TD - 1

ex 1

1) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$

$(\lambda, x) = (\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \updownarrow n+1 \qquad \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \updownarrow n$$

$$f(\underbrace{(\lambda, x)}_{\mathbb{R}^{1+n}} + \underbrace{(\mu, h)}_{\mathbb{R}^{1+n}}) = f(\lambda+\mu, x+h) = (\lambda+\mu)(x+h) = \lambda(x+h) + \mu(x+h)$$

$$= \underbrace{\lambda x}_{f(\lambda,x)} + \underbrace{\lambda h + \mu x}_{\text{linéaire en } (\mu,h)} + \mu h \longrightarrow o((\mu, h))$$

(*) à (λ, x) fixé, l'application $\varphi : (\mu, h) \in \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mu x + \lambda h$ est linéaire pcq

$$\varphi(\alpha(\mu_1, h_1) + (\mu_2, h_2)) = \alpha \varphi(\mu_1, h_1) + \varphi(\mu_2, h_2).$$

(*) $\|\mu h\| = |\mu| \|h\| \leqslant \frac{1}{2}(\mu^2 + \|h\|^2) = \frac{1}{2}\|(\mu, h)\|^2 = \|(\mu,h)\| \, \alpha(\mu,h)$ avec $\alpha(\mu,h) = \frac{1}{2}\|(\mu,h)\| \underset{(\mu,h) \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$ et $(a-b)^2 \geqslant 0$. $\qquad \|(\mu,h)\|^2 = \sqrt{\mu^2 + \|h\|^2}$

$\Rightarrow f$ est dérivable en (λ, x) et $\underbrace{f'(\lambda, x)}_{(n, n+1)} \cdot (\mu, h) = \mu x + \lambda h$.

$$\begin{bmatrix} \mu \\ h \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow 1 \\ \updownarrow n \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} x & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{array}\right] = [x \mid \lambda I_d]$$

$\Rightarrow \boxed{f'(\lambda, x) = [x \mid \lambda I_d]} \in \mathcal{M}(n, n+1, \mathbb{R})$

2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto (x|y)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$= {}^t x . y$

$= {}^t y . x$

$$f((x,y) + (h,k)) = f(x+h, y+k) = (x+h \mid y+k)$$

$$= (x \mid y+k) + (h \mid y+k).$$

$$= \underbrace{(x|y)}_{f(x,y)} + \underbrace{(x|k) + (h|y)}_{\text{linéaire}} + (h, k).$$

(*) petit o de (h,k) ?

(*) $|(h|k)| \underset{\text{Cauchy Shwartz}}{\leqslant} \|h\|\|k\| \leqslant \|(h,k)\|^2 = \|(h,k)\| \cdot \underbrace{\|(h,k)\|}_{(h,k)\to 0 \,\Rightarrow\, \to 0}$

$\|(h,k)\| = \sqrt{\|h\|^2+\|k\|^2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable en (x,y) et $\underbrace{f'(x,y)}_{\in L(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}) = M(1,2n,\mathbb{R})} \cdot (h,k) = (y|h) + (x|k)$.

$= {}^t y \cdot h + {}^t x \cdot k$.

$$\boxed{f'(x,y) = (\underbrace{\text{---}\ {}^t y\ \text{---}}_{n}\quad \underbrace{\text{---}\ {}^t x\ \text{---}}_{n})}$$

3) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ Application bilinéaire.

$(x,y) \longmapsto f(x,y)$

$\bullet\ f(\lambda x_1 + x_2, \mu y_1 + y_2) = \lambda f(x_1, \mu y_1 + y_2) + f(x_2, \mu y_1 + y_2)$ linéarité en la 1^e var

$= \lambda\mu(f(x_1,y_1)) + \lambda f(x_1,y_2) + \mu f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2)$ linéarité en la 2^e var.

$\underset{\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}{f((x,y)} + \underset{\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}{(h,k))} = f(x+h, y+k) = f(x,y+k) + f(h,y+k)$

$= f(x,y) + \underbrace{f(x,k) + f(h,y)}_{\text{linéaire en } (h,k)} + f(h,k)$ (*) $o(h,k)$?

(*) $\|f(h,k)\|_{\mathbb{R}^p} \leqslant \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)} \cdot \|h\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|k\|_{\mathbb{R}^m}$

↑ bilinéaire

$\leqslant \underbrace{\|f\|_{L_2} \cdot \|(h,k)\|}_{\alpha(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0} \cdot \|(h,k)\|$ (avec $\|(h,k)\|_{\mathbb{R}^{n+m}} = \|h\|_{\mathbb{R}^n} + \|k\|_{\mathbb{R}^m}$)

$$\underset{p\times(n+m)}{f'(x,y)} = \left(\overset{n}{f(\cdot,y)} \;\middle|\; \overset{m}{f(x,\cdot)} \right) \Big\updownarrow p$$

$\Rightarrow$ f est dérivable et $f'(x,y)\cdot(h,k) = f(h,y) + f(x,k)$.

Rq : on retrouve

1) $f(\lambda,x) = \lambda x = [x]$

$f(\cdot,x) = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$f(\lambda,\cdot) = \lambda I$

$\Big\}\ f'(\lambda,x) = [x | \lambda I_d]$

2) $f(x,y) = (x|y) = {}^t x y = {}^t y x$

$f(\cdot,y) = {}^t y$

$f(x,\cdot) = {}^t x$

$\Big\}\ f'(x,y) = [\underbrace{\text{---}\ {}^t y\ \text{---}}_{n}\quad \underbrace{\text{---}\ {}^t x\ \text{---}}_{n}]$

$n = m$ et $p = 1$

ex 2

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ def par $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_2 x_3) \\ -x_2 \sin(x_1 x_3) \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \end{matrix}$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

f est continue et à dérivée continue (de classe C) $\Leftrightarrow$ ttes les dérivées partielles existent et sont continues.

Autrement dit, on doit vérifier que les $2 \times 3 = 6$ fct suivantes de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables et de dérivées continues.

- $\varphi : x_1 \xrightarrow{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} f_1(x_1, \underbrace{x_2, x_3}_{\text{param}}) = x_1 \cos(x_2 x_3)$.

  cette fonction est linéaire donc dérivable et $\varphi'(x_1) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\cos(x_2 x_3)}$.

  continue en $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. composit° en produit de polynômes en les x_i et cos et sin.

- $x_2 \longmapsto f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos(x_2 x_3)$

  dérivable et $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -x_1 x_3 \sin(x_2 x_3)$. Continue en (x_1, x_2, x_3)

- $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -x_1 x_2 \sin(x_2 x_3)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2 x_3 \cos(x_1 x_3)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\sin(x_1 x_3)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -x_1 x_2 \cos(x_1 x_3)$

Toutes les dérivées partielles existent et sont continues d'où la dérivabilité (et même le caractère C^1) de f.

Donc, f est dérivable et

$$f'(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \end{bmatrix}}_{\text{mat jacobienne}}$$

$$\in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) = M(2,3,\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{so } f'(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \cos(x_2 x_3) & -x_1 x_3 \sin(x_2 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_2 x_3) \\ -x_2 x_3 \cos(x_1 x_3) & -\sin(x_1 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_1 x_3) \end{bmatrix}}$$

2) Comme toutes les dérivées partielles sont continues, f est de classe C^1 donc dérivable et

$$f'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 1 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -3x_2^2 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 4x_1^3 & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -1 \end{bmatrix}$$

flashback ex 1

1) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\lambda | x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$

Il est clair que ttes les dérivées partielles existent et sont continues donc f est C^1 (donc a fct dérivable)

et $f'(\lambda, x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f(-)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f(-)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f(-)}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{1+n} \Big\updownarrow n$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & \lambda & \cdots & 0 \\ x_2 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ x_n & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} x & \lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda \end{array}\right]$$

2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto (x | y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Toutes les dérivées partielles existent et sont continues.

$\Rightarrow f$ est C^1 donc dérivable et

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}}_{n} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots\cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}}_{n} \end{bmatrix} \Big\updownarrow 1$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & x_1 & \cdots\cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{\text{———} \; {}^t y \; \text{———}}_{n} & \underbrace{\text{———} \; {}^t x \; \text{———}}_{n} \end{bmatrix}$$

ex3 $A \in M(n,\mathbb{R})$; $b \in \mathbb{R}^n$; $c \in \mathbb{R}$.

1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$

$(x|y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t x.y = {}^t y.x$

si $n=1$, $A = [a_{11}] = [a]$. $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$
$f'(x) = ax + b$.

L'application est dérivable comme c'est la somme de 2 applications dérivables :

- $x \mapsto (b|x) + c$: affine
- $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x)$: quadratique : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{g} (Ax|x) \xrightarrow{k} \frac{1}{2}(Ax|x)$ } dérivable comme composée $(k \circ g)$ d'applis dérivables (g linéaire, k bilinéaire)

- $\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax|x)$, on peut également écrire directement

$$\varphi(x+h) = \frac{1}{2}\left(A(x+h)|(x+h)\right) = \frac{1}{2}\left(Ax + Ah \mid x+h\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}(Ax|x)}_{\varphi(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{\frac{1}{2}(Ah|h)}_{(*)} \quad o(h)?$$

$(*)$ $\left|\frac{1}{2}(Ah|h)\right| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|.\|h\| \leqslant \|A\|_{M(n,\mathbb{R})}\|h\| \leqslant \frac{1}{2}\|A\|.\|h\|^2 = \|h\|\left(\frac{1}{2}\|A\|.\|h\|\right)$

$\Rightarrow \varphi$ est dérivable en x et $\varphi'(x).h = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x) = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(h|{}^tAx)$
$= \left(\frac{1}{2}(A + {}^tA).x | h\right)$

$m\updownarrow \overset{\overset{n}{\longleftrightarrow}}{[B]}$ $(Bx|y)_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} = {}^t(Bx)y$
$= {}^tx\,{}^t(By) = (x|{}^tBy)$.

et $A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi'(x) = {}^t\left(\frac{(A+{}^tA)}{2}.x\right) = {}^tx\underbrace{\frac{(A+{}^tA)}{2}}_{n \times m}}$$

Déf : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dérivable en x, on appelle gradient de f en x et on note $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ l'unique vecteur tq $(\forall h \in \mathbb{R}^n) : f'(x).h = (\nabla f(x) \mid h)$

$(\cdot|\cdot)$ ps canonique

$$\nabla f(x) = {}^t f'(x) = {}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right] \quad \text{so} \quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ici, $\nabla \varphi(x) = \frac{A + {}^tA}{2} \cdot x \qquad (n=1, \ \nabla\varphi(x) = ax)$

so f est dérivable et $(\forall h \in \mathbb{R}^n) : f'(x).h = \left(\frac{A+{}^tA}{2} \cdot x \mid h\right) + (b \mid h)$

$$= \left(\frac{A+{}^tA}{2} \cdot x + b \mid h\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = \frac{A+{}^tA}{2} x + b} \in \mathbb{R}^n \quad \left(\begin{matrix} n=1 & \nabla f(x) \\ & = ax+b \end{matrix}\right)$$

Rq : autre méthode pr déterminer $\begin{cases} \nabla\varphi \\ \varphi' \end{cases}$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \overset{g}{\longmapsto} (Ax, x) \overset{k}{\longmapsto} \frac{1}{2}(Ax \mid x) \quad \Bigg| \quad \underbrace{k(x,y) = \frac{1}{2}(x \mid y)}_{\text{bilinéaire}}$$

Comme k et g sont dérivables so $\varphi : k \circ g$ l'est également et $(\forall h \in \mathbb{R}^n)$

$$\varphi'(x).h = (k \circ g)'(x).h = k'(g(x)).g'(x).h$$

$$\text{avec } g'(x).h = g.h = g(h) = (Ah, h) = \begin{bmatrix} Ah \\ h \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$$

et $\underset{\mathbb{R}^n}{k'(x,y)}.\underset{\mathbb{R}^n}{(h_1,h_2)} \underset{\text{es l}}{=} k(h_1, y) + k(x, h_2) = \frac{1}{2}(h_1 \mid y) + \frac{1}{2}(x \mid h_2)$

$$\Rightarrow k'(g(x)).g'(x).h = k'(\underset{\in\mathbb{R}^n}{Ax}, \underset{\in\mathbb{R}^n}{x}).(\underset{\in\mathbb{R}^n}{Ah}, \underset{\in\mathbb{R}^n}{h}) = \frac{1}{2}(x \mid Ah) + \frac{1}{2}(Ax \mid h) = \frac{1}{2}(Ah \mid x) + \frac{1}{2}(Ax \mid h)$$

$$= \frac{1}{2}(h \mid {}^tAx) + \frac{1}{2}(Ax \mid h) = \Big(\underbrace{\frac{A+{}^tA}{2} x}_{\substack{\text{gradient} \\ \nabla\varphi(x)}} \mid h\Big)$$

Déf Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dérivable, si $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est à nouveau dérivable, on note

$$\underbrace{\nabla^2 f(x) = (\nabla f)'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)_{n \times n}} \quad \text{le Hessien de } f.$$

Th (Shwartz) : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2 fois dérivable, $\nabla^2 f(x) \subseteq \mathrm{sym}(n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$

Rq : en terme de dérivées secondes partielles, le th de Shwartz signifie

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} n \Rightarrow \nabla^2 f(x) = (\nabla f)'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x) \\ \vdots & \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x) & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x).$$

$$\text{th de Shwartz} \Leftrightarrow (\forall i\ \forall j \in \{1, n\}) \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)$$

---

ex $f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 x_2)$

- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos(x_1 x_2) - \sin(x_1 x_2) x_1 x_2$

- $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2)} = -x_1 \sin(x_1 x_2) - x_1 \sin(x_1 x_2) - x_1^2 x_2 \cos(x_1 x_2)$

  $= -2 x_1 \sin(x_1 x_2) - x_1^2 x_2 \cos(x_1 x_2)$

- $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1^2 \sin(x_1 x_2)$

- $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = -2 x_1 \sin(x_1 x_2) - x_1^2 x_2 \cos(x_1 x_2).$

- $\nabla f(x) = \frac{A + {}^t A}{2} x + b \Rightarrow \nabla f(x)$ affine, so dérivable et $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$$(\nabla f)'(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{A + {}^t A}{2} \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}).$$

$n = 1$, $f(x) = \frac{1}{2} a x^2 + b x + c$

$f'(x) = a x + b$ et $f''(x) = a = \frac{[a] + {}^t[a]}{2}$

ex 4

1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2_{\mathbb{R}^m}$ $\quad \begin{cases} A \in M(m,n,\mathbb{R}) \\ b \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ (moindres carrés MAM 4)

$$\|y\|_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{|y_1|^2 + \cdots\cdots + |y_m|^2} = \sqrt{(y|y)}_{\mathbb{R}^m}$$

$$f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{k} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Ax - b \longmapsto \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2.$$

. g est affine donc dérivable, k est quadratique donc dérivable par composition et

. $f'(x).h = (k \circ g)(x).h = k'(g(x)).\underbrace{g'(x).h}_{=Ah}$ cuz $g'(x) = A$

$k'(y).s = (\nabla k(y)|s) = (y|s)$:

cuz $k(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{1}{2}(By|y)_{\mathbb{R}^m}$ avec $B = I_m$.

$k'(y).s = (\nabla k(y)|s) = \left(\frac{B + {}^tB}{2}.y \middle| s\right) = (y|s)$ cuz $\nabla k(y) = y$.

ex 3 $\qquad B = I_m$

$m = 1$, $k(y) = \frac{1}{2}|y|^2 = \frac{1}{2}y^2$

so $k'(y) = y$.

$\Rightarrow f'(x).h = k'(g(x)).\underbrace{g'(x).h}_{Ah \in \mathbb{R}^m} = (\underbrace{\nabla k(Ax - b)}_{Ax - b}|Ah)_{\mathbb{R}^m} = ({}^tA(Ax - b)|h)$

$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = {}^tA(Ax - b)} = {}^tAAx - {}^tAb.$

$n = m = 1$

$A = [a]$

$f(x) = \frac{1}{2}|ax - b|^2 = \frac{1}{2}(ax - b)^2$

$\Rightarrow f'(x) = (ax - b).a$

$\Rightarrow f''(x) = a^2$.

Le gradient est affine donc dérivable et $\boxed{(\nabla f)'(x) = \nabla^2 f(x) = {}^tAA} \in \mathrm{Sym}(m,\mathbb{R})$

${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^t({}^tA)) = {}^tAA$.

AUTRE METHODE

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}(Ax - b|Ax - b) = \frac{1}{2}\underbrace{(Ax|Ax)}_{({}^tAA|x)} - \underbrace{(Ax|b)}_{({}^tAb|x)} + \frac{1}{2}\|b\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\tilde{A}x|x) + (\tilde{b}|x) + \tilde{c}$$

. $\tilde{A} = {}^tAA \in \mathrm{sym}(m,\mathbb{R})$

. $\tilde{b} = -{}^tAb$

. $\tilde{c} = \frac{1}{2}\|b\|^2$

flashback ex 3

f est 2 fois dérivable et

- $\nabla f(x) = \dfrac{\tilde{A} + {}^t\tilde{A}}{2} x + \tilde{b} = \tilde{A} x + b$ si $\tilde{A}$ sym

$= {}^tAA x - {}^tA b = {}^tA(Ax - b)$

- $\nabla^2 f(x) = \dfrac{\tilde{A} + {}^t\tilde{A}}{2} = \tilde{A}$ si $\tilde{A}$ sym $= {}^tAA$.

retour ex 4

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix}$ par ex, $F(x) = Ax - b$ si affine

$f(x) = \dfrac{1}{2} \| F(x) \|^2_{\mathbb{R}^m} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} F_i^2(x)$.

↑ fct des moindres carrés non linéaires (MAM 4)

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \xmapsto{F} F(x) \xmapsto{K} \frac{1}{2} \| F(x) \|^2.$$

- $f = (k \circ F)$: par hypothèse, F est dérivable et k l'est (d'après ex 3, et 4.1)

- $f'(x).h = (k \circ F)'(x).h = k'(F(x)).F'(x).h = (\nabla K(F(x)) \mid F'(x).h)$

$= (F(x) \mid F'(x).h)_{\mathbb{R}^m} = ({}^tF'(x) F(x) \mid h)_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = {}^tF'(x) F(x)}$

$m = n = 1$

$F(x)$ ($\in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} |F(x)|^2 = \dfrac{1}{2} F^2(x) \Rightarrow f'(x) = F(x) F'(x) = {}^tF'(x) F(x)$

ex 4 (again)

$f(x) = \dfrac{1}{2} \| F(x) \|^2_{\mathbb{R}^m}$.

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\| y \|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(y|y)} = \sqrt{|y_1|^2 + \cdots + |y_m|^2}$

F dérivable $\Rightarrow f$ dérivable et $\boxed{\nabla f(x) = \underbrace{{}^t\underbrace{F'(x)}_{m \times n}}_{n \times m} . \underbrace{F(x)}_{\in \mathbb{R}^m}} \in \mathbb{R}^n$

$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

On suppose F 2 fois dérivable (ie chaque composante F_i possède un gradient et que ce gradient, ∇F_i, est dérivable : $(\nabla F_i)' = \nabla^2 F_i$).

$$F'(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}}_{n} \Big\updownarrow m = \begin{bmatrix} & | & \\ — & \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) & — \\ & | & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^tF'(x) = \begin{bmatrix} & | & \\ — & \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) & — \\ & | & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \nabla F_1(x) & \cdots & \nabla F_m(x) \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m} n$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{F_i(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\nabla F_i(x)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

P.S vecteur

$$(\lambda . x = x . \lambda)$$

scal vect — prod mat (vect x scalaire)

$$x(\lambda) = \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ x_n\lambda \end{bmatrix} = \lambda x.$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x) . F_i(x)$$

prod mat

$$\varphi_i(x) = \nabla F_i(x) . F_i(x)$$

Il suffit, pour mq ∇f est dérivable, de mq chaque φ_i $i=1\dots m$, est dérivable

$$\text{or} \quad \varphi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \xmapsto{g_i} (\nabla F_i(x), F_i(x)) \xmapsto{k} \nabla F_i(x) . F_i(x)$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla F_i(x) \\ F_i(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n \\ \updownarrow n \end{matrix}$$

On sait que k, bilinéaire, est dérivable, (cf ex 1), de +, par hypothèse, chaque composante de g_i est dérivable so g_i aussi so $\varphi_i = k \circ g$ est dérivable par composition et

$$\varphi_i'(x) . h = k'(g_i(x)) . \underbrace{g_i'(x) . h}_{((\nabla F_i)'(x) . h,\ F_i'(x) . h)}$$

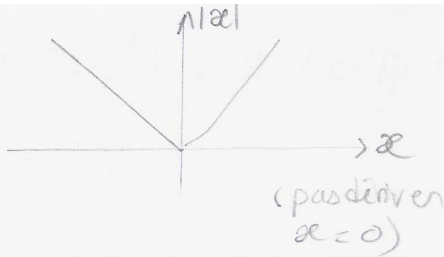
$$(\nabla F_i)'(x) = \nabla^2 F_i(x).$$

$$k'(y, \lambda) . (z, \mu) \underset{ex\,1}{=} k(z, \lambda) + k(y, \mu) = z\lambda + y\mu.$$

ex 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\|.$

$n = 1 : f(x) = |x|$



$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}$

dériv sur $\mathbb{R}^*$

On a $f = k \circ g$ avec $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \overset{g}{\longmapsto} \|x\|^2 \overset{k}{\longmapsto} \|x\|$ et $k(y) = \sqrt{y}$.

Les applicat° g et k sont dérivables donc f également par composition et :

$$f'(x).h = (k \circ g)'(x).h = k'(g(x)).g'(x).h$$

$$\begin{cases} g'(x).h = 2\,{}^t x.h = (2(x|h)) = (\overbrace{2x}^{\nabla g(x)}|h) \\ k'(y).z = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}.z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x).h = \frac{1}{2\sqrt{\|x\|^2}}(2x|h) = \frac{(x|h)}{\|x\|} \Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}} \in \mathbb{R}^n$$

($n=1$, $=1$ si $x>0$, $=-1$ si $x<0$ $\leftrightarrow$ $\dfrac{x}{|x|} = \text{signe}(x)$, $x \neq 0$)

. $\nabla f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$
$x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|} = x.\dfrac{1}{\|x\|}$
$= \varphi_1(x).\varphi_2(x)$

prod mat bilinéaire.

$\left(\begin{array}{l} x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \\ \overset{K}{\mapsto} \varphi_1(x).\varphi_2(x) \end{array} \right)$
$K : (x, \lambda) \longmapsto x\lambda$

On sait que si φ_1 et φ_2 sont dérivables, leur produit également et

$$(\nabla f)'(x).h = \nabla^2 f(x).h$$
$$= \varphi_1'(x).h\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\varphi_2'(x).h.$$

or $\varphi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ | linéaire. $\varphi_1 = I_n$ so dérivable et $\varphi_1'(x).h = h$
$(\varphi_1'(x) = I_n = \varphi_1(x))$.

et $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \overset{f}{\longmapsto} \|x\| \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{1}{\|x\|}$

$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ qui est dérivable par composition puisque f dérivable, g aussi.
$g'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$.

$$\Rightarrow \varphi_2'(x).h = (g \circ f)'(x).h = g'(f(x)).f'(x).h$$

$$\Rightarrow \varphi_i'(x).h = k'(\nabla F_i(x), F_i(x)).(\nabla^2 F_i(x).h, F_i'(x).h)$$

$$= \underbrace{(\underbrace{\nabla^2 F_i(x)}_{n\times n}.h)}_{\mathbb{R}^n}.F_i(x) \sim \mathbb{R}^n \quad + \underbrace{\nabla F_i(x)}_{\in\mathbb{R}^n}.\underbrace{(\underbrace{F_i'(x)}_{\substack{\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\\ = M(1,n,\mathbb{R})}}.h)}_{\in\mathbb{R}}$$

directement on a, $\varphi_i(x) = \nabla F_i(x) . F_i(x)$ prod mat bilinéaire

. Si ∇F_i et F_i sont dérivables, leur produit aussi et

$$\varphi_i'(x).h = ((\nabla F_i)'(x).h).F_i(x) + \nabla F_i(x)(F_i'(x).h)$$

$$= \underbrace{\nabla^2 F_i(x).h.F_i(x)}_{F_i(x).\nabla^2 F_i(x).h} + \nabla F_i(x).F_i'(x).h$$

prod (scalaire. mat) Prod mat

$$= \underbrace{(F_i(x).\nabla^2 F_i(x) + \nabla F_i(x) F_i'(x))}_{\varphi_i'(x)}.h$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i'(x) = \sum_{i=1}^m F_i(x).\underbrace{\nabla^2 F_i(x)}_{\in sym(n,\mathbb{R})} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \nabla F_i(x).F_i'(x)}_{{}^tF'(x).F'(x)}$$

comme ${}^tF'(x) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x) & \cdots & \nabla F_m(x) \end{bmatrix}$, $F'(x) = \begin{bmatrix} F_1'(x) \\ \vdots \\ F_m'(x) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m F_i(x).\nabla^2 F_i(x) + {}^tF'(x).F'(x)} \in Sym(n,\mathbb{R})$$

si $n = m = 1$.

$f(x) = \frac{1}{2}|F(x)|^2 = \frac{1}{2}F^2(x)$

$f'(x) = F(x).F'(x) = {}^tF'(x).F(x)$

$f''(x) = ((F'(x))^2 + F(x).F''(x))$ $(F(x) = F_1(x))$

si $F(x) = Ax - b$.

$\left.\begin{array}{l} F'(x) = A \\ \nabla F_i(x) = 0 \end{array}\right\}$ $\nabla f(x) = {}^tF'(x).F(x) = {}^tA(Ax-b) = {}^tAAx - {}^tAb$ (ex 4.1)

et $\nabla^2 f(x) = 0 + {}^tF'(x).F'(x) = {}^tAA$