Mi 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire
2. Théorème de la projection
3. Orthogonalité
4. Séries de Fourier trigonométriques

1. Produit scalaire.

Déf. : on appelle produit scalaire sur un ev (= $\mathbb{R}$-espace vectoriel) E et on note $(\cdot|\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique et définie positive :

i) bilinéarité : $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire par rapport à son premier et à son deuxième argument, ie

$$(\forall(\lambda, x, y, z) \in \mathbb{R} \times E^3) : \begin{cases} (\lambda x + y \mid z) = \lambda(x|z) + (y|z) \\ (x \mid \lambda y + z) = \lambda(x|y) + (x|z) \end{cases}$$

ii) symétrie : $(\forall(x,y) \in E^2) : (y|x) = (x|y)$

iii) définie positivité :

$(\forall x \in E) : (x|x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$ (définie)

$(\forall x \in E) : (x|x) \geqslant 0$ (positivité)

Remarques : i) sauf cas trivial, une application bilinéaire n'est pas linéaire

(cf. $(\lambda x | \lambda x) = \lambda^2 (x|x)$, pas $\underline{\lambda}(x|x) \dots !$)

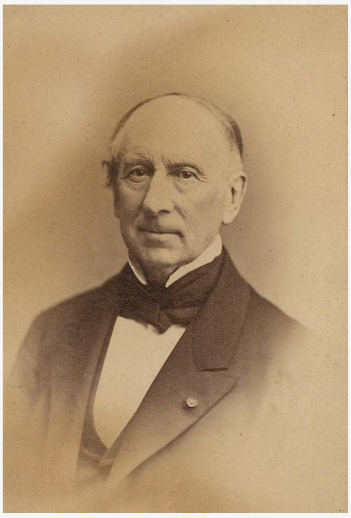
ii) la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que par rapport à l'une des deux variables ;

iii) la définition (et la plupart des résultats du chapitre) s'étend au cas des $\mathbb{C}$-ev grâce à la notion de "sesquilinéarité".

On va montrer que, dès qu'on a un produit scalaire, on a une norme.

Th. (Cauchy-Schwarz) : soit $(E, (.|.))$ un ev. muni d'un produit scalaire ; alors :

Augustin Louis Cauchy



Cauchy photographié peu avant sa mort.

Naissance	21 août 1789 Paris (France)
Décès	23 mai 1857 (à 67 ans) Sceaux (France)
Nationalité	Française
Domaines	Mathématicien
Institutions	École polytechnique

Naissance	25 janvier 1843 Hermsdorf (Silésie)
Décès	30 novembre 1921 (à 78 ans) Berlin (Allemagne)
Nationalité	Allemand
Domaines	Mathématiques
Institutions	Université de Halle École polytechnique

$$(\forall (x,y) \in E^2) : \; |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \cdot \sqrt{(y|y)}$$

__Remarque__ : une fois établi qu'on définit bien une norme en posant
$\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, cette inégalité se réécrit :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

__dém.__ : soient x et $y \in E$; quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par positivité du produit scalaire on a :

$$0 \leq (\lambda x + y \,|\, \lambda x + y) = \overbrace{\lambda^2 (x|x) + 2\lambda (x|y) + (y|y)}^{\text{polynôme deg. 2 en } \lambda}$$

(on a utilisé la bilinéarité et la symétrie)

$\Rightarrow \Delta' = (x|y)^2 - (x|x) \cdot (y|y) \leq 0$

$\Rightarrow |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \cdot \sqrt{(y|y)}$. $\square$

__Proposition__ : soit $(E, (.|.))$ un ev muni d'un produit scalaire ; on définit sur E une norme en posant :

$$(\forall x \in E) : \; \|x\| := \sqrt{(x|x)}.$$

__dém.__ : remarquons tout d'abord que, par positivité, cette définition a un sens.
De plus :

i) $\sqrt{(x|x)} = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow (x|x) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$ (défini)
$\sqrt{(x|x)} \geq 0$ (positivité)

$\Rightarrow$ définie-positivité ;

ii) $\sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)}$ (bilinéarité)

$= |\lambda| \sqrt{(x \mid x)}$ (homogénéité positive)

Le point iii), l'inégalité triangulaire, utilise le

<u>Lemme</u> (inégalité de Minkowsky) :

$(\forall (x,y,z) \in E^3) : \sqrt{(x+y \mid x+y)} \leq \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}$

(ce qui donne exactement l'inégalité voulue :
" $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ").

<u>dém.</u> : soient x, y et $z \in E$; d'après Cauchy-Schwarz,

$$0 \leq (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y)$$
$$\leq (x \mid x) + 2\sqrt{(x \mid x)} \cdot \sqrt{(y \mid y)} + (y \mid y)$$
$$= \left(\sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}\right)^2,$$

d'où l'inégalité voulue en prenant la racine carrée.
Ce qui clôt la démo. du lemme et de la proposition. □

<u>Déf.</u> : un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire s'appelle un <u>espace "pré-hilbertien"</u>.
Cet espace, muni de la norme engendrée par le produit scalaire est un espace vectoriel normé (evn). Si cet evn est complet (ie est un espace de Banach), on dit que $(E, (.|.))$ est un "<u>espace de Hilbert</u>".
Quand cet espace est de <u>dimension finie</u>, il est automatiquement complet et on parle "d'<u>espace euclidien</u>."

Exemples.

i) $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ avec $(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$= {}^t x \cdot y \in \mathbb{R}$

est un espace euclidien.

ii) de même pour $M(m, n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
(matrices réelles $m \times n$ i.e. à un choix de bases près sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, applications linéaires — donc continues en dim finie — de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$) muni de $(\cdot|\cdot)$ défini par (cf. TD 4) :

$$(A|B) := \operatorname{tr}({}^t A \cdot B)$$ (trace du produit matriciel ${}^t A \cdot B$)

↑ produit scalaire "de Frobenius"

NB. $\dim M(m, n, \mathbb{R}) = m \cdot n < \infty$
(cf. base $\{E_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$
où
$$E_{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 \quad 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \updownarrow m$$
$\longleftrightarrow n$)

iii) $\ell^2(\mathbb{N})$, espace des suites de carré sommable (cf. TD 3),

$(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|^2}_{\geq 0} < \infty$, muni du produit scalaire :

$$(X \mid Y) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k . y_k \quad (*) \quad \text{où } X = (x_k)_k \text{ et } Y = (y_k)_k$$

sont dans $\ell^2(\mathbb{N})$, ce qui garantit que la quantité $(*)$ est bien défini (i.e. que la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^{K} x_k . y_k\right)_K \text{ cv dans } \mathbb{R} \text{ quand } K \longrightarrow \infty ;$$

exo : vérifiez le !)

est un espace de Hilbert (cf. TD 4 pour la complétude). C'est un ev de dim ∞, ce n'est donc pas un espace euclidien.

$\mathcal{L}^2(X,\mathcal{B},\mu)/\sim \; =: L^2(X,\mathcal{B},\mu)$

iv) $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, l'ensemble des (classes de) fonctions de $X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables (pour la tribu $\mathcal{B}$ sur X et celle des boréliens sur $\mathbb{R}$) et de carré sommable, cf. Mi1

$$\int_X \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0} \, d\mu(x) < \infty,$$

muni du produit scalaire

$$(f \mid g) := \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x) \quad (**)$$

est un espace de Hilbert. Th. de Riesz-Fischer

Remarques : i) $(f \mid f) = 0 \Rightarrow \int_X \overbrace{|f|^2}^{\geq 0} d\mu = 0$

$\Rightarrow |f|^2 = 0$ μ.pp., i.e. $f = 0$ μ.pp. : $f = 0_{L^2(X,\mathcal{B},\mu)}$ ...

parce qu'on a pris le soin de considérer des classes de fonctions (égales p.p.) et non directement des fonctions.

ii) Comme dans le cas de $\ell^2(\mathbb{N})$, vérifiez que $f, g \in L^2$ permet de garantir que $f \cdot g$ est intégrable ie, par définition, que

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu < \infty,$$

de sorte que (**) a bien un sens.

iii) On montre en fait (cf. §3.) que tout espace de Hilbert (séparable — ie qui contient une partie dénombrable dense) de dim infinie est isomorphe (bijection linéaire) et isométrique (cette bijection préserve la norme) à $\ell^2(\mathbb{N})$. En ce sens,

$$L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \underset{\uparrow}{\simeq} \ell^2(\mathbb{N})$$

égalité à un isomorphisme isométrique près

et $\ell^2(\mathbb{N})$ est le "modèle" de tous les espaces de Hilbert de dim ∞ que vous rencontrerez (cf. Ch. IV et EDP MAM 4).

Mai 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire
2. Théorème de la projection
3. Orthogonalité
4. Séries de Fourier trigonométriques

---

2. Théorème de la projection.

Déf. : Soit $A \subset E$ une partie non-vide d'un evn E, et soit $x \in E$; on définit la distance du point x à la partie A, et on note $d(x, A)$, comme :

$$d(x, A) := \mathrm{Inf}\ \{ \|x-y\|,\ y \in A \}$$

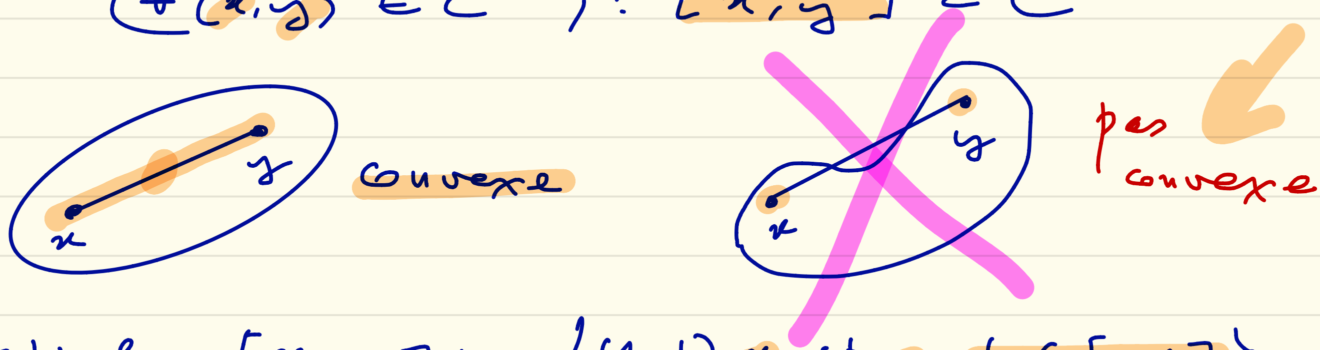
Remarque : la partie A étant non-vide, l'ensemble $\{ \|x-y\|,\ y \in A \}$ est une partie $\neq \emptyset$ et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$: l'inf existe.

Le théorème de la projection donne des conditions suffisantes sur E (espace de Hilbert) et sur A ($A \neq \emptyset$, convexe et fermée) pour qu'il existe un unique pt $\bar{x} \in A$ atteignant cet Inf :

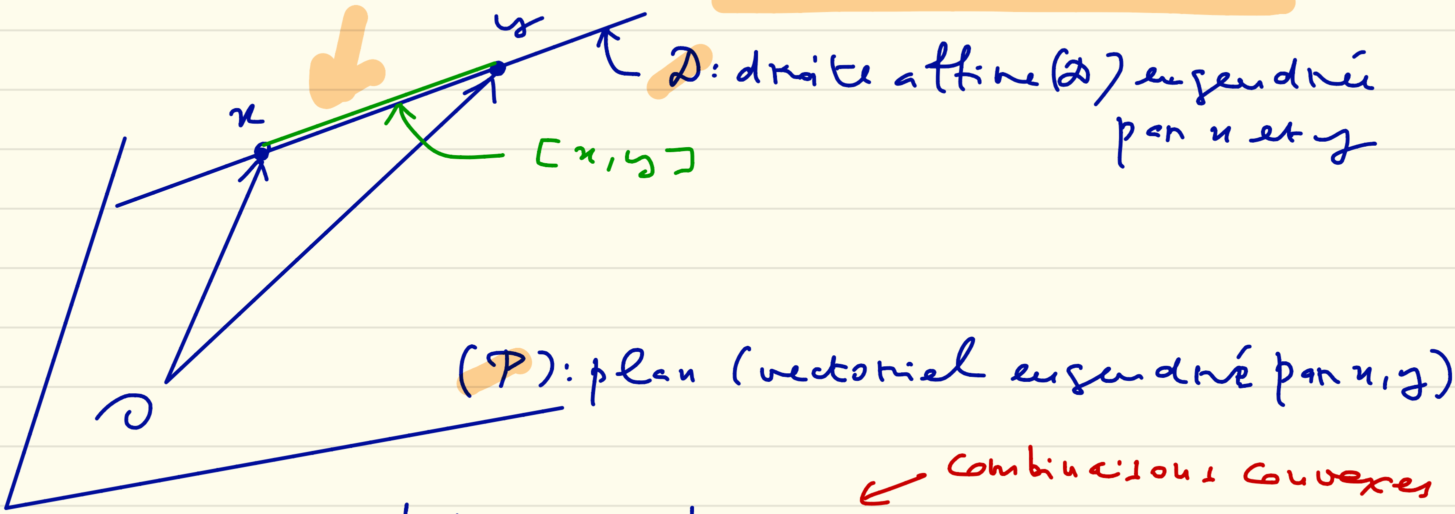
$$\|x - \bar{x}\| = \mathrm{Inf}_{y \in A} \|x-y\|.$$

Déf. : dans un e.v. E (c'est une notion purement vectorielle), une partie $C \subset E$ est dite **convexe** si :

$$(\forall (x,y) \in C^2) : [x,y] \subset C$$



Rappel : $[x,y] := \{(1-t).x + t.y \, , \, t \in [0,1]\}$



$$[x,y] = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda + \mu = 1, \ \lambda \text{ et } \mu \geq 0\} \leftarrow \text{combinaisons convexes}$$
$$\cap$$
$$\mathcal{D} = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda + \mu = 1\} \leftarrow \text{combinaisons affines}$$
$$\cap$$
$$\mathcal{P} = \{\lambda x + \mu y \, , \ \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\} \leftarrow \text{combinaisons linéaires}$$

Autrement dit, C convexe si :

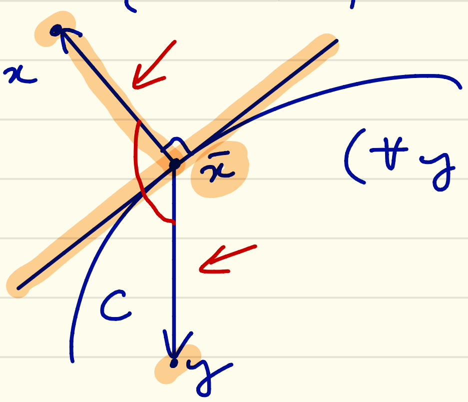
$$(\forall (x,y) \in C^2) \ (\forall t \in [0,1]) : (1-t)x + ty \in C$$

Remarque : notion fondamentale en Optimisation (Cf. MAM4).

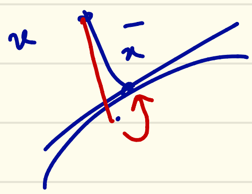
Th. (de la projection) : *** Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un e.h., soit $C \subset E$ une partie fermée, convexe et non-vide ; soit $x \in E$,

$$(\exists! \bar{x} \in C) : \|x - \bar{x}\| = d(x, C) = \operatorname{Inf}_{y \in C} \|x - y\|$$

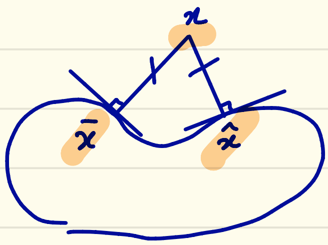
Cet $\bar{x}$, qui s'appelle le "projeté orthogonal de x sur C" et se note $\Pi_C x$, est caractérisé par l'inéquation (dite "inéquation variationnelle", cf. MAM4-5) :



$$(\forall y \in C) : (x - \bar{x} \mid y - \bar{x}) \leq 0 \quad (*)$$



Remarques. i) le dessin ci-avant résume tout le résultat : on comprend l'intérêt que C soit
- non-vide : $\bar{x} \in C$!
- fermée : $\bar{x}$ a tendance "à être au bord de C", donc si C est fermée (et contient son bord) ça aide $\bar{x}$ à appartenir à C
- convexe pour l'unicité, cf. sinon :



$\|x - \bar{x}\| = \|x - \hat{x}\| = d(x, C)$

ii) (*) est une caractérisation, ie le projeté vérifie (*) et, réciproquement, un point de C qui vérifie (*) est nécessairement le projeté de x sur C.

iii) c'est l'un des (trop) rares résultats d'existence et d'unicité en maths : il sert " partout ", et montre notamment que le problème d'optimisation (minimisation...) ci-dessous possède une solution et une seule (cf. TD 4-5, AN1, Opti. MAM4-5...) :

$$\begin{cases} \|x-y\| \longrightarrow \min \\ y \in C \end{cases}$$

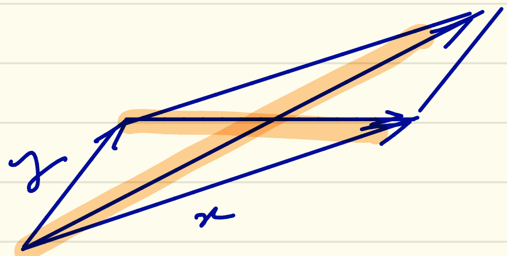
dém. ! i) existence : notons $d := d(x, C) \geq 0$; soit $n \in \mathbb{N}$, $d + \frac{1}{n+1} > d = \inf_{y \in C} \|x-y\|$:

l'inf étant le plus grand des minorants, $d + \frac{1}{n+1}$ n'est pas un minorant de l'ensemble $\{\|x-y\|, y \in C\}$: $\exists x_n \in C$ tq $\|x-x_n\| < d + \frac{1}{n+1}$; on construit ainsi $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ tq

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : d \leq \|x - x_n\| < d + \frac{1}{n+1}.$$

Par construction, $\|x-x_n\| \longrightarrow d$, $n \to \infty$; montrons que $(x_n)_n$ CV. Dans $(E, (.|.))$ e.h. (euh complet, donc), il suffit de mq $(x_n)_n$ est de Cauchy. Ça suffira à conclure à l'existence car alors la limite $\bar{x}$

appartiendra à C, fermé (cf. $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$),
et $\underset{\substack{\downarrow \\ d}}{\|x - x_n\|} \xrightarrow[n \to \infty]{} \|x - \bar{x}\| \Rightarrow \|x - \bar{x}\| = d.$

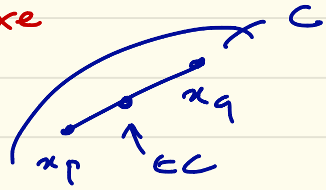


Lemme de la médiane :

Soient x et $y \in E$, $(E, (.|.))$ pré-hilbertien ;
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
dém. : évident !

(suite dém. th. projection) : Soient $p, q \in \mathbb{N}$, on a
$$\|(x-x_p) + (x-x_q)\|^2 + \|\overbrace{(x-x_p) - (x-x_q)}^{x_q - x_p}\|^2$$
$$= 2(\|x-x_p\|^2 + \|x-x_q\|^2)$$ par le lemme de la médiane.

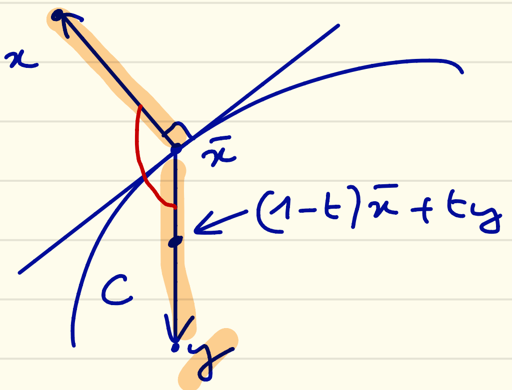
Or, $\|(x-x_p)+(x-x_q)\|^2$
$$= \|2(x - \underbrace{\tfrac{x_p+x_q}{2}}_{\in C,\ \text{convexe}})\|^2 \geq 4d^2$$



$$\Rightarrow \|x_p - x_q\|^2 \leq \underbrace{2(\underbrace{\|x-x_p\|^2}_{\xrightarrow[p\to\infty]{} d^2} + \underbrace{\|x-x_q\|^2}_{\xrightarrow[q\to\infty]{} d^2}) - 4d^2}_{\xrightarrow[p \text{ et } q \to \infty]{} 0}$$

Donc, $\|x_p - x_q\|$ est aussi petit que l'on veut pour p et q assez grand : $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où l'existence d'un projeté $\bar{x}$.

ii) <u>caractérisation</u> : soit $\bar{x} \in C$ tq $\|x-\bar{x}\| = \inf\limits_{y\in C}\|x-y\|$;



soit $y \in C$;

soit $t \in]0,1]$, C convexe (et $\bar{x}$, $y \in C$) $\Rightarrow (1-t)\bar{x} + ty \in C$, donc

$$\begin{aligned}\|x-\bar{x}\|^2 &\le \|x-((1-t)\bar{x}+ty)\|^2 \\ &= \|(x-\bar{x}) - t(y-\bar{x})\|^2 \\ &= \|x-\bar{x}\|^2 \\ &\quad - 2t(x-\bar{x}\,|\,y-\bar{x}) \\ &\quad + t^2\|y-\bar{x}\|^2\end{aligned}$$

Donc : $2\cancel{t}(x-\bar{x}\,|\,y-\bar{x}) \le t^{\cancel{2}}\|y-\bar{x}\|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$\Rightarrow (x-\bar{x}\,|\,y-\bar{x}) \le 0$, d'où (*). Réciproquement, si $\bar{x}$ vérifie (*), soit $y \in C$:

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|(x-\bar{x})-(y-\bar{x})\|^2 \\ &= \|x-\bar{x}\|^2 \underbrace{-2(x-\bar{x}\,|\,y-\bar{x})}_{\geq 0} + \underbrace{\|y-\bar{x}\|^2}_{\geq 0}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 \geq \|x-\bar{x}\|^2$: $\bar{x}$ minimise $\|x-y\|$ pour $y \in C$.

iii) <u>unicité</u> : si $\bar{x}$ et $\hat{x} \in C$ sont deux pts qui réalisent la distance, alors tous deux vérifient (*) et :

$(x-\bar{x}\,|\,\hat{x}-\bar{x}) \le 0$ $\quad (y \leftarrow \hat{x})$

$(x-\hat{x}\,|\,\bar{x}-\hat{x}) \le 0$ $\quad (y \leftarrow \bar{x})$

$\Rightarrow \underbrace{(x-\bar{x}\,|\,\hat{x}-\bar{x}) + (\hat{x}-x\,|\,\hat{x}-\bar{x})}_{(\cancel{x}-\bar{x}+\hat{x}-\cancel{x}\,|\,\hat{x}-\bar{x}) = \|\hat{x}-\bar{x}\|^2} \le 0$

$\Rightarrow \|\hat{x}-\bar{x}\|^2 \le 0$

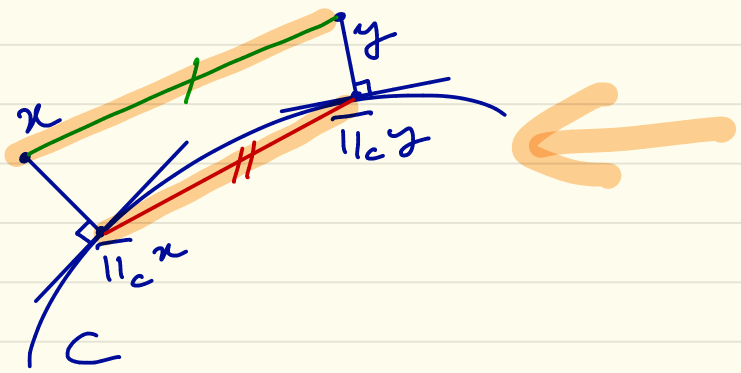
$\Rightarrow \|\hat{x}-\bar{x}\|^2 = 0$, d'où l'unicité. □

Si $C \subset E$, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ e.h. et C convexe, fermé $\neq \emptyset$, on définit ainsi d'après ce qui précède l'application

$$\overline{\Pi}_C : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & C \subset E \\ x & \longmapsto & \overline{\Pi}_C x \end{array}$$

Prop. : l'application de projection orthogonale est 1 - lipschitzienne :

$$(\forall (x,y) \in E^2) : \| \overline{\Pi}_C \cdot x - \overline{\Pi}_C \cdot y \| \leq \| x - y \|$$



dém. : exo (utiliser l'inéquation variationnelle pour $\overline{\Pi}_C x$ et $\overline{\Pi}_C y$).