TD3 - Espaces de suites ℓ^p

(fin TD2 - Cauchy - Lipschitz)

Exo 2.5.

- $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ $\quad (*)$

  $x \equiv 0$: sol., la solution de condition initiale $x_0 = 0$, ie $x(t_0) = 0$, $\forall t_0$; sol. globale (ie définie sur $\mathbb{R}$) donc maximale.

Supposons, $\forall t$, $x(t) \neq 0$;

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1 \underset{x(t)>0}{\Longrightarrow} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1$$

($\simeq$ idem si $x(t) < 0 \ldots$)

$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{\sqrt{x(s)}} = t$$

$t_0 = 0$

$$\Longrightarrow \left. 2\sqrt{x(s)}\right]_0^t = t$$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{x(t)} = t$$

$$\underset{x(0)=0}{\Longrightarrow} x(t) = t^2/4$$: vérifie en effet $(*)$

De même, pour $t<0$, on vérifie que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ est solution ; la fonction ainsi construite est de classe $\mathcal{C}^1$:
- $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- dérivable en $t=0$ (et dérivée est continue en ce pt)

$\Longrightarrow$ on a donc deux sols. maximales de même cond. initiale $\underset{\underset{t_0}{\uparrow}}{x(0)} = \underset{\underset{x_0}{\uparrow}}{0}$: l'hypothèse de locale lip. en x de f est donc nécessairement fausse.

NB. $x(t) = \frac{t.|t|}{4}$, $t\in\mathbb{R}$.

Exo 1. $1\leq p<\infty$:

$$(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \ell^p \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} < \infty$$

On pose $\|(x_k)_k\|_p := \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}$ $(<\infty)$.

Si $p=\infty$: $(x_k)_k \in \ell^\infty \Longleftrightarrow \sup_k |x_k| < \infty$

NB. $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, $k\geq 0$, $x_k \nearrow_{k\to\infty} 1$

$\Longrightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty$, $\|(x_k)\|_\infty = 1$.

- ℓ^∞ : i) définie positivité : $\sup_k |x_k| = 0$

$\Longrightarrow (\forall k\in\mathbb{N})$: $x_k = 0$ (sinon $\exists k$ tq $|x_k|>0$...)

(et positivité évidente)

ii) homogénéité pos. :

$$\sup_k |\lambda . x_k| = \sup_k |\lambda| . |x_k|$$
$$= |\lambda| . \sup_k |x_k| = |\lambda| . \|(x_k)_k\|_\infty$$

iii) inégalité triangulaire :

Soient $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$;

$$\sup_k |x_k + y_k| < \infty \ ?$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; $|x_k + y_k| \leq \underline{\underline{|x_k|}} + \underline{\underline{|y_k|}}$

$$\leq \underbrace{\|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty}_{\text{majorant (indép. } k)}$$

$\Rightarrow \sup_k |x_k + y_k| < \infty$

~~et~~ $\underbrace{\sup_k |x_k + y_k|}_{\|(x_k)_k + (y_k)_k\|_\infty} \leq \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$.

• $\underline{\ell^p,\ p \in [1, \infty[}$: $\ell^p = L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec

$X = \mathbb{N}$
$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$\mu = \mu_d$: $\mu_d(A) = \text{card } A$, $A \subset \mathbb{N}$
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad k \longmapsto f(k) = f_k$, $f = (f_k)_k$

$$\int_{\mathbb{N}} f(k)\, d\mu_d(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \iff \int_{\mathbb{N}} |x(k)|^p d\mu_d(k) < \infty$$

$$\iff x(\cdot) \in L^p$$

On sait que (cf. MI 1) $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un ev
(cf. Minkowsky, cf. Hölder...)

et on sait que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un evn.

<u>Exo 2.</u> Rappel : si $\boxed{\mu(X) < \infty}$, on a

$$1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(X, \mathcal{B}, \mu) \supsetneq L^q(X, \mathcal{B}, \mu);$$

ici, $\mu_d(\mathbb{N}) = \text{card}\, \mathbb{N} = \infty$!

• <u>$1 \leq p < \infty$</u> : soit $(x_k)_k \in \ell^p$, mq $(x_k)_k \in \ell^\infty$;

$\sum_k |x_k|^p < \infty$, ie que $\Big(\overbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}^{S_K}\Big)_K$ (= suite

de sommes partielles) cv dans $\mathbb{R}$ (ie vers une
valeur finie : $\lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} |x_k|^p = \sum_{k=0}^{\infty}(\dots) < \infty$)

$\implies \underbrace{S_{K+1} - S_K}_{\xrightarrow[K\to\infty]{} 0}$ devient arbitrairement petit
pour K grand (critère de C.)

Or, $S_{K+1} - S_K = |x_{K+1}|^p \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$

$$\implies (x_K)_K \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow (x_k)_k$ est bornée ; en effet : pour $\varepsilon = 1$,

$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geq K) : |x_k - 0| = |x_k| \leq \varepsilon = 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| \leq \underbrace{\max\{1, |x_0|, \dots, |x_{K-1}|\}}_{< \infty}$

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty$.

Et l'inclusion est stricte, $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $p < \infty$,

cf. : $(x_k) = (1)_k \in \ell^\infty$

$\notin \ell^p \ (p < \infty) : \sum_k |1|^p = \infty$.

. $\underline{1 \leq p < q < \infty}$: soit $(x_k)_k \in \ell^p$; mq

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q < \infty .$$

On a $\sum_k |x_k|^p < \infty \Rightarrow (|x_k|^p)_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

en particulier, $(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geq K) : |x_k|^p \leq 1$

ie $|x_k| \leq 1$

$\Rightarrow (\forall k \geq K) : |x_k|^p \geq |x_k|^q$, cf. $q > p$

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^q < \infty$ (cf. domination — sauf pour un nombre fini de termes)

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^q$.

De plus, $q/p > 1$ $\Rightarrow \sum_k \frac{1}{(k+1)^{q/p}} < \infty$ (Riemann)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q$, et $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\left((k+1)^{\frac{1}{p}}\right)^p} = \sum_k \frac{1}{k+1} = \infty : \notin \ell^p.$

Donc $\ell^p \subsetneq \ell^q$, $1 \leq p < q < \infty$.

<u>Exo 3.</u> $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$
$\Rightarrow (\ell^p, \|.\|_p)$ Banach
(cf. Th. Riesz-Fischer)

<u>Remarque</u> : $L^p([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu_L = dx)$ est le "complété" de
$(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_p)$, $p < \infty$.

• <u>$p = \infty$</u> : soit $(X_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$; on note

$$X_m = (x_{m,k})_k, \quad \sup_k |x_{m,k}| < \infty ;$$

mq $(X_n)_n$ de Cauchy dans ℓ^∞
$\Rightarrow (X_n)_n$ cv dans ℓ^∞ ;
ie mq $\exists \bar{X} \in \ell^\infty$ tq $\|X_n - \bar{X}\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$;
← à construire !

① <u>Construction du candidat à être limite :</u>

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\forall k \geq 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : (x_{m,k})_m$ est de Cauchy ;

Chaque ($\forall k$) suite $(x_{n,k})_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(\mathbb{R}, |.|)$ complet (par construction !), donc ces suites CV : $(\forall k \in \mathbb{N})\,(\exists \bar{x}_k) : (x_{n,k})_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}_k$.

On construit ainsi $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k$.

(2) Appartenance du candidat $\bar{X}$ à ℓ^∞ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$x_{p,k} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{x}_k$

$$\underset{p\to\infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$: en particulier,

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall q \geq N_1)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{N_1,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow \bar{X} - X_{N_1} = (\bar{x}_k - x_{N_1,k})_k \in \ell^\infty$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \underbrace{(\bar{X} - X_{N_1})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \in \ell^\infty \text{ (e.v.)}$$

(3) CV :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N)\ \underbrace{(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon}_{\underbrace{\sup_k |\bar{x}_k - x_{q,k}|}_{\|\bar{X} - X_q\|_\infty} \leq \varepsilon}. \quad \square$$

Mai 2

Td 3 – Espaces ℓ^p (fin)

Exo 3. Complétude de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$:

démo pour $p = 1$ (idem si $1 < p < \infty$) :

soit $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 ; on note

$$X_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \|X_p - X_q\|_1 \leq \varepsilon$$

① Construction du candidat à être limite :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

encore trop faible

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$$

faible

$(x_{m,k})_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc CV dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet (transfert) :

On construit ainsi $\bar{x}_k := \lim_{n \to \infty} x_{n,k}$.

On note $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

② <u>Appartenance de $\bar{X}$ à ℓ^1</u> :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall K \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$$\overset{q \to \infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall K \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{K} \overbrace{|x_{p,k} - \bar{x}_k|}^{\geq 0} \leq \varepsilon$$

$$\bar{x}_k = \lim_{q \to \infty} x_{q,k}$$

$$\overset{K \to \infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon ;$$

en particulier, pour $\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{N_1,k} - \bar{x}_k| \leq 1$$

$p = N_1$

$$\Longrightarrow X_{N_1} - \bar{X} = (x_{N_1,k} - \bar{x}_k)_k \in \ell^1$$

$$\Longrightarrow \bar{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \bar{X})}_{\in \ell^1} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^1} \in \ell^1 \text{ (ev)}$$

(3) Convergence vers $\bar{X}$ dans ℓ^1 :

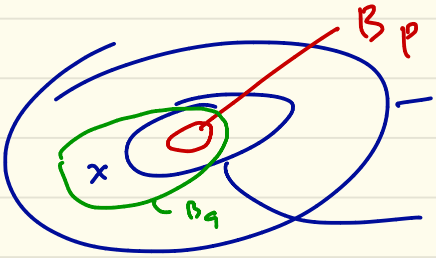
$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p\geq N) : \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k}-\bar{x}_k|}_{\|X_p-\bar{X}\|_1} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow (X_p)_p \xrightarrow[p\to\infty]{\|\cdot\|_1} \bar{X}.$$

Exo 2. $1\leq p<q\leq\infty \Longrightarrow \ell^p \subsetneq \ell^q$, et l'injection (canonique) est continue :

$$j : \ell^p \longrightarrow \ell^q$$
$$X=(x_k)_k \longmapsto X\in\ell^p\subset\ell^q$$

ie $j = id|_{\ell^p}$, $\quad id : \ell^q \longrightarrow \ell^q$, $\quad X \longmapsto X$



ℓ^q

ℓ^p : $\overbrace{\|\cdot\|_p, \ \|\cdot\|_q}^{\text{2 choix possibles}}$

Clairement j linéaire, $j\in L(\ell^p,\ell^q)$;
mq j est aussi continue, $j\in\mathcal{L}(\ell^p,\ell^q)$, ie qm :

$$(\exists C>0)(\forall X\in\ell^p) : \underbrace{\|\underbrace{j(X)}_{X}\|_q \leq C\cdot\|X\|_p}_{\|\cdot\|_p \text{ plus fine que } \|\cdot\|_q}$$

Pour cela, considérons $X \in \ell^p$, $X \in B_f^{\|.\|_p}(0,1) =: B_p$

(avec $1 \leq p \leq q < \infty$) ;

on a $\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}}_{\|X\|_p} \leq 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \leq 1^p = 1 \leftarrow$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |x_k|^p \leq 1$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : \underline{\underline{|x_k|}}^q \leq |x_k|^p \leq 1, \text{ car } q \geq p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q \leq 1$$

$$\Rightarrow X \in B_q := B_f^{\|.\|_q}(0,1)$$

Ie, on a mq : $B_p \subset B_q$.

Soit maintenant $X \in \ell^p$, et supposons $X \neq 0$ (ie $X \neq (0,0,\dots)$, la suite nulle) ;

$$\left\| \frac{X}{\|X\|_p} \right\|_p = 1 \Rightarrow \frac{X}{\|X\|_p} \in B_p \subset B_q$$

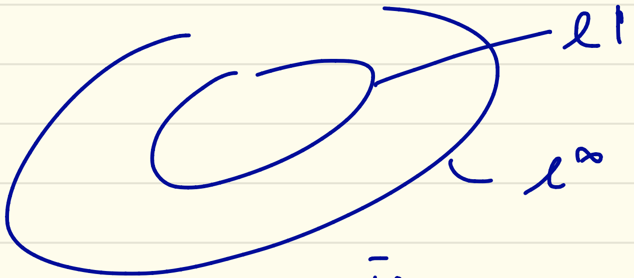
$$\Rightarrow \left\| \frac{X}{\|X\|_p} \right\|_q \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|X\|_p} \cdot \|X\|_q \leq 1$$

$$\Rightarrow \|X\|_q \leq 1 . \|X\|_p , \forall X \neq 0 :$$

cette relation est trivialement vraie quand $x = 0 = (0, 0, \dots)$, d'où la majoration $\forall x \in \ell^p$, et la continuité.

• cas $1 \leq p < q = \infty$: $\quad j : \begin{array}{ccc} \ell^p & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & x \end{array}$



Mq $(\exists C \geq 0)(\forall x \in \ell^p)$:
$$\|\underbrace{j(x)}_{x}\|_\infty \leq C.\|x\|_p$$

ie mq :
$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in \ell^p) : \underbrace{\|x\|_\infty \leq C.\|x\|_p}_{\text{“}\|.\|_p \geq \|.\|_\infty\text{”}}$$

Montrons comme précédemment $\|.\|_p$ plus fine que $\|.\|_\infty$ (cas $q < \infty$) que :
$$B_p \subset B_\infty$$
En effet, on aura alors que : $\forall x \in \ell^p$, $x \neq 0$,
$$\frac{x}{\|x\|_p} \in B_p \subset B_\infty \Longrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_\infty \leq 1$$
$$\Longrightarrow \|x\|_\infty \leq \underset{\substack{\uparrow \\ C}}{1}.\|x\|_p$$
(et l'inégalité est trivialement vraie si $x = 0$).

Or, soit $x \in B_p$, $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \leq 1^p = 1$
$$\Longrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k|^p \leq 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = (x_k)_k \in \ell^\infty \\ \text{et } \|x\|_\infty \leq 1 : \\ \quad x \in B_\infty. \end{cases}$$

Révisions. Exam CC no. 1 2018-2019

Exo 4. 4.1 et 4.2 : évidents cf. corrigé ;

4.3. $X_0 = (0, 0, \dots)$

$X_1 = (1, 0, \dots)$

$X_2 = (1, 1, 0, \dots)$

$\vdots$

$X_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(X_n)_n \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ (suite de suites)

Mq $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$, ie mq $(\forall n \in \mathbb{N})$: $X_n \in \ell^1$;

on doit vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(X_n = (x_{n,k})_k \right)$

$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n,k}| < \infty$: évident car tous les $x_{n,k}$ sont nuls (sauf un nombre fini — n — d'entre eux).

4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\|X_{n+1} - X_n\|_1 = \|(\overbrace{1, \dots, 1, 1, 1}^{n+1 \text{ fois}}, 0, \text{——}) - (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \text{——})\|_1$$

$$= \|(0, \dots, 0, 1, 0, \text{——})\|_1$$

$$= 1 \not\longrightarrow 0, \; n \to \infty :$$

$(X_n)_n$ n'est pas de Cauchy ; a fortiori,
$(X_n)_n$ pas CV.

Exo 3. $\dot{x}(t) = x(t) - 1$

3.1. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x) \longmapsto x - 1$

$f(t, x) := x - 1$

$\Rightarrow f(t, x(t)) = x(t) - 1$

3.2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz
car f est de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ continue
et loc. lip. en x (par les AF) :

$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|$ (localement...)
cf. Th 2

$\Longrightarrow \exists !$ sol. maximale si on fixe une condition initiale.

NB. heuristique : $\dot{x}(t) = x(t) - 1$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t) - 1} = 1 \quad \neq 0 \ ?$$

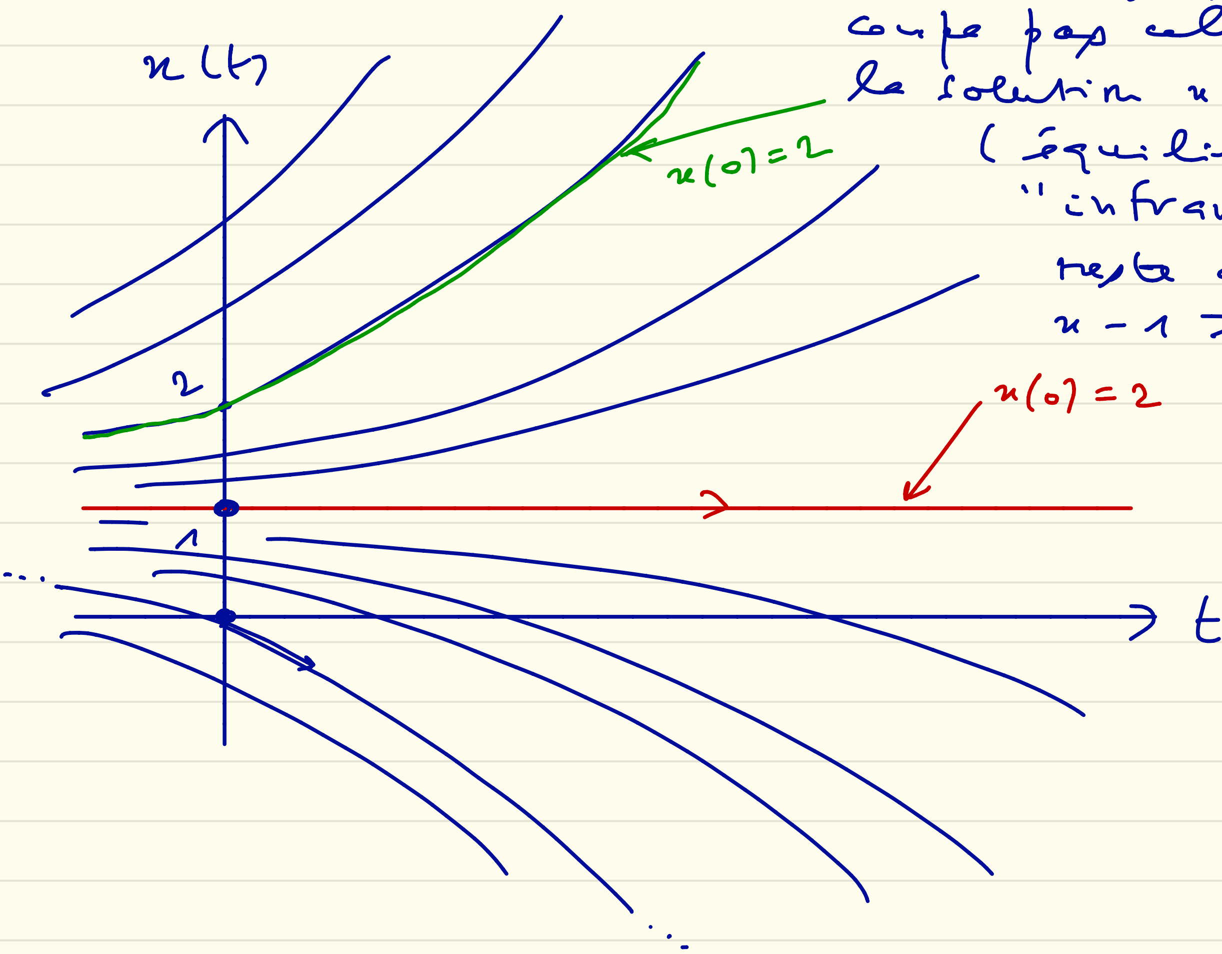
$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{x(s) - 1} = \underbrace{\int_0^t 1 . ds}_{t}$$

... ln (...)

3.3. $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ Clairement $x(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, est solution ;

cette solution ($I = \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto 1$) est définie sur tout $\mathbb{R}$ (sol. "globale"), donc maximale : par unicité, c'est LA solution maximale cherchée.

3.4. Comme $x(0) = 2 \neq 1$, la solution maximale dont le graphe ne coupe pas celui de la solution $x(0) = 1$ (équilibre "infranchissable"), reste du côté $x - 1 > 0$



Injection continue

- Vous avez montré que pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$.
- Il s'agit maintenant de montrer le fait que l'injection est continue.
- Injection :

$$\varphi : \begin{array}{l} \ell^p \to \ell^q \\ x \mapsto x \end{array}$$

- Manifestement linéaire !
- Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q = \|\varphi(x)\|_q \leq C\|x\|_p.$$

Injection continue

- Vous avez montré que pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$.
- Il s'agit maintenant de montrer le fait que l'injection est continue.
- Injection :

$$\varphi : \begin{matrix} \ell^p \to \ell^q \\ x \mapsto x \end{matrix}$$

- Manifestement linéaire !
- Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q = \|\varphi(x)\|_q \leq C\|x\|_p.$$

Injection continue

- Vous avez montré que pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$.
- Il s'agit maintenant de montrer le fait que l'injection est continue.
- Injection :

$$\varphi : \begin{array}{l} \ell^p \to \ell^q \\ x \mapsto x \end{array}$$

- Manifestement linéaire !
- Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q = \|\varphi(x)\|_q \leq C\|x\|_p.$$

Injection continue

- Vous avez montré que pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$.
- Il s'agit maintenant de montrer le fait que l'injection est continue.
- Injection :

$$\varphi : \begin{array}{l} \ell^p \to \ell^q \\ x \mapsto x \end{array}$$

- Manifestement linéaire !
- Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q = \|\varphi(x)\|_q \leq C\|x\|_p.$$

Injection continue

- Vous avez montré que pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$.
- Il s'agit maintenant de montrer le fait que l'injection est continue.
- Injection :

$$\varphi : \begin{array}{l} \ell^p \to \ell^q \\ x \mapsto x \end{array}$$

- Manifestement linéaire !
- Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_q = \|\varphi(x)\|_q \leq C\|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q < \infty$)

- Soit $x \in \ell^p$. On sait que $x \in \ell^q$.
- Commençons par $q < \infty$. Comme $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, et soit $X > 0$ son maximum : on a $X \leq \|x\|_p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (X^p)^{\frac{1}{p}} = X.$$

- La suite $(\frac{x_k}{\|x\|_p})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dans ℓ^p, tous ses termes sont inférieurs à 1, et donc

$$\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p.$$

- Si on somme,

$$\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

- En utilisant l'homogénéit de la norme,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q < \infty$)

- Soit $x \in \ell^p$. On sait que $x \in \ell^q$.
- Commençons par $q < \infty$. Comme $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, et soit $X > 0$ son maximum : on a $X \leq \|x\|_p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (X^p)^{\frac{1}{p}} = X.$$

- La suite $(\frac{x_k}{\|x\|_p})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dans ℓ^p, tous ses termes sont inférieurs à 1, et donc

$$\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p.$$

- Si on somme,

$$\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

- En utilisant l'homogénéit de la norme,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q < \infty$)

- Soit $x \in \ell^p$. On sait que $x \in \ell^q$.
- Commençons par $q < \infty$. Comme $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, et soit $X > 0$ son maximum : on a $X \leq \|x\|_p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (X^p)^{\frac{1}{p}} = X.$$

- La suite $(\frac{x_k}{\|x\|_p})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dans ℓ^p, tous ses termes sont inférieurs à 1, et donc

$$\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p.$$

- Si on somme,

$$\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

- En utilisant l'homogénéit de la norme,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q < \infty$)

- Soit $x \in \ell^p$. On sait que $x \in \ell^q$.
- Commençons par $q < \infty$. Comme $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, et soit $X > 0$ son maximum : on a $X \leq \|x\|_p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (X^p)^{\frac{1}{p}} = X.$$

- La suite $(\frac{x_k}{\|x\|_p})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dans ℓ^p, tous ses termes sont inférieurs à 1, et donc

$$\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p.$$

- Si on somme,

$$\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

- En utilisant l'homogénéit de la norme,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q < \infty$)

- Soit $x \in \ell^p$. On sait que $x \in \ell^q$.
- Commençons par $q < \infty$. Comme $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, et soit $X > 0$ son maximum : on a $X \leq \|x\|_p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (X^p)^{\frac{1}{p}} = X.$$

- La suite $(\frac{x_k}{\|x\|_p})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi dans ℓ^p, tous ses termes sont inférieurs à 1, et donc

$$\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p.$$

- Si on somme,

$$\|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

- En utilisant l'homogénéit de la norme,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Preuve de la continuité ($q = \infty$)

- Maintenant $q = \infty$.
- On a vu que $X = \|x\|_\infty \le \|x\|_p$, CQFD.

Preuve de la continuité ($q = \infty$)

- Maintenant $q = \infty$.
- On a vu que $X = \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, CQFD.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach $(p < \infty)$

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach ($p < \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach ($p < \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach ($p < \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach $(p < \infty)$

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un Banach ($p < \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^p.
- Attention, pour $n \in \mathbb{N}$, x_n est une suite ! On note $x_{n,k}$ le k-ème terme de la suite x_n.
- On commence par $p < \infty$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+m,k} - x_{n,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et qu'on a la convergence.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p < \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^p :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \|x_n - x_q\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

- En particulier, pour tout $\mathcal{N} > 0$,

$$\varepsilon \geq \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[q\to\infty]{} \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - \bar{x}_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donc $\|x_n - \bar{x}\|_p \leq \varepsilon$.

- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_p \leq \|x_n\|_p + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^p$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^p.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p < \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^p :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \|x_n - x_q\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

- En particulier, pour tout $\mathcal{N} > 0$,

$$\varepsilon \geq \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[q\to\infty]{} \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - \bar{x}_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

  donc $\|x_n - \bar{x}\|_p \leq \varepsilon$.

- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_p \leq \|x_n\|_p + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^p$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^p.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p < \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^p :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \|x_n - x_q\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

- En particulier, pour tout $\mathcal{N} > 0$,

$$\varepsilon \geq \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - x_{q,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[q\to\infty]{} \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} |x_{n,k} - \bar{x}_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donc $\|x_n - \bar{x}\|_p \leq \varepsilon$.

- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_p \leq \|x_n\|_p + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^p$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^p.

$(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un Banach ($p = \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^∞.
- $$\|x_{n+m} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un Banach ($p = \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^∞.
-
$$\|x_{n+m} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un Banach ($p = \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^∞.
- $$\|x_{n+m} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un Banach ($p = \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^∞.
- $$\|x_{n+m} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$|x_{n+m,k} - x_{n,k}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et qu'on a la convergence.

$(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ est un Banach ($p = \infty$)

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ une suite de Cauchy. Montrons que (x_n) converge dans ℓ^∞.
- $$\left\|x_{n+m} - x_n\right\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|x_{n+m,k} - x_{n,k}\right| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$\left|x_{n+m,k} - x_{n,k}\right| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$
- La suite réelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc ($\mathbb{R}$ est complet) elle converge vers $\bar{x}_k \in \mathbb{R}$ (candidat pour le terme général de la suite limite).
- Il suffit maintenant de montrer que $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et qu'on a la convergence.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p = \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^∞ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |x_{n,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon.$$

- En faisant tendre q vers $+\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon,$$

donc $\|x_n - \bar{x}\|_\infty \leq \varepsilon$.

- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|x_n\|_\infty + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^\infty$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^∞.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p = \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^∞ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |x_{n,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon.$$

- En faisant tendre q vers $+\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon,$$

  donc $\|x_n - \bar{x}\|_\infty \leq \varepsilon$.
- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|x_n\|_\infty + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^\infty$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^∞.

Convergence vers $\bar{x}$ ($p = \infty$)

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^∞ :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n, q \geq N,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |x_{n,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon.$$

- En faisant tendre q vers $+\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon,$$

  donc $\|x_n - \bar{x}\|_\infty \leq \varepsilon$.
- On conclut par inégalité triangulaire que $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|x_n\|_\infty + \varepsilon < \infty$, donc $\bar{x} \in \ell^\infty$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans ℓ^∞.