「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 1 月 14 日

1　第 1 章の回答例

1.1 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.
　有効な方法は分からない.
　こんな数はたぶん無限にある.

1.2

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2, \\
1 + 3 = 4 &= 2^2, \\
4 + 5 = 9 &= 3^2, \\
9 + 7 = 16 &= 4^2, \\
16 + 9 = 25 &= 5^2
\end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$$

が予想される.

1.3

　三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.
　任意の自然数は $3l, 3l + 1, 3l + 2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.
　$(p, p + 2, p + 4)$ を三つ子素数とする. このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l + 1, 3l + 2$ のいずれかで表される.
　$l = 1$ のとき, $(p, p + 2, p + 4) = (3, 5, 7)$ である.
　$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l + 1$ もしくは $3l + 2$ と表される.
　$p = 3l + 1$ とすると, $p + 2 = 3l + 3 = 3(l + 1)$ となって, これは素数ではないから不敵.
　$p = 3l + 2$ とすると, $p + 2 = 3l + 4, p + 4 = 3l + 6 = 3(l + 2)$ となるから, $p + 4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3,5,7)$ に限る.

1.4 (a) N^2-1 が十数であるのは $N=2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2-1=(N-1)(N+1)$$

であり, N^2-1 が十数であるためには $N-1=1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. N によってそれぞれ調べてみると
$N=2 \Rightarrow N^2-2=2$; 素数,
$N=3 \Rightarrow N^2-2=7$; 素数,
$N=4 \Rightarrow N^2-2=14=2\times 7$,
$N=5 \Rightarrow N^2-2=23$; 素数,
$N=6 \Rightarrow N^2-2=34=2\times 17$,
$N=7 \Rightarrow N^2-2=47$; 素数,
$N=8 \Rightarrow N^2-2=62=2\times 31$,
$N=9 \Rightarrow N^2-2=79$; 素数,
$N=10 \Rightarrow N^2-2=98=2\times 7^2$,
$N=11 \Rightarrow N^2-2=119$,
$N=12 \Rightarrow N^2-2=142=2\times 71$,
$N=13 \Rightarrow N^2-2=167$,
$N=14 \Rightarrow N^2-2=194=2\times 97$,
$N=15 \Rightarrow N^2-2=253$.

(c) N^2-3 の形の素数は多分無数に存在する.
最初の方から正の数を列挙してみると
$N=2 \Rightarrow 2^2-3=1$,
$N=3 \Rightarrow 3^2-3=6=2\times 3$,
$N=4 \Rightarrow 4^2-3=13$; 素数,
$N=5 \Rightarrow 5^2-3=22=2\times 11$,
$N=6 \Rightarrow 6^2-3=33=3\times 11$,
$N=7 \Rightarrow 7^2-3=46=2\times 23$,
$N=8 \Rightarrow 8^2-3=61$; prime,
$N=9 \Rightarrow 9^2-3=78=2\times 39$,
$N=10 \Rightarrow 10^2-3=97$; prime

N^2-4 の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2-4=(N-2)(N+2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

1.5

n が偶数のとき:
$n = 2m$ とおくと

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + 2m &= (2m+1) + ((2m-1)+2) + ((2m-2)+3) + \cdots + ((m+1+m)) \\ &= m \cdot (2m+1) \\ &= \frac{n}{2}(n+1).\end{aligned}$$

n が奇数のとき:
$n = 2m - 1$ とおくと

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + (2m-1) &= (1 + (2m-1)) + (2 + (2m-2)) + \cdots + ((m-1) + (m+1)) + m \\ &= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\ &= 2m(m-1) + m \\ &= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1) + \frac{n+1}{2} \\ &= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1 + \frac{1}{2}) \\ &= (n+1) \cdot \frac{n+1-2+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1).\end{aligned}$$

2 第 2 章の回答例

<u>**2.1**</u> (a) 組み合わせとして考えるのは

$$\begin{aligned}(a,b) =& (3m,3n), (3m+1,3n), (3m+2,3n), \\ & (3m,3n+1), (3m+1,3n+1), (3m+2,3n+1), \\ & (3m,3n+2), (3m+1,3n+2), (3m+2,3n+2)\end{aligned}$$

のように書かれる場合である. 必要なら a と b を入れ替えることによって, この表の右上半分だけを考える. すなわち,

$$(a,b) = (3m+1,3n+1), (3m+2,3n+1), (3m+2,3n+2)$$

の場合 対応する既約ピタゴラス数 (a,b,c) が存在しないことを示したい.
　まず, $c = 3l$ とかけているとき, c^2 は 3 の倍数であり, $c = 3l+1$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余り, $c = 3l+2$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余る.
$(a,b) = (3m+1,3n+1)$ のとき,

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= (3m+1)^2 + (3n+1)^2 \\ &= 9(m^2+n^2) + 6(m+n) + 2\end{aligned}$$

となるが, c^2 は 3 で割ると 2 余る組がないから不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+1)$ のとき,

$$a^2+b^2=9(m^2+n^2)+6(2m+n)+5.$$

よって, この場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+2)$ のとき

$$(3m+2)^2+(3n+2)^2=9(m^2+n^2)+12(m+n)+8.$$

よってこの場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.

(b) 分からない.

<u>2.2</u> 仮定より, ある整数 k_1,k_2 があって

$$m=dk_1,$$
$$n=dk_2$$

が成り立つ. このとき,

$$m+n=d(k_1+k_2),$$
$$m-n=d(k_1-k_2)$$

となるから, 主張を得る.

<u>2.3</u> (a) 任意の 1 より大きな奇数が現れる. 実際, 定理 2.1 で $t=1$ とおけば $a=s$.

(b) 少なくとも 4 の倍数が現れる. 8 で割って 4 余る数はかならず現れる.

b は 4 の倍数であることを示す.

s,t はともに奇数であるから, ある自然数 s_1,t_1 があって, $s=2s_1-1$, $t=2t_1-1$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(s-t)(s+t) \\ &= \frac{1}{2}(2s_1-t_1)(2s_1+2t_1-2) \\ &= 2(s_1-t_1)(s_1+t_1-1) \end{aligned}$$

となる. ここで, s_1-t_1 と s_1+t_1-1 は 2 を法として異なるので, b は 4 の倍数である.

次に, 8 で割って 4 余る数は必ず現れることを示す.

b を 4 で割って 8 余る自然数とする. ある互いに素な奇数 $s,t(s>t)$ があって

$$b=\frac{s^2-t^2}{2}$$

を満たすことを示したい. $b=4k(k$ は奇数$)$ と置くと

$$4k=\frac{s^2-t^2}{2}.$$

分母を払って

$$8k = s^2 - t^2.$$

ここで

$$\begin{aligned} s^2 &= t^2 + 8k \\ &= t^2 + 8(k-2) + 16 \end{aligned}$$

であるから, $t = (k-2)^2$ と置くと

$$\begin{aligned} s^2 &= (k-2)^2 + 8(k-2) + 16 \\ &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

よって, $s = k+2$ と置けばよい. 最後に, k は奇数であったから, $k-2$ と $k+2$ は互いに素である.

(c) 4 で割ると 1 余る数.

$s = 2s_1 - 1$, $t = 2s_2 - 1$ と置くと

$$\begin{aligned} c &= \frac{s^2+t^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}((2s_1-1)^2 + (2s_2-1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(8(s_1^2+s_2^2) - 8s_1s_2 + 2) \\ &= 4(s_1^2+s_2^2) - 4s_1s_2 + 1 \\ &= 4(s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2) + 1 \end{aligned}$$

となるから, c は 4 で割ると 1 余る.

2.4 見つけられない.

2.5 a) $n \leq 4$ における a, b, c の値を表にすると

$$\begin{array}{lll} T_1 = 1 & b_1 = 4 \cdot 1 = 4 & 3^2 + 4^2 = 5^2, \\ T_2 = 1+2 = 3 & b_2 = 4 \cdot 3 = 12 & 5^2 + 12^2 = 13^2, \\ T_3 = 3+3 = 6 & b_3 = 4 \cdot 6 = 24 & 7^2 + 24^2 = 25^2, \\ T_4 = 6+4 = 10 & b_4 = 4 \cdot 10 = 40 & 9^2 + 40^2 = 41^2. \end{array}$$

ここで, b_n を T_n に対応する既約ピタゴラス数の b とおいた.

T_5) $T_5 = 10 + 5 = 15$. また, $b_5 = 4 \cdot 15 = 60$.

これより, $11^2 + 60^2 = 61^2$ が予想できる. 実際計算してみると

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2.$$

T_6) $T_6 = 15 + 6 = 21$, $b_6 = 4 \cdot 21 = 84$ より

$$13^2 + 84^2 = 85^2$$

が予想できる. 計算してみると

$$\begin{aligned}13^2+84^2&=169+7059\\&=7225,\\85^2&=7225\end{aligned}$$

であるから, 確かに成り立っている.
T_7) $T_7=21+7=28$, $b_7=4\cdot 28=112$ であるから

$$15^2+112^2=113^2$$

が予想される. 実際

$$\begin{aligned}15^2+112^2&=225+12544\\&=12769,\\113^2&=12769\end{aligned}$$

なので, 確かに成り立っている.
b) 存在する.

$$(a,b,c)=(2n+1,4T_n,4T_n+1)$$

が既約ピタゴラス数の組であることを示す. 実際, 定理 2.1 において $t=1, s=2n+1$ とおけば t と s は互いに素で

$$\begin{aligned}a&=2n+1,\\b&=\frac{(2n+1)^2-1}{2}\\&=\frac{4n^2+4n}{2}\\&=2n(n+1)\\&=4\cdot\frac{n}{2}(n+1)=4T_n,\\c&=\frac{1^2+(2n+1)^2}{2}\\&=\frac{4n^2+4n+2}{2}\\&=2n^2+2n+1\\&=4\cdot\frac{n}{2}(n+1)+1=4T_n+1.\end{aligned}$$

2.6

定理 2.1 において $c-a=2$ とおけば

$$c-a=\frac{s^2+t^2}{2}-st=2$$

より

$$s = t + 2$$

を得る.

(a)

$t = 1, s = 3$ とおけば

$$a = 3, \quad b = \frac{9-1}{2} = 4, \quad c = \frac{3^2+1^2}{2} = 5.$$

また, $t = 3, s = 5$ とおけば

$$a = 15, b = \frac{5^2-3^2}{2} = \frac{16}{2} = 8, c = \frac{3^2+5^2}{2} = 17.$$

(b)

差が 2 である自然数の組が共通因数を持つには, その 2 つの自然数が偶数であり, 共通因数は 2 である場合にかぎる.

例えば, $s = 999, t = 997$ とおくと

$$a = 999 \cdot 997, b = \frac{999^2 - 997^2}{2}, c = \frac{999^2 * 997^2}{2}$$

を得て, $c - a = 2$ である.

(c) $s = t + 2$ を定理 2.1 に代入すればよい. すなわち

$$\begin{aligned}
a &= t \cdot (t+2), \\
b &= \frac{(t+2)^2 - t^2}{2} \\
&= \frac{4t+4}{2} \\
&= 2(t+1), \\
c &= \frac{t^2 + (t+2)^2}{2} \\
&= \frac{2t^2+4t+4}{2} \\
&= t^2 + 2t + 2.
\end{aligned}$$

ここで, t は奇数.

2.7 定理 2.1 の下の表に $2c - 2a = 2(c-a)$ の値を追記すると以下のようになる.

s	t	a	b	c	2(c-a)
3	1	3	4	5	4
5	1	5	12	13	8
7	1	7	24	25	36
9	1	9	40	41	64
5	3	15	8	17	4
7	3	21	20	29	16
7	5	35	12	37	4
9	5	45	28	53	16
9	7	63	15	65	4

この表によって $2(c-a)=(s-t)^2$ が予想される．実際

$$\begin{aligned}2\cdot(c-a) &= 2\cdot(\frac{s^2+t^2}{2}-st)\\ &= s^2+t^2-2st\\ &= s^2-2st+t^2\\ &= (s-t)^2\end{aligned}$$

であるから, 主張は正しい.

3　第3章の回答例

3.1

(a) u と v が共通因数 $k>1$ をもつとする．このとき, $u=ku', v=kv'$ とおくと

$$a=k^2(u'^2-v'^2),\quad b=2k^2u'^2v'^2,\quad c=k^2(u'^2-v'^2)$$

となるから, a,b,c は共に k^2 で割り切れる.

(b) u, v が共に奇数であれば, u^2-v^2, u^2+v^2 は偶数であるから, (a,b,c) は既約ピタゴラス数の組でない.

$u=3, v=1$ とおくと

$$(a,b,c)=(8,6,10)$$

となるが, これは既約ピタゴラス数の組ではない.

(c) (d) の問題のために, s と t が共通因数を持つ場合は右に ✓ を, s と t が共通因数を持たないが (a,b,c) が既約ピタゴラス数の組ではない場合は ✓✓ をつける.

u	v	a	b	c	
2	1	3	4	5	
3	1	8	6	10	✓✓
3	2	5	12	13	

4	1	15	8	17	
4	2	12	16	20	✓
4	3	7	24	25	
5	1	24	10	26	✓✓
5	2	21	20	29	
5	3	16	30	34	✓✓
5	4	9	40	41	
6	1	35	12	37	
6	2	32	24	40	✓
6	3	27	36	45	✓
6	4	20	48	50	✓
6	5	11	60	61	
7	1	48	14	50	✓✓
7	2	45	28	53	
7	3	40	42	58	✓✓
7	4	33	56	65	
7	5	24	70	74	✓✓
7	6	13	84	85	
8	1	63	16	65	
8	2	60	32	68	✓
8	3	55	48	73	
8	4	48	64	80	✓
8	5	39	80	89	
8	6	28	96	90	✓
8	7	15	112	113	
9	1	80	18	82	✓✓
9	2	77	36	85	
9	3	72	54	90	✓
9	4	65	72	97	
9	5	56	90	106	✓✓
9	6	45	108	117	✓
9	7	32	126	130	✓✓
9	8	17	144	145	
10	1	99	20	101	
10	2	96	40	104	✓
10	3	91	60	109	
10	4	84	80	116	✓
10	5	75	100	125	✓
10	6	64	120	136	✓

10	7	51	140	149	
10	8	36	160	164	✓
10	9	19	180	181	

(d) 「u と v が共通因数を持たない」かつ「u と v の偶奇が異なる」.

(e) u と v が共通因数を持つ場合, (a,b,c) は既約ではないことは 3.1 で示した. u と v が奇数であるとき, u^2-v^2 は偶数であり, $2uv$ も偶数であるから, (a,b,c) は既約でない.

u と v が共通因数を持たず, u と v の偶奇が異なるとき u^2-v^2 と $2uv$ が互いに素であることを示そう.

u^2-v^2 と $2uv$ が十数 p を共通因数として持ったとして, $2uv=pu', u^2-v^2=pv'$ とおく.

u^2-v^2 は奇数であるから, p は奇素数である. また, $2uv=pu'$ より, u か v は p の倍数である.

よって, u も v も p の倍数であり, これは u と v が共通因数を持たないことに反する.

3.2

(a) 円の方程式 $x^2+y^2=2$ に傾き $m\in\mathbf{Q}$ で $(1,1)$ を通る直線の方程式 $y=m(x-1)+1=mx-m+1$ を代入すると

$$\begin{aligned} x^2+(m(x-1)+1)^2&=2\\ x^2+(mx-m+1)^2&=2\\ (1+m^2)x^2+2mx(1-m)+m^2-2m-1&=0\\ (x-1)((1+m^2)x-(m^2-2m-1))&=0. \end{aligned}$$

よって, $x\neq 1$ とすると

$$x=\frac{m^2-2m-1}{1+m^2}.$$

これを $y=mx-m+1$ に代入して

$$\begin{aligned} y&=m\cdot\frac{m^2-2m-1}{1+m^2}-m+1\\ &=\frac{m(m^2-2m-1)-m(1+m^2)+1+m^2}{1+m^2}\\ &=\frac{-m^2-2m+1}{1+m^2}\\ &=-\frac{m^2+2m-1}{1+m^2}. \end{aligned}$$

最後に $m = \frac{v}{u}$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2 - 2uv - u^2}{u^2 + v^2}, \\ y &= -\frac{v^2 + 2uv - u^2}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{u^2 - 2uv - v^2}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

(b) $x^2 + y^2 = 3$ 上の点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{Q}^2$ を見つけられない.

3.3

$x^2 + y^2 = 1$ に $(-1, 0)$ を通り $m \in \mathbf{Q}$ を傾きとする直線の方程式 $y = m(x+1)$ を連立させると

$$\begin{aligned} x^2 - m^2(x+1)^2 = 1. \\ (1 - m^2)x^2 - 2m^2x - 1 - m^2 = 0. \\ (x+1)((1-m^2)x - (1+m^2)) = 0. \end{aligned}$$

$x \neq -1$ とすると

$$x = \frac{1 + m^2}{1 - m^2}.$$

これを $y = m(x+1)$ に代入すると

$$\begin{aligned} y &= m(x+1) \\ &= m \cdot (\frac{1+m^2}{1-m^2} + 1) \\ &= m \cdot \frac{1 + m^2 + 1 - m^2}{1 - m^2} \\ &= \frac{2m}{1 - m^2}. \end{aligned}$$

また, $m = \frac{v}{u}$ とおくと

$$x = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad y = \frac{2uv}{u^2 - v^2}.$$

3.4 TODO

4 第 4 章の回答例

4.1 略

4.2 (a) $a = xz, b = yz, c = z^2$ とおくと

$$\begin{aligned} x^3z^3 + y^3z^3 = z^4 \\ x^3 + y^3 = z. \end{aligned}$$

したがって, 例えば

- $x=1, y=2$ のとき $z=1^3+2^3=9$ で

$$a=1\cdot 9=9,\quad b=2\cdot 9=18,\quad c=9^2=81.$$

- $x=2, y=3$ のとき $z=2^3+3^3=35$ で

$$a=2\cdot 35=70,\quad b=3\cdot 35=105,\quad c=35^2.$$

(b) 仮定より

$$A^3+B^3=C^2.$$

このとき

$$\begin{aligned}(n^2A)^3+(n^2B)^3 &= n^6(A^3+B^3)\\ &= n^6C^2\\ &= (n^3C)^2.\end{aligned}$$

(c)

(a) の x, z が平方因子を持たず かつ互いに素であれば $a=xz$ に平方因子は現れないから (a,b,c) は (b) の意味の既約である.

以下のステップで解を見つける:

(i) $x=1, y$ を適当な平方因子を持たない自然数として $z=x^3+y^3$ を計算する.

(ii) z が平方因子を持たなければ $(a,b,c)=(xz, yz, z^2)$ は 既約である[1)].

$x=1, y=2$ のとき) $z=1^3=9^3=9=3^2$. これは平方因子を持つ.

$x=1, y=3$ のとき) $z=1^3+3^3=28=2^2\cdot 7$. これは平方因子を持つ.

$x=1, y=4$ のとき) $z=1^3+4^3=65=5\times 13$. これは平方因子を持たない.

$x=1, y=5$ のとき) $z=1^3+5^3=126=2\times 63=2\times 7\times 3^2$. これは平方因子を持つ.

$x=1, y=6$ のとき) $z=1^3+6^3=217=7\times 31$. これは平方因子を持たない.

$x=1, y=7$ のとき)

$$\begin{aligned}z&=1^3+7^3\\ &=344\\ &=2^2\times 86.\end{aligned}$$

これは平方因子を持つ.

[1)] xz に平方因子が現れないため

$x=1, y=8$ のとき)

$$\begin{aligned} z &= 1^3+8^3 \\ &= 513 \\ &= 3^2 \times 57. \end{aligned}$$

これは平方因子を持つ.

$x=1, y=9$ のとき $z=1^3+9^3=730=2\times3\times73$. これは平方因子を持たない.

以上によって,

$$\begin{aligned} (a,b,c) &= (2,2,4),(65,4\times65,65^2), \\ &\qquad (7\times31,6\times7\times31,7^2\times31^2),(2\times3\times73,2\times3^3\times73,2^2\times3^2\times73^2) \end{aligned}$$

は既約な $(*)$ の解である.

(d) 式 $(*)$ で $a=b$ とした方程式

$$2a^3=c^2$$

を考える. 左辺は偶数だから, c も偶数. よって 自然数 c_1 があって $c=2c_1$ と書ける. このとき

$$\begin{aligned} 2a^3 &= (2c_1)^2 \\ 2a^3 &= 4c_1^2 \\ a^3 &= 2c_1^2. \end{aligned}$$

同様に a は偶数なので, 自然数 a_1 があって $a=2a_1$. このとき

$$\begin{aligned} 8a_1^3 &= 2c_1^2 \\ 4a_1^3 &= c_1^2. \end{aligned}$$

同様に c_1 は偶数なので, 自然数 c_2 があって $c_1=2c_2$. このとき

$$\begin{aligned} 4a_1^3 &= 4c_2^2. \\ a_1^3 &= c_2^2. \end{aligned}$$

よって ある自然数 n があって $a_1=n^2, c_2=n^3$. したがって

$$\begin{aligned} a &= 2a_1 = 2n^2, \\ c &= 2c_1 = 4c_2 = 4n^3. \end{aligned}$$

以上によって, $(a,b,c)=(2n^2,2n^2,4n^3)$(n は自然数).

(e) $x=1$ とし

$$1+y^3=1^3+y^3>10^4$$

とすれば $y^3 > 10^4$ であるが, これをみたす自然数 y は $y \geq 22$ を満たす [2]

$y = 22$ のとき: $z = 1^3 = 22^3 = 10649 = 23 \times 463$ であるから (c) の条件を満たす. 以上によって

$$(a, b, c) = (23 \times 463, 22 \times 23 \times 463, 23^2 \times 463^2)$$

は $a > 10^4$ を満たす $(*)$ の既約な解である.

5 第 5 章の回答例

5.1 (a) ユークリッドの互除法を用いると

$$\begin{aligned} 67890 &= 12345 \times 5 + 6165 \\ 12345 &= 6165 \times 2 + 15 \\ 6165 &= 15 \times 411 + 0 \end{aligned}$$

であるから, $\gcd(12345, 67890) = 15$ である.

(b) ユークリッドの互除法を用いると

$$\begin{aligned} 54321 &= 9876 \times 5 + 4941 \\ 9876 &= 4941 \times 1 + 4935 \\ 4941 &= 4935 \times 1 + 6 \\ 4935 &= 6 \times 822 + 3 \end{aligned}$$

であるから, $\gcd(54321, 9876) = 3$.

5.2 考えているステップは

$$\begin{aligned} r_j &= q_{j+2} r_{j+1} + r_{j+2} \\ r_{j+1} &= q_{j+3} r_{j+2} + r_{j+3} \end{aligned}$$

である. $q_{j+2} \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned} r_j &= q_{j+2} r_{j+1} + r_{j+2} \\ &\geq 2r_{j+1} + r_{j+2} > 2r_{j+1} \end{aligned}$$

より $r_{j+1} < \frac{1}{2} r_j$ が成り立つ. したがって $q_{j+2} = 1$ としてよい. 同様に $q_{j+3} = 1$ としてよい. このとき, 考えているステップは

$$\begin{aligned} r_j &= r_{j+1} + r_{j+2} \\ r_{j+1} &= r_{j+2} + r_{j+3} \end{aligned}$$

[2] $10^{4/3} = 21.544\ldots$ のため

2 式を足すと

$$
\begin{aligned}
r_j + r_{j+1} &= r_{j+1} + 2r_{j+2} + r_{j+3} \\
r_j &= 2r_{j+2} + r_{j+3} > 2r_{j+2}.
\end{aligned}
$$

以上によって

$$r_{j+2} < \frac{1}{2} r_j.$$

$2\log_2(b) \leq 7(\log_{10}(b)+1)$ を示したい.

$$
\begin{aligned}
&2\log_2(b) \leq 7(\log_{10}(b)+1) \\
\Leftrightarrow &2\log_2(b) \leq 7\log_{10}2 \cdot \log_2(b) + 7 \\
\Leftrightarrow &\log_2(b) \cdot (2 - 7\log_{10}(2)) \leq 7
\end{aligned}
$$

である. ここで

$$10^2 < 2^7$$

より $2 < \log_{10} 2^7 = 7\log_{10} 2$ であるから, $2 - 7\log_{10} 2 < 0$ である. したがって, 命題が示された.

5.3 TODO

5.4 (a) (i) $8 = 2^3, 12 = 2^2 \cdot 3$ より

$$\mathrm{LCM}(8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

(ii) $20 = 2^2 \cdot 5, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ であるから

$$\mathrm{LCM}(20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 20 \cdot 3 = 60.$$

(iii) $51 = 3 \cdot 17, 68 = 2^2 \cdot 17$ より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LCM}(51, 68) = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 &= 4 \cdot 51 \\
&= 204
\end{aligned}
$$

(iv) $18 = 3^2 \cdot 2$ より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LCM}(23, 18) &= 23 \cdot 2 \cdot 3^2 \\
&= 46 \cdot 9 \\
&= 414.
\end{aligned}
$$

(b) $mn = \gcd(m, n) \cdot \mathrm{LCM}(m, n)$.

(c) $\{p_1, p_2, \ldots\}$ を素数列とする．十分大きな自然数 N 及び非負整数列 $\{e_j\}_{j=1}^N$, $\{e'_j\}_{j=1}^N$ を用いて

$$\begin{aligned} m &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_N^{e_N}, \\ n &= p_1^{e'_1} p_2^{e'_2} \cdots p_N^{e'_N} \end{aligned}$$

と表す．このとき

$$\begin{aligned} \gcd(m,n) \cdot \mathrm{LCM}(m,n) &= p_1^{\min(e_1,e'_1)} p_2^{\min(e_2,e'_2)} \cdots p_N^{\min(e_N,e'_N)} \\ &\quad \times p_1^{\max(e_1,e'_1)} p_2^{\max(e_2,e'_2)} \cdots p_N^{\max(e_N,e'_N)} \\ &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_N^{e_N} \times p_1^{e'_1} p_2^{e'_2} \cdots p_N^{e'_N} \\ &= mn. \end{aligned}$$

(d) ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned} 307829 &= 301337 \times 1 + 6492 \\ 301337 &= 6492 \times 46 + 2705 \\ 6492 &= 2705 \times 2 + 1082 \\ 2705 &= 1082 \times 2 + 541 \\ 1082 &= 541 \times 2. \end{aligned}$$

したがって $\gcd(301337, 307829) = 541$ である．よって

$$\begin{aligned} \mathrm{LCM}(301337, 307829) &= \frac{301337}{541} \times 307829 \\ &= 557 \times 307829 \\ &= 171460753. \end{aligned}$$