TD3 - Espaces de suites ℓ^p

(fin TD2 - Cauchy - Lipschitz)

Exo 2.5.

- $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ $(*)$

$x \equiv 0$: sol., la solution de condition initiale $x_0 = 0$, ie $x(t_0) = 0$, $\forall t_0$; sol. globale (ie définie sur $\mathbb{R}$) donc maximale.

Supposons, $\forall t$, $x(t) \neq 0$;

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1 \underset{x(t)>0}{\Longrightarrow} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1$$

($\simeq$ idem si $x(t) < 0$...)

$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{\sqrt{x(s)}} = t$$

$t_0 = 0$

$$\Longrightarrow \left. 2\sqrt{x(s)}\,\right]_0^t = t$$

$$\underset{x(0)=0}{\Longrightarrow} 2\sqrt{x(t)} = t$$

$$\Longrightarrow x(t) = t^2/4$$: vérifie en effet $(*)$

De même, pour $t<0$, on vérifie que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ est solution ; la fonction ainsi construite est de classe $\mathcal{C}^1$:

- $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- dérivable en $t=0$ (et dérivée est continue en ce pt)

$\Longrightarrow$ on a donc deux sols. maximales de même cond. initiale $\underset{t_0}{x(0)} = \underset{x_0}{0}$: l'hypothèse de locale lip. en x de f est donc nécessairement fausse.

<u>NB.</u> $x(t) = \frac{t.|t|}{4}$, $t \in \mathbb{R}$.

<u>Exo 1.</u> $1 \leq p < \infty$:

$$(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \ell^p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|}_{\geq 0}{}^p < \infty$$

On pose $\|(x_k)_k\|_p := \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}$ $(<\infty)$.

Si $p=\infty$: $(x_k)_k \in \ell^\infty \Leftrightarrow \sup_k |x_k| < \infty$

<u>NB.</u> $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, $k \geq 0$, $x_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} 1$

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty$, $\|(x_k)\|_\infty = 1$.

- <u>ℓ^∞</u> : i) définie positivité : $\sup_k |x_k| = 0$

$\Longrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})$: $x_k = 0$ (sinon $\exists k$ tq $|x_k| > 0$ ...)

(et positivité évidente)

ii) homogénéité pos. :

$$\sup_k |\lambda . x_k| = \sup_k |\lambda| . |x_k|$$
$$= |\lambda| . \sup_k |x_k| = |\lambda| . \|(x_k)_k\|_\infty$$

iii) inégalité triangulaire :

Soient $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$;

$$\sup_k |x_k + y_k| < \infty \ ?$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; $|x_k + y_k| \leq \underline{\underline{|x_k|}} + \underline{\underline{|y_k|}}$

$$\leq \underbrace{\|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty}_{\text{majorant (indép. } k)}$$

$\Rightarrow \sup_k |x_k + y_k| < \infty$

~~et~~ $\underbrace{\sup_k |x_k + y_k|}_{\|(x_k)_k + (y_k)_k\|_\infty} \leq \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$.

- ℓ^p, $p \in [1, \infty[$: $\ell^p = L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ avec

$X = \mathbb{N}$
$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$\mu = \mu_d$: $\mu_d(A) = \text{card } A$, $A \subset \mathbb{N}$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$k \longmapsto f(k) = f_k$, $f = (f_k)_k$

$$\int_{\mathbb{N}} f(k)\, d\mu_d(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \iff \int_{\mathbb{N}} |x(k)|^p d\mu_d(k) < \infty$$

$$\iff x(\cdot) \in L^p$$

On sait que (cf. Mi 1) $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un ev
(cf. Minkowsky, cf. Hölder...)

et on sait que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un evn.

<u>Exo 2.</u> Rappel : si $\boxed{\mu(X) < \infty}$, on a

$$1 \leq p < q \leq \infty \implies L^p(X, \mathcal{B}, \mu) \supsetneq L^q(X, \mathcal{B}, \mu) ;$$

ici, $\mu_d(\mathbb{N}) = \text{card } \mathbb{N} = \infty$!

• <u>$1 \leq p < \infty$</u> : soit $(x_k)_k \in \ell^p$, mq $(x_k)_k \in \ell^\infty$;

$\sum_k |x_k|^p < \infty$, ie que $\Big(\overbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}^{S_K}\Big)_K$ (= suite de somme partielles) cv dans $\mathbb{R}$ (ie vers une valeur finie : $\lim_{K \to \infty} \sum_{k=0}^{K} |x_k|^p = \sum_{k=0}^{\infty} (\dots) < \infty$)

$\implies \underbrace{S_{K+1} - S_K}_{\xrightarrow[K \to \infty]{} 0}$ devient arbitrairement petit pour K grand (critère de C.)

Or, $S_{K+1} - S_K = |x_{K+1}|^p \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$

$$\implies (x_K)_K \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow (x_k)_k$ est bornée ; en effet : pour $\varepsilon = 1$,

$(\exists K \in \mathbb{N})\ (\forall k \geq K) : |x_k - 0| = |x_k| \leq \varepsilon = 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| \leq \max\{1, |x_0|, \dots, |x_{K-1}|\}$
$< \infty$

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^\infty.$

Et l'inclusion est stricte, $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $p < \infty$,

cf. : $(x_k) = (1)_k \in \ell^\infty$
$\notin \ell^p\ (p < \infty) : \sum_k |1|^p = \infty.$

. $\underline{1 \leq p < q < \infty}$: soit $(x_k)_k \in \ell^p$; mq

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q < \infty.$$

On a $\sum_k |x_k|^p < \infty \Rightarrow (|x_k|^p)_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

en particulier, $(\exists K \in \mathbb{N})\ (\forall k \geq K) : |x_k|^p \leq 1$
ie $|x_k| \leq 1$

$\Rightarrow (\forall k \geq K) : |x_k|^p \geq |x_k|^q$, cf. $q > p$

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^q < \infty$ (cf. domination — sauf pour un nombre fini de termes)

$\Rightarrow (x_k)_k \in \ell^q.$

De plus, $q/p > 1$ $\Rightarrow \sum_k \frac{1}{(k+1)^{q/p}} < \infty$ (Riemann)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q$, et $\displaystyle\sum_k \frac{1}{((k+1)^{\frac{1}{p}})^p} = \sum_k \frac{1}{k+1} = \infty : \notin \ell^p$.

Donc $\ell^p \subsetneq \ell^q$, $1 \leq p < q < \infty$.

<u>Exo 3.</u> $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$

$\Rightarrow (\ell^p, \|.\|_p)$ Banach

(cf. Th. Riesz-Fischer)

<u>Remarque :</u> $L^p([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu_L = dx)$ est le "complété" de

$(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_p)$, $p < \infty$.

• <u>$p = \infty$:</u> soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$; on note

$$X_n = (x_{n,k})_k, \quad \sup_k |x_{n,k}| < \infty ;$$

mq $(X_n)_n$ de Cauchy dans ℓ^∞

$\Rightarrow (X_n)_n$ cv dans ℓ^∞ ;

ie mq $\exists \bar{X} \in \ell^\infty$ tq $\|X_n - \bar{X}\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$;

← à construire !

① <u>Construction du candidat à être limite :</u>

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\forall k \geq 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : (x_{n,k})_n$ est de Cauchy ;

Chaque ($\forall k$) suite $(x_{n,k})_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(\mathbb{R}, |.|)$ complet (par construction !), donc ces suites CV : $(\forall k \in \mathbb{N}) (\exists \bar{x}_k) : (x_{n,k})_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}_k$.

On construit ainsi $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k$.

② Appartenance du candidat $\bar{X}$ à ℓ^∞ :

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \geq 0) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$x_{p,k} \xrightarrow[p\to\infty]{} \bar{x}_k$

$$\underset{p\to\infty}{\Longrightarrow} (\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$: en particulier,

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall q \geq N_1)(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow (\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{N_1,k}| \leq 1$$

$$\Rightarrow \bar{X} - X_{N_1} = (\bar{x}_k - x_{N_1,k})_k \in \ell^\infty$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \underbrace{(\bar{X} - X_{N_1})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \in \ell^\infty \text{ (e.v.)}$$

③ CV :

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq N) \underbrace{\underbrace{(\forall k \geq 0) : |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon}_{\sup_k |\bar{x}_k - x_{q,k}| \leq \varepsilon}}_{\|\bar{X} - X_q\|_\infty} . \square$$

TD_3

- $\ell^p := \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} < \infty \right\}$

  $p \in [1, +\infty[$

- $\ell^\infty = \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_k |x_k| < \infty \right\}$ cad $(\exists M \geqslant 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : x_k \leqslant M$.

ex 1

ℓ^p espace vectoriel comme sous espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ ds $\mathbb{R}$.

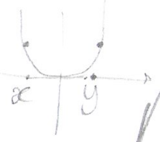
$\left(\text{cf } (x_k)_k \equiv x : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ k \longmapsto x(k) = x_k \end{array} \right)$

puisque

- $(x_k)_k \in \ell^p$. $\quad \sum_k |\lambda x_k|^p = \underbrace{|\lambda|^p \underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty}}_{<\infty} \Rightarrow \lambda (x_k)_k \in \ell^p$.

- $(x_k)_k$ et $(y_k)_y \in \ell^p$ $\quad \left| \dfrac{x_k + y_k}{2} \right|^p \leqslant \dfrac{1}{2} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

  $t \longmapsto |t|^p$ convexe $|t|^p$



1. multiplicat° scalaire
2. stable par +
3. non vide

$\Rightarrow |x_k + y_k|^p \leqslant 2^{p-1} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

$\Rightarrow \sum_k |x_k + y_k|^p \leqslant 2^{p-1} \left(\underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty} + \underbrace{\sum_k |y_k|^p}_{<\infty} \right) < \infty$

$\| (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

i) def positive $\left(\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0 \Rightarrow$ positivité.

et $\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| = 0$

$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0$.

ii) homogénéité positive :

$\| \lambda (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \underbrace{\left(|\lambda|^p \right)^{1/p}}_{|\lambda|} \underbrace{\left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}}_{\| (x_k)_k \|_p}$.

iii) inegalité triangulaire

$\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, $\quad \mu_d(\underset{A \subset \mathbb{N}}{A}) = \text{card}(A)$

$f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{N}} |f(k)|^p d\mu_d(k)}_{\sum_{k=0}^{\infty} |f(x)|^p} < \infty$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

. Soit $\mathcal{L}^p(X, B, \mu)$ avec B tribu sur X. $\mu : B \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesure sur B.

. Soient f & $g \in L^p(X, B, \mu)$. mq Minkowski

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

or $\int_X |f+g|^p d\mu = \int_X \underbrace{|f+g|}_{\leqslant |f|+|g|} |f+g|^{p-1} d\mu$ $\to p>1$, evident sinon

$$\leqslant \int_X \underbrace{|f|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu + \int_X \overset{\in L^p}{|g|} \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu$$

Rappel : inégalité de Hölder

$f \in L^p, g \in L^q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f \cdot g \in L^1$ et $\boxed{\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q}$

$\int_X |fg| d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/q}$. ici, $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ so

$$\underbrace{\int_X |f+g|^p d\mu}_{\|f+g\|_q^p} \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p) + \underbrace{\|f+g\|_{q=\frac{p}{p-1}}^{p-1}}_{\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}} = \|f+g\|_p^{p-1}}$$

$\Rightarrow \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ en divisant par $\|f+g\|_p^{p-1}$. si $\|f+g\|_p \neq 0$ (évident sinon)

. ℓ^∞ : e.v. comme s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ puisque

. $(x_k)_k \in \ell^\infty$, $\sup_k |\lambda x_k| = |\lambda| \underbrace{\sup_k |x_k|}_{<\infty} < \infty$

. $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$, $|x_{k_0} + y_{k_0}| \leqslant \left.\underbrace{|x_{k_0}|}_{\leqslant \sup_k |x_k|} + \underbrace{|y_{k_0}|}_{\leqslant \sup |y_k|}\right\} < \infty$ (iii)

$\Rightarrow (x_k + y_k)_k \in \ell^\infty$ et $\|(x_k+y_k)_k\|_\infty \leq \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$

i) <u>déf. positive</u> $\quad \sup_k \underbrace{|x_k|}_{\geq 0} \geq 0$ et $\sup_k |x_k| = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\ |x_k| = 0$

$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0_{\ell^\infty}.$

ii) <u>homogénéité positive</u> : $\quad \sup_k |\lambda x_k| = \lambda \sup_k |x_k|$.

iii) see iii)

ex 2

$1 \leq p < q < \infty$. Mq $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Soit $(x_k)_k \in \ell^p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Leftrightarrow \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}_{S_K}\Big)_{K\in\mathbb{N}}$ CV ds $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (S_k)_k$ est de Cauchy.

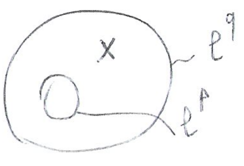
$\Rightarrow \underbrace{|S_{k+1} - S_k|}_{|x_{k+1}|^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ $\quad$ donc $|x_k| \leq 1$ à partir d'un certain rang, ie

$.(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geq K) : |x_k| \leq 1$

$\Rightarrow |x_k|^q \leq |x_k|^p \quad (q > p)$

donc $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q = \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} |x_k|^q}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |x_k|^q}_{\leq \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |x_k|^p}_{<\infty}} \Big) < \infty$ $\quad$ so $(x_k)_k \in \ell^q$.

<u>Rq</u> l'inclusion est stricte



$q > p \Rightarrow \frac{q}{p} > 1$. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} < \infty$ si $\alpha > 1$

ie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^{1/p}} < \infty$ $\quad$ ie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)^q < \infty$: $\left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q \notin \ell^p$

$\cdot\ 1 \leq p\ (q = \infty)$: mq $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $(x_k)_k \in \ell^p$.

$(|x_k|)_k \xrightarrow[\text{cf ci-avant}]{} 0$ donc $(x_k)_k$ est bornée.

Rq : l'inclusion est stricte cf : $(x_k)_k = (1)_k \in \ell^\infty (!)$
$\notin \ell^p$ (cf $\sum_{k=0}^{\infty} |1|^p = \infty$)

Rq : $1 \leq p < q \leq \infty$ piège classique

$L^p(X, B, \mu) \underset{\neq}{\supset} L^q(X, B, \mu)$ si $\mu(X) < \infty$ $\qquad (\mu_d(\mathbb{N}) = \infty !)$

$\downarrow$

$L^1(,) \supset L^2(,) \supset L^\infty(,)$.

ex 3 Mq $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 (démo pr $p=1$, same pr $p \geq 1$)

$X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum_k |x_{n,k}| < \infty$.

ℓ^1
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)$: $\underbrace{\|X_p - X_q\|_1}_{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon$ $\leq \varepsilon$. (o)

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N})$: $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$. (1)

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \in \mathbb{N})$: $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

cela veut dire $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ complet. elle CV. on note sa lim $\overline{x}_k$.

① Construct° du candidat à être limite : on pose $\overline{X} := (\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\overline{X}$ à ℓ^1 :

~~(1)~~ (o) $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)(\forall K \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$ $\xrightarrow{q \to \infty}$ $\cancel{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$

$q \to +\infty$, $x_{q,k} \to \overline{x}_k$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall K \in \mathbb{N})$: $\cancel{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon}$ $\sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)$ $\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon$ (2)

$\Rightarrow (\exists N_1 \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{\infty} |x_{N_1,k} - \overline{x}_k| \leq 1 < \infty$.
($\varepsilon = 1$)

$\Rightarrow X_{N_1} - \overline{X} \in \ell^1$ $\Rightarrow \overline{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \overline{X})}_{\in \ell^1} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^1} \} \in \ell^1$

③ CV de $(x_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(2) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_{\cancel{q}} \leq \varepsilon$ ie $(X_p)_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \bar{X}$ $\blacksquare$

Mq $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banach, soit $(X_n)_n \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, mq ça CV.

① construction limite.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)$ $\underbrace{\|X_p - X_q\|_\infty}_{\sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon$

$\leq \varepsilon$.

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$ (3)

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$

$(x_{n,k})_n$ est de Cauchy sur $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet, donc CV.

$\exists \bar{X}_k$ tq $(X_{n,k}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{X}_k$.

On pose $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\bar{X}$ à ℓ^∞.

$(3) \underset{q \to +\infty}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)\underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}_{\sup_k |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}$. (4)

$(\varepsilon = 1)$ $(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $\sup_k |x_{N_1,k} - \bar{x}_k| \leq 1 < \infty$

$\Rightarrow X_{N_1} - \bar{X} \in \ell^\infty$

$\Rightarrow \bar{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \bar{X})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \} \in \ell^\infty$ (e.v)

③ CV de $(X_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(4) : (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_\infty \leq \varepsilon$

ie $(X_p)_p \xrightarrow[p \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} \bar{X}$ $\blacksquare$

Rq : la mm démo mq l'ensemble des applis bornées de E ds $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$ est un Banach

(lié à la complétude de $\mathcal{C}^0(B_f(t_0,\eta), B_f(X_0,\varepsilon))$ au TD 2)

fin ex2

$X \leqslant p < q < \infty$

Soit $(x_k)_k \in \ell^p (\subset \ell^q)$.

$\|(x_k)_k\|_p \leqslant 1$;

$\Rightarrow \sum\limits_k |x_k|^p \leqslant 1 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^p \leqslant 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^q \leqslant |x_k|^p$

$\Rightarrow \sum\limits_k |x_k|^q \leqslant \sum\limits_k |x_k|^p \leqslant 1$.

Soit $(x_k)_k \in \ell^p$ (une suite quelconque) on a $\left\| \dfrac{(x_k)_k}{\|(x_k)_k\|_p} \right\|_q \leqslant 1$

$(x_k)_k \neq (0)_k$ (res évident sinon)

$\Rightarrow \|(x_k)_k\|_q \leqslant \|(x_k)_k\|_p$.