hölder...)

et on sait que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un evn.

<u>Exo 2.</u> Rappel : si $\boxed{\mu(X) < \infty}$, on a

$$1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(X, \mathcal{B}, \mu) \supsetneq L^q(X, \mathcal{B}, \mu);$$

ici, $\mu_d(\mathbb{N}) = \text{card}\, \mathbb{N} = \infty$!

- <u>$1 \leq p < \infty$</u> : soit $(x_k)_k \in \ell^p$, mq $(x_k)_k \in \ell^\infty$;

$\sum_k |x_k|^p < \infty$, ie que $\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}_{S_K}\Big)_K$ (= suite de somme partielles) cv dans $\mathbb{R}$ (ie vers une valeur finie : $\lim_{K \to \infty} \sum_{k=0}^{K} |x_k|^p = \sum_{k=0}^{\infty}(\ldots) < \infty$)

$\implies \underbrace{S_{K+1} - S_K}$ devient arbitrairement petit pour K grand (critère de C.)

$\xrightarrow[K \to \infty]{} 0$

Or, $S_{K+1} - S_K = |x_{K+1}|^p \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$

$$\implies (x_K)_K \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow (x_k)_k$ est bornée ; en effet : pour $\varepsilon = 1$,

$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geq K) : |x_k - 0| = |x_k| \leq \varepsilon = 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| \leq \max\{1, |x_0|, \dots, |x_{K-1}|\}$
$< \infty$

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty$.

Et l'inclusion est stricte, $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $p < \infty$,
cf. : $(x_k) = (1)_k \in \ell^\infty$
$\notin \ell^p \ (p < \infty) : \sum_k |1|^p = \infty$.

. $\underline{1 \leq p < q < \infty}$: soit $(x_k)_k \in \ell^p$; mq
$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q < \infty.$$

On a $\sum_k |x_k|^p < \infty \Rightarrow (|x_k|^p)_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

en particulier, $(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geq K) : |x_k|^p \leq 1$
ie $|x_k| \leq 1$

$\Rightarrow (\forall k \geq K) : |x_k|^p \geq |x_k|^q$, cf. $q > p$

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^q < \infty$ (cf. domination — sauf pour un nombre fini de termes)

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^q$.

De plus, $q/p > 1$ $\Rightarrow \sum_k \frac{1}{(k+1)^{q/p}} < \infty$ (Riemann)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q$, et $\sum_k \frac{1}{\left((k+1)^{\frac{1}{p}}\right)^p} = \sum_k \frac{1}{k+1} = \infty : \notin \ell^p.$

Donc $\ell^p \subsetneq \ell^q$, $1 \leq p < q < \infty$.

<u>Exo 3.</u> $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$

$\Longrightarrow (\ell^p, \|.\|_p)$ Banach

(cf. Th. Riesz-Fischer)

<u>Remarque :</u> $L^p([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu_L = dx)$ est le "complété" de

$(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_p)$, $p < \infty$.

• <u>$p = \infty$:</u> soit $(X_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$; on note

$$X_m = (x_{m,k})_k, \quad \sup_k |x_{m,k}| < \infty ;$$

mq $(X_n)_n$ de Cauchy dans ℓ^∞

$\Longrightarrow (X_n)_n$ cv dans ℓ^∞ ;

ie mq $\exists \bar{X} \in \ell^\infty$ tq $\|X_n - \bar{X}\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$;

à construire !

① Construction du candidat à être limite :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\forall k \geq 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow (\forall k \geq 0) : (x_{n,k})_n$ est de Cauchy ;

Chaque ($\forall k$) suite $(x_{m,k})_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(\mathbb{R}, |.|)$ complet (par construction !), donc ces suites CV : $(\forall k \in \mathbb{N})(\exists \bar{x}_k) : (x_{m,k})_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{x}_k$.

On construit ainsi $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k$.

② Appartenance du candidat $\bar{X}$ à ℓ^∞ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$x_{p,k} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{x}_k$

$$\underset{p\to\infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$: en particulier,

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall q \geq N_1)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{N_1,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow \bar{X} - X_{N_1} = (\bar{x}_k - x_{N_1,k})_k \in \ell^\infty$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \underbrace{(\bar{X} - X_{N_1})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \in \ell^\infty \text{ (e.v.)}$$

③ CV :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N) \underbrace{(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon}_{\underbrace{\sup_k |\bar{x}_k - x_{q,k}|}_{\|\bar{X} - X_q\|_\infty} \leq \varepsilon} . \square$$

Mai 2

Td 3 – Espaces ℓ^p (fin)

Exo 3. Complétude de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$:

démo pour $p=1$ (idem si $1 < p < \infty$) :

soit $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 ; on note

$$X_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \| X_p - X_q \|_1 \leq \varepsilon$$

① Construction du candidat à être limite :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

encore trop faible

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$$

faible

$(x_{n,k})_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc CV dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet (transfert) :

On construit ainsi $\overline{x}_k := \lim_{n \to \infty} x_{n,k}$.

On note $\overline{X} := (\overline{x}_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\overline{X}$ à ℓ^1 :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall K \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$$\overset{q \to \infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall K \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{K} \overbrace{|x_{p,k} - \overline{x}_k|}^{\geq 0} \leq \varepsilon$$

$$\overline{x}_k = \lim_{q \to \infty} x_{q,k}$$

$$\overset{K \to \infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon ;$$

en particulier, pour $\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{N_1,k} - \overline{x}_k| \leq 1$$

$$p = N_1$$

$$\Longrightarrow X_{N_1} - \overline{X} = (x_{N_1,k} - \overline{x}_k)_k \in \ell^1$$

$$\Longrightarrow \overline{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \overline{X})}_{\in \ell^1} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^1} \in \ell^1 \text{ (ev)}$$

③ Convergence vers $\overline{X}$ dans ℓ^1 :

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p\geq N) : \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left|x_{p,k}-\overline{x}_k\right|}_{\|X_p-\overline{X}\|_1} \leq \varepsilon$$

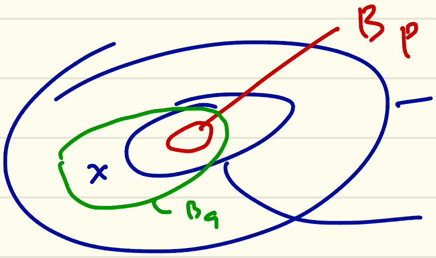
$$\Rightarrow (X_p)_p \xrightarrow[p\to\infty]{\|.\|_1} \overline{X}.$$

Ex 2. $1\leq p<q\leq\infty \Longrightarrow \ell^p \subsetneq \ell^q$, et

l'injection (canonique) est continue :

$$j : \begin{array}{ccc} \ell^p & \longrightarrow & \ell^q \\ X=(x_k)_k & \longmapsto & X\in\ell^p\subset\ell^q \end{array}$$

ie $j = id_{|\ell^p}$, $id : \begin{array}{ccc} \ell^q & \longrightarrow & \ell^q \\ X & \longmapsto & X \end{array}$



— ℓ^q

ℓ^p : $\underbrace{\|.\|_p, \ \|.\|_q}_{\text{2 choix possibles}}$

Clairement j linéaire, $j\in L(\ell^p,\ell^q)$;

mq j est aussi continue, $j\in\mathcal{L}(\ell^p,\ell^q)$, ie que :

$$(\exists C\geq 0)(\forall X\in\ell^p) : \underbrace{\|\underbrace{j(X)}_{X}\|_q \leq C.\|X\|_p}_{\|.\|_p \text{ plus fine que } \|.\|_q}$$

$\uparrow$

Pour cela, considérons $X \in \ell^p$, $X \in B_f^{\|.\|_p}(0,1) =: B_p$
(avec $1 \leq p \leq q < \infty$);

on a $\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}}_{\|X\|_p} \leq 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \leq 1^p = 1 \leftarrow$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |x_k|^p \leq 1$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |x_k|^q \leq |x_k|^p \leq 1, \text{ car } q \geq p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q \leq 1$$

$$\Rightarrow X \in B_q := B_f^{\|.\|_q}(0,1)$$

Ie, on a mq : $B_p \subset B_q$.

Soit maintenant $X \in \ell^p$, et supposons $X \neq 0$
(ie $X \neq (0,0,\dots)$, la suite nulle);

$$\left\| \frac{X}{\|X\|_p} \right\|_p = 1 \Rightarrow \frac{X}{\|X\|_p} \in B_p \subset B_q$$

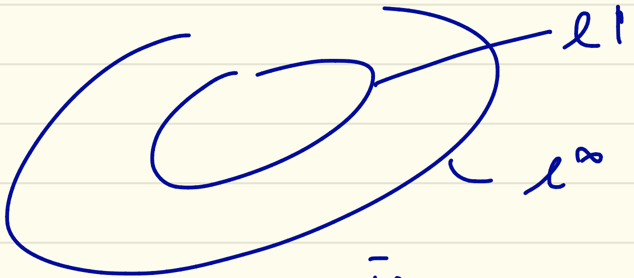
$$\Rightarrow \left\| \frac{X}{\|X\|_p} \right\|_q \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|X\|_p} \cdot \|X\|_q \leq 1$$

$$\Rightarrow \|X\|_q \leq 1 . \|X\|_p, \forall X \neq 0 :$$

cette relation est trivialement vraie quand $x = 0 = (0, 0, \ldots)$, d'où la majoration $\forall x \in \ell^p$, et la continuité.

· <u>cas $1 \leq p < q = \infty$:</u> $j : \ell^p \to \ell^\infty$, $x \mapsto x$



Mq $(\exists C \geq 0)(\forall x \in \ell^p)$: $\| \underbrace{j(x)}_{x} \|_\infty \leq C . \|x\|_p$

ie mq :

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in \ell^p) : \underbrace{\|x\|_\infty \leq c . \|x\|_p}_{\text{“} \|.\|_p \geq \|.\|_\infty \text{”}}$$

Montrons comme précédemment $\|.\|_p$ plus fine que $\|.\|_\infty$ (cas $q < \infty$) que :

$$B_p \subset B_\infty$$

En effet, on aura alors que : $\forall x \in \ell^p$, $x \neq 0$,

$$\frac{x}{\|x\|_p} \in B_p \subset B_\infty \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_\infty \leq 1$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \underset{C}{\underset{\uparrow}{1}} . \|x\|_p$$

(et l'inégalité est trivialement vraie si $x = 0$).

Or, soit $x \in B_p$, $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \leq 1^p = 1$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k|^p \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = (x_k)_k \in \ell^\infty \\ \text{et } \|x\|_\infty \leq 1 : \\ x \in B_\infty . \end{cases}$$

Révisions. Examen CC no. 1 2018-2019

<u>Exo 4.</u> 4.1 et 4.2 : évidents cf. corrigé ;

4.3.
$$X_0 = (0, 0, \dots)$$
$$X_1 = (1, 0, \dots)$$
$$X_2 = (1, 1, 0, \dots)$$
$$\vdots$$
$$X_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$(X_n)_n \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ (suite de suites)

Mq $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$, ie mq $(\forall n \in \mathbb{N})$: $X_n \in \ell^1$;

on doit vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(X_n = (x_{n,k})_k \right)$

$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n,k}| < \infty$: évident car tous les $x_{n,k}$ sont nuls (sauf un nombre fini — n — d'entre eux).

4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\|X_{n+1} - X_n\|_1 = \|(\overbrace{1, \dots, 1, 1, 1}^{n+1 \text{ fois}}, 0, \text{——})$$
$$- (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \text{——})\|_1$$
$$= \|(0, \dots, 0, 1, 0, \text{——})\|_1$$
$$= 1 \not\longrightarrow 0,\ n \to \infty :$$

$(X_n)_n$ n'est pas de Cauchy ; a fortiori,
$(X_n)_n$ pas CV.

Exo 3. $\dot{x}(t) = x(t) - 1$

3.1. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x) \longmapsto x - 1$

$f(t,x) := x - 1$
$\Rightarrow f(t, \underline{\underline{x(t)}}) = x(t) - 1$

3.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz
car f est de classe $\mathcal{C}^1 \Longrightarrow f$ continue
et loc. lip. en x (par les AF) :

$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|$ (localement...)
cf. Th 2
$\Longrightarrow \exists!$ sol. maximale si on fixe une condition initiale.

NB. heuristique : $\dot{x}(t) = x(t) - 1$

$\Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{x(t)-1} = 1$ $\neq 0$?

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{x(s)-1} = \underline{\int_0^t 1.\,ds}_{t}$

... ln(...)

3.3. $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (0, 0)

Clairement $x(t) = 1$, $\underline{\underline{\forall t \in \mathbb{R}}}$, est solution ;

cette solution ($I = \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) est
$t \longmapsto 1$

définie sur tout $\mathbb{R}$ (sol. "globale"), donc maximale : par unicité, c'est LA solution maximale cherchée.

3.4. Comme $x(0) = 2 \neq 1$, la solution maximale dont le graphe ne coupe pas celui de la solution $x(0) = 1$ (équilibre "infranchissable"), reste du côté $x - 1 > 0$