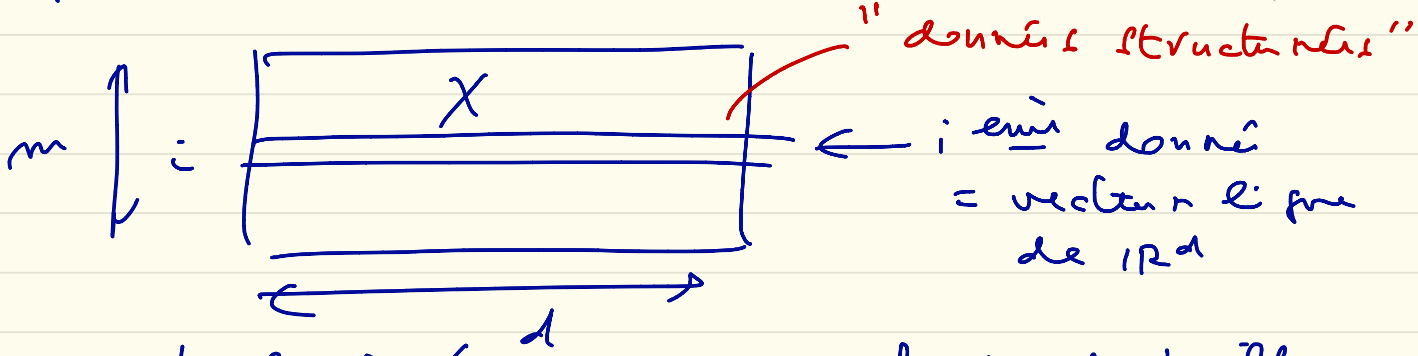
TD4 - Projection, orthogonalité

Exo 1. Cadre matriciel $M(n,\mathbb{R}) = M(n,n,\mathbb{R})$
$\simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

$$A = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \quad (n \times n)$$

Applications : ML (= Machine Learning)



ex. : biologie / médecine, cohorte de taille
$m \ll d$; d = nombre de gènes ($\simeq 10^4 \ldots$)
réduction de dimension :
W tq $X \longrightarrow X\cdot W : m \times d'$,
$d' \ll d \ldots$

$\dim_{\mathbb{R}} M(n,\mathbb{R}) = n^2$

Base canonique de $M(n,\mathbb{R})$:

$$E_{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,n} = \sum_i \sum_j a_{ij} \cdot E_{ij}$$

$(X|Y) = tr({}^tX.Y)$: mq on définit ainsi un produit scalaire sur E ; ← prod. scalaire Frobenius

i) <u>bilinéarité</u> :

$$(X,Y) \longmapsto ({}^tX, Y) \longmapsto {}^tX.Y \overset{tr}{\longmapsto} tr({}^tX.Y)$$

$({}^t(\lambda A + B) = \lambda\,{}^tA + {}^tB$: transposition linéaire$)$

$$\Big(tr(\lambda A + B) = tr\big((\lambda a_{ij} + b_{ij})_{i,j}\big)$$
$$= \sum_i \lambda a_{ii} + b_{ii}$$
$$= \lambda\, tr(A) + tr(B) : \text{linéaire}\Big)$$

D'où la linéarité par rapport à X et Y de cette application.

ii) <u>symétrie</u> : $(Y|X) = tr({}^tY.X) \overset{?}{=} tr({}^tX.Y)$

$$= tr({}^t({}^tY.X))$$
$$(\text{cf. } tr({}^tA) = tr\,A)$$
$$= tr({}^tX.Y)$$
$$= (X|Y).$$

iii) <u>définie positivité</u> :

$$tr({}^tX.Y) = \sum_{i=1}^{n} z_{ii} \quad \text{où } Z = (z_{ij})_{i,j} = {}^tX.Y$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ({}^tX)_{i,k} \cdot (Y)_{k,i} \quad (\text{cico})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \cdot y_{ki}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \cdot y_{ij}$$

$$= \left(X(:) \mid Y(:) \right)_{\mathbb{R}^{n^2}}$$

où $X(:) := \begin{bmatrix} | \\ x_1 \\ | \\ \hline \vdots \\ \hline | \\ x_n \\ | \end{bmatrix}$ (n^2 lignes, blocs de n) avec $X = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

($x_j = j^{\text{ème}}$ colonne de X)

$$\text{Donc } tr({}^tX.X) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} \overbrace{x_{i,j}^2}^{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow (\forall i, j = 1, n) : x_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow X = 0_{M(n,\mathbb{R})} : \text{défini ;}$$

$tr({}^tX.X) = \sum_{i,j} x_{i,j}^2 \geq 0$: positivité.

Remarque : $\widehat{tr({}^tX.X)}$: ${}^tX.X$ sym. $\underbrace{\geq 0}_{\text{semi-déf. positive}}$

$${}^t({}^tX.X) = {}^tX.{}^t({}^tX) = {}^tX.X : \text{sym.}$$

On rappelle $A \in Sym(n, \mathbb{R})$ est dite :

i) $A \geq 0$ (" semi-définie positive ") :

$$a \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : a.x^2 \geq 0$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) : (Ax \mid x)_{\mathbb{R}^n} \geq 0$$

ii) $A > 0$ ("définie positive") :

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Leftrightarrow (\forall x \neq 0) : ax^2 > 0$

$A > 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0) : (Ax \mid x)_{\mathbb{R}^n} > 0.$

Ici, soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$({}^tX X . x \mid x) = (X.x \mid X.x)$
$= \|X.x\|^2 \geq 0$: ${}^tXX \geq 0.$

De plus, ${}^tXX$ étant symétrique réelle, elle se diagonalise sur $\mathbb{R}$ (dans une BON = Base Orthonormée de $\vec{vp}$ = vecteurs propres) ; on sait également

$\begin{cases} A \geq 0 \Leftrightarrow \text{toutes les vp de } A \text{ sont } \geq 0 \\ A > 0 \Leftrightarrow \text{———————} > 0 \end{cases}$

Ici, $\mathrm{tr}({}^tXX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\lambda_1 \to \lambda_n$ vp de ${}^tXX$

${}^tXX \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \mathrm{tr}({}^tXX) \geq 0.$

Si jamais $\mathrm{tr}({}^tX.X) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
$\Rightarrow {}^tXX = 0$
$\Rightarrow X = 0$.

1.2. Soient X et $Y \in M(n, \mathbb{R})$,

(1) $({}^tX \mid {}^tY) = \mathrm{tr}({}^t({}^tX).{}^tY)$
$= \mathrm{tr}(X.{}^tY)$
$= \mathrm{tr}({}^tY.X) = (Y \mid X) = (X \mid Y).$

Cf. $\mathrm{tr}(B.A) = \mathrm{tr}(A.B)$

Rappel : deux matrices semblables ont même trace (cf. la trace est l'un des coeffs du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \det(\lambda I - A)$$ mat. semblable à A
$$= \det(\lambda I - (PAP^{-1})) \quad (P \text{ inv.})$$
$$= \det(P(\lambda I - A)P^{-1})$$
$$= \cancel{\det}(P) \cdot \chi_A(X) \cdot \underbrace{\det(P^{-1})}_{(\cancel{\det} P)^{-1}} \Big)$$

Or, si B est inversible, AB et BA sont semblables puisque :

$$AB = B^{-1} \cdot (BA) \cdot B$$

Comme toute matrice $B \in M(n, \mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles (cf. $\overline{GL(n, \mathbb{R})} = M(n, \mathbb{R})$), on a :

$$\mathrm{tr}(B \cdot A) = \mathrm{tr}(\overbrace{\lim_n B_n}^{B} \cdot A)$$
$$\in GL(n, \mathbb{R})$$
$$= \lim_n \underbrace{\mathrm{tr}(B_n \cdot A)}_{\mathrm{tr}(A \cdot B_n)} \quad (\mathrm{tr} \text{ continue})$$
$$= \mathrm{tr}(A \cdot B) \quad (\text{continuité bis}).$$

② Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$, mq

$$(AX | Y) = (X | {}^tA \cdot Y) \quad ?$$

On a $(AX|Y) = \mathrm{tr}({}^t(AX).Y)$
$= \mathrm{tr}(({}^tX\,{}^tA).Y)$
$= \mathrm{tr}({}^tX.({}^tA.Y))$ (associativité)
$= (X\,|\,{}^tA.Y)$

③ Soit $O \in O(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA.A = A.{}^tA = I\}$

$\cap$
$GL(n,\mathbb{R})$ (ie $A^{-1} = {}^tA$)

groupe orthogonal

Mq $X \overset{\varphi}{\longmapsto} O.X$ isométrie de $(M(n,\mathbb{R}),(.|.))$

<u>Rappel</u>: une isométrie est une application qui préserve la norme: on dit mq

$$\|O.X\|_{M(n,\mathbb{R})} = \|X\|.$$

On sait que c'est en fait équivalent à préserver le produit scalaire (ie ici à:

$(O.X\,|\,O.Y) = (X|Y)$); en effet, le produit scalaire d'un e.e. s'exprime en fonction de la norme ("polarisation"):

$x, y \in \underbrace{(E, (.|.))}_{\text{e.e.}}$,

$\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ ...

$$(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Ici, soit $X \in M(n, \mathbb{R})$,

$$\|OX\|^2 = (OX \mid OX)$$
$$= \operatorname{tr}({}^t(OX) \cdot OX)$$
$$= \operatorname{tr}({}^tX \cdot \underbrace{({}^tO \cdot O)}_{I} \cdot X)$$
$$= \|X\|^2 .$$

Exo 2. 1) Déterminer le projeté orthogonal de $x_0 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto x_0(t)$ $\in L^2([0, 2\pi])$

(cf. x_0 continue sur le compact $[0, 2\pi]$, donc bornée : $x_0 \in L^\infty(\underbrace{[0, 2\pi]}_{\mu < \infty}) \subset L^2([0, 2\pi])$:

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{|x(t)|}_{\leq M}{}^2 \, dt \leq 2\pi \cdot M^2 < \infty \quad)$$

sur $F = \operatorname{Vect}\{\sin, \cos\} \underset{\text{sev}}{\subset} L^2([0, 2\pi])$.

(= sous espace vectoriel)

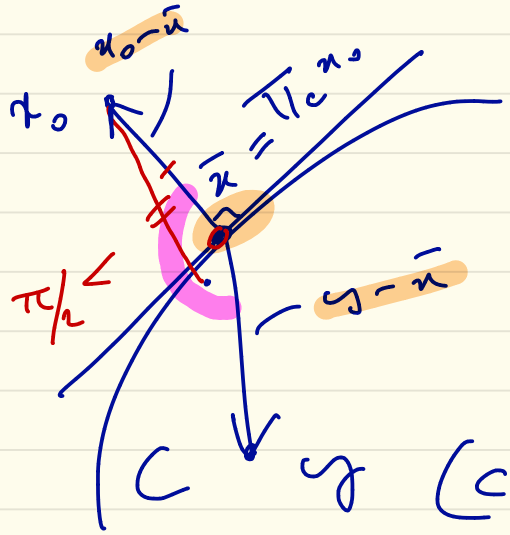
Ie : trouver $\bar{x} \in F$ tq

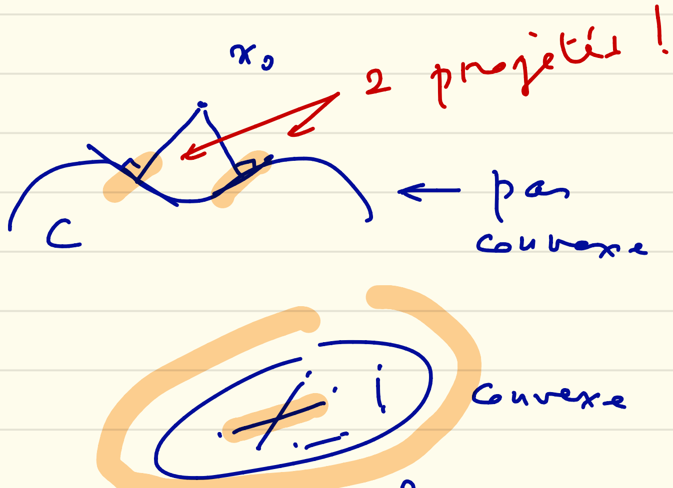
$$\|x_0 - \bar{x}\|_{L^2} = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|.$$
$$=: d(x_0, F).$$

On est donc en train de résoudre le problème d'approximation (au sens L^2) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big|\underbrace{e^t}_{x_0(t)} - (\underbrace{a\sin t + b\cos t}_{\in F})\Big|^2} \to \min \\ \underbrace{(a,b)}_{\text{2 inconnues}} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Dans l'e.h. $(L^2([0,2\pi]), \langle\cdot|\cdot\rangle)$, il suffit que les hypothèses du th. de la projection soient remplies pour garantir l'existence et l'unicité de ce projeté (qui est dans ce cas le "projeté orthogonal $\Pi_F x_0$" de x_0 sur F).

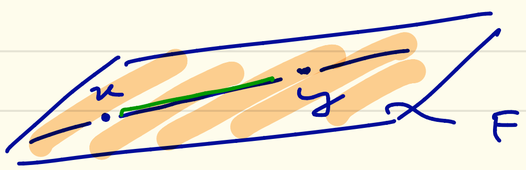




(C doit être convexe, fermé $\neq \emptyset$)

Ici, F est un sev, $F = \mathrm{Vect}\{\sin, \cos\}$:

- F sev $\Rightarrow 0 \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$
- F sev $\Rightarrow F$ convexe, cf. une combinaison convexe est une combinaison linéaire !



Ie : soient $x, y \in F$, il faut que $[x,y] \subset F$,

ie que $(\forall \lambda \in [0,1]) : (1-\lambda)x + \lambda y \in F$

CL $\in F$

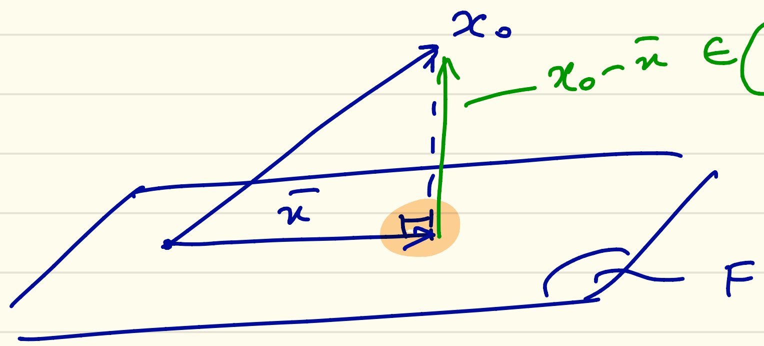
de vecteurs de F, donc $\in F$!

– F sev de dim finie $\Longrightarrow$ F fermée

(cf. $\dim_{\mathbb{R}} F \leq 2$) (cf. aussi exo 3)

Le th. de la projection s'applique : $\exists ! \, \bar{x} \in F$ caractérisé par l'inéquation variationnelle suivante :

$(\forall y \in F) : (x_0 - \bar{x} \mid y - \bar{x}) \leq 0$ (*)



$x_0 - \bar{x} \in F^{\perp}$: $(x_0 - \bar{x} \mid y) = 0$, $\forall y \in F$

cf. § III. 3

Soit $y \in F$; $\bar{x} \in F$, $y + \bar{x} \in F$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $(x_0 - \bar{x} \mid \underbrace{(y+\bar{x}) - \bar{x}}_{y}) \leq 0$ (**)

De plus, F sev $\Longrightarrow$ si $y \in F$, $-y \in F$,

(**) $(x_0 - \bar{x} \mid (-y)) \leq 0$

$\Longrightarrow (x_0 - \bar{x} \mid y) \geq 0$: $(x_0 - \bar{x} \mid y) = 0$

Donc, $(x_0 - \bar{x} \mid y) = 0, \forall y \in F$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x_0 - \bar{x} \mid \sin) = 0 \\ (x_0 - \bar{x} \mid \cos) = 0 \end{cases} \quad \text{2 équations}$$

2 inconnues

De plus, $\bar{x} \in F \Longrightarrow (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2)$:

$$\bar{x} = a.\sin + b.\cos$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x_0 - (a.\sin + b.\cos) \mid \sin) = 0 \\ (x_0 - (a.\sin + b.\cos) \mid \cos) = 0 \end{cases} \quad \text{SL } 2 \times 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad G.\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec}$$

$$G = \begin{bmatrix} (\sin \mid \sin) & (\cos \mid \sin) \\ (\sin \mid \cos) & (\cos \mid \cos) \end{bmatrix}$$ matrice de Gram de $\{\sin, \cos\}$

$$c = \begin{bmatrix} (x_0 \mid \sin) \\ (x_0 \mid \cos) \end{bmatrix}, \quad x_0 = e^t$$

$$(\sin \mid \sin) = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \ldots$$

$$(e^t \mid \sin) = \int_0^{2\pi} e^t . \sin t \, dt = \ldots$$

ipp (ou) :

$$\operatorname{Im}\left(\int_0^{2\pi} e^t . e^{it}\right) = \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} e^{(1+i)t} dt$$

TD 4 - Projection, orthogonalité (fin)

Exo 2.

Calculer $(e^t \mid \sin t)$, $(e^t \mid \cos t)$ ainsi que la matrice de Gram associée à $\{\sin, \cos\}$.

$$(\sin \mid \sin) = \|\sin\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt$$

$$\left(\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ \Rightarrow \sin^2 t &= \frac{1-\cos 2t}{2} \end{aligned} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot dt$$

$$= \pi \quad (\Rightarrow \|\sin\| = \sqrt{\pi})$$

Idem : $\|\cos\|^2 = \pi$

$$(\cos \mid \sin) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\overset{u'}{\cos t} \cdot \overset{u}{\sin t}}_{\sin 2t = 2\cos t \cdot \sin t} \, dt = \frac{1}{2} \sin^2 t \Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \quad \text{(diagonal inversible)}$$

$$(e^t \mid \sin t) = \mathrm{Im} \int_0^{2\pi} \overbrace{e^t \cdot e^{it}}^{e^{(1+i)t}} dt$$

$$= \mathrm{Im} \left[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)t} \right]_0^{2\pi}$$

Re pour cos

$$= \mathrm{Im} \left[\frac{1}{1+i} \left(e^{2\pi} - 1 \right) \right] = (e^{2\pi} - 1) \cdot \mathrm{Im} \left(\frac{1-i}{2} \right)$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi}}{2}$$

Idem pour $(e^t \mid \cos) = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^{(1+i)t}\,dt$

$= (e^{2\pi} - 1)\, \mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}\right)$

$= \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$

$\Rightarrow \quad c = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$G \cdot c = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \\ b = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \end{cases}$

Ie : $\boxed{\bar{x} = \Pi_F e^t = a \cdot \sin + b \cdot \cos = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} (\cos - \sin).}$

Exo 3. 3.1. $X = (x_n)_n \in \ell^2 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$;

(cf. TD 3) On pose

$(X \mid Y) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$: bien défini, ie est-ce que la Σ CV ? ← CV ?

Ie est-ce que la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} x_n \cdot y_n\right)_N$ CV dans $(\mathbb{R}, |.|)$?

Rappel : dans un evn complet (Banach, cf. Ch. II), la CVN (= CV normale) implique la CV pour les séries : si

CV dans $\mathbb{R}$

$\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right)_N$ est telle que $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|}_{\geq 0} < \infty$,

alors $\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right)_N$ CV dans E.

En effet, E étant complet, il suffit de m.q. la suite des sommes partielles

$\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right)_N$ $\leftarrow =: S_N$ vérifie le critère de Cauchy ;

or, $\|S_{N+p} - S_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{N+p} x_n\right\|$

$\leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| \leq \varepsilon$ pour

N assez grand (et $\forall p$) car $\sum_n \|x_n\| < \infty$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N} \|x_n\|\right)_N$ est de Cauchy !

Remarque : on vient de m.q., si $(E, \|.\|)$ complet on a CVN $\Rightarrow$ CV pour les séries ; la réciproque est vraie : un evn $(E, \|.\|)$ dans lequel CVN $\Rightarrow$ CV pour les séries est nécessairement complet. C'est comme ça qu'on démontre la complétude des $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ (Th. Riesz-Fischer).

Il suffit donc ici de mq $\sum_n |x_n . y_n| < \infty$.

Or, $|x_n . y_n| \leq \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2}$ (cf. $(|a|-|b|)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \sum_n |x_n . y_n| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_n |x_n|^2 + \sum_n |y_n|^2\right)}_{< \infty \text{ car } X, Y \in \ell^2}$ $\Updownarrow$ $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$)

Donc $\sum_n x_n . y_n$ CVN dans $\mathbb{R}$, donc CV.

i) bilinéarité : $(\lambda X + Y | Z)$

$= \sum_n \lambda(x_n + y_n) . z_n$

$= \lambda \sum_n x_n . z_n + \sum_n y_n . z_n$

par continuité de $+$ et λ.

$= \lambda (X | Z) + (Y | Z)$;

idem pour l'autre sens ;

ii) symétrie : évidente

iii) définie positivité : $\sum_n \overbrace{|x_n|^2}^{\geq 0} \geq 0$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|x_n|^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n|^2 = 0$

$\Rightarrow X = (0)_n = 0_{\ell^2}$.

<u>Remarque</u> : $\ell^2 = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$
avec $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,
$\mu = \mu_d$ = card ; sur $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ on a la structure hilbertienne canonique

$$(f|g) := \int_X f(x).g(x)\,d\mu(x)$$

$f, g \in L^2(X,\mathcal{T},\mu)$

Ici, x et $y \in \ell^2 = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$,

$$(x|y) = \int_{\mathbb{N}} x(n).y(n)\,d\mu_d(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n . y_n .$$

3.2. Soit $k \geq 1$, on définit

$$G_k := \{ x \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{k-1} x_n = 0 \}$$ cf. § $\overline{\underline{\text{III}}}$.3

$$= A^{\perp} \quad (\Rightarrow G_k \text{ sev fermé})$$

avec $A = \{x_0\}^{\perp}$

puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} x_n = \sum_{n=0}^{k-1} x_n . 1 + \sum_{n=k}^{\infty} x_n . 0$

$$= (x \mid x_0)$$

où $x_0 = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$

suite presque nulle
(ie termes tous nuls à partir d'un certain rang)

3.3. Calculer $d(x, G_b)$ où $x = (1, 0, \dots) \in \ell^2$;

par déf., $d(x, G_b) := \inf_{y \in G_b} \|x - y\|$

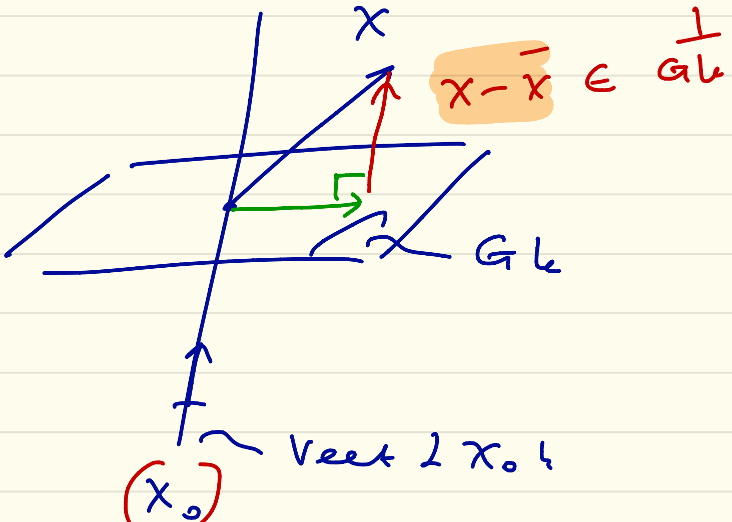
$= \|x - \bar{x}\|$ où $\bar{x}$ est le projeté orthogonal $\pi_{G_b} x$ si G_b est une partie convexe, fermée $\neq \emptyset$;

or, ici G_b sev $\Rightarrow$ convexe et $\neq \emptyset$,
G_b fermé

donc le th. de la projection s'applique dans l'e.h. $(\ell^2, (\cdot|\cdot))$.

On sait que $\bar{x}$ est caractérisé (cf. G_b sev) par :

$$x - \bar{x} \in G_b^{\perp}$$



dim $1 < \infty$
$\Rightarrow$ sev fermé

$$x - \bar{x} \in G_b^{\perp} = (\{x_0\}^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\{x_0\}} = \mathrm{Vect}\{x_0\}$$

(cf. $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$)

$\Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \quad x - \bar{x} = \lambda \cdot x_0 \quad \Leftarrow$ 1 inconnue

$\swarrow$ 1 équation

De plus, $\bar{x} \in G_k \Longrightarrow (\bar{x} \mid x_0) = 0$.

Donc, $\begin{cases} x - \bar{x} = \lambda x_0 \Longrightarrow \bar{x} = x - \lambda x_0 \\ (\bar{x} \mid x_0) = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow (x - \lambda x_0 \mid x_0) = 0$$

$$\Longrightarrow (x \mid x_0) - \lambda \overbrace{(x_0 \mid x_0)}^{\neq 0 \text{ car } x_0 \neq 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{(x \mid x_0)}{\|x_0\|^2}$$

$$(\underbrace{\overset{0}{1}, \overset{1}{1}, \dots, \overset{k-1}{1}}_{k}, 0, \text{—})$$

$$\Longrightarrow d(x, G_k) = \|x - \bar{x}\|$$

$$= \|\lambda \cdot x_0\|$$

$$= |\lambda| \cdot \|x_0\|$$

$$= \frac{|(x \mid x_0)|}{\|x_0\|} \leftarrow \sqrt{(x_0 \mid x_0)} \quad (\cdot \mid \cdot)\ \ell^2$$

$(1, 0, \dots)$ $\quad (1, \dots, 1, 0, \dots)$

$$(x \mid x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot x_{0,n}$$

$$= \underbrace{1.1 + \cancel{0.1} + \cancel{0.1} + \dots}_{k \text{ fois}} + 0.0 + \dots$$

$$= 1$$

$$(x_0 \mid x_0) = \underbrace{1.1 + 1.1 + \dots + 1.1}_{k \text{ fois}} + 0.0 + \dots$$

$$= k \Longrightarrow \|x_0\| = \sqrt{k}$$

$$\Longrightarrow d(x, G_k) = 1/\sqrt{k}$$

(et $\bar{x} = (1, 0, \dots) - 1/\sqrt{k}\,(1, \dots, 1, 0, \dots)$
$= (1 - \frac{1}{\sqrt{k}}, \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{k}}}_{k-1 \text{ fois}}, 0, \dots)$), $k \geq 1$

Exo 4.

$$(*) \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left| x^5 - (a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \right|^2 dx \longrightarrow \min \\ (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} |x^5 - P(x)|^2 \longrightarrow \min \\ P \in \mathbb{R}_4[X] \end{cases}$$

← polynômes à coeffs réels de degré ≤ 4

Comme $\mathbb{R}_4[X] \subset \mathcal{C}^0([-1,1]) \subset L^2([-1,1])$, on a un problème de projection dans $(L^2([-1,1]), (\cdot|\cdot))$:

$$\iff \begin{cases} \| x^5 - P \|_{L^2([-1,1])}^{\cancel{2}} \longrightarrow \min \\ P \in \mathbb{R}_4[X] \end{cases}$$

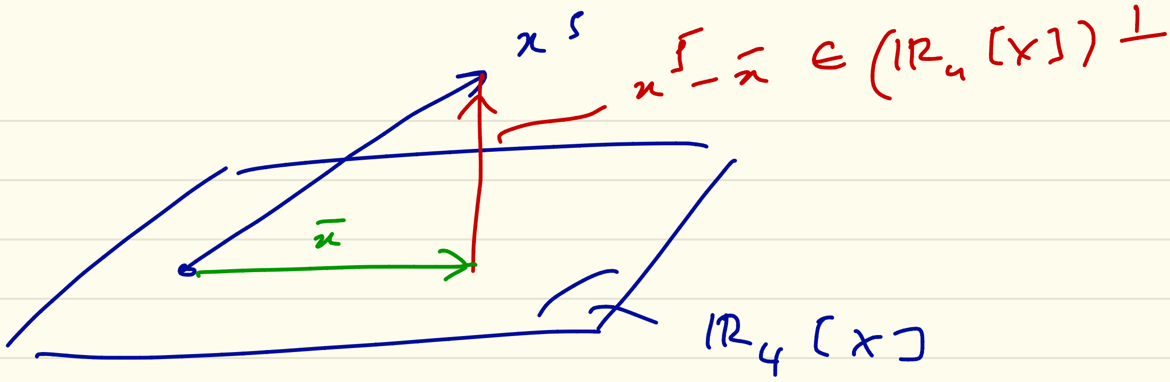
cf. $\displaystyle (f|g) = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$

Comme $\mathbb{R}_4[X]$ est un sev de $L^2([-1,1])$, $\mathbb{R}_4[X]$ est convexe $\neq \emptyset$; de plus,

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_4[X] = 5$ (cf. $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ base)

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_4[X]$ de dim finie est fermé dans $L^2([-1,1])$. Il suffit donc pour résoudre $(*)$ de déterminer le projeté orthogonal de $x \longmapsto x^5$ $(\in L^2([-1,1]))$ sur $\mathbb{R}_4[X]$.

[NB : $\mathbb{R}[X] = \{$ suites presque nulles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \}$.]



$\bar{x} = \Pi_{\mathbb{R}_4[X]}\, x^5 \in \mathbb{R}_4[X]$

5 inconnues

$\Rightarrow \left(\exists (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5 \right) : \bar{x} = a_0 + a_1 x + \dots + a_4 x^4$

et
$$\begin{cases} (x^5 - \bar{x} \mid 1) = 0 \\ (x^5 - \bar{x} \mid x) = 0 \\ \vdots \\ (x^5 - \bar{x} \mid x^4) = 0 \end{cases}$$

5 équations

En particulier :

$$(x^5 - (a_0 \cdot 1 + \dots + a_4 \cdot x^4) \mid 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_0 (1 \mid \underline{1}) + a_1 (x \mid \underline{1}) + \dots + a_4 (x^4 \mid \underline{1}) = (x^5 \mid \underline{1})}_{\text{1ère ligne du système linéaire } 5\times 5 \text{ en } a := (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5}$$

On a donc le système linéaire suivant :

$A \cdot a = b$, avec

$$A = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} (x^i \mid x^j) \end{bmatrix} \end{array}, \quad b = \begin{bmatrix} (x^5 \mid 1) \\ \vdots \\ (x^5 \mid x^4) \end{bmatrix}$$

$(i, j = 0, \dots, 4)$ mat. de Gram $\{1, x, \dots, x^4\}$

On est conduit à évaluer des produits scalaires de la forme :

$$(x^i \mid x^j) = \int_{-1}^{1} x^i \cdot x^j \, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x^{i+j} \, dx$$
$$= \frac{1}{i+j+1} \cdot x^{i+j+1} \Big]_{-1}^{1}$$
$$= 0 \text{ si } i+j \text{ impair}$$
$$= \frac{2}{i+j+1} \text{ si } i+j \text{ pair}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/7 & 0 & 2/9 \end{bmatrix} \end{array}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/7 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot a = b \iff \begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2/3 & 2/5 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline & 0 & & 2/3 & 2/5 \\ & & & 2/5 & 2/7 \end{array}\right] \end{array} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ \hline a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 2/7 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

3 x 3 inversible

$\Downarrow$

$a_0 = a_2 = a_4 = 0$

Reste le sous-système 2 x 2 en (a_1, a_3).

Le système 2×2 est aussi de Cramer (inversible, cf. $\det = \frac{4}{21} - \frac{4}{25} \neq 0$), on vérifie que :

$$a_1 = -\frac{5}{21} \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{10}{9}.$$

D'où la solution de $(*)$:

$$(a_0, \dots, a_4) = \left(0, -\frac{5}{21}, 0, \frac{10}{9}, 0\right)$$

et le meilleur approximant (au sens $L^2([-1,1])$) de degré ≤ 4 de X^5 :

$$\boxed{P(X) = -\frac{5}{21}X + \frac{10}{9}X^3.}$$

MAM3 - MI2

TD 4 - Projection, orthogonalité (groupe 1)

launch binder [(https://mybinder.org/v2/gh/jbcaillau/mi2/master?urlpath=lab/tree/td3/td3.ipynb)](https://mybinder.org/v2/gh/jbcaillau/mi2/master?urlpath=lab/tree/td3/td3.ipynb)

Open in Colab [(https://colab.research.google.com/github/jbcaillau/mi2/blob/master/td3/td3.ipynb)](https://colab.research.google.com/github/jbcaillau/mi2/blob/master/td3/td3.ipynb)

Exercice 1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}(n, \mathbf{R})$, on
rappelle que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1.1

Montrer que l'application $(\,.\,|\,.\,)$ de $\mathcal{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathcal{M}(n, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$(X|Y) = \mathrm{tr}(\,^t XY)$$

définit un produit scalaire qui fait de $\mathcal{M}(n, \mathbf{R})$ un espace euclidien.
La norme matricielle associée s'appelle la *norme de Frobenius*.

Correction

On va montrer que c'est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Positivité :
Soit $X \in \mathcal{M}(n, \mathbf{R})$.
$(X|X) = \mathrm{tr}(\,^t XX) = \mathrm{tr}((\sum_k X_{ik} X_{jk})_{ij}) = \sum_i \sum_k X_{ik}^2 \geq 0$.
$(X|Y) = \mathrm{tr}(^t XY) = \mathrm{tr}((\sum_k X_{ki} Y_{kj})_{ij}) = \sum_i \sum_k X_{ki} Y_{ki}$
Définie :
Soit $X \in \mathcal{M}(n, \mathbf{R})$ tel que $(X|X) = 0$.
$(X|X) = \mathrm{tr}(\,^t XX) = \mathrm{tr}((\sum_k X_{ik} X_{jk})_{ij}) = \sum_i \sum_k X_{ik}^2 = 0$.
Donc pour tout i, k, $X_{ik} = 0$ donc $X = 0$.
Symétrie:
$(X|Y) = \mathrm{tr}(^t XY) = \mathrm{tr}(^t(^t XY)) = \mathrm{tr}(^t YX) = (Y|X)$.
Bilinéarité:
par symétrie, il suffit de montrer la linéarité à droite par exemple
$(Z|\lambda X + \mu Y) = \mathrm{tr}(^t Z(\lambda X + \mu Y)) = \lambda \mathrm{tr}(^t ZX) + \mu \mathrm{tr}(^t ZY) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$.

1.2

Soient X, Y et A dans $\mathcal{M}(n, \mathbf{R})$, montrer que ce
produit scalaire possède les propriétés suivantes :

1. $(\,^t X|\,^t Y) = (X|Y)$
2. $(AX|Y) = (X|\,^t AY)$.

Soit $O \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ une matrice orthogonale, montrer
que l'application $X \mapsto OX$ est une isométrie de $\mathcal{M}(n, \mathbf{R})$.

Correction

1. $({}^tX|{}^tY) = \mathrm{tr}({}^t({}^tX){}^tY) = \mathrm{tr}(X{}^tY) = \mathrm{tr}({}^tYX) = (Y|X) = (X|Y)$
2. $(AX|Y) = \mathrm{tr}({}^t(AX)Y) = \mathrm{tr}({}^tX{}^tAY) = \mathrm{tr}({}^tX({}^tAY)) = (X|{}^tAY)$
3. O orthogonale : ${}^tOO = I$

$$\begin{aligned}\|OX\|^2 = (OX|OX) = \mathrm{tr}({}^t(OX)OX) &= \mathrm{tr}({}^tX{}^tOOX)\\ &= \mathrm{tr}({}^tXX) = (X|X) = \|X\|^2\end{aligned}$$

Exercice 2

On rappelle que $\mathrm{L}^2([0,2\pi],\mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(x|y) = \int_{[0,2\pi]} xy\,\mathrm{d}t$$

est un espace de Hilbert.
Soit $F = \mathrm{Vect}(\{\sin,\cos\})$, et soit x_0 défini par $x_0(t) = e^t$. Justifier que x_0 possède un unique projeté orthogonal sur F et le calculer.

Correction

Utilisation du théorème du projeté orthogonal
Vérification des hypothèses :
$L^2([0,2\pi],\mathbf{R})$ est un espace de Hilbert.
F est un espace vectoriel (donc convexe)
Montrons que F est fermé. F est fermée car de dimension finie:
soit $F = Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit (x_k) une suite de F qui converge. On pose $x_k = \sum_i a_{k,i}e_i$. Comme x_k converge, les $(a_{k,i})_k$ convergent et la limite $\bar{a}_i$ est telle que $\lim_{k\to\infty} x_k = \sum_i \bar{a}_i e_i \in F$.
Par application du théorème de la projection orthogonale, il existe un unique projeté orthogonal $P_F(x_0)$ sur F.

Calcul :
Posons $P_F(x_0) = a\sin + b\cos$.
Caractérisation de $P_F(x_0)$:
$(P_F(x_0)|\sin) = (x_0|\sin)$ et $(P_F(x_0)|\cos) = (x_0|\cos)$.
Système à résoudre :

$$\begin{aligned}a(\sin|\sin) + b(\cos|\sin) = (x_0|\sin)\\ a(\cos|\sin) + b(\cos|\cos) = (x_0|\cos)\end{aligned}$$

$(\sin|\sin) = \int_0^{2\pi}\sin(t)^2dt = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \pi.$
$(\cos|\cos) = \int_0^{2\pi}\cos(t)^2dt = \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2t)+1}{2}dt = \pi.$
$(\sin|\cos) = \int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)dt = 0.$

$$\begin{aligned}(x_0|\sin) = \int_0^{2\pi} e^t\sin(t)dt = \mathrm{Im}(\int_0^{2\pi}e^{(1+i)t}dt) &= \mathrm{Im}(\frac{1}{1+i}(e^{2\pi}-1))\\ &= \mathrm{Im}(\frac{1-i}{2}(e^{2\pi}-1)) = -\frac{e^{2\pi}-1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_0|\cos) = \int_0^{2\pi} e^t\cos(t)dt = \mathrm{Re}(\int_0^{2\pi}e^{(1+i)t}dt) &= \mathrm{Re}(\frac{1}{1+i}(e^{2\pi}-1))\\ &= \mathrm{Re}(\frac{1-i}{2}(e^{2\pi}-1)) = \frac{e^{2\pi}-1}{2}.\end{aligned}$$

$$a = -\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$
$$b = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}.$$

Finalement
$P_F(x_0) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}(\cos - \sin)$.

Exercice 3

3.1

Montrer que l'espace

$$\ell^2 = \{X = (x_n)_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_n |x_n|^2 < \infty\}$$

muni du produit scalaire $(X|Y) = \sum_n x_n y_n$
est un espace de Hilbert.

Correction

On a déjà montré que c'est un produit scalaire. Pour montrer que c'est un espace de Hilbert, il reste à montrer que ℓ^2 est complet -> cf le TD3.

3.2

Soit $G_k = \{X \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{k-1} x_n = 0\}$
(où $k \geq 1$ est fixé). Justifier que G_k est un sev fermé de
ℓ^2.

Correction

1. Bonne idée : G_k vu comme le noyau d'une application linéaire continue.
   Soit $\varphi_k : \ell^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} x_n$. Cette forme est manifestement linéaire par linéarité de la somme, et on a $G_k = \varphi_k^{-1}(\{0\})$. Donc G_k est un sev.
   Montrons maintenant que G_k est fermé. Il suffit de montrer que φ_k est continue car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$.
   Soit $x \in \ell^2$. Par Cauchy-Schwarz,
   $|\varphi_k(x)| = |\sum_{n=0}^{k-1} x_n| \leq \sum_{n=0}^{k-1} |x_n| \leq \sqrt{k}\sqrt{\sum_{n=0}^{k-1} |x_n|^2} \leq \sqrt{k}\|x\|_2$.
   Donc φ_k est continue et G_k est fermé.
2. Caractérisation séquentielle...

3.3

Soit $X = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell^2$, évaluer
$d(X, G_k)$, la distance de X à G_k.

Correction

On peut voir (astuce) la fonction φ_k comme $\varphi(x) = (x|N)$ où $N = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ avec k fois 1, puis identiquement nulle. Donc
$G_k = \{X \in \ell^2, (X|N) = 0\}$.
Donc, si on décompose $X = (1, 0, \dots)$ sous la forme suivante :
$X = P_k(X) + R$ avec $P_k(X)$ le projecté orthogonal de X sur G_k et R le reste, alors
$(X|N) = (P_k(X)|N) + (R|N) = (R|N)$ car $P_k(X) \in G_k$.
R est caractérisé par le fait que $(R|x) = 0$ pour tout $x \in G_k$ donc R est proportionnel à N

: $R = \alpha N$
$1 = (X|N) = \alpha(N|N) = k\alpha$ donc $\alpha = \frac{1}{k}$.
$d(X, G_k) = \|X - P_k(X)\| = \|R\| = \frac{1}{k}\|N\| = \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$.

Exercice 4

Résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min \int_{[-1,1]} |x^5 - a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0|^2 \, \mathrm{d}x \\ a = (a_0, \ldots, a_4) \in \mathbf{R}^5. \end{cases}$$

Correction

On prend $L^2([-1,1], \mathrm{R})$ muni du produit scalaire usuel. On cherche à minimiser la norme $\|x^5 - P\|$ où P est cherché comme un polynôme de degré inférieur ou égal à 4.

On considère donc $\mathbf{P}_4(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel (fermé !) des polynômes de degré inférieur ou égal à 4, et on cherche le projeté orthogonal de $x \mapsto x^5$ sur $\mathbf{P}_4(\mathbf{R})$.

Système d'équations à résoudre : on teste sur la base de $\mathbf{P}_4(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} (P|1) &= (x^5|1) \\ (P|x) &= (x^5|x) \\ (P|x^2) &= (x^5|x^2) \\ (P|x^3) &= (x^5|x^3) \\ (P|x^4) &= (x^5|x^4). \end{aligned}$$

$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

$$\begin{aligned} (1|1)a_0 + (x|1)a_1 + (x^2|1)a_2 + (x^3|1)a_3 + (x^4|1)a_4 &= (x^5|1) \\ (P|x) &= (x^5|x) \\ (P|x^2) &= (x^5|x^2) \\ (P|x^3) &= (x^5|x^3) \\ (P|x^4) &= (x^5|x^4). \end{aligned}$$

$(x^{2n}|x^{2m}) = \int_{-1}^{1} x^{2(n+m)} dx = \frac{2}{2(n+m)+1}$
$(x^{2n+1}|x^{2m+1}) = \frac{2}{2(n+m)+3}$
$(x^{2n+1}|x^{2m}) = 0$
Test contre les puissances paires de x:

$$\begin{aligned} 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 &= 0 \\ \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{2}{7}a_4 &= 0 \\ \frac{2}{5}a_0 + \frac{2}{7}a_2 + \frac{2}{9}a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a_0 = a_2 = a_4 = 0$ car le système est inversible.
Test contre les puissances impaires de x:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_3 &= \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5}a_1 + \frac{2}{7}a_3 &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Après calcul, on trouve

$a_1 = -\frac{5}{21}$, $a_3 = \frac{10}{9}$.