UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
UMR C.N.R.S 6621

P
U
B
L
I
C
A
T
I
O
N
S

P
E
D
A
G
O
G
I
Q
U
E
S

MATHEMATIQUES

Maîtrise de Mathématiques

DISTRIBUTIONS ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

UNE INTRODUCTION

par

A. Cérezo

Pupé N° 34
Février 1999

Atelier Maths

Adresse : Parc Valrose - F-06108 NICE CEDEX 2 - Fax : 04 93 51 79 74
Tél. Standard Faculté des Sciences : 04 92 07 69 96

DISTRIBUTIONS ET EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

INTRODUCTION

Les équations fondamentales de la physique sont des équations aux dérivées partielles linéaires. Mais leur forme "différentielle" pratique ne doit pas cacher que ce sont en fait des équations "intégrales", les grandeurs physiques mesurables n'étant que des moyennes macroscopiques de signaux microscopiques hors de portée.

Par exemple, considérons l'équation différentielle $xy'=0$, à l'inconnue la fonction $y(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si l'on cherche les solutions partout dérivables, on ne trouve que les constantes. Sur $\mathbb{R}^*$, l'équation équivaut à $y'=0$ et pour tout couple de constantes A, B, la fonction y qui vaut A sur $\mathbb{R}^-$ et $A+B$ sur $\mathbb{R}^+$ est solution. Pour $B\neq 0$, cette fonction n'est pas dérivable à l'origine, et n'est donc pas solution de l'équation sur tout $\mathbb{R}$ (d'ailleurs, que vaut-elle en 0 ?)

Pourtant c'est une "solution faible" de l'équation, qui peut avoir un "sens" physique : sa "valeur en un point" n'ayant guère de sens, le "point" étant une abstraction mathématique, attachons-nous plutôt aux valeurs de ses "moyennes" dans de petites régions, c'est-à-dire aux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\varphi(x)dx$, où φ est une densité assez régulière, et de support borné (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle $[\ ,\ ]$). En intégrant par parties sur $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(xy')\varphi(x)dx = xy\varphi\Big|_{-\infty}^{0} + xy\varphi\Big|_{0}^{+\infty} - A\int_{-\infty}^{+\infty}(x\varphi)'dx - B\int_{0}^{+\infty}(x\varphi)'dx = 0.$$

Autrement dit, les moyennes de xy' sont bien nulles, et ce pour toute "mesure" $\varphi(x)dx$ régulière et de support borné.

C'est en ce sens qu'il y a lieu de chercher à résoudre les équations "différentielles" de la physique. La notion de solution "faible" remonte au début du XXe siècle, mais sa première formalisation mathématique cohérente fut mise au point par L. Schwartz vers 1950 sous le nom de "théorie des distributions"

Outre la résolution complète (c'est-à-dire "faible") des équations aux dérivées partielles linéaires, d'origine physique ou non, cette théorie permet un éclairage complet d'un autre vieil outil de la pensée mathématique et physique, la transformation de Fourier, et ce seront les deux applications principalement développées ici.

Plutôt que la fonction y, c'est la "forme linéaire" $T_y : \varphi \mapsto \int y\varphi\,dx$ qui nous intéresse, définie a priori sur l'espace $\mathcal{D}$ des "fonctions-tests" φ de classe C^∞ et à support compact; celle-ci est un élément du "dual" $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$; comme $\mathcal{D}$ est de dimension infinie, on doit se restreindre aux formes linéaires continues, pour une certaine topologie définie sur $\mathcal{D}$; une façon usuelle de le faire, est d'en faire un espace vectoriel normé (un Banach par exemple), et si possible avec une norme dérivant d'un produit scalaire (un Hilbert étant son propre dual). Mais les topologies les plus utiles sur les espaces de fonctions (par exemple la convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues) ne sont pas en général celles d'espaces normés, d'où l'utilité des notions qui suivent:

Préliminaire: Espaces vectoriels topologiques

1) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une seminorme sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que $p(f+g) \leq p(f)+p(g)$, et $p(\lambda f) = |\lambda| p(f)$ $(\forall \ldots)$
À une famille $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ de semi-normes sur E correspond la topologie engendrée par les "boules-ouvertes" $B(p_\alpha, r) = \{f\in E \mid p_\alpha(f) < r\}$.
E est séparé si et seulement si : $\{\forall \alpha\in A,\ p_\alpha(f) = 0\} \Rightarrow f = 0$.

Exemple: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $E = C^\infty(U)$. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts de U ($K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ et $\forall K \subset\subset U$, $K\subset K_p$ pour p assez grand), par exemple $K_p = \{x\in U \mid \|x\| \leq p$ et $d(x, \complement U) \geq \frac{1}{p}\}$.
Pour $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $p\in\mathbb{N}$ et $f\in E$, posons $p_{\alpha,p}(f) = \sup_{K_p} |\partial^\alpha f|$.
La topologie définie par ces semi-normes est celle de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées, et ne dépend pas du choix des $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$; muni de cette topologie, E se note $\mathcal{E}(U)$.

2) Soient $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(q_\beta)_{\beta\in B}$ deux familles de semi-normes sur le même espace E, telles que : $\forall\beta\ \exists\alpha, C>0, \forall f, q_\beta(f) \leq C p_\alpha(f)$; alors l'application linéaire $(E,(p_\alpha)) \xrightarrow{id} (E,(q_\beta))$ est continue : la topologie associée aux (p_α) est plus fine que l'autre. Si c'est vrai dans les deux sens, les deux familles définissent la même topologie : on les dit équivalentes.

Exemple : Sur $C^\infty(U)$, si l'on pose $p_{\alpha,p}(f) = \sup_{K_p} |\partial^\alpha f|$,
$p'_{\alpha,p}(f) = \int_{K_p} |\partial^\alpha f|\,dx$ et $p''_{\alpha,p}(f) = (\int_{K_p} |\partial^\alpha f|^2 dx)^{1/2}$, il est clair que les $(E,p) \xrightarrow{id} (E,p^*) \xrightarrow{id} (E,p)$ sont continues ; en fait on peut montrer que ces trois familles sont équivalentes (cf. § 7, exercice 7).

3) En particulier s'il existe $A' \subset A$ tel que : $\forall \alpha \in A \; \exists \alpha' \in A', C > 0 : p_\alpha \leq C p_{\alpha'}$, la sous-famille $(p_{\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ définit la même topologie que la famille complète $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ - On utilise cette remarque pour se borner dès qu'on le peut à une famille dénombrable de semi-normes.

Exemple : C'est ce qu'on a déjà fait dans le cas de $\mathcal{E}(U)$, dont la topologie serait "naturellement" définie par les $\sup_K |\partial^\alpha f|$ pour tout compact K de U.

4) Si A est indicié par $\mathbb{N}$, et que E séparé, poser, pour $f, g \in E$,

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_{\alpha_n}(f-g)}{1+p_{\alpha_n}(f-g)}$$ définit une distance sur E, qui donne la même topologie : E est donc un espace "métrisable" (on pourrait modifier d, sans changer la topologie ...)

Exemple : $\mathcal{E}(U)$ est un espace métrique complet (espace "de Fréchet"). En particulier, on peut lui appliquer le théorème de Baire et ses conséquences ! Pourtant la topologie de $\mathcal{E}(U)$ ne peut pas être définie par une norme.

5) Pour en savoir (beaucoup) plus sur les e.v.t., on peut consulter par exemple : F. Trèves, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels". (Academic Press)

Certains e.v.t. utiles ne sont même pas métrisables : c'est justement le cas de l'espace $\mathcal{D}$, à la base de la théorie des distributions. (cf §7, exercice 9)

CHAPITRE I : LES DISTRIBUTIONS

§1 L'ESPACE $\mathcal{D}(U)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $K \Subset U$ (= compact de U). Pour $f \in C^\infty(U)$ on appelle <u>support</u> de f le fermé de U : $\operatorname{supp} f = \complement_U \{x \in U \mid f(x) = 0\}$

On munit l'espace $\mathcal{D}_K(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$ de la topologie définie par les semi-normes $p_\alpha(f) = \sup |\partial^\alpha f|$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (ce sont en fait des normes), qui en fait un espace métrique complet.

On munit ensuite l'espace $\mathcal{D}(U)$ des fonctions C^∞ à support compact dans U, $\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \Subset U} \mathcal{D}_K(U) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_p}(U)$ de la topologie ("limite inductive") la plus fine rendant continues toutes les injections $\mathcal{D}_K(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$: si E est un e.v.t., et $\alpha : \mathcal{D}(U) \to E$ est linéaire, α est continue si et seulement si toutes les composées $\mathcal{D}_K(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(U) \xrightarrow{\alpha} E$ le sont. En particulier :

- si $U \subset V$, l'injection $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(V)$ est continue
- si $E = \mathbb{C}$ (muni de $|\,|$), une forme linéaire $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si :

$$\forall K \Subset U \quad \exists m \in \mathbb{N}, C > 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}_K(U) \quad |T(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha f|.$$

(C'est la définition d'une <u>distribution</u> sur U)

<u>Exemples</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x_0 \in U$, et f une fonction localement intégrable sur U (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de U) ; alors les formes linéaires sur $\mathcal{D}(U)$: $\quad \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0) \quad$ et $\quad \varphi \mapsto \int_U f(x) \partial^\alpha \varphi(x)\,dx$ sont des distributions.

Ces définitions seraient vides si l'on avait $\mathcal{D}(U) = \{0\}$. Mais on va voir que $\mathcal{D}(U)$ est toujours assez gros pour être dense dans tous les autres espaces de fonctions et de distributions qu'on considèrera ; de plus, sa topologie est choisie pour qu'il s'y injecte continûment.

<u>Lemme</u> : <u>La fonction</u> $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>définie par</u> $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$ <u>est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $\operatorname{supp} \rho = \overline{B}(0,1)$.</u>

Preuve : Le dernier point est clair, et ρ est C^∞ pour $|x| \neq 1$; comme ρ ne dépend que de $|x|$, et que $x \mapsto |x|$ est C^∞ pour $x \neq 0$, il suffit de prouver que ρ est C^∞ dans le cas $n=1$, et pour $x=1$ (par parité) : comme $\rho^{(p)}(t)$ est de la forme $\frac{P_p(t)}{(t^2-1)^{2p}} e^{(t^2-1)^{-1}}$ pour $p \in \mathbb{N}$, $|t| < 1$, et 0 pour $|t| > 1$, on voit par récurrence sur p, que $\rho \in C^p$ et $\rho^{(p)}(1) = 0$. ∎

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons alors $\rho_p(x) = \frac{p^n}{I} \rho(px)$, avec $I = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx$.

Proposition : (a) $\rho_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\rho_p \geq 0$; (b) $\operatorname{supp} \rho_p \subset \overline{B}(0,\frac{1}{p})$; (c) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_p(x)dx = 1$.

Preuve : tout est clair. ∎ En fait, on appelle "suite régularisante" toute suite de fonctions vérifiant (a), (b), (c).

Ceci montre déjà que $\dim \mathcal{D}(U) = \infty$ pour tout ouvert U, mais on va déduire beaucoup plus des propriétés du "produit de convolution" :

§2 CONVOLUTION ET RÉGULARISATION

Formellement, le produit de convolution de deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, noté $*$, est défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

chaque fois que l'intégrale a un sens, ce qui est vrai déjà dans les deux cas suivants :

1) Si $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre, associative et commutative (mais non unitaire) pour le produit de convolution : par les théorèmes de Fubini et de changement de variable, $f*g$ est bien définie presque partout, $f*g \in \mathbb{L}^1$, $f*g = g*f$ et $f*(g*h) = (f*g)*h$. De plus : $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

2) Si $f, g \in \mathbb{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, l'une au moins à support compact (le support étant le complémentaire du plus grand ouvert où la fonction est négligeable) : $f*g$ est alors partout définie (Cauchy-Schwarz), et on a encore $f*g = g*f$ et $f*(g*h) = (f*g)*h$ si deux au moins sont à support compact ; de plus dans ce cas, $f*g$ est une fonction continue :

Preuve : Notons $\tau_a f$ la translatée de $a \in \mathbb{R}^n$ de f, c'est-à-dire : $\tau_a f(x) = f(x-a)$; clairement $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$, et
$|f*g(x) - f*g(x')| = |f*g(x) - (\tau_{x-x'}f)*g(x)| = |(f-\tau_{x-x'}f)*g(x)|$
$= |\int_{\mathbb{R}^n} (f-\tau_{x-x'}f)(y)\, g(x-y)dy| \leq \|f-\tau_{x-x'}f\|_2 \|g\|_2 \xrightarrow[x'\to x]{} 0$, les translations étant continues dans $\mathbb{L}^2$. ∎

Deux propriétés essentielles du produit de convolution, vraies dans les deux cas ci-dessus, et qui se généralisent à beaucoup d'autres cas, sont les suivantes :

- Propriété de support : $\boxed{\operatorname{supp} f*g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}}$

(Rappelons que $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, que la somme de deux fermés est fermée dès que l'un des deux est compact, et compacte si les deux le sont ; l'inclusion est claire sur la définition)

- Propriété de régularisation : De $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$, on tire par passage à la limite (dérivation "sous le signe somme"), que si $f \in C^p$ et $g \in C^q$, alors $f*g \in C^{p+q}$ et d'ailleurs :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq p,\ |\beta| \leq q : \quad \boxed{\partial^{\alpha+\beta}(f*g) = (\partial^\alpha f)*(\partial^\beta g)}$$

En particulier si $f \in C^\infty$ et $g \in C^0$, $f*g \in C^\infty$! ($g \in \mathbb{L}^1_{loc}$ suffit d'ailleurs, des primitives partielles étant alors continues ...). D'où le

Théorème "de régularisation" : Soit $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, et $F = \operatorname{supp} f$. Posons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p = \rho_p * f$, et $F_p = F + \bar{B}(0, \frac{1}{p})$. Alors :

a) $f_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp} f_p \subset F_p$

b) Pour tout compact K, $f_p|_K \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f|_K$ dans $\mathbb{L}^1(K)$

c) Si de plus $f \in C^0$, $f_p \to f$ uniformément sur tout compact

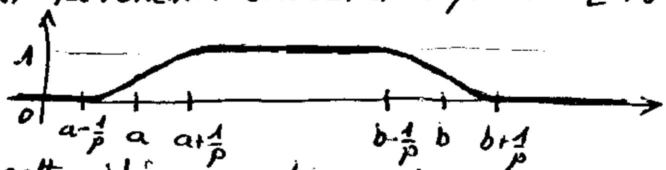
d) Si de plus F est compact, $f_p \to f$ uniformément.

Preuve : Le (a) résulte des deux propriétés précédentes. De plus

$$\int_K |f_p(x) - f(x)|\,dx \leq \iint_{K\times\bar{B}(0,\frac{1}{p})} |f(x-y) - f(x)|\rho_p(y)\,dx\,dy = \int_{\bar{B}(0,\frac{1}{p})} \|\tau_y f - f\|\rho_p(y)\,dy$$

la norme écrite étant celle de $\mathbb{L}^1(K)$; d'où le (b), puis le (c) par l'expression centrale et le théorème de Heine, enfin le (d) par la propriété de support du (a). ■

Exemple : La convolution sert à "lisser" les fonctions peu régulières ; ainsi si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique de $[a,b]$, le graphe de f_p est de la forme :



Généralisant cette idée, on obtient le

Théorème "de partition de l'unité" : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un compact K de $\mathbb{R}^n$. Il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, toutes nulles sauf un nombre fini, telles que $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, et $\sum \varphi_i \equiv 1$ au voisinage de K.

Idées de preuve : On ne garde que les U_i d'un sous-recouvrement fini ($\varphi_i \equiv 0$ sinon) ; ceux-ci recouvrent encore un compact un peu plus grand $K' = K + \bar{B}(0,\varepsilon)$. On découpe K' en $\cup K_i$, avec $K_i \Subset U_i$ et $K_i \cap K_j$ de mesure nulle, si bien que $\sum \chi_{K_i} = \chi_{K'}$. On n'a plus alors qu'à "lisser" les χ_{K_i} en les convolant par ρ_p pour p assez grand. ■

Proposition : L'injection $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ est continue et d'image dense : $\forall f \in \mathcal{E}(U)$, $\exists (f_p) \in \mathcal{D}(U)$; $f_p \to f$ dans $\mathcal{E}(U)$.

Preuve : on peut poser $f_p = f\cdot(\rho_{2p} * \chi_{K_p})$, où K_p est une suite exhaustive de compacts de U. ■

Achevons ce paragraphe (et ses lecteurs) par quelques remarques utilisées systématiquement dans la suite : pour $f \in C^\infty$ fixée et $g \in C^\infty$, et pour K compact, on sait toujours majorer $\sup_K |\partial^\alpha(fg)|$ et $\sup_K |\partial^\alpha(f*g)|$ par $C^{ste}\left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|} \sup_{K'} |\partial^\beta g|\right)$, avec $K'=K$ dans le premier cas (formule de Leibniz), et $K'=K+\operatorname{supp} f$ dans le second (propriétés de la convolution). De ces majorations résultent les énoncés suivants :

- si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la convolution par f ($g \mapsto f*g$) est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$; si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, elle est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$
- si $f \in \mathcal{E}(U)$, la multiplication par f ($g \mapsto fg$) est continue de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$
- toute dérivation ($g \mapsto g^{(\alpha)}$) est continue de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$
- on appellera <u>opérateur différentiel linéaire</u> (odl) tout composé des deux opérateurs précédents : $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, avec $a_\alpha \in C^\infty(U)$: $g \mapsto Pg = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\, g^{(\alpha)}(x)$.
  Tout odl est donc continu de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$.

---

§3 $\boxed{\text{L'ESPACE } \mathcal{D}'(U)}$

C'est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de toutes les <u>distributions</u> sur $U \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, rappelons-le ici, des formes linéaires $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ telles que : $\forall K \Subset U\ \exists m \in \mathbb{N}, C>0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(U), |T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup |\partial^\alpha \varphi|$.

Le plus petit entier m qui "marche" s'appelle l'<u>ordre</u> de T sur K ; si m "marche" pour tout K, on dit que T est d'<u>ordre fini</u> (et $\le m$). Les distributions d'ordre zéro sont les <u>mesures</u> (de Radon")

Donnons ici quelques exemples importants de distributions :

- Si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(U)$, l'application $\varphi \overset{T_f}{\longmapsto} \int_U f(x)\varphi(x)\,dx$ est une distribution sur U, et même une mesure : c'est la distribution <u>associée</u> à la fonction f ; l'application $f \mapsto T_f$ est une <u>injection</u> de $\mathbb{L}^1_{loc}(U)$ dans $\mathcal{D}'(U)$: $T_f = 0$ signifie $\int f\varphi\,dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, donc par régularisation $\int f \chi_K\,dx = 0$ pour tout $K \Subset U$, et f est négligeable.
- On peut aussi associer des distributions à certaines fonctions non localement intégrables : en voici un exemple classique, la "valeur principale de $\frac{1}{x}$", qui est la distribution sur $\mathbb{R}$: $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.

En effet si $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$ et $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, on a $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, et il vient :

$$vp\frac{1}{x}(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\varphi(0)\underbrace{\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{dx}{x}\right]}_{=0}+\int_{-A}^{-\varepsilon}\psi(x)dx+\int_{\varepsilon}^{A}\psi(x)dx\right\}=\int_{-A}^{A}\psi(x)dx$$

d'où $|vp\frac{1}{x}(\varphi)|\leq 2A\sup|\psi|\leq 2A\sup|\varphi'|$ car $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(\theta x), 0<\theta<1$.
$vp\frac{1}{x}$ est donc une distribution sur $\mathbb{R}$; d'ordre ≤ 1 (en fait $=1$; exercice!).

- on note δ_a la <u>mesure de Dirac</u> au point $a\in\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la distribution $\varphi\mapsto\varphi(a)$ qui est clairement d'ordre 0, et appartient à $\mathcal{D}'(U)$ dès que $U\ni a$.
- si $x=(x',x'')$ avec $x'\in\mathbb{R}^p$, $x''\in\mathbb{R}^{n-p}$ et $\alpha'\in\mathbb{N}^p$, l'application $\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^{n-p}}\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi(0,x'')dx''$ est une "distribution de surface" sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre $|\alpha'|$.

<u>Remarques</u>: Si $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $\varphi_p\xrightarrow[p\to\infty]{}\varphi$ dans $\mathcal{D}(U)$ (c'est-à-dire dans l'<u>un</u> des $\mathcal{D}_K(U)$, alors $T(\varphi_p)\to T(\varphi)$, puisque $|T(\varphi_p-\varphi)|\leq C\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_K|\partial^\alpha(\varphi_p-\varphi)|\to 0$.
On peut démontrer la réciproque: si $T:\mathcal{D}(U)\to\mathbb{C}$ a la propriété précédente (continuité sur les suites), c'est bien une distribution (majorée sur tout $\mathcal{D}_K(U)$ par des semi-normes).

Il est souvent pratique de noter $T(\varphi)=\langle T,\varphi\rangle$ comme un produit scalaire entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$. On peut définir sur $\mathcal{D}'(U)$ plusieurs topologies associées à cette dualité. On se contentera ici de la plus "faible": on dit que $T_p\xrightarrow[p\to\infty]{}T$ <u>faiblement</u> dans $\mathcal{D}'(U)$ si pour <u>tout</u> $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, $\langle T_p,\varphi\rangle\xrightarrow[p\to\infty]{}\langle T,\varphi\rangle$, et qu'une application linéaire de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(V)$ est <u>faiblement continue</u> si l'image de toute suite faiblement convergente est faiblement convergente.

<u>Exemples</u>: Notons $\delta=\delta_0$ la mesure de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^n$.
<u>Alors $T_{\rho_p}\xrightarrow[p\to\infty]{}\delta$ faiblement</u> (dans $\mathcal{D}'(U)$ dès que $U\ni 0$). En effet

$$|\langle T_{\rho_p},\varphi\rangle-\langle\delta,\varphi\rangle|=\left|\int_{B(0,\frac{1}{p})}\rho_p(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\int_{B(0,\frac{1}{p})}\rho_p(x)dx\right|\leq\underbrace{\left(\int\rho_p(x)dx\right)}_{=1}.\sup_{B(0,\frac{1}{p})}|\varphi(x)-\varphi(0)|\xrightarrow[p\to\infty]{}0$$

On écrira souvent $\langle f,\varphi\rangle$ au lieu de $\langle T_f,\varphi\rangle$, identifiant la fonction f et la distribution associée T_f, lorsque $f\in L^1_{loc}(U)$. Par exemple $\rho_p\to\delta$ $(p\to\infty)$; de plus on écrira T_x pour "la distribution T de la variable x".

Pour $a\in\mathbb{R}^n$ et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), on définit la <u>translatée</u> $\tau_a T$ de T par
$\langle\tau_a T,\varphi\rangle=\langle T,\tau_{-a}\varphi\rangle=\langle T_x,\varphi(x+a)\rangle$ pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)

Comme les translations sont continues de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on obtient aussitôt « par transposition », qu'elles sont <u>faiblement continues</u> de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$! De plus on vérifie aussitôt que, pour $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, <u>$T_{\tau_a f}=\tau_a T_f$</u> (que l'on écrit donc $\tau_a f$!).

---

§4 $\boxed{\text{LE MODULE } \mathcal{D}'(U)}$

On prolonge ici l'action des o.d.l. aux distributions :

- d'abord on définit, pour $f \in \mathcal{E}(U)$ la <u>multiplication par f</u> : $\mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U), \forall T \in \mathcal{D}'(U)$ $\boxed{\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle}$

  Comme $\varphi \mapsto f\varphi$ est continue dans $\mathcal{D}(U)$, fT est bien une distribution, et la multiplication par f est faiblement continue. De plus ce produit prolonge celui des fonctions : si $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$, $f \cdot T_g = T_{fg}$

- puis on définit les <u>dérivées partielles</u> d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ par $\langle \partial_j T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_j \varphi\rangle$ (pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$). Comme $\varphi \mapsto -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ est continue dans $\mathcal{D}(U)$, $\partial_j T \in \mathcal{D}'(U)$, et la dérivation est faiblement continue dans $\mathcal{D}'(U)$. De plus elle prolonge celle des fonctions : $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$ (intégrer par parties). En itérant, pour $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, et $|\alpha| = \alpha_1 + .. + \alpha_n$:

  $\boxed{\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle}$ définit une application $T \mapsto \partial^\alpha T$, faiblement continue dans $\mathcal{D}'(U)$, et prolongeant celle des fonctions (Ainsi on a rendu "<u>indéfiniment dérivables</u>" (faiblement, au "sens des distributions") au moins toutes les fonctions localement intégrables !)

- en composant les deux opérations précédentes, pour tout o.d.l. sur U, $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, on obtient un opérateur différentiel linéaire faiblement continu dans $\mathcal{D}'(U)$ en posant, pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$

  $\boxed{\langle P(x,\partial)T, \varphi\rangle = \langle T, {}^tP\varphi\rangle}$, où ${}^tP$ est le "transposé formel" de P :

  $${}^tP(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha \,\cdot\,) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\Big(\sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(\partial^{\alpha-\beta} a_\alpha)\partial^\beta\Big)$$

  ($\alpha!$ signifie $\alpha_1! \dots \alpha_n!$, et $0 \le \beta \le \alpha$ signifie $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ pour $j = 1, .., n$.)

- on résume tout ceci en disant que $\mathcal{D}'(U)$ est un $\mathcal{P}(U)$-module, où $\mathcal{P}(U)$ est l'anneau des o.d.l. sur U, et que $\mathcal{E}(U)$ en est un sous-module : si $f \in \mathcal{E}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$, $P \in \mathcal{P}(U)$: $PT_f = T_{Pf}$.

  ${}^tP$ est un o.d.l. de même degré que P, et bien sûr ${}^t({}^tP) = P$.

  Chercher toutes les solutions (<u>faibles</u>) d'un o.d.l. dans U, c'est vouloir déterminer le noyau de cet opérateur dans $\mathcal{D}'(U)$, au sens précédent.

- la formule de <u>Leibniz</u> (par exemple) s'étend au produit d'une fonction et d'une distribution : pour $f \in \mathcal{E}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$,

$$\boxed{\partial^\alpha(fT) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}\partial^{\alpha-\beta}f \cdot \partial^\beta T}$$

Preuve : par récurrence sur $|\alpha|$, à partir de $|\alpha| = 1$:

$\langle \partial_j(fT), \varphi\rangle = -\langle fT, \partial_j\varphi\rangle = -\langle T, \partial_j(f\varphi)\rangle + \langle T, (\partial_j f)\varphi\rangle$

$= \langle \partial_j T, f\varphi\rangle + \langle (\partial_j f)T, \varphi\rangle = \langle f(\partial_j T) + (\partial_j f)T, \varphi\rangle$. ∎

Exemples de calcul : On note H et on appelle Fonction de Heaviside la fonction de $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle xH, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)dx$, d'où $\langle (xH)', \varphi\rangle = -\langle xH, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx$, soit $(xH)' = H$. Puis $\langle (xH)'', \varphi\rangle = \langle H', \varphi\rangle = \langle H, -\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0)$, soit $\boxed{H' = \delta}$. (Ce sont des cas particuliers de la "formule des sauts" ci-dessous).

Une formule importante : $\boxed{x\delta = 0}$, puisque $\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = (x\varphi)(0) = 0$.

De même $x.\delta' = -\delta$: $\langle x\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle = -\langle \delta, \varphi + x\varphi'\rangle = -\varphi(0)$; qui se généralise en $x.\delta^{(q)} = -q\delta^{(q-1)}$ (exercice : simplifier $x^p.\delta^{(q)}, \ldots$)

Les définitions précédentes rendent clair que si T est une distribution d'ordre p ; et P un o.d.l. d'ordre q, PT est d'ordre $p+q$ (au plus). La continuité faible de P implique de plus aussitôt que, si $T_p \to T$ faiblement, $PT_p \to PT$ faiblement. Par exemple $P\rho_p \to P\delta$ $(p\to\infty)$.

Formule des sauts : Soit $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, C^∞ sauf en un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_q$, où f a des limites à droite et à gauche $f(x_j)^{\pm}$, et supposons $f' \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors : $(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{q} [f(x_j)^+ - f(x_j)^-]\delta_{x_j}$.

Preuve : par intégration par parties. ■

Remarques : Les formules $(xH)' = H$ et $H' = \delta$ n'en sont que des exemples. La différence $f(x_j)^+ - f(x_j)^- = \sigma_f(x_j)$ s'appelle le saut de f en x_j. Il existe de nombreuses "formules des sauts" à plusieurs variables, indispensables en physique : les "sauts" sont alors des distributions portées par des hypersurfaces ; on les laisse ici en exercice : ce ne sont en fait que des formul ions "faibles" de la formule de Stokes, (c'est-à-dire qu'on les obtient par des intégrations par parties).

---

§5 LE "FAISCEAU" $\mathcal{D}'$

Les distributions se laissent "localiser" ; il suffit, pour en définir une, de la donner "localement, au voisinage de chaque point". En effet :

D'abord si $V \subset U$, $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ est injective et continue ; la composée $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U) \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ définit la restriction $T|_V$ à V de toute distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$.

Par exemple $H|_{]0,+\infty[} = 1$, $H|_{]-\infty,0[} = 0$, $\delta|_{\mathbb{R}^*} = 0$, $vp\frac{1}{x}|_{\mathbb{R}^*} = \frac{1}{x}$

et plus généralement, si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(U)$, $T_f|_V = T_{f|_V}$

Mais inversement des données locales compatibles se recollent :

Proposition : Soient $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts recouvrant U, et pour $i \in I$, $j \in I$ $T_i \in \mathcal{D}'(U_i)$, telles que $T_i|_{U_i\cap U_j} = T_j|_{U_i \cap U_j}$. Alors il existe une et une seule distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $T|_{U_i} = T_i$ $(i \in I)$.

Preuve: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité: $\Sigma\alpha_i = 1$ au voisinage de $\mathrm{supp}\,\varphi$, et $\alpha_i \in \mathcal{D}(U_i)$. Comme $\varphi = \Sigma\,\alpha_i\varphi$, nécessairement $<T,\varphi> = \Sigma <T,\alpha_i\varphi> = \Sigma <T_i,\alpha_i\varphi>$, et cette formule définit un élément de $\mathcal{D}'(U)$ car $|<T,\varphi>| \leq \Sigma\,|<T_i,\alpha_i\varphi>| \leq \sum_i C_i \sum_{|\alpha|\leq m_i} \sup_K |\partial^\alpha(\alpha_i\varphi)| \cdots$

Enfin si $\varphi \in \mathcal{D}(U_i)$, $<T,\varphi> = \sum_j <T_j,\alpha_j\varphi>$, avec $\alpha_j\varphi \in \mathcal{D}(U_i\cap U_j)$ d'où $<T,\varphi> = \sum_j <T_i,\alpha_j\varphi> = <T_i,\varphi>$ (et donc T ne dépend pas du choix des α_i). ∎

On définit alors le <u>support</u> de $T\in\mathcal{D}'(U)$ comme le fermé de U $\underline{\mathrm{supp}\,T}$, complémentaire du plus grand ouvert de U où la restriction de T est nulle (c'est la réunion de tous, par la proposition précédente). Clairement $\mathrm{supp}\,T_f = \mathrm{supp}\,f$ pour $f\in L^1_{loc}$.

<u>Proposition</u>: <u>Une distribution à support compact est d'ordre fini</u>

Preuve: Soit $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\mathrm{supp}\,T = F \Subset U$, et $\alpha\in\mathcal{D}(U)$, $\alpha\equiv 1$ au voisinage de F ("partition" associée au recouvrement de F par le seul ouvert U)
Si $K = \mathrm{supp}\,\alpha$, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, on a $(1-\alpha)\varphi \in \mathcal{D}(U-F)$, donc $<T,(1-\alpha)\varphi> = 0$, d'où $|<T,\varphi>| = |<T,\alpha\varphi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta(\alpha\varphi)| \cdots$, où C et m ne dépendent pas de φ, mais seulement de α. ∎

<u>Proposition</u>: <u>Une distribution à support ponctuel est une combinaison linéaire (finie) de dérivées de la mesure de Dirac au point support.</u>

Preuve: On peut supposer $\mathrm{supp}\,T \subset \{0\} \subset U$, choisir $\alpha\in\mathcal{D}(U)$ valant 1 au voisinage de 0, poser $\alpha_p(x) = \alpha(px)$ pour $p\in\mathbb{N}$, et constater que $\alpha_p T = T$, puisque $\mathrm{supp}\,(1-\alpha_p)T = \phi$. Par la proposition précédente, il existe $m\in\mathbb{N}$ indépendant de $K\Subset U$, et $C>0$ tels que

$$\forall \psi\in\mathcal{D}_K(U) \qquad |<T,\psi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup |\partial^\beta\psi|$$

Pour $\varphi\in\mathcal{D}_K(U)$, $|<T,\varphi>| = |<T,\alpha_p\varphi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup |\partial^\beta(\alpha_p\varphi)|$

et chaque terme à droite tend vers zéro quand $p\to\infty$, si $\varphi^{(\beta)}(0) = 0$ pour $|\beta|\leq m+1$, car $\sup|\partial^\beta(\alpha_p\varphi)| \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma \sup|\partial^{\beta-\gamma}\alpha_p\, \partial^\gamma\varphi| \leq C^{ste}\, p^{|\beta-\gamma|}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{m-|\gamma|+1}$

Pour tout $\chi\in\mathcal{D}(U)$, on peut écrire $\chi(x) = \sum_{|\beta|\leq m+1} \frac{\chi^{(\beta)}(0)}{\beta!} x^\beta + \eta(x)$, avec $\eta\in C^\infty$ et $\eta^{(\beta)}(0) = 0$ pour $|\beta|\leq m+1$, d'où

$$<T,\chi> = <T,\alpha\chi> = \underbrace{<T,\alpha\eta>}_{=0} + \sum_{|\beta|\leq m+1} \frac{\chi^{(\beta)}(0)}{\beta!} <T, x^\beta\alpha(x)>$$

$$= \sum_{|\beta|\leq m+1} c_\beta\, \chi^{(\beta)}(0) = <\sum_{|\beta|\leq m+1} c_\beta (-1)^{|\beta|}\delta^{(\beta)}, \chi> ∎$$

Remarquons que les deux preuves précédentes utilisent déjà implicitement la

<u>Proposition</u>: <u>Si $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $\mathrm{supp}\,T\cap\mathrm{supp}\,\varphi = \phi$, alors $<T,\varphi> = 0$</u>

Preuve: en effet $\varphi\in\mathcal{D}(U-\mathrm{supp}\,T)$. ∎

§6 PARTIES FINIES

A chaque fonction $\mathcal{L}^1_{loc}$ est attachée de façon naturelle, et non ambigüe, une distribution. Mais il est utile de définir des distributions attachées à certaines fonctions non localement intégrables, mais "usuelles", des distributions qui les "prolongent" faiblement. $vp\frac{1}{x}$, définie au §3, en est un exemple; donnons-en un autre: $Pf\frac{1}{x^2}$:

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)=x^2\psi(x)$, avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

Si $supp\,\varphi \subset [-A,A]$, $\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx = \frac{2}{\varepsilon}\varphi(0) + \left[\int_{-A}^{A}\psi(x)dx - \frac{2}{A}\varphi(0)\right] + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx$.

Le crochet, qui est la "partie finie" du développement limité en ε de $\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$ est une distribution, notée $<Pf\frac{1}{x^2},\varphi>$, puisque

$\sup_{[-A,A]}|\psi(x)| \leq \sup|\varphi''|$, d'où $|<Pf\frac{1}{x^2},\varphi>| \leq \sup(\frac{2}{A},2A)\sum_{\alpha\leq 2}\sup|\partial^\alpha\varphi|$

On peut définir de la même façon la "partie finie de $R(x)$" dès que R est une fraction rationnelle, ou plus généralement une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ régulière sauf en une suite (x_n) de "pôles", c'est-à-dire de points isolés où $|R(x)|$ ne croît pas plus vite qu'une puissance de $(x-x_n)^{-1}$: pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on définit alors $<Pf\,R(x),\varphi(x)>$ comme le terme constant du développement limité (généralisé) en puissances de ε et $\log\varepsilon$, de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}-F_\varepsilon} R(x)\varphi(x)dx$, avec $F_\varepsilon = \bigcup_n [x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon]$.

Des développements de Taylor aux points x_n montrent que $Pf\,R$ est bien une distribution, d'ordre au plus le sup des ordres des pôles de R.

Ces distributions interviennent de façon naturelle en physique; mais leur définition (surtout à plusieurs variables) est assez arbitraire: il existe d'autres distributions dont la restriction à $\mathbb{R}-F_0$ vaut $R(x)$. Par exemple, si $R(z)$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, ses pôles réels sont isolés et, pour ε assez petit non nul, $R(x\pm i\varepsilon)\in C^\infty(\mathbb{R})$; on peut donc définir $<R(x\pm i0),\varphi(x)>$, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme le terme constant d'un développement limité en ε de $\int_{\mathbb{R}} R(x\pm i\varepsilon)\varphi(x)dx$, et vérifier que c'est bien une autre "partie finie" de R; elle ne diffère de la précédente que d'une distribution portée par l'ensemble F (fini) des pôles de R (puisque les deux valent R sur $\mathbb{R}-F$), donc une combinaison de dérivées de mesures de Dirac aux points de F. On peut même démontrer (calcul des résidus), que lorsque R est une fraction rationnelle: $Pf\,R(x) = \frac{1}{2}\left(R(x+i0)+R(x-i0)\right)$

Nous n'étudierons ici que l'exemple-type de $vp\frac{1}{x}$:

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$, $\varphi(x)=\varphi(0)+x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = \varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x+i\varepsilon} + \int_{-A}^{A}\frac{x\psi(x)dx}{x+i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^\pm]{} \int_{-A}^{A}\psi(x)dx = \langle vp\tfrac{1}{x},\varphi\rangle$

$$\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x+i\varepsilon} = \int_{-A}^{A}\frac{x\,dx}{x^2+\varepsilon^2} - i\varepsilon\cdot\frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{ArcTg}\,\frac{A}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^\pm]{} \mp i\pi$$

Autrement dit: $\langle \frac{1}{x\pm i0},\varphi\rangle = \langle vp\frac{1}{x},\varphi\rangle \mp i\pi\varphi(0)$, soit

$\boxed{\frac{1}{x\pm i0} = vp\,\frac{1}{x} \mp i\pi\delta}$, d'où la formule annoncée : $vp\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)$,

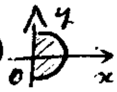
et en prime le "développement de la mesure de Dirac en ondes planes"* (sic) :

$$\delta = \frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)$$

---

§7 THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

1) Calculer, en passant "en polaires", le carré de $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, d'où I.

2) 

L'abscisse du centre de gravité du demi-cercle solide homogène ci-contre de rayon R est $\frac{2R}{\pi}$; celle du demi-disque est $\frac{4R}{3\pi}$.

3) Pour P polynôme, $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $P(\partial)(fg) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\partial)f\cdot\partial^\alpha g$ (formule de "Leibniz-Hörmander"). On peut se ramener à la formule de Taylor en posant $f(x)=e^{i\langle a,x\rangle}$, $g(x)=e^{i\langle b,x\rangle}$. Et si f ou $g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$?

4) Formule de Taylor "avec reste intégral" : $f\in C^{n+1}$

$f(a+x) = f(a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+ux)\,du$

En déduire que si $f\in C^\infty$ $\quad\left(= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\,dt\right)$

$f(a)=\dots=f^{(p-1)}(a)=0$,

$g(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ est C^∞ est $\sup|g|\leq c^{te}\cdot\sup|f^{(n+1)}|$ sur tout intervalle

5) $\varphi\longmapsto f\varphi$, avec $f\in C^\infty$, est un isomorphisme de $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ si et seulement si $f\neq 0$ dans U.

6) Si $\ell:\mathcal{D}(U)\to\mathbb{C}$ est une forme linéaire positive ($\forall\varphi\geq 0$, $\ell(\varphi)\geq 0$), alors c'est une distribution d'ordre zéro.

7) Équivalence des familles $\left(\sup_K|\partial^\alpha f|\right)$, $\left(\int_K|\partial^\alpha f|dx\right)$ et $\left(\left(\int_K|\partial^\alpha f|^2dx\right)^{1/2}\right)$ pour définir la topologie de $\mathcal{E}(U)$

a) Si $f\in C^\infty(I)$, $[a,b]\subset I\subset\mathbb{R}$, montrer que $\sup_{[a,b]}|f|\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|f'(x)|dx$
($\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est de la forme $f(c)$, et $\sup|f|$ de la forme $f(d)$, avec $c,d\in[a,b]$)
Montrer que les deux termes à droite sont nécessaires.

b) Si $f\in C^\infty(U)$, et P est un pavé $P\subset U\subset\mathbb{R}^n$, montrer de même que
$\sup_P|f|\leq\sum_{0\leq\alpha\leq\varepsilon}\frac{1}{(b-a)^{\varepsilon-\alpha}}\int_P|\partial^\alpha f|\,dx$, avec $\varepsilon=(1,1,\dots,1)$. Conclure à l'équivalence.

8) <u>Théorème de Borel</u> : $\boxed{\forall (a_n)\in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ \forall \varepsilon>0\ \exists f\in \mathcal{D}_{\bar{B}(0,\varepsilon)}(\mathbb{R}),\ \forall n\in\mathbb{N}\ f^{(n)}(0)=a_n}$

a) Se ramener à $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a_n\geq 1$, $a_n\nearrow$, $a_n\to+\infty$.

b) Montrer que $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi(a_n x)$, avec $\varphi\in\mathcal{D}$, $\varphi\equiv 1$ au voisinage de zéro, est C^∞ (convergence uniforme) et conclure. Cas de plusieurs variables ?

9) <u>$\mathcal{D}$ n'est pas métrisable</u> : $\nexists$ distance d sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi)\Leftrightarrow d(\varphi_n,\varphi)\to 0$

a) Sinon et si (φ_q^p), (φ_q) et $\varphi\in\mathcal{D}$ et $d(\varphi_q^p,\varphi_q)\xrightarrow[p\to\infty]{}0$ et $d(\varphi_q,\varphi)\xrightarrow[q\to\infty]{}0$, alors il existe une application $q\mapsto p(q)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $d(\varphi_q^{p(q)},\varphi)\xrightarrow[q\to\infty]{}0$

b) Conclure avec $\varphi_q^p(x)=\frac{1}{p}\exp\left(\frac{q^2}{x^2-q^2}\right)\chi_{B(0,q)}$

10) On note $C^+(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de support borné à gauche. Pour $f,g\in C^+$, on pose $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$

a) Montrer que C^+ est un anneau commutatif (pour $+$ et $*$) intègre et non unitaire.

b) Si (ρ_p) est la suite régularisante du § 1 (sur $\mathbb{R}$), on pose $h_p(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho_p(t)\,dt$. Montrer que $h_p\in C^+$, et que pour $f\in C^+$, h_p*f tend, uniformément sur tout compact vers la primitive de f qui est dans C^+.

c) Calculer $H=\lim_{p\to\infty}h_p$. Montrer, pour $f\in C^+$, que $H*f$ est bien définie, et que c'est la primitive de f dans C^+. Que vaut $H*\rho_p'$?

d) Trouver, pour $q\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $u_q\in C^+$ telle que $\forall f\in C^+$, $(u_q*f)^{(q)}=f$. Montrer $u_q*u_{q'}=u_{q+q'}$ $(q,q'\in\mathbb{N}-\{0,1\})$
Et pour $q=1,0$?

11) <u>Sur les équations différentielles linéaires dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$</u>

A) <u>à coefficients constants</u>

a) Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $(\exists\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi'=\varphi)\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx=0$

b) Soit $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}\alpha(x)\,dx=1$, et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'=0$.
Montrer que, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\alpha\rangle\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$. En déduire $T=T_{cte}$.

c) $\forall\varphi\in\mathcal{D}\ \exists!\ \psi\in\mathcal{D}$, $\varphi=\langle 1,\varphi\rangle\alpha+\psi'$
et si $S\in\mathcal{D}'$, $\varphi\mapsto-\langle S,\psi\rangle$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'équation $T'=S$ à l'inconnue $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

d) Pour $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $(\exists\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi=\varphi+\varphi')\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}e^{x}\psi(x)\,dx=0$
Pour $T\in\mathcal{D}'$, si $T'=T$, que vaut $\langle T,\psi\rangle$? Résoudre $T'=T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

e) Résoudre $T''+T=0$ (par $T'=S$ et $S'=-T$), puis tenter de généraliser.

B) <u>à coefficients variables</u>

a) Résoudre $x^pT^{(q)}=0$. Solutions à support dans $[0,+\infty[$?

b) Si $T\in\mathcal{D}'$ et $x^3T'+2T=0$, $T|_{\mathbb{R}^*}$ est C^∞. Calculer $T|_{\mathbb{R}^*}$
Soit T_0 la distribution à $\exp(\frac{1}{x^2})$ sur $\mathbb{R}^+$, et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T|_{\mathbb{R}^+}=T_0$
Calculer $\langle T,\varphi_p\rangle$ où $\varphi_p(x)=\varphi(px)$, $\varphi\in\mathcal{D}(]0,1[)$ valant 1 sur $[1/4,3/4]$ et ≥ 0.
En déduire que T n'existe pas, puis que l'équation ci-dessus n'a pas de solution $\neq 0$.

12) a) Soit $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur $U\subset\mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall \alpha\in\mathcal{D}(U)\ \exists p_0\in\mathbb{N}\ \forall p>p_0\ \ \alpha.T_p=0$$
Montrer que $\varphi\mapsto\sum_{p=1}^{\infty}\langle T_p,\varphi\rangle$ définit une distribution sur U, notée $\sum_{p=1}^{\infty}T_p$, et limite faible des sommes partielles $\sum_{p=1}^{N}T_p$.

b) Exemples sur $\mathbb{R}$: $\sum\delta_p^{(p)}$, $\sum\chi_{[p,+\infty[}$. Calculer $\left(\sum T_p\right)'$ sur ces exemples, puis en général.

13) Théorème : $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\{\forall x\in\operatorname{supp}T,\ p\in\mathbb{N},\ \varphi^{(p)}(x)=0\}\Rightarrow\langle T,\varphi\rangle=0$

a) Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ trouver une suite (I_n) d'intervalles ouverts bornés deux à deux disjoints, suite finie ou dénombrable, telle que : $(\exists p\ \varphi^{(p)}(x)\neq 0)\Leftrightarrow x\in\bigcup I_n$

Montrer : $\forall p\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \sup_{I_n}|\varphi^{(p)}|<\varepsilon$

b) On pose $\psi_n(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{si } x\in I_n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $\varphi_n(x)=\psi_1+\dots+\psi_n$

Montrer que $\psi_n,\varphi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $\varphi_n\to\varphi$ dans $\mathcal{D}$.

c) Montrer que $\tau_{\frac{1}{n}}\varphi\to\varphi$ dans $\mathcal{D}$. Déduire de (b) et (c) le résultat.

14) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{n^2}$ est faiblement convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T. Que vaut $\tau_{2\pi}T$?

Montrer que $\sum e^{inx}$ l'est aussi, puis toute série $\sum f(n)e^{inx}$, où $f(n)$ est une fonction à croissance lente (majorée par $C(1+|n|^\alpha)$ pour certains C,α)

15) Montrer que $\dfrac{p^3x}{(1+p^2x^2)^2}\xrightarrow[\mathcal{D}'(\mathbb{R})]{}-\frac{\pi}{2}\delta'$ quand $p\to\infty$

16) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$ (convergence simple)

Si α est une régularisée de $\chi_{[-1,1]}$, montrer que $\langle\frac{\sin\lambda x}{x},\alpha\rangle\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\pi$, et que $x.\frac{\sin\lambda x}{x}\xrightarrow[\mathcal{D}']{}0$. En déduire $\frac{\sin\lambda x}{x}\xrightarrow[\mathcal{D}']{}\pi\delta$ $(\lambda\to\infty)$

17) On pose $g_n(x)=\begin{cases}(1-x^2)^n & \text{pour } |x|<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, et $h_n=\frac{1}{a_n}g_n$ avec $a_n=\int_{-1}^{1}g_n(t)dt$

Pour f continue, $\operatorname{supp}f\subset[-1/2,1/2]$, montrer que $f*h_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ uniformément sur tout $\mathbb{R}$ (on peut minorer a_n en utilisant $1-x^2\geq 1-|x|$ pour $|x|<1$), et que $f_n|_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ est un polynôme. En déduire le théorème de Weierstrass (bien connu)

18) $\varphi\mapsto\chi_K*\varphi$ est continue dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, dès que $K\Subset\mathbb{R}^n$

19) Soient f,g continues sur $\mathbb{R}$. Si $(T_f)'=T_g$, f est dérivable et $f'=g$.

20) Calculer toutes les dérivées (au sens des distributions) de $e^{-a|x|}$ $(a>0)$

Calculer celles de $\varphi\xmapsto{T}\int_0^{+\infty}\sin x\,\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^{0}\sin x\,\varphi(x)dx$

Calculer celles de $H(x)e^{\lambda x}$ $(\lambda\in\mathbb{C})$

21) Donner une formule explicite pour $\langle Pf\frac{1}{x^n}, \varphi \rangle$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$
Résoudre, à l'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation $x.T = vp\frac{1}{x}$. Généraliser.

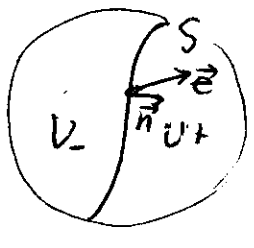
22) Montrer que les formules $\varphi \xmapsto{T_1} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(x,y)}{x+iy}\,dx\,dy$, $\varphi \xmapsto{T_2} \iint_{D_v} \varphi(x,y)\,dx\,dy$
(où $v>0$ et $D_v = \{(x,y) \mid v^2y^2 - x^2 \geq 0$ et $y \geq 0\}$), et $\varphi \xmapsto{T_3} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x+iy|\geq\varepsilon} \varphi(x,y)\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$
définissent trois distributions sur $\mathbb{R}^2$.
Comparer $P_j(\partial)T_j$ à $\delta_{(0,0)}$ pour $j=1,2,3$, et pour
$P_1(\partial) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $P_2(\partial) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $P_3(\partial) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

23) Qu'est-ce qu'une distribution paire, impaire? Définir ses parties paire et impaire. Idem pour les parties réelle et imaginaire.
Expliciter ces décompositions pour $\frac{1}{x+i0}$ et $Pf\,R(x)$.

24) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$
Montrer que $T = 0$ ou $T = \delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

25) Montrer que $\varphi \longmapsto \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \varphi\left(\frac{1}{N}\right) - \varphi'(0)\log N - \varphi(0)N\right)$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Quel est son support.
(2 Montrer que $\forall F$ fermé de $U \subset \mathbb{R}^n$ $\exists T \in \mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = F$.)

26) <u>La "formule des sauts à plusieurs variables"</u>



S est l'hypersurface de U d'équation $x_1 = s(x_2, \dots, x_n)$,
$U_\pm = \{x \in U \mid x_1 > s$ resp. $x_1 < s\}$
$f_\pm$ C^∞ dans $U_\pm$ continue sur $\overline{U_\pm}$; $\sigma_f = f_+|_S - f_-|_S$
$\delta_S : \varphi \mapsto \int_S \varphi|_S\,dS$, avec $dS = \sqrt{1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right)^2}\,dx_2 \dots dx_n$
$\vec{e}$ champ de vecteurs dans U ("mesure de surface")
$\partial_{\vec{e}}$ l'opérateur différentiel associé : $\partial_{\vec{e}} f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + t\vec{e})$
$\vec{n}$ vecteur normal à S, unitaire, orienté vers U_+.
Alors
$$\boxed{\partial_{\vec{e}} T_f = T_{\partial_{\vec{e}} f} + \sigma_f \langle \vec{n}.\vec{e} \rangle \delta_S}$$

Démontrer cette formule quand S est un hyperplan et $\vec{e}$ constant, normal à S.
Remarquer que $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$ sont des notions invariantes par difféomorphisme ---- (cf. chap III, §2 pour $\mathcal{D}'$)
Calculer ce que donne cette formule sur des exemples où f est la fonction caractéristique d'un disque, d'un rectangle, ...

CHAPITRE II : L'ESPACE $\mathcal{E}'$ ET LA CONVOLUTION

§1 LES DISTRIBUTIONS A SUPPORT COMPACT

Soit $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = K \Subset U$. On peut étendre T en une forme linéaire sur $\mathcal{E}(U)$ de la façon suivante : si $\alpha\in\mathcal{D}(U)$, $\alpha\equiv 1$ au voisinage de K, pour $\varphi\in\mathcal{E}(U)$, on pose $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle$. Si $K'=\operatorname{supp}\alpha$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que $|\langle T,\varphi\rangle| \leq C\sum_{|\beta|\leq m}\sup_{K'}|\partial^\beta(\alpha\varphi)|$ $\leq C'\sum_{|\beta|\leq m}\sup_{K'}|\partial^\beta\varphi|$, et ceci définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{E}(U)$, continue pour la topologie déjà vue (cf. Introduction). On notera $\mathcal{E}'(U)$ le dual de $\mathcal{E}(U)$; comme $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $\mathcal{E}(U)$, le prolongement ici construit est le seul possible (on vérifie qu'il ne dépend pas de α, directement par la dernière proposition page 11).

Inversement, soit $S\in\mathcal{E}'(U)$:

$$\exists C>0, m\in\mathbb{N}, K\Subset U, \forall\varphi\in\mathcal{E}(U)\quad |\langle S,\varphi\rangle|\leq C\sum_{|\beta|\leq m}\sup_K|\partial^\beta\varphi|$$

La restriction de S à $\mathcal{D}(U)$ est bien une distribution, d'où une application $\mathcal{E}'(U)\overset{i}{\hookrightarrow}\mathcal{D}'(U)$, injective par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Si $\operatorname{supp}\varphi\cap K=\emptyset$, on a clairement $\langle S,\varphi\rangle = 0$, donc $\operatorname{supp} i(\varphi)\subset K$, et en particulier $i(\varphi)$ est à support compact.

On a donc identifié $\mathcal{E}'(U)$ au sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$ des distributions qui sont à support compact, et i est clairement faiblement continue.

Remarques : 1) Appelons "support" d'un élément de $\mathcal{E}'(U)$ le plus petit K qui permet la majoration ci-dessus : son support au sens habituel est alors contenu dans K ; mais inversement, le premier raisonnement montre que si $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = K$, son "support" est un compact K' arbitrairement "proche" de K. On peut démontrer que K lui-même convient, et que es deux notions de support coïncident (par le théorème de Baire).

2) On peut de même définir le produit scalaire $\langle T,\varphi\rangle$, pour $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $\varphi\in\mathcal{E}(U)$ dès que $\operatorname{supp} T\cap\operatorname{supp}\varphi$ est compact : il suffit de prendre $\alpha\in\mathcal{D}(U)$, $\alpha\equiv 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} T\cap\operatorname{supp}\varphi$, de poser $\langle T,\varphi\rangle = \langle \underset{\in\mathcal{D}'}{T}, \underset{\in\mathcal{D}}{\alpha\varphi}\rangle = \langle \underset{\in\mathcal{E}'}{\alpha T}, \underset{\in\mathcal{E}}{\varphi}\rangle$, et de vérifier que le résultat ne dépend pas de α (on a bien sûr $\operatorname{supp}\alpha T\subset\operatorname{supp}\alpha$)

3) Ainsi par exemple dès que $f\in\mathbb{L}^1_{loc}(U)$ et $K\Subset U$, $f\chi_K\in\mathcal{E}'(U)$, ainsi que toutes ses dérivées au sens des distributions.

§2 IMAGES DES DISTRIBUTIONS

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^{n'}$ une application C^∞. Les fonctions de $\mathcal{E}(U')$ ont des <u>images réciproques</u> naturelles par f : $f^* : \mathcal{E}(U') \longrightarrow \mathcal{E}(U)$, et de plus l'application f^* est linéaire continue : $\varphi \longmapsto f^*\varphi = \varphi \circ f$

$\forall K \Subset U, m \in \mathbb{N}, c > 0, \exists K' \Subset U', m' \in \mathbb{N}, c' > 0, \forall \varphi \in \mathcal{E}(U')$

$$c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha(\varphi \circ f)| \leq c' \sum_{|\beta| \leq m'} \sup_{K'} |\partial^\beta \varphi|$$

(par dérivation d'une composée, et Leibniz ; on peut prendre $m' = m$ et $K' = f(K)$.)

Par transposition, on obtient une application naturelle, linéaire et faiblement continue : $f_* : \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}'(U')$, appelée <u>image (directe)</u> :

$\forall T \in \mathcal{E}'(U), \varphi \in \mathcal{E}(U'), \quad \langle f_* T, \varphi \rangle = \langle T, f^*\varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ f \rangle$

f_* n'a <u>pas</u> en général de prolongement de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U')$, sauf si f est "<u>propre</u>" (l'image réciproque d'un compact est compacte), car dans ce cas f^* se restreint à $\mathcal{D}(U')$ et l'envoie dans $\mathcal{D}(U)$ ...

Si f est un <u>difféomorphisme</u> il vient que f_* est un isomorphisme faible de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{E}'(U')$ et de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U')$, d'inverse $(f^{-1})_*$ qui est un prolongement aux distributions de f^*.

Exemple : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la translation τ_a, on a $(\tau_a)_* = (\tau_{-a})^*$

<u>Remarque</u> : Ce paragraphe montre que la notion de distribution est "intrinsèque" (invariante par difféomorphisme) ; comme elle est aussi "locale" (I.§5), on définit le <u>faisceau</u> des distributions sur une <u>variété</u> de façon naturelle, par localisation dans les cartes (la valeur d'une distribution sur une fonction se définit à l'aide d'une partition de l'unité associée)

On n'utilisera guère ces notions ici, sauf pour définir les espaces de Sobolev locaux, et en appliquer les propriétés au problème de Dirichlet (chapitre IV)

---

§3 PRODUIT TENSORIEL DE DISTRIBUTIONS

Pour $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, on note ici (x, y) un point de $U \times V$; (ainsi $T \in \mathcal{D}'(U)$ se notera T_x et $S \in \mathcal{D}'(V)$, S_y)

L'application "<u>produit tensoriel</u>" $\mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{E}(U \times V)$ définie par : $f \otimes g\,(x, y) = f(x) g(y)$ (pour $x \in U, y \in V$), est évidemment bilinéaire et continue (pour la topologie produit), et se restreint en $\mathcal{D}(U) \times \mathcal{D}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{D}(U \times V)$, qui a les mêmes propriétés ; on note les sous-espaces engendrés par leurs images $\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{E}(V)$ et $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(V)$ respectivement.

<u>Lemme</u> : $\mathcal{D}(U)\otimes\mathcal{D}(V)$ est dense dans $\mathcal{D}(U\times V)$ et dans $\mathcal{E}(U\times V)$

Preuve : Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, il suffit de démontrer la première assertion. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V)$ et $K=\operatorname{supp}\varphi$. Les projections L et M de K sur U et sur V sont compactes, et $K\subset L\times M$, compact de $U\times V$.

On peut recouvrir L par un nombre fini de petits pavés $\mathring{L}_i$, avec $L_i\subset U$ (et de même M par des $\mathring{M}_j$, avec $M_j\subset V$). Si (α_i) et (β_j) sont des partitions de l'unité associées, $\varphi=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\varphi$, et il suffit d'approcher chaque $\alpha_i\beta_j\varphi$; on s'est donc ramené au cas où $\operatorname{supp}\varphi$ est contenu dans un pavé $H\times K$, où H est un pavé de $U\subset\mathbb{R}^n$, et K un pavé de $V\subset\mathbb{R}^m$. On peut alors développer φ en série de Fourier (cf chap III. §) : pour certaines $\ell\in(\mathbb{R}^n)'$, $\ell'\in(\mathbb{R}^m)'$, $\varphi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{n+m}} c_{\alpha\beta}\,e^{i(\langle\alpha,\ell(x)\rangle+\langle\beta,m(y)\rangle)}$

Comme $\varphi\in\mathcal{D}_{H\times K}(U\times V)$, les $c_{\alpha\beta}$ sont à décroissance rapide ; si $\alpha\in\mathcal{D}(U)$ et $\beta\in\mathcal{D}(V)$, avec $\alpha\equiv1$ au voisinage de H et $\beta\equiv1$ au voisinage de K, on a $\varphi(x,y)=\alpha(x)\beta(y)\varphi(x,y)$, et les sommes partielles

$\sum_{|\alpha+\beta|\le N} c_{\alpha\beta}\,e^{i\langle\alpha,\ell(x)\rangle}\alpha(x)\cdot e^{i\langle\beta,m(y)\rangle}\beta(y)$ convergent uniformément sur $H\times K$ vers $\varphi(x,y)$, ainsi que toutes leurs dérivées. ■

<u>Proposition</u> ("dérivation sous une distribution") Soit $\varphi(x,y)\in\mathcal{D}(U\times V)$ et $T\in\mathcal{D}'(U)$; la fonction $y\mapsto\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle$ est dans $\mathcal{D}(V)$, et $\forall\alpha\in\mathbb{N}^m$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle=\langle T_x,\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha\varphi(x,y)\rangle$

Preuve : Si $\operatorname{supp}\varphi\subset H\times K$ avec $H\Subset U$ et $K\Subset V$, pour tout y dans V, la fonction $x\mapsto\varphi(x,y)$ est dans $\mathcal{D}_H(U)$. Si $\vec{h}=(0,\dots,0,h,\dots,0)$, avec h à la j-ème place, on a $\frac{1}{h}\{\langle T_x,\varphi(x,y+\vec{h})\rangle-\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle\}-\langle T_x,\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)\rangle=\langle T_x,\varphi_h(x,y)\rangle$ avec $\varphi_h(x,y)=\frac{\varphi(x,y+\vec{h})-\varphi(x,y)}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)=\frac{h}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j^2}(x,y+\theta h)$, avec $0<\theta<1$.
Pour $|h|\le\varepsilon$, $\operatorname{supp}\varphi_h\subset H\times(K+\bar{B}(0,\varepsilon))$, et $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi_h(x,y)=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi(x,y+\theta h)$, donc quand $h\to0$, $\varphi_h\to0$ uniformément ainsi que toutes ses dérivées en x, et $\langle T_x,\varphi_h(x,y)\rangle\longrightarrow0$, d'où $\frac{\partial}{\partial y_j}\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle=\langle T_x,\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)\rangle$, et il suffit d'itérer. ■

<u>Remarque</u> : Il est aisé de généraliser cet énoncé au cas où $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\varphi\in\mathcal{E}(U\times V)$, quand la projection dans U de $\operatorname{supp}\varphi$ ne recoupe $\operatorname{supp}T$ que sur un compact (comme à la remarque 2 du § 1).
La fonction $y\mapsto\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle$ sera alors dans $\mathcal{E}(V)$ et on pourra de même lui appliquer $S\in\mathcal{D}'(V)$ sous la même condition de support.

Théorème : Soient $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $S\in\mathcal{D}'(V)$. Il existe une et une seule distribution sur $U\times V$, notée $T_x\otimes S_y$ telle que

(*) $\forall \psi\in\mathcal{D}(U),\ \chi\in\mathcal{D}(V),\quad \langle T\otimes S,\psi\otimes\chi\rangle=\langle T,\psi\rangle\langle S,\chi\rangle$

De plus, si $\varphi\in\mathcal{D}(U,V)$, on a

(**) $\langle T\otimes S,\varphi\rangle=\langle T_x,\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\rangle=\langle S_y,\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle\rangle$

C'est $T\otimes S$ qu'on appelle "produit tensoriel" de T et S. La formule (**) est une variante du théorème de Fubini (cas où T et $S\in L^1_{loc}$).

Preuve: L'unicité d'une distribution vérifiant (*) résulte du lemme ci-dessus. Si $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset H\times K$ avec $H\Subset U$, $K\Subset V$, il existe $C_1,C_2>0$ et $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ tels que (utilisant la proposition précédente)

$$|\langle T_x,\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\rangle|\le C_1\sum_{|\alpha|\le m_1}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\right|$$
$$=C_1\sum_{|\alpha|\le m_1}\sup\left|\langle S_y,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi(x,y)\rangle\right|\le C_1C_2\sum_{|\alpha|\le m_1}\sum_{|\beta|\le m_2}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta\varphi(x,y)\right|$$

et le terme central de (**) définit donc une distribution sur $U\times V$, qui vérifie clairement (*) ; de même pour le terme de droite. ∎

Proposition : $\operatorname{supp} T\otimes S=\operatorname{supp}T\times\operatorname{supp}S$

Preuve : si $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V-\operatorname{supp}S\times\operatorname{supp}T)$, on a, par une partition de l'unité $\varphi=\chi+\psi$, avec $\operatorname{supp}\chi\in\mathcal{D}(U\times(V-\operatorname{supp}S))$ et $\operatorname{supp}\psi\in\mathcal{D}((U-\operatorname{supp}T)\times V)$, et on conclut $\langle T\otimes S,\varphi\rangle=0$ à l'aide de (**). ∎

Remarque : Enfin il est clair que $T_f\otimes T_g=T_{f\otimes g}$ ...

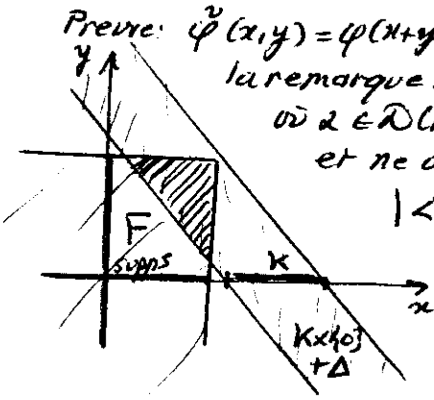
---

§4 LA CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Théorème : Soient $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F=(\operatorname{supp}S_x)\times(\operatorname{supp}T_y)\subset\mathbb{R}^{2n}$, et $\Delta=\{(x,-x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}\subset\mathbb{R}^{2n}$. Supposons que, pour tout $K\Subset\mathbb{R}^n$, le fermé $(K\times\{0\}+\Delta)\cap F$ soit un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. Alors la formule

(*) $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\qquad \langle S*T,\varphi\rangle=\langle S_x\otimes T_y,\varphi(x+y)\rangle$

définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$, appelée "produit de convolution" de S et T



Preuve: $\tilde\varphi(x,y)=\varphi(x+y)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ et le terme de droite a un sens d'après la remarque 2 p.17 : il est défini par $\langle S_x\otimes T_y,\alpha(x,y)\varphi(x+y)\rangle$ où $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $\alpha\equiv1$ au voisinage de $(K\times\{0\}+\Delta)\cap F$, où $K=\operatorname{supp}\varphi$, et ne dépend pas de α ; d'où l'existence de C,m tels que

$$|\langle S*T,\varphi\rangle|\le C\sum_{|\alpha+\beta|\le m}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta(\alpha\tilde\varphi)\right|$$

et on conclut par la formule de Leibniz. ∎

Dès que le produit de convolution de deux distributions est défini (c'est-à-dire pour l'instant sous les hypothèses du théorème), il a de nombreuses propriétés, dont on énonce ici les principales:

(1) $*$ est commutatif: $S*T=T*S$

Preuve: immédiate, d'après $(*)$, puisque $\varphi(x+y)=\varphi(y+x)$. ■

(2) $\boxed{\operatorname{supp} S*T \subset \operatorname{supp} S+\operatorname{supp} T}$

Preuve: par la dernière proposition du §3:

$\operatorname{supp} S\otimes T \cap \operatorname{supp}\tilde{\varphi} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (x,y) \mid x\in \operatorname{supp} S, y\in\operatorname{supp} T, x+y\in\operatorname{supp}\varphi$
$\Leftrightarrow \operatorname{supp}\varphi \cap (\operatorname{supp} S+\operatorname{supp} T)\neq\emptyset$ ■

(3) $*$ étend la convolution des fonctions: $T_f * T_g = T_{f*g}$ (notée $f*g$)

Puisque les intégrales écrites ont toutes un sens, pour $f,g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, sous les hypothèses du théorème:

$$\langle T_f*T_g,\varphi\rangle=\langle T_f\otimes T_g,\tilde{\varphi}\rangle=\iint f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy$$
$$=\int f(x)\left(\int g(y)\varphi(x+y)dy\right)dx=\int f(x)\left(\int g(z-x)\varphi(z)dz\right)dx$$
$$=\int\left(\int f(x)g(z-x)dx\right)\varphi(z)dz=\langle T_{f*g},\varphi\rangle. \quad ■$$

(4) dès que S ou $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S*T$ est bien défini, la condition du théorème étant alors réalisée, donc $(S,T)\longmapsto S*T$ est bilinéaire et séparément (donc aussi "globalement") faiblement continue de $\mathcal{E}'\times\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, et de $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'\to\mathcal{E}'$ (grâce à la propriété 2)

(5) Si $f\in\mathcal{D}$ et $T\in\mathcal{D}'$ (ou si $f\in\mathcal{E}$ et $T\in\mathcal{E}'$), $f*T\in\mathcal{E}$ et c'est la fonction: $x\longmapsto\langle T_y, f(x-y)\rangle$ (si $f\in\mathcal{D}$ et $T\in\mathcal{E}'$, $f*T\in\mathcal{D}$)

(Cet énoncé généralise la convolution des fonctions)

Preuve: $\langle f*T,\varphi\rangle=\langle T_y,\langle f(x),\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle T_y,\int f(x)\varphi(x+y)dx\rangle$
$=\langle T_y,\int f(z-y)\varphi(z)dz\rangle=\langle T_y,\langle\varphi(z),f(z-y)\rangle\rangle=\langle T_y\otimes\varphi(z),f(z-y)\rangle$
$=\langle\varphi(z),\langle T_y,f(z-y)\rangle\rangle=\int\langle T_y,f(z-y)\rangle\varphi(z)dz$. Le fait que cette fonction est C^∞ résulte de la dérivation "sous" la distribution T. ■

Remarque: Le calcul ci-dessus montre du même coup que

$$\langle f*T,\varphi\rangle=\langle T,\check{f}*\varphi\rangle \text{ quand les } * \text{ sont bien définies}$$

(6) δ est l'élément neutre de $*$: $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\delta*T=T$

De plus pour $a\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$: $\delta_a*T=\tau_aT$ et $\delta^{(\alpha)}*T=T^{(\alpha)}$

Les vérifications sont laissées au lecteur.

(7) Si (ρ_p) est la suite régularisante du chap I, §1 (ou une autre),

$\forall T\in\mathcal{D}'$, $\rho_p*T\in\mathcal{E}$ et $\rho_p*T\longrightarrow T$ faiblement dans $\mathcal{D}'$

$\forall T\in\mathcal{E}'$, $\rho_p*T\in\mathcal{D}$ et $\rho_p*T\longrightarrow T$ faiblement dans $\mathcal{E}'$

Preuve: résulte de (4) et (6), puisqu'on a déjà vu (chap I §3) que $\rho_p\to\delta$.

Corollaire : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est (faiblement) dense dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Preuve : par (7) $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}'$, et $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'$. Mais $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$ (chap I, §2, Prop.). ∎

Proposition : $\mathcal{D}(U)$ est (faiblement) dense dans $\mathcal{E}'(U)$ et dans $\mathcal{D}'(U)$, pour tout $U \subset \mathbb{R}^n$

Preuve : Si $T \in \mathcal{E}'(U)$, on peut la prolonger à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, par 0 dans $\mathbb{R}^n - \operatorname{supp} T$. Le corollaire ci-dessus fournit alors la première assertion. La densité faible de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U)$ s'obtient par troncature et régularisation : si (K_p) est une suite exhaustive de compacts de U, $(\rho_p * \chi_{K_p})T \xrightarrow[p\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(U)$. ∎

(8) Remarque : Un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants est l'opérateur de convolution par une distribution portée par $\{0\}$ et réciproquement.

Preuve : Si $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$, on a $P(\partial)T = \left(\sum a_\alpha \delta^{(\alpha)}\right) * T$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'après (6). La réciproque résulte du fait que toute distribution de support $\{0\}$ est de ce type (cf. chap I, §5). ∎

(9) (Associativité) : Dès que deux au moins des trois distributions R, S, T sont à support compact, $*$ est associatif : $R*(S*T) = (R*S)*T$

Preuve : Utilisant (4) et le corollaire du (7), on peut supposer $R, S, T \in C^\infty$. La formule résulte alors d'un changement de variable dans une intégrale. ∎

Toutefois il arrive que tous les $*$ de la formule soit bien définis, et qu'elle soit pourtant fausse. L'exemple classique est :

$$1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1 \neq 0 = 0 * H = (1 * \delta') * H.$$

(§5) L'ALGÈBRE $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ ET LE CALCUL SYMBOLIQUE

On note ici $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ de support borné à gauche. (Celles de support borné à droite forment l'espace $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$.)

Si $\operatorname{supp} S \subset [a, +\infty[$ et $\operatorname{supp} T \subset [b, +\infty[$, la condition du théorème du §4 est toujours réalisée, donc $S*T$ est bien définie, et par la propriété (2) $\operatorname{supp} S*T \subset [a+b, +\infty[$, en particulier $S*T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$

Proposition : $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est une algèbre commutative unitaire pour la convolution

Preuve : $(S,T) \mapsto S*T$ est bilinéaire ; la commutativité vient de (1), et l'élément neutre est δ par (6). L'associativité se montre alors comme en (9). ∎

On a évidemment le même énoncé pour $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$, et il résulte de (9) pour $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) = \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{D}'_-$. Enfin on l'a aussi pour certaines sous-algèbres des précédentes, par exemple $\mathcal{D}'_{0,+} = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} T \subset [0, +\infty[\}$, $\mathcal{D}'_{0,-} = \{T \in \mathcal{D}' \mid \operatorname{supp} T \subset]-\infty, 0]\}$ et $\mathcal{D}'_0 = \{T \in \mathcal{D}' \mid \operatorname{supp} T \subset \{0\}\} = \mathcal{D}'_{0,+} \cap \mathcal{D}'_{0,-}$.

A plusieurs variables, on a encore des énoncés semblables : si Γ est un cône fermé saillant de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire tel qu'il existe un hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma\cap H=\{0\}$), on note $\mathcal{D}'(\Gamma)$ l'espace des distributions dont le support est contenu dans un translaté $a+\Gamma$ de Γ (pour $a\in\mathbb{R}^n$). Alors

$\mathcal{D}'(\Gamma)$, $\mathcal{D}'(-\Gamma)$, $\mathcal{E}'=\mathcal{D}'(\Gamma)\cap\mathcal{D}'(-\Gamma)$, et (si $\mathcal{D}'_0(\Gamma)=\{T\mid \operatorname{supp}T\subset\Gamma\}$)
$\mathcal{D}'_0(\Gamma)$, $\mathcal{D}'_0(-\Gamma)$, $\mathcal{D}'_0=\mathcal{D}'_0(\Gamma)\cap\mathcal{D}'_0(-\Gamma)=\{T\mid\operatorname{supp}T\subset\{0\}\}$ sont toutes des algèbres de convolution.

<u>Proposition</u> : $\mathcal{D}'_0$, munie de $*$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes

<u>Preuve</u> : $\left(\sum_{|\alpha|\le p} a_\alpha\delta^{(\alpha)}\right)*\left(\sum_{|\beta|\le q} b_\beta\delta^{(\beta)}\right)=\sum_{\alpha,\beta}a_\alpha b_\beta\delta^{(\alpha+\beta)}$, car $\delta^{(\alpha)}*\delta^{(\beta)}=\delta^{(\alpha+\beta)}$ d'après (6), comme $\left(\sum a_\alpha X^\alpha\right)\left(\sum b_\beta X^\beta\right)=\sum_{\alpha,\beta}a_\alpha b_\beta X^{\alpha+\beta}$. ∎

Comme l'algèbre des polynômes est intègre, $\mathcal{D}'_0$ admet un corps de fractions. Il est remarquable que celui-ci, <u>en dimension 1</u> s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{D}'_{0,+}(\mathbb{R})$ (ou aussi de $\mathcal{D}'_{0,-}(\mathbb{R})$...)

> <u>Théorème</u> : La sous-algèbre de $\mathcal{D}'_{0,+}(\mathbb{R})$ engendrée par $\mathcal{D}'_0$ et les distributions $H(x)e^{\lambda x}$, pour $\lambda\in\mathbb{C}$, est un corps commutatif pour $*$, le corps des fractions de $\mathcal{D}'_0$. De plus c'est la somme directe de $\mathcal{D}'_0$ et de l'espace des distributions de la forme $H(x)\left(\sum P_j(x)e^{\lambda_j x}\right)$ (la somme est finie, les $\lambda_j\in\mathbb{C}$ et les P_j sont des polynômes). Ce corps est isomorphe au corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles.

Preuve : D'abord, pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $\underline{(\delta'-\lambda\delta)^{*-1}=H(x)e^{\lambda x}}$; en particulier $\underline{\delta'^{*-1}=H}$: puisque $\langle\delta'-\lambda\delta*e^{\lambda x}H,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}\langle\delta'_y-\lambda\delta_y,\varphi(x+y)\rangle\,dx$
$=\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}(-\varphi'(x)-\lambda\varphi(x))\,dx=-\int_0^{+\infty}(e^{\lambda x}\varphi(x))'\,dx=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$

Le corps cherché, isomorphe à $\mathbb{C}(X)$, par la décomposition des fractions rationnelles, est somme directe de $\mathcal{D}'_0$, et de l'espace des combinaisons linéaires de distributions de la forme $(\delta'-\lambda\delta)^{*-m}$, pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$. Il suffit donc de vérifier par récurrence que $(\delta'-\lambda\delta)^{*m+1}*H(x)\frac{x^m}{m!}e^{\lambda x}=\delta$, pour conclure. Or, par la formule des sauts, $(\delta'-\lambda\delta)*H(x)\frac{x^m}{m!}e^{\lambda x}=H(x)\left(\frac{x^m}{m!}e^{\lambda x}\right)'-\lambda H(x)\frac{x^m}{m!}e^{\lambda x}=H(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda x}$ tant que $m>0$. ∎

L'usage systématique de l'isomorphisme du théorème pour résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (qui sont des équations de convolution par la remarque (β) du §4) s'appelle le "<u>calcul symbolique</u>" de Heaviside, utile aux électroniciens.

<u>Exemples</u> : 1) D'abord, outre les formules soulignées dans la preuve ci-dessus, on a aussi : pour $\lambda\ne\mu\in\mathbb{C}$, $\underline{H(x)e^{\lambda x}*H(x)e^{\mu x}=H(x)\frac{e^{\lambda x}-e^{\mu x}}{\lambda-\mu}}$, puisque $\frac{1}{X-\lambda}\cdot\frac{1}{X-\mu}=\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{X-\lambda}-\frac{1}{X-\mu}\right)$.

2) Soit à résoudre l'équation $T'+H*T=T_0\in\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ à l'inconnue $T\in\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
L'équation proposée, $(\delta'+H)*T=T_0$ revient à inverser $\delta'+H$ dans $\mathcal{D}'_+$.
Comme $\left(X+\frac{1}{X}\right)^{-1}=\frac{X}{X^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)$, un inverse de $(\delta'+H)$ dans $\mathcal{D}'_+$ est
$\frac{1}{2}\left[(\delta'-i\delta)^{*-1}+(\delta'+i\delta)^{*-1}\right]=\frac{1}{2}H(x)(e^{ix}+e^{-ix})=H(x)\cos x$
La <u>seule</u> solution dans $\mathcal{D}'_+$ est donc $T=H(x)\cos x*T_0$

Par exemple si $T_0=T_{f_0}$ et qu'on cherche les f telles que T_f soit solution, il s'agit de l'équation "intégro-différentielle": $f'(x)+\int_0^x f(y)dy=f_0(x)$, avec $\operatorname{supp} f_0\subset[0,+\infty[$, et on a ainsi montré que la seule solution à support dans $[0,+\infty[$ est: $f(x)=\int_0^x \cos(x-t)f_0(t)dt$.

3) 

Dans un circuit électrique de résistance R, de capacité C, et d'auto-induction L, l'intensité I est nulle tant qu'il est ouvert. Au temps $t=0$, on ferme le circuit par un générateur de tension $E(t)$, et on veut calculer $I(t)$ pour $t>0$. Dans un système d'unités cohérent, $E(t)=RI(t)+LI'(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(s)\,ds$
E et I, nulles jusqu'à $t=0$, sont dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et cette équation se récrit: $\left(R\delta+L\delta'+\frac{1}{C}H\right)*I=E$. Elle est donc aisée à résoudre par le calcul symbolique; un circuit plus complexe, avec des dérivations, donnerait un système de telles équations, qui se résoudrait de même.

<u>Remarques</u> Le calcul symbolique fournit des inverses de convolution des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants, en dimension 1. Mais ce ne sont <u>pas les seuls</u> inverses possibles dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: par exemple $(H+C)*\delta'=\delta$ pour toute constante C, mais $H+C\in\mathcal{D}'_+\Leftrightarrow C=0$.

On trouvera en exercice une preuve que $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est une algèbre de convolution <u>intègre</u> ($S*T=0\Rightarrow S$ ou $T=0$), d'où l'unicité de l'inverse <u>dans</u> $\mathcal{D}'_+$, lorsqu'il existe, d'une distribution de $\mathcal{D}'_+$.

§6 $\boxed{\text{SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES}}$

On appelle <u>solution élémentaire</u> d'un opérateur différentiel linéaire $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ toute distribution $E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(x,\partial)E=\delta$. Dans le cas d'un opérateur $P(\partial)$ à coefficients <u>constants</u>, il s'agit donc d'un inverse de convolution; l'équation $P(\partial)T=T_0$ aura donc la solution particulière $E*T_0$ (puisque $P(\partial)(E*T_0)=P(\partial)E*T_0=\delta*T_0=T_0$) dès que ce produit a un sens, par exemple dès que $T_0\in\mathcal{E}'$. (Il faudrait ensuite trouver le noyau de $P(\partial)$ pour avoir <u>toutes</u> les solutions). D'où l'intérêt de connaître des solutions élémentaires ayant de bonnes propriétés de support, de régularité, ou de décroissance à l'infini (pour permettre d'autres T_0).

Exemple : L'exercice 22 (chap I, § 7) fournit des solutions élémentaires de trois opérateurs "classiques" en dimension 2.

L'existence d'une solution élémentaire donne aussitôt un résultat de résolubilité locale :

Proposition : Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(\partial)E = \delta$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ borné. Alors : $\forall T_0 \in \mathcal{D}'(U)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $PT = T_0$ dans U_ε, où $U_\varepsilon = \{x \in U \mid d(x, \complement U) > \varepsilon\}$.

Preuve : On choisit $\alpha \in \mathcal{D}(U)$, $\alpha \equiv 1$ au voisinage de $\overline{U_\varepsilon}$; comme αT_0, prolongée par 0, est dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $E * \alpha T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et
$$P(E * \alpha T_0)\big|_{U_\varepsilon} = PE * \alpha T_0\big|_{U_\varepsilon} = \delta * \alpha T_0\big|_{U_\varepsilon} = \alpha T_0\big|_{U_\varepsilon} = T_0\big|_{U_\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

Remarque : Si T_0 admet un prolongement dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on peut se passer de α, donc de ε, et résoudre $PT = T_0$ dans U tout entier.

Lorsqu'on connaît une solution élémentaire régulière, on en déduit un résultat de régularité de l'opérateur.

On dit qu'un opérateur P est hypoelliptique dans un ouvert U si : $\forall T \in \mathcal{D}'(U)$, $PT \in \mathcal{E}(U) \Rightarrow T \in \mathcal{E}(U)$. Il l'est alors aussi dans tout $V \subset U$, et s'il l'est dans les U_j, il l'est dans $\bigcup_j U_j$ (adapter la preuve ci-dessous)

Théorème : Soit $P = P(\partial)$ un o.d.l. à coefficients constants, et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PE = \delta$ et $E|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \in C^\infty$. Alors P est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, si P est hypoelliptique, toutes ses solutions élémentaires sont C^∞ hors de l'origine

Preuve : La réciproque est claire, puisque $PE|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = \delta|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$.
Dans le sens direct, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PT \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage ouvert borné de a. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\alpha \equiv 1$ au voisinage de $\overline{V}$. On a $P(\alpha T) = \alpha PT + S$, avec $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ puisque $\operatorname{supp} S \subset \operatorname{supp} \alpha$; mais $S|_V = 0$ (formule de Leibniz). Comme $E * P(\alpha T) = PE * \alpha T = \alpha T$, il vient $\alpha T = E * \alpha PT + E * S$. Comme $\alpha PT \in \mathcal{D}$, $E * \alpha PT \in \mathcal{E}$, et il reste à montrer que $E * S$ est C^∞. Soit $\varepsilon > 0$ et $\beta \in \mathcal{D}_{\overline{B}(0,2\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \equiv 1$ sur $\overline{B}(0,\varepsilon)$; $E * S = (\beta E) * S + ((1-\beta)E) * S$, et le dernier terme est C^∞ car $(1-\beta)E$ l'est. Enfin $\operatorname{supp} \beta E * S \subset \operatorname{supp} \beta + \operatorname{supp} S \subset \overline{B}(0, 2\varepsilon) + \operatorname{supp} S$, et comme S est nulle dans V, $(\beta E) * S$ l'est dans $V_{2\varepsilon} = \{x \in V \mid d(x, \complement V) > 2\varepsilon\}$, qui est encore un voisinage de a pour ε assez petit. Donc $E * S|_{V_{2\varepsilon}}$ est C^∞, et finalement $\alpha T|_{V_{2\varepsilon}} = T|_{V_{2\varepsilon}}$ aussi. $\blacksquare$

Remarques : 1) Il suffirait que E vérifie $E|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \in C^\infty$ et $PE - \delta \in C^\infty$ pour que la même preuve marche (un terme C^∞ de plus dans la décomposition). Une distribution E telle que $PE - \delta \in C^\infty$ s'appelle une "paramétrix" et l'existence d'une paramétrix régulière hors de l'origine suffit donc à prouver l'hypoellipticité.

2) Ce théorème a aussi une version <u>analytique</u> : si $E \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et $PE - \delta \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ alors P est "<u>hypoelliptique analytique</u>" sur $\mathbb{R}^n$.

$\forall U \subset \mathbb{R}^n \ \forall T \in \mathcal{D}'(U), \quad PT \in \mathcal{A}(U) \Rightarrow T \in \mathcal{A}(U)$;

et de même dans ce cas <u>toutes</u> les solutions élémentaires de P seront analytiques hors de 0.

3) Par exemple, d'après l'exercice 22 (ch. I, §7), l'opérateur "<u>de Cauchy-Riemann</u>" $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et celui <u>de Laplace</u> $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont hypoelliptiques analytiques (donc hypoelliptiques !), tandis que l'opérateur "<u>des cordes vibrantes</u>" $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ n'est pas hypoelliptique.

---

§7 THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1) Montrer que les combinaisons linéaires de mesures de Dirac sont denses (faiblement) dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (Approcher d'abord une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En déduire qui approchent $\delta', \dots, \delta^{(p)}$. Et à plusieurs variables ?

2) <u>Autre preuve de la densité de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$.</u>

a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et f est un polynôme, $\varphi * f$ est un polynôme

b) Si $\operatorname{supp} \varphi \subset]-\alpha, \alpha[$ et $f_p = (1-x^2)^p$ pour $|x| \leq 1$, 0 ailleurs, alors $\varphi * f_p|_{]-1+\alpha, 1-\alpha[}$ est un polynôme $(0 < \alpha < 1)$

c) Si $\lambda_p = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^p dx$ et $F_p = \frac{1}{\lambda_p} f_p$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $F_p \to 0$ uniformément sur $]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$. En déduire que $\varphi * F_p \to \varphi$ uniformément.

d) Refaire (a), (b), (c) à plusieurs variables, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{B}(0, A)$ et $f_p = \left(A^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^p$ pour $|x| \leq A$, 0 ailleurs. En particulier montrer que $\varphi * F_p$ est un polynôme dans la boule $\overline{B}(0, (n-1)A)$.

e) Si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \alpha \in B(0, (n-1)A)$, $\alpha \equiv 1$ sur $\overline{B}(0, A)$, et $\varphi_p(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1) \dots \alpha(x_n)(\varphi * F_p)(x_1, \dots, x_n)$ montrer que $\varphi_p \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; puis conclure.

3) Pour $a \in \mathbb{C}^n$, $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ montrer que $e^{\langle a, x\rangle}(S * T) = (e^{\langle a, x\rangle} S) * (e^{\langle a, x\rangle} T)$ (quand $*$ est bien défini).

4) On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est <u>périodique</u> de période $a \in \mathbb{R}$ si $\tau_a T = T$. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, T est de période ka. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $S * T$ est de période a. Si $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, $T = 0$. Si $\{a \in \mathbb{R} \mid \tau_a T = T\}$ admet un point d'accumulation, T est constante. Généraliser à n variables.

5) Soit (U_1, U_2) un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $T_1|_{U_1} \in \mathcal{E}(U_1)$ et $T_2|_{U_2} \in \mathcal{E}(U_2)$. On note $T_1 T_2$ l'unique distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que $T_1 T_2|_{U_1} = T_1|_{U_1} T_2|_{U_1}$ et $T_1 T_2|_{U_2} = T_2|_{U_2} T_1|_{U_2}$. Montrer que $\operatorname{supp} T_1 T_2 \subset \operatorname{supp} T_1 \cap \operatorname{supp} T_2$, que $(\rho_p * T_1)(\rho_p * T_2) \to T_1 T_2$ faiblement. Que vaut $(T_1 T_2)^{(\varphi)}$?

6) a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)dy = 0 \iff \exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

b) Si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ définie par $\langle S, \psi \rangle = \langle T, \psi(x)\alpha(y) \rangle$ est une distribution.

c) Montrer que : $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \exists S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T = S_x \otimes 1_y$

d) Montrer que les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0$ sont les distributions de la forme $R_x \otimes 1_y + 1_x \otimes S_y$, avec $R, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Lesquelles sont C^∞?

e) Décrire le noyau de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante (donc L^1_{loc} !). Montrer que $(T_f)'$ est positive : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle (T_f)', \varphi \rangle \geq 0$. Réciproque ?

8) Remarquer que tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ est la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe (de $z = x+iy$)

9) Si $f_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$ vérifier que $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ et que $f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \delta$

De même si $\sigma > 0$ et $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, $g_\sigma * g_\tau = g_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$

10) Soient f et $k \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. On cherche $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ solution de

(*) $\quad g(x) + \int_0^x k(x-t)g(t)dt = f(x)$

a) Transformer (*) en une équation dans $\mathcal{D}'_+$ et une autre dans $\mathcal{D}'_-$.

b) Montrer que la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Hk)^{*n}$ est convergente dans $\mathcal{D}'_+$ (Montrer que $|(Hk)^{*n}(x)| \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \left(\sup_{[0,x]} |k|\right)^n$.)

c) Montrer que $(\delta + S) * (\delta + Hk) = \delta$ et résoudre (*) dans $\mathcal{D}'_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

11) On cherche les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

(*) $\quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T, \varphi * \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$

a) Montrer que $\langle T, \tau_a(\varphi * \psi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \tau_a \psi \rangle$, puis que $\langle T, \tau_a \rho_p \rangle \xrightarrow[p \to \infty]{} \frac{\langle T, \tau_a \varphi \rangle}{\langle T, \varphi \rangle} = f_\varphi(a)$, où f_φ ne dépend pas de φ, et est une fonction dérivable ! que vaut $f(0)$?

b) En déduire une équation différentielle que satisfait T.

c) Résoudre (*), et étendre le résultat à n variables.

12) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'équation $\quad T'' - 3T' + 2T = H(x)\operatorname{Ch} 2x$, puis dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T'' - 3T' + 2T = \operatorname{Ch} 2x$

13) Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants $P = P(\frac{d}{dx})$, résoudre le "<u>problème de Cauchy</u>", c'est trouver la seule fonction $y(x) \in C^\infty$ telle que $Py = f \in C^\infty$ et $y^{(k)}(0) = a_k$ pour $k = 0, .., m-1$, où $m = \deg P$. Ceci peut se faire par le calcul symbolique :

a) Si $z = Hy$, calculer $Pz - HPy$ comme combinaison de $\delta, \delta', .., \delta^{(m-1)}$

b) En déduire la solution sur $\mathbb{R}_+$, puis sur tout $\mathbb{R}$.

c) S'entraîner à calculer des exemples : $\begin{cases} y' - y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y''' - y = \cos x \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2\operatorname{Ch} x \\ y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = 1 \end{cases}$

14) Calcul symbolique "matriciel" : Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ le système
$\begin{cases} T'' - 2T' - S' = H(x)\sin x \\ T'' + S'' = 0 \end{cases}$
Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R})$ le "problème de Cauchy" : $\begin{cases} y''' - z'' - y'' = 0 \\ z' + y + z = 0 \\ y(0) = z(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) - z'(0) = 6 \end{cases}$

15) Trouver les fonctions $y(x)$ solutions de $\int_0^x \operatorname{Sh}(x-t)y(t)dt = x^2 + 6y'(x)$

16) Démontrer qu'en dimension 1, tout o.d.l. à coefficients constants est hypo-elliptique analytique.

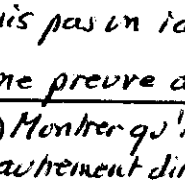
17) Pour toute suite $(a_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes on pose $S_a = \delta + \sum_{k\geq 1} a_k \delta_k \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$
Calculer $S_a * S_b$ et résoudre $S_a * T = \delta$ dans $\mathcal{D}'_+$.
Si Σ est l'ensemble des distributions S_a, et Σ' l'ensemble des S_a dont la suite a est à croissance lente, montrer que Σ' est une sous-algèbre de Σ, mais pas un idéal. Est-ce un corps ?

18) <u>Une preuve du théorème de Titchmarsh</u> : $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}),\ T*S = 0 \Rightarrow T \text{ ou } S = 0$ (*)

a) Montrer qu'il suffit de prouver (*) pour $S, T \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, de support $\subset [0,+\infty[$, autrement dit : (**) $\forall f, g \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})\ \left(\int_0^x f(x-t)g(t)dt = 0, \forall x\right) \Rightarrow f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

b) On admet les trois énoncés (A), (B), et (C) :
(A) Si $f \in C^0([0,X])$ et $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\int_0^X e^{nx} f(x)dx\right| \leq M$, alors $f \equiv 0$
(B) Si $f \in C^0([0,X])$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_0^X x^n f(x)dx = 0$, alors $f \equiv 0$.
(C) (**) est vrai quand $f = g$
On pose $\tilde{f}(x) = x f(x)$ et $\tilde{g}(x) = x g(x)$. Montrer que sous l'hypothèse de (**), $\tilde{f} * g + f * \tilde{g} = 0$, puis calculer $f * \tilde{g} * (\tilde{f} * g + f * \tilde{g})$, et en déduire $f * \tilde{g} = 0$.
Déduire de (B) que si $f * g = 0$, alors $f(x-t)g(t) = 0$ pour tous $0 \leq t \leq x < +\infty$
Conclure sous ces hypothèses.

c) Pour montrer (C), on veut montrer que plus précisément
(C') $\{\forall x \in [0, 2X],\ \int_0^x f(x-t)f(t)dt = 0\} \Rightarrow \{\forall x \in [0,X], f(x) = 0\}$



Par le changement de variables $t = X - u$, $x = 2X - u - v$ calculer $\iint_\Delta e^{n(u+v)} f(X-u)f(X-v)dudv$, sous l'hypothèse de (C')
En calculant la même intégrale sur $\Delta \cup \Delta'$, en déduire
$\left|\int_{-X}^X e^{nu} f(X-u)du\right|^2 \leq 2X^2A^2$, avec $A = \sup_{[0,2X]} |f(t)|$
En déduire (C') en utilisant (A).

d) Déduire (B) de l'assertion
(B') Si $g \in C^0([1,U])$ et $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\int_1^U u^n g(u)du\right| \leq M$, alors $g \equiv 0$.
(Poser pour $x_0 \in]0,X[$, $x = x_0 u$, $X = x_0 U$, $f(x) = g(u)$ ...)
Puis déduire (B') de (A). Reste à démontrer (A).

e) La série $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{k h(x-t)}$ converge, pour h et x fixés, uniformément pour $t \in [0,x]$, vers $1 - \exp(-e^{h(x-t)})$. En multipliant par $g(t)$, où $g \in C^0([0,X])$ et intégrant, en déduire : $\lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^X e^{kh(x-t)} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt$ (grâce à Lebesgue).

f) En déduire sous l'hypothèse du (A) que $\int_0^x f(X-t)dt = 0$ pour $x \in [0,X]$, et enfin conclure !

CHAPITRE III : LA TRANSFORMATION DE FOURIER

80 REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on sait diagonaliser dans une même base toute une famille d'opérateurs linéaires, dès qu'ils commutent entre eux, et sont diagonalisables ; de plus tout autre opérateur qui leur commute y est aussi diagonalisé (si c'est possible).

Soit E un espace de fonctions $f : G \to \mathbb{C}$, où G est un groupe abélien. G agit sur lui-même par translations ($\tau_a : x \mapsto x+a$), donc aussi sur E ($\tau_a f(x) = f(x-a)$). Une base qui diagonalise les translations est formée de fonctions propres : $\forall a \in G\ \exists \lambda(a) \in \mathbb{C}\ \forall x \in G\ \ f(x+a) = \lambda(a) f(x)$.
D'où $f(a) = \lambda(a) f(0)$ puis $\lambda(a+b) f(0) = f(a+b) = \lambda(a) f(b) = \lambda(a)\lambda(b) f(0)$, et dès que $f(0) \neq 0$ (sinon $f \equiv 0$ n'est pas "propre"), $\lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b)$ et $\lambda(0) = 1$.
f est donc proportionnelle à un caractère du groupe G, c'est-à-dire un morphisme $G \xrightarrow{\lambda} (\mathbb{C}^*, \times)$. Si $\operatorname{Im}\lambda \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ on dit que le caractère est unitaire (dès que $\lambda \neq 0$, $|\lambda|$ est aussi un caractère, et $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ est un caractère unitaire. Si l'on parvient à décomposer toute $f \in E$ en "combinaison" de caractères, tout opérateur $E \to E$ qui commute aux translations sera diagonalisé (si c'est possible) automatiquement.

L'ensemble des caractères est lui-même un groupe "dual" G^*, muni du produit point par point, et comme dans le cas des espaces vectoriels, on soupçonne que $G^{**} \simeq G$ assez souvent, par exemple quand G est un groupe topologique, et G^* le groupe des caractères unitaires continus.

L'ensemble des coefficients de la décomposition de f est une nouvelle fonction $\hat{f}$ sur G^*, appelée transformée de Fourier de f, et bien sûr on espère que $\hat{\hat{f}}$ s'identifie à f ("inversion" de Fourier)

Naturellement dès que G est infini, c'est à une généralisation de la notion de combinaison linéaire qu'il faut penser : une intégrale, pour une mesure adaptée à chaque groupe, invariante par translation, qu'on appelle la "mesure de Haar" du groupe.

Les cas les plus classiques de tels groupes G sont d'abord $(\mathbb{R}^n, +)$, et quelques groupes associés : $\mathbb{Z}^n$ et $\left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n = \mathbb{T}^n$ (le tore) ; c'est eux qui font l'objet de ce chapitre.

(La même théorie pour un groupe G non commutatif s'appelle l'"analyse harmonique" : les caractères sont alors remplacés par les "représentations irréductibles" du groupe.)

Tout ce qui est dit dans ce chapitre est donc de nature globale : ça ne se localise pas. Il s'agit de la "transformation de Fourier" classique (cas de $\mathbb{R}^n$), et des "séries de Fourier" (cas de $\mathbb{T}^n$).
Les caractères sont alors les exponentielles imaginaires.

§1 L'ESPACE $\mathcal{S}$ DE SCHWARTZ, ET SON DUAL $\mathcal{S}'$

L'"espace de Schwartz" $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ telles que : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty$

On le munit de la topologie engendrée par les semi-normes $P_{\alpha,\beta}$. C'est la même que celle définie par les semi-normes

$$P_{m,m'}(f) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq m'} \sup |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \qquad (m, m' \in \mathbb{N})$$

ou encore les $q_{m,m'}(f) = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m'} \sup\, (1+|x|^m)^2 |\partial^\alpha f(x)|}$

(il y a beaucoup de variantes, dont l'équivalence est laissée en exercice ; on pourrait même remplacer les sup par des normes L^1 ou L^2 : cf chap I, §7, n°7, et la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$ ci-dessous). $\mathcal{S}$ est donc métrisable, et on peut vérifier qu'il est complet.

<u>Proposition : $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ et $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi$ sont des applications bilinéaires bien définies, et continues de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$</u>

Preuve : Remarquons d'abord que comme $x^\alpha = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x-y)^\beta y^{\alpha-\beta}$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on peut trouver des constantes C_α et $C'_\alpha > 0$ telles que
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |x^\alpha| \leq C_\alpha(1+|x-y|^{|\alpha|}) + C'_\alpha(1+|y|^{|\alpha|})$
Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ il vient donc

$$|x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \psi)| = |x^\alpha| \int \partial^\beta \varphi(x-y)\psi(y)dy$$
$$\leq C_\alpha \int (1+|x-y|^{|\alpha|})|\partial^\beta\varphi(x-y)||\psi(y)|dy + C'_\alpha \int |\partial^\beta \varphi(x-y)|(1+|y|^{|\alpha|})|\psi(y)|dy$$
$$\leq \left\{ \begin{array}{l} C_\alpha \left(\sup\,(1+|x|^\alpha)|\partial^\beta\varphi(x)|\right)\left(\sup\,(1+|y|)^N|\psi(y)|\right) \\ + C'_\alpha\left(\sup\,|\partial^\beta\varphi|\right)\left(\sup\,(1+|y|^{|\alpha|})(1+|y|^N)|\psi(y)|\right) \end{array} \right\} \int \frac{dy}{1+|y|^N}$$

où l'intégrale est convergente dès que $N > n$.
Quant à $|x^\alpha \partial^\beta(\varphi\psi)|$, il se majore par la formule de Leibniz. ∎

On appellera ici <u>tempérées</u> les fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ qui sont à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées :
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ \exists\, C_\alpha > 0$ et $m_\alpha \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha}$

<u>Proposition : Les opérateurs différentiels linéaires à coefficients tempérés sont définis et continus de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$</u>

Preuve : Il suffit de le vérifier pour une dérivation (évident), et pour la multiplication $\varphi \mapsto f\varphi$ par une fonction tempérée f :
Par Leibniz il suffit de vérifier que, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha||\partial^\beta f(x)||\partial^\gamma\varphi(x)| \leq \left(\sup \frac{|\partial^\beta f(x)|}{(1+|x|^{m_\beta})}\right)\left(\sup |x|^\alpha(1+|x|^{m_\beta})|\partial^\gamma\varphi(x)|\right) < \infty. \ ∎$$

<u>Proposition : Les injections $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sont continues et d'image dense.</u>

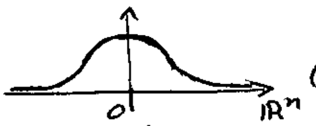
Preuve : Clairement $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. La continuité de $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ signifie :

$\forall K \Subset \mathbb{R}^n\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\ \exists\, m, C\ \forall\varphi\in\mathcal{D}_K : \sup|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)| \le C\sum_{|\gamma|\le m}\sup|\partial^\gamma\varphi|$
et résulte donc de ce que $\sup_K |x^\alpha| < \infty$.

La continuité de $\mathcal{S}\hookrightarrow\mathcal{E}$ signifie:
$\forall K\Subset\mathbb{R}^n\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n\ \exists\, C,m,m'\ \forall\varphi\in\mathcal{S}: \sup_K|\partial^\alpha\varphi|\le C\sum_{|\beta|\le m}\sup_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^{m'})|\partial^\beta\varphi(x)|$
Elle est claire, avec $m'=0$, $m=|\alpha|$ (et $C=1$).

La densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ est claire, puisque $\mathcal{D}$ est déjà dense dans $\mathcal{E}$.

Enfin, si $\varphi\in\mathcal{S}$, posons pour $p\in\mathbb{N}$ $\varphi_p = (\rho_1 * \chi_{\bar{B}(0,p)})\varphi$.
Les dérivées de $\rho_1 * \chi_{\bar{B}(0,p)}$ sont majorées par des constantes indépendantes de p (dérivées de ρ_1), et nulles dans $\bar{B}(0,p-1)$, ainsi que la fonction $\rho_1 * \chi_{\bar{B}(0,p)} - 1$. Il suffit donc, par la formule de Leibniz, de vérifier que $\sup_{|x|\ge p-1} |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ pour tous α,β fixés dans $\mathbb{N}^n$.
Or $|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)| \le \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|}(1+|x|)|\partial^\beta\varphi(x)|\right)\cdot\frac{1}{1+|x|}$, d'où la conclusion que $\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}$. ■

<u>Exemple:</u> La "<u>gaussienne</u>" $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  $(a>0)$

Rappelons que $|x|^2$ est un polynôme. Les majorations sont claires.

La dernière proposition donne immédiatement, par transposition, des injections: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{S}'$ est le dual de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires <u>continues</u> de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$. De plus celles-ci sont <u>continues</u> pour la topologie faible, et d'image dense (faiblement aussi)

En particulier les éléments de $\mathcal{S}'$ s'identifient à des distributions, qu'on appelle les <u>distributions tempérées</u>

De même l'avant-dernière proposition se transpose aussi: <u>les opérateurs différentiels linéaires à coefficients tempérés sont faiblement continus de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.</u>

Achevons ce paragraphe par des exemples de distributions tempérées:

- <u>toute distribution à support compact est tempérée</u> (puisque $\mathcal{E}'\subset\mathcal{S}'$)
- <u>toute fonction localement intégrable à croissance lente définit une distribution tempérée:</u>

Preuve: Si $f\in\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\exists\, C>0, m\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ |f(x)|\le C(1+|x|^m)$, on a pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:
$|\langle T_f,\varphi\rangle| = |\int f(x)\varphi(x)\,dx| \le C \sup_{\mathbb{R}^n}\left((1+|x|^m)(1+|x|^{n+1})|\varphi(x)|\right)\cdot\int\frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}}$
d'où la même majoration pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par densité. ■
(en particulier les "<u>fonctions tempérées</u>" sont des distributions tempérées!)

<u>Remarque:</u> Il n'est pourtant pas nécessaire que $f\in\mathbb{L}^1_{loc}$ soit à croissance lente pour que T_f soit tempérée. Ainsi sur $\mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} \exp(ie^x)$ est tempérée puisque $f\in C^\infty$ et $|f|=1$; donc aussi $(T_f)' = T_{f'}$, mais f' n'est plus à croissance lente!

– les parties finies des fractions rationnelles sont tempérées puisqu'on peut les décomposer en somme d'une distribution à support compact, et d'une fonction tempérée.

Remarque: Puisque $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$, la "tempérance" d'une distribution ne dépend que de son comportement à l'infini : intuitivement, c'est une condition de "croissance" : par exemple $e^{|x|^2}$ n'est pas tempérée (que vaudrait $\langle e^{|x|^2}, e^{-|x|^2}\rangle$?) Mais la précédente remarque doit rendre prudent ! En fait $T \in \mathcal{D}'$ est tempérée si et seulement si elle se prolonge (et alors de façon unique) en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$...

§2 LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Les caractères unitaires du groupe topologique $\mathbb{R}^n$ sont les exponentielles imaginaires : $x \mapsto e^{i\langle \xi, x\rangle}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, formant un groupe $\mathbb{R}^{n*}$ isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\boxed{(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} \varphi(x)\,dx} \quad \left(\text{On note aussi } \xi.x = \langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right)$$

Proposition: $\mathcal{F}$ est une application linéaire bien définie et continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. On l'appelle transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$. $\hat{\varphi}$ est la "transformée de Fourier" de φ.

Preuve: Par dérivation sous le signe somme, intégration par parties, et Leibniz, :

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| = \left|\int \xi^\alpha (-ix)^\beta e^{-i\langle \xi, x\rangle} \varphi(x)\,dx\right| = \left|\int \left(e^{-i\langle \xi, x\rangle}\right)^{(\alpha)} (x^\beta \varphi(x))\,dx\right|$$

$$= \left|\int e^{-i\langle \xi, x\rangle} (x^\beta \varphi(x))^{(\alpha)} dx\right| \leq \int |(x^\beta \varphi(x))^{(\alpha)}|\,dx \leq C^{te} \left(\int \frac{dx}{1+|x|^{n+1}}\right) . \sup (1+|x|)^{|\beta|+n+1} \sum_{\gamma \leq \alpha} |\partial^\gamma \varphi(x)|. \blacksquare$$

Remarques: On vient déjà d'utiliser les formules

$$\boxed{\widehat{\partial_x^\alpha \varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)} \quad \text{et} \quad \boxed{\widehat{x^\beta \varphi(x)}(\xi) = i^\beta \partial_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)} \quad (\varphi \in \mathcal{S}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$$

De plus : $\mathcal{F}$ transforme convolution en produit : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$ $\boxed{\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}}$

Preuve : par Fubini et changement de variable, puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$:

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int e^{-i\xi.x} \left(\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\right) dx = \int \left(e^{-i\xi.y}\psi(y)\right)\left(\int e^{-i\xi.(x-y)} \varphi(x-y)\,dx\right) dy$$

$$= \left(\int e^{-i\xi.z}\varphi(z)\,dz\right)\left(\int e^{-i\xi.y}\psi(y)\,dy\right) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi). \blacksquare$$

Exemple fondamental : la gaussienne

Si $f(x) = e^{-a|x|^2}$, avec $a > 0$, en notant $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, ou $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ selon le cas, $1 \leq j \leq n$, on a $\partial_j f(x) = -2a x_j f(x)$, d'où, par les formules ci-dessus :

$\partial_j \hat{f}(\xi) = -i\, \widehat{x_j f(x)}(\xi) = \frac{i}{2a} \widehat{\partial_j f}(\xi) = -\frac{1}{2a} \xi_j \hat{f}(\xi)$, équation différentielle en la fonction $\hat{f}$ de la variable ξ_j, dont la solution est $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi_1, .. \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, .. \xi_n)\, e^{-\frac{\xi_j^2}{4a}}$.

Itérant ce raisonnement il vient : $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$.

Comme $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du\right)^n = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$ (cf. ch. I §7, exercice 1),

il vient : $\underline{\underline{\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}}}$, et pour $a = \frac{1}{2}$: $\underline{\underline{\widehat{e^{-\frac{|x|^2}{2}}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}}}$

Remarque: La transformation de Fourier des fonctions intégrables est connue depuis longtemps, ainsi que toutes les propriétés ci-dessus, lorsque celles-ci gardent un sens: si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi . x} f(x)dx$ est convergente, et la même preuve que ci-dessus donne encore $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ pour $f, g \in \mathbb{L}^1$.
Mais le maniement de $\mathcal{F}$ dans ce cadre est délicat pour deux raisons:
- en général $\hat{f} \notin \mathbb{L}^1$
- on aimerait calculer $\hat{f}$, même pour $f \notin \mathbb{L}^1$ (par exemple une partie finie)

Toutefois, on a le résultat (sans réciproque, hélas)

Théorème (de Riemann-Lebesgue): Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est une fonction continue tendant vers zéro à l'infini (donc uniformément continue)

Preuve: D'abord $|\hat{f}(\xi)| = |\int e^{-i\xi . x} f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx < \infty$. De même si $f_p \to f$ dans $\mathbb{L}^1$, $\hat{f_p} \to \hat{f}$ uniformément: $|\hat{f}_p(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int |f_p(x) - f(x)|dx = \|f_p - f\|_{\mathbb{L}^1} \to 0$
De plus si $f \in \mathbb{L}^1$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0$ tel que $\int_{|x|>R} |f(x)|dx < \varepsilon$. Pour $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, il vient

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi')| \leq \int_{|x|\leq R} |e^{-i(\xi-\xi').x} - 1||f(x)|dx + 2\int_{|x|>R} |f(x)|dx$$
$$\leq C^{te}\|f\|_{\mathbb{L}^1}|\xi - \xi'| + 2\varepsilon$$
, d'où la continuité uniforme; enfin $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{L}^1$, et il existe $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}(0,A)$ et $\|\varphi - f\|_{\mathbb{L}^1} < \varepsilon$;
pour $|\xi| > A$, $|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)| + |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \|f - \varphi\|_{\mathbb{L}^1} + |\hat{\varphi}(\xi)|$
Or $|\hat{\varphi}(\xi)| \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. ■

C'est pour remédier à ces inconvénients qu'on définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée, faiblement, c'est-à-dire par transposition: pour $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$, on définit $\hat{T} = \mathcal{F}T$ par:

$$\boxed{\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle}$$

$\mathcal{F}$ devient donc une application linéaire faiblement continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, qui prolonge la transformation de Fourier de $\mathcal{S}$ (et même de $\mathbb{L}^1$):
Si $T = T_f$, avec $f \in \mathbb{L}^1$, et $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \hat{T_f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int f(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \iint f(\xi)\varphi(x)e^{-i\xi . x}dx d\xi \quad \text{(Fubini)}$$
$$= \int \varphi(x)\left(\int f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi\right)dx = \int \varphi(x)\hat{f}(x)dx = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle. ■$$

Par transposition aussi, ou par densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ et continuité faible, on vérifie alors que: $\forall T \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\boxed{\left(\widehat{\partial_x^\alpha T}\right)_\xi = (i\xi)^\alpha \hat{T}_\xi \quad \text{et} \quad \left(\widehat{x^\beta T}\right)_\xi = i^\beta \partial_\xi^\beta \hat{T}_\xi}$

Le produit de convolution de deux distributions n'est pas défini en général (ni leur produit "ponctuel"), mais voici un cas particulier important: ($\tau_a = \delta_a *$)
$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{\left(\widehat{\tau_a T}\right)_\xi = e^{-ia\xi}\hat{T}_\xi}$ Preuve: pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widehat{\tau_a T}, \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \hat{\varphi} \rangle = \langle T_\xi, \hat{\varphi}(\xi + a) \rangle = \langle T_\xi, \left(\widehat{e^{-ia.x}\varphi(x)}\right)(\xi) \rangle$$
$$= \langle \hat{T}, e^{-iax}\varphi(x) \rangle = \langle e^{-iax}\hat{T}, \varphi \rangle. ■$$

Exemples $\boxed{\hat{\delta} = 1\ ;\ \widehat{\delta^{(\alpha)}} = (i\xi)^\alpha\ ;\ \hat{\delta}_a = e^{-ia\xi}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n, a \in \mathbb{R}^n)$
car $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi \rangle$; le reste s'en déduit par les formules ci-dessus. ■

On notera aussi $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\circ v = v\circ\mathcal{F}$, où $v : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ou $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ et $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ (clairement $\check{T_f} = T_{\check{f}}$). Comme v (à prononcer "Tchech") est clairement un isomorphisme de $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ (et de tous les autres !), $\overline{\mathcal{F}}$ a les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$ (a des signes près dans les formules précédentes).

Lemme : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $x_j T = 0$ pour $1 \le j \le n$, $T = C\delta$ avec $C \in \mathbb{C}$

Preuve : D'abord $\operatorname{supp} T \subset \bigcap_j \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\} = \{0\}$, et $x^\alpha T = 0$ pour tout $\alpha \neq 0$

Donc (ch. I §5) $T = \sum_{|\beta|\le m} c_\beta \delta^{(\beta)}$ et donc $\sum_{|\beta|\le m} c_\beta x^\alpha \delta^{(\beta)} = 0$

Comme $\langle x^\alpha \delta^{(\beta)}, \varphi\rangle = (-1)^{|\beta|}(x^\alpha \varphi(x))^{(\beta)}(0) = \sum_{0\le\gamma\le \inf(\alpha,\beta)} \frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!}\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\left(x^{\alpha-\gamma}\varphi^{(\beta-\gamma)}(x)\right)(0)$

$= \frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{(\beta-\alpha)!}\varphi^{(\beta-\alpha)}(0)$ si $\alpha \le \beta$ et 0 sinon,

si $m = \sup_{c_\beta \neq 0} |\beta|$ et $|\beta_0| = m$ avec $c_{\beta_0} \neq 0$, en prenant $\alpha = \beta_0$ on trouve $c_{\beta_0}\varphi(0) = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, d'où $c_{\beta_0} = 0$; donc $\alpha \neq \beta_0$, autrement dit $m = 0$. ∎

Proposition : $\boxed{\hat{1} = (2\pi)^n \delta}$

Preuve : Pour $j = 1, \dots, n$, on a $\partial_j 1 = 0$, donc $\xi_j \hat{1} = 0$, et par le lemme $\hat{1} = C\delta$

Mais $C = \langle C\delta, e^{-\frac{|x|^2}{2}}\rangle = \langle \hat{1}, e^{-\frac{|x|^2}{2}}\rangle = \langle 1, (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)^n$

$= (2\pi)^n$ (cf. Ch I §7 exercice 1). ∎

Théorème : $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et un isomorphisme faible de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\circ v = (2\pi)^{-n} v\circ\mathcal{F}$

Preuve : comme $\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle$, et $\langle T, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle$, il reste seulement à vérifier que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{\hat{\varphi}}(x) = (2\pi)^n \varphi(-x)$. Or :

$\hat{\hat{\varphi}}(x) = \int e^{-ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi, = \langle 1_\xi, e^{-ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)\rangle = \langle 1, \widehat{\tau_x\varphi}\rangle$

$= \langle \hat{1}, \tau_x\varphi\rangle = \langle (2\pi)^n\delta, \tau_x\varphi\rangle = (2\pi)^n\langle \delta_y, \varphi(y-x)\rangle = (2\pi)^n\varphi(-x)$. ∎

Remarques anodines : Dans la littérature physico-mathématique, on trouve beaucoup de "transformations de Fourier" du type $\hat{f}(\xi) = \int e^{i\varphi(x,\xi)}f(x)dx$, où φ est une forme bilinéaire définie positive, par exemple $\varphi(x,\xi) = h\langle\xi,x\rangle$, où h est la constante de Planck... Bien entendu, elles ont toutes les mêmes propriétés, à des constantes près dans les formules !

Les physiciens font un grand usage de la transformation de Fourier. On trouve des recueils (énormes) de "tables de Fourier" donnant explicitement $\hat{T}$ en face de T, pour la plupart des fonctions et distributions "usuelles". C'est à la physique quantique surtout que $\mathcal{F}$ est indispensable, même dans les principes.

Remarques plus "terre à terre" (donc plus importantes)

1) Il faut ici dire un mot des transformées de Fourier partielles : si $0<p<n$, et $x = (y,z)$, avec $y \in \mathbb{R}^p$, $z \in \mathbb{R}^{n-p}$, on posera, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\tilde{\varphi}(\eta, z) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle\eta,y\rangle}\varphi(y,z)dy$. On obtient un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui se transpose (et se prolonge !) en un isomorphisme faible de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

les preuves sont les <u>mêmes</u> que ci-dessus, et les formules aussi, "mutatis mutandis"! Par exemple $\hat{1} = (2\pi)^p \delta_{\mathbb{R}^p} \otimes 1_{\mathbb{R}^{n-p}} \cdots$

2) Le théorème donne donc la "<u>formule d'inversion de Fourier</u>"

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi.x} d\xi$$

qui est la "décomposition en ondes planes" (= en caractères) d'une fonction. Elle est à prendre "au sérieux" dès que $\hat{\varphi} \in \mathbb{L}^1$ et "au sens faible" pour $\varphi \in \mathcal{S}$!

3) Par cette formule d'inversion, il est clair que Fourier <u>échange</u> convolution et multiplication : de $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, on déduit aussitôt que $\forall f, g \in \mathcal{S}$ $\boxed{\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}}$. En effet, si $f = \hat{\varphi}$ et $g = \hat{\psi}$, on a

$$\widehat{fg} = \widehat{\hat{\varphi}\hat{\psi}} = \widehat{\widehat{\varphi * \psi}} = (2\pi)^n (\varphi * \psi)^\vee = (2\pi)^n \check{\varphi} * \check{\psi} = (2\pi)^n \cdot \left((2\pi)^{-n}\hat{\hat{\varphi}}\right) * \left((2\pi)^{-n}\hat{\hat{\psi}}\right)$$
$$= (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}.$$

4) Cette propriété ($\widehat{S * T} = \hat{S}\hat{T}$ et $\widehat{ST} = (2\pi)^{-n} \hat{S} * \hat{T}$) s'étend bien sûr (par densité, ou par transposition) à tous les cas où les deux termes de la formule ont un sens : par exemple, si $S \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$, on verra au §4 que $\hat{S}$ est une fonction tempérée, ce qui donne un sens à $\hat{S}\hat{T}$; eh bien $S * T$ est bien dans $\mathcal{S}'$ (exercice), et $\widehat{S * T} = \hat{S}\hat{T}$!...

5) On a des injections continues et denses $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$, d'où aussi $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$. Y-a-t-il un espace "<u>charnière</u>" entre fonctions et distributions, qui serait son propre dual? Oui! et c'est l'objet du paragraphe suivant.

---

§3 $\boxed{\text{FOURIER DANS } \mathbb{L}^2}$

$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire (<u>sesquilinéaire</u>) $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$; donc $\mathbb{L}^{2\prime} \simeq \mathbb{L}^2$ et on a des injections continues et denses (faiblement pour les deux dernières):

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

<u>Preuves:</u> $\mathcal{S} \subset \mathbb{L}^2$ car pour $\varphi \in \mathcal{S}$ $\|\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2} = \int |\varphi(x)|^2 dx \le \left(\int \frac{dx}{(1+|x|^n)^2}\right)\left(\sup(1+|x|^n)|\varphi(x)|\right)^2$

De même $\mathbb{L}^2$ est contenu dans $\mathcal{S}'$ (comme d'ailleurs $\mathbb{L}^1$, ce qu'on a vu au paragraphe précédent, et même tous les $\mathbb{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty]$: preuves analogues), car pour $f \in \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$ (Cauchy-Schwarz), et $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \le \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$\le \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int \frac{dx}{(1+|x|^n)^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sup(1+|x|^n)|\varphi(x)|\right)$$

d'où la continuité de toutes ces injections. Les densités sont toutes claires ou connues sauf celle de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{L}^2$; mais $\mathcal{D}$ est déjà dense dans $\mathbb{L}^2$ comme dans tous les $\mathbb{L}^p$... ∎

Comme $\mathbb{L}^2 \subset \mathcal{S}'$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f \in \mathbb{L}^2$ est déjà définie a priori (faiblement) ; mais en fait $\hat{f} \in \mathbb{L}^2$, et mieux :

Théorème : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un <u>isomorphisme</u> de $\mathbb{L}^2$ (de même que $\overline{\mathcal{F}}$), d'inverse $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$. De plus $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}$ est une <u>isométrie</u> (de même que $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$). Enfin on a la "<u>formule de Plancherel</u>" : $\forall f,g\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad (\hat{f},\hat{g})=(2\pi)^n\cdot(f,g)$

Remarque : $(f,g)=\langle f,\overline{g}\rangle=\overline{\langle \overline{f},g\rangle}=\overline{(g,f)}$ (pour $f,g\in\mathcal{S}$ au moins)

<u>Preuve</u> : Pour $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$, on a :

$$(\hat{\varphi},\hat{\psi})=\int\hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}d\xi=\langle 1,\hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\rangle=\langle 1,\hat{\varphi}\,\hat{\overline{\check{\psi}}}\rangle=\langle 1,\widehat{\varphi*\overline{\check{\psi}}}\rangle$$
$$=\langle\hat{1},\varphi*\overline{\check{\psi}}\rangle=(2\pi)^n\langle\delta,\varphi*\overline{\check{\psi}}\rangle=(2\pi)^n\int\overline{\check{\psi}}(-x)\varphi(x)dx=(2\pi)^n(\varphi,\psi)$$

Donc $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire $(\ ,\ )$ de deux fonctions de $\mathcal{S}$, et par suite la norme $\mathbb{L}^2$ d'une fonction de $\mathcal{S}$: $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2}=(\varphi,\varphi)^{1/2}$.

Si maintenant $f\in\mathbb{L}^2$, et si $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ convergente vers f dans $\mathbb{L}^2$, (φ_p) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$, donc aussi $(\hat{\varphi}_p)$, puisque $\|\hat{\varphi}_p-\hat{\varphi}_q\|=(2\pi)^{n/2}\|\varphi_p-\varphi_q\|$. Soit $g\in\mathbb{L}^2$ sa limite. Pour $\psi\in\mathcal{S}$, il vient : $\langle g,\psi\rangle=(g,\overline{\psi})=\lim\limits_{p\to\infty}(\hat{\varphi}_p,\overline{\psi})=\lim\langle\hat{\varphi}_p,\psi\rangle$
$=\lim\langle\varphi_p,\hat{\psi}\rangle=\lim(\varphi_p,\overline{\hat{\psi}})=(f,\overline{\hat{\psi}})=\langle f,\hat{\psi}\rangle=\langle\hat{f},\psi\rangle$.

C'est dire que la distribution tempérée $\hat{f}$ s'identifie à $g\in\mathbb{L}^2$, et de plus $\|\hat{f}\|_{\mathbb{L}^2}=\lim\|\hat{\varphi}_p\|_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{n/2}\lim\|\varphi_p\|_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{n/2}\|f\|_{\mathbb{L}^2}$. La formule d'inversion étant déjà connue dans $\mathcal{S}'$, se restreint à $\mathbb{L}^2$, et les deux premières assertions sont démontrées. Enfin $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ conservant la norme, elle conserve aussi le produit scalaire qui s'en déduit par "polarisation" :
$2\,\mathrm{Re}\,(f,g)=\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2$ et $2\,\mathrm{Im}\,(f,g)=\|f+ig\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2$, d'où la formule de Plancherel. ∎

On va maintenant déterminer les <u>valeurs et fonctions propres</u> de l'opérateur unitaire $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}:\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$

Rappelons qu'un espace de Hilbert H est dit <u>séparable</u> s'il admet une <u>base hilbertienne</u> dénombrable $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (et toutes le sont alors), c'est-à-dire une suite "<u>orthonormée</u>" : $\forall p,q\,.\ p\neq q\Rightarrow(e_p,e_q)=0$, et $\|e_p\|=1$ et "<u>totale</u>" : $\forall f\ (\forall p\ (f,e_p)=0)\Rightarrow f=0$.

Un tel espace H est <u>isomorphe</u> à l'espace ℓ^2 des suites $c=(c_p)$ de nombres complexes "<u>de carré sommable</u>" ($\sum|c_p|^2<\infty$) muni du produit scalaire $(c,c')=\sum c_p\overline{c'_p}$. L'isomorphisme est $(c_p)\mapsto\sum c_pe_p=f\in H$. En particulier $c_p=(f,e_p)$, et $\|f\|^2=\sum|c_p|^2$.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et $x\in\mathbb{R}^n$, posons $h_\alpha(x)=e^{\frac{|x|^2}{2}}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})$

Clairement h_α est le produit de $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ par un polynôme de degré $|\alpha|$, et donc $h_\alpha\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus pour $\varepsilon_j=(0\cdots0,\underset{(j)}{1},0\cdots0)$, $1\le j\le n$, et $\beta\in\mathbb{N}^n$

$$(*)\quad \partial^{\beta+\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})=\partial^\beta(-2x_je^{-|x|^2})=-2x_j\partial^\beta(e^{-|x|^2})-2\beta_j\partial^{\beta-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})$$

par la formule de Leibniz (même si $\beta_j=0$).

Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, avec $\alpha_j>0$, calculons alors le produit scalaire

$$(k_\alpha,k_\beta)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})\,\partial^\beta(e^{-|x|^2})\,dx \qquad \text{(par parties)}$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}\partial^{\alpha-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,e^{|x|^2}\left(2x_j\partial^\beta(e^{-|x|^2})+\partial^{\beta+\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\right)dx$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}\partial^{\alpha-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,e^{|x|^2}(-2\beta_j)\,\partial^{\beta-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,dx \qquad \text{(par (*))}$$

$=2\beta_j\,(k_{\alpha-\varepsilon_j},k_{\beta-\varepsilon_j})$, même pour $\beta_j=0$

Dès que $\alpha\neq\beta$, par exemple $\alpha_j>\beta_j$, en itérant le calcul précédent β_j fois, on voit que $(k_\alpha,k_\beta)=0$. Par contre:

$(k_\alpha,k_\alpha)=2^{|\alpha_1|}\alpha_1!\,(k_{\alpha-\alpha_1\varepsilon_1},k_{\alpha-\alpha_1\varepsilon_1})=\dots=2^{|\alpha|}\alpha!\,(k_0,k_0)$

Comme $(k_0,k_0)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\pi^{\frac{n}{2}}$ (ch. I, §7, exercice n°1),

finalement: $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ $\boxed{(k_\alpha,k_\beta)=\pi^{\frac{n}{2}}2^{|\alpha|}\alpha!\,\delta_{\alpha,\beta}}$ (avec $\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1 & \text{si } \alpha=\beta\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On définit la "suite" des fonctions d'Hermite $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ par:

$h_\alpha(x)=\lambda_\alpha k_\alpha(x)=\lambda_\alpha e^{\frac{|x|^2}{2}}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})$ pour $x\in\mathbb{R}^n$, avec $\lambda_\alpha=(\pi^{n/2}2^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}$

Théorème: Les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (qui est donc séparable!)

Preuve: Le calcul précédent montre déjà que la famille $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ est orthonormée; il reste à voir qu'elle est totale. Soit $f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $(f,h_\alpha)=0$. Comme $h_\alpha(x)=P_\alpha(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, où P_α est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\lambda_\alpha(-2x)^\alpha$ (donc les P_α forment d'une base de l'espace des polynômes), f est orthogonale à toutes les fonctions de la forme $P(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, où P est un polynôme.
Posons $F(z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-z\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx$; pour tout $z\in\mathbb{C}^n$, l'intégrale est bien définie, et dérivable en z sous le signe somme, puisque $P(x)e^{-z\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout polynôme P (Cauchy-Schwarz).
Donc F est une série entière de polyrayon de convergence infini:
$F(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{F^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}z^\alpha$, avec $F^{(\alpha)}(0)=\int_{\mathbb{R}^n}(-1)^{|\alpha|}x^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx=0$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, d'où $F\equiv0$ et en particulier $F(i\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx=0$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$. C'est dire que la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)$, qui est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (Cauchy-Schwarz), est nulle. Comme $\mathcal{F}$ est injective dans $\mathcal{S}'$, donc dans $\mathbb{L}^1$, $e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)$ est nulle presque partout, donc f aussi, et $f=0$ dans $\mathbb{L}^2$! ∎

Cette base est formée de fonctions propres de la transformation de Fourier; plus précisément:

Proposition: $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\boxed{\hat{h}_\alpha=(2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|}h_\alpha}$

Preuve : On montre par récurrence que : $\widehat{k_\alpha} = (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|} k_\alpha$ (✱)

Comme $k_{\alpha+\varepsilon_j}(x) = \partial_j k_\alpha(x) - x_j k_\alpha(x)$, il vient, en supposant (✱), (cf. §2) :

$$\widehat{k_{\alpha+\varepsilon_j}}(x) = i x_j \widehat{k_\alpha}(x) - i\partial_j \widehat{k_\alpha}(x) = -i\left(\partial_j \widehat{k_\alpha}(x) - x_j \widehat{k_\alpha}(x)\right)$$
$$= (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|+1}\left(\partial_j k_\alpha(x) - x_j k_\alpha(x)\right) = (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha+\varepsilon_j|} k_{\alpha+\varepsilon_j}(x).$$

Et pour $\alpha = 0$ $\widehat{k_0}(x) = \widehat{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}(x) = (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (2\pi)^{n/2} k_0(x)$. ∎

> *Corollaire* : L'application $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme isométrique, de valeurs propres les racines quatrièmes de l'unité $\pm i, \pm 1$, diagonalisé dans la base des fonctions d'Hermite.

---

§4 LE THÉORÊME DE PALEY-WIENER

On a vu que $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$, $\mathcal{F}\mathcal{S}' = \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^2$. Mais il y a peu d'autres espaces de fonctions ou distributions dont on sache bien caractériser l'image par la transformation de Fourier (en particulier les $\mathcal{F}\mathbb{L}^p$ pour $p \neq 2$; cf. le théorême de Riemann-Lebesgue, au §2, pour $p = 1$). C'est pourtant le cas pour certains espaces de fonctions ou distributions à support compact. On donne ici le résultat pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}'$. On rappelle qu'une fonction entière est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}^n$. On note ici $\mathcal{E}'_R$ (resp. $\mathcal{D}_R$) pour $R > 0$ l'espace des distributions (resp. fonctions C^∞) à support compact contenu dans $\overline{B}(0,R)$. On utilisera qu'un élément de $\mathcal{E}'_R$ se laisse majorer par une semi-norme de $\mathcal{E}$ "portée par $\overline{B}(0,R)$", c'est-à-dire de la forme $p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{\overline{B}(0,R)} |\partial^\alpha \varphi|$. (cf. Remarque 1 du Ch. II §1, p. 17)

> *Théorême* ("de Paley-Wiener") : $\forall R > 0$
>
> (a) $\mathcal{F}\mathcal{D}_R \subset \mathcal{S}$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui se prolongent en fonctions entières $U(\xi)$ telles que
>
> (✱) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |U(\xi)| \le \dfrac{C_N}{(1+|\xi|)^N} e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$
>
> (b) $\mathcal{F}\mathcal{E}'_R \subset \mathcal{S}'$ est l'espace des fonctions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ qui se prolongent en fonctions entières $U(\xi)$ telles que
>
> (✱✱) $\exists N \in \mathbb{N}, C > 0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |U(\xi)| \le C(1+|\xi|)^N e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$

Commentaires : – Dans (✱) ou (✱✱), on peut écrire $(1+|\xi|^N)$ au lieu de $(1+|\xi|)^N$, ou encore le remplacer par $(1+|\mathrm{Re}\,\xi|)^N$ ou $(1+|\mathrm{Re}\,\xi|^N)$ (exercices !)

– Le (b) justifie la remarque (4) du §2 (p. 35), compte tenu de la deuxième proposition du §1 (p. 30).

– Ce théorême admet beaucoup de variantes, pour d'autres espaces de fonctions (comme $\mathbb{L}^2_R$) ; ou d'autres "bases" (d'autres groupes G que $\mathbb{R}^n$, par exemple $\mathbb{Z}^n$)

– Il est utile dans de nombreuses démonstrations, par exemple le théorême de Malgrange : tout o.d.l. à coefficients constants admet une solution élémentaire tempérée. On en donnera deux exemples d'application ci-dessous.

Preuve : (1) Soit $T \in \mathcal{E}'_R$; pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, la distribution (de la variable x) $T * e^{i\langle\xi,x\rangle}$ est une fonction C^∞ de la variable x, et aussi du paramètre ξ (cf. chap II, §3 et 4) : c'est la fonction $x \mapsto \langle T_y, e^{i\langle\xi,x-y\rangle}\rangle$, donc $(T * e^{i\langle\xi,x\rangle})(0) = \langle T_y, e^{-i\langle\xi,y\rangle}\rangle$ est une fonction C^∞, soit $U(\xi)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}$,
$\langle U(\xi), \varphi(\xi)\rangle = \langle\langle T_x, e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle, \varphi(\xi)\rangle = \langle T_x \otimes \varphi(\xi), e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle$
$= \langle T_x, \langle\varphi(\xi), e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle\hat{T}, \varphi\rangle$. Donc $\underline{\hat{T} = U}$

(2) Pour $\xi \in \mathbb{C}^n$, posons $U(\xi) = \langle T_x, e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle$. On obtient une fonction différentiable de ξ ; donc holomorphe dans $\mathbb{C}^n$, dont la restriction à $\mathbb{R}^n$ est $U = \hat{T}$: c'est donc l'unique prolongement de $\hat{T}$ à $\mathbb{C}^n$ en fonction entière.

(3) Comme $T \in \mathcal{E}'_R$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que
$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\partial^\alpha \varphi|$.

En particulier : $|U(\xi)| \le C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\partial^\alpha e^{-i\langle\xi,x\rangle}| = C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\xi^\alpha||e^{-i\langle\xi,x\rangle}|$

$\le C^{ste}(1+|\xi|)^N e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$, soit (**).

(4) Si de plus T est C^∞ (c'est-à-dire $T \in \mathcal{D}_R$), pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha T$ est une fonction continue à support dans $\bar{B}(0,R)$, d'où :
$|\xi^\alpha||U(\xi)| = |\xi^\alpha \langle T_x, e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle| = |\langle T_x, i^{|\alpha|}\partial_\alpha(e^{-i\langle\xi,x\rangle})\rangle|$
$= |\langle(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha T, e^{-i\langle\xi,x\rangle}\rangle| \le C^{ste} \sup_{\bar{B}(0,R)} |e^{-i\langle\xi,x\rangle}| \le C^{ste} e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$,

et en sommant ces inégalités sur tous les α pour $|\alpha| \le N$, il vient (*).

(5) Réciproquement, soit U une fonction entière vérifiant (*). $U|_{\mathbb{R}}$ est C^∞ et à décroissance rapide puisque, par la formule de Cauchy, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$,
$U^{(\alpha)}(z) = \dfrac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \displaystyle\int_{\prod_{i=1}^n \{|\xi_i - z_i| = \varepsilon\}} \frac{U(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{\alpha+\varepsilon}}$, avec $\varepsilon = (1,\dots,1)$, d'où $\sup|U^{(\alpha)}| \le C_\alpha \sup|U|$;

donc $U|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}$, et si l'on pose $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\xi,x\rangle} U(\xi)\,d\xi = \hat{U}^{-1}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il reste à montrer que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \bar{B}(0,R)$. Pour tout $t > 0$, le théorème des résidus permet d'écrire $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\xi+itx,x\rangle} U(\xi+itx)\,d\xi$, d'où
$|\varphi(x)| \le (2\pi)^{-n} e^{-t|x|^2}\int_{\mathbb{R}^n} |U(\xi+itx)|\,d\xi \le (2\pi)^{-n} e^{-t|x|^2} C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{Rt|x|}}{(1+|\xi|)^N}\,d\xi$ (d'après (*))
$\le C^{ste} e^{t|x|(R-|x|)}$, et si $|x| > R$, ceci tend vers 0 quand $t \to +\infty$, donc $\varphi(x) = 0$, ce qui clôt la preuve du (a).

(6) Soit ρ_p la suite régularisante du chap I, §1. D'après (4), $\hat{\rho}_p$ se prolonge en fonction entière telle que :
(***) $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists C_N > 0\ \forall \xi \in \mathbb{C}^n\quad |\hat{\rho}_p(\xi)| \le \dfrac{C_N}{(1+|\xi|)^N} e^{\frac{1}{p}|\mathrm{Im}\,\xi|}$, puisque $\mathrm{supp}\,\rho_p \subset \bar{B}(0,\frac{1}{p})$

(7) Soit enfin U une fonction entière vérifiant (**). Sa restriction à $\mathbb{R}^n$ est une fonction C^∞ à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées d'après la formule de Cauchy (par la même majoration qu'au (5)), donc $U|_{\mathbb{R}^n}$ est une fonction tempérée, qui définit (§1, p.31) une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$. $\rho_p * T$ est une suite de fonctions C^∞ qui tend vers T faible-

ment quand $p \to \infty$. Mais $\widehat{\rho_p * T} = \hat{\rho}_p \hat{T} = \hat{\rho}_p U|_{\mathbb{R}^n}$ est une fonction entière telle que, d'après (**) et (***):

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists C'\ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |\hat{\rho}_p(\xi) U(\xi)| \leq \frac{C'}{(1+|\xi|)^N}\, e^{(R+\frac{1}{p})|\mathrm{Im}\,\xi|}$$

(il suffit de prendre $C' = C C_{N+N_0}$, où C et N_0 sont donnés par (**)).
D'après (5), ceci signifie que $\rho_p * T \in \mathcal{D}_{R+\frac{1}{p}}$. Comme $\rho_p * T \to T$ faiblement, ceci implique $\mathrm{supp}\, T \subset \bar{B}(0,R)$, d'où le (b). ■

<u>Corollaire 1</u>: <u>Toute distribution à support compact est une combinaison linéaire de dérivées (au sens des distributions) de fonctions continues ; donc aussi une dérivée d'une fonction continue.</u>

Preuve: Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{T}$ est une fonction tempérée par le théorème de P.W. En particulier $\exists N \in \mathbb{N}, C > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $|\hat{T}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N$. Posons $V(\xi) = \frac{\hat{T}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{N'}}$; Pour N' assez grand ($> N + \frac{n}{2}$), $V \in \mathbb{L}^1$, et c'est donc la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction continue f (théorème de Riemann-Lebesgue, §1). De $(1+|\xi|^2)^{N'} V(\xi) = \hat{f}(\xi)$, on déduit par $\mathcal{F}^{-1}$: $T = (1-\Delta)^{N'} f$, où Δ est l'opérateur de Laplace, $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$, d'où la première assertion. La deuxième s'en déduit en remarquant que les primitives (partielles) d'une fonction continue sont continues; T est donc la dérivée d'ordre $(2N', 2N', \dots, 2N')$ d'une fonction continue. ■

<u>Corollaire 2</u>: <u>Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut s'écrire $T = T_+ + T_-$, avec $T_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\, T_+ \subset [0,+\infty[$ et $\mathrm{supp}\, T_- \subset]-\infty, 0]$.</u>

Preuve: Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\alpha \equiv 1$ au voisinage de l'origine. Visiblement, $1 - \alpha = \alpha_+ + \alpha_-$, avec $\alpha_\pm \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\,\alpha_+ \subset]0,+\infty[$, $\mathrm{supp}\,\alpha_- \in]-\infty, 0[$. Comme $\alpha T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe un o.d.l. à coefficients constants $P(\partial)$, par le corollaire 1, et une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, tels que $\alpha T = P(\partial) f$. Comme $\chi_{[0,+\infty[} f$ et $\chi_{]-\infty,0[} f$ sont dans $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ et de somme f, on peut écrire

$$T = \alpha T + \alpha_+ T + \alpha_- T = \underbrace{\{P(\partial)(\chi_{[0,+\infty[} f) + \alpha_+ T\}}_{T_+} + \underbrace{\{P(\partial)\chi_{]-\infty,0[} f + \alpha_- T\}}_{T_-}. \ ■$$

<u>Remarques</u>: 1) Une telle décomposition n'est certes pas unique: on peut "déplacer" de T_+ à T_- une distribution portée par $\{0\}$, donc de la forme $\sum_{\alpha \leq m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

2) Les généralisations du corollaire 2 sont évidentes, à tout découpage de supp$T$ en intervalles fermés, deux à deux d'intersection d'intérieur vide.

3) Le corollaire 2 se généralise aussi clairement à plusieurs variables, en découpant supp$T$ en morceaux limités par des hypersurfaces lisses par morceaux....

4) Le corollaire 1 signifie (utiliser une partition de l'unité pour localiser), qu'à force de dériver les fonctions continues (au sens des distributions!), on obtient <u>toutes</u> les distributions !

§5 DISTRIBUTIONS SUR LE TORE

Le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ est un groupe-quotient de $\mathbb{R}^n$, compact puisque c'est l'image de $[0,2\pi]^n$ par la projection canonique $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n$ (il est bien sûr muni de la topologie-quotient). Il est d'usage de noter $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ la "variable" déduite de la variable canonique x de $\mathbb{R}^n$ (modulo 2π). Si $\theta_0 \in \mathbb{T}^n$ $V_{\theta_0} = \{\theta \in \mathbb{T}^n \mid \forall j=1,\dots,n,\ \theta_j - \theta_{0,j} \notin \pi\mathbb{Z}\}$, et $\pi(\tilde{\theta}_0)=\theta_0$, π est un difféomorphisme de $U_{\tilde{\theta}_0} = \prod_{1}^{n}]\tilde{\theta}_0-\pi, \tilde{\theta}_0+\pi[$ sur V_{θ_0} ; un choix de $(n+1)$ V_{θ_0} convenables donne un atlas de cartes de la variété $\mathbb{T}^n$, qui permet de définir toutes les notions locales (fonctions continues, C^k, C^∞, distributions, ...) sur $\mathbb{T}^n$. Elles coïncident avec les mêmes notions sur $\mathbb{R}^n$ via π : par exemple $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \Leftrightarrow f\circ\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$...

On notera encore, pour $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\partial_j f = \frac{\partial}{\partial\theta_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\pi)$ (cette dernière, périodique, définit $\partial_j f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$; et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\circ\dots\circ\partial_n^{\alpha_n}$ pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\alpha\in\mathbb{N}^n$.

Un o.d.l. linéaire sur le tore est de la forme $P(\theta,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(\theta)\partial^\alpha$, où les a_α sont $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Enfin $\mathbb{T}^n$ est muni de sa "mesure de Haar" canonique $d\theta$:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)d\theta = (2\pi)^{-n}\int_{a_1}^{a_1+2\pi}\int_{a_2}^{a_2+2\pi}\cdots\int_{a_n}^{a_n+2\pi}(f\circ\pi)(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

pour laquelle la fonction 1 est "de masse" 1 : $\int_{\mathbb{T}^n} d\theta = 1$

On définit alors les espaces $\mathbb{L}^p(\mathbb{T}^n)$ ... et ce sont toujours des espaces de Banach, $\mathbb{L}^2$ étant même de Hilbert.

Comme $\mathbb{T}^n$ est compact, $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$: c'est l'espace des fonctions C^∞ sur le tore, muni de la topologie (métrisable complète) engendrée par les semi-normes $p_\alpha(f) = \sup_{\mathbb{T}^n}|\partial^\alpha f|$ $(\alpha\in\mathbb{N}^n)$, ou encore $p_m(f) = \sum_{|\alpha|\le m}\sup|\partial^\alpha f|$ $(m\in\mathbb{N})$

Soit $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) = \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ son dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ majorées par Cp_m, pour $C>0$, et appelées <u>distributions</u> sur le tore. On montre, comme sur $\mathbb{R}^n$ (chap. I) que tout o.d.l. différentiel linéaire est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, d'où en posant, pour $T\in\mathcal{S}'$, $\varphi\in\mathcal{S}$ $\langle PT,\varphi\rangle = \langle T, {}^tP\varphi\rangle$, avec ${}^tP = \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\,\cdot)$, si $P=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(\theta)\partial^\alpha$, ce qui donne à $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ sa structure de $\mathcal{P}$-module (ch I, §4), et c'est encore un faisceau (ch. I, §5). De plus on a des injections continues et denses :

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)} = \underset{\text{(compacité)}}{\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{T}^n)} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n),$$

la dernière étant l'application $f \mapsto T_f$, avec $\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)\varphi(\theta)d\theta$ $(\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n))$.

Pour $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, on pose $f*g(\theta) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta-\theta')g(\theta')d\theta' = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta')g(\theta-\theta')d\theta'$ et clairement $P(\partial)(f*g) = (P(\partial)f)*g = f*(P(\partial)g)$

Si $S,T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ on définit $S\otimes T$ comme la seule distribution sur $\mathbb{T}^{2n}$ telle que: $\forall\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\langle S\otimes T, \varphi\otimes\psi\rangle = \langle S,\varphi\rangle\langle T,\psi\rangle$ et on montre que $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n})$, $\langle S\otimes T,\varphi\rangle = \langle S_\theta, \langle T_{\theta'},\varphi(\theta+\theta')\rangle\rangle = \langle T_{\theta'}, \langle S_\theta,\varphi(\theta+\theta')\rangle\rangle$ (cf. ch. II, § 3 et 4) ; enfin $S*T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ est définie par :

$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S_\theta\otimes T_{\theta'}, \varphi(\theta+\theta')\rangle$

Ce produit de convolution est <u>toujours</u> défini, commutatif, bilinéaire, et associatif, continu de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ (faiblement), généralise celui des fonctions qui est continu de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, admet la mesure de Dirac à l'origine $\delta=\delta_0$ comme élément neutre, et si $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\varphi * T$ est la fonction $C^\infty(\mathbb{T}^n)$: $\theta\mapsto\langle T_{\theta'}, f(\theta-\theta')\rangle$. En particulier l'image par π de la suite régularisante $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est toujours une suite régularisante qui tend vers δ faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, si bien que : $\forall T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\rho_p * T \xrightarrow[p\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\rho_p * T\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ est clairement une algèbre commutative unitaire pour la convolution. (Ouf !)

Toutes les preuves, analogues à celles sur $\mathbb{R}^n$ (chap. I et II), mais beaucoup plus faciles à cause de la compacité de $\mathbb{T}^n$, sont ici laissées en exercices.

Remarque : Il est utile de voir comment s'adaptent à un autre groupe topologique localement compact, $\mathbb{Z}^n$, les notions de distribution, convolution, ..., définies dans ce cours dans le cas de $\mathbb{R}^n$, puis brièvement de $\mathbb{T}^n$: comme $\mathbb{Z}^n$ est discret, on perd la notion de différentiabilité, et les compacts sont les parties finies ; enfin la "mesure de Haar" de $\mathbb{Z}^n$ est la somme des mesures de Dirac en chaque point. D'où :

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{E}(\mathbb{Z}^n)=\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\mid c_\alpha\in\mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{E}'(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\mid c_\alpha=0 \text{ sauf pour un nombre fini de } \alpha\}$$

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|c_\alpha|^p<\infty\}\ (1\le p<\infty),\ \text{et } \mathbb{L}^\infty(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|c_\alpha|<\infty\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \forall N\in\mathbb{N},\ \sup(1+|\alpha|^N)|c_\alpha|<\infty\}\ (\text{suites "à décroissance rapide"})$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \exists N\in\mathbb{N}, C>0\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n\ |c_\alpha|\le C(1+|\alpha|^N)\}\ (\text{"à croissance lente"})$$

Bien entendu, les différentes dualités entre ces espaces s'obtiennent toutes à l'aide du produit scalaire $\langle(c_\alpha),(c'_\alpha)\rangle=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}c_\alpha c'_\alpha$, et les injections suivantes sont toutes continues et denses par les topologies évidentes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^1(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^2(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^\infty(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{Z}^n)$$

Enfin le produit de convolution (non toujours défini) s'obtient par

$$(c_\alpha)*(c'_\alpha)=\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n}c_{\alpha-\beta}c'_\beta\Big)=\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n}c_\beta c'_{\alpha-\beta}\Big),\ \text{tandis que } (c_\alpha).(c'_\alpha)=(c_\alpha c'_\alpha).$$

Dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ ces deux produits sont commutatifs, associatifs, et continus.

(§6) LES SÉRIES DE FOURIER

Proposition : Les exponentielles imaginaires $\theta\xrightarrow{e_\alpha}e^{i\alpha.\theta}$, pour $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$

Preuve : $(e_\alpha,e_\beta)=\int_{\mathbb{T}^n}e^{i(\alpha-\beta).\theta}d\theta=\delta_{\alpha,\beta}$, et la famille est orthonormée.
Comme les e_α sont denses dans $C^0(\mathbb{T}^n)$ par le théorème de Stone-Weierstrass pour la norme uniforme, donc a fortiori dans $\mathbb{L}^2$, la famille est totale. ∎

Pour $f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$ et $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, on pose $\hat{f}(\alpha)=(f,e_\alpha)=\langle f,\bar{e}_\alpha\rangle=\langle f,e_{-\alpha}\rangle$.

Proposition : L'application $f\mapsto\hat{f}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{Z}^n)=\ell^2$: la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(\alpha)e_\alpha$ est convergente dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$, vers f, et $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|\hat{f}(\alpha)|^2=\|f\|^2_{\mathbb{L}^2}$. Enfin, pour $f,g\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$, on a :

$$(f,g)_{\mathbb{L}^2}=\int_{\mathbb{T}^n}f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(\alpha)\overline{\hat{g}(\alpha)}=(\hat{f},\hat{g})_{\ell^2}\quad(\text{formule "de Plancherel"})$$

Preuve : les deux premières assertions se déduisent de la proposition précédente, et la formule de Plancherel s'ensuit par "polarisation". ∎

Bien entendu on munit $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ de sa topologie d'espace métrisable complet (les semi-normes sont les sup des dérivées, puisque $\mathbb{T}^n$ est compact), et $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ de celle engendrée par les semi-normes qui le définissent : $p_N((c_\alpha)) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(1+|\alpha|^N)|c_\alpha|$.

Proposition : $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\theta}$ est convergente vers $f(\theta)$ absolument uniformément et même normalement, et se dérive terme à terme ; on l'appelle le "développement de f en série de Fourier."

Preuve : Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, $1\le j\le n$, $\alpha_j \hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} \alpha_j f(\theta) e^{-i\alpha.\theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}^n} i\partial_j f(\theta) e^{-i\alpha.\theta} d\theta$, d'où en itérant, pour $\beta\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha^\beta||\hat{f}(\alpha)| \le \sup |\partial^\beta f|$, et finalement $(1+|\alpha|^N)|\hat{f}(\alpha)| \le c^{ste} \sum_{|\beta|\le N} \sup|\partial^\beta f|$, d'où la continuité. Inversement, si (c_α) est une suite à décroissance rapide, la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{T}^n$, donc vers une fonction continue $f(\theta)$, et c'est encore vrai de toutes les séries dérivées (terme à terme), donc $f \in C^\infty$, et
$$\sum_{|\beta|\le N} \sup|\partial^\beta f| \le \sum_{\substack{|\beta|\le N\\ \alpha\in\mathbb{Z}^n}} |\alpha^\beta c_\alpha| \le c^{ste}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}}\Big) \cdot \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|)^{n+N}|c_\alpha|. \ ∎$$

Remarques : Le "produit de convolution" naturel sur $\mathbb{Z}^n$ est le "produit de Cauchy" : $(c_\alpha)(c'_\alpha) = \Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha-\beta} c'_\beta\Big)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$; il est bilinéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\times\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, et pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, on vérifie aisément que
$$\forall\alpha\in\mathbb{Z}^n \ \boxed{\widehat{f*g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)\hat{g}(\alpha) \quad \text{et} \quad \widehat{fg}(\alpha) = (\hat{f}(\cdot)) * (\hat{g}(\cdot))_\alpha}$$
Enfin, on a déjà utilisé que, pour $\beta\in\mathbb{N}^n$, $\boxed{\widehat{\partial^\beta f}(\alpha) = (i\alpha)^\beta \hat{f}(\alpha)}$

On définit alors les "coefficients de Fourier" d'une distribution :

Théorème : L'application $T \mapsto (\hat{T}(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ définie par $\hat{T}(\alpha) = \langle T_\theta, e^{-i\alpha.\theta}\rangle$ est un isomorphisme faible de $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, qui prolonge ceux de $\mathcal{S}$ et de L^2, et d'inverse : $(c_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$, la série convergeant faiblement. L'identité $T_\theta = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{T}(\alpha) e^{i\alpha\theta}$ est le "développement de T en série de Fourier."

Preuve : Si $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$, tels que pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ $|\langle T,\varphi\rangle| \le C\sum_{|\beta|\le m} \sup|\partial^\beta\varphi|$; en particulier $|\hat{T}(\alpha)| \le C\sum_{|\beta|\le m}\sup|(-i\alpha)^\beta e^{-i\alpha\theta}| \le c^{te}(1+|\alpha|)^m$, donc $\hat{T}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$; si réciproquement (c_α) est à croissance lente, et qu'on pose, pour $N\in\mathbb{N}$ $T_N = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$, $T_N \in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, et pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$,
$\langle T_N,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le N}\int_{\mathbb{T}^n} c_\alpha e^{i\alpha\theta}\varphi(\theta)d\theta = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha\hat{\varphi}(-\alpha)$; comme $(c_\alpha)\in\mathcal{S}'$ et $(\hat{\varphi}(-\alpha))\in\mathcal{S}$, la série $\sum c_\alpha\hat{\varphi}(-\alpha) = \langle T,\varphi\rangle$ définit une forme linéaire T, limite faible de

T_N, et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, puisque $\left|\sum_\alpha c_\alpha \hat{\varphi}(-\alpha)\right| \leq C \sum_\alpha (1+|\alpha|^N)|\hat{\varphi}(-\alpha)|$ pour certains $C>0$, $N \in \mathbb{N}$, et donc $\leq C\left(\sum_\alpha \frac{1+|\alpha|^N}{(1+|\alpha|)^{N+n+1}}\right) \sup\{(1+|\alpha|)^{N+n+1}|\hat{\varphi}(-\alpha)|\}$

$$\leq C^{ste} \sup_{|\beta| \leq N+n+1} \sum \sup |\partial^\beta \varphi|$$

Enfin $\hat{T}(\alpha) = \langle T, e^{-i\alpha.\theta}\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \sum_{|\beta|\leq N} c_\beta e^{i\beta.\theta}, e^{-i\alpha.\theta}\rangle = c_\alpha$

La continuité faible, dans les deux sens, se déduit aussitôt du calcul suivant. ∎

Formule "de Plancherel" : $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\boxed{\langle \hat{T}, \hat{\varphi}\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle}$

Preuve: $\langle T, \check{\varphi}\rangle = \langle \sum_\alpha \hat{T}(\alpha) e^{i\alpha.\theta}, \check{\varphi}(\theta)\rangle = \sum_\alpha \hat{T}(\alpha) \langle e^{i\alpha.\theta}, \varphi(-\theta)\rangle$

$= \sum_\alpha \hat{T}(\alpha) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\alpha.\theta} \left(\sum_\beta \hat{\varphi}(\beta) e^{-i\beta.\theta}\right) d\theta = \sum_\alpha \hat{T}(\alpha) \sum_\beta \hat{\varphi}(\beta) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\alpha-\beta).\theta} d\theta = \sum_\alpha \hat{T}(\alpha)\hat{\varphi}(\alpha)$

$= \langle \hat{T}, \hat{\varphi}\rangle$. ∎

Remarques et exemples: 1) Bien entendu une série de Fourier faiblement convergente se dérive aussi terme à terme, d'où: $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ $\boxed{\widehat{\partial^\beta T}(\alpha) = (i\alpha)^\beta \hat{T}(\alpha)}$

2) Le produit de convolution est toujours bien défini sur $\mathbb{T}^n$ (compacité) et on a $\forall S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^n$ $\boxed{\widehat{S*T}(\alpha) = \hat{S}(\alpha)\hat{T}(\alpha)}$

Preuve: $\widehat{S*T}(\alpha) = \langle S*T, e^{-i\alpha.\theta}\rangle = \langle S_\theta, \langle T_{\theta'}, e^{-i\alpha(\theta+\theta')}\rangle\rangle$

$= \langle S_\theta, \langle T_{\theta'}, e^{-i\alpha.\theta'}\rangle e^{-i\alpha.\theta}\rangle = \hat{S}(\alpha)\hat{T}(\alpha)$. ∎

3) $\boxed{\hat{\delta}(\alpha) = 1 \; ; \; \widehat{\delta^{(\beta)}}(\alpha) = (i\alpha)^\beta \; ; \; \widehat{\delta_{\theta_0}}(\alpha) = e^{-i\alpha.\theta_0}}$ (pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$; $\beta \in \mathbb{N}^n$; $\theta_0 \in \mathbb{T}^n$)

$\boxed{\hat{1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \; ; \; \widehat{e^{i\alpha_0\theta}}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha_0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$ $(\forall ..)$

4) Que devient le "théorème de Riemann-Lebesgue sur $\mathbb{T}^n$ et sur $\mathbb{Z}^n$?

— Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)$, $\hat{f}(\alpha) \xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{} 0$ (exercice d'intégration!)

— Si $\sum_\alpha |c_\alpha| < \infty$, $\sum c_\alpha e^{i\alpha.\theta} = f(\theta) \in C^0(\mathbb{T}^n)$ (convergence uniforme).

5) Écriture "trigonométrique": Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{T})$, et $T_\theta = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$, on peut récrire: $T = c_0 + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*} \underbrace{(c_\alpha + c_{-\alpha})}_{a_\alpha} \cos\alpha.\theta + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*} \underbrace{i(c_\alpha - c_{-\alpha})}_{b_\alpha} \sin\alpha.\theta$,

où les familles (b_α) et (a_α) sont à croissance lente, et les séries faiblement convergentes (ou mieux, si $T \in \mathbb{L}^2$ ou $T \in \mathcal{S}$....), et la réciproque est aussi claire. On observera que $c_0 = \langle T_\theta, 1\rangle$, $a_\alpha = \langle T_\theta, 2\cos\alpha.\theta\rangle$ et $b_\alpha = \langle T_\theta, 2\sin\alpha.\theta\rangle$ pour $\alpha \neq 0$; en particulier si $T = T_f$, avec $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)$, on a $c_0 = \int_{\mathbb{T}} f(\theta)d\theta$, $a_\alpha = 2\int_{\mathbb{T}} f(\theta)\cos\alpha.\theta \, d\theta$, $b_\alpha = 2\int_{\mathbb{T}} f(\theta)\sin\alpha.\theta \, d\theta$, et $|a_\alpha|, |b_\alpha| \xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{} 0$ (encore "Riemann-Lebesgue"!). Mais la convergence ponctuelle des séries de Fourier est un vieux sujet classique et délicat: même si f est continue, elle n'est pas en général la somme de sa série de Fourier! Bien sûr, les distributions servent ici à voiler, plutôt qu'à résoudre, des problèmes d'analyse fine.

(L'hypothèse $n=1$ faite ici n'est pas essentielle)

On ne citera ici (sans preuve) que le résultat le plus classique (on trouvera un autre énoncé en exercice), en dimension 1 :

Théorème ("de Jordan") : Si f est à variation bornée sur le tore (c'est-à-dire localement somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante !) et par suite $L^1_{loc}(\mathbb{T})$, sa série de Fourier $\sum_{\alpha} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\cdot\theta}$ est convergente en tout point vers la demi-somme de ses limites à gauche et à droite.

6) L'écriture "trigonométrique" des séries de Fourier rend plus claires certaines discussions ; par exemple :

T paire $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, b_\alpha = 0$; T impaire $\Leftrightarrow c_0 = 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, a_\alpha = 0$

T réelle $(T = \bar{T}) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, a_\alpha$ et $b_\alpha \in \mathbb{R}$; et $c_0 \in \mathbb{R}$ ....

§7 LIEN AVEC LES DISTRIBUTIONS PÉRIODIQUES

On appelle ici périodique une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui a un système complet de périodes (contenant une base de $\mathbb{R}^n$) ; par une transformation affine, on peut alors se ramener au cas où son groupe de périodes contient $2\pi\mathbb{Z}^n$, ce qu'on suppose dans la suite.

Proposition : Toute distribution périodique est tempérée

Preuve : Notons $P(x,a)$ le pavé $\prod_{j=1}^{n}]x_j - \frac{a}{2}, x_j + \frac{a}{2}[$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $a > 0$.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ périodique, et $C > 0, m \in \mathbb{N}$ tels que, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} \psi \subset P(0,4\pi)$, on ait $|\langle T, \psi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \psi|$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \bar{P}(0, 2\pi N)$. Quand x_0 parcourt l'ensemble fini $E = (2\pi\mathbb{Z}^n) \cap \bar{P}(0, 2\pi(N+2))$, les pavés $P(x_0, 4\pi)$ forment un recouvrement ouvert de $\operatorname{supp}\varphi$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\operatorname{supp} \chi \subset P(0,4\pi)$ et $\sum_{x_0 \in 2\pi\mathbb{Z}^n} \tau_{x_0}\chi \equiv 1$ (il suffit de choisir $\tilde{\chi}$ valant 1 sur $\bar{P}(0,2\pi)$, puis de poser $\chi = \tilde{\chi}\left(\sum \tau_{x_0}\tilde{\chi}\right)^{-1}$) La fonction $\sum_{x_0 \in E} \tau_{x_0}\chi$ vaut alors 1 au voisinage de $\operatorname{supp}\varphi$, et par suite

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle T, (\tau_{x_0}\chi)\varphi\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle \tau_{-x_0} T, \chi(\tau_{-x_0}\varphi)\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle T, \chi(\tau_{-x_0}\varphi)\rangle,$$

et comme $\operatorname{supp} \chi(\tau_{-x_0}\varphi) \subset P(0, 4\pi)$, il vient :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \sum_{x_0 \in E} C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha(\chi \cdot \tau_{-x_0}\varphi)| \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{x_0 \in E} \sup_{P(x_0, 4\pi)} |\partial^\alpha \varphi|$$

Si $|x_0| > 4\pi n$, on a $\inf_{x \in \bar{P}(x_0, 4\pi)} |x| \geq (|x_0| - 2\pi\sqrt{n}) \geq \frac{|x_0|}{2}$, d'où

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \left[\left(\sum_{\substack{x_0 \in E \\ |x_0| \leq 4\pi n}} \sup |\partial^\alpha \varphi| + \left\{ \sum_{\substack{x_0 \in E \\ |x_0| > 4\pi n}} \left(\frac{|x_0|}{2}\right)^{-n-1} \right\} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(|x|^{n+1} |\partial^\alpha \varphi(x)|\right) \right],$$

majoration qui montre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème : La transformation de Fourier est bijective de l'espace des distributions périodiques sur l'espace des combinaisons linéaires (∞) de mesures de Dirac aux points entiers, $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \delta_\alpha$, dont la famille (c_α) des coefficients est à croissance lente.

Preuve : Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ périodique : pour $1\le j\le n$ on a $\tau_{2\pi\varepsilon_j}T=T$, pour $\varepsilon_j=(0\ldots 0,1,0\ldots 0)$, donc $\hat{T}_\xi = e^{-2i\pi\xi_j}\hat{T}_\xi$; de $(e^{-2i\pi\xi_j}-1)\hat{T}=0$, on déduit $\operatorname{supp}\hat{T}\subset\mathbb{Z}^n$.

Soit $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n$ tel que $U\cap\mathbb{Z}^n=\{\alpha\}$, et $\varphi\in\mathcal{D}(U)$; pour $1\le j\le n$, $\langle(\xi_j-\alpha_j)\hat{T},\varphi\rangle = \langle(e^{-2i\pi\xi_j}-1)\hat{T},\frac{(\xi_j-\alpha_j)\varphi}{e^{-2i\pi\xi_j}-1}\rangle=0$, donc $(\xi_j-\alpha_j)\hat{T}|_U=0$, et on conclut que $\hat{T}|_U$ est proportionnelle à δ_α par le lemme p. 34.

Inversement, pour toute famille de nombres complexes $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$, la série $\sum c_\alpha\delta_\alpha$ est faiblement convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, mais sa somme T n'est tempérée que si les (c_α) sont à croissance lente : sinon une sous-suite $(c_{\alpha_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini assez vite pour qu'on puisse construire une fonction de $\mathcal{S}$ valant $(c_{\alpha_j})^{-1}$ aux points α_j. Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont faiblement continues, $\mathcal{F}^{-1}T=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(2\pi)^{-n}c_\alpha e^{i\alpha x}$ est encore une série faiblement convergente, donc vers une distribution périodique. ∎

Notons $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions périodiques, muni de la topologie induite ; clairement $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)\overset{\tau}{\rightrightarrows}\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$

Proposition : L'application $\sigma:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$, définie par $\sigma(\varphi)=\sum_{\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}^n}\tau_\alpha\varphi$ est linéaire continue et surjective. La transposée ${}^t(\tau\circ\sigma):\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une injection faiblement continue, d'image le sous-espace $\mathcal{D}'_p(\mathbb{R}^n)$ des distributions périodiques

Preuve : Chaque point de $\mathbb{R}^n$ ne rencontre les supports que d'un nombre fini de $\tau_\alpha\varphi$, et toujours le même, d'où $\sup|\partial^\alpha\sigma(\varphi)|\le C^{te}\sup|\partial^\alpha\varphi|$
Pour la surjectivité, on peut utiliser la même fonction χ que dans la preuve de la première proposition du paragraphe (p. 45) : si $\psi\in\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$, $\psi=\left(\sum_{\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}^n}(\tau_\alpha\chi)\right)\psi=\sum_{\alpha\in2\pi\mathbb{Z}^n}\tau_\alpha(\chi\psi)=\sigma(\chi\psi)$. Le reste est à peu près clair ! ∎

Remarque : A l'aide des identifications précédentes, on peut confondre les notions de développement en série de Fourier des fonctions et distributions sur le tore, avec les mêmes développements des fonctions et distributions périodiques sur $\mathbb{R}^n$, issus du théorème ci-dessus.

§8 THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1) Utiliser la transformation de Fourier pour démontrer :
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \{\exists \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \psi' = \varphi\} \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$

2) Donner des énoncés précis confirmant l'adage : « la transformation de Fourier échange les propriétés de régularité et de décroissance à l'infini ».

3) Calculer la transformée de Fourier de $x \overset{f}{\mapsto} e^{-|x|} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, puis celles de $\frac{1}{1+x^2}$, et $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$; en déduire $(e^{-|x|})^{*n}$
Montrer que $f - f'' = 2\delta$, et trouver $F_n \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ solution élémentaire de $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^n$

4) Calculer, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ les transformées de Fourier de $\chi_{[a,b]}$ et de sa dérivée, puis celles de $\sin x$ et $\cos x$. Comment calculer celles de $\sin^p x$ et $\cos^p x$ $(p \in \mathbb{N})$

5) Montrer, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $\hat{\check{T}} = \check{\hat{T}} = \bar{\hat{T}} = \hat{\bar{T}}$
a) En déduire les parties paire et impaire, réelle et imaginaire de $\hat{T}$ en fonctions de celles de T.
b) Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une matrice inversible. Calculer $\widehat{\varphi \circ A}$ en fonction de $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Même question pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

6) Montrer, pour $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, que $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\widehat{S*T} = \hat{S}\hat{T}$
En déduire que si $T \in \mathcal{E}'$ et $P(\partial)$ est un o.d.l. non nul à coefficients constants, $P(\partial)T = 0 \Rightarrow T = 0$.

7) On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est <u>homogène</u> de degré $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\lambda > 0$
$T_{\lambda x} = \lambda^a T_x$ (cf. ch. II, §2 pour $T_{\lambda x}$)
a) Montrer que si T est homogène de degré a, elle est solution de "l'équation d'Euler" $xT' - aT = 0$. En déduire que $T|_{\mathbb{R}^*}$ est C^∞, puis que T est tempérée.
b) Montrer que si T est homogène de degré a, $\hat{T}$ l'est de degré $-a-1$. Et T' ?
c) Vérifier que H, δ, $\delta^{(a)}$ et $Pf\frac{1}{x^n}$ sont homogènes ; de quel degré ?
d) Et sur $\mathbb{R}^n$?

8) a) Utilisant les résultats du (5) et du (7), calculer les transformées de Fourier de $vp\frac{1}{x}$ (remarquer que $x \cdot vp\frac{1}{x} = 1$), puis de H ; de même celles de xH et de $Pf\frac{1}{x^2}$
b) Si $T_\varepsilon = H(x)e^{-\varepsilon x}$ $(\varepsilon > 0)$, montrer que $T_\varepsilon \to H$ faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
Calculer $\widehat{T_\varepsilon}$, puis $\widehat{T_\varepsilon^{*n}}$. En déduire $\widehat{H^{*n}}$ et $\widehat{Pf\frac{1}{x^n}}$
c) Soit R une fraction rationnelle d'une variable. On rappelle que $Pf R = \frac{1}{2}(R(x+i0) + R(x-i0))$. Expliquer comment calculer la transformée de Fourier des distributions associées à R.

9) Calculer $\widehat{\sin|x|}$ et $\widehat{\frac{\sin x}{x}}$. (Penser à une équation différentielle, ou à $\lim_{\varepsilon \to 0} \sin|x| e^{-\varepsilon|x|}$, par exemple)

10) Calculer $(\sqrt{|x|})'$, $x.(\sqrt{|x|})'$, puis $\widehat{\sqrt{|x|}}$.

10) On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}$, et $g(x) = -x^3 f(x)$

a) Montrer que f est intégrable et continue, que $g \in \mathcal{S}'$ et calculer $\hat{g}$.

b) Quelle équation différentielle vérifie $\hat{f}$? En trouver une solution F, particulière, à support dans $[-1,1]$.

c) Montrer que $\hat{f} = F$ (directement, ou parce que f est continue)

11) a) Montrer que les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solutions de $T' + 2\lambda x T = 0$ (pour $\lambda \in \mathbb{C}$) sont toutes tempérées si et seulement si $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$

b) Quelle équation différentielle vérifie alors $\hat{T}$?

c) Calculer $\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2})$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ d) Calculer $\mathcal{F}(e^{ix^2})$

e) Calculer $\mathcal{F}(e^{-(x^2+y^2)+2iy})$ (qui est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$).

12) a) Démontrer l'inégalité "de Hölder" : $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$
$f * g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et : $(*)$ $\|f*g\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} \|g\|_{\mathbb{L}^2}$ (d'abord $f \in \mathcal{S}$ ...)

b) Démontrer que cette inégalité n'est pas en général optimale pour f fixée : $\exists f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup\limits_{\substack{g \in \mathbb{L}^2 \\ \neq 0}} \frac{\|f*g\|_{\mathbb{L}^2}}{\|g\|_{\mathbb{L}^2}} < \|f\|_{\mathbb{L}^1}$
(prendre $n=1$ et $f = x e^{-\frac{x^2}{2}}$)

13) Les "convoluteurs" de $\mathcal{S}'$: on appelle ainsi tout opérateur $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ faiblement continu, qui commute aux translations : $\forall a \in \mathbb{R}, T \in \mathcal{S}' : A(\tau_a T) = \tau_a A(T)$

a) Soit A un convoluteur, et $\hat{A} = \mathcal{F}^{-1} \circ A \circ \mathcal{F}$. Montrer que
$\forall T \in \mathcal{S}'$, $\forall a \in \mathbb{R}$ $\hat{A}(e^{ia\xi} T_\xi) = e^{ia\xi}(\hat{A}T)_\xi$

b) Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, montrer que $\frac{e^{ia\xi} - 1}{ia} \varphi(\xi) \to \varphi(\xi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quand $a \to 0$
En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{S}'$ $\hat{A}(\xi^p T_\xi) = \xi^p (\hat{A}T)_\xi$

c) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists \lambda(a) \in \mathbb{C}$: $\hat{A}\delta_a = \lambda(a)\delta_a$ (remarquer que $(\xi - a)\delta_a = 0$)

d) Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction quelconque, telle que $f(h)\delta_{a+h} \to f(0)\delta_a$ quand $h \to 0$ ($a \in \mathbb{R}$ donné), faiblement dans $\mathcal{S}'$. Montrer que f est continue en 0.

e) Déduire du lemme que la fonction λ définie au (c) est continue sur $\mathbb{R}$.

f) Montrer que $(\xi - a)\delta'_a = -\delta_a$, pour $a \in \mathbb{R}$. En déduire l'existence de $\mu(a) \in \mathbb{C}$ tel que $\hat{A}\delta'_a = \lambda(a)\delta'_a - \mu(a)\delta_a$

g) Utilisant le lemme, montrer que λ est dérivable, et $\mu(a) = \lambda'(a)$
Montrer par récurrence que λ est C^∞, et $\hat{A}(\delta_a^{(p)}) = \sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \lambda^{(j)}(a)\, \delta_a^{(p-j)}$

h) Montrer que $\hat{A}$ est la multiplication par λ : $T \mapsto \lambda T$. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que λ est à croissance lente.

i) En remarquant que $\lambda^{(p)} T = (\lambda^{(p-1)} T)' - \lambda^{(p-1)} T'$ pour $p \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{S}'$ montrer (par récurrence sur p) que λ est une fonction tempérée.

j) Réciproquement, si λ est une fonction tempérée, B la multiplication par λ, et $A = \mathcal{F} \circ B \circ \mathcal{F}^{-1}$, montrer que A est un convoluteur de $\mathcal{S}'$.

k) Montrer que la convolution par $\hat{\lambda}$ est définie et continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.
(Par exemple dès que $\lambda = R$ est une fraction rationnelle sans pôle réel)

l) Refaire tout cela à n variables.

m) Que dire des "convoluteurs" de $\mathcal{S}$, ou de $\mathbb{L}^2$??

14) Les développements d'Hermite des distributions tempérées

a) Démontrer les lemmes préliminaires suivants :

(1) Si $f \in L^2$ ainsi que toutes ses dérivées au sens des distributions, alors $f \in \mathcal{S}$ (montrer d'abord que $\hat{f} \in L^1$ ...)

(2) Si $(f_p) \to f$ et $(f_p') \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$; alors $g = f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(3) Si $(n^p a_n) \in \ell^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, (a_n) est à décroissance (on note $(a_n) \in \mathcal{s}$, et de même $\mathcal{s}'$ est l'espace des suites à croissance lente)

b) On rappelle que $(a_n) \overset{(*)}{\mapsto} \sum a_n h_n(x)$ est un isomorphisme de ℓ^2 sur $L^2(\mathbb{R})$.
Montrer que si $(a_n) \in \mathcal{s}$, $\sum a_n h_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et réciproquement.
Montrer que $(*)$ se restreint en un isomorphisme de $\mathcal{s}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour quelle topologie de $\mathcal{s}$?)

c) On appelle coefficients d'Hermite de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ les nombres

$$t_n = \langle T, h_n \rangle \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (t_n) est à croissance lente, et que la série $\sum t_n h_n$ est faiblement convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ et $a_n = \langle \varphi, h_n \rangle$, calculer $\langle T, \varphi \rangle$ en fonction des t_n et des a_n. En déduire que l'application $(t_n) \mapsto \sum t_n h_n$ est un isomorphisme faible de $\mathcal{s}'$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

d) On note $P_n(x)$ le n-ième polynôme d'Hermite : $P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$
Montrer les relations de récurrence : $P_{n+1}(x) - 2x P_n(x) + 2n P_{n-1}(x) \equiv 0$;
$P_{n+1}(x) = 2x P_n(x) - P_n'(x)$; d'où $P_n' = 2n P_{n-1}$; et $P_n''(x) - 2x P_n'(x) + 2n P_n(x) = 0$.
En déduire $h_n(0)$, puis $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx$.

e) Calculer les coefficients d'Hermite de $\hat{T}$ en fonction de ceux de $T = \sum t_n h_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Et ceux de $\check{T}$ et de $\overline{T}$? Et ceux de $\partial_\pm T = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm \partial) T$, et de $\Theta T = (\partial_- \circ \partial_+ + \partial_+ \circ \partial_-) T = (x^2 - \partial^2) T$?
Enfin ceux de xT et de T' ?

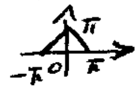
f) Calculer les développements d'Hermite de δ et de 1, puis des distributions de support $\{0\}$, et des fonctions polynômes.

g) Montrer qu'il existe quatre "projecteurs orthogonaux" $\pi_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ linéaires faiblement continus, pour $j = 0, 1, 2, 3$, tels que, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:
$T = \pi_0(T) + \pi_1(T) + \pi_2(T) + \pi_3(T)$ et $\check{\pi_j(T)} = (-1)^j \pi_j(T)$, $\widehat{\pi_j(T)} = \sqrt{2\pi}\,(-i)^j \pi_j(T)$,
$\pi_j^2 = \pi_j$, $\pi_j \circ \pi_k = 0$ pour $j \neq k$. Les calculer en fonction de $\wedge$, $\vee$ et $-$, puis calculer les coefficients des $\pi_j(T)$ en fonction de ceux de T.

h) Réécrire tout cela sur $\mathbb{R}^n$.

15) La "formule de Poisson" : $\boxed{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \delta_{2\pi\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} e^{i\alpha x}}$

(les deux séries convergeant faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)
La déduire des § 6 et 7. La retrouver en "fouriérisant" leur périodicité.
En déduire, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\alpha)$.
Est-ce vrai pour des φ un peu plus "générales" ?

16) Calculer la série de Fourier de la fonction périodique sur $\mathbb{R}$ dont voici le graphe sur $[-\pi,\pi]$:  . En déduire $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

17) Calculer les séries de Fourier des distributions périodiques qui valent $Sh\,\alpha x$ et $Ch\,\alpha x$ (sur $]-\pi,\pi[$) ; $\delta_{\theta_0}-\delta_{-\theta_0}$; δ_π

18) a) Développer en série de Fourier les fonctions qui valent x, et x^3 sur $[-\pi,\pi[$.
En déduire $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}$. Peut-on déduire ces développements de celui de δ_π ?

b) On pose $f(x)=\frac{1}{3}$ pour $0<x<\frac{\pi}{3}$, 0 pour $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{1}{3}$ pour $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$.
Trouver une série de Sinus et Cosinus qui converge vers f sur chacun de ces intervalles. Quelle est sa somme en $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$?
Retrouver ce développement en dérivant f au sens des distributions.

c) Construire la "courbe" d'équation $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin ny\,\cos nx}{n^3}=0$ (dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$)

19) En développant $e^{\alpha e^{2i\pi x}}$, prouver que $\int_0^1 e^{2\alpha\cos 2\pi x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}$ $(\alpha\in\mathbb{C})$
(Utiliser que les $e^{2i\pi nx}$ sont une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.)

20) Développer la fonction périodique qui vaut $Ch\,\lambda x$ sur $[-\pi,\pi]$, pour $\lambda\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ fixé. Peut-on retrouver ce développement en calculer $f''-\lambda^2 f$, où f est la fonction précédente.
En déduire une série de somme $\frac{Ch\,\pi\lambda}{Sh\,\pi\lambda}$; en intégrant, en déduire un développement en produit infini de la fonction $\lambda\mapsto Sh\,\lambda$.

21) Calculer le développement de Fourier de $|\sin^3 x|$. Le retrouver en calculant $(\partial^2+1)(\partial^2+9)|\sin^3 x|$.

22) On pose $f(x)=\log|\sin x|$. Montrer que $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et calculer sa dérivée au sens des distributions, notée $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$. Montrer que $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$ est périodique, impaire, et que $\sin x\cdot vp\,\mathrm{Cotg}\,x=\cos x$. En déduire le développement de Fourier de $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$. Résoudre dans $\mathcal{D}'_p(\mathbb{R})$ l'équation $\sin x\,T=\cos x$.
Et pour $\cos x\cdot T=\sin x$?

23) On considère dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T})$ l'équation : $(*)$ $S'-\lambda S=S_0$
avec $S_0\in\mathcal{S}'(\mathbb{T})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ donnés.

a) On suppose $\underline{\lambda\notin i\mathbb{Z}}$. Montrer que $(*)$ a une et une seule solution ; la calculer (sous forme de série) lorsque $S_0=\delta$.

b) Montrer que les solutions de $S'-\lambda S=0$ sur $\mathbb{T}-\{0\}\simeq\,]0,2\pi[$ (dans $\mathcal{D}'(]0,2\pi[)$) sont des fonctions localement intégrables, puis résoudre $(*)$ pour $S_0=\delta$ par prolongement à $\mathbb{T}$. Interpréter l'identité obtenue.

c) On suppose maintenant $\lambda=in_0$, avec $n_0\in\mathbb{Z}$. A quelle condition $(*)$ a-t-elle des solutions, et lesquelles ?

d) Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de $S\mapsto S'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T})$?

24) Une "équation aux différences finies" : Pour $(b_{p,q})\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$ trouver $(a_{p,q})\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$ telle que : $a_{p+1,q}+a_{p-1,q}+a_{p,q+1}+a_{p,q-1}-4\lambda a_{p,q}=b_{p,q}$ (pour $\lambda\in\mathbb{C}$)
(Interpréter comme une équation de division sur $\mathbb{T}^2$)

25) <u>E.d.p.l. à coefficients constants sur le tore</u>

Soit $P(\partial) = P(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta_n})$, où $P(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme.

On introduit les deux conditions :

(C) : $\exists m \in \mathbb{N}, C > 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n \quad \frac{1}{|P(i\alpha)|} \leq C(1+|\alpha|)^m$

(C') : P vérifie (C), sauf pour un nombre fini de valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

a) Démontrer : $\{P\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\} \Rightarrow (C) \Rightarrow \{P\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ et $P\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)\}$

b) Montrer que (C') caractérise les opérateurs "hypoelliptiques" ; c'est-à-dire :
$\forall S \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}, \quad PS = \varphi \Rightarrow S \in \mathcal{S}$

c) Si $n=1$, (C') est vraie pour tout $P \neq 0$.

d) Pour $n=2$, on considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_a = \frac{\partial}{\partial\theta_1} - a\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{i}{2}$

Montrer que P_a vérifie (C') si $a \in \mathbb{Q}$. Et (C) ?

((Montrer que P_a vérifie (C) si a est irrationnel algébrique !))

On pose maintenant $a = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^j}{k(j)}$, avec $k(0)=1$ et $k(j+1) = 2^{k(j)}$

Montrer que P_a ne vérifie ni (C) ni (C').

26) La convergence "facile" des séries de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^1)$ ne doit pas cacher la difficulté d'étude de leur convergence en des sens plus classiques. En voici des exemples. On dit que $f \in C^0(\mathbb{R})$, de période 2π est <u>à variation bornée</u>" si $\sum_{k=0}^{\ell} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ est borné indépendamment de la subdivision de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par les (x_k). (f est alors sur $\mathbb{R}$ la différence de deux fonctions croissantes, et en particulier $f \in \mathbb{L}^1_{loc}$, donc $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, même si $f \notin C^0$!)

a) Si f est à variation bornée, et $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$, montrer que $c_n = O(\frac{1}{n})$ (considérer la subdivision par les $\frac{k\pi}{n}$)

b) Mais $c_n \neq o(\frac{1}{n})$ en général : pour $x \in [0, 2\pi[$, si le développement en base trois de $\frac{x}{2\pi}$ s'écrit $0,\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\ell-1} 1 \dots$, avec $\varepsilon_j = 0$ ou 2, on pose $g(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$, puis on prolonge g par continuité à $[0, 2\pi[$, enfin on pose $f(x) = g(x) - \frac{x}{2\pi}$ pour $x \in [0, 2\pi[$, et $f(x+2k\pi) = f(x)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est continue et à variation bornée, mais que, pour $m \in \mathbb{N}$, $c_{3^m}(f) = \frac{1}{3^m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ix}dx\right) \neq 0$ et conclure.

c) Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \log n}$ est la série de Fourier d'une fonction <u>continue</u>, en montrant qu'elle est <u>uniformément</u> convergente sur $\mathbb{R}$ (raisonner séparément sur $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ et sur $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; sur le deuxième intervalle séparer $\sum_{N}^{N'-1} \frac{\sin nx}{n \log n}$ et $\sum_{N'}^{\infty}$ (id), avec $\frac{1}{N'} < x \leq \frac{1}{N'-1}$ et utiliser que pour $0 < x \leq \pi$, $|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq \frac{\pi}{x}$

d) Montrer que cependant cette série n'est <u>absolument</u> convergente en <u>aucun</u> point de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$! (Minorer $|\sin nx|$ par $\sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$)

CHAPITRE IV : LAPLACE, SOBOLEV, et DIRICHLET

§1 OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Définition : On dit qu'un opérateur différentiel linéaire $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, dont les coefficients a_α sont C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est elliptique (dans U) si et seulement si :

$$\forall x\in U\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n \quad \boxed{\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha=0 \Rightarrow \xi=0}$$

Théorème ("Régularité elliptique") : Un opérateur elliptique est hypoelliptique (d'où le nom "hypoelliptique" ; la récipruque étant fausse. La définition est donnée au chap II, §6 : p. 25)

On ne démontre ici ce théorème que dans le cas particulier important où l'opérateur P est à coefficients constants, et homogène : $P(\partial)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\partial^\alpha$, avec $m\in\mathbb{N}$ et des $a_\alpha\in\mathbb{C}$. C'est alors un corollaire de la proposition suivante, compte tenu du théorème du ch II, §6 (et de la remarque qui le suit) :

Proposition : Soit $P\neq 0$ un tel opérateur, elliptique. Il existe $E\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PE-\delta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $E|_{\mathbb{R}^n-\{0\}}\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n-\{0\})$.

Preuve : On peut évidemment supposer $m\geq 1$. Pour $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et $N\in\mathbb{N}$, la fonction $\partial^\alpha\left(\frac{1}{P^N(i\xi)}\right)$ est C^∞ hors de l'origine, et homogène de degré $-mN-|\alpha|$; de plus, comme P est elliptique, sa restriction à la boule unité est majorée en module par un nombre $c=c_{\alpha,N}>0$, d'où

$$(*)\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n-\{0\}\qquad \left|\partial^\alpha\left(\frac{1}{P^N(i\xi)}\right)\right|\leq c|\xi|^{-mN-|\alpha|}$$

Soit $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)\equiv 1$ pour $|\xi|\leq 1$, et posons $F(\xi)=\dfrac{1-\chi(\xi)}{P^N(i\xi)}$.
F est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, et $(*)$ pour $\alpha=0$ montre que $F\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ dès qu'on a choisi N assez grand : par le théorème de Riemann-Lebesgue, on a donc $F=\hat{f}$, pour une certaine fonction continue f. Mais $(*)$ implique aussi que $|(i\xi)^\alpha\partial^\alpha F(\xi)|\leq c|\xi|^{-mN}$ pour $|\xi|$ assez grand (là où χ est nulle), et $(i\xi)^\alpha\partial^\alpha F(\xi)$ est encore dans $\mathbb{L}^1$, de sorte que $\partial^\alpha((ix)^\alpha f(x))$ est continue, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et par suite f est C^∞ en dehors de l'origine. De plus

$$\widehat{P(\partial)^N f}=P(i\xi)^N F=1-\chi\ ,\ \text{donc}\ P(\partial)\{P(\partial)^{N-1}f\}=\delta-\varphi$$

où $\varphi=\mathcal{F}^{-1}(\chi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Posons $E=\psi\left(P(\partial)^{N-1}f\right)$, où $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\equiv 1$ au voisinage de l'origine. Il vient :

$PE-\delta=P\left[(\psi-1)P(\partial)^{N-1}f\right]-\varphi$ est C^∞ puisque $P(\partial)^{N-1}f$ l'est en dehors de l'origine. Comme E et δ sont à support compact, $PE-\delta\in\mathcal{D}$. ■

Cette preuve couvre en particulier les cas de "l'opérateur de Laplace" (1749-1827) sur $\mathbb{R}^n$, appelé laplacien et noté $\Delta=\sum_{i=1}^n\partial_i^2$, et de l'opérateur "de Cauchy-Riemann" sur $\mathbb{R}^2_{x,y}$, noté $\partial_{\bar z}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$, dont l'ellipticité est claire.

Mais la connaissance d'une "bonne" solution élémentaire explicite a d'autres applications que la "régularité" de l'opérateur (cf. Ch. II, §6)

On sait déjà que la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{\pi(x+iy)}$ est une solution élémentaire de $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ (cf. Ch II, §6, remarque 3, p.26, et ch. I, §7, ex.22)

Comme $\frac{1}{\pi z}$ est analytique sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ∂_z est hypoelliptique (d'ailleurs hypoelliptique analytique, et toute "distribution holomorphe" (c'est-à-dire dans le noyau de $\partial_{\bar z}$) dans un ouvert de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, y est en fait une <u>fonction holomorphe</u> au sens usuel.

Bien entendu l'opérateur $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ a des propriétés analogues: $\frac{1}{\pi \bar z}$ en est une solution élémentaire, et son noyau est formé des fonctions antiholomorphes.

Comme $4\partial_z\partial_{\bar z} = \partial_x^2 + \partial_y^2$, le laplacien, pour $n=2$, est hypoelliptique analytique; on en connait déjà la <u>solution élémentaire</u> $\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}$ (mêmes références que pour ∂_z, ci-dessus), et son noyau est formé des "fonctions harmoniques" (sommes d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe).

(§2) LAPLACIEN ET ROTATIONS

Le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est elliptique. On appelle <u>harmonique</u> toute distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $\Delta T = 0$, et c'est donc toujours une fonction C^∞ (et même analytique) dans U. Pour $n=3$, il intervient dans toutes les équations différentielles de base de la physique, pour décrire des phénomènes "stationnaires" c'est-à-dire des états d'équilibre (indépendants du temps).

<u>Lemme 1: ("laplacien radial")</u> <u>Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ ne dépend que de</u> $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, <u>alors Δf aussi</u>, et : $\boxed{\Delta f(r) = \dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \dfrac{(n-1)}{r}\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}}$

Preuve: De $r^2 = \sum x_i^2$ on tire $r\,dr = \sum x_i\,dx_i$, d'où $\frac{x_i}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n)$

Par suite: $\frac{\partial}{\partial x_j} f(r) = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r)\frac{x_j}{r}$, puis

$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(r) = \frac{f'(r)}{r} + x_j\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'\frac{x_j}{r} = \frac{1}{r}f'(r) + \frac{x_j^2}{r^2}f''(r) - \frac{x_j^2}{r^3}f'(r)$, et

$\Delta f(r) = \frac{n}{r}f'(r) + \frac{\sum x_j^2}{r^2}f''(r) - \frac{\sum x_j^2}{r^3}f'(r) = \frac{(n-1)}{r}f'(r) + f''(r)$. ∎

Ce lemme exprime une propriété d'<u>invariance par rotations</u> de Δ, qui est aussi invariant par réflexions, donc par tout le groupe orthogonal $O(n)$: changer x_i en $-x_i$ ne change pas Δ. (En physique, ceci exprime "l'isotropie" de l'espace). D'ailleurs l'opérateur transformé de Δ par Fourier est l'opérateur $T_\xi \longmapsto -|\xi|^2 T_\xi$, et $O(n)$ est justement le groupe d'invariance de la forme quadratique $|\xi|^2$!

Comme $O(n)$ est un groupe topologique compact il existe une mesure sur $O(n)$ invariante par translations à gauche et à droite: sa "mesure de Haar" dg, unique si on impose que $\int_{O(n)} dg = 1$.

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il vient alors (invariance + dérivation sous l'intégrale) :

$$(*) \quad \int_{O(n)} (\Delta_x f)(gx)\,dg = \int_{O(n)} \Delta_x(f(gx))\,dg = \Delta_x \int_{O(n)} f(gx)\,dg$$

Notons a_n l'aire de la sphère-unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, et ds sa "mesure de surface" (cf. ch I, §7, n°26) : on a $a_n = \int_{S^{n-1}} ds$, et par homogénéité $dx_1 \dots dx_n = r^{n-1}\,dr\,ds$

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, notons $\tilde{f}$ sa "moyenne sur les sphères" : $\tilde{f}(x) = \frac{1}{a_n}\int_{s \in S^{n-1}} f(|x|s)\,ds$ ($(r = |x|, s)$ est un "système de coordonnées sphériques" sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$)

Lemme 2 : $\boxed{\widetilde{\Delta f} = \Delta \tilde{f}}$

Preuve : Pour $g \in O(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(gx) = \tilde{f}(x)$, d'où $\tilde{f}(x) = \int_{O(n)} \tilde{f}(gx)\,dg$.
Mais $\int_{O(n)} f(gx)\,dg$ est constante sur chaque sphère, d'où

$\int_{O(n)} f(gx)\,dg = \widetilde{\int_{O(n)} f(gx)\,dg} = \int_{O(n)} \tilde{f}(gx)\,dg = \tilde{f}(x)$, et finalement, grâce à $(*)$:

$$\Delta \tilde{f}(x) = \Delta\left(\int_{O(n)} f(gx)\,dg\right) \underset{(Fubini)}{=} \int_{O(n)} \Delta f(gx)\,dg = \widetilde{\Delta f}(x). \blacksquare$$

Proposition : Pour $n > 2$, la fonction $E(r) = \frac{-1}{(n-2)a_n r^{n-2}}$ est une solution élémentaire du laplacien. (Pour $n = 2$, $E(r) = \frac{1}{2\pi}\log r$). Elle est localement intégrable, ainsi que sa dérivée, sur $\mathbb{R}^n$, et analytique sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Preuve : Seule la première assertion demande une preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} E(|x|)\,\Delta\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} E(r)\,\Delta\varphi(rs)\,r^{n-1}\,dr\,ds$$

$$= \int_0^{+\infty} a_n\,\widetilde{E(r)\,\Delta\varphi(r)\,r^{n-1}}\,dr = a_n\int_0^{+\infty} E(r)\,\Delta\tilde{\varphi}(r)\,r^{n-1}\,dr \quad \text{(par le lemme 2)}$$

$$= a_n\int_0^{+\infty} E(r)\left(\frac{d}{dr} + \frac{n-1}{r}\right)(\tilde{\varphi}'(r))\,r^{n-1}\,dr \quad \text{(par le lemme 1)}$$

$$= a_n\int_0^{+\infty} E(r)\,\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\tilde{\varphi}'(r)\right)dr = a_n\left\{\underbrace{\left[r^{n-1}\tilde{\varphi}(r)E(r)\right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ dès que } n>1} - \int_0^{+\infty} E'(r)\tilde{\varphi}'(r)\,r^{n-1}\,dr\right\}$$

$$= -\int_0^{+\infty}\tilde{\varphi}'(r)\,dr = \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \blacksquare$$

---

§3 LES ESPACES DE SOBOLEV (SUR $\mathbb{R}^n$)

Les distributions (même tempérées) fournissent le cadre théorique de la résolution des e.d.p. linéaires, mais en pratique, leurs solutions "intéressantes" sont "presque partout" plus ou moins régulières. C'est pourquoi on intercale entre $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{S}$ d'une part, $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{S}'$ d'autre part des échelles d'espaces emboîtés formés de fonctions de plus en plus régulières, et de distributions de plus en plus singulières.

L'échelle la plus fréquentée est dûe à Sobolev (1908 - ?)

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$.
H^s est "l'espace de Sobolev" d'indice s, sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques "faciles" : 1) Comme $\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1_{loc}$ (Cauchy-Schwarz), si $u \in H^s$, $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in \mathbb{L}^1_{loc}$, et par suite $\hat{u} \in \mathbb{L}^1_{loc}$ aussi.

2) H^s est en correspondance bijective linéaire naturelle avec $\mathbb{L}^2$, par $u \leftrightarrow \hat{u} \leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$; en particulier c'est un espace vectoriel !
Il en hérite sa structure d'espace de Hilbert, pour le produit scalaire $(u,v)_{H^s} = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\right)_{\mathbb{L}^2}$ qu'on notera $(u,v)_s$.
Notons que $H^0 = \mathbb{L}^2$

3) Pour tout $s < s'$, $H^{s'}$ est un sous-espace de H^s, et les injections $\mathcal{S} \hookrightarrow H^{s'} \hookrightarrow H^s$ sont continues et d'image dense

Preuves Si $u \in H^{s'}$, $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$,
d'où $H^{s'} \overset{i}{\hookrightarrow} H^s$ avec $\|i\| \leq 1$.
Si $\varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, et $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right) \left[\sup (1+|\xi|^2)^{\frac{s+n+1}{2}} |\hat{u}(\xi)|\right]^2$
donc $\mathcal{S}$ est contenu dans tous les H^s, avec des injections continues.
Enfin $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathbb{L}^2$, et si $\varphi_n \to u$ dans $\mathbb{L}^2$ ($\varphi_n \in \mathcal{S}, u \in \mathbb{L}^2$), $\hat{\varphi}_n \in \mathcal{S}$, $\hat{u} \in \mathbb{L}^2$ et $\hat{\varphi}_n \to \hat{u} \in \mathbb{L}^2$; donc $(1+|\xi|^2)^{-s}\hat{\varphi}_n(\xi) \to (1+|\xi|^2)^{-s}\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$, où $v \in H^s$ est quelconque. ∎

Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$, il l'est aussi dans tous les H^s, avec des injections continues.

4) Soit $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un o.d.l. à coefficients constants. Alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $P(\partial)$ est continu de H^s dans H^{s-m}

Preuve : Pour $u \in H^s$, $\int (1+|\xi|^2)^{s-m} |\widehat{P(\partial)u}(\xi)|^2 d\xi = \|P(\partial)u\|^2_{s-m}$
$\leq \int (1+|\xi|^2)^{s-m} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)|^2\right) d\xi \leq C^{ste} \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C\|u\|^2_s$. ∎

5) Posons $\Pi = 1 - \Delta : u \mapsto u - \Delta u$ (de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$). Alors Π^m est un isomorphisme de H^s sur H^{s-2m}, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$

Preuve : $|\widehat{\Pi^m u}(\xi)|^2 = (1+|\xi|^2)^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2$. ∎

6) Pour $s \geq 0$, on a d'après (3) des injections continues et denses :
$$\mathcal{S} \hookrightarrow H^s \hookrightarrow \mathbb{L}^2 \hookrightarrow H^{-s} \hookrightarrow \mathcal{S}'$$
En ce sens, H^s est un espace de fonctions (au moins $\mathbb{L}^2$, donc $\mathbb{L}^1_{loc}$, cf (1)) et H^{-s} est un espace de distributions (mieux que tempérées) ; d'ailleurs chacun s'identifie au dual de l'autre (par le théorème de représentation de Riesz), au moyen de la forme sesquilinéaire $H^s \times H^{-s} \to \mathbb{C}$ définie par $(u,v)_{\pm s} = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}\right)_{\mathbb{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$
qui, à une conjugaison près, n'est autre que le produit scalaire entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$: si $\varphi \in \mathcal{S} \subset H^s$ et $T \in H^{-s} \in \mathcal{S}'$, $(\varphi, T)_{\pm s} = \langle \varphi, \overline{T} \rangle$.

7) On peut préciser la remarque précédente pour les valeurs entières de s :

Proposition : Pour $m \in \mathbb{N}$, H^m est l'espace des fonctions $\mathbb{L}^2$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$, au sens des distributions sont encore dans $\mathbb{L}^2$

Preuve : Si $u \in H^m$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, avec $|\alpha| \leq m$, on a

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

donc $\partial^\alpha u \in \mathbb{L}^2$ (plus rigoureusement on écrit ces inégalités pour $u_p \in \mathcal{S}$, $u_p \to u$ dans H^m, et $(\partial^\alpha u_p)$ est alors de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$!), et inversement

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C^{ste} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2}. \blacksquare$$

Remarque : Les deux majorations de cette preuve fournissent en prime :

Proposition : Sur H^m, la norme de H^m est équivalente à la norme

$$u \longmapsto \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2} \Big)^{1/2}$$

De même, la remarque (5) permet d'énoncer un résultat semblable pour H^{-m}

Proposition : H^{-m} est l'espace des distributions qui sont des combinaisons de dérivées, au sens des distributions, de fonctions $\mathbb{L}^2$

Preuve : Π^{-m} est un isomorphisme de H^{-m} sur H^m (inverse de $(1-\Delta)^m$)
Donc si $u \in H^{-m}$ $v = \Pi^{-m} u \in H^m$, et $u = (1-\Delta)^m v$ est une combinaison de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions qui sont des dérivées d'ordre $\leq m$ de v, donc dans $\mathbb{L}^2$ par la première proposition. $\blacksquare$

Remarque : de même que ci-dessus, la norme de H^{-m} est équivalente à la norme : $u \longmapsto \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha (1-\Delta)^{-m} u\|^2_{\mathbb{L}^2} \Big)^{1/2} \sim \|(1-\Delta)^{-m} u\|_{H^m}$

8) Comme la transformation de Fourier "échange régularité locale et décroissance à l'infini", la définition de H^s permet de conclure intuitivement que la régularité des éléments de H^s est fonction croissante de s. Plus précisément, on a par exemple la

Proposition : Pour $m \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$, dès que $\boxed{s > m + \frac{n}{2}\ , \ H^s \subset C^m(\mathbb{R}^n)}$

Preuve : D'après (4) si $u \in H^s$ toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ seront dans H^{s-m}, qui est contenu dans $H^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, d'après (3). Il suffit donc de montrer la proposition pour $m=0$. Dans ce cas, par Cauchy-Schwarz, $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \Big)$
où la dernière intégrale est convergente dès que $s > \frac{n}{2}$.
Donc $\hat{u} \in \mathbb{L}^1$ et $u \in \mathcal{F}\mathbb{L}^1 \subset C^0$ par le théorème de Riemann-Lebesgue. $\blacksquare$

9) On déduit aussitôt de (8) : $\boxed{\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)}$ et d'autre part $\mathcal{S} \subset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$
mais ces deux inclusions sont strictes : par exemple pour $n=1$,
$\frac{1}{1+x^2} \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$, puisque $\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-|\xi|}$, tandis que
1 n'appartient à aucun H^s puisque $\hat{1} = 2\pi\delta \notin \mathbb{L}^1_{loc}$ (cf. (1)).

Il est clair que le fait d'appartenir à l'un des H^s est, pour une distribution tempérée, essentiellement une condition de régularité locale; mais il y a en plus une "petite" condition de décroissance à l'infini, puisque (cf. (1)), $\mathcal{F}H^s$ est formé de fonctions localement intégrables !

10) De même l'inclusion $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset \mathcal{S}'$ est stricte, car $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset \mathcal{D}'_F$ (espace des distributions d'ordre fini, car toute distribution $u\in H^s$ est d'ordre fini, par la dernière proposition de (7), tandis que $\mathcal{S}'$ contient des distributions d'ordre infini, comme par exemple, pour $n=1$, la transformée de Fourier de $(\exp(ie^x))'$ ... (exercice).

Les espaces de Sobolev sont assez utiles pour qu'on les ait étudiés de très près. Voici par exemple une caractérisation "directe" (indépendante de Fourier) qui précise la condition de "régularité" qu'ils imposent à leurs adhérents:

Théorème: Pour $u\in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $s\in]0,1[$, $\boxed{u\in H^s \Leftrightarrow I_s(u)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\tau_x u-u\|^2_{\mathbb{L}^2}}{|x|^{n+2s}}dx<\infty}$

Remarque: Comme $\|\tau_x u-u\|^2\le(\|\tau_x u\|+\|u\|)^2\le 4\|u\|^2$, et que $n+2s>n$, la convergence à l'infini de l'intégrale est claire; c'est en 0 qu'il faut que $\|\tau_x u-u\|\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ "assez vite", pour que l'intégrale converge, ce qui signifie que de "petites" translations doivent "peu" modifier u : c'est bien de régularité locale qu'il s'agit !

Preuve: Pour $\xi\in\mathbb{R}^n$, posons $J(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-ix\xi}-1|^2}{|x|^{n+2s}}dx$, intégrale qui est bien convergente (à l'infini $|e^{ix\xi}-1|^2\le 4$ et $n+2s>n$; en zéro, $|e^{-ix\xi}-1|=O(|x|)$, la fonction à intégrer est $O(\frac{1}{|x|}{}^{n+2s-2})$, et $n+2s-2<n$...!)

Pour toute rotation R de $\mathbb{R}^n$, $J(R\xi)=J(\xi)$, car R ne change ni $|x|$, ni dx; donc J est constante sur les sphères, et on peut poser pour $|\xi|=1$, $J(\xi)=c>0$.

Pour $\lambda>0$, $J(\lambda\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-i\lambda\xi x}-1|^2}{|x|^{n+2s}}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-i\xi y}-1|^2}{|y|^{n+2s}}\lambda^{n+2s}\lambda^{-n}dy=\lambda^{2s}J(\xi)$

Finalement donc, $J(\xi)=c|\xi|^{2s}$.

Comme $\|\tau_x u-u\|^2_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{-n}\|\widehat{\tau_x u-u}\|^2_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{-ix\xi}-1|^2|\hat u(\xi)|^2d\xi$, il vient

$$I_s(u)=(2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|e^{-ix\xi}-1|^2|\hat u(\xi)|^2}{|x|^{n+2s}}dx\,d\xi=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}J(\xi)\,|\hat u(\xi)|^2d\xi$$

$$=c(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\hat u(\xi)|^2d\xi<c(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat u(\xi)|^2d\xi$$

donc $I_s(u)<\infty$ dès que $u\in H^s$, mais la réciproque est aussi vraie, car $\int_{\mathbb{R}^n}|\hat u(\xi)|^2d\xi<\infty$, puisque $u\in\mathbb{L}^2$. ∎

On en tire une caractérisation de H^s pour $s>0$: si $s=s_1+s_2$, avec $s_1\in\mathbb{N}$ et $0\le s_2<1$, $u\in H^s$ si et seulement si: $\forall\alpha, |\alpha|\le s_1$, $I_{s_2}(\partial^\alpha u)<\infty$.

On pourrait généraliser au cas $s<0$, en appliquant à u une puissance du "convoluteur" $(1-\Delta)^{-1}$ convenable...(cf. (5) et (7); ...et ch. III §8, exercice 13).

---

§4 OPÉRATEURS DE TRACE ET DE RELÈVEMENT

Pour $0<p<n$, les images réciproques des fonctions C^∞ par l'injection de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}^n$: $(x_1,\dots,x_{n-p})\mapsto(x_1,\dots,x_{n-p},0,\dots,0)$ sont tout simplement les restrictions $\varphi(x_1,\dots,x_n)\mapsto\varphi(x_1,\dots,x_{n-p},0,\dots,0)$ au sous-espace $\mathbb{R}^{n-p}$; les distributions n'ont en général qu'une image directe (cf. ch. II, §2) qui est dans ce cas $T\mapsto i_*T = T\otimes\delta_{\mathbb{R}^p}$. Même une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, n'étant définie que presque partout n'a pas en général de restriction (que vaut $H(0)$?)

Mais les fonctions de certains espaces de Sobolev ont des restrictions naturelles, qu'on appelle leurs traces.

Théorème ("de trace") : Pour $0<p\le n$, l'opérateur de restriction $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\rho}\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-p})$ admet un unique prolongement continu $\rho: H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-\frac p2}(\mathbb{R}^{n-p})$ dès que $s>\frac p2$.

Preuve : Pour $p=n$, $s>\frac n2$ implique que $u\in H^s$ est continue (§3, Prop. du (3)) et $\rho(u)=u(0)$. On peut donc supposer $1\le p\le n-1$. Notons pour alléger les notations $y=(x_1,\dots,x_{n-p})$ et $z=(x_{n-p+1},\dots,x_n)$, d'où $x=(y,z)\in\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p$, et de même $\xi=(\eta,\xi)$ pour les variables duales. On a, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par inversion de Fourier partielle

$$\widehat{\rho\varphi}(\eta)=\int_{\mathbb{R}^{n-p}} e^{-iy\eta}\varphi(y,0)\,dy = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^{n-p}}\varphi(\eta,0)=(2\pi)^{-p}\int_{\mathbb{R}^p}\hat\varphi(\eta,\xi)\,d\xi,$$

d'où
$$\|\rho\varphi\|^2_{s-\frac p2}=\int_{\mathbb{R}^{n-p}}|\widehat{\rho\varphi}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{s-\frac p2}d\eta=\int_{\mathbb{R}^{n-p}}(2\pi)^{-2p}\left|\int_{\mathbb{R}^p}\hat\varphi(\eta,\xi)\,d\xi\right|^2(1+|\eta|^2)^{s-\frac p2}d\eta$$

Par Cauchy-Schwarz,
$$\left|\int_{\mathbb{R}^p}\hat\varphi(\eta,\xi)\,d\xi\right|^2\le\left(\int|\hat\varphi(\eta,\xi)|\,d\xi\right)^2\le\left(\int_{\mathbb{R}^p}|\hat\varphi(\eta,\xi)|^2(1+|\eta|^2+|\xi|^2)^s d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\xi}{(1+|\eta|^2+|\xi|^2)^s}\right)$$

Comme
$$\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\xi}{(1+|\eta|^2+|\xi|^2)^s}=\int_{|\xi|\le|\eta|}+\int_{|\xi|\ge|\eta|}\le\frac{C^{ste}}{(1+|\eta|^2)^s}\left(\mathrm{vol}\,B(0,|\eta|)+\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\xi}{\left(1+|\frac{\xi}{\eta}|^2\right)^s}\right)$$
$\le C^{ste}(1+|\eta|^2)^{\frac p2-s}$ dès que $s>\frac p2$, il vient
$$\|\rho\varphi\|^2_{s-\frac p2}\le C^{ste}\int_{\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p}(1+|\eta|^2)^{\frac p2-s}(1+|\eta|^2)^{s-\frac p2}|\hat\varphi(\eta,\xi)|^2(1+|\eta|^2+|\xi|^2)^s\,d\eta\,d\xi$$
$$=C^{ste}\|\varphi\|^2_s$$; d'où le résultat, par densité de $\mathcal{D}$ dans H^s. ■

L'opérateur "de trace" ρ du théorème ci-dessus est largement surjectif ; on ne le démontre ici que pour $p=1$ et s entier ; notons $\Gamma=\mathbb{R}^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_{n-1},0)\}\subset\mathbb{R}^n$.

Théorème ("de relèvement") : Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Il existe un opérateur R linéaire continu de $H^{m-\frac12}(\Gamma)\times H^{m-3/2}(\Gamma)\times\dots\times H^{1/2}(\Gamma)=E$ (il y a m facteurs, et E est muni de la topologie produit !) dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que, si $v=(v_0,v_1,\dots,v_{m-1})\in E$, et $u=Rv$, on ait, en notant $u|_\Gamma=\rho u$: $u|_\Gamma=v_0$, $\partial_n u|_\Gamma=v_1,\dots,\partial_n^{m-1}u|_\Gamma=v_{m-1}$. Il existe donc $C>0$ tel que pour tout $v\in E$, $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\le C\left(\|v_0\|_{H^{m-\frac12}(\Gamma)}+\dots+\|v_{m-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$

Preuve : Choisissons un entier $j \in [\![0, m-1]\!]$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\partial^k \varphi(0) = \delta_{jk}$ pour $k = 0, .., m-1$ (par exemple $\varphi(x) = \frac{x^j}{j!}\psi(x)$, avec $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \equiv 1$ au voisinage de 0). Notons $y = (x_1, .., x_{n-1})$ la variable de Γ, et η la variable duale. Soit $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$ et posons

$$\widehat{R_j w}^y(\eta, x_n) = (1+|\eta|^2)^{-j/2} \varphi((1+|\eta|^2)^{1/2} x_n)\,\widehat{w}(\eta)$$

ce qui définit une distribution tempérée des variables (η, x_n), donc par transformation de Fourier partielle inverse, une distribution $R_j w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

De plus $\partial_n^k \widehat{R_j w}^y(\eta, 0) = \widehat{w}(\eta)$ si $k = j$, 0 sinon,

d'où $\partial_n^k R_j w(y, 0) = \delta_{jk} w(y)$, puis

$$\|R_j w\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \le C^{te} \sum_{k+|\alpha| \le m} \iint |\partial_n^k \partial_y^\alpha R_j w(y, x_n)|^2 dy\, dx_n$$

$$\le C^{te} \sum_{k+|\alpha|\le m} \iint |\eta|^{2|\alpha|} |\partial_n^k \widehat{R_j w}^y(\eta, x_n)|^2 d\eta\, dx_n \quad \text{(Plancherel partiel)}$$

$$\le C^{te} \sum_{k+|\alpha|\le m} \iint (1+|\eta|^2)^{|\alpha|} (1+|\eta|^2)^{k-j} |\varphi^{(k)}(\underbrace{(1+|\eta|^2)^{1/2} x_n}_{=t})\,\widehat{w}(\eta)|^2 d\eta\, dx_n$$

$$= C^{te} \sum_{k+|\alpha|\le m} \iint (1+|\eta|^2)^{|\alpha|+k-j-\frac{1}{2}} |\varphi^{(k)}(t)\,\widehat{w}(\eta)|^2 d\eta\, dt$$

$$\le C^{te} \Big(\sum_{k=0}^{m} \|\varphi^{(k)}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}\Big)\Big(\int (1+|\eta|^2)^{m-j-\frac{1}{2}} |\widehat{w}(\eta)|^2 d\eta\Big) \le C^{te} \|w\|^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Par densité de $\mathcal{D}$, R_j se prolonge donc en opérateur continu de $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $\partial_n^k (R_j w)|_\Gamma = \delta_{jk} w$, pour $0 \le k < m$.
Pour conclure il suffit donc de poser $Rv = R_0 v_0 + \cdots + R_{m-1} v_{m-1}$. ∎

Remarque : Cet opérateur "de relèvement" R est bien sûr un inverse à droite de l'opérateur "de trace" : $tr : H^m(\mathbb{R}^n) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ défini par $u \mapsto \prod_{j=0}^{m-1} \rho(\partial_n^j u)$, où ρ est la restriction, ou "trace" définie au premier théorème.

Notons $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ l'un des deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ, et, pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \mid \partial^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n_+)$ pour $|\alpha| \le m\}$, muni de la norme hilbertienne $\Big(\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n_+)}\Big)^{1/2}$.

Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, son prolongement à $\mathbb{R}^n$ par 0 hors de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ est bien défini (u est une fonction $\mathbb{L}^1_{loc}$) et évidemment dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, mais en général pas mieux (id est $\notin H^j(\mathbb{R}^n)$ pour $j > 0$), à cause des sauts sur Γ des dérivées, de la forme $\sum_j v(y) \otimes \delta^{(j)}(x_n)$ qui ne sont pas dans $\mathbb{L}^1_{loc}$.

Par contre, nous admettrons ici qu'il est toujours possible de trouver un "prolongement" $\tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire tel que $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+} = u$, et que $tr\,\tilde{u}$ ne dépend que de u ; on peut même construire un opérateur continu de prolongement, et s'imposer par exemple $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > -\varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On note alors $tr\, u = tr\, \tilde{u}$ et c'est encore un opérateur linéaire continu de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ dans E.

On note $H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$

Proposition: $H^m_0(\mathbb{R}^n_+) = \mathrm{Ker}\left(tr : H^m(\mathbb{R}^n_+) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$

Preuve: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, φ et toutes ses dérivées sont nulles au voisinage de Γ, et donc clairement $tr\,\varphi = 0$. Par densité, il vient que $H^m_0(\mathbb{R}^n_+) \subset \mathrm{Ker}\,tr$. Inversement, si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ et $tr\,u = 0$, le prolongement de u à $\mathbb{R}^n$ par 0 est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ (il n'y a plus de sauts). Les translations étant continues dans $H^m(\mathbb{R}^n)$, u est la limite dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ des $u_\varepsilon = \tau_{\vec{\varepsilon}}\, u$ quand $\varepsilon \to 0$, avec $\vec{\varepsilon} = (0,..,0,\varepsilon)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{supp}\, u_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq \varepsilon\}$, u_ε est la limite d'une suite (φ_p) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, donc $u_\varepsilon \in \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)} = H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$, et à la limite $u \in H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$. ∎

(§5) LOCALISATION DES ESPACES DE SOBOLEV

Proposition: $\forall s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$: $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

Idée d'une preuve: On peut le prouver directement sur la définition de H^s. On peut aussi se ramener au cas $0 \leq s < 1$, comme à la fin du §3, les dérivations, et Π en particulier conservant $\mathcal{S}$, et alors utiliser le théorème de ce paragraphe (p.57): comme $\tau_x(\varphi u) - \varphi u = \varphi(\tau_x u - u) + \tau_x(\varphi u) - \varphi \tau_x u$, il vient $\|\varphi(\tau_x u - u)\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sup|\varphi|\, \|\tau_x u - u\|_{\mathbb{L}^2}$, et
$\|\tau_x(\varphi u) - \varphi\tau_x u\|_{\mathbb{L}^2} = \|\varphi u - (\tau_{-x}\varphi)u\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sup|\tau_{-x}\varphi - \varphi| \cdot \|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sup\|\vec{\partial}\varphi\|\,|x|\,\|u\|_{\mathbb{L}^2}$
d'où $I_s(\varphi u) \leq (\sup|\varphi|)^2 I_s(u) + (\sup\|\vec{\partial}\varphi\|)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^{n+2s-2}} \cdot \|u\|^2_{\mathbb{L}^2} < \infty$. ∎

Définition: Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\boxed{H^s_{loc}(\Omega)}$ ("espace de Sobolev local") l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (prolongée par 0).

Proposition: Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi(x_0) \neq 0$ telle que $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H^s_{loc}(\Omega)$.

Preuve: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $K = \mathrm{supp}\,\varphi$. Pour chaque $x_0 \in K$ choisissons $\varphi_{x_0} \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_{x_0}(x_0) \neq 0$ et $\varphi_{x_0} u \in H^s$. Si $U_{x_0} = \{x \in \Omega \mid \varphi_{x_0}(x) \neq 0\}$, les U_{x_0} forment un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un recouvrement fini $(U_j = U_{x_j})_{j=1,..,p}$. Soit α_j une partition de l'unité associée: $\alpha_j \in \mathcal{D}(U_j)$, et $\sum \alpha_j \equiv 1$ au voisinage de K. Alors $\varphi u = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\frac{\alpha_j \varphi}{\varphi_j}\right)}_{\in \mathcal{D}} \underbrace{(\varphi_j u)}_{\in H^s} \in H^s$ par la proposition précédente. ∎

Remarque: Grâce à ces deux propositions et à l'existence de partitions de l'unité, on peut étendre l'opérateur Π du §3 en une bijection linéaire de $H^s_{loc}(\Omega)$ sur $H^{s-2}_{loc}(\Omega)$. Les espaces de Sobolev locaux forment donc une échelle continue de fonctions-distributions de plus en plus régulières quand s croît. En particulier, on peut vérifier que

$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{loc}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ et $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_{loc}(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$ (distributions d'ordre fini).

Ces espaces sont aussi "intrinsèques" (indépendants des coordonnées):

Proposition: Soit $\chi : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\chi_*(H^s_{loc}(\Omega)) = H^s_{loc}(\Omega')$.

Idée d'une preuve: On peut encore se ramener au cas $0 \leq s < 1$ par les idées de la fin du §3, et utiliser le même théorème. Par les propositions précédentes, il suffit de montrer que $\chi_* u \in H^s_{loc}(\Omega')$ lorsque $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \Subset \Omega$ (et donc $\operatorname{supp} \chi_* u \Subset \Omega'$). Le jacobien de χ étant borné sur $\operatorname{supp} u$, on conclut par le théorème du §3 et la formule de changement de variable. ∎

Ceci permet de définir $H^s_{loc}(V)$, où V est n'importe quelle variété différentiable, même avec bord.

Si de plus V est compacte, avec ou sans bord, on pourra la recouvrir par un nombre fini de cartes, et en utilisant une partition de l'unité associée à ce recouvrement, (α_j), définir une norme sur $H^s_{loc}(V)$, par le produit scalaire $(u,v) = \sum (\alpha_j u, \alpha_j v)_s$. $H^s_{loc}(V)$ devient dans ce cas un espace de Hilbert $H^s(V)$, et changer de partition ne change sa norme qu'en une norme équivalente; les opérateurs différentiels sont toujours continus, et on peut construire des isomorphismes "Π" de $H^s(V)$ sur $H^{s-2}(V)$ (qui sont des opérateurs elliptiques)....

Nous considèrerons en particulier le cas où $V = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière Γ est une surface lisse, et qui localement est "d'un seul coté de son bord" Γ.

Utilisant des partitions de l'unité de $\bar\Omega$ localement finies, les propositions précédentes permettent de rendre "intrinsèques", c'est-à-dire de généraliser à Ω toutes les définitions, idées et résultats des paragraphes 3 et 4, qui traitaient le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, par exemple:

Dès que $s > m + \frac{n}{2}$, $H^s_{loc}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. (§3, Prop(8))

et le théorème de trace (§4) devient (énoncé ici avec $p=1$):

Il existe un et un seul opérateur linéaire de $H^s_{loc}(\Omega) \xrightarrow{tr} H^{s-\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma)$ prolongeant la restriction à Γ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dès que $s > \frac{1}{2}$ qui est continu dès que ce sont des espaces de Hilbert (c'est-à-dire lorsque Ω est borné, donc $\bar\Omega$ compact - cf. ci dessus).

On laisse au lecteur le soin d'énoncer (et de démontrer!) la version "intrinsèque" du théorème de relèvement et de la dernière proposition du §4: $H^m_0(\Omega) = \operatorname{Ker} tr$.

Enfin pour $m \in \mathbb{N}^*$ on peut encore (cf. §3, Propositions de (7)) redéfinir $H^m(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$ respectivement comme l'espace des distributions sur Ω dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et comme l'espace de celles qui sont des combinaisons de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Supposons Ω borné :

Si $T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha$, avec $f_\alpha \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on aura, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|<T,\varphi>| = \Big|\sum_{|\alpha|\leq m} <\partial^\alpha f_\alpha, \varphi>\Big| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} |<f_\alpha, \partial^\alpha \varphi>| \leq C^{te} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\mathbb{L}^2} \leq C^{te} \|\varphi\|_{H^m(\Omega)}$$

ce qui permet d'étendre T en une forme linéaire continue sur $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H^m_0(\Omega)$, d'où une injection $H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow (H^m_0(\Omega))'$ (ce sont des Hilbert)

Inversement si $T \in (H^m_0(\Omega))'$, et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|<T,\varphi>| \leq \|T\|_{op} \cdot \|\varphi\|_m = \|T\|_{op} \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \Big(\int_\Omega |\partial^\alpha \varphi|^2 dx\Big)^{1/2}\Big)$$

$\leq \|T\|_{op} \cdot v(\Omega) \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|\Big)$ dès que le volume $v(\Omega)$ de Ω est fini,

d'où une inclusion naturelle $(H^m_0(\Omega))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ dont l'image contient a priori $H^{-m}(\Omega)$; on admettra ici la

<u>Proposition</u> : <u>Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et Ω borné</u> : <u>$H^{-m}(\Omega) \simeq (H^m_0(\Omega))'$</u>

(Même pour $m=0$, mais dans ce cas $H^{-m}(\Omega) = H^m_0(\Omega) = H^m(\Omega) = \mathbb{L}^2(\Omega)$!)

---

§6 LE PROBLÈME DE DIRICHLET

<u>Remarques préliminaires</u> : Les équations aux dérivées partielles, même linéaires, et même à coefficients et second membre réguliers, n'ont pas toujours de solutions, même distributions, et même localement au voisinage d'un point : l'exemple le plus célèbre est l'équation de Hans Léwy sur $\mathbb{R}^3$: $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + ix\frac{\partial}{\partial z}$, pour laquelle on peut démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in \mathcal{D}(B(0,\varepsilon)) \ \forall u \in \mathcal{D}'(B(0,\varepsilon)) \quad Lu \neq \varphi$$

On dit que L n'est "pas localement résoluble" (par contre tout o.d.l. à coefficients <u>constants</u> est localement résoluble ...)

Mais celles qu'on rencontre en pratique ont toujours de "grosses" infinités de solutions, et pour isoler une solution "intéressante" (celle qui a un "sens physique" par exemple) on rajoute à l'équation des conditions que doit vérifier la solution cherchée. Il y en a essentiellement de deux types, éventuellement mélangés ("<u>problèmes mixtes</u>") :

- un "<u>Problème au bord</u>" : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma$, on cherche u telle que

$$\begin{cases} Pu = f \text{ dans } \Omega \ (f \text{ donnée, } P \text{ o.d. linéaire ou non}) \\ u|_\Gamma = g \quad (g \text{ donnée}) \end{cases}$$

C'est le "<u>problème de Dirichlet</u>" (1805-1859) qu'on va traiter ici. Au lieu de $u|_\Gamma$, on peut s'imposer la valeur sur Γ d'une ou plusieurs dérivées de u ("problème de Neuman", ...)

- un "Problème à données initiales" : l'équation dépend d'une variable de plus, (le "temps") et on s'impose la valeur de la solution (ou de certaines de ses dérivées) au temps $t=0$ (donc sur un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$). L'exemple-type de ces problèmes est appelé "problème de Cauchy" (1789-1857), et c'est l'objet des chapitres suivants.

Comme les dates données le montrent, les théorèmes cités ici ne sont que l'habillage moderne (et assez efficace) de résultats souvent plus anciens, d'un siècle au moins !

On considère ici un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est une hypersurface lisse compacte, dont le complémentaire a deux composantes connexes : Ω est donc la composante "intérieure" (bornée).

On se donne une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, une autre $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (Γ est une variété compacte), et on cherche les distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que :
$$\boxed{\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ et } u_{|\Gamma} = g}$$

C'est le problème de Dirichlet classique. Le théorème de trace du §5 permet de donner un sens précis à $u_{|\Gamma}$ dès que $u \in H^s(\Omega)$ avec $s > \frac{1}{2}$. Si par exemple $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, et $u_{|\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Comme $\overline{\Omega}$ et Γ sont compacts, tous les résultats du §5 s'appliquent pleinement : les opérateurs de trace et de relèvement sont continus. Le problème admet alors une solution et une seule :

Théorème : $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, $\forall g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\exists 1$ $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u = f$ et $u_{|\Gamma} = g$.
De plus il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω telle que :
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$$

Preuve : Traitons d'abord le cas particulier où $g=0$. Dans ce cas, si $u \in H^1(\Omega)$ est solution, on a $u_{|\Gamma} = 0$, donc $u \in H^1_0(\Omega)$. Or on peut trouver $C_1 > 0$ tel que,
$$(*) \quad \forall u \in H^1_0(\Omega) \qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

En effet, par densité, il suffit de prouver $(*)$ pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, or pour un tel u (prolongé à $\mathbb{R}^n$ par $\{0\}$) supp $u \subset [a,b]^n$, pour certains a, b ne dépendant que de l'ouvert borné Ω, et, par exemple, $u(x) = \int_a^{x_n} \partial_n u(y,t)\,dt$ (on note $x = (y, x_n)$), d'où par Cauchy-Schwarz :
$$|u(x)|^2 \leq \left|\int_a^{x_n} \partial_n u(y,t)\,dt\right|^2 \leq (x_n - a)\int_a^{x_n} |\partial_n u(y,t)|^2 dt \leq (x_n - a)\int_a^b |\partial_n u(y,t)|^2 dt.$$
Intégrant en x : $\int |u(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int |\partial_n u(y,t)|^2 dt\,dy \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|\partial_n u\|^2_{L^2(\Omega)}$, d'où $(*)$.

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
$$-\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \bar{u}\, \partial_j \varphi\right) dx = \int_\Omega (\Delta \bar{u}) \varphi\, dx = \langle \Delta \bar{u}, \varphi \rangle = \langle \bar{f}, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}', \mathcal{D})} = (\varphi, f)_{\pm 1} \quad \text{(cf. §3, rem. (6))}.$$
L'application $(v, w) \overset{B}{\mapsto} \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \bar{w}\, \partial_j v\right) dx$ est une forme sesquilinéaire sur $H^1_0(\Omega)$, définie positive d'après $(*)$ (puisque $(v,v) = 0 \Rightarrow \sum_j \|\partial_j v\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow v = 0$), donc un produit scalaire. Par le théorème de Riesz, il existe donc un seul $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, $(v, f) = B(v, u)$; pour $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors $\langle \varphi, \bar{f} \rangle = \langle \varphi, \overline{\Delta u} \rangle$, d'où $\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc dans $H^1_0(\Omega)$. De plus, en

identifiant $(H_0^1(\Omega))'$ à $H^{-1}(\Omega)$ (dernière proposition du §5), $\|u\|_{H^1} \leq C^{ste}\|f\|_{H^{-1}}$, la constante ne dépendant que de cette identification (donc de Ω).

Si l'on se pose maintenant le problème général ($\Delta u = f$, $u|_\Gamma = g$), l'opérateur de relèvement $R : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ est continu, et si $v = Rg$, on a donc $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C^{ste}\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. De plus $\Delta v \in H^{-1}(\Omega)$

Soit w la solution trouvée ci-dessus au problème : $\Delta w = f - \Delta v$ et $w|_\Gamma = 0$, et posons $u = v + w$. On a $u \in H^1(\Omega)$ et $u|_\Gamma = v|_\Gamma + w|_\Gamma = g + 0 = g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

De plus
$$\|u\|_{H^1} \leq \|w\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq C^{ste}(\|f - \Delta v\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1})$$
$$\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}} + \|\Delta v\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1})$$
$$\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1}) \quad \text{par continuité de } \Delta : H^1 \to H^{-1}$$
$$\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)})$$

Enfin $\Delta u = \Delta v + \Delta w = \Delta v + f - \Delta v = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$, et l'unicité de cette solution résulte de ce que, si $\Delta u = 0$ et $u|_\Gamma = 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$, et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$0 = \langle -\Delta u, \varphi \rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j u \, \partial_j \varphi = B(u, \varphi)$, donc par densité $B(u,u) = 0$, et $u = 0$ puisque B est définie positive sur $H_0^1(\Omega)$. ∎

<u>Remarques pour conclure</u> : Cet énoncé n'est que le modèle d'un grand nombre d'énoncés semblables concernant le problème de Dirichlet (ou d'autres problèmes "au bord") pour des opérateurs elliptiques :

— D'abord, utilisant la "régularité elliptique" de Δ (cf. §1) on peut le "raffiner" (comme beaucoup des suivants) en :

$\forall s > \frac{1}{2}\ \exists C > 0, \forall f \in H^{s-2}(\Omega), \forall g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \exists 1\, u \in H^s(\Omega) : \Delta u = f$ dans Ω et $u|_\Gamma = g$,
et $\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{s-2}(\Omega)} + \|g\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)})$

— L'énoncé se généralise de façon évidente à un opérateur elliptique à coefficients constants $P(\partial) = \sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\partial_i\partial_j$ homogène de degré deux (la forme quadratique $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ étant définie positive), puisqu'il suffit de récrire la même preuve avec la forme sesquilinéaire
$$B(u,v) = -\sum_{i,j}\int_\Omega \frac{1}{2} a_{ij}(\partial_i u\, \partial_j \bar{v} + \partial_i v\, \partial_j \bar{u})\,dx$$

— La même méthode se généralise à des opérateurs à coefficients variables, de la forme $P(x,\partial)u = \sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \lambda u$, avec $\lambda \geq 0$ s'ils sont <u>uniformément elliptiques</u> dans Ω, c'est-à-dire

$\exists C > 0\ \ \forall x \in \Omega\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\ \ |\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j| \geq C|\xi|^2 \qquad (*)$

(la forme B devient alors $-\sum\limits_{i,j}\int_\Omega \frac{1}{2}a_{ij}(x)(\partial_i u\,\partial_j\bar{v} + \partial_i v\,\partial_j\bar{u})\,dx + \lambda\int_\Omega u\bar{v}\,dx$)

L'intérêt d'avoir mis P sous cette forme est que, n'ayant plus à dériver les coefficients a_{ij} dans les intégrations par parties, on peut relaxer l'hypothèse $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, pourvu que les a_{ij} restent bornés, par exemple $C^0(\overline{\Omega})$.

— On peut aussi rajouter à P des termes de degré 1, tant qu'on garde l'ellipticité uniforme $(*)$ de sa partie de degré 2, et la positivité du terme constant $\lambda(x)$.

- Enfin l'énoncé se généralise à un opérateur de degré quelconque (mais pair) $2m$ à coefficients complexes : on dit que l'opérateur

$$(*) \quad P(x,\partial)u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} (-1)^{|\alpha|}\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^{\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x)\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^{\beta}u(x)\right)$$

est uniformément elliptique dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ s'il existe des constantes $C, C'>0$ telles que pour $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\Big) \geq C|\xi|^{2m} \quad \text{et} \quad a_{00}(x)\geq C'$$

On a alors, par exemple le résultat suivant (cf. Dautray-Lions, volume 4, p. 1235), parmi les plus "généraux" :

Théorème. Soit Ω borné, d'un seul côté de son bord $\partial\Omega=\Gamma$ lisse. Soit P l'opérateur $(*)$. On suppose $a_{\alpha\beta}(x)\in C^{0}(\bar\Omega)$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$, et $a_{\alpha\beta}\in L^{\infty}(\Omega)$ pour les autres. Alors pour toute donnée de $f\in H^{-m}(\Omega)$ et $g_j\in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j=0,\dots,m-1)$, il existe un et un seul $u\in H^m(\Omega)$ tel que $P(x,\partial)u=f$ dans Ω, et pour $j=0,\dots,m-1$, $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j u|_{\Gamma}=g_j$ ($\vec n$ est la normale extérieure)

Idée de la preuve : On relève d'abord les conditions aux limites g_j, par l'opérateur de relèvement R du §4 (théorème p. 58, localisé au §5). $\exists v\in H^m(\Omega)$, $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j v|_{\Gamma}=g_j$ $(j=0,\dots,m-1)$. $u=v+w$ est solution du problème posé si et seulement si $w\in H^m(\Omega)$, $Pw=f-Pv\in H^{-m}(\Omega)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j w|_{\Gamma}=0$ pour $0\leq j\leq m-1$, ce qui implique $w\in H^m_0(\Omega)$. On généralise, pour trouver w, le raisonnement fait ici pour Δ, à l'aide de la forme sesquilinéaire

$$B(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x)\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^{\alpha}u(x)\,\overline{\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^{\beta}v(x)}\,dx \quad \text{sur } H^m_0(\Omega)^2,$$

qui est "elliptique" en ce sens que $\mathrm{Re}\,B(u,u)\geq C^{te}\|u\|^2_m$ pour $u\in H^m_0(\Omega)$... ∎

§7 FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN ET PROBLÈME MIXTE

Le problème de Dirichlet "classique" se généralise en : pour $\lambda\in\mathbb{R}$, trouver u telle que $\Delta u-\lambda u=f$ dans Ω, et $u|_{\Gamma}=g$; tant que $\lambda\geq 0$, la démonstration du §6 s'adapte (avec la forme $\lambda\int_\Omega u\bar v\,dx+\sum_{j=1}^n \partial_j u\,\overline{\partial_j v}\,dx$) et le résultat est le même : $\forall f\in H^{-1}(\Omega), g\in H^{1/2}(\Gamma)$, $\exists 1\, u\in H^1(\Omega) : (\Delta-\lambda)u=f$ et $u|_{\Gamma}=g$. De plus l'opérateur $(f,g)\mapsto u$ est continu de $H^{-1}(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$ sur $H^1(\Omega)$, et $(\Delta-\lambda;\ |_{\Gamma})$ est donc un isomorphisme entre ces deux espaces ; d'ailleurs pour $\lambda>0$, $\lambda-\Delta$ a les mêmes propriétés que l'opérateur Π (§3, Rem. (5)), et on peut généraliser l'énoncé à un ouvert Ω, même non borné, par exemple $\mathbb{R}^n$.

Ces énoncés se "restreignent" aussi, par régularité elliptique : $\forall m\in\mathbb{N}^*$ $\forall f\in H^{m-2}(\Omega)$, $g\in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\exists 1\, u\in H^m(\Omega) : (\Delta-\lambda)u=f$ et $u|_{\Gamma}=g$ et le "problème de Dirichlet" donne encore un isomorphisme entre $H^m(\Omega)$ et $H^{m-2}(\Omega)\times H^{m-1/2}(\Gamma)$, pour Ω borné, ou $\lambda>0$. Si $f\in C^\infty(\Omega)$ est C^∞ jusqu'au bord (c'est-à-dire prolongeable en fonction C^∞ au voisinage de $\bar\Omega$), et $g\in C^\infty(\Gamma)$, la solution u sera aussi C^∞ jusqu'au bord (et même analytique dans Ω, puisque $\Delta-\lambda$ est hypoelliptique-analytique...)

En particulier pour $f=0$, on trouve ainsi des « fonctions propres » du laplacien dans Ω : pour toute valeur propre $\lambda \geq 0$, il y en a autant que de fonctions sur le bord, qui sont leurs traces sur Γ.

Mais ce qu'on appelle vraiment "fonctions propres du laplacien dans Ω", ce sont les $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $\Delta u = \lambda u$ et $u|_\Gamma = 0$. On voit donc qu'il n'y en a aucune ($\neq 0$) de valeur propre $\lambda \geq 0$!

Par contre, pour $\lambda < 0$, on peut démontrer (on ne le fera pas ici, c'est ce qu'on appelle la "théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints", qui généralise le fait bien connu qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée ...) que :

Il existe, pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ donné, une suite $(-\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, avec $\lambda_j > 0$, et $\lambda_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ telle que
- si λ n'appartient pas à la suite, $\Delta-\lambda$ est bijectif de $H^1_0(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$
- si $\lambda = -\lambda_j$, l'espace propre est de dimension finie $d_j \geq 1$
- la somme directe hilbertienne des espaces propres est $L^2(\Omega)$

Cette "diagonalisation" de l'opérateur hermitien Δ permet une résolution du problème de Dirichlet "explicite" dans tout ouvert Ω pour lequel on sait "expliciter" les fonctions propres (par exemple un disque, un pavé, ...)

Remarque : Soit $-\lambda$ une valeur propre de Δ dans Ω, et $\varphi(x)$ une fonction propre associée. Alors :
- $F_1(t,x) = \varphi(x)e^{-\lambda t}$ est solution de l'équation "de la chaleur"
$$\partial_t F_1 - \Delta F_1 = 0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$
- $F_2(t,x) = \varphi(x)e^{i\lambda t}$ est solution de l'équation "de Schrödinger"
$$\frac{1}{i}\partial_t F_2 - \Delta F_2 = 0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$
- $F_3^{\pm}(t,x) = \varphi(x)e^{\pm i\sqrt{\lambda}t}$ est solution de l'équation "des ondes"
$$\partial_t^2 F_3^{\pm} - \Delta F_3^{\pm} = 0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$

Cette remarque banale est la clef de la résolution du "problème mixte" (problème de Cauchy en temps, de Dirichlet en espace) pour ces opérateurs importants de la physique ; par exemple pour la chaleur :
$$(*) \quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & \text{dans } [0,\infty[\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{sur } [0,\infty[\times\Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{donnée dans } \Omega \end{cases}$$
On résout (*) en décomposant u_0 dans une base de fonctions propres du laplacien : $u_0(x) = \sum_{k=1}^{d_j} \alpha_{jik}\,\varphi_{jik}(x)$ $\quad$ ((φ_{jik}) base de E_{λ_j})
et la solution est alors $\quad u(t,x) = \sum \alpha_{jik}\,\varphi_{jik}(x)e^{-\lambda_j t}$ ... !

On trouvera en exercice un exemple "facile" de cette situation (ex. 12)

§8 THÊMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1) Dans $\Omega = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+t^2<1\}$ on considère l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, avec la "condition initiale" $u(x,0)=u_0(x)$, donnée sur $]-1,1[$
Que faut-il supposer sur u_0 pour qu'il y ait une solution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$?
Montrer qu'elle est alors unique.

2) Formule de Green : Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de bord $\partial\Omega$ hypersurface lisse

a) Soit $f\in C^1(\bar\Omega)$, supp f compact dans $\bar\Omega$; montrer pour $1\le j\le n$
$$\int_\Omega \partial_j f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(s)\nu_j(s)\,ds$$
(ds est la mesure de surface de $\partial\Omega$, et $\vec\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ le vecteur normal unitaire extérieur — cf. ch I §7, ex. 26)

b) En déduire, pour $f,g\in C^1(\bar\Omega)$, l'une à support compact :
$$\int_\Omega f\,\partial_j g\,dx = -\int_\Omega \partial_j f\cdot g\,dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu_j\,ds$$
puis $\int_\Omega f\Delta\varphi\,dx = -\int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}} f\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial\varphi}{\partial\vec\nu}\,ds$ ($\varphi\in C^2(\bar\Omega)$, l'une à support compact)
et la formule de Green :
$$\boxed{\int_\Omega (f\Delta\varphi-\varphi\Delta f)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\vec\nu}-\varphi\frac{\partial f}{\partial\vec\nu}\right)ds}$$

c) Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation différentielle : $y''(r)+\frac{n-1}{r}y'(r)=0$
En appliquant la formule de Green à $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|=r>\varepsilon\}$, pour ε positif tendant vers 0, retrouver les solutions élémentaires du laplacien (pour tout n) des §1 et 2.

3) L'opérateur d'Helmholtz (en dimension 2) : $\Delta-\mu^2$, avec $\mu\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\mu>0$.

a) Calculer la transformée de Fourier de $\frac{e^{-\mu r}}{r}$ (où $r=\sqrt{x^2+y^2}$)
En déduire que $E=-\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right)^{*2}$ est une solution élémentaire de $\Delta-\mu^2$

b) On suppose ici $\mu\in\mathbb{R}^+$ et on pose $F_\mu(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\mu r\operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi$ (pour $r>0$)
Montrer que $|F_\mu(r)|\le\frac{C}{r}$ pour un certain $C>0$ et tout $r\in\mathbb{R}^+$.
En déduire que $F_\mu\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

c) Pour $\varepsilon>0$ on pose $S_\varepsilon(\xi,\eta)=\frac{-1}{(\rho^2+\mu^2)(\varepsilon^2\rho^2+1)}$, avec $\rho^2=\xi^2+\eta^2$
Montrer que $S_\varepsilon\to\hat E$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon\to 0$.

d) Calculer $\mathcal{F}^{-1}(S_\varepsilon)$ en fonction de F_μ et montrer que $\mathcal{F}^{-1}(S_\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{} F_\mu$
En déduire que $E=(4\pi)^2F_\mu$

4) Pour quels $s\in\mathbb{R}$ les distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles dans $H^s(\mathbb{R})$?
1, $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$, $\chi_{[a,b]}$, H, δ, $\delta^{(p)}$, $vp\frac{1}{x}$, $Pf\frac{1}{x^n}$. Et dans $H^s_{loc}(\mathbb{R})$?
(Montrer que si $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{\chi\cdot vp\frac{1}{x}}$ tend vers $-i\pi^2\chi(0)$ à l'infini)
Et pour $Pf\frac{\operatorname{Tg}x}{x^2}$??

5) En utilisant l'homogénéité (cf. ch III, §8, ex. 7), montrer que la distribution tempérée $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est une fonction propre de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ (et plus généralement $|x|^{-\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}^n$). Calculer la valeur propre
Dans quels espaces H^s se situent les fonctions $|x|^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) ?

6) Soit $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre $\le k$. Montrer que $T\in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s<-\frac{n}{2}-k$
En déduire que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\subset\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$

7) En utilisant les espaces de Sobolev locaux, prouver le <u>théorème</u> suivant :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p_x\times\mathbb{R}^q_y$ et $f: U\to\mathbb{C}$, de classe C^∞ séparément en x et y, et dont toutes les dérivées $\partial_x^\alpha f$ et $\partial_y^\beta f$ ($\alpha\in\mathbb{N}^p$, $\beta\in\mathbb{N}^q$) sont bornées sur les compacts de U. Alors $f\in C^\infty(U)$.

8) Généraliser la proposition du §1 (p. 52) à un opérateur P à coefficients constants, mais non nécessairement homogène.

9) <u>Sur l'hypoellipticité</u> : Soit $P(\partial)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha$ un o.d.l. à coefficients constants qui vérifie

(C) $\exists C>0, R>0, a>0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ |\xi|>R, \forall\beta\in\mathbb{N}^n : |P^{(\beta)}(i\xi)|(1+|\xi|^2)^{a/2}\le C|P(i\xi)|$

On veut démontrer que P est hypoelliptique.
Soit (K_p) une suite exhaustive de compacts d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et $\Omega'=\mathring{K}_0\neq\emptyset$, et $(\varphi_p)\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_p\equiv 1$ sur K_p. On se donne $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ et $s\in\mathbb{R}$

a) Trouver $t\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi_0 u\in H^t(\mathbb{R}^n)$ et pour $\beta\neq 0$ $P^{(\beta)}(\partial)(\varphi_0 u)\in H^{t-(m-1)}(\mathbb{R}^n)$

b) En développant $P(\partial)(\varphi_p(\varphi_{p-1}u))$ par la formule de Leibniz, montrer par récurrence que $P^{(\beta)}(\varphi_p u)$ est dans $H^{t-(m-1)+ap}(\mathbb{R}^n)$ pour $\beta\neq 0$

c) En déduire que $u\in H^s_{loc}(\Omega')$; puis conclure.

d) Montrer que tout opérateur elliptique vérifie (C).

e) Montrer que l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$ vérifie (C)

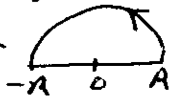
f) Montrer que ni l'opérateur de Schrödinger $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$, ni l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ ne vérifient (C).

10) <u>L'opérateur Π^{-1} en dimension 1</u>
(On rappelle que $\Pi=1-\Delta$ est un isomorphisme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s\in\mathbb{R}$; on note Π^{-1} son inverse ; en dimension $n=1$, $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}$).

a) Soit E_1 la distribution associée à la fonction $x\mapsto\frac{e^{-|x|}}{2}$.
Calculer $\widehat{E_1}$ et en déduire ΠE_1. Retrouver ΠE_1 par la formule des sauts.

b) Pour quels $s\in\mathbb{R}$ a-t-on $\delta\in H^s(\mathbb{R})$? En déduire que pour tout entier $p>0$ $E_p=E_1^{*p}$ est une fonction de classe C^{2p-2}

c) Montrer que, pour tout entier $p>0$, $\Pi^{-p}: H^s\to H^{s+2p}$ est l'opérateur de convolution par E_p.

d) Calculer pour tout entier $p>0$, la transformée de Fourier de la fonction $F_p(\xi)=\frac{1}{(1+\xi^2)^p}$ (Utiliser le calcul des résidus, en intégrant la fonction $\frac{e^{-ix\xi}}{(1+\xi^2)^p}$ en ξ, pour $x<0$, sur le contour 

)

e) En déduire l'expression explicite de la fonction E_p, pour tout $p>0$.

11) Le problème de Dirichlet dans le disque

$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$, $\Gamma=\partial\Omega$. On se donne f continue sur Γ.

On veut calculer $u\in C^\infty(\Omega)\cap C^0(\bar\Omega)$ telle que $\Delta u=0$ dans Ω et $u|_\Gamma=f$

a) Montrer que $\Delta=\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$ en coordonnées polaires ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$)

b) Pour tout $r\in]0,1[$, on développe $u(r,\cdot)$ en série de Fourier : $u(r,\theta)=\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(r)e^{ip\theta}$

Montrer que $c_p\in C^\infty(]0,1[)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, et que

$\Delta u=0$ dans $\Omega \iff$ (*) $\forall p\in\mathbb{Z}$, $r\in]0,1[$ $\quad c_p''(r)+\frac{1}{r}c_p'(r)-\frac{p^2}{r^2}c_p(r)\equiv 0$

c) Par le changement de variable $r=e^{-t}$, intégrer les équations différentielles (*), puis sélectionner les solutions telles que $u\in C^\infty(\Omega)$

En déduire que $u(r,\theta)=\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\, r^{|p|}e^{ip\theta}$, où les $c_p(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

d) On pose, pour $r\in[0,1[$ $\quad P_r(\theta)=\sum_{p\in\mathbb{Z}} r^{|p|}e^{ip\theta}$. Montrer que $\int_0^{2\pi}P_r(\theta)=2\pi$.

Expliciter $P_r(\theta)$, puis montrer que $u(r,\theta)=P_r(\theta)*f(\theta)$

e) Montrer que $P_r*P_s=P_{rs}$. Montrer que $u(r,\cdot)\xrightarrow[r\to1^-]{} f$ uniformément

f) L'"énergie" de la solution est le nombre $E=\iint_\Omega\left((\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2\right)dx\,dy$.

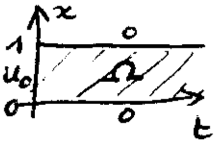
Montrer que $E=\sum_{p\in\mathbb{Z}}|p||c_n(f)|^2$

En supposant que $\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$, montrer que $\iint_\Omega|u(x,y)|^2dx\,dy\leq\frac{E}{4}$

g) Calculer u pour $f(\theta)=\cos^3\theta$

h) Que reste-t-il de vrai de tout cela, si l'on suppose seulement $f\in L^2(\Gamma)$? $f\in\mathcal{D}'(\Gamma)$?

12) Un problème mixte de type "chaleur"



On cherche $u(t,x)$ solution de $\partial_t u+c\partial_x u-\mu\partial_x^2 u=0$ ($\mu\neq0$) dans $\Omega=\{(t,x)\mid t>0 \text{ et } 0<x<1\}$ et les conditions "mixtes" : "initiale" $u(0,x)=u_0(x)$ donnée ; "au bord" $u(t,0)=u(t,1)=0$

a) Montrer l'existence d'une suite (λ_k) de valeurs de λ pour lesquelles le "problème de Dirichlet" $c\partial_x v-\mu\partial_x^2 v-\lambda v=0$ et $v(0)=v(1)=0$ admet des solutions non nulles. Montrer qu'une telle solution s'écrit $u_k(x)=e^{\frac{c}{2\mu}x}\sin k\pi x$, pour $\lambda_k=\frac{c^2}{4\mu}+\mu\pi^2k^2$ ($k=1,2,\dots$)

b) Développer $u_0(x)e^{-\frac{cx}{2\mu}}$ en série de Fourier

c) En déduire que $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\, e^{-\left(\frac{c^2}{4\mu}+\mu k^2\pi^2\right)t+\frac{c}{2\mu}x}\sin k\pi x$

pour des constantes (C_k) que l'on précisera, ainsi que le type de convergence de cette série en fonction de la régularité de la donnée initiale u_0.

CHAPITRE V : QUELQUES PROBLÈMES DE CAUCHY

Pour trois des opérateurs "instationnaires" (id est : dépendant du "temps") les plus importants en physique, l'équation de la chaleur $\partial_t - \Delta$, l'équation de Schrödinger $\frac{1}{i}\partial_t - \Delta$, et l'équation des ondes $\partial_t^2 - \Delta$, on répond à deux questions fondamentales :

- trouver une "bonne" solution élémentaire (en particulier tempérée)
- résoudre le problème de Cauchy pour une donnée initiale "raisonnable".

§1 UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE LA CHALEUR

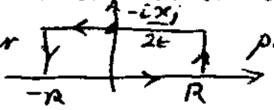
L'équation "de la chaleur" régit des phénomènes de diffusion ; c'est le prototype des équations d'évolution dites "paraboliques".

On cherche une distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$, et telle que $\partial_t E - \Delta E = \delta_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Sa transformée de Fourier partielle en x, $\tilde{E}$, vérifie alors : $\partial_t \tilde{E} + |\xi|^2 \tilde{E} = \delta(t) \otimes 1(\xi)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, la solution de cette équation différentielle en t dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ est $\tilde{E}(t,\xi) = H(t) e^{-|\xi|^2 t}$, qui est une fonction $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, associée à une distribution visiblement tempérée : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $|\langle \tilde{E}, \varphi \rangle| \leq \left(\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{dt\, d\xi}{(1+t^2+|\xi|^2)^{n+2}} \right) \sup (1+t^2+|\xi|^2)^{n+2} |\varphi(t,\xi)|$.

En fait pour tout $t \neq 0$, $\tilde{E}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'où par inversion de Fourier :

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi . x - t|\xi|^2} d\xi = H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(\xi_j - \frac{ix_j}{2t})^2} d\xi_j \right)$$

$$= H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j}_{= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \text{ (cf. p.32)}} \right)$$

(par le calcul des résidus sur le contour  puis $R \to \infty$)

soit

$$\boxed{E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

Cette fonction ne coïncide avec E a priori que dans l'ouvert $\{t \neq 0\}$, puisque ce calcul "intégral" de $\mathcal{F}_x$ ne vaut que pour une fonction intégrable ; mais $\partial_t E - \Delta E$ est nulle partout sauf à l'origine, car E y est C^∞.

Mais $E(t,x) \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ (même à l'origine), ce qui permet d'écrire $\langle \partial_t E - \Delta E, \varphi \rangle$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ sous forme intégrale, et de vérifier alors, à nouveau par Fourier partiel que ça fait $\varphi(0)$!

La distribution associée à la fonction localement intégrable $E(t,x)$ ci-dessus est donc une solution élémentaire de l'équation de la chaleur, qui est $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ (mais pas analytique puisque $E|_{t<0} \equiv 0$).

En particulier l'opérateur de la chaleur est hypoelliptique, mais pas hypoelliptique-analytique. (cf. ch. II §6, Théorème, et Remarque 2)

§2 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LA CHALEUR

$u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ et $f \in \mathcal{D}'(\underbrace{]0,+\infty[}_{=\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ étant données, on cherche $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que : $\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ (il faut donc que $u(0,x)$ ait un sens !)

Le résultat de base est le suivant (traitant le cas homogène : $f=0$)

> **Théorème** : Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Il existe une et une seule application continue de $[0,+\infty[\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, soit $t \longmapsto (u(t))_x = u(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, et $u(0) = u_0$.

Preuve : Si $t \mapsto u(t)$ est continue de $[0,+\infty[$ dans H^s, alors $t \mapsto \Delta_x u(t)$ est continue de $[0,+\infty[$ dans H^{s-2} (composée d'applications continues), et si u est solution, $t \mapsto \partial_t u(t)$ va de $\mathbb{R}^+$ dans H^{s-2}, $\partial_t \tilde{u} = \widetilde{\partial_t u}$ (en notant $\sim$ la transformation de Fourier partielle en x), comme on le voit "faiblement" dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, d'où $\partial_t \tilde{u} + |\xi|^2 \tilde{u} = 0$ pour $t>0$, donc $\partial_t\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi)\right) = -|\xi|^2\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi)\right)$

La parenthèse étant une fonction $\mathbb{L}^2$ de ξ, cette équation s'intègre en $(1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi) = C(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, et quand $t \to 0^+$ il vient à la limite et pour presque tout ξ : $C(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}_0(\xi)$. Finalement $\tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$

Comme $|e^{-|\xi|^2 t}| \leq 1$ et $\tilde{u}_0(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \mathbb{L}^2$, on a $u(t,x) = (\tilde{u}(t,\xi))^{\sim -1} \in H^s$ pour tout $t \geq 0$ fixé, et la continuité de $t \longmapsto (\tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t})^{\sim -1}$ résulte par exemple du théorème de convergence dominée. ∎

Proposition : La solution u du problème de Cauchy précédent est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$

Preuve : En itérant que $\partial_t \tilde{u} = -|\xi|^2 \tilde{u}$, il vient $\partial_t^k \tilde{u}(t,\xi) = (-1)^k |\xi|^{2k} \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, d'où $\|\partial_t^k u\|_{H^{s-2k}} \leq \|u_0\|_{H^s}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $s' \in \mathbb{R}$ $(1+|\xi|^2)^{s'/2} |\xi|^{2k} \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t>0$, donc $\partial_t^k u(t,\cdot) \in \bigcap_{s' \in \mathbb{R}} H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Remarques : 1) Le problème général (non homogène), avec un second membre f (tempéré en x) se traite formellement de la même façon : $\partial_t \tilde{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{f}(t,\xi)$ et $\tilde{u}(0,\xi) = \tilde{u}_0(\xi)$, d'où $\tilde{u}(t,\xi) = C(t,\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, avec $\partial_t C(t,\xi) e^{-|\xi|^2 t} = \tilde{f}(t,\xi)$ (méthode de "variation de la constante").

Il s'ensuit que $C(t,\xi) = \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds + C_0(\xi)$, puis $\tilde{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t} \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds + C_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, et pour $t=0$, $\tilde{u}_0(\xi) = C_0(\xi)$.

Finalement : $$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x - |\xi|^2 t} \left\{ \tilde{u}_0(\xi) + \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds \right\} d\xi \quad !$$

mais cette formule est souvent délicate à exploiter, car les intégrales sont "formelles" : l'une signifie "une certaine primitive de $\tilde{f} e^{|\xi|^2 \cdot}$, à préciser, et l'autre la transformée de Fourier d'une distribution tempérée...

2) Supposons $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u_0 \subset \bar{B}(0,R)$. Le théorème de Paley-Wiener (ch. III, §4) nous dit alors que $\tilde{u}_0$ est une fonction entière telle que : $\exists N \in \mathbb{N}, C>0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n$, $|\tilde{u}_0(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{R|\operatorname{Im}\xi|}$. Par suite, pour $t>0$ donné, $\tilde{u}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$ est encore une fonction entière, et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que toutes ses dérivées en ξ (on majore les dérivées en utilisant la formule de Cauchy). Donc $\tilde{u}(t,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par suite $u(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aussi.

Mais $\tilde{u}$ n'est plus "de type exponentiel" dans les directions imaginaires, car $|e^{-t(\xi+i\eta)^2}| = |e^{-t(\xi^2-\eta^2)-2it\xi\cdot\eta}| = e^{-t\xi^2} e^{t\eta^2}$ ne peut se majorer par $C' e^{R'|\eta|}$ pour aucun couple $R'>0, C'>0$. Il s'ensuit, toujours par le théorème de Paley-Wiener, que $u(t,x)$ n'est pas à support compact (pour aucun $t>0$). Autrement dit : la diffusion de la chaleur se fait instantanément jusqu'à l'infini !

3) Dans l'équation de la chaleur, le signe moins dans $\partial_t - \Delta$ joue un rôle essentiel : il n'est pas question "d'inverser le temps" ($t \mapsto -t$), comme le prouve l'effet "régularisant" de la diffusion, décrit à la proposition précédente. La thermodynamique décrit des phénomènes "non réversibles" !

4) Pour $t \geq 0$ fixé, notons L_t l'application $u_0 \mapsto u(t,\cdot)$ du théorème. C'est un endomorphisme de $H^s(\mathbb{R}^n)$, de norme ≤ 1. De plus, comme $\widetilde{L_{t+t'}(u_0)}(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2(t+t')} = \left(\tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t'}\right) e^{-|\xi|^2 t}$, on a $L_t \circ L_{t'} = L_{t+t'}$, pour tous $t, t' \geq 0$, et $L_0 = id_{H^s}$. On dit qu'on a un semi-groupe d'endomorphismes de H^s.

Formellement si l'on pose $D = \lim_{h\to 0} \frac{L_{t+h}-L_t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L_h - id}{h}$, on aura $L_t = e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n$, et on peut donc reconstituer L_t à partir de la connaissance de son "générateur infinitésimal" D (qui est sa "dérivée" à l'origine). Mais D est ici l'opérateur $\mathcal{F}_\xi^{-1} \circ (-|\xi|^2 \cdot) \circ \mathcal{F}_x$, c'est-à-dire le laplacien Δ qui applique H^s dans H^{s-2} : c'est ce qu'on appelle un "opérateur non borné" sur H^s : il n'est défini que sur une partie de H^s, son "domaine" (qui est dense, puisqu'il contient H^{s+2}). Formellement au moins, la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur peut donc s'écrire :

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Delta^n u_0(x)}$$

Il resterait à déterminer quelle hypothèse il faut faire sur u_0 pour que la série soit convergente, au moins faiblement !

(§3) UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE SCHRÖDINGER

La recherche d'une solution E tempérée de $\frac{1}{i}\partial_t E - \Delta E = \delta$ peut se faire encore par transformation de Fourier partielle (notée ici $\sim$) sur les variables d'espace : $\frac{1}{i}\partial_t \tilde{E} + |\xi|^2 \tilde{E} = \delta(t) \otimes 1_x$, d'où une solution $\tilde{E}$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ pour tout ξ fixé : $\tilde{E}(t,\xi) = i H(t) e^{-i|\xi|^2 t}$, qui est une fonction L^∞, donc L^1_{loc}, qui définit bien une distribution tempérée. Mais l'inversion de Fourier est ici un peu plus délicate, car le résultat n'est plus L^1_{loc}. Si l'on pose $\tilde{E}_\varepsilon = i H(t) e^{-(\varepsilon + it)|\xi|^2}$, avec $\varepsilon > 0$, $\tilde{E}_\varepsilon \to \tilde{E}$ quand $\varepsilon \to 0^+$, dans L^1_{loc} (convergence dominée), donc aussi faiblement dans $\mathcal{S}'$! Pour $\tilde{E}_\varepsilon$, le même calcul de l'inversion de Fourier que dans le cas de la chaleur (cf. §1) donne pour $t > 0$:

$$E_\varepsilon(t,x) = i(2\pi)^{-n} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4(\varepsilon+it)}\right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\varepsilon+it)|\xi|^2} d\xi$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, la dernière intégrale, qui s'écrit $\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon+it)\xi_j^2} d\xi_j\right)$, tend vers la puissance n-ième de $\frac{1}{\sqrt{t}} J$, où J est "l'intégrale de Fresnel", oscillante mais simplement convergente :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du .$$

Il est classique (calcul des résidus, après usage de la parité et de $u^2 = v$) que $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Comme $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, E_ε tend point par point vers la fonction

$$\boxed{E(t,x) = H(t)\, e^{-i(n-2)\frac{\pi}{4}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4it}\right)}$$

Mais cette fonction n'est plus L^1_{loc} au voisinage de $t=0$ (sauf si $n=1$), et ne peut définir une distribution tempérée que par un procédé de "partie finie" à plusieurs variables (cf. ch. I, § 6, le cas d'une variable ; il s'agirait ici de définir $\mathrm{Pf}\, \frac{H(t)}{(\sqrt{t})^n}$, avec $n=3$ dans le cas "physique")

Si l'on choisit comme définition de cette partie finie «la limite faible de E_ε quand $\varepsilon \to 0^+$», alors la distribution associée est bien une solution élémentaire de l'équation de Schrödinger, de support $\overline{\mathbb{R}^+_t} \times \mathbb{R}^n_x$. Comme $E|_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$ n'est pas C^∞ (même pas L^1_{loc} !) on conclut (ch. II, §6) que l'opérateur de Schrödinger n'est pas hypoelliptique.

§4 PROBLÈME DE CAUCHY POUR SCHRÖDINGER

Pour le problème de Cauchy "homogène": $(*)\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t u - \Delta_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$
on a de même (cf §2) le

Théorème: Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Le problème $(*)$ admet une et une seule solution $t \mapsto u(t,x) \in C^0([0,+\infty[\to H^s(\mathbb{R}^n))$. Elle est donnée par: $\forall t \geq 0 \quad \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_0(\xi)\, e^{-it|\xi|^2}$, où $\sim$ est la transformation de Fourier dans les variables d'espace.

Preuve: Si u est solution, $\partial_t \tilde{u} = -i|\xi|^2\tilde{u}$, d'où, en raisonnant comme pour le théorème du §2, la formule ci-dessus, et donc l'unicité. Comme on en déduit $|\tilde{u}(t,\xi)| = |\tilde{u}_0(\xi)|$ (pour presque tout ξ), donc $\|u(t,\cdot)\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$, à t fixé, l'application $L_t : H^s \to H^s$ $(u_0 \mapsto u(t,\cdot))$ est bien continue, et même isométrique. La continuité en t résulte encore de la convergence dominée, comme au §2. ∎

Remarques: 1) $L_t : u_0 \mapsto u(t,\cdot)$ définit encore un semi-groupe d'opérateurs unitaires $(\|L_t u\| = \|u\|)$ de chaque H^s $(s \in \mathbb{R})$: $L_t \circ L_{t'} = L_{t+t'}$, et $L_0 = id$ (cf §2, remarque 4). Mais de plus ici, chaque L_t est inversible, et $L_t^{-1} = L_{-t}$ avec $\widetilde{L_{-t}u}(\xi) = \tilde{u}(\xi)\, e^{+i|\xi|^2 t}$, et c'est donc tout un groupe d'isomorphismes unitaires de H^s que définit l'équation de Schrödinger.

Cette équation décrit en effet l'évolution des particules élémentaires en mécanique quantique, et décrit des phénomènes "réversibles": changer t en $-t$ revient à changer i en $-i$ dans l'équation, ce qui est bien sûr indécelable !

2) Le groupe ci-dessus ne produit aucune "régularisation" de la donnée initiale: $L_t(H^s) = H^s$. Par exemple si $u_0 = \delta(x) \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\widetilde{L_t\delta} = e^{-it|\xi|^2}$, d'où $L_t\delta = e^{-in\frac{\pi}{4}}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right)$ pour $t > 0$ (cf. ci-dessus §3, et chap III, §8, ex 11, d), p. 48). Si l'on choisit $u_0 = L_{-t}\delta$, donc $u_0 = e^{in\frac{\pi}{4}}|4\pi t|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-i|x|^2}{4t}\right)$, on aura donc $L_t u_0 = \delta$. Ceci montre d'ailleurs que $|t|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{\pm i|x|^2}{4t}\right) \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais pas mieux, comme δ.

3) L'opérateur L_t a un "noyau" K_t, c'est-à-dire que c'est un opérateur de convolution: $\forall u \in H^s$, $L_t u = K_t * u$, où $K_t = L_t\delta$ est la distribution associée à la fonction définie au (2). C'est un "convoluteur de $\mathcal{S}'$", au sens de (chap III, §8, ex 13), puisque $\widetilde{K_t} = e^{-it|\xi|^2}$ est, pour tout t fixé, une fonction tempérée.

4) Pour $s = 0$, $H^s = L^2(\mathbb{R}^n)$, et $|u(t,x)|^2$ s'interprète en mécanique quantique comme la densité de probabilité de présence à l'instant t au point x (d'un électron, par exemple):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(t,\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(0,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(0,x)|^2 dx = 1.$$

5) Comme pour la chaleur (§2, Proposition), du fait que $\partial_t u = i\Delta u$, on déduit aussitôt par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $\|\partial_t^k u\|_{H^{s-2k}} \leq \|u_0\|_{H^s}$.
On ne peut en déduire que $t \mapsto u(t,\cdot)$ est C^∞ de $]0,+\infty[$ dans chaque H^s, comme à la proposition du §2 (et c'est faux), mais cette application est C^∞ (faiblement) à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pour tout $u_0 \in \mathcal{S}$, puisque c'est un convoluteur de $\mathcal{S}'$, de $\mathbb{L}^2$, et de $\mathcal{S}$ (cf. rem. 3)

6) <u>Proposition</u>: <u>Si $u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$, alors</u>
<u>$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(|t|^{-n/2})$ quand $t \to \infty$.</u>

Preuve: $u(t,x) = (K_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\, u_0(y)\, dy$ (cf. remarque 3)
d'où $\sup_x |u(t,x)| \leq \sup |K_t| \cdot \|u_0\|_{\mathbb{L}^1}$, et $|K_t| = (4\pi|t|)^{-n/2}$. ∎

<u>Corollaire</u>: <u>Soit E une région de l'espace de volume fini</u> (c'est-à-dire: $\chi_E \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$)
<u>Alors</u> $\int_E |u(t,x)|^2 dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ <u>quand $t \to \infty$.</u>

Preuve: par "régularisation", il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u_0 - \varphi\|_{\mathbb{L}^2} < \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$ donné), d'où

$$\left(\int_E |u(t,x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_E |L_t u_0(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_E |L_t u_0 - L_t\varphi|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_E |L_t \varphi|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \|L_t(u_0 - \varphi)\|_{\mathbb{L}^2} + \sup |L_t\varphi| \cdot \sqrt{v(E)} = \|u_0 - \varphi\|_{\mathbb{L}^2} + \sqrt{v(E)}\, \|L_t \varphi\|_{\mathbb{L}^\infty}$$

où $v(E) = \int_E dx < \infty$, $\|u_0 - \varphi\|_{\mathbb{L}^2}$ est arbitrairement petit, et $\|L_t\varphi\|_\infty$ tend vers zéro quand $t \to \infty$, car $\|L_t \varphi\|_\infty \leq \sup |K_t| \cdot \|\varphi\|_{\mathbb{L}^1}$, et on conclut par la proposition ci-dessus. ∎

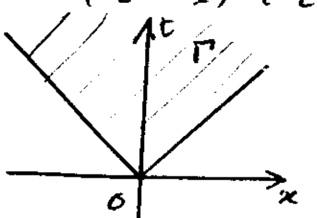
<u>Interprétation physique du corollaire</u>: Sans influence extérieure (c'est-à-dire, lorsque le second membre de (*) est nul), les particules élémentaires "s'évanouissent à l'infini" (d'où elles sont venues de toutes façons ! ($t \to -\infty$)
« Vanitas vanitatum, et omnia vanitas »)

---

§5 UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DES ONDES

L'opérateur "<u>des ondes</u>" (ou "d'Alembertien" (sic)) gouverne l'évolution de phénomènes "vibratoires"; on le rencontre donc en acoustique par exemple, mais aussi et surtout en électromagnétisme (équations de Maxwell).

— Traitons d'abord le cas $n=1$ (équation "<u>des cordes vibrantes</u>"), qui est très particulier du fait que l'opérateur est alors <u>factorisable</u> en
$\square = (\partial_t - \partial_x)\circ(\partial_t + \partial_x) = (\partial_t + \partial_x)\circ(\partial_t - \partial_x)$, ce qui n'est plus le cas pour $n \geq 2$.



Une <u>solution élémentaire</u> est alors

$$\underline{E(t,x) = \tfrac{1}{2} H(t-x)\, H(t+x)}$$

qui est à support dans le demi-cône "de lumière" (ou "cône d'avenir") $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t+x \geq 0 \text{ et } t-x \geq 0\}$
(cf. chap I, §7, ex. 22 p. 16, ex. T_2). On peut aussi écrire
$E(t,x) = \frac{1}{2} H(t)\, H(t^2 - x^2)$, puisque $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 \geq x^2 \text{ et } t \geq 0\}$.

On vérifie que $\underline{(\partial_t^2-\partial_x^2)E=\delta}$, par exemple ainsi : si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$I=\langle(\partial_t^2-\partial_x^2)E,\varphi\rangle=\frac{1}{2}\iint_\Gamma\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)dt\,dx.$

Si l'on pose $\begin{cases}u=t+x\\ v=t-x\end{cases}$, il vient $\partial_t=\partial_u+\partial_v$ et $\partial_x=\partial_u-\partial_v$, d'où $\partial_t^2-\partial_x^2=4\partial_u\partial_v$,

$dt\,dx=\frac{1}{2}du\,dv$, et $I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi(u,v)}{\partial u\partial v}du\,dv=\int_0^{+\infty}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,0)du=\varphi(0,0)=\langle\delta,\varphi\rangle.$ ∎

Notons que E est $\mathbb{L}^1_{loc}$ et $\mathbb{L}^\infty$, donc tempérée, mais pas C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, et l'équation des ondes n'est <u>pas hypoelliptique</u> (même pour $n>1$, comme on va le voir).

— Dans le cas général ($n>1$) on s'intéresse surtout aux propriétés de support et d'invariance d'une "bonne" solution élémentaire (qui permettent de "démontrer" pour $n=3$, en physique, les principes de "causalité", et de la "relativité (restreinte)" !)

On procède, comme dans tout ce chapitre, par transformation de Fourier partielle sur les variables d'espace (notée ici $\sim$) : l'équation $\partial_t^2E-\Delta E=\delta$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ devient $\partial_t^2\tilde{E}+|\xi|^2\tilde{E}=\delta(t)\otimes 1_\xi$, ce qui se résout facilement dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ à ξ fixé, par le calcul symbolique (ch II, § 5) : $(\delta''+|\xi|^2\delta)^{*-1}=(\delta'-i|\xi|\delta)^{*-1}*(\delta'+i|\xi|\delta)^{*-1}=H(t)e^{i|\xi|t}*H(t)e^{-i|\xi|t}$, d'où $\tilde{E}(t,\xi)=H(t)\,\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$ (et $tH(t)$ pour $\xi=0$), qui pour ξ fixé est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t)$, donc est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. Comme $\tilde{E}(t,\xi)$ n'est pas intégrable en t, on remarque que c'est la limite faible, quand $\varepsilon\to0^+$, de $\tilde{E}_\varepsilon(t,\xi)=H(t)\,e^{-\varepsilon t}\,\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$, et $\hat{E}(\tau,\xi)$ est donc la limite faible de $(\tilde{E}_\varepsilon)^{\wedge t}=\int_0^{+\infty}e^{-it(\tau-i\varepsilon)}\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}dt=\frac{1}{2i|\xi|}\int_0^{+\infty}\big(e^{-i(\tau-i\varepsilon-|\xi|)t}-e^{-i(\tau-i\varepsilon+|\xi|)t}\big)dt$

$=\frac{-1}{2|\xi|}\Big(\frac{1}{\tau-i\varepsilon-|\xi|}-\frac{1}{\tau-i\varepsilon+|\xi|}\Big)=\frac{-1}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$

D'où $\langle E,\check{\varphi}\rangle=\langle\hat{\hat{E}}^{-1},\check{\varphi}\rangle=\langle\hat{E},\hat{\check{\varphi}}^{-1}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\lim_{\varepsilon\to0}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$

Pour $\varphi\in\mathcal{D}$, la fonction sous l'intégrale est holomorphe en τ tant que le dénominateur ne s'annule pas (Paley-Wiener) ; on peut donc (calcul des résidus) translater dans l'imaginaire l'intégration en τ : pour tout $a>0$

$\langle E,\check{\varphi}\rangle=(2\pi)^{-n-1}\lim_{\varepsilon\to0}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$, ce qui trivialise la limite en ε :

$\langle E,\check{\varphi}\rangle=(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia)^2-|\xi|^2}$ (pour tout $a>0$)

La même manipulation vaut pour les variables "d'espace" ξ, à condition de ne jamais annuler le dénominateur ; finalement :

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $|b|^2<a^2$ et $a>0$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\boxed{\langle E,\check{\varphi}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi-ib)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia)^2+(\xi-ib)^2}}$$

définit une <u>solution élémentaire de $\square$</u>, tempérée (l'intégrale ne dépend pas de (a,b) soumis aux conditions prescrites).

C'est la solution qui nous intéresse, car elle répond aux deux énoncés :

<u>Proposition : E est invariante par la composante connexe de l'origine du groupe de Lorentz</u>

"<u>Rappels</u>" (sic) : <u>Le groupe de Lorentz</u> (homogène ; on compose avec les translations, pour obtenir le groupe entier) est le sous-groupe (fermé) de $GL(\mathbb{R}^{n+1}_{\tau,\xi})$ des transformations linéaires qui conservent la forme quadratique $\tau^2-|\xi|^2$ (qui définit la pseudo-"métrique" de Minkovsky (=relativiste) sur l'"espace-temps" local $\mathbb{R}^{n+1}$). Il est découpé en deux par le déterminant (qui vaut ± 1), et chaque composante encore en deux par le "signe de t", conservé ou non : il a donc quatre composantes connexes, celle de l'identité étant définie par les conditions : la transformation conserve l'orientation (déterminant) et la flèche du temps (signe de τ).

Soit G_0 cette composante (qui est connexe !). G_0 contient évidemment le sous-groupe $O(n)$ des rotations d'espace (qui conserve séparément $|\xi|$ et τ, et le déterminant)

<u>Preuve</u> : Comme l'intégrale qui définit E est indépendante de $(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$ sous les conditions $a>0$ et $|b|^2<a^2$, il suffit de montrer que ces conditions sont conservées par une transformation de G_0, ce qui est clair ! ■

<u>Proposition : $\operatorname{supp} E\subset\Gamma=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2\le t^2 \text{ et } t\ge 0\}$ ("cône d'avenir")</u>

<u>Preuve</u> : On sait déjà que $E|_{t<0}=0$ (voir l'expression de $\widetilde{E}$, p. 76). Or les transformations de Lorentz du sous-groupe G_0 transforment le demi-espace ouvert $\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t<0\}$ en n'importe quel autre demi-espace sous le cône d'avenir Γ (c'est-à-dire ne le rencontrant pas), et la réunion de tous ces demi-espaces est le complémentaire de Γ ! ■ (cf. §7, exercice 8)

---

§6 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ONDES

Le "problème de Cauchy" général, pour une équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ consiste à chercher celles de ses solutions qui ont une "valeur" donnée au "temps" $t=0$ ("condition initiale"). On dit qu'il est <u>bien posé</u> lorsqu'il admet une et une seule solution (dans l'espace où on les cherche !). Lorsque l'équation étudiée est de degré m en temps (id est : fait intervenir les dérivées en temps de l'inconnue jusqu'à l'ordre m), il faut, pour qu'il soit "bien posé", se donner les valeurs pour $t=0$, de toutes ses dérivées en temps jusqu'à l'ordre $m-1$ (phénomène bien connu pour les équations différentielles "ordinaires", c'est-à-dire portant sur les fonctions d'une seule variable). Ainsi pour l'équation des ondes, qui est d'ordre deux, le "problème de Cauchy" est : trouver $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telle que :

$$(*)\quad \begin{cases} \partial_t^2 u-\Delta_x u=0 \\ u|_{t=0}=u_0 \text{ et } \partial_t u|_{t=0}=u_1 \end{cases} \qquad (u_0,u_1 \text{ données dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

Évidemment les restrictions à $t=0$ auront un sens par le théorème de trace (ch. IV, §4).

<u>Théorème</u>. <u>Pour toute donnée de $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, le problème (*) a une et une seule solution $u \in C^0(\mathbb{R}, H^s) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-1})$.</u>
De plus l'application $(u_0, u_1) \longmapsto (u, \partial_t u)$ est continue de $H^s \times H^{s-1}$ dans $C^0(\mathbb{R}, H^s) \times C^1(\mathbb{R}, H^{s-1})$ en ce sens qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute donnée de $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s} + \|\partial_t u(t,\cdot)\|_{H^{s-1}} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s} + (1+|t|)\|u_1\|_{H^{s-1}} \right)$$

<u>Preuve</u>: Par transformation de Fourier en espace, notée ici $\sim$: $\tilde{u}(t,\xi)$, $\tilde{u}_0(\xi)$, $\tilde{u}_1(\xi)$ sont, ou doivent être, des <u>fonctions</u> $\mathbb{L}^1_{loc}$ de ξ, à t fixé (par définition des H^s), vérifiant: $\partial_t^2 \tilde{u} + |\xi|^2 \tilde{u} = 0$, $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$, $\partial_t \tilde{u}(0) = \tilde{u}_1$. Pour ξ fixé, l'équation différentielle se résout en $\tilde{u} = A \cos|\xi|t + B \sin|\xi|t$, d'où $\tilde{u}_0 = A$ et $\partial_t \tilde{u}(0) = B|\xi|$.
Par suite, nécessairement

$$(**) \qquad \boxed{\tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_0(\xi) \cos|\xi|t + \tilde{u}_1(\xi) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}}$$

d'où l'unicité de la solution; on voit aussi sur (**) que u et $\partial_t u$ sont des fonctions C^∞ de t à valeurs dans H^s et dans H^{s-1} respectivement. De plus

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{H^s} \leq \int (1+|\xi|^2)^s \left(|\tilde{u}_0(\xi)|^2 |\cos|\xi|t|^2 + |\tilde{u}_1(\xi)|^2 \frac{|\sin|\xi|t|^2}{|\xi|^2} \right) d\xi$$

Le deuxième terme de la parenthèse ne pose pas de problème en 0, mais est en $O(t^2)$ dans cette région $\left(\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \underset{|\xi|\to 0}{\sim} t \right)$, en $|\xi|^{-2}|\tilde{u}_1(\xi)|^2$ à l'infini, d'où

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{H^s} \leq \|u_0\|^2_{H^s} + C^{te}(1+|t|^2)\|u_1\|^2_{H^{s-1}} \leq C^{ste}\left(\|u_0\|_{H^s} + (1+|t|)\|u_1\|_{H^{s-1}} \right)^2.$$

De même, par (**) $\partial_t \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_1(\xi) \cos|\xi|t - \tilde{u}_0(\xi)|\xi| \sin|\xi|t$, (***) d'où

$$\|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{H^{s-1}} \leq \int (1+|\xi|^2)^{s-1} \left(|\tilde{u}_1(\xi)|^2 |\cos|\xi|t|^2 + |\tilde{u}_0(\xi)|^2 |\xi|^2 |\sin|\xi|t|^2 \right) d\xi$$
$$\leq \|u_1\|^2_{H^{s-1}} + \|u_0\|^2_{H^s} \leq \left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} \right)^2. \blacksquare$$

<u>Définition</u>: On appelle <u>énergie</u> de la solution u de (*) au temps t, le nombre $e(t)$ suivant, défini dès que $s \geq 1$:

$$e(t) = \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2}$$

<u>Proposition</u> (<u>"Conservation de l'énergie"</u>): $\boxed{e(t) = e(0) = \|u_1\|^2_{\mathbb{L}^2} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u_0\|^2_{\mathbb{L}^2}}$ $(\forall t)$

<u>Preuve</u>: De (**) et (***) on tire d'abord

$\partial_j \tilde{u}(t,\xi) = i\xi_j \tilde{u}_0(\xi) \cos|\xi|t + i\xi_j \tilde{u}_1(\xi) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$, puis

$$|\partial_t \tilde{u}(t,\xi)|^2 = |\xi|^2 |\tilde{u}_0(\xi)|^2 (\sin|\xi|t)^2 + |\tilde{u}_1(\xi)|^2 (\cos|\xi|t)^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(|\xi| \sin|\xi|t \cos|\xi|t \, \tilde{u}_0(\xi) \overline{\tilde{u}_1(\xi)} \right)$$

et $|\partial_j \tilde{u}(t,\xi)|^2 = |\xi_j|^2 |\tilde{u}_0(\xi)|^2 (\cos|\xi|t)^2 + \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2} |\tilde{u}_1(\xi)|^2 (\sin|\xi|t)^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{|\xi_j|^2}{|\xi|} \sin|\xi|t \cos|\xi|t \, \tilde{u}_0(\xi) \overline{\tilde{u}_1(\xi)} \right)$

Finalement: $|\partial_t \tilde{u}(t,\cdot)|^2 + \sum |\partial_j \tilde{u}(t,\cdot)|^2 = |\xi|^2 |\tilde{u}_0(\xi)|^2 + |\tilde{u}_1(\xi)|^2$, ne dépend pas de t, et la formule encadrée s'en déduit en intégrant en ξ. $\blacksquare$

<u>Remarques</u>: 1) <u>La preuve de la proposition montre qu'en fait, c'est à chaque "fréquence" ξ que l'énergie est conservée.</u>

Une autre preuve, moins précise, mais plus directe et instructive se déduit du lemme général: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j T = 0$ faiblement

Preuve du lemme : Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, puisque $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (intégrer d'abord en x_j). ∎

Preuve de la proposition : d'après (*),

$$0 = \partial_t u . \partial_t^2 u - \sum_j \partial_t u \, \partial_j^2 u = \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_t u)^2\right) - \sum_j \left(\partial_j (\partial_t u \, \partial_j u) - \partial_j \partial_t u . \partial_j u\right)$$

$$= \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_t u)^2\right) + \sum_j \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_j u)^2\right) - \sum_j \partial_j (\partial_t u \, \partial_j u)$$

d'où en intégrant (en x) sur $\mathbb{R}^n$, et grâce au lemme :

$$\tfrac{1}{2} \partial_t e(t) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (\partial_t u \, \partial_j u) \, dx = 0 ,$$ et $e(t)$ est constante. ∎

2) Si l'on pose $K_t(x) = \left(\frac{\sin |\xi| t}{|\xi|}\right)^{\vee - 1}$, la solution de (*) donnée par le théorème s'écrit :

$$\boxed{u = \partial_t K_t * u_0 + K_t * u_1}$$

K_t est le "noyau" de l'équation des ondes : c'est aussi la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \partial_t^2 K - \Delta K = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ K|_{t=0} = 0 , \ \partial_t K|_{t=0} = \delta_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$

puisque $K = \partial_t K_t * 0 + K_t * \delta = K_t$! D'après le théorème, on a donc $K_t \in C^0(\mathbb{R}, H^{-n/2-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\delta \in H^{-n/2-\varepsilon}$. Mais K_t n'est pas en général une fonction L^1_{loc}, sauf pour $n=1$, comme le montrent les exemples qui suivent.

3) Le cas $n=1$ (équation des "cordes vibrantes")

Rappelons que $\widetilde{\chi}_{[-a,a]}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} dx = \left. \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right|_{-a}^{a} = \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} = 2 \frac{\sin a\xi}{\xi}$ $(a > 0)$

Comme $\widetilde{K}_t(\xi) = \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} = \frac{\sin \xi t}{\xi}$, il vient $K_t(x) = \frac{1}{2} \chi_{[-t,t]}$, d'où

$(K_t * u_1)(x) = \int K_t(x-y) u_1(y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$, puis

$(\partial_t K_t * u_0)(x) = \frac{1}{2} \partial_t \left(\int_{x-t}^{x+t} u_0(y) dy \right) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t))$, et finalement :

$$\boxed{u(t,x) = \tfrac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy}$$ "Formule des cordes vibrantes"

On voit que $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs de u_0 et u_1 sur l'intervalle $[x-t, x+t]$: l'information ne se propage "pas plus vite que la lumière" (de vitesse 1 ici : l'équation des ondes électromagnétiques est $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$, où c est la vitesse de la lumière).

4) Le support du noyau : On admettra ici le résultat important que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\operatorname{supp} K_t \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 \leq t^2 \text{ et } t \geq 0\}$ (le "cône d'avenir") (la preuve est analogue à celle esquissée au §5 pour la solution élémentaire).

L'inclusion ci-dessus est en fait une égalité pour n pair, tandis que K_t est beaucoup plus concentrée, sur le bord du cône pour n impair.

Cette propriété de support (et celle du produit de convolution) montre que le principe que "l'information ne va pas plus vite que la lumière", vu ci-dessus pour $n=1$, vaut en toutes dimensions.

- Pour $n=3$ on peut montrer que $K_t = \frac{1}{4\pi t} d\sigma_t$, où $d\sigma_t$ est la mesure de surface de $B(0,|t|)$, d'où :

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{B(0,t)} u_1(s_t)\,ds_t + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{B(0,t)} u_0(s_t)\,ds_t\right) \quad \text{pour } t>0$$

et si par exemple supp u_0 et supp u_1 sont contenus dans $\bar{B}(0,R)$, le support de $u(t,x)$ sera contenu dans la couronne $\{-R+|t| \leq |x| \leq R+|t|\}$ dès que $|t|>R$ ("principe de Huygens").

– Pour $\underline{n=2}$ on peut montrer que $K_t = \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}\chi_\Gamma$, où $\Gamma = \{(t,x) \mid |x| \leq t\}$ et le même raisonnement sur le support d'un produit de convolution montre alors seulement que le support de $u(t,x)$ est contenu dans $\bar{B}(0,R+|t|)$ si supp u_0 et supp $u_1 \subset \bar{B}(0,R)$.

(§7) THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

1) Soit $u_0(x)$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la solution du problème de Cauchy $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ pour $t>0$ et $u(0,\cdot) = u_0$ peut s'écrire pour $t>0$ $u(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right)dy$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t,x) \to u_0(x)$ quand $t \to 0^+$.

2) On suppose maintenant u_0 analytique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'alors la solution peut s'écrire :
$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Delta_x^n u_0(x)$ (cf. §2, remarque 4)
la série convergeant au moins localement : $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n$ $\exists t_0>0$, tel que la série est uniformément convergente sur $[-t_0,t_0]\times K$ (Utiliser la formule de Cauchy pour majorer les dérivées d'un prolongement de u_0 aux complexes).

3) Réflexion sur l'"anti-chaleur" : $(*)\begin{cases}\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0\end{cases}$

a) L'opérateur L_t de la chaleur (§II, théorème et remarque 4) est injectif de H^1 dans H^1 (Montrer que c'est la restriction d'une application $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ injective)
b) En déduire l'unicité d'une application $t \mapsto u(t,\cdot)$ qui soit solution de $(*)$ et continue de $[0,T]$ dans $\mathcal{S}'$ (faible)
c) Supposons qu'on puisse écrire $u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} f(\lambda)\,d\lambda$, même en un sens faible. Montrer que $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t} e^{-\lambda x} f(\lambda)\,d\lambda$ est une intégrale qui converge au moins aussi bien, et solution de la question (b).
(comparer aux remarques du ch. III, §7)
d) Et si l'intégrale qui définit u_0 est sur un chemin du plan complexe ? (contenu dans $\operatorname{Re}\lambda^2 > 0$, par exemple !)
e) Quelles sont les distributions qu'on peut écrire sous une telle forme intégrale ? On rappelle par exemple la "formule de Mellin" :
$\frac{\Gamma(s)}{x^s} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\lambda^{s-1}\,d\lambda$, dès que $\operatorname{Re}s>0$ et $\operatorname{Re}x>0$ ...

4) Expliciter tous les raisonnements esquissés à la remarque (5) du §4 (à propos du groupe unitaire de l'équation de Schrödinger)

5) L'équation de Schrödinger des § 3 et 4 n'est qu'un cas particulier (une particule dans le vide !), de la vraie équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la fonction d'onde d'un "quanton" soumis à un champ dérivant d'un potentiel $V(x)$, et qui s'écrit : $i\hbar\, \partial_t u(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x u + V(x).u$, soit à des changement d'échelle près :

$$\frac{1}{i}\partial_t u - \Delta u + V(x).u = 0$$

a) Cas de l'"oscillateur harmonique" : $V(x) = |x|^2$

Montrer que le développement des distributions tempérées en séries de fonctions d'Hermite (ch III, § 8, ex 14, p 49) permet de résoudre complètement le problème de Cauchy dans ce cas, ... et le faire ! (On pourra commencer par supposer $n=1$ pour simplifier).

b) "L'effet tunnel" : $n=1$ et $V(x) = V\chi_{[a,b]}$ $(V \in \mathbb{R})$

On suppose $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et supp $u_0 \subset]-\infty, a[$. Montrer que pour t assez grand, supp $u(t,\cdot) \cap]b, +\infty[\neq \emptyset$. (Reprendre l'étude du § 4 en tenant compte de V...

6) Ondes stationnaires ($n=1$). On note (t,x) un point de $\mathbb{R}^2$. Une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ est un "onde" si elle est réelle, et dans le noyau de $\square = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2$, et on dit qu'elle est "stationnaire" si c'est le produit tensoriel $F_t \otimes G_x$ de deux distributions $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer l'inverse de convolution de $\delta'' - \lambda^2 \delta$. En déduire que toute distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $S'' = \lambda^2 S$ est une fonction C^∞ ; les trouver toutes. Lesquelles définissent des distributions tempérées ?

b) Soit $T = F_t \otimes G_x$ une onde stationnaire non nulle. Justifier qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\langle G, \psi \rangle \neq 0$. On pose $\mu = \frac{\langle G, \psi'' \rangle}{\langle G, \psi \rangle}$; montrer que $F'' = \mu F$. En déduire que toute onde stationnaire est une fonction C^∞.

c) On suppose ici que la fonction C^∞ T du (b) est bornée

Montrer que F et G sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence, c'est-à-dire chacune de la forme $A \cos \omega(t - t_0)$, avec $A, \omega, t_0 \in \mathbb{R}$, $A > 0$ (ω est la "fréquence" commune, A et t_0 "l'amplitude" et la "phase")

d) En déduire que si des données de Cauchy $T(0,x) = T_0(x)$, $\partial_t T(0,x) = T_1(x)$ déterminent une onde stationnaire bornée, alors T_0 et T_1 sont forcément des fonctions sinusoïdales proportionnelles

e) Réciproquement, si $T_0 = R \cos \omega(x - x_0)$, $T_1 = R' \cos \omega(x - x_0)$, avec $R, R' > 0$, $\omega, t_0 \in \mathbb{R}$, montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} \square T = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ T|_{t=0} = T_0,\ \partial_t T|_{t=0} = T_1 \end{cases}$ a une et une seule solution, qui est stationnaire, et l'expliciter

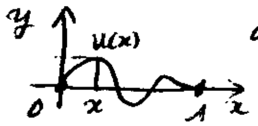
(f) quelles sont les "ondes planes" $\left((t,x) \mapsto e^{i(\tau t + \xi . x)}\right)$ qui sont stationnaires ?

g) que se passe-t-il pour $n > 1$?

7) La "corde vibrante" : On prend toujours $n=1$, et $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$

a) Montrer que, pour toute fonction d'une variable f deux fois dérivable, $f(x+t)$ et $f(x-t)$ sont dans le noyau de $\Box$. Par un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$, en déduire la solution générale de $\Box F = 0$ (F fonction deux fois dérivable), et de $\Box T = 0$ ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$)

b) Une corde "vibrante" (c'est-à-dire légèrement élastique, du type d'une corde de violon) est clouée aux points 0 et 1 de l'axe des x ; elle ne se déplace que dans le plan (x,y) (!) Au temps $t=0$ et au point x, elle est soulevée de $u_0(x)$.



On note $u(t,x)$ sa déformation au point x à l'instant $t>0$.
L'équation des cordes vibrantes s'écrit alors $\Box u = 0$
Ecrire le "problème mixte" qui décrit la situation.

c) Montrer que si l'on connait $u_0(x) = u(0,x)$ et $u_1(x) = \partial_t u(0,x)$ on peut déterminer la position de la corde à tout instant $t>0$.

d) Chercher les solutions "harmonieuses", id est périodiques en temps. (On pourra développer le tout en séries de Fourier, qui ont d'ailleurs été inventées à cette occasion !)

8) Le cône d'avenir : Il s'agit de prouver la dernière proposition du §5 : $\operatorname{supp} E \subset \Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 \le t^2 \text{ et } t \geq 0\}$ (où E est définie par $\langle E, \varphi \rangle = -(2\pi)^{-n-1} \iint \frac{\hat{\varphi}(\tau - ia, \xi - ib)\, d\tau\, d\xi}{(\tau - ia)^2 + (\xi - ib)^2}$) ; on sait déjà que $E|_{t<0} = 0$, et que E est invariante par la composante connexe de l'origine G_0 du groupe de Lorentz.

a) Montrer qu'il suffit de prouver que $\forall (t_1, x_1)$ et $(t_2, x_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$, avec $t_1 < 0$ et $(t_2, x_2) \in \mathbb{R}^{n+1} - \Gamma$, il existe $g \in G_0$ telle que $g(t_1, x_1) = (t_2, x_2)$

b) Montrer que G_0 contient le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n_x$. En déduire qu'on peut se contenter de prouver le (a) quand x_1 et x_2 n'ont qu'une seule composante non nulle (la première par exemple).

c) Déterminer tous les éléments du groupe de Lorentz pour $n=1$. Quelle est sa composante G_0 ?

d) Conclure.

(9) Le noyau des ondes

a) Préciser dans quels espaces de Sobolev se trouve le noyau K_t de l'équation des ondes (défini au §6, remarque (2))

b) Démontrer les assertions de la remarque (1) du §6 : en particulier, calculer K_t pour $n=2$ et $n=3$.)

CHAPITRE VI : HYPERBOLICITÉ ET CARACTÉRISTIQUES

§1 LE(S) THÉORÈME(S) DE CAUCHY-KOVALEVSKA

Le "problème de Cauchy" est très souvent "bien posé", pourvu qu'on raisonne dans des espaces de fonctions très régulières (analytiques (réelles), c'est ce que signifie ici $\mathcal{A}$), où l'on prend les données et cherche l'inconnue, et pourvu qu'on se contente d'un résultat très "local". C'est ce que dit le fameux "théorème de Cauchy-Kovalevska".

U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{N}^*$, $T>0$; on se donne $f \in \mathcal{A}(U\times]-T,T[\to \mathbb{C}^N)$, et pour $0 \leq j \leq n$, des $A_j \in \mathcal{A}(U\times]-T,T[\to M_N(\mathbb{C}))$, enfin $u_0 \in \mathcal{A}(U, \mathbb{C}^N)$. On cherche $u \in \mathcal{A}(U\times]-T,T[\to \mathbb{C}^N)$ solution du "problème de Cauchy" :

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\partial_j u + A_0(t,x)u + f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad\qquad (\forall x \in U,\ t \in]-T,T[) \end{cases}$$

Remarque : Les données (et l'inconnue) étant analytiques, se prolongent automatiquement (et uniquement) aux valeurs complexes des variables (t,x), et on peut reposer le problème $(*)$ en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{O}$ ("holomorphe"), U par un voisinage V de U dans $\mathbb{C}^n$, et $]-T,T[$ par un disque ouvert de $\mathbb{C}$; c'est bien en fait dans ce cadre, qu'on le résout.

Théorème (de Cauchy-Kovalevska) : Pour tout ouvert V tel que $\overline{V} \Subset U$, il existe $T' \in]0,T[$, tel que le problème $(*)$ ait une et une seule solution $u \in \mathcal{A}(V\times]-T',T'[\to \mathbb{C}^N)$

Idée de la preuve : on raisonne d'abord localement, au voisinage d'un point $(x_0,0)$, avec $x_0 \in V$: on développe en série toutes les données, et on cherche le développement en série de la solution ; par identification des coefficients, on montre l'existence et l'unicité d'une série formelle solution ; on montre sa convergence par la méthode dite des "séries majorantes" (qui utilisent la compacité de $\overline{V}$ dans U). L'unicité d'un prolongement analytique montre que les solutions locales ainsi obtenues dans des voisinages de $(x_0,0)$ se recollent. $\overline{V}$ étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels voisinages $V_{x_0} \times]-T',T'[$, d'où l'existence d'un $T'>0$ qui convient sur tout l'ouvert V. ■

Remarques : 1) Le problème $(*)$ est en fait un problème de Cauchy posé (et résolu) pour un système de N équations aux dérivées partielles, mais de degré un. On va montrer qu'on peut souvent ramener une équation de degré plus élevé à un tel système (et donc aussi un système de telles équations) : c'est la deuxième forme du théorème, ci-dessous.

2) La preuve ci-dessus est la preuve "classique". On en connaît d'autres aujourd'hui, plus abstraites (analyse fonctionnelle), moins "calculatoires", et légèrement plus générales : en particulier on peut se passer de

l'hypothèse d'analyticité en t.

3) La faiblesse de ces "théorèmes de Cauchy-Kovalevska" est double
 – les données doivent être <u>analytiques</u>, au moins en espace ; C^∞ ne suffit pas ! (cf § 2)
 – le résultat est très <u>local</u> surtout en temps : on ne va pas très loin dans la prédiction de l'avenir (cf. la météo.)

4) Les énoncés donnés ici portent sur des systèmes linéaires ; mais il y a aussi des versions "non linéaires"

<u>On peut toujours ramener le problème de Cauchy</u>

$$(**)\begin{cases} \partial_t^m u = \sum\limits_{\substack{|\alpha|+p\leq m\\ p<m}} a_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha u + f(t,x) \\ \partial_t^k u(0,x) = g_k(x) \text{ pour } 0\leq k\leq m-1 \end{cases}$$

, sous les mêmes hypothèses d'analyticité : $a_{p,\alpha}\in \mathcal{A}(U\times]-T,T[\to M_N(\mathbb{C}))$, $f\in\mathcal{A}(U\times]-T,T[\to\mathbb{C}^N)$ et les $g_k\in\mathcal{A}(U\to\mathbb{C}^N)$, <u>à un problème (*)</u>, en introduisant des inconnues auxiliaires (mais il y a beaucoup de façons de le faire), par exemple :
en posant $u_0=u$, $u_j=\partial_j u$ $(1\leq j\leq n)$, $u_{n+1}=\partial_t u$, puis $U=(u_0,\dots,u_{n+1})$ on peut récrire la première équation sous la forme

$$\partial_t^{m-1}u_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m-1\\ p<m-1}} b_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha u_j + f,$$

qui combinée avec les contraintes $\partial_t^{m-1}u_0=\partial_t^{m-2}u_{n+1}$ et $\partial_t^{m-1}u_j=\partial_t^{m-2}\partial_j u_{n+1}$ $(1\leq j\leq n)$, donne un système (équivalent) du type

$$\partial_t^{m-1}U = \sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m-1\\ p<m-1}} c_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha U + F$$

et on peut aussi récrire les conditions initiales (comme $\partial_t^k u_0(0,x)=g_k(x)$ $(0\leq k\leq m-2)$, $\partial_t^k u_j(0,x)=\partial_j g_k(x)$ $(0\leq k\leq m-2, 1\leq j\leq n)$ et $\partial_t^k u_{n+1}(0,x)=g_{k+1}(x)$) sous la forme $\partial_t^k U(0,x)=G_k(x)$ $(0\leq k\leq m-2)$.

Autrement dit, on a transformé le problème (**) en un problème de la même forme, équivalent, avec $m-1$ au lieu de m, comme degré de l'équation principale. Itérant ce procédé tant que $m>1$, on se ramène finalement au problème (*) (Mais la taille N du système croît à chaque étape, et assez vite !). En conséquence :

<u>Théorème (de Cauchy Kovalevska)</u> : Pour tout ouvert V tel que $\overline{V}\Subset U$ il existe $T'\in]0,T[$, tel que le problème (**) ait une solution et une seule $u\in\mathcal{A}(V\times]-T',T'[\to\mathbb{C}^N)$.

<u>Remarque</u> : Ce n'est pas n'importe quel système qui peut se mettre sous la forme (**), qui est "diagonalisée en ∂_t^m", et où le temps joue un rôle très particulier ; on verra au § 3 comment rendre ce résultat plus "intrinsèque".

§2 HYPERBOLICITÉ

On ne fait ici que donner quelques indications sur cette notion importante : elle peut se définir pour un système d'e.d.p., même non linéaires, mais on n'envisage que le cas d'une seule équation, linéaire et à coefficients constants, et celui, auquel on peut la ramener comme au §1, d'un système linéaire de degré un à coefficients constants : considérons le problème de Cauchy

$$(*)\begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u + A_0 u + f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \qquad (\text{les } A_j \in M_N(\mathbb{C}),\ 1 \leq j \leq n, \text{ et } A_0 \in \mathbb{C} \text{ sont } \underline{\text{constants}})$$

On dira que ce problème est "<u>bien posé</u>" (dans la catégorie différentiable) si, pour toutes données de $f \in C^0(\mathbb{R}_t \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ et $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ il admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_t \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, et que cette solution est $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand les données le sont !

Dans ce cas, on peut démontrer que l'application $(f, u_0) \mapsto u$ est continue pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ dans le cas C^∞ (par le théorème du graphe fermé, donc via le théorème de Baire !) et de même faiblement continue dans le cas de $\mathcal{D}'$.

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, notons $A(\xi)$ la <u>matrice</u> $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j$. On a alors le résultat fondamental suivant:

> <u>Théorème (de Gårding)</u> : Le problème (*) est bien posé si et seulement s'il a la propriété suivante :
> (H) $\exists C>0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda$ valeur propre de $A(\xi) - iA_0$, $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq C$

<u>Argument de la preuve</u> : Cette condition caractérise la "stabilité" du système différentiel ordinaire $\partial_t \tilde{u} = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j (i\xi_j) + A_0\right)\tilde{u} + \tilde{f}$, obtenu par transformation de Fourier "formelle" sur les variables d'espace... !

<u>Définition</u> : On dit que le système (*) est <u>hyperbolique</u> s'il vérifie (H).

<u>Remarques</u>. 1) <u>Si $A_0 = 0$</u>, les valeurs propres λ de la condition (H) sont celles de $A(\xi)$, donc homogènes de degré 1 en ξ, et (H) équivaut alors à dire qu'elles sont toutes <u>réelles</u>. Pour $A_0 \neq 0$ (mais forcément petit devant $A(\xi)$ pour $|\xi|$ assez grand, on peut montrer que (H) <u>implique</u> que les valeurs propres de $A(\xi)$ sont réelles ; mais ce n'est plus suffisant...

2) Par contre, on a les deux conditions <u>suffisantes</u> suivantes (qui sont toutes les deux des hypothèses de <u>diagonalisabilité</u> (sur $\mathbb{R}$) du système :

- si <u>$A(\xi)^* = A(\xi)$</u>, (*) est hyperbolique
- si $A(\xi)$ a, partout $\xi \neq 0$, toutes ses <u>valeurs propres réelles et distinctes</u>, (*) est hyperbolique.

Dans le deuxième cas, on dit que (*) est "<u>fortement hyperbolique</u>", et cette condition, comme ses conséquences, s'étend au cas de systèmes à coefficients variables (elle doit alors être vérifiée en chaque point.)

3) On appelle <u>symbole</u> de l'o.d.l. $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, le polynôme (de ξ) à coefficients C^∞ (de x):

$$\sigma(P)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

et <u>symbole principal</u> sa partie de plus haut degré

$$\sigma_m(P)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

Par exemple, les opérateurs <u>elliptiques</u> (cf. ch. IV, §1) sont ceux dont le symbole principal ne s'annule qu'à l'origine:

$\forall x\in U\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n$: $\sigma_m(P)\,(x,\xi)=0 \Rightarrow \xi=0$

De même le symbole de l'opérateur de (*) est

$$i\tau-\sum_{j=1}^n A_j(i\xi_j)-A_0=i\,(\tau-(A(\xi)-iA_0))$$

et les valeurs propres de $A(\xi)-iA_0$ sont les racines du déterminant de $(\dots)$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n$ (identifiant τ à $\tau\cdot id_{\mathbb{C}^n}$). On voit que la condition (H) est une <u>propriété algébrique du symbole</u> de l'opérateur de (*).

Plus généralement, le symbole de l'opérateur du système (**) du §1 sera, au facteur i^m près:

$$\tau^m.I_N-\sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m\\ p<m}} a_{p,\alpha}\,\tau^p\,\xi^\alpha\cdot i^{p+|\alpha|-m}$$

(c'est une matrice de polynômes), et on peut vérifier que le déterminant de cette matrice n'est que multiplié par une puissance de τ quand on passe de (**) à (*) par la "réduction" du §1 (cf. p. 84)

Il en résulte la <u>caractérisation de l'hyperbolicité</u> dans le cas d'une seule équation:

> <u>Théorème</u>: Pour l'opérateur $P(\partial_t,\partial_x)=\partial_t^m-\sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m\\ p<m}} a_{p,\alpha}\partial_t^p\partial_x^\alpha$ de symbole $\sigma(P)=P(i\tau,i\xi)=(i\tau)^m-\sum a_{p,\alpha}(i\tau)^p(i\xi)^\alpha$, le problème de Cauchy (**) est bien posé si et seulement si:
> (H) $\exists\, C>0,\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall \tau\in\mathbb{C}$, $\sigma(P)(\tau,\xi)=0 \Longrightarrow |\mathrm{Im}\,\tau|\leq C$

C'est en particulier le cas lorsque P est fortement hyperbolique, c'est-à-dire lorsque son symbole principal

$$\sigma_m(P)(\tau,\xi)=P_m(i\tau,i\xi)=(i\tau)^m-\sum_{p+|\alpha|=m} a_{p\alpha}(i\tau)^p(i\xi)^\alpha$$

a, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$ non nul, toutes ses racines en τ <u>réelles et distinctes</u>.

§3 LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES : L'IDÉE

On donne ici un aperçu d'une méthode de résolution d'une équation aux dérivées partielles, très différente de ce qu'on a vu jusqu'ici, de nature purement géométrique et locale. L'idée, due à Lagrange (1736-1813), est de ramener le problème à la résolution d'un système d'équations différentielles <u>ordinaires</u>, que l'on sait en principe résoudre localement (théorème de Cauchy-Lipschitz, par exemple).

Dans le problème de Cauchy tel qu'on l'a posé jusqu'ici, le temps est une variable très différente des variables d'espace ; on va ici le considérer comme une variable ordinaire.

Considérons, dans un ouvert U de $\mathbb{R}$, une e.d.p. linéaire du type

$$(E) \qquad P(x,\partial)u = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\partial_j u + c(x)u = f(x)$$

On suppose les a_j et f C^∞ dans U, et on cherche $u \in C^\infty(U)$ aussi.

Introduisons le "<u>système caractéristique</u>" :

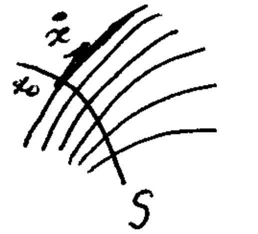
$$(C)\begin{cases} \mathring{x}_1 = a_1(x_1,\dots,x_n) \\ \mathring{x}_n = a_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

où $\mathring{x}_j = \frac{dx_j}{dt}$: on rajoute une variable t, et on cherche des fonctions $x_1(t),\dots,x_n(t)$ solutions de (C). Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'<u>existence</u> de telles solutions, et l'<u>unicité</u> de $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$, où I est un petit intervalle de $\mathbb{R}$ autour de 0, et $x \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ solution de (C), pourvu que l'on se donne $x(0) = x_0$ (Il donne aussi une méthode de calcul de x, au moins numérique)

Sur une telle "<u>courbe</u>" $x(t)$, appelée <u>courbe caractéristique</u> (il en passe une seule par chaque point x_0 de U), toute solution u de (E) est elle-même la solution d'une équation différentielle <u>ordinaire</u> (E') : si l'on note $w(t) = u(x(t))$, il vient :

$$\frac{d}{dt} w(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x(t)) \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x(t))\,\partial_j u(x(t)) = f(x(t)) - c(x(t))u(x(t))$$

soit : $(E') \qquad \mathring{w}(t) - c(x(t))w(t) = f(x(t))$.



Tant que le théorème de Cauchy s'applique, deux telles courbes caractéristiques ne peuvent se rencontrer (on pourrait l'appliquer au point commun), et on a donc obtenu localement une <u>fibration</u> de U en courbes caractéristiques « parallèles », sur chacune desquelles l'e.d.p. (E) se ramène à une e.d.o (E').

Si l'on coupe chacune de ces courbes par une hypersurface S (définie par un paramétrage local : par $(x_1,\dots,x_{n-1})$ par exemple), $\{x_1,\dots,x_{n-1},t\}$ est localement un système de coordonnées dans U, au voisinage de S ; si l'on se donne la valeur de u sur S,

u sera déterminée par un problème de Cauchy bien posé:

$$\begin{cases} \mathring{w}(x_1,\dots,x_{n-1},t) - c(x_1,\dots,x_{n-1},t)\,w(\dots) = f(\dots) \\ w|_{t=0} = u|_S \end{cases}$$

Encore faut-il que S soit bien "transverse" aux courbes caractéristiques (pour que le théorème des fonctions implicites s'applique). Pour cela il suffit que $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ (où $\varphi = 0$ est une équation de S) ne soit pas orthogonal aux vecteurs tangents aux courbes caractéristiques, $(\mathring{x}_j = a_j)$, autrement dit que $\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \neq 0$, soit encore $P_1(x, \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi) \neq 0$ (sur S) équation qui définit une "hypersurface non caractéristique" S.

Pour chaque hypersurface non caractéristique S, une donnée arbitraire de $u|_S$ détermine une et une seule solution de l'équation (E) dans un voisinage de S dans U.

On a donc ainsi généralisé, ou plutôt rendu intrinsèque le problème de Cauchy!

Remarques: 1) Tout est a priori local dans cette méthode, et ne peut se "globaliser" qu'autant qu'on sait résoudre les e.d.o introduites.

2) L'équation (E) était linéaire, et (E') l'est aussi, mais pas (C)!

3) Par contre cette méthode s'adapte à certaines équation aux dérivées partielles non linéaires (en u, mais linéaires en $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$), dont le paragraphe suivant étudie l'exemple le plus simple.

§4 EQUATIONS DE TYPE "BURGER"

Il s'agit d'équations sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ que l'on peut mettre sous la forme:

$$(E) \quad \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} F_j(u,t,x)\,\partial_j u = 0$$

Remarques: 1) On suppose donc avoir sû se ramener au cas où le coefficient de $\partial_t u$ vaut 1, que ce soit par un changement de variables, ou après avoir divisé par ce coefficient réputé non nul au voisinage d'un point...

2) Ainsi (E) est "hyperbolique en t", au sens que l'hyperplan $\{t=0\}$ est une hypersurface non caractéristique

3) La nouveauté est que les coefficients F_j ne dépendent pas que des variables (t,x), mais aussi de l'inconnue u : l'équation (E) n'est pas linéaire.

Le système caractéristique correspondant s'écrit

$$(C) \quad \begin{cases} \dot{x}_j(t) = F_j(u(t,x),t,x) \\ x_j(0) = x_j^0 \end{cases}$$

et il paraît bien difficile à résoudre sans connaître u ! Mais :

<u>Proposition</u> : <u>u est constante sur les courbes caractéristiques</u>

Preuve : $\frac{d}{dt} u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u \cdot \dot{x}_j + \partial_t u = \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} F_j(u,t,x)\partial_j u = 0$. ∎

Si l'on s'est donnée $u_0(x) = u(0,x)$, on a donc $F_j(u(t,x),t,x) = F_j(u_0(x^0),t,x)$, et (C) se récrit :

$$(C) \quad \dot{x}_j(t) = F_j(u_0(x^0), t, x(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = x^0$$

système qui admet localement une et une seule solution, dès que les F_j sont assez réguliers.

<u>Exemple</u> : <u>l'équation de Burger</u> : $\boxed{\partial_t u + u\,\partial_x u = 0}$ sur $\mathbb{R}^2_{t,x}$

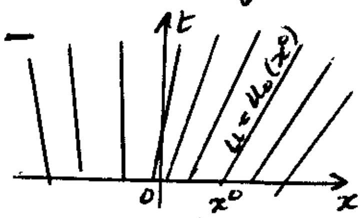
(Bien qu'on la rencontre, par exemple en cinétique des gaz, l'équation de Burger est surtout un "cas d'école", permettant de tester des méthodes d'approche des équations non linéaires, théoriques ou numériques ; c'est en un sens «l'équation non linéaire (et non ordinaire) la plus simple» !)

Le système (C) devient ici : $\dot{x}(t) = u_0(x^0)$ et $x(0) = x^0$

et se résout aussitôt : $\underline{x(t) = u_0(x^0)t + x^0}$

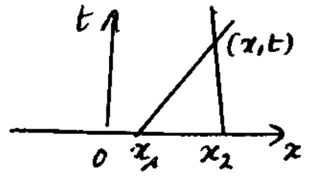
C'est dire que les caractéristiques sont des <u>droites</u>, celle qui passe par $(x^0, 0)$ ayant pour pente $u_0(x^0)$, ou plutôt $\frac{1}{u_0(x^0)}$ si l'on considère t comme fonction de x.

D'où la "géométrie" suivante (on ne s'intéresse à $u(x,t)$ que pour $t \geq 0$) :



Si la fonction u_0 est partout <u>croissante</u> (même au sens large) les caractéristiques "vont en s'écartant", et la solution est bien définie dans tout $\mathbb{R}_x \times \overline{\mathbb{R}}_t^+$ (par exemple si $u_0(x) = e^x$, u vaut e^{x_0} sur chaque droite d'équation $t = e^{-x_0}(x - x_0)$.)

– dès qu'il existe $x_2 > x_1$ tel que $u_0(x_2) < u_0(x_1)$, les droites caractéristiques issues de x_1 et x_2 vont se rencontrer en un point (x,t) où u devrait valoir à la fois $u_0(x_1)$ et $u_0(x_2)$! Et la méthode ne fournit de solution que localement, dans un certain voisinage (non uniforme en général) de $\{t=0\}$.



La méthode des caractéristiques ne fournit que des bouts de solutions <u>régulières</u> ; rien ne prouve ici que l'on ne peut pas les prolonger en fonctions singulières, toujours solutions, mais en un sens plus faible.

Remarques : 1) L'utilisation des distributions pour résoudre les e.d.p. nonlinéaires se heurte à une grave difficulté : le produit ("point par point") de deux distributions n'est pas défini en général, et il est pour le moins malaisé de donner un sens raisonnable, déjà dans le cas de l'équation de Burger, à $u.\partial_x u$, lorsque $u \in \mathcal{D}'$.

2) Exemple : si $u_0(x) = -x$, u vaut $-x_0$ sur la droite d'équation $x = -x_0 t + x_0 = x_0(1-t)$, donc u y vaut $\frac{x}{t-1}$, donc ∞ pour $t=1$: La solution "explose" au temps $t=1$.

En cinétique des gaz, ceci modélise des phénomènes bien réels (du type du "mur du son")

3) Si l'on cherche à résoudre l'équation de Burger dans tout $\mathbb{R}^2$ la solution va toujours "exploser" soit pour $t>0$, soit pour $t<0$, sauf dans le cas où u_0 est une constante a : c'est la solution triviale $u = a$ partout !

Elle explose le long d'une "caustique" qui est l'enveloppe de la famille des caractéristiques :

§5 LES ÉQUATIONS DE JACOBI-HAMILTON

On dit ici quelques mots de la façon de généraliser la méthode des caractéristiques à une e.d.p. linéaire d'ordre $m>1$. Considérons l'opérateur $P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \sum_{p+|\alpha|\leq m} c_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p \partial_x^\alpha$ à coefficients C^∞ dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
son symbole $\sigma(P) = P(t,x,i\tau,i\xi)$ et son symbole principal
$\sigma_m(P) = P_m(t,x,i\tau,i\xi) = \sum_{p+|\alpha|=m} c_{p,\alpha}(t,x)\, i^m \tau^p \xi^\alpha$

Dès que $P_m(t,x,1,0) \neq 0$ dans U, on peut récrire P sous la forme (**) du §1 (p. 84), puisque cela signifie que $c_{m,0}(t,x)$ ne s'y annule pas, en divisant par ce coefficient, et on pourra lui appliquer les résultats de ce paragraphe.

Mais plus généralement, si l'on connait une hypersurface S de U, d'équation $\varphi(t,x)=0$, "non caractéristique", c'est-à-dire telle que $P_m(t,x,\partial_t\varphi,\partial_x\varphi)$ ne s'annule pas dans U, on saura se ramener au cas précédent, au moins localement au voisinage de chaque point de S, en remplaçant l'une des coordonnées par $\varphi(t,x)$ (théorème des fonctions implicites), et donc appliquer encore les mêmes résultats : t ne joue plus de rôle particulier ici, c'est l'un des x_j.

Il s'agit d'éviter en chaque point de $\mathbb{R}^n$, le "cône caractéristique" :

$$\Gamma_x = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P_m(x,\xi) = 0\} \quad (\text{pour } x \in \mathbb{R}^n)$$

Au contraire, on dira que l'hypersurface S est "caractéristique" si en chaque point x de S, $\vec{\text{grad}}\,\varphi(x) \in \Gamma_x$. La recherche des hypersurfaces caractéristiques est importante, puisque c'est là qu'il n'y a plus unicité de la solution du problème de Cauchy : par exemple le bord du support d'une solution est une hypersurface caractéristiques ; de même les singularités d'une solution distribution sont portées par des hypersurfaces caractéristiques ...

Si $m=1$, les hypersurfaces caractéristiques sont "réglées" () par les "courbes caractéristiques" solutions du système (C) du §3. Mais pour $m>1$, (C) n'a plus de sens. On le remplace par le "<u>système de Jacobi-Hamilton</u>"

$$\begin{cases}\dot{x}_j(t) = \dfrac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x,\xi) \\ \dot{\xi}_j(t) = -\dfrac{\partial P_m}{\partial x_j}(x,\xi)\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_j(0)=x_0 \\ \xi_j(0)=\xi_0\end{cases} \quad \text{pour } x_0\in U,\ \xi_0\in\mathbb{R}^n \text{ donnés, } \xi_0\neq 0.$$

Les solutions sont des "courbes" localement définies, à valeurs dans $U\times\mathbb{R}^n$, appelées "<u>courbes bicaractéristiques</u>", et dont les projections dans U "règlent" de même les hypersurfaces caractéristiques cherchées ...

---

§6 THÊMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

1) Résoudre l'équation différentielle ordinaire $\begin{cases}\partial_t u = 2t(u+1) \\ u(0)=1\end{cases}$

   a) par "variation de la constante"

   b) par "développement en série" (méthode du §1)

2) Ramener le problème de Cauchy (pour le laplacien sur $\mathbb{R}^2$)
$$\begin{cases}\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = \Delta u = 0 \\ u(0,x) = g_0(x)\ ;\ \partial_t u(0,x) = g_1(x)\end{cases}$$
à un système équivalent du premier ordre, par la méthode indiquée au §1. Le résoudre alors comme indiqué au §1, par développement en série, pour $g_0(x)=0$ et $g_1(x)=1$.

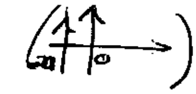
3) Résoudre le problème de Cauchy (sur $\mathbb{R}^2$) du type (*) du §1 :
$$(*)\ \begin{cases}\partial_t u = A\partial_x u + Bu \\ u(0,x) = e^{-x^2}\end{cases} \qquad (\text{pour } A, B\in\mathbb{C} \text{ donnés})$$
– par développement en série double

– par changement de variable linéaire

4) Soit $\alpha\in\,]\frac{1}{2},1[$, et $F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\tau t - (i\tau)^{1/2}x - (i\tau)^{\alpha}\right)d\tau$

(on note, pour $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$, $z^\alpha = \exp(\alpha\log z)$, où $\log$ est la détermination principale du logarithme)

   a) Montrer que l'intégrale définit F dans tout $\mathbb{R}^2$, que F est C^∞, et que $\partial_t F = \partial_x^2 F$

   b) Montrer que $F(t,x) = \int_{\mathrm{Re}\,z=-a} \exp(-zt - z^{1/2}x - z^\theta)\,dz$ () pour tout $a>0$. (Calcul des résidus)

   c) En déduire l'existence de $C>0$ tel que pour tout $a>0$,
$$|F(t,x)| \leq C\exp(at + Ca^\theta)$$
(C dépend de x, mais est borné sur tout compact de $\mathbb{R}_x$)

d) En déduire que $F(t,x) \equiv 0$ pour $t<0$

e) Conclure que l'opérateur de la chaleur n'est pas hyperbolique au sens de Hadamard (c'est-à-dire que le problème de Cauchy n'est pas "bien posé" dans C^∞)

f) Trouver de même une fonction $G(t,x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, nulle pour $t<0$, telle que $\frac{1}{i}\partial_t G = \partial_x^2 G$

Conclure que l'opérateur de Schrödinger n'est pas hyperbolique au sens de Hadamard.

g) Des quatre opérateurs étudiés au chapitre V, seul $\square$ est hyperbolique.

5) Les équations de Maxwell (dans le vide) s'écrivent.

$$(M) \quad \boxed{\partial_t \vec{E} = \vec{rot}\,\vec{H}\ ,\ \partial_t \vec{H} = -\vec{rot}\,\vec{E}\ ,\ \operatorname{div}\vec{E} = 0\ ,\ \operatorname{div}\vec{H} = 0}$$

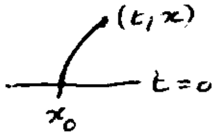
($\vec{E}(t,x,y,z)$ et $\vec{H}(t,x,y,z)$ sont les "champs" électrique et magnétique ; pour un champ de vecteurs $\{X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\} = \vec{V}(x,y,z)$ sur $\mathbb{R}^3$, on pose $(\operatorname{div}\vec{V})(x,y,z) = \partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z$, et $\vec{rot}\,\vec{V} = (A,B,C)$, avec $A = \partial_z Y - \partial_y Z$, $B = \partial_x Z - \partial_z X$, $C = \partial_y X - \partial_x Y$)

a) Montrer que chaque composante $F(t,x,y,z)$ de chacun des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vérifie l'équation des ondes : $\square F = 0$

b) Le système (M) a la réputation d'être "hyperbolique". Est-ce au sens du § 2. ? Est-ce vrai ?

6) Equations "de convection" unidimensionnelles : On se pose le problème de Cauchy (sur $\overline{\mathbb{R}}_t^+ \times \mathbb{R}_x$) : $(*)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(a(x)u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

où a, u_0 sont données, de classe C^1



Soit $x(t)$ la solution de : $\dot{x}(t) = a(x(t))$ et $x(0) = x_0$

a) Montrer que les variables x_0, x, t sont liées par la relation $t = F(x,x_0)$, où $F(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{a(s)}$. En déduire que la solution de $(*)$ peut s'écrire $u(t,x) = u_0(x_0)\cdot\frac{\partial x_0}{\partial x}$ puis $u(t,x) = u_0(x_0)\frac{a(x_0)}{a(x)}$

b) La première formule ci-dessus pour $u(t,x)$ reste vraie si $a = a(t,x)$ dépend aussi du temps. Mais pas la seconde ; comment s'écrit-elle ?

7) Étudier la caustique de l'équation de Burger $\partial_t u + u\partial_x u = 0$, $u(0,x) = u_0(x)$, pour $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{1}{Ch x}$; e^{-x^2} ; $\frac{x}{1+x^2}$; $\frac{1}{1+x^{2n}}$; ...

8) Étudier le cône caractéristique, et les courbes bicaractéristiques en $x=0$, dans le cas

- de l'équation des ondes $\partial_n^2 - v^2\left(\sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2\right)$, $v \neq 0$
- d'un champ de vecteurs $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j$

$\left(a_j \in C^\infty(U),\ \sum_{j=1}^{n} |a_j(x)| \neq 0 \text{ pour } x \in U\right)$.