PROJET MAM3: MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'UNE ÉPIDÉMIE

Polytech Nice Sophia

Ahmed TALBO
Salah KHATALA
Yassine ZOUHRI

OBJECTIFS DU PROJET

01

modéliser la propagation d’une épidémie avec un système linéaire

02

Réaliser un code Python permettant de résoudre le système et visualiser sous forme d’un graphe l’évolution des 4 classes d’individus S, I, T et R en fonction du temps.

MODELE MATHÉMATIQUE

- $S(t)$: Nombre d'individus susceptibles d'être infectés à l'instant t.
- $I(t)$: Nombre d'individus infectés à l'instant t.
- $R(t)$: Nombre d'individus guéris (ne pouvant plus contracter la maladie) à l'instant t.
- $T(t)$: Nombre d'individus traités à l'instant t.
- N: Taille de la population ($N = S + I + R$).
- β: Taux moyen d'individus rencontrés par un individu de la population par unité de temps.
- γ: Taux de guérison, représentant le taux d'individus infectés qui quittent le compartiment I par unité de temps.
- δ: Facteur de réduction de l'infectivité d'un individu traité par rapport à un individu non traité.
- α: Fraction par unité de temps d'individus infectés sélectionnés pour être traités.
- η: Taux d'immunité ou de décès des individus traités par unité de temps.

$$\begin{cases} S' = -\frac{\beta}{N}(I + \delta T)S \\ I' = \frac{\beta}{N}S(I + \delta T) - (\alpha + \gamma)I \\ T' = \alpha I - \eta T \\ R' = \gamma I + \eta T \end{cases}$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\frac{\delta\beta}{\eta}$$

EULER EXPLECITE

Algorithm :

1. **Définition des fonctions :**
   Calcul de $\phi_S(S, I, T, \beta, \delta, N)$
   $Calculde\phi_I(S, I, T, \alpha, \beta, \delta, \gamma, N)$
   $Calculde\phi_T(I, T, \alpha, \eta)$
   $Calculde\phi_R(I, T, \gamma, \eta)$

2. **EulerExplicite :**

   (a) **Entrées :** α, β, γ, η, δ, S_0, I_0, T_0, R_0, h, ε, N_{max}

   (b) **Sorties :** t, S, I, R, T

   (c) Initialiser le tableau t avec une séquence de valeurs de 0 à N_{max}

   (d) Initialiser l'index de temps i à 0, et les tableaux S, I, T, R avec le valeurs initiales S_0, I_0, T_0, R_0

   (e) Tant que $i < N_{max} - 1$:

      i. Calculer $S[i+1]$ en utilisant la formule
      $S[i+1] = S[i] + h \times \phi_S(S[i], I[i], T[i], \beta, \delta, N)$

      ii. Calculer $I[i+1]$ en utilisant la formule
      $I[i+1] = I[i] + h \times \phi_I(S[i], I[i], T[i], \alpha, \beta, \delta, \gamma, N)$

      iii. Calculer $T[i+1]$ en utilisant la formule
      $T[i+1] = T[i] + h \times \phi_T(I[i], T[i], \alpha, \eta)$

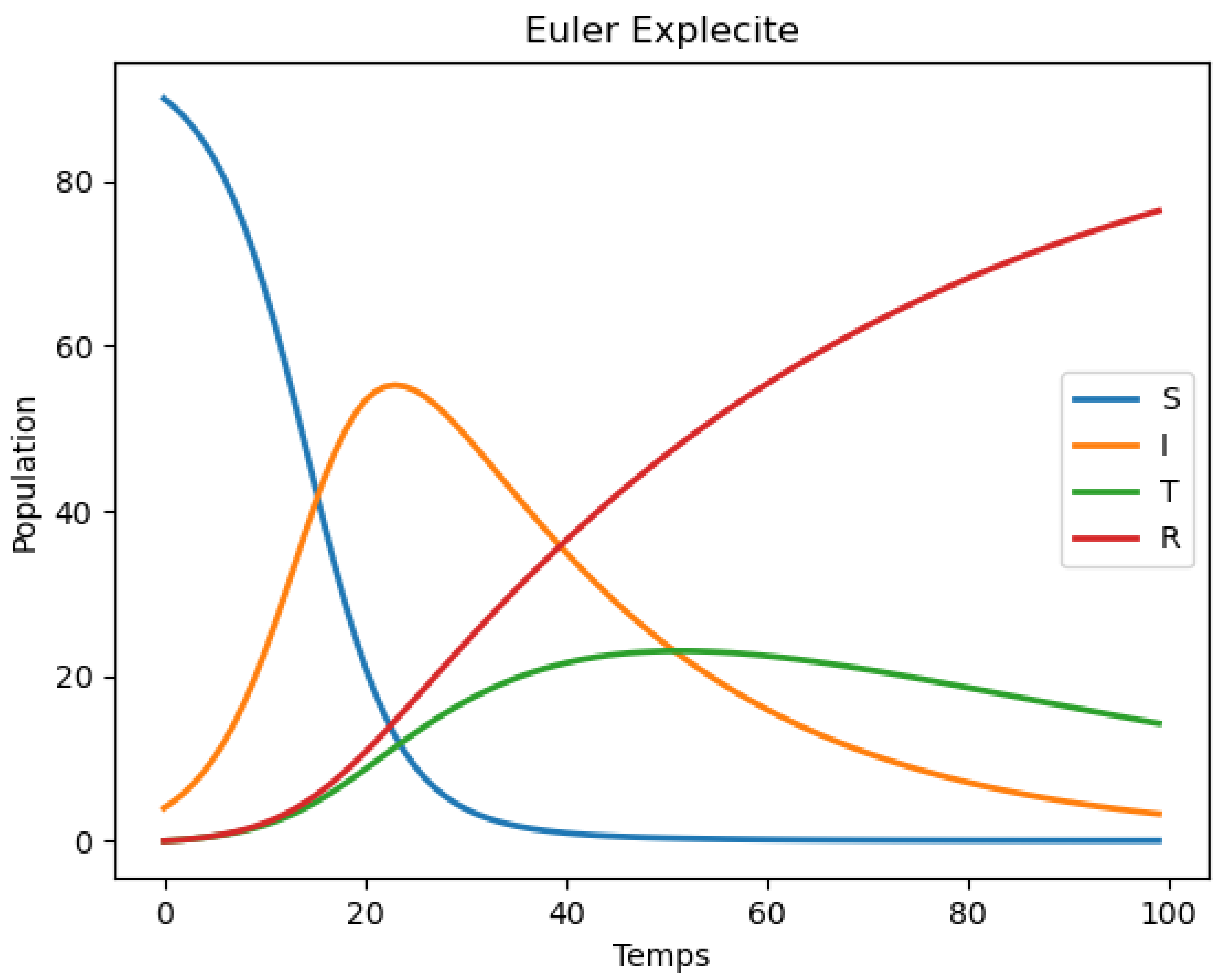
      iv. Calculer $R[i+1]$ en utilisant la formule
      $R[i+1] = R[i] + h \times \phi_R(I[i], T[i], \gamma, \eta)$

      v. Incrémenter l'index de temps : $i \leftarrow i + 1$

   (f) Renvoyer les tableaux t, S, I, R, T

3. Appeler EulerExplicite avec les paramètres définis

4. Tracer les courbes de S, I, R, T en fonction de t



EULER IMPLICITE

Initialiser t comme un tableau de taille $(0, N_{\max}+1)$.

Initialiser les tableaux S, I, T, R avec les valeurs initiales S_0, I_0, T_0, R_0.

$S_1 = S_0 + h \times \mathrm{phiS}(\beta, \delta, N, S_0, I_0, T_0)$

$I_1 = I_0 + h \times \mathrm{phiI}(\alpha, \beta, \delta, \gamma, N, S_0, I_0, T_0)$

$T_1 = T_0 + h \times \mathrm{phiT}(\alpha, \eta, I_0, T_0)$

$R_1 = R_0 + h \times \mathrm{phiR}(\gamma, \eta, I_0, T_0)$

Ajouter S_1, I_1, T_1, R_1 aux tableaux S, I, T, R.

Pour k allant de 1 à $N_{\max}$:

Calculer $x_0 = [S[k], I[k], T[k], R[k]]$

Calculer $x_{00} = [S[k-1], I[k-1], T[k-1], R[k-1]]$

Calculer $f = F(x_0[0], x_0[1], x_0[2], x_0[3], x_{00}[0], x_{00}[1], x_{00}[2], x_{00}[3], \alpha, \beta, \delta, \eta, \gamma, N, h)$

Calculer $\mathrm{df} = \mathrm{JacobSIRT}(x_0[0], x_0[1], x_0[2], x_0[3], \alpha, \beta, \delta, \eta, \gamma, N, h)$

Calculer solution $= \mathrm{Newton}(f, \mathrm{df}, x_0, x_{00}[0], x_{00}[1], x_{00}[2], x_{00}[3], \alpha, \beta, \delta, \eta, \gamma, N, \epsilon, N_{\mathrm{ma}}$

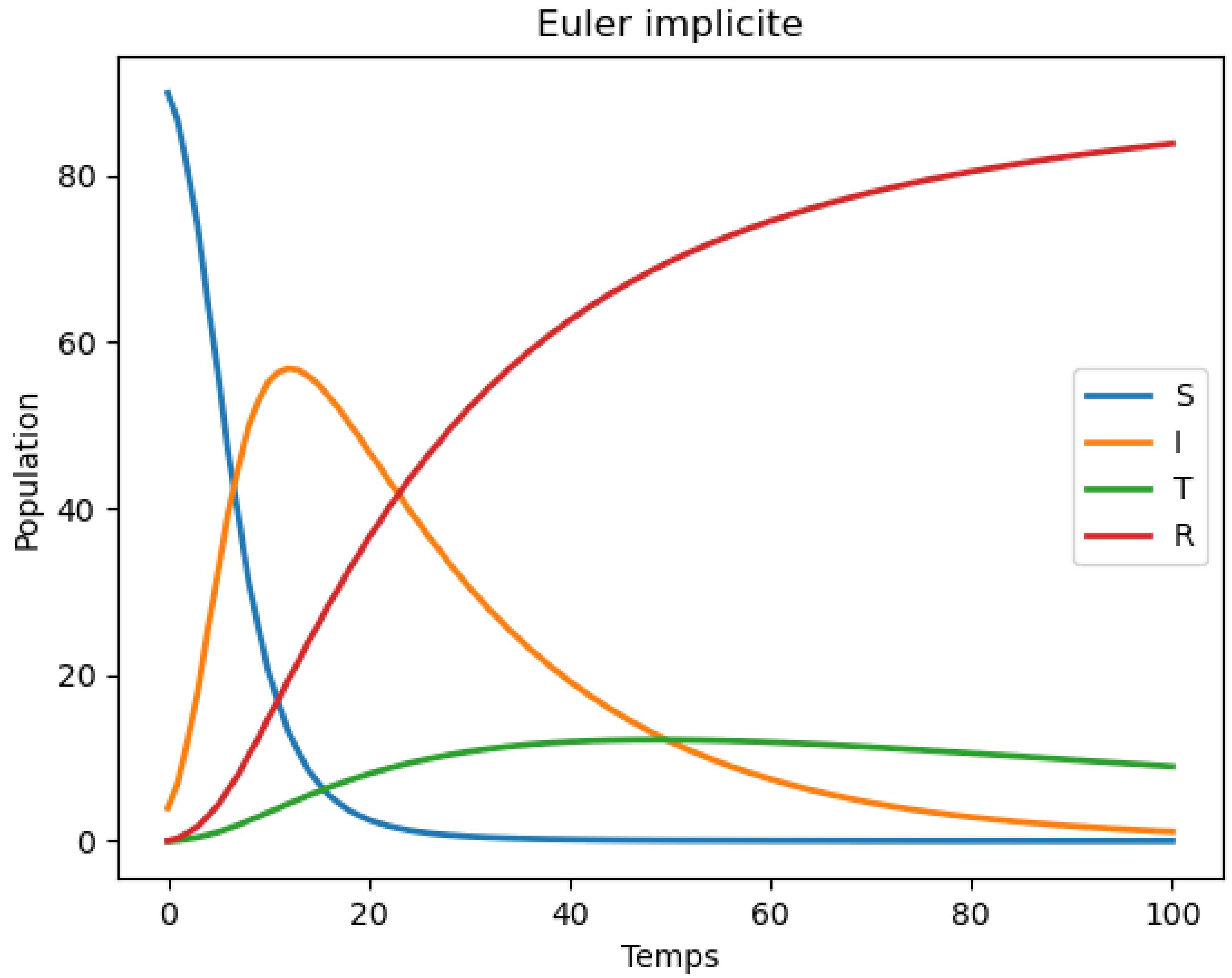
Ajouter solution[0] à S

Ajouter solution[1] à I

Ajouter solution[2] à T

Ajouter solution[3] à R

Retourner t, S, I, T, R.



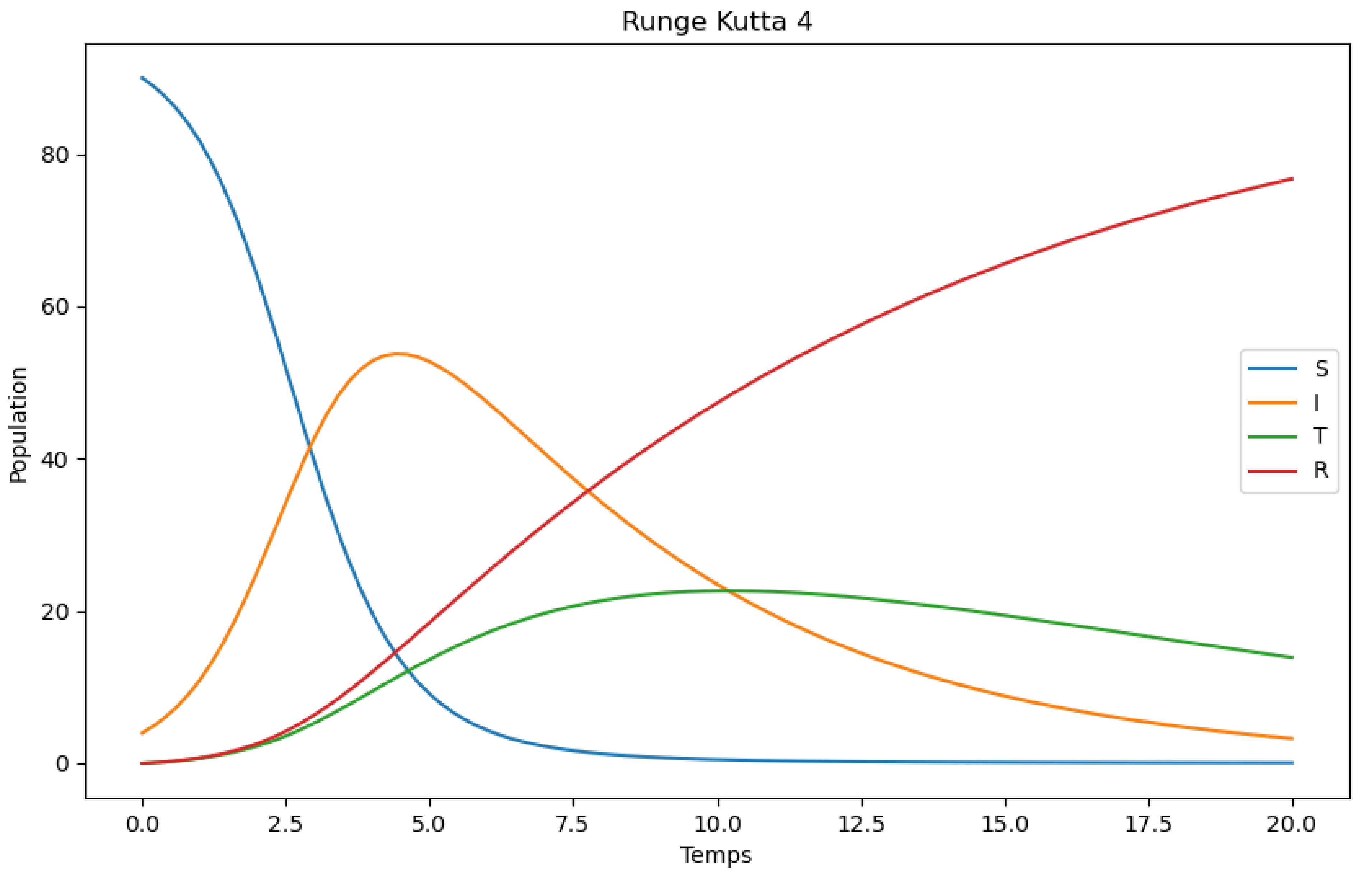
RUNGE KUTTA 4

Entrées :

α, β, γ, η, δ (paramètres du modèle)
S_0, I_0, T_0, R_0 (conditions initiales)
h (pas de temps)
ε (tolérance pour la condition d'arrêt)
N_{max} (nombre maximal d'itérations)

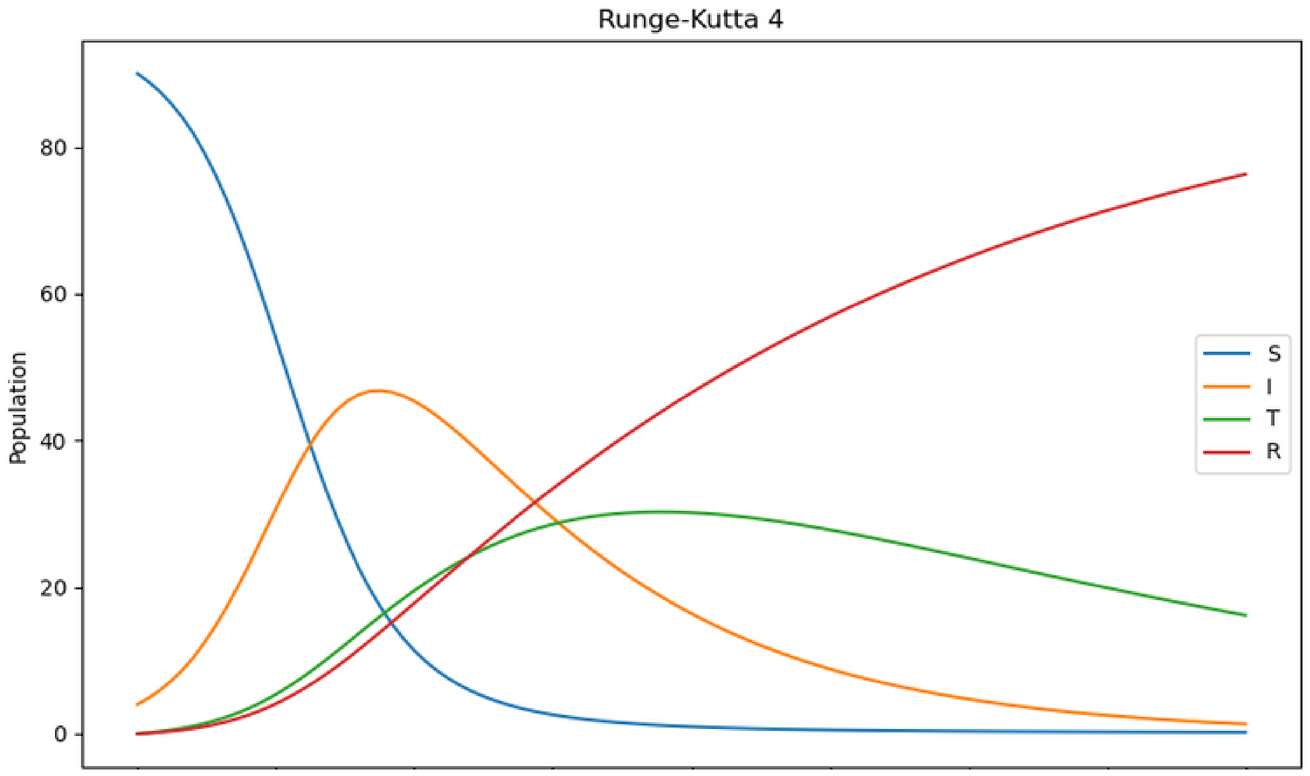
Sorties :

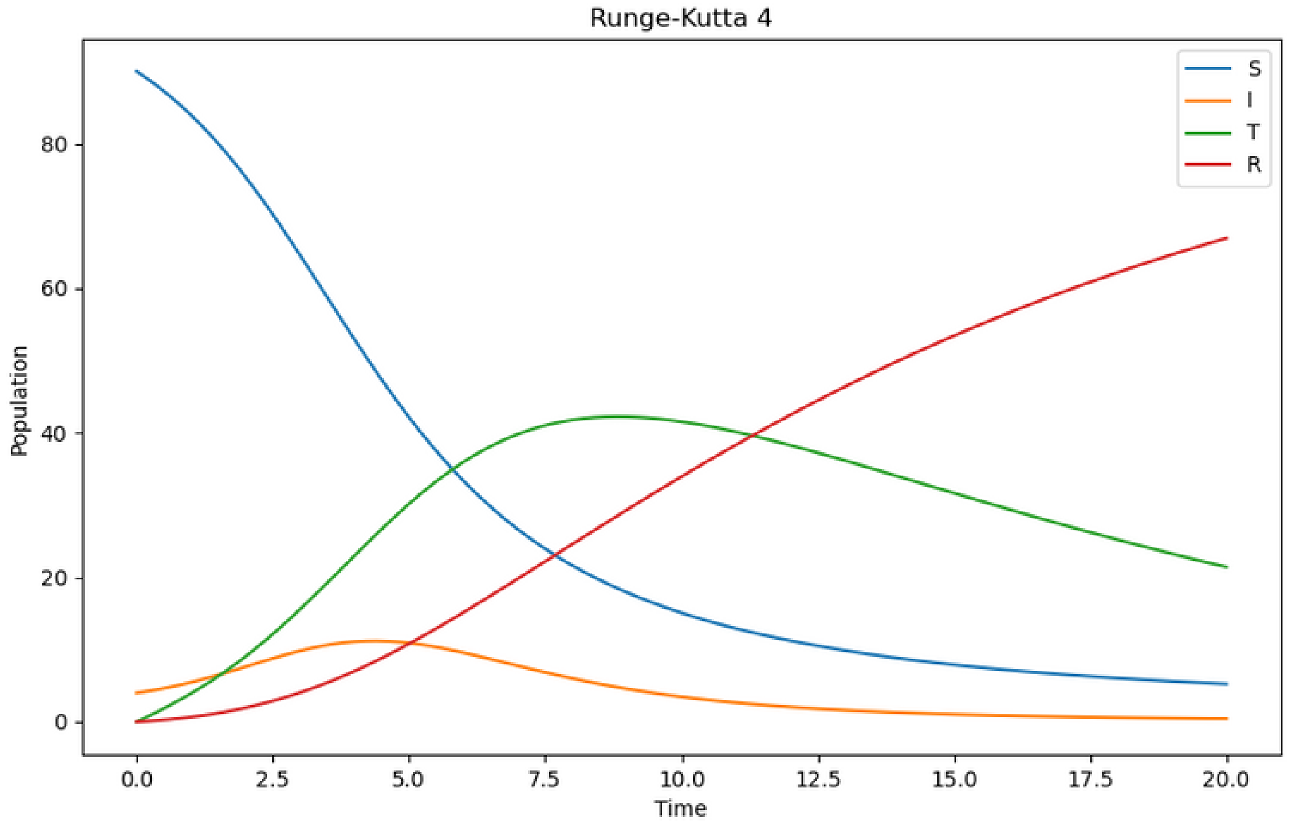
Courbes représentant l'évolution de S, I, T et R en fonction du temps
$t \leftarrow t_0$
$y \leftarrow [S_0, I_0, T_0, R_0]$
Initialiser $S_{values}, I_{values}, T_{values}, R_{values}, t_{values}$ comme des listes vides
Pour chaque itération i allant de 1 à N_{max}, faire :
  $y_{old} \leftarrow y$ (sauvegarde de l'état précédent)
  Calculer les valeurs intermédiaires k_1, k_2, k_3 et k_4:
    $k_1 = h \times \phi(y, t, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, N)$
    $k_2 = h \times \phi(y + \frac{k_1}{2}, t + \frac{h}{2}, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, N)$
    $k_3 = h \times \phi(y + \frac{k_2}{2}, t + \frac{h}{2}, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, N)$
    $k_4 = h \times \phi(y + k_3, t + h, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, N)$
  Mettre à jour les valeurs de y
    $y \leftarrow y + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
  $t \leftarrow t + h$ (mise à jour du temps)
  Si $||y - y_{old}|| < \varepsilon$, alors sortir de la boucle
  Ajouter S, I, T, R et t aux listes S_{values},I_{values},T_{values},R_{values},t_{values}
Tracer les courbes de S, I, T et R en fonction de t **Fin**

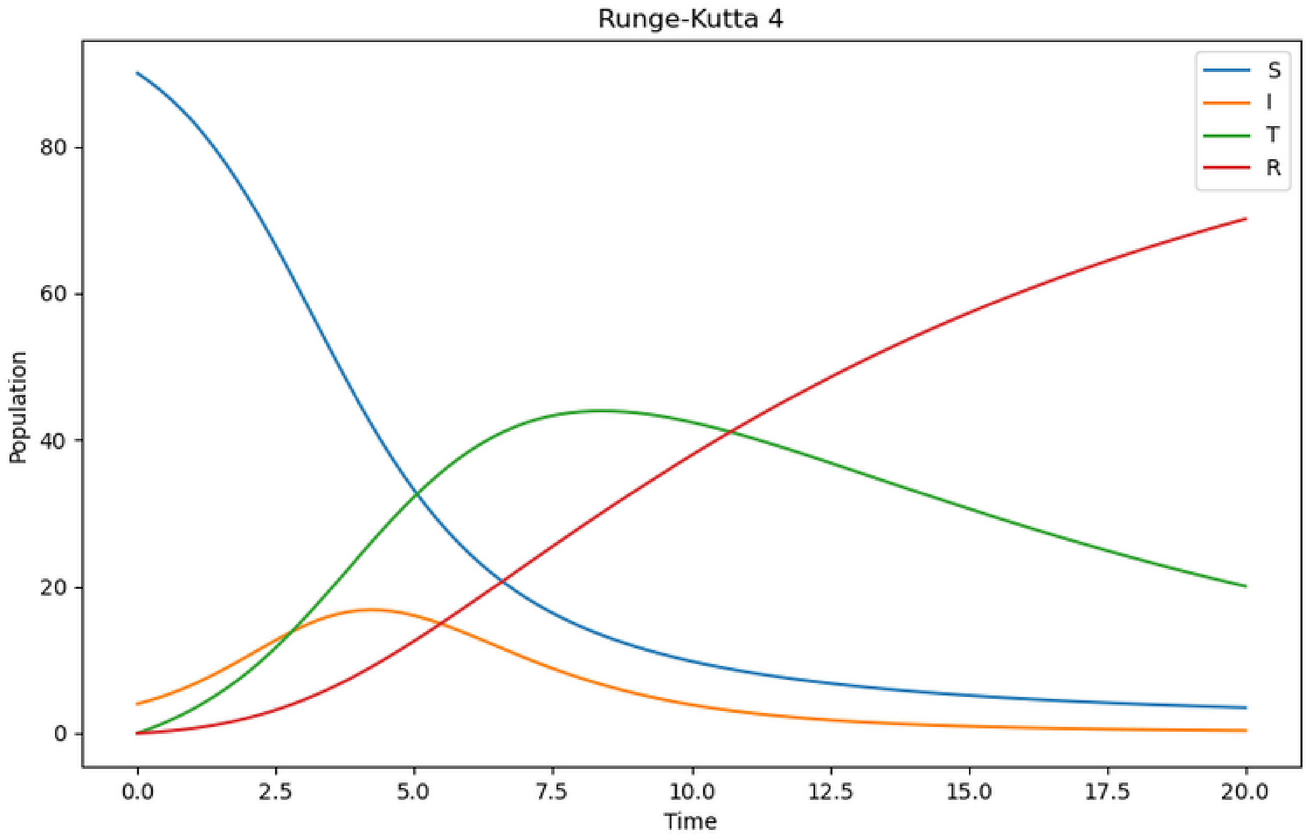


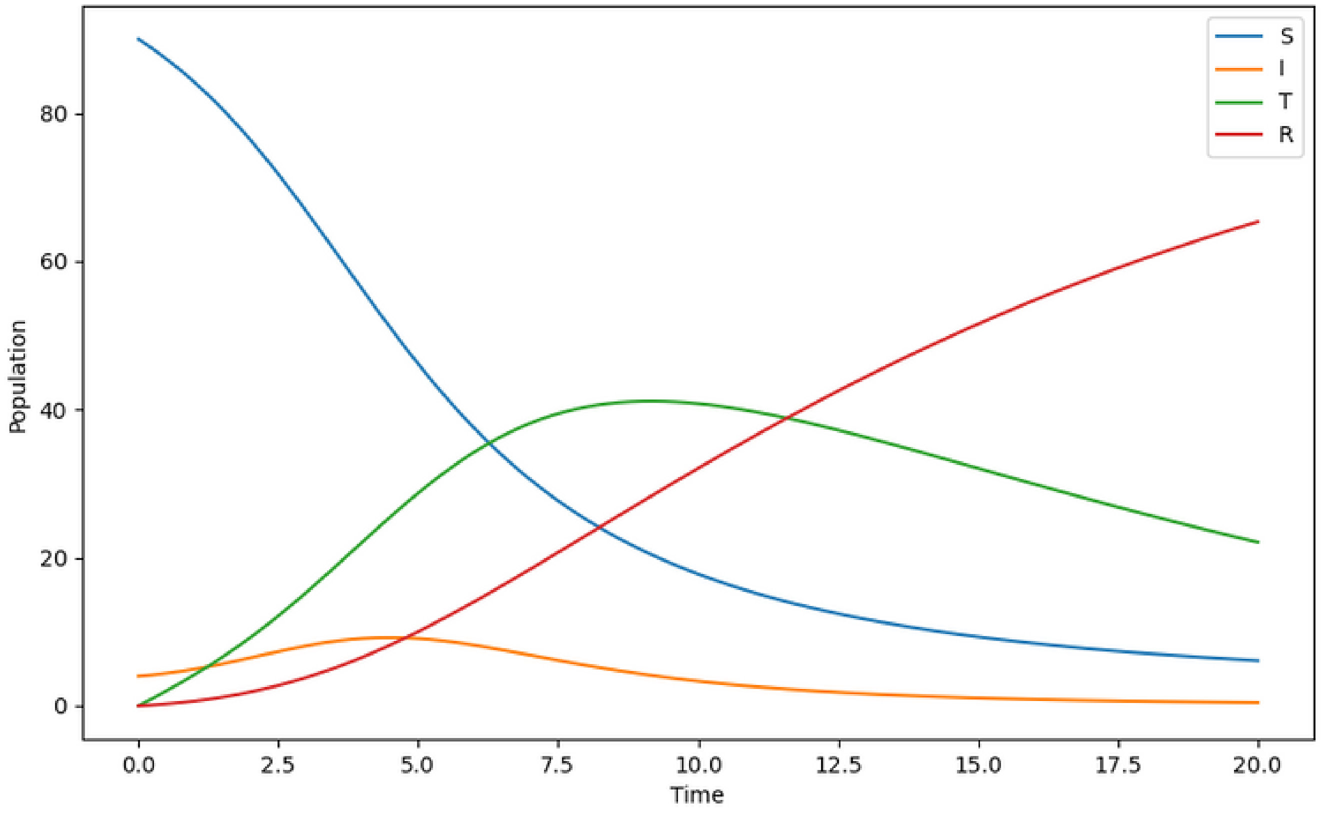
RESULTATS

on augmente succ les valeurs de β, α, γ et η , en gardant les autres paramètres fixés



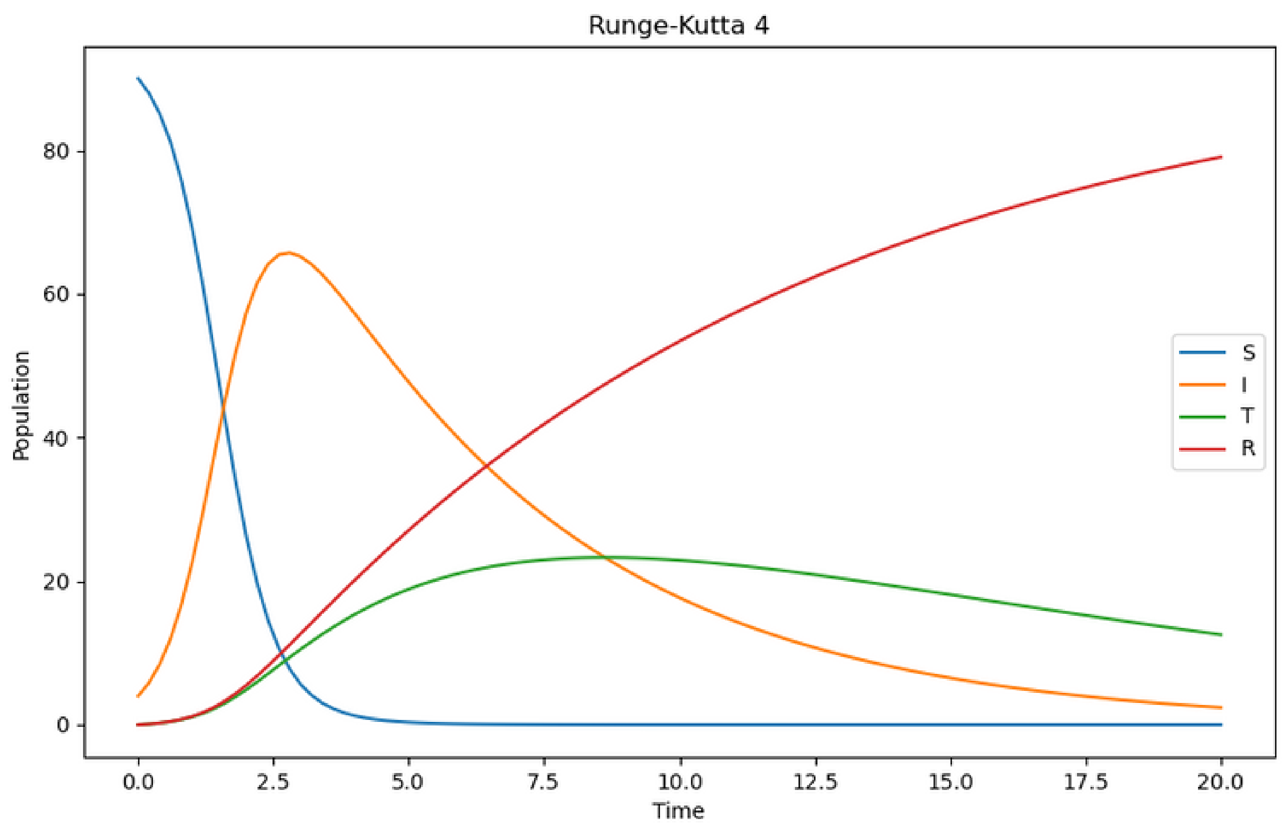


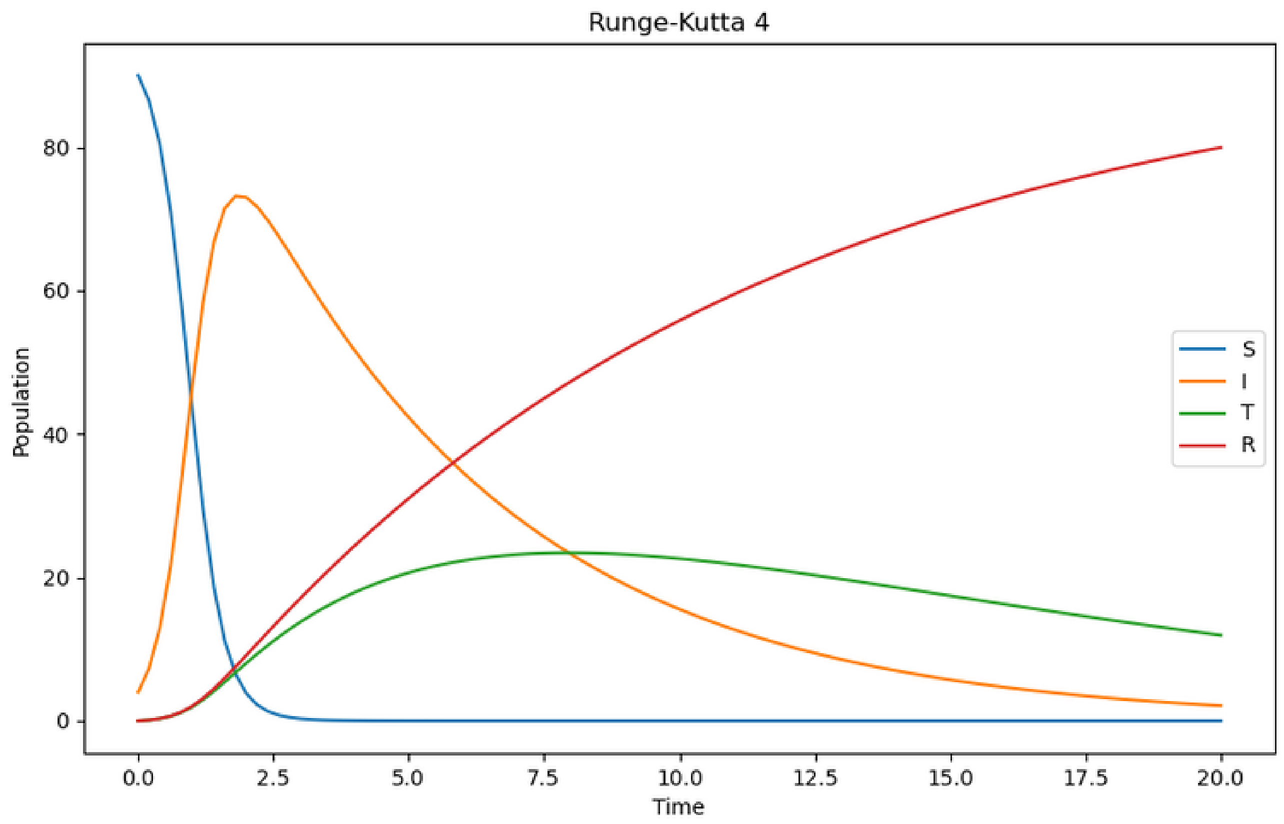


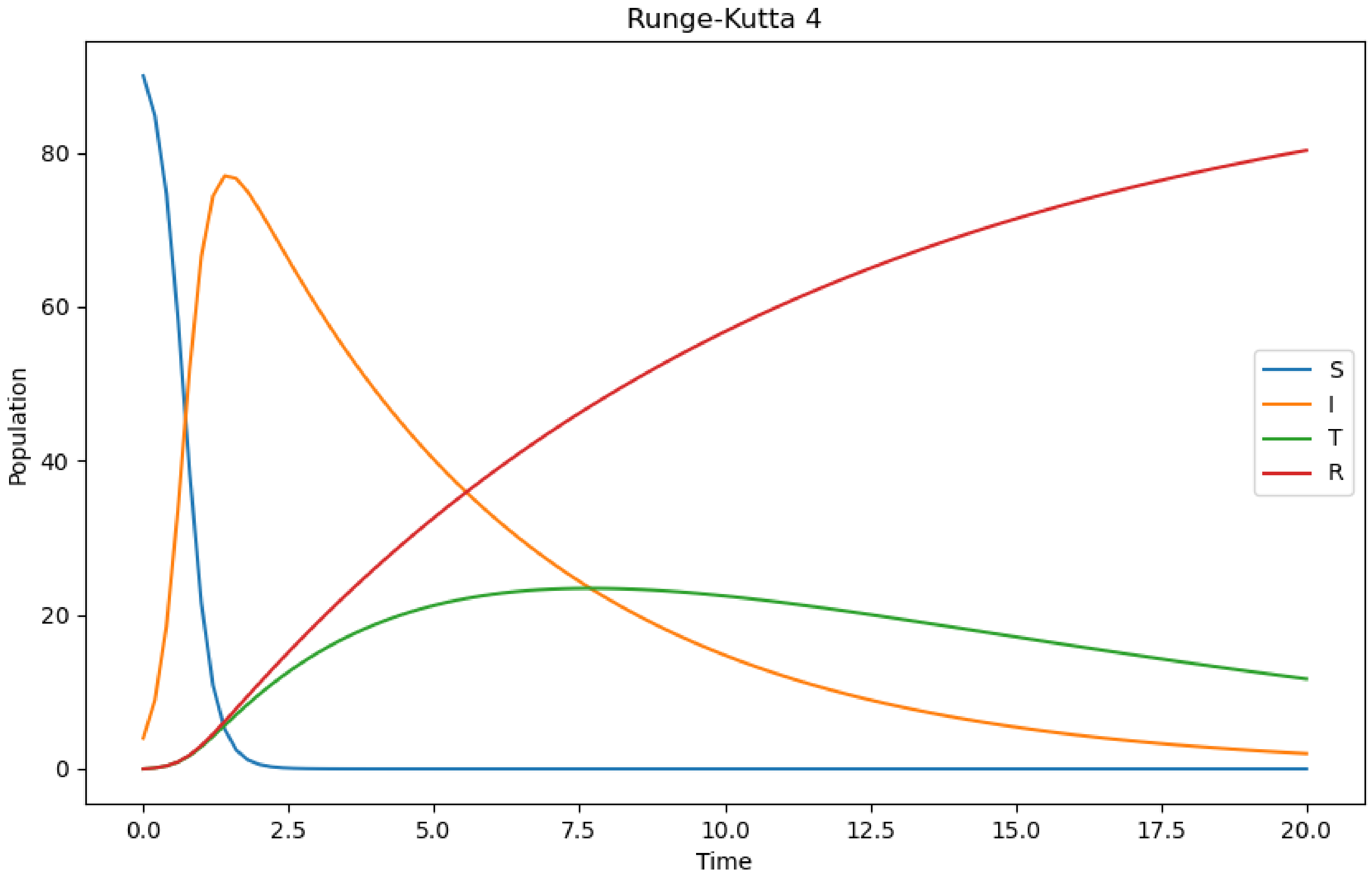


Si α augmente, plus d’individus infectés seront sélectionnés pour être traités. Cela entraînera :

- Une diminution de (I(t)), car plus d’individus quitteront le compartiment des infectés pour celui des traités.
- Une augmentation de (T(t)), car plus d’individus seront traités.
- Une éventuelle augmentation de (R(t)) si les individus traités deviennent guéris.

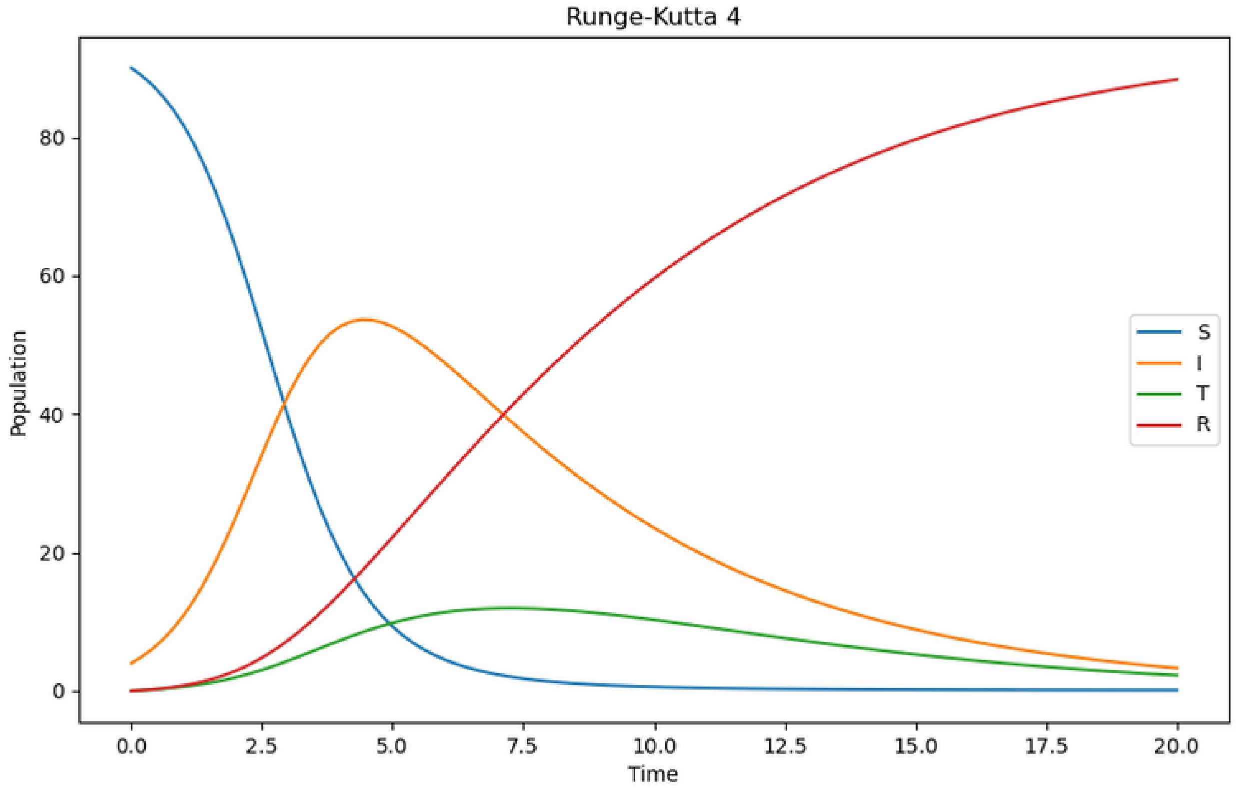


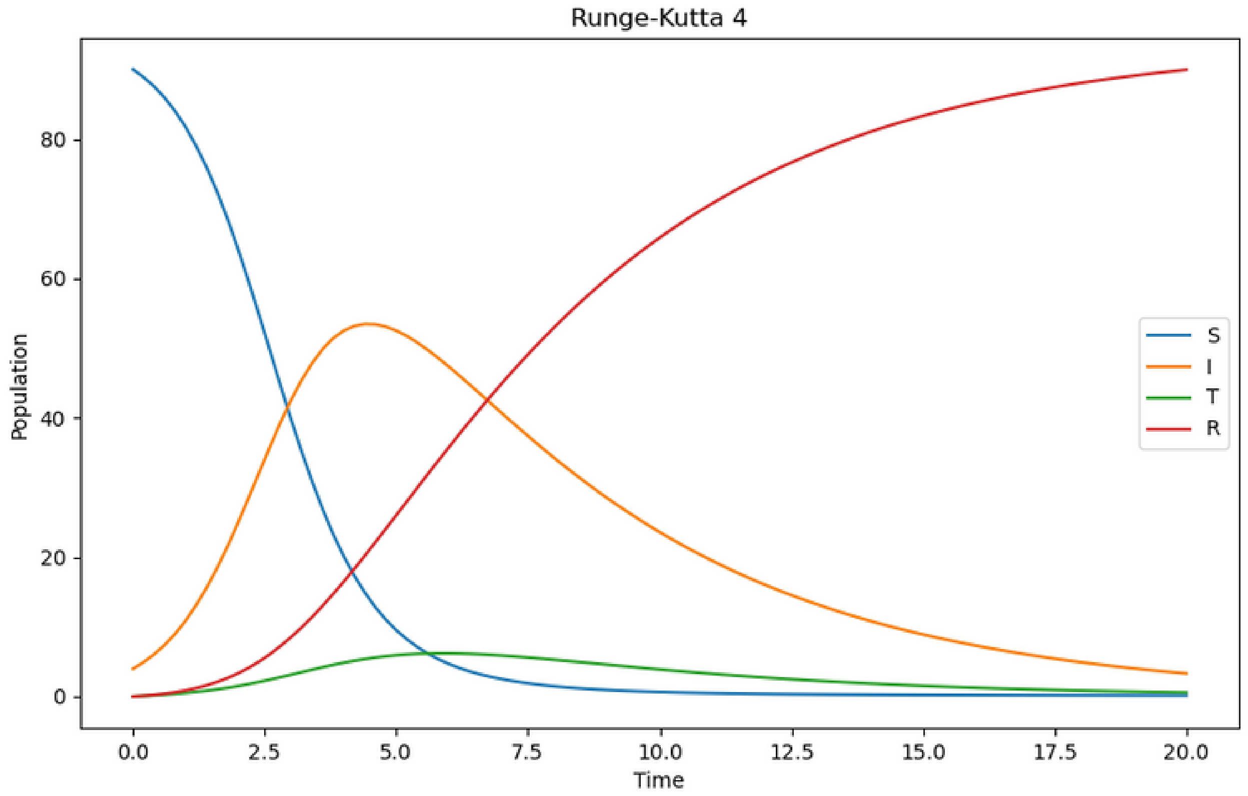


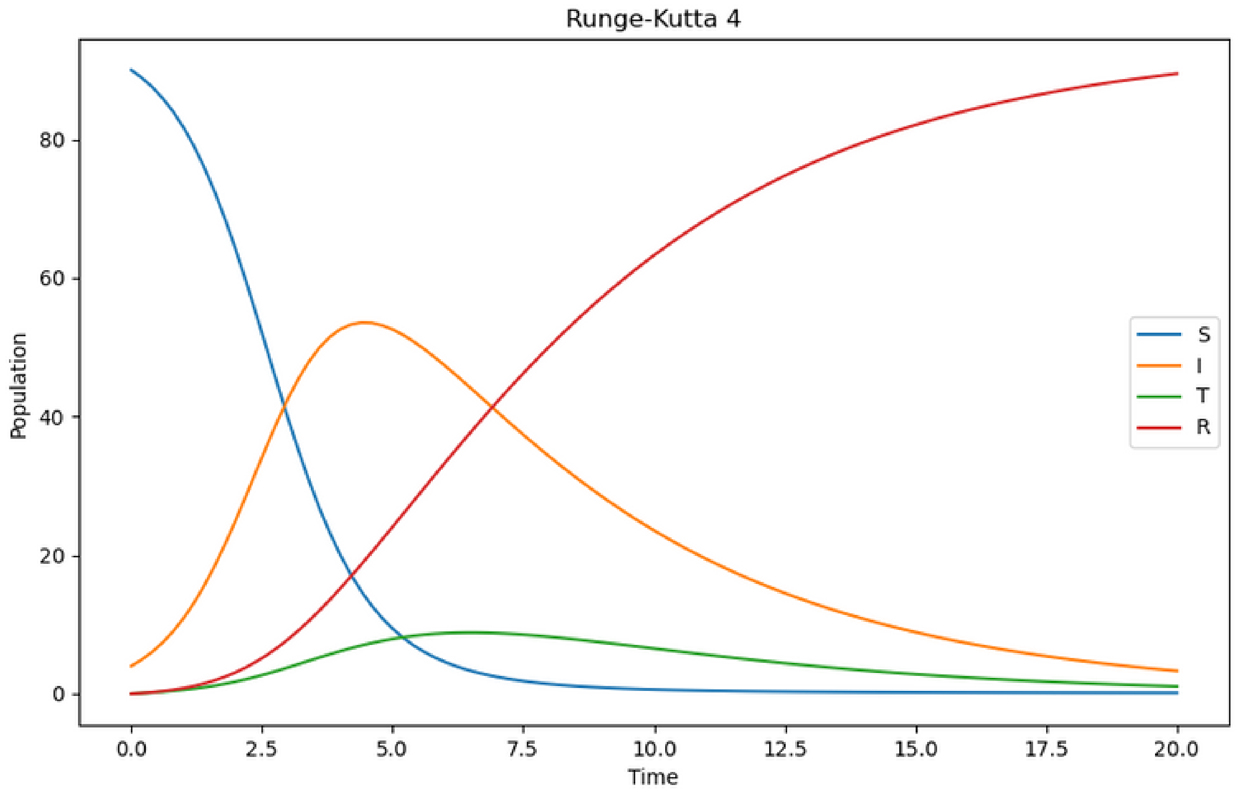


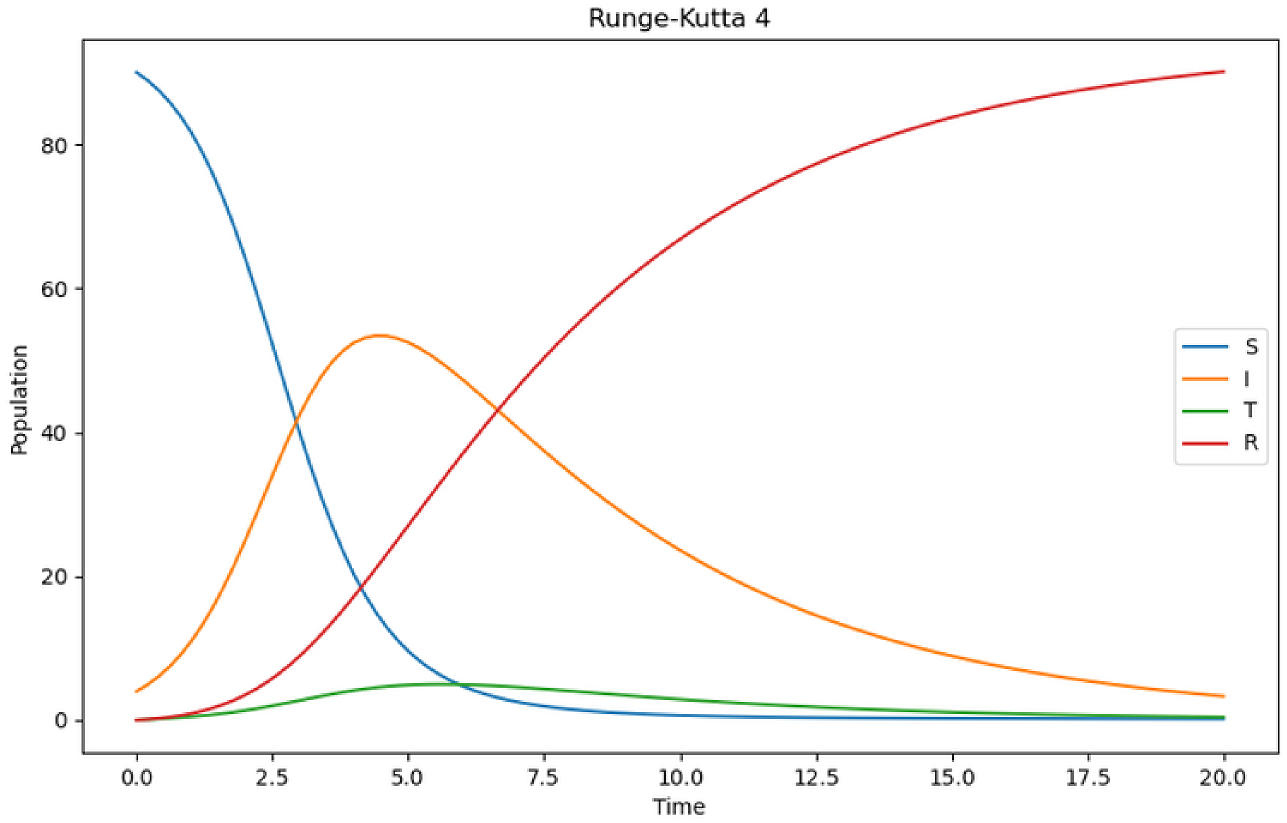
Si β augmente, cela signifie que les individus ont plus de contacts avec d'autres membres de la population. En conséquence :

- (S(t)) diminuera plus rapidement, car plus d'individus seront infectés.
- (I(t)) augmentera, car plus d'individus seront exposés à l'infection.
- (R(t)) et (T(t)) peuvent également être affectés, car le nombre d'individus guéris et traités dépend de l'infection initiale.







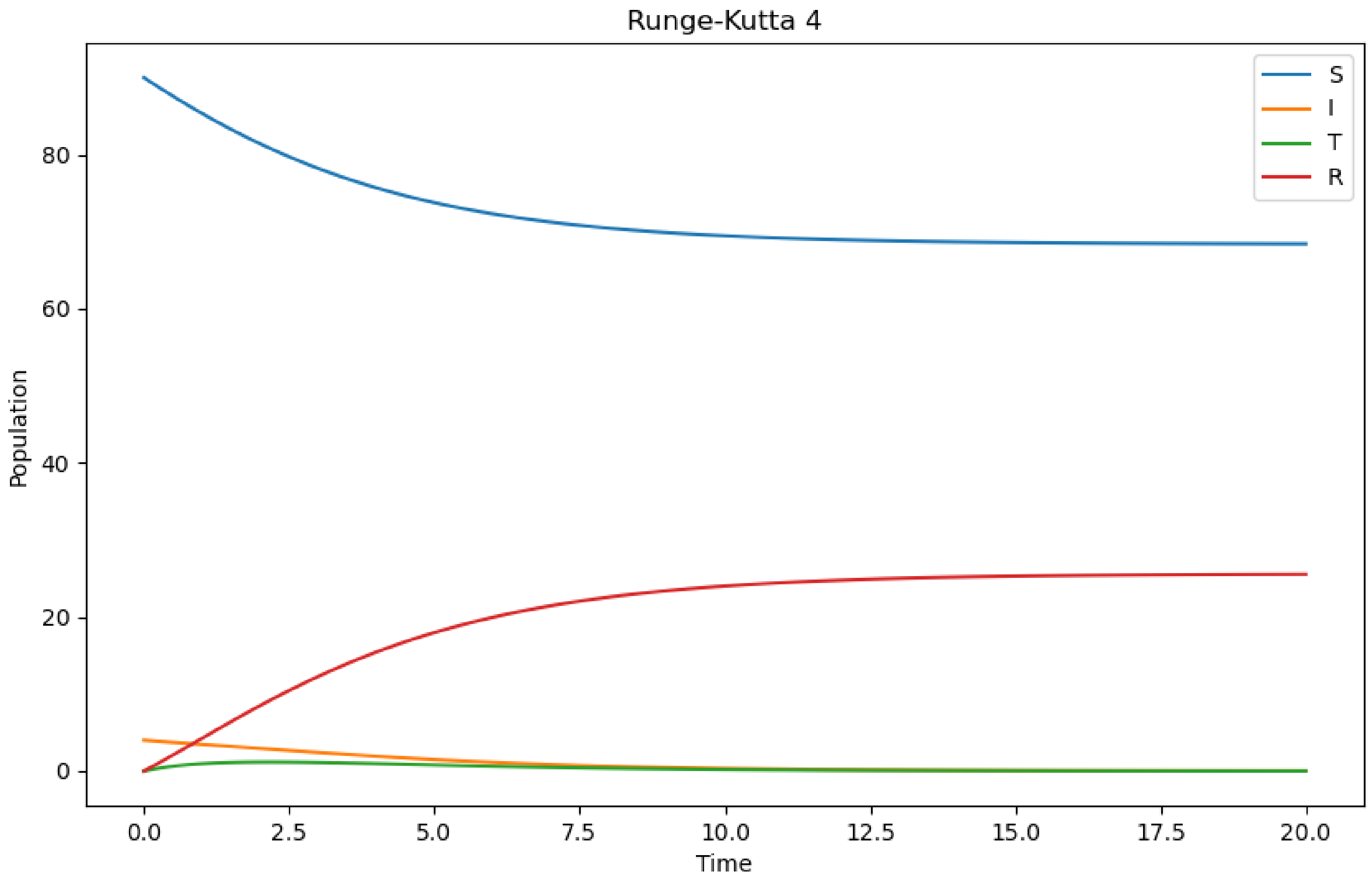


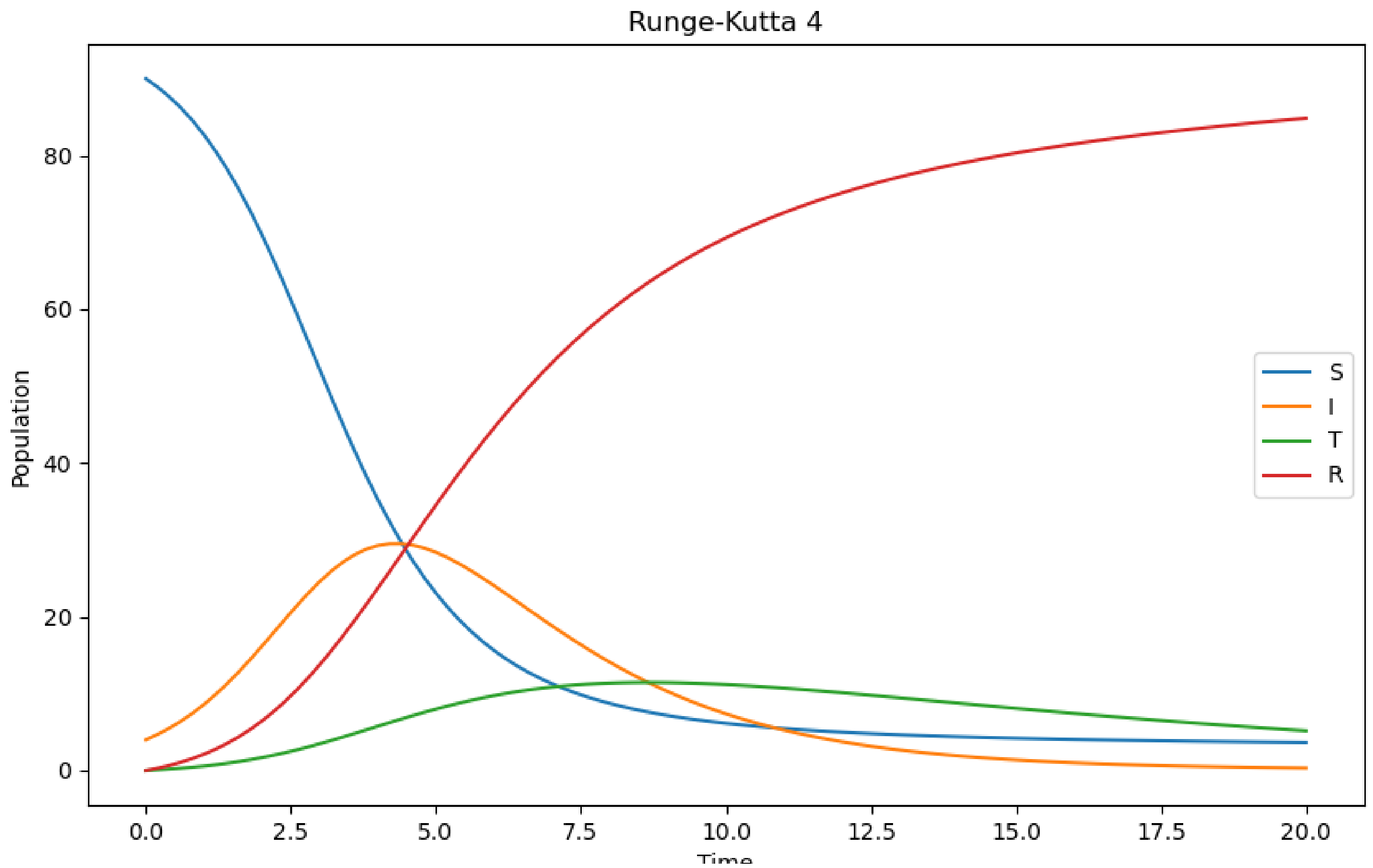
Si η augmente, cela peut représenter soit un taux d'immunité post-traitement, soit un taux de mortalité post-traitement. En conséquence :

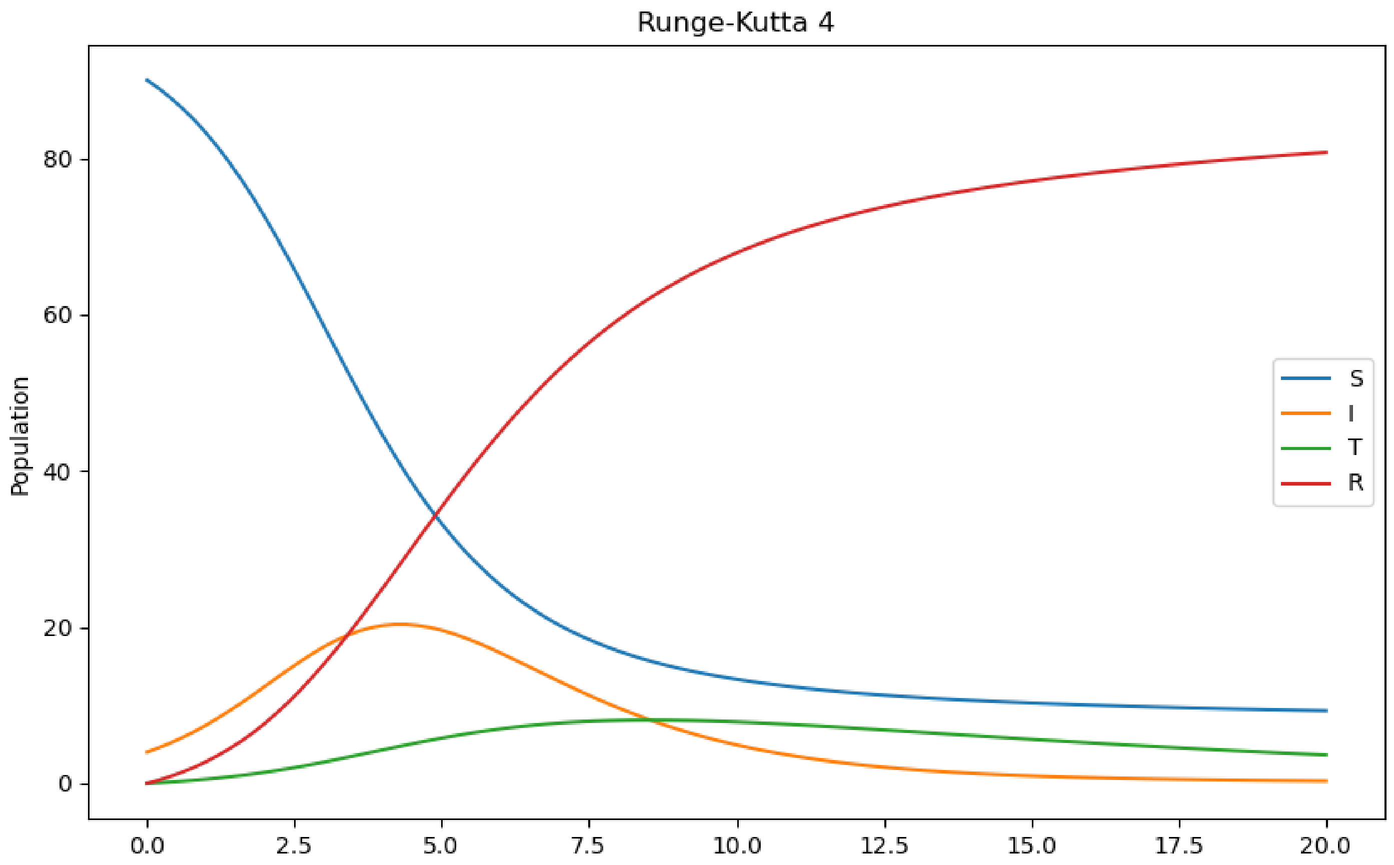
- Si c'est un taux d'immunité, ($R(t)$) augmentera.
- Si c'est un taux de mortalité, ($T(t)$) diminuera et (N) sera affecté.

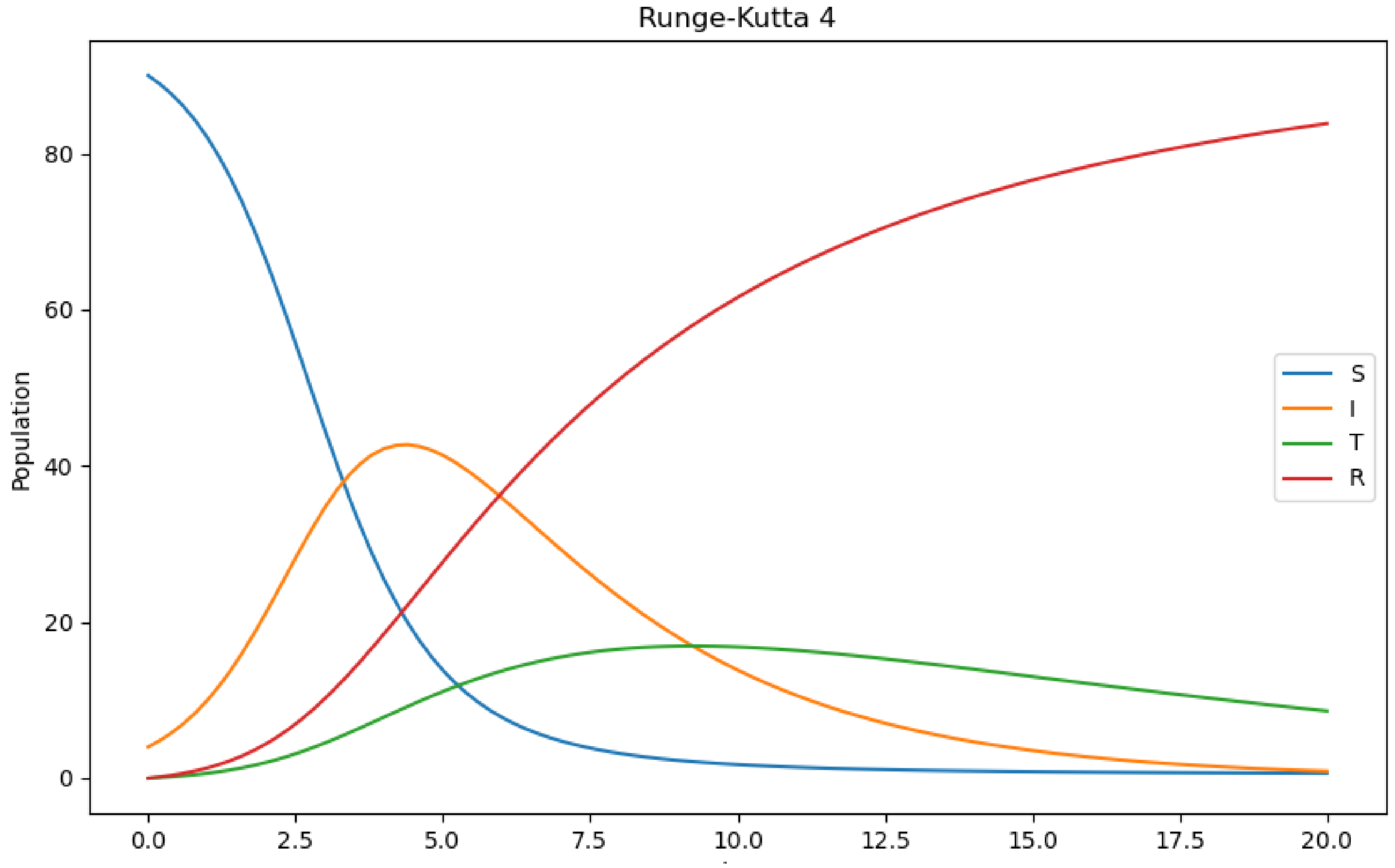
L'interaction entre η, γ (taux de guérison) et α (taux de traitement) est complexe.

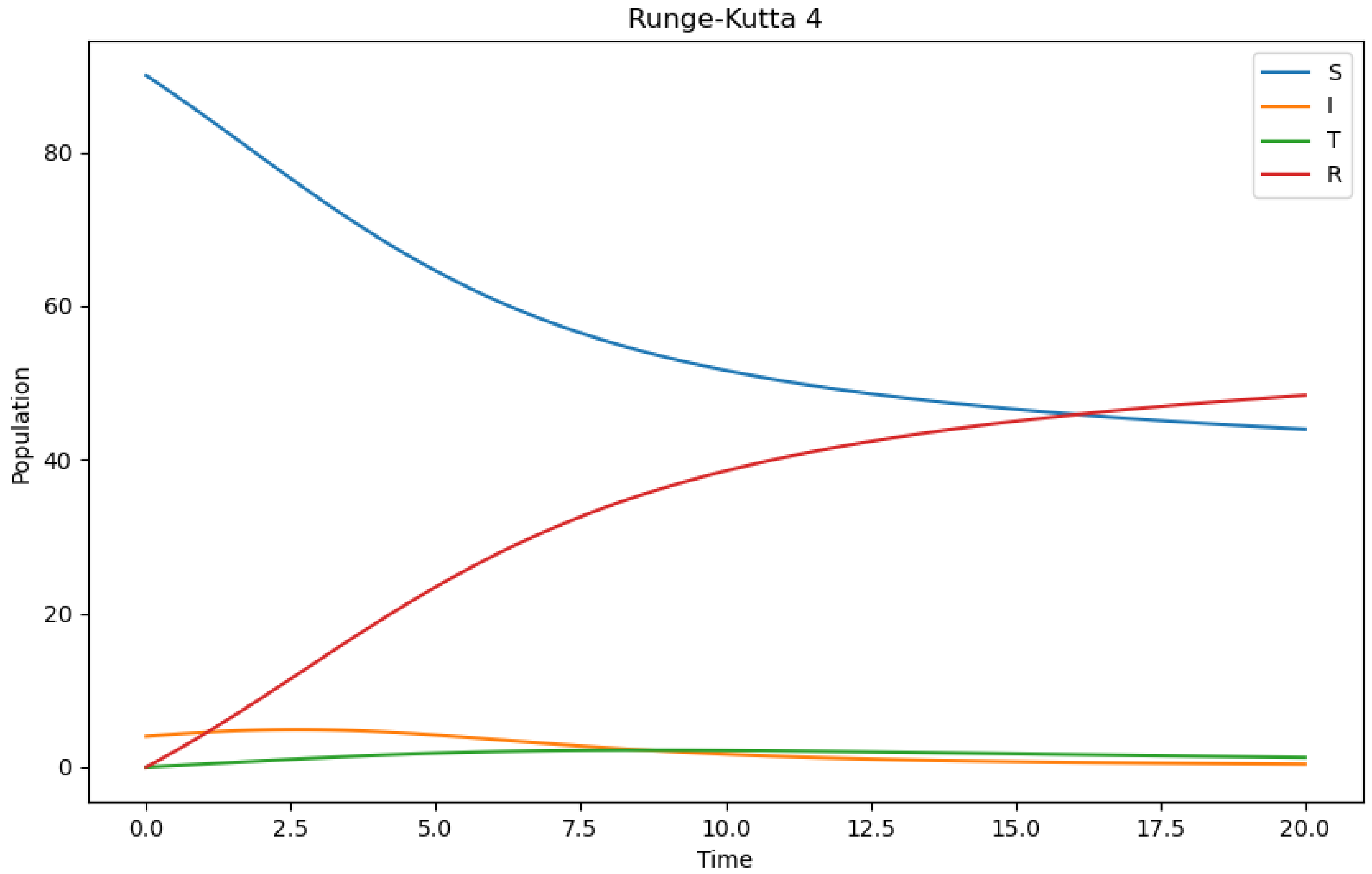
1. Si η est élevé et que le taux de guérison (γ) est également élevé, cela peut entraîner une augmentation nette de (R(t)).
2. Cependant, si η est très élevé (taux de mortalité élevé), cela peut contrebalancer l'effet positif sur (R(t)).











Si γ augmente, cela signifie que le taux de guérison est plus élevé. En conséquence :

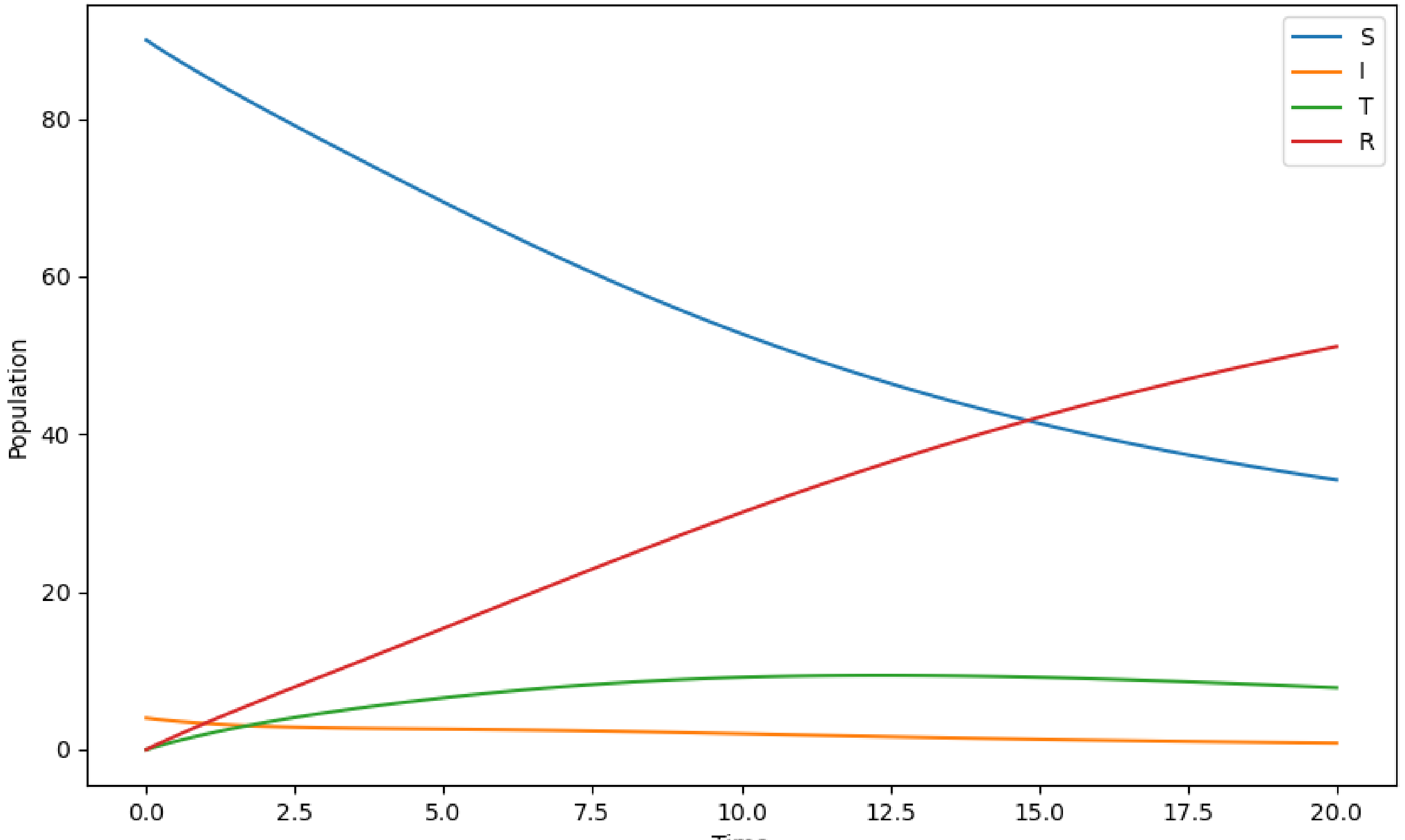
- (I(t)) diminuera plus rapidement, car plus d’individus quitteront le compartiment des infectés.
- (R(t)) augmentera, car plus d’individus guériront.

Effet sur (R(t)) :

- Contrairement à ce que l’on pourrait attendre, l’augmentation de γ ne garantit pas nécessairement une augmentation directe du nombre d’individus guéris ((R(t))).
- La raison en est que le taux de guérison ne dépend pas seulement de γ, mais aussi d’autres facteurs tels que le taux d’infection initial (β), le taux de traitement α, et le taux d’immunité ou de décès après traitement (η).
- Si α est faible (c’est-à-dire que peu d’individus sont sélectionnés pour être traités), alors même avec un taux de guérison élevé γ, le nombre d’individus guéris peut rester relativement bas.
- En revanche, si αest élevé (beaucoup d’individus sont traités), alors γ contribuera davantage à augmenter (R(t)).

Interprétation :

- Augmenter γ est bénéfique pour réduire l’infection ((I(t))) plus rapidement, ce qui peut être crucial pour contrôler une épidémie.
- Cependant, pour maximiser le nombre d’individus guéris ((R(t))), il est essentiel de considérer d’autres paramètres tels que αet η.
- Une approche équilibrée entre le taux de guérison γ et le taux de traitement α est nécessaire pour optimiser les résultats.



CONCLUSION

MERCI

De nous avoir écouté

AVEZ VOUS DES QUESTIONS ?