Mai 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire.

Déf. : on appelle produit scalaire sur un ev (= $\mathbb{R}$-espace vectoriel) E et on note $(\cdot|\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique et définie positive :

i) bilinéarité : $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire par rapport à son premier et à son deuxième argument, ie

$$(\forall(\lambda, x, y, z) \in \mathbb{R} \times E^3) : \begin{array}{l} (\lambda x + y \mid z) = \lambda(x|z) + (y|z) \\ (x \mid \lambda y + z) = \lambda(x|y) + (x|z) \end{array}$$

ii) symétrie : $(\forall(x,y) \in E^2) : (y|x) = (x|y)$

iii) définie positivité :

$(\forall x \in E) : (x|x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$ (définie)

$(\forall x \in E) : (x|x) \geqslant 0$ (positivité)

Remarques : i) sauf cas trivial, une application bilinéaire n'est pas linéaire

(cf. $(\lambda x|\lambda x) = \lambda^2 (x|x)$, pas $\underline{\lambda}(x|x)$ ... !)

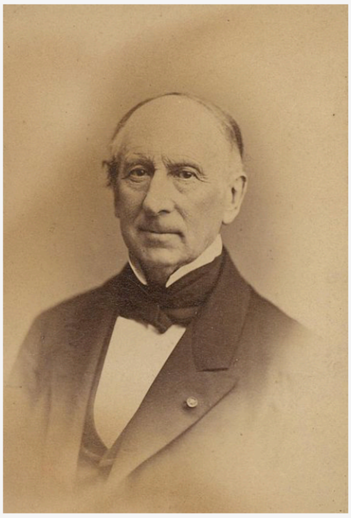
ii) la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que par rapport à l'une des deux variables ;

iii) la définition (et la plupart des résultats du chapitre) s'étend au cas des $\mathbb{C}$-ev grâce à la notion de "sesquilinéarité".

On va montrer que, dès qu'on a un produit scalaire, on a une norme.

Th. (Cauchy-Schwarz) : soit $(E, (.|.))$ un ev. muni d'un produit scalaire ; alors :

Augustin Louis Cauchy



Cauchy photographié peu avant sa mort.

Naissance	21 août 1789 Paris (France)
Décès	23 mai 1857 (à 67 ans) Sceaux (France)
Nationalité	Française
Domaines	Mathématicien
Institutions	École polytechnique

Naissance	25 janvier 1843 Hermsdorf (Silésie)
Décès	30 novembre 1921 (à 78 ans) Berlin (Allemagne)
Nationalité	Allemand
Domaines	Mathématiques
Institutions	Université de Halle École polytechnique

$(\forall (x,y)\in E^2)$: $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\cdot\sqrt{(y|y)}$

Remarque : une fois établi qu'on définit bien une norme en posant $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, cette inégalité se réécrit :

$$|(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

dém. : soient x et $y \in E$; quel que soit $\lambda\in\mathbb{R}$, par positivité du prod. scalaire on a :

$$0 \leq (\lambda x+y \mid \lambda x+y) = \overbrace{\lambda^2(x|x)+2\lambda(x|y)+(y|y)}^{\text{polynôme deg. 2 en } \lambda}$$

(on a utilisé la bilinéarité et la symétrie)

$\Rightarrow \Delta' = (x|y)^2-(x|x)\cdot(y|y) \leq 0$

$\Rightarrow |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\cdot\sqrt{(y|y)}$. $\square$

Proposition : soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un ev muni d'un produit scalaire ; on définit sur E une norme en posant :

$$(\forall x\in E) : \|x\| := \sqrt{(x|x)}.$$

dém. : remarquons tout d'abord que, par positivité, cette définition a un sens. De plus :

i) $\sqrt{(x|x)} = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow (x|x) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$ (définie)
$\sqrt{(x|x)} \geq 0$ (positivité)

$\Rightarrow$ définie-positivité ;

ii) $\sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)}$ (bilinéarité)

$= |\lambda| \sqrt{(x \mid x)}$ (homogénéité positive)

Le point iii), l'inégalité triangulaire, utilise le

<u>Lemme</u> (inégalité de Minkowsky) :

$(\forall (x, y, z) \in E^3) : \sqrt{(x+y \mid x+y)} \leq \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}$

(ce qui donne exactement l'inégalité voulue :
" $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ").

<u>dém.</u> : Soient x, y et $z \in E$; d'après Cauchy-Schwarz,

$$0 \leq (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y)$$
$$\leq (x \mid x) + 2\sqrt{(x \mid x)} \cdot \sqrt{(y \mid y)} + (y \mid y)$$
$$= \left(\sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}\right)^2,$$

d'où l'inégalité voulue en prenant la racine carrée.
Ce qui clôt la démo. du lemme et de la proposition. □

<u>Déf.</u> : un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire s'appelle un "espace pré-hilbertien".
Cet espace, muni de la norme engendrée par le produit scalaire est un espace vectoriel normé (evn). Si cet evn est complet (ie est un espace de Banach), on dit que $(E, (.|.))$ est un "espace de Hilbert".
Quand cet espace est de dimension finie, il est automatiquement complet et on parle "d'espace euclidien."

<u>Exemples.</u>

i) $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ avec $(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$= {}^t x \cdot y \in \mathbb{R}$

est un espace euclidien.

ii) de même pour $M(m, n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
(matrices réelles $m \times n$ ie, à un choix de bases près sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, applications linéaires — donc continues en dim finie — de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$) muni de $(\cdot|\cdot)$ défini par (cf. TD 4) :

$$(A|B) := \mathrm{tr}({}^t A \cdot B) \quad \text{(trace du produit matriciel } {}^t A \cdot B)$$

↑ produit scalaire "de Frobenius"

<u>NB.</u> $\dim M(m, n, \mathbb{R}) = m \cdot n < \infty$
(cf. base $\{E_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$
où
$$E_{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \left[\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{array}\right] \end{array} \Big\updownarrow m$$
$$\underleftrightarrow{\quad n \quad}$$
)

iii) $\ell^2(\mathbb{N})$, espace des suites de carré sommables (cf. TD 3),

$$(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|}_{\geq 0}{}^2 < \infty,$$

muni du produit scalaire :

$$(X \mid Y) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot y_k \quad (*) \quad \text{où } X = (x_k)_k \text{ et } Y = (y_k)_k$$

sont dans $\ell^2(\mathbb{N})$, ce qui garantit que la quantité $(*)$ est bien défini (i.e. que la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^{K} x_k \cdot y_k\right)_K \quad \text{cv dans } \mathbb{R} \text{ quand } K \to \infty ;$$

exo : vérifiez le !)

est un espace de Hilbert (cf. TD 4 pour la complétude). C'est un ev de dim ∞, ce n'est donc pas un espace euclidien.

$\mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)/\sim \; =: L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$

iv) $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, l'ensemble des (classes de) fonctions de $X \to \mathbb{R}$ mesurables (pour la tribu $\mathcal{B}$ sur X et celle des boréliens sur $\mathbb{R}$) et de carré sommables, ↑ cf. MI1

$$\int_X \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0} \, d\mu(x) < \infty ,$$

muni du produit scalaire

$$(f \mid g) := \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x) \quad (**)$$

est un espace de Hilbert. ← Th. de Riesz-Fischer

Remarques : i) $(f \mid f) = 0 \Rightarrow \int_X \overbrace{|f|^2}^{\geq 0} d\mu = 0$

$\Rightarrow |f|^2 = 0$ μ.pp., i.e $f = 0$ μ.pp : $f = 0_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)}$ ...

parce qu'on a pris le soin de considérer des classes de fonctions (égales μ p.p.) et non directement des fonctions.

ii) Comme dans le cas de $\ell^2(\mathbb{N})$, vérifiez que $f, g \in L^2$ permet de garantir que $f \cdot g$ est intégrable ie, par définition, que

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu < \infty,$$

de sorte que (**) a bien un sens.

iii) On montre en fait (cf. §3.) que tout est espace de Hilbert (séparable — ie qui contient une partie dénombrable dense) de dim infinie est isomorphe (bijection linéaire) et isométrique (cette bijection préserve la norme) à $\ell^2(\mathbb{N})$. En ce sens,

$$L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$$

égalité à un isomorphisme isométrique près

et $\ell^2(\mathbb{N})$ est le "modèle" de tous les espaces de Hilbert de dim ∞ que vous rencontrerez (cf. Ch. IV et EDP MAM 4).

Mai 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire
2. Théorème de la projection
3. Orthogonalité
4. Séries de Fourier trigonométriques

---

2. Théorème de la projection.

Déf. : soit $A \subset E$ une partie non-vide d'un evn E, et soit $x \in E$; on définit la distance du point x à la partie A, et on note $d(x, A)$, comme :

$$d(x, A) := \operatorname{Inf} \{ \|x-y\|, y \in A \}$$

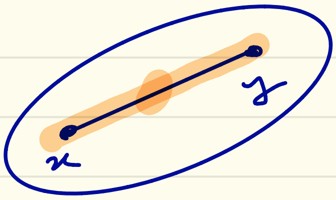
Remarque : la partie A étant non-vide, l'ensemble $\{ \|x-y\|, y \in A \}$ est une partie $\neq \emptyset$ et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$: l'inf existe.

Le théorème de la projection donne des conditions suffisantes sur E (espace de Hilbert) et sur A ($A \neq \emptyset$, convexe et fermé) pour qu'il existe un unique pt $\bar{x} \in A$ atteignant cet Inf :

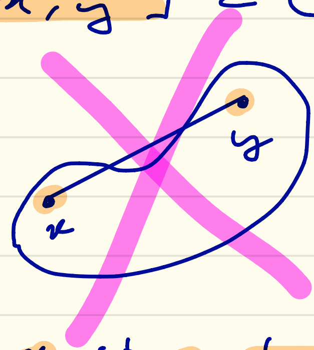
$$\|x - \bar{x}\| = \operatorname{Inf}_{y \in A} \|x-y\|.$$

Déf. : dans un e.v. E (c'est une notion purement vectorielle), une partie $C \subset E$ est dite **convexe** si :

$$(\forall (x,y) \in C^2) : [x,y] \subset C$$

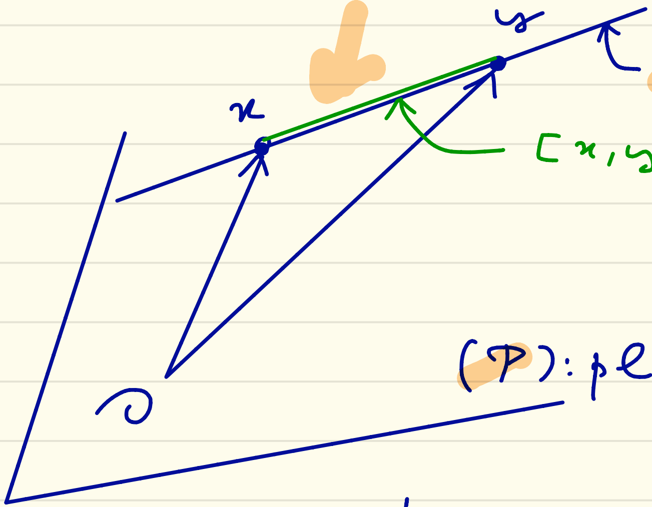


convexe



pas convexe

Rappel : $[x,y] := \{(1-t).x + t.y \,,\, t \in [0,1]\}$



$\mathcal{D}$: droite affine $(\mathcal{D})$ engendrée par x et y

$(\mathcal{P})$: plan (vectoriel engendré par x,y)

$$[x,y] = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda \text{ et } \mu \geq 0\}$$ ← combinaisons convexes

$$\cap$$

$$\mathcal{D} = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda + \mu = 1\}$$ ← combinaisons affines

$$\cap$$

$$\mathcal{P} = \{\lambda x + \mu y \,,\ \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$ ← combinaisons linéaires

Autrement dit, C **convexe** si :

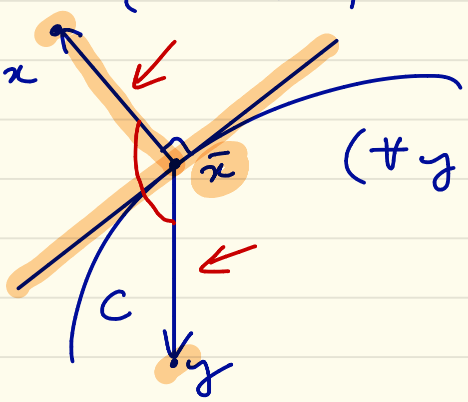
$$(\forall (x,y) \in C^2)\ (\forall t \in [0,1]) : (1-t)x + ty \in C$$

Remarque : notion fondamentale en Optimisation (cf. MAM4).

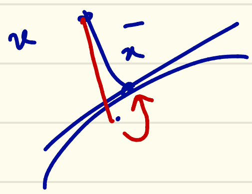
Th. (de la projection) : *** Soit $(E, (.|.))$ un e.h., soit $C \subset E$ une partie fermée, convexe et non-vide ; soit $x \in E$,

$$(\exists!\, \bar{x} \in C) : \|x - \bar{x}\| = d(x, C) = \operatorname*{Inf}_{y \in C} \|x - y\|$$

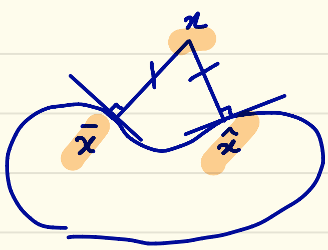
Cet $\bar{x}$, qui s'appelle le "projeté orthogonal de x sur C" et se note $\Pi_C x$, est caractérisé par l'inéquation (dite "inéquation variationnelle", cf. MAM4-5) :



$$(\forall y \in C) : (x - \bar{x} \mid y - \bar{x}) \leq 0 \qquad (*)$$



Remarques. i) le dessin ci-avant résume tout le résultat : on comprend l'intérêt que C soit
- non-vide : $\bar{x} \in C$!
- fermée : $\bar{x}$ a tendance à être "au bord de C", donc si C est fermé (et contient son bord) ça aide $\bar{x}$ à appartenir à C
- convexe pour l'unicité, cf. sinon :



C (pas convexe)

$\|x - \bar{x}\| = \|x - \hat{x}\| = d(x, C)$

ii) $(*)$ est une caractérisation, ie le projeté vérifie $(*)$ et, réciproquement, un point de C qui vérifie $(*)$ est nécessairement le projeté de x sur C.

iii) c'est l'un des (trop) rares résultats d'existence et d'unicité en maths : il sert "partout", et montre notamment que le problème d'optimisation (minimisation...) ci-dessous possède une solution et une seule (cf. TD4-5, AN2, Opti. MAM4-5...) :

$$\begin{cases} \|x-y\| \longrightarrow \min \\ y \in C \end{cases}$$

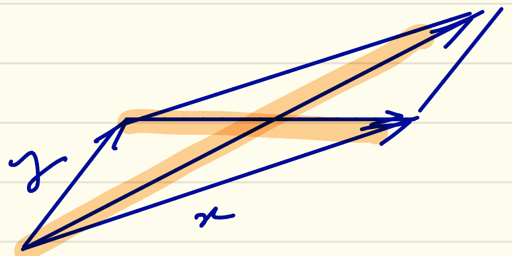
dém. ! i) existence : notons $d := d(x,C) \geq 0$; soit $n \in \mathbb{N}$, $d + \frac{1}{n+1} > d = \operatorname{Inf}_{y \in C} \|x-y\|$:

l'inf étant le plus grand des minorants, $d + \frac{1}{n+1}$ n'est pas un minorant de l'ensemble $\{\|x-y\|, y \in C\}$: $\exists x_n \in C$ tq $\|x-x_n\| < d + \frac{1}{n+1}$; on construit ainsi $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ tq

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : d \leq \|x - x_n\| < d + \frac{1}{n+1}.$$

Par construction, $\|x - x_n\| \longrightarrow d$, $n \to \infty$; montrons que $(x_n)_n$ CV. Dans $(E, (.|.))$ e.h. (esp complet, donc), il suffit de mq $(x_n)_n$ est de Cauchy. Ça suffira à conclure à l'existence car alors la limite $\bar{x}$

appartiendra à C, fermé (cf. $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$),
et $\underbrace{\|x - x_n\|}_{\downarrow \, d} \xrightarrow[n \to \infty]{} \|x - \bar{x}\| \Rightarrow \|x - \bar{x}\| = d$.



Lemme de la médiane :

Soient x et $y \in E$, $(E, (\cdot|\cdot))$ pré-hilbertien ;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

dém. : évident !

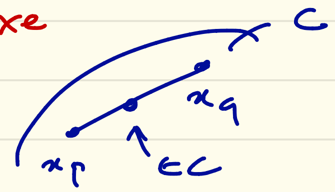
(suite dém. th. projection) : soient $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2 + \|\overbrace{(x - x_p) - (x - x_q)}^{x_q - x_p}\|^2 = 2(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2)$$

par le lemme de la médiane.

Or, $\|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2 = \|2(x - \frac{x_p + x_q}{2})\|^2 \geq 4d^2$

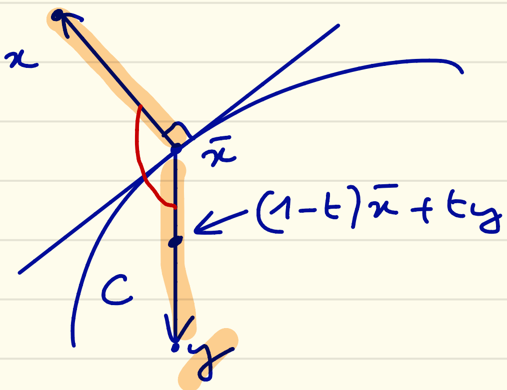
$\frac{x_p + x_q}{2} \in C$, convexe



$$\Rightarrow \|x_p - x_q\|^2 \leq \underbrace{2(\underbrace{\|x - x_p\|^2}_{\xrightarrow[p \to \infty]{} d^2} + \underbrace{\|x - x_q\|^2}_{\xrightarrow[q \to \infty]{} d^2}) - 4d^2}_{\xrightarrow[p \text{ et } q \to \infty]{} 0}$$

Donc, $\|x_p - x_q\|$ est aussi petit que l'on veut pour p et q assez grands : $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où l'existence d'un projeté $\bar{x}$.

ii) <u>caractérisation</u> : soit $\bar{x} \in C$ tq $\|x-\bar{x}\| = \inf_{y\in C}\|x-y\|$;



soit $y \in C$;

soit $t \in]0,1]$, C convexe (et $\bar{x}$, $y \in C$) $\Rightarrow (1-t)\bar{x}+ty \in C$, donc

$$\|x-\bar{x}\|^2 \le \|x-((1-t)\bar{x}+ty)\|^2$$
$$= \|(x-\bar{x})-t(y-\bar{x})\|^2$$
$$= \|x-\bar{x}\|^2 - 2t(x-\bar{x}|y-\bar{x}) + t^2\|y-\bar{x}\|^2$$

Donc : $2\cancel{t}(x-\bar{x}|y-\bar{x}) \le t^{\cancel{2}}\|y-\bar{x}\|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$\Rightarrow (x-\bar{x}|y-\bar{x}) \le 0$, d'où (*). Réciproquement, si $\bar{x}$ vérifie (*), soit $y \in C$:

$$\|x-y\|^2 = \|(x-\bar{x})-(y-\bar{x})\|^2$$
$$= \|x-\bar{x}\|^2 \underbrace{-2(x-\bar{x}|y-\bar{x})}_{\geqslant 0} + \underbrace{\|y-\bar{x}\|^2}_{\geqslant 0}$$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 \geqslant \|x-\bar{x}\|^2$: $\bar{x}$ minimise $\|x-y\|$ pour $y \in C$.

iii) <u>unicité</u> : si $\bar{x}$ et $\hat{x} \in C$ sont deux pts qui réalisent la distance, alors tous deux vérifient (*) et :

$(x-\bar{x}|\hat{x}-\bar{x}) \le 0 \quad (y \leftarrow \hat{x})$

$(x-\hat{x}|\bar{x}-\hat{x}) \le 0 \quad (y \leftarrow \bar{x})$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-\bar{x}|\hat{x}-\bar{x}) + (\hat{x}-x|\hat{x}-\bar{x})}_{(\cancel{x}-\bar{x}+\hat{x}-\cancel{x}|\hat{x}-\bar{x}) = \|\hat{x}-\bar{x}\|^2} \le 0$$

$\Rightarrow \|\hat{x}-\bar{x}\|^2 \le 0$

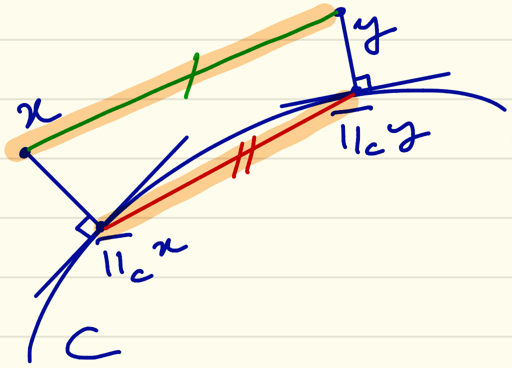
$\Rightarrow \|\hat{x}-\bar{x}\|^2 = 0$, d'où l'unicité. □

Si $C \subset E$, $(E, (\cdot|\cdot))$ e.h. et C convexe, fermé $\neq \emptyset$, on définit ainsi d'après ce qui précède l'application

$$\overline{\Pi}_C : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & C \subset E \\ x & \longmapsto & \overline{\Pi}_C\, x \end{array}$$

Prop. : l'application de projection orthogonale est 1-lipschitzienne :

$$(\forall (x,y) \in E^2) : \| \overline{\Pi}_C \cdot x - \overline{\Pi}_C \cdot y \| \leq \| x - y \|$$



dém. : exo (utiliser l'inéquation variationnelle pour $\overline{\Pi}_C x$ et $\overline{\Pi}_C y$).

Mai 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire
2. Théorème de la projection
3. Orthogonalité
4. Séries de Fourier trigonométriques

---

3. Orthogonalité.

Dans toute la section, $(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace de Hilbert.

Déf.: Soit $A \subset E$, on appelle "orthogonal de A" et on note $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp := \{x \in E \mid (\forall y \in A) : (x|y) = 0\}.$$

Prop.: l'orthogonal d'une partie est un sev fermé.

dém.: i) Soit $A \subset E$, $(\forall y \in A) : (0|y) = 0$ donc $0 \in A$ et, si x_1 et $x_2 \in A^\perp$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\forall y \in A) : (\lambda x_1 + x_2 | y) = \lambda \underbrace{(x_1|y)}_{0} + \underbrace{(x_2|y)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda x_1 + x_2 \in A^\perp$ qui est donc un sev.

ii) soit $(x_n)_n \in (A^\perp)^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$; mq $x \in A^\perp$ (auquel cas la partie sera fermée).

On, si $y \in A$, $(x|y) = (\lim_n x_n | y)$

$= \lim (x_n | y) = 0$. $\square$

(continuité de $(\cdot | y)$ de E dans $\mathbb{R}$) $\quad \underbrace{}_{0}$

<u>Prop.</u> : si A est un sev fermé, alors $A \oplus A^\perp = E$.

<u>Rappel</u> : $A \oplus A^\perp = E$ signifie ici somme directe topologique égale à E, c'est à dire :

i) on a somme directe algébrique :

$\varphi : A \times A^\perp \longrightarrow E$
$(x, y) \longmapsto x + y$ est une bijection

(et donc, comme elle est clairement linéaire, un isomorphisme) ;

ii) φ est en plus (ce qui n'est pas automatique en dim infinie) un homéomorphisme (φ <u>et</u> φ^{-1} sont continues).

<u>dém.</u> : soit donc $\varphi : A \times A^\perp \longrightarrow E, (x,y) \longmapsto x+y$;

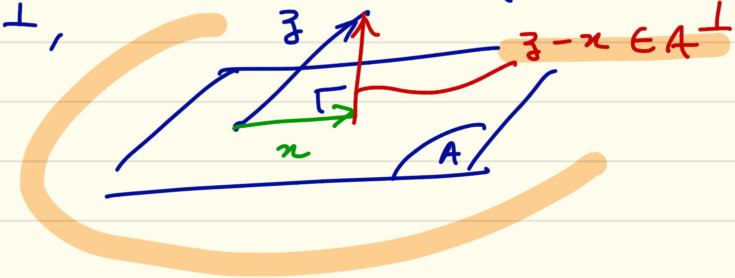
i) <u>φ injective</u> : comme φ est linéaire, il suffit de mq $\mathrm{Ker}\, \varphi = (0,0)$, ie que $\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$; or,

$0 = \varphi(x,y) = x + y \Rightarrow x = -y$: comme $y \in A^\perp$ qui est un sev, $-y \in A^\perp$ aussi, donc

$x \in A \cap A^\perp \Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Et $y = -x = 0$.

ii) <u>φ surjective</u> : soit $z \in E$; comme A est un sev fermé, A est convexe, fermée et $\neq \emptyset$;

donc z se projette orthogonalement sur A : notons $x := \Pi_A z$; ce projeté est caractérisé par la relation $z - x \in A^\perp$,



donc $z = \underset{\underset{A}{\cap}}{x} + \underbrace{(z-x)}_{\in A^\perp}$

ie $z = \varphi(x, z-x)$.

(ie $\varphi^{-1} = (\Pi_A, Id - \Pi_A)$)

iii) φ <u>homéomorphisme</u> : φ étant linéaire, il suffit de mq $\exists C \geq 0$ tq

$(\forall (x,y) \in A \times A^\perp)$: $\|\varphi(x,y)\|_E \leq C . \|(x,y)\|_{A\times A^\perp}$

où l'on prend par exemple sur $A \times A^\perp$

$$\|(x,y)\|_{A\times A^\perp} = \|x\|_E + \|y\|_E ;$$

or, $\|\varphi(x,y)\|_E = \|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$
$= \|(x,y)\|_{A\times A^\perp}$;

réciproquement, montrons que φ^{-1} est également continue : soit $z \in E$,

$$\begin{aligned} \|\varphi^{-1}(z)\|_{A\times A^\perp} &= \|(\Pi_A z, z - \Pi_A z)\|_{A\times A^\perp} \\ &= \|\Pi_A z\|_E + \|z - \Pi_A z\|_E \\ &\leq 2\|\Pi_A z\|_E + \|z\|_E ; \end{aligned}$$

on sait que (cf. §2.) l'application projection $\Pi_A : E \longrightarrow A \subset E$ est 1-lipschitzienne, donc

$$\|\varphi^{-1}(z)\|_{A\times A^\perp} \leq (2+1) . \|z\|_E . \quad \square$$

Prop. : $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$. ← double orthogonal

Dém. : $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp}$ est un sev fermé contenant A (cf. $x \in A \Rightarrow (\forall y \in A^{\perp}) : (x|y) = 0 \Rightarrow x \in (A^{\perp})^{\perp}$) ;

donc $A^{\perp\perp} \supset \overline{\mathrm{Vect}\, A}$ = le plus petit (au sens de l'inclusion) sev fermé contenant A [exo : montrez-le ! En commençant par mq l'adhérence d'un sev est un sev.]

De plus, $A^{\perp}$ sev fermé $\Rightarrow A^{\perp} \oplus A^{\perp\perp} = E$ (cf. proposition précédente) ;

de même $\overline{\mathrm{Vect}\, A}$ sev fermé $\Rightarrow \overline{\mathrm{Vect}\, A} \oplus \left(\overline{\mathrm{Vect}\, A}\right)^{\perp} = E$.

Or, $\left(\overline{\mathrm{Vect}\, A}\right)^{\perp} = A^{\perp}$ puisque :

- $A \subset \overline{\mathrm{Vect}\, A} \Rightarrow A^{\perp} \supset \left(\overline{\mathrm{Vect}\, A}\right)^{\perp}$
- réciproquement, soit $x \in A^{\perp}$; si $y \in \overline{\mathrm{Vect}\, A}$, $\exists (y_n)_n \in (\mathrm{Vect}\, A)^{\mathbb{N}}$ tq $(y_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$; comme chaque y_n est C.L. de vecteurs de A,

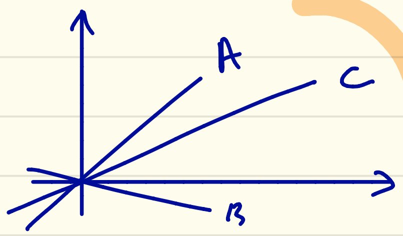
$$0 = (x|y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x|y)$$

↑ linéarité de $(x|.)$ ↖ continuité de $(x|.)$

donc $(x|y) = 0$, ie $x \in \left(\overline{\mathrm{Vect}\, A}\right)^{\perp}$.

En résumé, on a donc :

$$\begin{cases} A^{\perp} \oplus A^{\perp\perp} = E \\ A^{\perp} \oplus \overline{\mathrm{Vect}\, A} = E \end{cases}$$



Comme en outre $\overline{\mathrm{Vect}\, A} \subset A^{\perp\perp}$, on a nécessairement $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$ d'après le lemme (algébrique) ci-après.

Lemme : soient A, B et C trois sev d'un ev E tq :

$$\begin{cases} A \oplus B = E \\ A \oplus C = E \end{cases} \quad \text{(sommes directes algébriques)}$$

Si $B \subset C$, nécessairement $B = C$.

dém. : soit $x \in C$; $A \oplus B = E \Rightarrow (\exists!\,(y,z) \in A \times B)$: $x = y + z$; comme $z \in B \subset C$, $y + z$ est aussi la décomposition (unique !) de x sur $A \times C$; or, cette décomposition est connue, c'est $x = 0 + x$. Par unicité, on a : $\begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$. Donc $x = z \in B$. $\square$

On se place désormais sur un e.h. $(E, (\cdot|\cdot))$ séparable, ie tq $\exists$ une partie (au plus) dénombrable dense dans E.

NB. Tous les espaces de Hilbert classiques qu'on a cité au §1. sont séparables.

Déf. : on appelle base hilbertienne de l'e.h. $(E, (\cdot|\cdot))$ une famille (suite) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

i) la famille est orthonormée :

$$(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2) : (e_n | e_m) = \delta_{n,m} \quad \text{(symbole de Kronecker)} \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Leopold Kronecker

Leopold Kronecker in 1865

Born	7 December 1823 Liegnitz, Province of Silesia, Prussia
Died	29 December 1891 (aged 68) Berlin, German Empire
Nationality	Prussian
Alma mater	University of Berlin

ii) la famille est totale : $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = E$.
(Tout vecteur de E est limite de combinaisons linéaires des e_n.)

<u>Prop.</u> : tout e.h. $(E, (\cdot|\cdot))$ séparable possède une base hilbertienne. (cf. §4.)

<u>dém.</u> : orthonormalisation (procédé de Gram-Schmidt) de la famille dénombrable dense. (cf. TD 4). □

<u>Th.</u> : soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une b.h. (= base hilbertienne) de l'e.h. $(E, (\cdot|\cdot))$; alors, pour tout $x \in E$:

i) $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n) \cdot e_n$,

ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x|e_n)|^2$ (formule de Parseval).

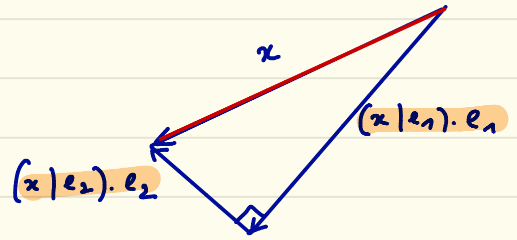
<u>Remarques.</u> a) la formule i) signifie que la série ie la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{n=0}^{N} (x|e_n) \cdot e_n\right)_N \xrightarrow[N \to \infty]{} x$$

cv vers x dans, ie pour la norme $\|\cdot\|$ issue du produit scalaire :

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (x|e_n) \cdot e_n - x \right\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

b) La formule de Parseval généralise le théorème de Pythagore à la dimension infinie dans un cadre hilbertien :



$$\|x\|^2 = |(x|e_1)|^2 + |(x|e_2)|^2$$

En ce sens, les espaces de Hilbert sont les espaces de dimension infinie dont la géométrie est la plus proche des espaces euclidiens (dim finie).

Cette formule dit en particulier que la suite $((x|e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$, ie qu'elle est de carré sommable (cf. TD3) :

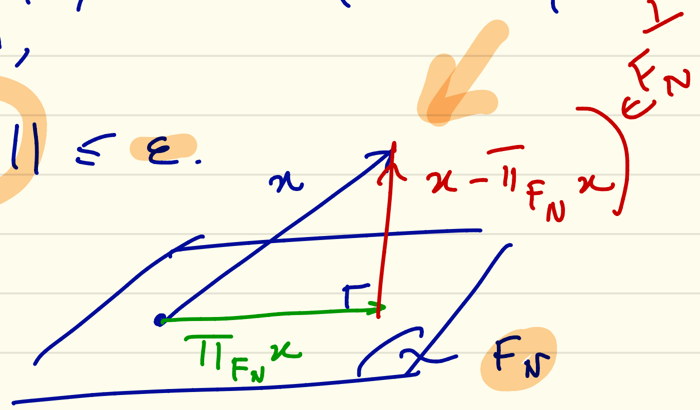
$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

c) Une base hilbertienne n'est pas une base vectorielle puisqu'en général, un vecteur n'est pas CL des e_n (mais limite de CL des e_n).

dém. : i) par hypothèse, $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n, n\in\mathbb{N}\}} = E$; soient donc $x\in E$ et $\varepsilon>0$, $\exists y \in \mathrm{Vect}\{e_n, n\in\mathbb{N}\}$ tq $\|x-y\|\leq\varepsilon$; y est CL des e_n donc $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $y\in F_N := \mathrm{Vect}\{e_0, e_1, \dots, e_N\}$.
Comme F_N est un sev de dimension finie ($\dim_{\mathbb{R}} F_N = N+1$), c'est un sev fermé, donc

c'est un convexe fermé $\neq \emptyset$ sur lequel on peut projeter x : par définition,

$$\|x - \Pi_{F_N} x\| \le \|x - y\| \le \varepsilon.$$



Or, $\Pi_{F_N} x$ est caractérisé par le fait que

$x - \Pi_{F_N} x \in F_N^{\perp}$; puisque $\Pi_{F_N} x \in F_N$,

$$(\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{1+N}) : \Pi_{F_N} x = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n . e_n ,$$

et $\quad 0 = \left(x - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n . e_n \,\middle|\, e_m\right), \quad m = 0, \dots, N$

$$\Rightarrow \lambda_m = (x \mid e_m), \quad m = 0, \dots, N \quad (\text{cf. } (e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}).$$

Donc : $$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} (x \mid e_n) . e_n \right\| \le \varepsilon .$$

Enfin, si $M \geq N$, $F_M \supset F_N$ et

$$\|x - \underbrace{\Pi_{F_M} x}_{= \sum_{n=0}^{M} (x \mid e_n) . e_n}\| \le \|x - \Pi_{F_N} x\| \le \varepsilon ,$$

(même calcul !)

d'où la cv de $\left(\sum_{n=0}^{N} (x \mid e_n) . e_n\right)_N$ vers x.

ii) D'après ce qui précède, par continuité de $\|.\|$,

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (x \mid e_n) . e_n \right\| \xrightarrow[N \to \infty]{} \|x\| ;$$

on vérifie que

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (x \mid e_n) . e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |(x \mid e_n)|^2 ,$$ d'où le résultat. $\square$

Mai 2

Chapitre III - Espace de Hilbert

1. Produit scalaire
2. Théorème de la projection
3. Orthogonalité
4. Séries de Fourier trigonométriques

---

4. Séries de Fourier trigonométriques

Déf.: on définit l'espace $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ des (classes de) fonctions 2π-périodiques (ie: $f(t+2\pi)=f(t)$, p.p. $t\in\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de carré sommable sur leur période :

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \underbrace{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}_{2\pi\text{-périodique}} \,\middle|\, \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Clairement, on a les propriétés suivantes:

i) pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ si f est 2π-périodique;

ii) $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq L^2([0,2\pi]) \simeq L^2([a,a+2\pi])$, quel que soit $a\in\mathbb{R}$ (il suffit de prendre la restriction de f à la période voulue), et cet isomorphisme est une isométrie;

iii) en particulier, $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f|g) := \int_0^{2\pi} f(t).g(t)\,dt$$
$$= \int_a^{a+2\pi} f(t).g(t)\,dt \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

est un espace de Hilbert.

On définirait de même un espace de Hilbert complexe en considérant

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{C}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ 2\pi\text{-périodique} \mid \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt < \infty \}$$

et $(f|g) := \int_0^{2\pi} f(t).\overline{g(t)}\,dt$.

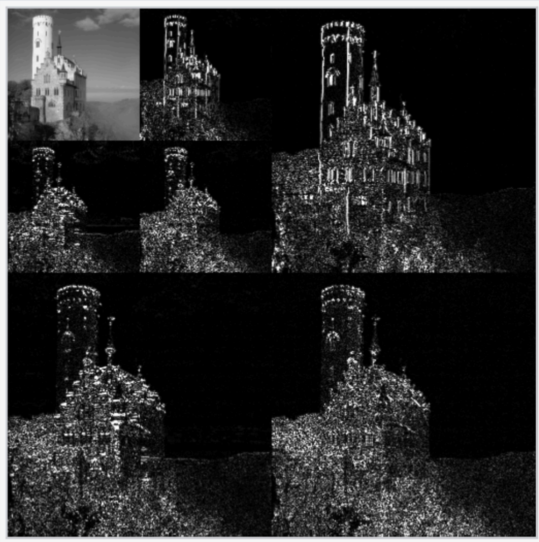
Comme $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq L^2([0, 2\pi])$ est séparable, on sait (cf. § III. 3) que l'espace possède une base hilbertienne. En particulier, l'une de ces bases est donnée par les polynômes trigonométriques (qui sont bien des fonctions 2π-périodiques de carré sommable sur leur période).

<u>Th.</u> : la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$

est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Dans le cas complexe, on vérifie que la famille $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$.

<u>Remarque</u> : il existe bien d'autres bases hilbertiennes de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, en particulier les bases d'ondelettes (qui définissent même des bases de $L^2(\mathbb{R})$) qui sont très utilisées en analyse de signaux, notamment en compression d'images : le format JPEG 2000 utilise des ondelettes (= "wavelets") alors que le format JPEG d'origine est basé sur la DCT (= Discrete Cosine Transform — application directe de la décomposition en série de Fourier trigo.)



An example of the wavelet transform that is used in JPEG 2000. This is a 2nd-level CDF 9/7 wavelet transform.

(source Wikipedia)

<u>dém.</u> : on sait que (cf. MI1) $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ (ens. des fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodiques et continues), isomorphe à $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, est dense dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$: soit donc $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\exists g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ tq

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

$\|.\|_2 = \|.\|$ dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

On sait également (Th. Stone-Weierstraß) qu'il existe un polynôme trigonométrique p ($p \in \mathrm{Vect}\{1, \cos nt, \sin nt, n \geq 1\}$) tq

$$\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon\,;$$

donc $\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2$

avec $\|g - p\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |g - p|^2\, dt\right)^{1/2}$

$$\leq \sqrt{2\pi} \cdot \|g - p\|_\infty$$

$\Rightarrow \|f - p\|_2 \leq \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi}$: on peut donc approcher arbitrairement près en $\|\cdot\|_2$ f par un polynôme trigo, ce qui montre que la famille $\{1, \cos nt, \sin nt, n \geq 1\}$ est dense.
On voit qu'avec les normalisations proposées elle est orthonormée, d'où le résultat. $\square$

Corollaire : soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$f = \underbrace{\left(f \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}_{a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(f \,\Big|\, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right)}_{a_n} \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \underbrace{\left(f \,\Big|\, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)}_{b_n} \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

CV dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, ie :

$$\int_0^{2\pi} \Big| f(t) - \underbrace{\Big(a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + b_n \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\Big)}_{S_N} \Big|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

S_N = série de Fourier (de f)

De plus, Parseval nous dit que :

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

$$= a_0^2 + \sum_{n \geq 1} a_n^2 + b_n^2 .$$

<u>Remarque</u> : dans le cas complexe on a :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(f \mid e^{int})}_{=: c_n} . e^{int} \qquad \int_0^{2\pi} f(t) . e^{-int} dt$$

CV dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ ie

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n . e^{int} \right|^2 dt \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ (Parseval).

À ces convergences, toujours vraies, on peut ajouter des résultats de CV uniforme / simple sous des hypothèses supplémentaires de régularité sur f.

<u>Th.</u> (Dirichlet) : si $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : S_N(t) \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \quad (\text{CVS})$$

où $S_N := a_0 . \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} a_n . \dfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + b_n . \dfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$

et où $f(t+)$ (resp $f(t-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de f en t. (Ces limites existent en tout pt puisque f est supposée $\mathcal{C}^1$ par morceaux.) En particulier, si f est continue en t, $f(t+) = f(t-) = f(t)$ et on a :

$$S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(t). \quad (\text{cf. TD } 5)$$

Si $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ est dans $H^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ (ie f "primitive" d'une fonction de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$), on a même que la suite (de fonctions continues) $(S_N)_N$ (= la série de Fourier) converge vers f dans

$$(\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) : \quad S_N \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \quad (\text{cvu})$$

ie : $\displaystyle \max_{t\in[0,2\pi]} |S_N(t) - f(t)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

($\forall t \in \mathbb{R} \ldots$)

ie : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{N})(\forall N \geq M)(\forall t \in [0,2\pi])$:

$$|S_N(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (\text{cvu}).$$

(cf. chap. IV)

<u>dém.</u> : Faisons la démo. dans le cas $H^1_{2\pi}$:

Supposons qu'il existe g dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ tq

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds$$

(on se place dans le cas complexe pour simplifier les notations).

Alors, $c_n = (f \mid e^{int}/\sqrt{2\pi})$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

$$= \cancel{\left[f(t) \cdot \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi}} + \frac{1}{in} \underbrace{\int_0^{2\pi} g(t) \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt}_{\substack{d_n := \text{ coeff. de Fourier} \\ \text{de } g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{C})}}, \quad n \neq 0$$

i.p.p. dans $H^1_{2\pi}$

(cf. $f' = g$ p.p. et "au sens des distributions" — cf. § IV.)

$$= 0 + \frac{d_n}{in} \Rightarrow c_n = \frac{d_n}{in}, \quad n \neq 0;$$

comme $(d_n)_n$ et $\left(\frac{1}{in}\right)_{n \neq 0} \in \ell^2$, Hölder $\Rightarrow$

$\left(\frac{d_n}{in}\right)_{n \neq 0}$ (et donc $(c_n)_n$) $\in \ell^1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| c_n \cdot \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|_\infty < \infty$$

cf. $\|e^{int}\|_\infty = \max_{t \in [0, 2\pi]} |e^{int}| = 1$

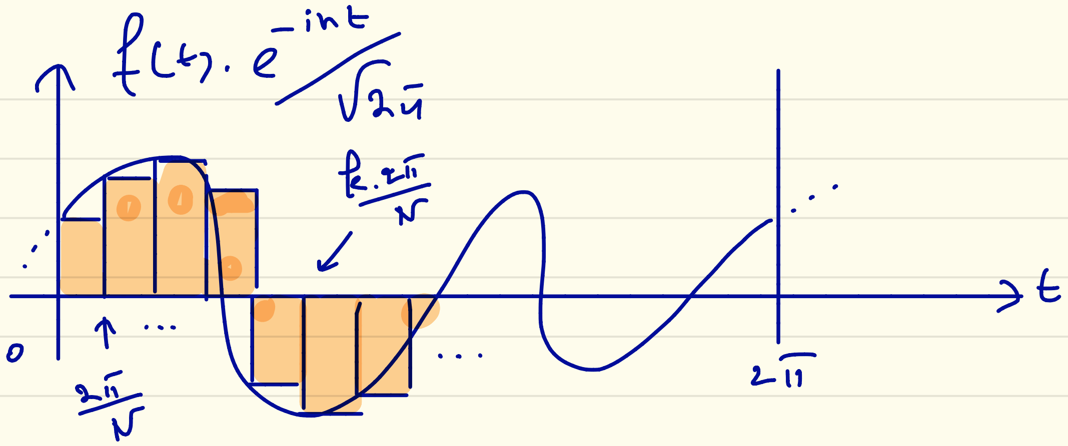
Comme $(\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach, la CVN implique la CVU, d'où le résultat. $\square$

<u>Transformée de Fourier discrète (DFT) :</u>

numériquement (et toujours en complexe),

$c_n = (f \mid e^{int}/\sqrt{2\pi})$

$$= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} \underset{\text{quadrature}}{\simeq} c_n^N := \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{f\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}_{=: f_k^N} \cdot e^{-\frac{2ik n\pi}{N}}$$



ce qui définit une transformation (discrète)

$$(f_n^N)_{n=0,\dots,N-1} \longrightarrow (c_n^N)_{n=0,\dots,N-1}$$

appelée Discrete Fourier Transform. Cette transformation est une bijection de $\mathbb{C}^N$ sur lui-même.

Remarque : i) on voit, à cause du terme en $e^{-\frac{2ikn\pi}{N}}$ dans la quadrature qu'il y a de nombreux termes communs dans le calcul des c_n^N ; le calcul optimisé (notamment pour $N = 2^p$) correspondant s'appelle FFT (= Fast Fourier Transform), son inverse s'appelle iFFT (= Inverse FFT), et ces algos jouent un rôle fondamental en traitement du signal / data science.

ii) Tous ces calculs (bases hilbertiennes et transformées discrètes) ont des analogues multidimensionnels (FFT2 en 2D ...)