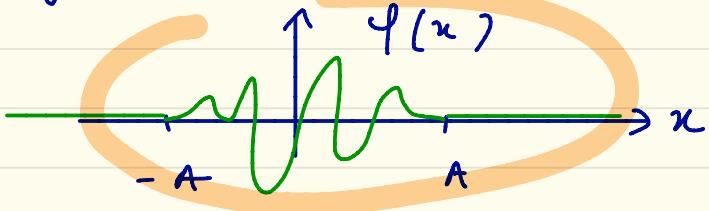


Ch. IV - Formulation faible de problèmes aux limites.

Motivation : considérons le problème suivant : trouver $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tq :

$$(1) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) : x \cdot y'(x) = 0.$$

Si $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une telle fonction, soit φ une fonction C^∞ nulle en dehors du compact $[-A, A]$:



De telles fonctions existent et forment l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, cf. § 1. ci-après.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } (1) &\Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} x y'(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-A}^A y'(x) (x \varphi(x)) dx \\ &= \underbrace{[y(x) \cdot x \varphi(x)]}_{0 \text{ car } \varphi(0) = 0} \Big|_{-A}^A - \int_{-A}^A y(x) (\varphi + x \varphi') dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tq } \varphi = 0 \text{ hors de } [-A, A]) :$

$$\int_{\mathbb{R}} y(x) \cdot (\varphi(x) + x \varphi'(x)) dx = 0 \quad (2)$$

Laurent Schwartz



Laurent Schwartz avant sa mort.

Fonction

Président
Comité Maurice-Audin

1960-1963

◀ Albert Châtelet

Biographie

Naissance	5 mars 1915 / 16e arrondissement de Paris /
Décès	4 juillet 2002 / (à 87 ans) 14e arrondissement de Paris /
Sépulture	Yvelines /
Nationalité	Français /
Formation	École normale supérieure /
Activités	Mathématicien, professeur d'université, entomologiste /

En particulier, on voit que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
 $y(x) = a \text{ si } x < 0,$
 $= b \text{ si } x > 0$ définit une classe de
fonction C (permettant de valoir sur les
ensembles de mesure de Lebesgue nulle)
qui vérifie (2) puisque, si $\ell \in \mathcal{G}^\infty(\mathbb{R})$ est
nulle lors de $[-A, A]$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} y \cdot (\ell + xe') dx \\ &= a \int_{-A}^0 (\ell + xe') dx + b \int_0^A (\ell + xe') dx \\ &= a [xe] \Big|_{-A}^0 + b [xe] \Big|_0^A \\ &= +aA\cancel{\ell(-A)} + bA\cancel{\ell(A)} = 0. \end{aligned}$$

Or, si $a \neq b$ la (classe de) fonction(s) y en
question n'est pas \mathcal{C}^1 (même pas \mathcal{C}^0) : le
problème (2) possède donc un ensemble de
solutions, dites "solutions faible", strictement
plus grand que l'ensemble des sols de (1).

Le fait en particulier pour rendre compte de ce
type de solutions que la théorie des "distributions"
a été inventée par L. Schwartz.

→ Cf. aussi EPI 1.2, MATH 4, et MATH 5.

1. Distributions.

Déf.: on appelle $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à support compact (*), i.e. l'ensemble des fonctions "lisses" nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$ pour $A > 0$ assez grand.

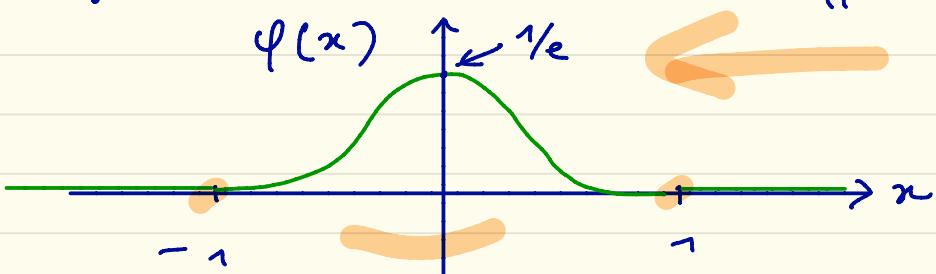
(*) $\text{Supp } \varphi = \text{"support de } \varphi" = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$

Ex.: soit $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

alors, $\varphi(x) \rightarrow 0$ et $\varphi(x) \rightarrow 0$: φ est continue, et on montre $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

par récurrence. Comme $\text{Supp } \varphi \subset [-1, 1]$, φ est \mathcal{C}^∞ à support compact : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque: plus généralement, si $-L$ est un point de \mathbb{R} , on définit $\mathcal{D}(L)$ comme l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ sur L à support compact $\subset L$.



L'ensemble de fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ possède une topologie compliquée (non définissable par une norme) qu'on ne va pas décrire ici. Son dual (topologique), i.e. l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est aussi "gross" que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est "petit".

Déf.: on appelle distribution une forme linéaire
continue $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La continuité sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'entend au sens
 suivant : T , l'linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , est
 dite continue si, $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$,
 $(\exists C > 0) (\exists p \in \mathbb{N}) (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \subset K) :$

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty.$$

On note dans ce cas $T(\varphi) = T \cdot \varphi = \langle T, \varphi \rangle$
 (crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

Remarque: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow (\exists A > 0) : \text{supp } \varphi \subset [-A, A]$,
 si $\varphi = 0$ hors de $[-A, A]$; donc
 $\varphi = 0$ sur l'ouvert $\subset [-A, A]$, et $\varphi^{(i)} = 0$ aussi sur
 cet ouvert $\Rightarrow \text{supp } \varphi^{(i)} \subset \text{supp } \varphi \subset [-A, A], i \geq 0$.

Exemples fondamentaux:

i) soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une fonction "localement intégrable", i.e. intégrable "sur tout compact":

$(\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}) : \int_K |f(x)| dx < \infty$.

Alors, $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx$

est bien définie puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |f \varphi| dx = \int_K |f \varphi| dx \leq \|f\|_\infty \cdot \int_K |f| dx < \infty.$$

$K := \text{supp } \varphi$, compact ($\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$)

Cette application est clairement linéaire et, si K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $\text{supp } \varphi \subset K$:

$$|\tilde{T}_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx,$$

ce qui montre la continuité ($C = \int_K |f| dx$ et $p=0$ convient).

($\exists n = \text{Nombre bornéen}$)

ii) Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ une mesure positive (qu'on suppose finie sur les compacts); alors

$$T_{\mu} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) d\mu(u)$$

est bien définie ($\varphi \in \mathcal{C}^{\infty} \Rightarrow \varphi \text{ G}^0$ donc mesurable, et $\int_{\mathbb{R}} |\varphi| d\mu \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_K d\mu = \|\varphi\|_{\infty} \cdot \underbrace{\mu(K)}_{<\infty} < \infty$),

linéaire, et continue: si K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $\text{supp } \varphi \subset K$,

$$|\tilde{T}_{\mu}(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu \right| \leq \int_K |\varphi| d\mu \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot \mu(K)$$

($C = \mu(K)$ et $p=0$ convient).

iii) $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi'(0)$ est linéaire et continue puisque, si K compact $\subset \mathbb{R}$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset K$, on a

$$|T(\varphi)| = |\varphi'(0)| \leq \|\varphi'\|_{\infty} \quad (C=1 \text{ et } p=1 \text{ convient}).$$

Remarques: i) en général $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}$ qui dépendent de K tels que :

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \subset K) : |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty ;$$

$\forall p$ est indépendant de K ("uniforme en K "), on dit que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à p (et d'ordre $p_0 \geq 0$ si p_0 est le plus petit de ces entiers p). Dans les trois exemples précédents, les deux premières distributions sont d'ordre 0, la troisième d'ordre 1. (voir aussi cas de $\sqrt{\frac{1}{x}}$ au TH 6.)

ii) On définit de même $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:
 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \iff T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et
 T continue au sens où $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$,

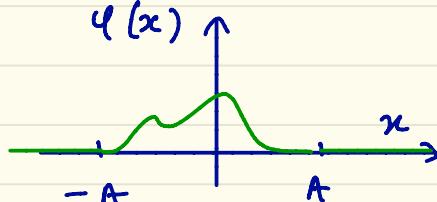
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \text{supp } \varphi \subset K, \exists C > 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\langle T(\varphi) \rangle| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty .$$

On connaît une (classe de) fonction(s) dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (en particulier une fonction C^∞) définit une distribution notée T_f (et appelée "distribution régulière") : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) dx .$$

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in C^0(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (vérifiez le !)
et, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &= \int f' \cdot \varphi dx \\ &= \int_{-A}^A f' \cdot \varphi dx \text{ avec } A \text{ tq } \text{supp } \varphi \subset [-A, A] \\ &= [f \cdot \varphi]_{-A}^A - \int_{-A}^A f \cdot \varphi' dx \quad (\text{i.p.p.}) \\ &\quad \text{car } \varphi(-A) = \varphi(A) = 0 \\ &= - \langle Tf, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$


Par extension de ce cas, on définit la "dérivée" d'une distribution quelconque comme suit :

Prop. déf.: mit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on pose

$$T': \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto -\langle T, \varphi' \rangle.$$

On définit ainsi une nouvelle distribution appelée dérivée ("au sens des distributions") de T .

Remarque: si f est de classe C^1 , le calcul qui précède la définition montre que $(T_f)' = \overline{T}_{f'}$; en ce sens, la dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ étend la dérivation au sens usuel.

dém.: T' ainsi définie est clairement linéaire,
mq elle est continue. Soit donc K un compact $\subset \mathbb{R}$, et mit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\text{supp } \varphi \subset K$;

clairement $\text{supp } \varphi' \subset \text{supp } \varphi$ (cf. $\varphi \equiv 0$ en dehors de $\text{supp } \varphi$, donc $\varphi' \equiv 0$ aussi !) Comme T est continue, $\exists C > 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}$ tq

$$|\langle T, \varphi' \rangle| \leq c \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

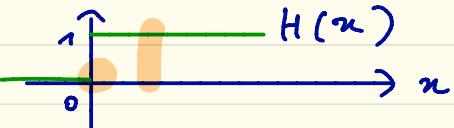
de sorte que

$$|T'(\varphi)| = |-\langle T, \varphi' \rangle|$$

$$\leq c \cdot \max_{0 \leq i \leq p+1} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

(C et $p+1$ convenient). \square

"fonction de Heaviside"



Exemple: i) mit $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$:

$$H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \text{ définit } T : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} H \cdot \varphi dx = \int_0^\infty \varphi dx.$$

On a : $\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow = - \int_0^\infty \varphi' dx$$

$$= - \int_0^A \varphi' dx \text{ où } A \in [-A, A] \supset \text{supp } \varphi$$

$$= -\varphi(A) + \varphi(0) : \text{ donc,}$$

$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) : \langle (T_H)', \varphi \rangle = \varphi(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(0) d\delta(x)$$

δ est la mesure de Dirac : $\delta(A) = 1 \text{ si } 0 \in A$
 $= 0 \text{ sinon.}$

Comme δ est une mesure positive, elle définit une distribution (qu'on note encore δ) et

$(T_H)' = \delta$. On a donc dérivé au sens des distributions une fonction qui n'est même pas continue. On remarque que la dérivée est égale à $4 \cdot \delta$ où $1 = H(0+) - H(0-)$ est le "saut" et où le Dirac est la mesure de Dirac conventionnée en $x=0$, le point de discontinuité. (Plus généralement, voir la "formule des sauts", [exo 1 TD 6.](#))

ii) Puisque $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut aussi la dériver (au sens des distributions) : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$: on retrouve, au signe près, la distribution d'ordre 1 vue en début de paragraphe.

Prop.: mit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $T' = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$ tg
 $T = c \cdot T_1$

(i.e. $\langle T, \varphi \rangle = c \int_{\mathbb{R}} \varphi du$, cf. T_1 la régularisation associée à $f \equiv 1$).

dém.: clairement, si $T = c \cdot T_1$, $T' = c \cdot (T_1)'$
et $(T_1)' = T_{c,1} = T_0$: $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi du = 0$:
 T' est bien la distribution nulle.
Réciproquement, supposez $T' = 0$. Alors,
($\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$): $0 = \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$;

T s'annule sur $A := \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid (\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) : \varphi = \psi'\}$.
Si $\varphi \in A$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi du = \int_{\mathbb{R}} \varphi' du = \int_{-A}^A \varphi' du$
($\text{et } [-A, A] \supset \text{supp } \varphi \supset \text{supp } \varphi'$) $= \varphi(A) - \varphi(-A) = 0$:

A contient toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} \psi dx = 0$.
Réciproquement, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \psi dx = 0, \text{ alors } \varphi(x) := \int_{-\infty}^x \psi dy; \quad \varphi \text{ est une}$$

à support compact, $\exists A \geq 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$ de sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dy = \int_{-A}^A \varphi dy$ qui est bien définie ; de plus, $x \leq -A \Rightarrow \varphi(x) = 0$, et $x \geq A \Rightarrow \varphi(x) = \int_{-A}^A \varphi dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi dy = 0$.

Donc $A = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \varphi dx = 0 \}$, et T s'annule sur cet ensemble. Or, avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi dx) \cdot \varphi_0 \in A$$

(où on a pris $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx = 1$ — il existe bien une telle fonction φ_0 , montrez-le !)
donc

$$0 = \langle T, \varphi - (\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi dx}_{\text{cte}}) \cdot \varphi_0 \rangle$$

$$= \langle T, \varphi \rangle - (\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi dx}_{=: c}) \cdot \underbrace{\langle T, \varphi_0 \rangle}_{=: c}$$

Par linéarité de T . On en déduit bien que

$$\langle T, \varphi \rangle = c \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi dx = c \langle T_1, \varphi \rangle,$$

ce que $T = c \cdot T_1$. \square

Prop. déf.: soient $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit une distribution, notée $\psi \cdot T$, en posant :

$$\psi \cdot T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle T, \varphi \cdot \psi \rangle.$$

donc $\psi \cdot T$ est bien définie

dém.: comme $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi \cdot \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;
la linéarité est évidente, vérifions la
continuité; mit K compact $\subset \mathbb{R}$, mit
 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\text{supp } \varphi \subset K$; $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow \exists c > 0$ et $\exists p > 0$ tq

$$\begin{aligned} |(\psi \cdot T)(\varphi)| &:= |\langle \varphi, \psi \cdot T \rangle| \\ &\leq c \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|(\psi \cdot \varphi)^{(i)}\|_\infty \\ &= c \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \left\| \sum_{k=0}^i c_k \psi^{(k)} \varphi^{(i-k)} \right\|_\infty \\ &\stackrel{\text{Leibniz}}{=} \underbrace{c \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \left\| \sum_{k=0}^i c_k \varphi^{(k)} \underbrace{\psi^{(i-k)}}_{=: \hat{\psi}} \right\|_\infty}_{=: \hat{c}} \\ &\leq \underbrace{\hat{c} \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}(x)\|}_{\substack{x \in K}} \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty \\ \text{avec } \hat{c} &:= \sum_{k=0}^i c_k. \text{ Les termes } \hat{c} \text{ et } p \text{ conviennent. } \square \end{aligned}$$

Ex.: $\psi(x) = x$ et $T = \Gamma'$; mit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle x \delta', \varphi \rangle &= \langle \delta', x \varphi \rangle \\ &= - \langle \delta, (x \varphi)' \rangle \\ &= - \langle (x \cdot \varphi)'(0) \rangle \\ &= - \langle \varphi + x \cdot \varphi' \rangle(0) \\ &= - \varphi(0) \\ &= - \langle \delta, \varphi \rangle : x \delta' = - \delta \text{ (cf. aussi Thm 6).} \end{aligned}$$

Prop. ("division"): mit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $\exists \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\exists c \in \mathbb{R}$: $T = c \cdot \delta$.

dém.: si $T = c \cdot \delta$, mit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
 \langle x \cdot T, \varphi \rangle &= \langle x(c \cdot \delta), \varphi \rangle \\
 &= c \langle \delta, x \varphi \rangle \\
 &= c \cdot (x \cdot \varphi(x)) \Big|_{x=0} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Réiproquement, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$, et T s'annule sur l'ensemble des fonctions

$$B := \{x\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

Si $\varphi \in B$, $\varphi(0) = (x\varphi)(0) = 0$; Réiproquement, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'annule en 0, on vérifie par nécessité que $\varphi(x) := \varphi(x)/x$ si $x \neq 0$

$$= \varphi'(0) \text{ si } x=0$$

est C^∞ sur \mathbb{R} (et \equiv support compact $\subset \text{supp } \varphi$) :

comme $\varphi = x\varphi_0$, on a mq B est en fait égal à $\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \varphi(0)=0\}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\varphi - \varphi(0)\varphi_0 \in B$ (où $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est choisie pour que $\varphi_0(0)=1$) ; donc :

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle T, \varphi - \varphi(0)\varphi_0 \rangle \\
 &= \langle T, \varphi \rangle - \varphi(0) \cdot \langle T, \varphi_0 \rangle \text{ par linéarité} \\
 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle &= \underbrace{\langle T, \varphi_0 \rangle}_{=: c} \cdot \varphi(0) \\
 &= c \langle \delta, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = c \cdot \delta. \quad \square$$

On en déduit en particulier l'ens. des solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à l'équation $x \cdot T = 0$;

en effet, d'après ce qui précède, $x \cdot T' = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$
 $\text{tg } T' = c \cdot \delta$

$$\text{et } (T - c \cdot T_H)' = 0 \quad (\text{af. } (T_H)' = \delta)$$

$\Rightarrow (\exists d \in \mathbb{R}) : T - c \cdot T_H = d \cdot T_1 : \text{ donc } \exists c, d \in \mathbb{R} \text{ tg}$

$$T = c \cdot T_H + d \cdot T_1$$

$= T_{cH+d}$: distribution régulière associée
 à la (classe de) fonction(s)

$$cH+d : x \mapsto c \cdot H(x) + d = d \text{ si } x < 0$$

$$= c+d \text{ si } x > 0 ;$$

on verra ainsi, au sens des distributions
 l'équation vue en introduction (et on trouve
 bien des solutions généralisées — "faible"—
 ctes par morceaux et pas nécessairement
 C^1 sur \mathbb{R}).

Remarquons qu'on a agrandi strictement
 l'ensemble des solutions de (1) puisque
 $y \in C^1(\mathbb{R})$ sol. de (1)

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x \cdot y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\forall x < 0) : y'(x) = 0 \text{ et } (\forall x > 0) : y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\exists c_1 \in \mathbb{R}) : y|_{\mathbb{R}_-^x} = c_1 \text{ et } (\exists c_2 \in \mathbb{R}) : y|_{\mathbb{R}_+^x} = 0$$

Mais q $C^1 \Rightarrow C^0$,

donc $c_1 = c_2$: l'ensemble des solutions de
 (1) est donc restreint à l'ensemble des
 fonctions ci-dessous.

Ch. IV - Formulation faible de problème aux limites.

2. Formulation faible en dimension un.

Motivation : considérons le problème suivant :
trouver $u \in C^2([0,1])$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad \text{et } x \in [0,1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

où $f \in C^0([0,1])$ est une fonction donnée.

On peut se ramener à un système d'ordre 1 en posant $U = (u, u') : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, auquel cas on a :

$$\begin{cases} U'(x) = g(x, U(x)) \\ U_1(0) = 0, \quad U_2(1) = 0 \end{cases}$$

avec $g(x, U_1, U_2) = (U_2, U_1 - f(x))$. Il ne s'agit pourtant pas d'un problème de Cauchy (cf. Chap. 2, TD 2) puisque les conditions aux limites sont séparées en $x=0$ et $x=1$ (on ne connaît ni $U_1(0) = u(0)$, ni $U_2(1) = u(1)$).

En dimension 1 ($x \in [0,1] \subset \text{ouvert de } \mathbb{R}$), on peut traiter ce problème par une "méthode tir" consistant à "deviner" $u(0)$ et à intégrer ("tirer"...) pour voir si on tombe sur $u(1) = 0$ (la "cible"). \rightarrow MAMS

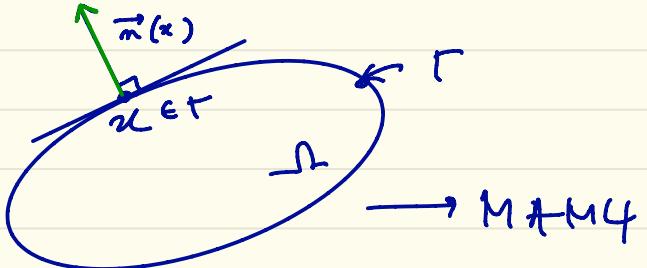
On va s'intéresser à une autre approche, qui a le mérite de s'étendre naturellement à la dimension $n \geq 1$, permettant de traiter par exemple un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), & x \in \Omega \quad (1)_n \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = 0 & (\text{conditions de "Neumann"}) \end{cases}$$

on cherche $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, Ω ouvert de \mathbb{R}^n ,
 où $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, où $\Gamma = \partial\Omega$ (frontière de Ω),
 et où $\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma}$ est la "dérivée normale" de u

en un pt du bord :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u'(x) \cdot \vec{n}(x)$$



Le problème (1) est donc exactement la version de $(1)_n$ pour $n=1$ et $\Omega =]0,1[$
 ($\frac{\partial u}{\partial n}(0) = -u'(0)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(1) = u'(1) \dots$)

Tout donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ une solution de (1);
 on va "tester" u (ou comme la distribution régulière T_u , cf. §1) à l'aide de (classes de) fonctions $H^1([0,1])$.

$$\begin{aligned} \text{Déf.: } H^1([0,1]) &= \{v \in L^2([0,1]) \mid v' \in L^2([0,1])\} \\ &= \{v \in L^2([0,1]) \mid \exists w \in L^2([0,1]) \text{ tq :} \end{aligned}$$

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}([0,1])) : \int_0^1 v \cdot \varphi' dx = - \int_0^1 w \cdot \varphi dx \quad \text{et} \quad (v' = w \text{ dans } \mathcal{D}'([0,1]))$$

Th.: $H^1([0,1])$, munie du produit scalaire

$$(u|r)_{H^1} := (u|r)_{L^2} + (u'|r')_{L^2}$$

est un espace de Hilbert. Toute classe de fonctions $u \in H^1([0,1])$ possède un représentant $\tilde{u} \in C^0([0,1])$ et p.p. $u \in [0,1]$,

$$u(x) = \tilde{u}(x) = \tilde{u}(0) + \int_0^x u'(y) dy.$$

De plus, si u et $r \in H^1([0,1])$, $u \cdot r \in H^1([0,1])$ aussi et $(u \cdot r)' = u' \cdot r + u \cdot r'$ (p.p.) : en particulier, la formule d'intégration par parties est valable pour u et $r \in H^1([0,1])$:

$$\int_0^1 u \cdot r dx = [u \cdot r]_0^1 - \int_0^1 u \cdot r' dx.$$

dém.: cf. Th 7, exo 1.

L: $r \in H^1([0,1])$, u sol. de (1),

$$\underbrace{\int_0^1 (-u'' + u) \cdot r dx}_{=} = \int_0^1 f \cdot r dx$$

$$= [-u' \cdot r]_0^1 + \int_0^1 u' \cdot r' + u \cdot r \text{ par i.p.p. } H^1$$

$$\underbrace{-u'(0) \cdot r(1)}_0 + \underbrace{u'(0) \cdot r(0)}_0 \quad \leftarrow \text{cf. CL Neumann}$$

$$\Rightarrow (\forall r \in H^1([0,1])): (u|r)_{H^1} = \int_0^1 f \cdot r dx \quad (2)$$

On vient de voir, toute solution de (1) (on dit "solution forte", est aussi solution de (2) ("solution faible") : c'est la première étape de la "démarche variationnelle",

A. Toute solution forte est solution faible.

B. Existence et unicité d'une solution faible.

Remarquons que la forme linéaire $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \int f r dx$ qui intervient dans (2) est continue ; en effet,

$$(\forall v \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})) : |\varphi(v)| = \left| \int_0^1 f v dx \right| = \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Autrement dit, (2) $\iff (\forall v \in H^1) : (u | v)_{H^1} = \langle \varphi, v \rangle$

Th. (Riesz) : soit $(E, C.1.)$ un espace, et soit $\varphi \in E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue sur E . Alors, $(\exists ! x \in E)$:

$$(\forall y \in E) : \varphi(y) = (x | y).$$

De plus, $\|\varphi\|_{E'} = \|x\|_E$

$$\hookrightarrow \inf_{k \geq 0} \{ (\forall y \in E) : |\varphi(y)| \leq k \cdot \|y\|_E \}$$

de sorte qu'on a un isomorphisme isométrique entre E et son dual topologique E' .

Remarque : sur $(\mathbb{R}^n, C.1.)$, $\varphi = [a_1 \dots a_n] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\varphi \cdot y = [a_1 \dots a_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} | \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)}_x : x = \varphi \in \mathbb{R}^n$

Le th. de Riesz, affirme donc exactement qu'il existe une et une seule solution faible.

En général, cette solution faible $u \in H^1(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})$ mais $u \notin C^2([0, 1]) \subsetneq H^1(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})$. Tous les hypothèses supplémentaires de régularité (ici : $f \in C^0([0, 1])$; en dimension $n > 1$, on aurait également besoin de régularité du bord $\Gamma := \partial\Omega$), on peut remonter à une solution forte!

C. Régularité de la sol. faible.

$(\forall r \in \mathcal{D}(\mathbb{I}_0, \mathbb{C}) \subset H^1(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})):$

$$(u|r)_{H^1} = (u|r')_{L^2} + (u|r)_{L^2} = \int_0^1 f r dx$$

$$\Rightarrow \langle u', r' \rangle + \langle u, r \rangle = \langle f, r \rangle$$

$$(\text{i.e.: } \langle T_u, r' \rangle + \langle T_u, r \rangle = \langle Tf, r \rangle)$$

$$\text{et } u \in H^1 \Leftrightarrow (T_u)' = T_{u'}, u' \in L^2 \subset L^1_{loc} \dots)$$

$$\Rightarrow -\langle u'', r \rangle + \langle u, r \rangle = \langle f, r \rangle$$

$$\Rightarrow -u'' + u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow u'' = u - f \in C^0([0, 1]) \supset H^1(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow u \in C^2([0, 1]).$$

D. Toute solution faible est solution forte.

Tous les hypothèses de régularité précédentes ($f \in C^0([0, 1])$), la solution faible $u \in H^1(\mathbb{I}_0, \mathbb{C})$ vérifie :

$$\begin{aligned}
 (\forall \tau \in H^1([0,1]) : \int_0^1 (u' \tau' + u \tau) dx = \int_0^1 f \tau dx \\
 \Rightarrow [u' \tau]_0^1 + \int_0^1 (-u'' + u) \tau dx = \int_0^1 f \tau dx \\
 \text{i.e. p.p. puisque } u \in \mathcal{C}^2 \\
 \Rightarrow u'(1) \tau(1) - u'(0) \tau(0) + \int_0^1 (-u'' + u - f) \tau dx = 0 \quad (*) \\
 \text{en particulier,} \\
 (\forall \tau \in \mathcal{D}([0,1])) : \underbrace{\int_0^1 (-u'' + u - f) \tau dx}_{(-u'' + u - f | \tau)_{L^2}} = 0 \\
 \overline{\mathcal{D}([0,1])}^{H^1_0} = L^2([0,1]) \\
 \Rightarrow -u'' + u - f = 0 \quad (\text{p.p.}) \\
 \Rightarrow -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad (\text{cf. } u \in \mathcal{C}^2)
 \end{aligned}$$

Donc \$(*) \Rightarrow (\forall \tau \in H^1([0,1])) : u'(1) \tau(1) - u'(0) \tau(0) = 0\$
 $\Rightarrow u'(1) = u'(0) = 0$
(C prendra \$\tau(x) = x\$ et \$\tau(x) = 1-x\$).

Pour d'autres conditions aux limites, voir le Th 7...
et le mini-projet.

L'approche variationnelle est la base de la
méthode des éléments finis (cf. MATH4) qui
permet de résoudre numériquement ce type de
problème, y compris en grande dimension n.
→ MATH4

Preuve du th. de Riesz: Ainsi $\varphi \in \mathcal{E}' = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue

sur $(\mathcal{E}, (\cdot, \cdot))$, c.-à-d. Supposons $\varphi \neq 0_{\mathcal{E}}$, (sinon $x = 0_{\mathcal{E}}$ convient!). Alors, $\exists x_0 \in \mathcal{E}$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$. Comme $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(0)$ est un sous-
espace fermé (φ linéaire continue), donc on peut projeter x_0 sur $\text{Ker } \varphi$ et définir

$$x := x_0 - \overline{\text{Ker } \varphi} \quad x_0$$

Évidemment $x \perp \text{Ker } \varphi$;
Ainsi $\varphi \in \mathcal{E}$, par linéarité

$$\varphi(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x) = 0$$

(noter que $\varphi(x) \neq 0$ — sinon $x \in \text{Ker } \varphi$, i.e. $x_0 \in \text{Ker } \varphi$!)

$$\Rightarrow y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x \in \text{Ker } \varphi$$

$$\Rightarrow (x \mid y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \underbrace{\left(\frac{\varphi(x)}{\|x\|^2} \cdot x \mid y \right)}_{\text{ce vecteur n convient}}. \quad \square$$

