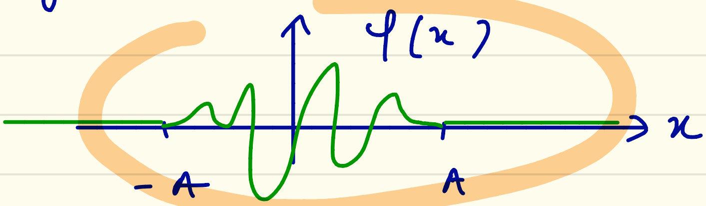
Ch. IV - Formulation faible de problème aux limites.

Motivation : considérons le problème suivant : trouver $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq :

$$(1) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) : x . y'(x) = 0 .$$

Si $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une telle fonction, soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ nulle en dehors du compact $[-A, A]$:



De telles fonctions existent et forment l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, cf. §1. ci-après.

Alors, $(1) \Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} x y'(x) \varphi(x) dx$

$$= \int_{-A}^{A} y'(x) (x \varphi(x)) \, dx$$

$$= \underbrace{[y(x) . x \varphi(x)]_{-A}^{A}}_{0 \text{ car } \varphi(A) = -\varphi(-A) = 0} - \int_{-A}^{A} y (\varphi + x \varphi') dx$$

$\Rightarrow (\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tq $\varphi = 0$ hors de $[-A, A])$:

$$\int_{\mathbb{R}} y(x) . (\varphi(x) + x \varphi'(x)) \, dx = 0 \qquad (2)$$

Laurent Schwartz

Laurent Schwartz avant sa mort.

Fonction

Président
Comité Maurice-Audin
1960-1963
◀ Albert Châtelet

Biographie

Naissance	5 mars 1915 16e arrondissement de Paris
Décès	4 juillet 2002 (à 87 ans) 14e arrondissement de Paris
Sépulture	Yvelines
Nationalité	Français
Formation	École normale supérieure
Activités	Mathématicien, professeur d'université, entomologiste

En particulier, on voit que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = a \text{ si } x < 0,$$
$$= b \text{ si } x > 0$$

définit une classe de fonction C (peu importe la valeur sur $\{0\}$, ensemble de mesure de Lebesgue nulle) qui vérifie (2) puisque, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est nulle hors de $[-A, A]$,

$$\int_{\mathbb{R}} y \cdot (\varphi + x\varphi')\,dx \qquad (x\varphi)'$$

$$= a\int_{-A}^{0} (\varphi + x\varphi')\,dx + b\int_{0}^{A} (\varphi + x\varphi')\,dx$$

$$= a\,[x\varphi]_{-A}^{0} + b\,[x\varphi]_{0}^{A}$$

$$= +aA\underbrace{\varphi(-A)}_{0} + bA\underbrace{\varphi(A)}_{0} = 0.$$

Or, si $a \neq b$ la (classe de) fonction(s) y en question n'est pas $\mathcal{C}^1$ (même pas $\mathcal{C}^0$) : le problème (2) possède donc un ensemble de solutions, dites "solutions faibles", strictement plus grand que l'ensemble des sols de (1).

C'est en particulier pour rendre compte de ce type de solutions que la théorie des "distributions" a été inventée par L. Schwartz.

$\longrightarrow$ Cf. aussi EDP 2, MAM 4, et MAM 5.

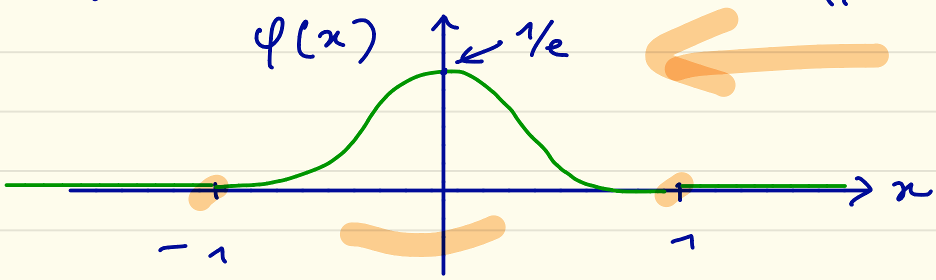
1. Distributions.

Déf. : on appelle $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact (*), ie l'ensemble de fonctions "lisses" nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$ pour $A>0$ assez grand.

(*) $\operatorname{supp} \varphi$ = "support de φ" $= \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$

Ex. : soit
$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \text{ si } |x|<1$$
$$= 0 \text{ sinon ;}$$
clairement, $\varphi(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$ et $\xrightarrow[x \to -1^+]{} 0$: φ est continue, et on mq $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par récurrence. Comme $\operatorname{supp} \varphi \subset [-1, 1]$, φ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque : plus généralement, si Ω ouvert de $\mathbb{R}$, on définit $\mathcal{D}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact $\subset \Omega$.



L'ensemble de fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ possède une topologie compliquée (non définissable par une norme) qu'on ne va pas décrire ici. Son dual (topologique), ie l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est aussi "gros" que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est "petit".

<u>Déf.</u> : on appelle distribution une forme linéaire continue $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La continuité sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'entend au sens suivant : T, linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, est dite continue si, $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$, $(\exists C \geq 0)\ (\exists p \in \mathbb{N})\ (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \varphi \subset K)$:

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty .$$

On note dans ce cas $T(\varphi) = T\cdot\varphi = \langle T, \varphi \rangle$ (crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

<u>Remarque</u> : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow (\exists A \geq 0)$: $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$, ie $\varphi = 0$ hors de $[-A, A]$; donc $\varphi \equiv 0$ sur l'ouvert ${}^c[-A, A]$, et $\varphi^{(i)} \equiv 0$ aussi sur cet ouvert $\Rightarrow \operatorname{supp} \varphi^{(i)} \subset \operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A], i \geq 0$.

<u>Exemples fondamentaux</u> :

i) soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une fonction "localement intégrable", ie intégrable "sur tout compact" :

$$(\forall K \text{ compact} \subset \mathbb{R}) : \int_K |f(x)|\, dx < \infty .$$

Alors, $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dx$

est bien définie puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |f\varphi|\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_K |f\varphi|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \int_K |f| < \infty .$$

$K := \operatorname{supp} \varphi$, compact (cf. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$)

Cette application est clairement linéaire et, si K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K$:

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f||\varphi|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \int_K |f|\, dx,$$

ce qui montre la continuité ($C = \int_K |f|$ et $p = 0$ conviennent).

($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ = tribu borélienne)

ii) Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une mesure positive (qu'on suppose finie sur les compacts) ; alors

$$T_\mu : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

est bien définie (φ $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow \varphi$ $\mathcal{C}^0$ donc mesurable, et $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|\, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ K := \operatorname{supp}\varphi}}{\leq} \|\varphi\|_\infty \cdot \int_K d\mu = \|\varphi\|_\infty \cdot \underbrace{\mu(K)}_{<\infty} < \infty$),

linéaire, et continue : soit K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,

$$|T_\mu(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi\, d\mu\right| \leq \int_K |\varphi| \cdot d\mu \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \mu(K)$$

($C = \mu(K)$ et $p = 0$ conviennent).

iii) $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi'(0)$ est linéaire et continue puisque, si K compact $\subset \mathbb{R}$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a

$$|T(\varphi)| = |\varphi'(0)| \leq \|\varphi'\|_\infty$$

($C = 1$ et $p = 1$ conviennent).

Remarques : i) en général $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Rightarrow$ si K compact $\subset \mathbb{R}$, $\exists\, C \geq 0$ et $\exists\, p \in \mathbb{N}$ qui dépendent donc de K tels que :

$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}\, \varphi \subset K) : |\langle T, \varphi \rangle| \leq C . \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$;

si p est indépendant de K ("uniforme en K"), on dit que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à p (et d'ordre $p_0 \geq 0$ si p_0 est le plus petit de ces entiers p). Dans les trois exemples précédents, les deux premières distribution sont d'ordre 0, la troisième d'ordre 1. (Voir aussi cas de $vp \frac{1}{x}$ au TD 6.)

ii) On définit de même $\mathcal{D}'(\Omega)$ comme l'ensemble des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$:
$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire et T continue au sens où $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\mathrm{supp}\, \varphi \subset K$, $\exists\, C \geq 0$ et $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tq

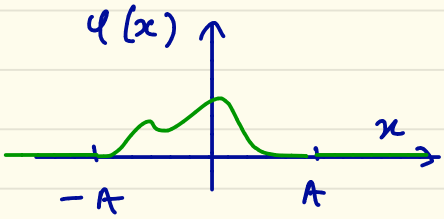
$$|T(\varphi)| \leq C . \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty .$$

On a vu qu'une (classe de) fonction(s) dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (en particulier une fonction $\mathcal{C}^1$) définit une distribution notée T_f (et appelée "distribution régulière") : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_f , \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) . \varphi(x)\, dx .$$

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (vérifiez-le !)
et, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int f' \cdot \varphi \, dx$$



$$= \int_{-A}^{A} f' \cdot \varphi \, dx \quad \text{avec } A \text{ tq } \operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$$

$$= \underbrace{[f \cdot \varphi]_{-A}^{A}}_{0 \text{ car } \varphi(-A) = \varphi(A) = 0} - \int_{-A}^{A} f \cdot \varphi' \, dx \quad (\text{i.p.p.})$$

$$= - \langle T_f, \varphi' \rangle.$$

Par extension de ce cas, on définit la "dérivée" d'une distribution quelconque comme suit :

Prop. déf. : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on pose

$$T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \varphi \longmapsto - \langle T, \varphi' \rangle.$$

On définit ainsi une nouvelle distribution appelée dérivée ("au sens des distributions") de T.

Remarque : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, le calcul qui précède la définition montre que $(T_f)' = T_{f'}$; en ce sens, la dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ étend la dérivation au sens usuel.

dém. : T' ainsi définie est clairement linéaire, mq elle est continue. Soit donc K un compact $\subset \mathbb{R}$, et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset K$;

clairement $\operatorname{supp} \varphi' \subset \operatorname{supp} \varphi$ (cf. $\varphi \equiv 0$ en dehors de $\operatorname{supp} \varphi$, donc $\varphi' \equiv 0$ aussi !) Comme T est continue, $\exists C \geq 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}$ tq

$$|\langle T, \varphi' \rangle| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p} \|(\varphi')^{(i)}\|_\infty$$

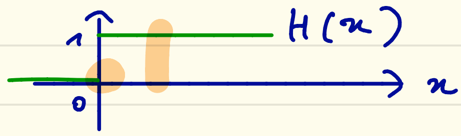
de sorte que

$$|T'(\varphi)| = |-\langle T, \varphi' \rangle| \leq C \cdot \max_{0 \leq i \leq p+1} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

(C et $p+1$ conviennent). $\square$

"fonction de Heaviside"

<u>Exemple</u> : i) soit $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$:



$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit $T : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} H \cdot \varphi \, dx = \int_0^\infty \varphi \, dx$.

On a : $\langle (T_H)', \varphi \rangle = - \langle T_H, \varphi' \rangle$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$= - \int_0^\infty \varphi' \, dx$$

$$= - \int_0^A \varphi' \, dx \text{ où } A \text{ tq } [-A, A] \supset \operatorname{supp} \varphi$$

$$= - \underbrace{\cancel{\varphi(A)}}_{0} + \varphi(0) \text{ : donc,}$$

$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$: $\langle (T_H)', \varphi \rangle = \varphi(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, d\delta(x)$$

où δ est la mesure de Dirac : $\delta(A) = 1$ si $0 \in A$
$= 0$ sinon.

Comme δ est une mesure positive, elle définit une distribution (qu'on note encore δ) et

$(T_H)' = \delta$. On a donc dérivé au sens des distributions une fonction qui n'est même pas continue. On remarque que la dérivée est égale à $1 \cdot \delta$ où $1 = H(0+) - H(0-)$ est le "saut" et où le Dirac est la mesure de Dirac concentrée en $x = 0$, le point de discontinuité. (Plus généralement, voir la "formule des sauts", exo 1 TD 6.)

ii) Puisque $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut aussi la dériver (au sens des distributions) : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\langle \delta', \varphi \rangle = - \langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$: on retrouve, au signe près, la distribution d'ordre 1 vue en début de paragraphe.

<u>Prop.</u> : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $T' = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$ tq $T = c \cdot T_1$

(ie $\langle T, \varphi \rangle = c \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx$, cf. T_1 dib régulière associée à $f \equiv 1$).

<u>dém.</u> : clairement, si $T = c \cdot T_1$, $T' = c \cdot (T_1)'$ et $(T_1)' = T_{(1)'} = T_0 : \varphi \mapsto \int 0 \cdot \varphi \, dx = 0$: T' est bien la distribution nulle.

Réciproquement, supposons $T' = 0$. Alors, $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$: $0 = \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$;

T s'annule sur $A := \{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid (\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) : \psi = \varphi' \}$.

Si $\psi \in A$, $\int_{\mathbb{R}} \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi' \, dx = \int_{-A}^{A} \varphi' \, dx$

$= \cancel{\varphi(A)}_0 - \cancel{\varphi(-A)}_0 = 0$:

(où $[-A, A] \supset \operatorname{supp} \psi \supset \operatorname{supp} \varphi$)

A contient toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\int_{\mathbb{R}} \psi\, dx = 0$.
Réciproquement, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie

$\int_{\mathbb{R}} \psi\, dx = 0$, posons $\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi\, dy$; ψ étant

à support compact, $\exists A \geq 0$ tq $\operatorname{supp} \psi \subset [-A, A]$ de sorte que $\int_{-\infty}^{x} \psi\, dy = \int_{-A}^{x} \psi\, dy$ qui est bien

définie ; de plus, $x \leq -A \Rightarrow \varphi(x) = 0$, et
$x \geq A \Rightarrow \varphi(x) = \int_{-A}^{A} \psi\, dy = \int_{\mathbb{R}} \psi\, dy = 0$.

Donc $A = \{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \psi\, dx = 0 \}$,
et T s'annule sur cet ensemble. Or, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\right) \cdot \varphi_0 \in A$$

(où on a pris $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0\, dx = 1$ — il existe bien une telle fonction φ_0, montrez le !)
donc

$$0 = \langle T, \varphi - \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\right)}_{\text{cte}} \cdot \varphi_0 \rangle$$

$$= \langle T, \varphi \rangle - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\right) \cdot \overbrace{\langle T, \varphi_0 \rangle}^{=:c}$$

par linéarité de T. On en déduit bien que

$$\langle T, \varphi \rangle = c \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx = c \langle T_1, \varphi \rangle,$$

ie que $T = c \cdot T_1$. $\square$

Prop. déf. : soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit une distribution, notée $\psi . T$, en posant :

$$\psi . T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle T, \psi . \varphi \rangle.$$

dém. : comme $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \underbrace{\psi.\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})}_{\text{donc } \psi.T \text{ est bien définie}}$;
la linéarité est évidente, vérifions la continuité ; soit K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K$; $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \exists\, c \geq 0$ et $\exists\, p \geq 0$ tq

$$
\begin{aligned}
|(\psi.T)(\varphi)| &:= |\langle T, \psi.\varphi \rangle| \\
&\leq c.\max_{0 \leq i \leq p} \|(\psi.\varphi)^{(i)}\|_\infty \\
\text{Leibniz} \longrightarrow\ &= c.\max_{0 \leq i \leq p} \Big\| \sum_{k=0}^{i} C_i^k \psi^{(k)} \varphi^{(i-k)} \Big\|_\infty \\
&\leq \underbrace{\tilde{c}.\max_{\substack{0 \leq i \leq p \\ x \in K}} \|\psi^{(i)}(x)\|}_{=:\hat{c}} . \max_{0 \leq i \leq p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{c} := \sum_{k=0}^{i} C_i^k$. Les ctes $\hat{c}$ et p conviennent. $\square$

Ex. : $\psi(x) = x$ et $T = \delta'$; soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\langle x\delta', \varphi \rangle &= \langle \delta', x\varphi \rangle \\
&= -\langle \delta, (x\varphi)' \rangle \\
&= -(x.\varphi)'(0) \\
&= -(\varphi + x.\varphi')(0) \\
&= -\varphi(0) \\
&= -\langle \delta, \varphi \rangle \quad : \quad x\delta' = -\delta \ \text{(cf. aussi TD 6).}
\end{aligned}
$$

Prop. ("division") : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $x.T = 0 \iff (\exists\, c \in \mathbb{R}) : T = c.\delta$.

dém. : si $T = c.\delta$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle x.T, \varphi \rangle = \langle x(c.\delta), \varphi \rangle$$
$$= c \langle \delta, x\varphi \rangle$$
$$= c.(x.\varphi(x))\big|_{x=0}$$
$$= 0.$$

Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$, et T s'annule sur l'ensemble des fonctions
$$B := \{ x\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \}.$$
Si $\psi \in B$, $\psi(0) = (x\varphi)(0) = 0$; réciproquement, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'annule en 0, on vérifie par récurrence que
$$\varphi(x) := \psi(x)/x \text{ si } x \neq 0$$
$$= \psi'(0) \text{ si } x = 0$$
est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et à support compact $\subset \operatorname{supp} \psi$) : comme $\psi = x\varphi$, on a mq B est en fait égal à $\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0 \}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\varphi - \varphi(0).\varphi_0 \in B$$
(où $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est choisie pour que $\varphi_0(0) = 1$) ; donc :

$$0 = \langle T, \varphi - \varphi(0).\varphi_0 \rangle$$
$$= \langle T, \varphi \rangle - \varphi(0).\langle T, \varphi_0 \rangle \text{ par linéarité}$$
$$\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \underbrace{\langle T, \varphi_0 \rangle}_{=: c}.\varphi(0)$$
$$= c \langle \delta, \varphi \rangle$$
$$\Rightarrow T = c.\delta. \quad \square$$

On en déduit en particulier l'ens. des solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à l'équation $x.T' = 0$;

en effet, d'après ce qui précède, $x.T' = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}$ tq $T' = c.\delta$

ie $(T - c.T_H)' = 0$ (cf. $(T_H)' = \delta$)

$\iff (\exists d \in \mathbb{R}) : T - c.T_H = d.T_1$: donc $\exists c, d \in \mathbb{R}$ tq

$$T = c.T_H + d.T_1$$
$$= T_{cH+d}$$: distribution régulière associée à la (classe de) fonction(s)

$cH + d : x \longmapsto c.H(x) + d = d$ si $x < 0$
$= c + d$ si $x > 0$;

on résout ainsi, au sens des distributions l'équation vue en introduction (et on trouve bien des solutions généralisées — "faibles" — ctes par morceaux et pas nécessairement $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$).

Remarquons qu'on a agrandi strictement l'ensemble des solutions de (1) puisque $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sol. de (1)

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x.y'(x) = 0$

$\Rightarrow (\forall x < 0) : y'(x) = 0$ et $(\forall x > 0) : y'(x) = 0$

$\Rightarrow (\exists c_1 \in \mathbb{R}) : y_{|\mathbb{R}_-^*} = c_1$ et $(\exists c_2 \in \mathbb{R}) : y_{|\mathbb{R}_+^*} = c_2$

Mais $\varphi \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^0$,

donc $c_1 = c_2$: l'ensemble des solutions de (1) est donc restreint à l'ensemble des fonctions ctes.

Ch. IV - Formulation faible de problème aux limites.

2. Formulation faible en dimension un.

Motivation : considérons le problème suivant : trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est une fonction donnée.
On peut se ramener à un système d'ordre 1 en posant $U = (u, u') : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, auquel cas on a :

$$\begin{cases} U'(x) = g(x, U(x)) \\ U_2(0) = 0, \quad U_2(1) = 0 \end{cases}$$

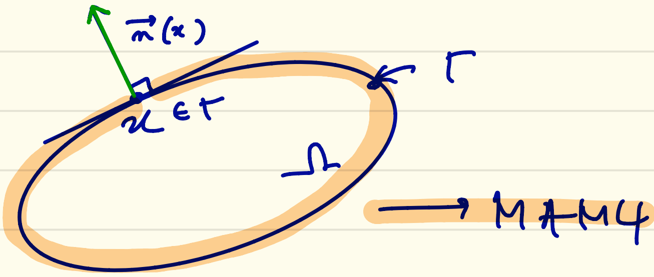
avec $g(x, U_1, U_2) = (U_2, U_1 - f(x))$. Il ne s'agit pourtant pas d'un problème de Cauchy (cf. Chap. 2, TD 2) puisque les conditions aux limites sont réparties en $x=0$ et $x=1$ (on ne connaît ni $U_1(0) = u(0)$, ni $U_1(1) = u(1)$).
En dimension 1 ($x \in]0,1[$, ouvert de $\mathbb{R}$), on peut traiter ce problème par une "méthode tir" consistant à "deviner" $u(0)$ et à intégrer ("tirer"...) pour voir si on tombe sur $u'(1) = 0$ (la "cible"). $\longrightarrow$ MAM5

On va s'intéresser à une autre approche, qui a le mérite de s'étendre naturellement à la dimension $n \geq 1$, permettant de traiter par exemple un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \Omega & (1)_n \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 & \text{(Conditions de "Neumann")} \end{cases}$$

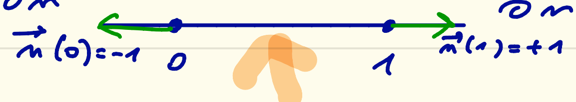
où on cherche $u \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, où $f \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega)$, où $\Gamma = \partial\Omega$ (bord de Ω), et où $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma$ est la "dérivée normale" de u en un pt du bord :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u'(x).\vec{n}(x)$$



Le problème (1) est donc exactement la version de $(1)_n$ pour $n=1$ et $\Omega =]0,1[$

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}(0) = -u'(0), \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(1) = u'(1) \dots \right)$



Soit donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ une solution de (1) ; on va "tester" u (vu comme la distribution régulière T_u, cf. §1) à l'aide de (classes de) fonctions $H^1(]0,1[)$.

<u>Déf.</u> : $H^1(]0,1[) = \{ v \in L^2(]0,1[) \mid v' \in L^2(]0,1[) \}$

$= \{ v \in L^2(]0,1[) \mid \exists w \in L^2(]0,1[)$ tq :

$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[))$: $\displaystyle\int_0^1 v.\varphi'\,dx = -\int_0^1 w.\varphi\,dx \}$.

$(v' = w$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[))$

<u>Th.</u> : $H^1(]0,1[)$, muni du produit scalaire

$$(u|v)_{H^1} := (u|v)_{L^2} + (u'|v')_{L^2}$$

est un espace de Hilbert. Toute (classe de) fonction(s) $u \in H^1(]0,1[)$ possède un représentant $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et p.p. $x \in [0,1]$,

$$u(x) = \tilde{u}(x) = \tilde{u}(0) + \int_0^x u'(y)\,dy.$$

De plus, si u et $v \in H^1(]0,1[)$, $u.v \in H^1(]0,1[)$ aussi et $(u.v)' = u'.v + u.v'$ (p.p.) : en particulier, la formule d'intégration par parties est licite pour u et $v \in H^1(]0,1[)$:

$$\int_0^1 u'.v\,dx = [u.v]_0^1 - \int_0^1 u.v'\,dx.$$

<u>dém.</u> : cf. TD 7, exo 1.

Si $v \in H^1(]0,1[)$, u sol. de (1),

$$\underbrace{\int_0^1 (-u''+u).v\,dx}_{} = \int_0^1 f.v\,dx$$

$$= \underbrace{[-u'.v]_0^1}_{-\cancel{u'(1)}.v(1)+\cancel{u'(0)}.v(0)} + \int_0^1 u'.v'+u.v \quad \text{par i.p.p. } H^1$$

$0 \qquad 0 \longleftarrow$ cf. CL Neumann

$$\Rightarrow (\forall v \in H^1(]0,1[)) : (u|v)_{H^1} = \int_0^1 f.v\,dx \quad (2)$$

On vient de mq, toute solution de (1) (on dit "solution forte"), est aussi solution de (2) ("solution faible") : c'est la première étape de la "démarche variationnelle",

A. Toute solution forte est solution faible.

B. Existence et unicité d'une solution faible.

Remarquons que la forme linéaire $\varphi : v \mapsto \int_0^1 f v\,dx$ qui intervient dans (2) est continue ; en effet,

$$(\forall v \in H^1(]0,1[)) : |\varphi . v| = \left|\int_0^1 f v\,dx\right| = |(f|v)_{L^2}|$$
$$\underset{C.S.}{\leq} \|f\|_{L^2} . \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} . \|v\|_{H^1}.$$

Autrement dit, $(2) \iff (\forall v \in H^1) : (u|v)_{H^1} = \langle \varphi, v \rangle$

<u>Th.</u> (Riesz) : soit $(E, (.|.))$ un e.h., et soit $\varphi \in E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue sur E. Alors, $(\exists!\, x \in E)$:
$$(\forall y \in E) : \varphi(y) = (x|y).$$
De plus, $\|\varphi\|_{E'} = \|x\|_E$

$\|\varphi\|_{E'} = \inf\{k \geq 0 \mid (\forall y \in E) : |\varphi(y)| \leq k . \|y\|_E\}$

de sorte qu'on a un isomorphisme isométrique entre E et son dual topologique E'.

<u>Remarque</u> : sur $(\mathbb{R}^n, (.|.))$, $\varphi = [a_1 \cdots a_n] \in \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}_{(\mathbb{R}^n)'}$,

$$\varphi \cdot y = [a_1 \cdots a_n] . \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left(\underset{x}{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} \middle| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) : x = {}^t\varphi \in \mathbb{R}^n$$

Le th. de Riesz, affirme donc exactement qu'il existe une et une seule solution faible.

En général, cette solution faible $u \in H^1(]0,1[)$ mais $u \notin \mathcal{C}^2([0,1]) \subsetneq H^1(]0,1[)$. Sous des hypothèses supplémentaires de régularité (ici : $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$; en dimension $n > 1$, on aurait également besoin de régularité du bord $\Gamma := \partial\Omega$), on peut remonter à une solution forte !

C. Régularité de la sol. faible.

$\left(\forall v \in \mathcal{D}(]0,1[) \subset H^1(]0,1[)\right)$:

$$(u|v)_{H^1} = (u'|v')_{L^2} + (u|v)_{L^2} = \int_0^1 f v \, dx$$

$\Rightarrow \langle u', v' \rangle + \langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle$

(ie : $\langle T_{u'}, v' \rangle + \langle T_u, v \rangle = \langle T_f, v \rangle$

et $u \in H^1 \Leftrightarrow (T_u)' = T_{u'}$, $u' \in L^2 \subset L^1_{loc} \ldots$)

$\Rightarrow -\langle u'', v \rangle + \langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle$

$\Rightarrow -u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$

$\Rightarrow u'' = u - f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \supset H^1(]0,1[)$

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.

D. Toute solution faible est solution forte.

Sous les hypothèses de régularité précédentes ($f \in \mathcal{C}^0([0,1])$), la solution faible $u \in H^1(]0,1[)$ vérifie :

$$\left(\forall v \in H^1(]0,1[)\right): \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx = \int_0^1 f v\,dx$$

$$\Rightarrow \quad [u'.v]_0^1 + \int_0^1 (-u''+u)v\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

i.p.p. puisque $u \in \mathcal{C}^2$

$$\Rightarrow \quad \cancel{u'(1).v(1) - u'(0).v(0)} + \int_0^1 (-u''+u-f)v\,dx = 0 \quad (*)$$

en particulier,

$$\left(\forall v \in \mathcal{D}(]0,1[)\right): \underbrace{\int_0^1 (-u''+u-f)v\,dx}_{(-u''+u-f \mid v)_{L^2}} = 0$$

$$\overline{\mathcal{D}(]0,1[)}^{\|.\|_2} = L^2(]0,1[)$$

$$\Longrightarrow \quad -u''+u-f = 0 \quad (p.p)$$

$$\Longrightarrow \quad -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\quad (\text{cf. } u \in \mathcal{C}^2)$$

Donc $(*) \Rightarrow \left(\forall v \in H^1(]0,1[)\right): u'(1).v(1) - u'(0).v(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

(prendre $v(x) = x$ et $v(x) = 1-x$).

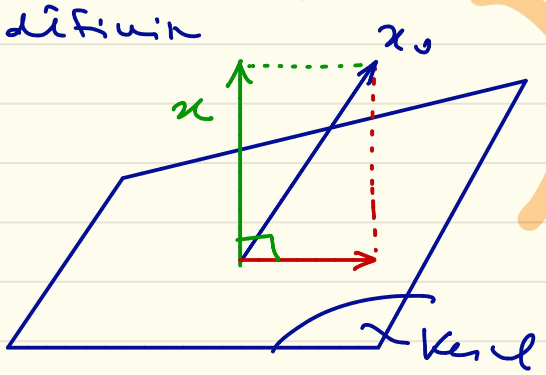
Pour d'autres conditions aux limites, voir le TD 7... et le mini-projet.

L'approche variationnelle est la base de la méthode des éléments finis (cf. MAM4) qui permet de résoudre numériquement ce type de problème, y compris en grande dimension n.

$\longrightarrow$ MAM4

Preuve du th. de Riesz :

Soit $\varphi \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue sur $(E, (\cdot|\cdot))$, e.h. Supposons $\varphi \neq 0_{E'}$ (sinon $x = 0_E$ convient !) Alors, $\exists x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$. Comme $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un sev fermé (φ linéaire continue), donc on peut projeter x_0 sur $\operatorname{Ker}\varphi$ et définir



$$x := x_0 - \overline{\Pi}_{\operatorname{Ker}\varphi}\, x_0$$

Clairement $x \perp \operatorname{Ker}\varphi$;
soit $y \in E$, par linéarité

$$\varphi\left(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x\right) = 0$$

(noter que $\varphi(x) \neq 0$ — sinon $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, ie $x_0 \in \operatorname{Ker}\varphi$!)

$$\Rightarrow y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x \in \operatorname{Ker}\varphi$$

$$\Rightarrow \left(x \,\middle|\, y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \cdot x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \Big(\underbrace{\frac{\varphi(x)}{\|x\|^2} \cdot x}_{\text{ce vecteur convient}} \,\Big|\, y\Big). \quad \square$$