「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 2 月 13 日

1　第1章の回答例

<u>**1.1**</u> 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.

有効な方法は分からない.

こんな数はたぶん無限にある.

<u>**1.2**</u>

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 = 4 &= 2^2, \\ 4+5 = 9 &= 3^2, \\ 9+7 = 16 &= 4^2, \\ 16+9 = 25 &= 5^2 \end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$$

が予想される.

<u>**1.3**</u>

三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.

任意の自然数は $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.

$(p, p+2, p+4)$ を三つ子素数とする. このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l+1, 3l+2$ のいずれかで表される.

$l = 1$ のとき, $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$ である.

$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l+1$ もしくは $3l+2$ と表される.

$p = 3l+1$ とすると, $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$ となって, これは素数ではないから不敵.

$p = 3l+2$ とすると, $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限る.

<u>**1.4**</u> (a) $N^2 - 1$ が十数であるのは $N = 2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2 - 1 = (N-1)(N+1)$$

であり, $N^2 - 1$ が十数であるためには $N - 1 = 1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. N によってそれぞれ調べてみると

$N = 2 \Rightarrow N^2 - 2 = 2$; 素数,

$N = 3 \Rightarrow N^2 - 2 = 7$; 素数,

$N=4 \Rightarrow N^2-2=14=2\times 7$,
$N=5 \Rightarrow N^2-2=23$; 素数,
$N=6 \Rightarrow N^2-2=34=2\times 17$,
$N=7 \Rightarrow N^2-2=47$; 素数,
$N=8 \Rightarrow N^2-2=62=2\times 31$,
$N=9 \Rightarrow N^2-2=79$; 素数,
$N=10 \Rightarrow N^2-2=98=2\times 7^2$,
$N=11 \Rightarrow N^2-2=119$,
$N=12 \Rightarrow N^2-2=142=2\times 71$,
$N=13 \Rightarrow N^2-2=167$,
$N=14 \Rightarrow N^2-2=194=2\times 97$,
$N=15 \Rightarrow N^2-2=253$.

(c) N^2-3 の形の素数は多分無数に存在する.
最初の方から正の数を列挙してみると

$N=2 \Rightarrow 2^2-3=1$,
$N=3 \Rightarrow 3^2-3=6=2\times 3$,
$N=4 \Rightarrow 4^2-3=13$; 素数,
$N=5 \Rightarrow 5^2-3=22=2\times 11$,
$N=6 \Rightarrow 6^2-3=33=3\times 11$,
$N=7 \Rightarrow 7^2-3=46=2\times 23$,
$N=8 \Rightarrow 8^2-3=61$; prime,
$N=9 \Rightarrow 9^2-3=78=2\times 39$,
$N=10 \Rightarrow 10^2-3=97$; prime

N^2-4 の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2-4=(N-2)(N+2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

1.5

n が偶数のとき:
$n=2m$ とおくと

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+2m &= (2m+1)+((2m-1)+2)+((2m-2)+3)+\cdots+((m+1+m)) \\ &= m\cdot(2m+1) \\ &= \frac{n}{2}(n+1).\end{aligned}$$

n が奇数のとき:

$n = 2m - 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + (2m-1) &= (1 + (2m-1)) + (2 + (2m-2)) + \cdots + ((m-1) + (m+1)) + m \\
&= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\
&= 2m(m-1) + m \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1) + \frac{n+1}{2} \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1 + \frac{1}{2}) \\
&= (n+1) \cdot \frac{n+1-2+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}$$

2　第 2 章の回答例

2.1　(a) 組み合わせとして考えるのは

$$
\begin{aligned}
(a,b) = &(3m,3n),(3m+1,3n),(3m+2,3n),\\
&(3m,3n+1),(3m+1,3n+1),(3m+2,3n+1),\\
&(3m,3n+2),(3m+1,3n+2),(3m+2,3n+2)
\end{aligned}
$$

のように書かれる場合である. 必要なら a と b を入れ替えることによって, この表の右上半分だけを考える. すなわち,

$$(a,b) = (3m+1,3n+1),(3m+2,3n+1),(3m+2,3n+2)$$

の場合 対応する既約ピタゴラス数 (a,b,c) が存在しないことを示したい.

まず, $c = 3l$ とかけているとき, c^2 は 3 の倍数であり, $c = 3l+1$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余り, $c = 3l+2$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余る.

$(a,b) = (3m+1,3n+1)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (3m+1)^2+(3n+1)^2\\
&= 9(m^2+n^2)+6(m+n)+2
\end{aligned}
$$

となるが, c^2 は 3 で割ると 2 余る組がないから不適.

$(a,b) = (3m+2,3n+1)$ のとき,

$$a^2+b^2 = 9(m^2+n^2)+6(2m+n)+5.$$

よって, この場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.

$(a,b) = (3m+2,3n+2)$ のとき

$$(3m+2)^2+(3n+2)^2 = 9(m^2+n^2)+12(m+n)+8.$$

よってこの場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.

(b) 分からない.

2.2 仮定より, ある整数 k_1, k_2 があって

$$
\begin{aligned}
m &= dk_1,\\
n &= dk_2
\end{aligned}
$$

が成り立つ. このとき,

$$
\begin{aligned}
m+n &= d(k_1+k_2),\\
m-n &= d(k_1-k_2)
\end{aligned}
$$

となるから, 主張を得る.

2.3 (a) 任意の 1 より大きな奇数が現れる. 実際, 定理 2.1 で $t=1$ とおけば $a=s$.

(b) 少なくとも 4 の倍数が現れる. 8 で割って 4 余る数はかならず現れる.

b は 4 の倍数であることを示す.

s,t はともに奇数であるから, ある自然数 s_1, t_1 があって, $s = 2s_1 - 1$, $t = 2t_1 - 1$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(s-t)(s+t) \\ &= \frac{1}{2}(2s_1 - t_1)(2s_1 + 2t_1 - 2) \\ &= 2(s_1 - t_1)(s_1 + t_1 - 1) \end{aligned}$$

となる. ここで, $s_1 - t_1$ と $s_1 + t_1 - 1$ は 2 を法として異なるので, b は 4 の倍数である.

次に, 8 で割って 4 余る数は必ず現れることを示す.

b を 4 で割って 8 余る自然数とする. ある互いに素な奇数 $s, t(s > t)$ があって

$$b = \frac{s^2 - t^2}{2}$$

を満たすことを示したい. $b = 4k$(k は奇数) と置くと

$$4k = \frac{s^2 - t^2}{2}.$$

分母を払って

$$8k = s^2 - t^2.$$

ここで

$$\begin{aligned} s^2 &= t^2 + 8k \\ &= t^2 + 8(k-2) + 16 \end{aligned}$$

であるから, $t = (k-2)^2$ と置くと

$$\begin{aligned} s^2 &= (k-2)^2 + 8(k-2) + 16 \\ &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

よって, $s = k + 2$ と置けばよい. 最後に, k は奇数であったから, $k-2$ と $k+2$ は互いに素である.

(c) 4 で割ると 1 余る数.

$s = 2s_1 - 1,\ t = 2s_2 - 1$ と置くと

$$\begin{aligned} c &= \frac{s^2+t^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}((2s_1-1)^2 + (2s_2-1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(8(s_1^2+s_2^2) - 8s_1s_2 + 2) \\ &= 4(s_1^2+s_2^2) - 4s_1s_2 + 1 \\ &= 4(s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2) + 1 \end{aligned}$$

となるから, c は 4 で割ると 1 余る.

<u>2.4</u> 見つけられない.

<u>2.5</u> a) $n \leq 4$ における a, b, c の値を表にすると

$$\begin{array}{lll} T_1 = 1 & b_1 = 4 \cdot 1 = 4 & 3^2 + 4^2 = 5^2, \\ T_2 = 1+2 = 3 & b_2 = 4 \cdot 3 = 12 & 5^2 + 12^2 = 13^2, \\ T_3 = 3+3 = 6 & b_3 = 4 \cdot 6 = 24 & 7^2 + 24^2 = 25^2, \\ T_4 = 6+4 = 10 & b_4 = 4 \cdot 10 = 40 & 9^2 + 40^2 = 41^2. \end{array}$$

ここで, b_n を T_n に対応する既約ピタゴラス数の b とおいた.

T_5) $T_5 = 10 + 5 = 15$. また, $b_5 = 4 \cdot 15 = 60$.

これより, $11^2 + 60^2 = 61^2$ が予想できる. 実際計算してみると

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2.$$

T_6) $T_6 = 15 + 6 = 21,\ b_6 = 4 \cdot 21 = 84$ より

$$13^2 + 84^2 = 85^2$$

が予想できる. 計算してみると

$$\begin{aligned} 13^2 + 84^2 &= 169 + 7059 \\ &= 7225, \\ 85^2 &= 7225 \end{aligned}$$

であるから, 確かに成り立っている.

T_7) $T_7 = 21 + 7 = 28,\ b_7 = 4 \cdot 28 = 112$ であるから

$$15^2 + 112^2 = 113^2$$

が予想される. 実際

$$\begin{aligned} 15^2 + 112^2 &= 225 + 12544 \\ &= 12769, \\ 113^2 &= 12769 \end{aligned}$$

なので, 確かに成り立っている.
b) 存在する.

$$(a, b, c) = (2n + 1, 4T_n, 4T_n + 1)$$

が既約ピタゴラス数の組であることを示す. 実際, 定理 2.1 において $t = 1, s = 2n + 1$ とおけば t と s は互いに素で

$$\begin{aligned}
a &= 2n + 1, \\
b &= \frac{(2n + 1)^2 - 1}{2} \\
&= \frac{4n^2 + 4n}{2} \\
&= 2n(n + 1) \\
&= 4 \cdot \frac{n}{2}(n + 1) = 4T_n, \\
c &= \frac{1^2 + (2n + 1)^2}{2} \\
&= \frac{4n^2 + 4n + 2}{2} \\
&= 2n^2 + 2n + 1 \\
&= 4 \cdot \frac{n}{2}(n + 1) + 1 = 4T_n + 1.
\end{aligned}$$

2.6

定理 2.1 において $c - a = 2$ とおけば

$$c - a = \frac{s^2 + t^2}{2} - st = 2$$

より

$$s = t + 2$$

を得る.
(a)
$t = 1, s = 3$ とおけば

$$a = 3, \quad b = \frac{9 - 1}{2} = 4, \quad c = \frac{3^2 + 1^2}{2} = 5.$$

また, $t = 3, s = 5$ とおけば

$$a = 15, b = \frac{5^2 - 3^2}{2} = \frac{16}{2} = 8, c = \frac{3^2 + 5^2}{2} = 17.$$

(b)
差が 2 である自然数の組が共通因数を持つには, その 2 つの自然数が偶数であり, 共通因数は 2 である場合にかぎる.

例えば, $s = 999, t = 997$ とおくと

$$a = 999 \cdot 997, b = \frac{999^2 - 997^2}{2}, c = \frac{999^2 * 997^2}{2}$$

を得て, $c - a = 2$ である.
(c) $s = t + 2$ を定理 2.1 に代入すればよい. すなわち

$$\begin{aligned} a &= t \cdot (t+2), \\ b &= \frac{(t+2)^2 - t^2}{2} \\ &= \frac{4t+4}{2} \\ &= 2(t+1), \\ c &= \frac{t^2 + (t+2)^2}{2} \\ &= \frac{2t^2 + 4t + 4}{2} \\ &= t^2 + 2t + 2. \end{aligned}$$

ここで, t は奇数.
<u>**2.7**</u> 定理 2.1 の下の表に $2c - 2a = 2(c - a)$ の値を追記すると以下のようになる.

s	t	a	b	c	2(c-a)
3	1	3	4	5	4
5	1	5	12	13	8
7	1	7	24	25	36
9	1	9	40	41	64
5	3	15	8	17	4
7	3	21	20	29	16
7	5	35	12	37	4
9	5	45	28	53	16
9	7	63	15	65	4

この表によって $2(c - a) = (s - t)^2$ が予想される. 実際

$$\begin{aligned} 2 \cdot (c - a) &= 2 \cdot (\frac{s^2 + t^2}{2} - st) \\ &= s^2 + t^2 - 2st \\ &= s^2 - 2st + t^2 \\ &= (s - t)^2 \end{aligned}$$

であるから, 主張は正しい.

3　第 3 章の回答例

<u>**3.1**</u>

(a) u と v が共通因数 $k > 1$ をもつとする．このとき, $u = ku', v = kv'$ とおくと

$$a = k^2(u'^2 - v'^2), \quad b = 2k^2u'^2v'^2, \quad c = k^2(u'^2 - v'^2)$$

となるから, a, b, c は共に k^2 で割り切れる.

(b) u, v が共に奇数であれば, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$ は偶数であるから, (a, b, c) は既約ピタゴラス数の組でない.

$u = 3, v = 1$ とおくと

$$(a, b, c) = (8, 6, 10)$$

となるが, これは既約ピタゴラス数の組ではない.

(c) (d) の問題のために, s と t が共通因数を持つ場合は右に ✓ を, s と t が共通因数を持たないが (a, b, c) が既約ピタゴラス数の組ではない場合は ✓✓ をつける.

u	v	a	b	c	
2	1	3	4	5	
3	1	8	6	10	✓✓
3	2	5	12	13	
4	1	15	8	17	
4	2	12	16	20	✓
4	3	7	24	25	
5	1	24	10	26	✓✓
5	2	21	20	29	
5	3	16	30	34	✓✓
5	4	9	40	41	
6	1	35	12	37	
6	2	32	24	40	✓
6	3	27	36	45	✓
6	4	20	48	50	✓
6	5	11	60	61	
7	1	48	14	50	✓✓
7	2	45	28	53	
7	3	40	42	58	✓✓
7	4	33	56	65	
7	5	24	70	74	✓✓
7	6	13	84	85	
8	1	63	16	65	
8	2	60	32	68	✓

8	3	55	48	73	
8	4	48	64	80	✓
8	5	39	80	89	
8	6	28	96	90	✓
8	7	15	112	113	
9	1	80	18	82	✓✓
9	2	77	36	85	
9	3	72	54	90	✓
9	4	65	72	97	
9	5	56	90	106	✓✓
9	6	45	108	117	✓
9	7	32	126	130	✓✓
9	8	17	144	145	
10	1	99	20	101	
10	2	96	40	104	✓
10	3	91	60	109	
10	4	84	80	116	✓
10	5	75	100	125	✓
10	6	64	120	136	✓
10	7	51	140	149	
10	8	36	160	164	✓
10	9	19	180	181	

(d) 「u と v が共通因数を持たない」かつ「u と v の偶奇が異なる」.
(e) u と v が共通因数を持つ場合, (a,b,c) は既約ではないことは 3.1 で示した. u と v が奇数であるとき, u^2-v^2 は偶数であり, $2uv$ も偶数であるから, (a,b,c) は既約でない.

u と v が共通因数を持たず, u と v の偶奇が異なるとき u^2-v^2 と $2uv$ が互いに素であることを示そう.

u^2-v^2 と $2uv$ が十数 p を共通因数として持ったとして, $2uv=pu', u^2-v^2=pv'$ とおく.

u^2-v^2 は奇数であるから, p は奇素数である. また, $2uv=pu'$ より, u か v は p の倍数である.

よって, u も v も p の倍数であり, これは u と v が共通因数を持たないことに反する.

3.2

(a) 円の方程式 $x^2+y^2=2$ に傾き $m\in\mathbf{Q}$ で $(1,1)$ を通る直線の方程式

$y = m(x-1)+1 = mx - m + 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + (m(x-1)+1)^2 &= 2 \\ x^2 + (mx - m + 1)^2 &= 2 \\ (1+m^2)x^2 + 2mx(1-m) + m^2 - 2m - 1 &= 0 \\ (x-1)((1+m^2)x - (m^2 - 2m - 1)) &= 0. \end{aligned}$$

よって, $x \neq 1$ とすると

$$x = \frac{m^2 - 2m - 1}{1+m^2}.$$

これを $y = mx - m + 1$ に代入して

$$\begin{aligned} y &= m \cdot \frac{m^2-2m-1}{1+m^2} - m + 1 \\ &= \frac{m(m^2-2m-1) - m(1+m^2) + 1 + m^2}{1+m^2} \\ &= \frac{-m^2 - 2m + 1}{1+m^2} \\ &= -\frac{m^2+2m-1}{1+m^2}. \end{aligned}$$

最後に $m = \frac{v}{u}$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2 - 2uv - u^2}{u^2+v^2}, \\ y &= -\frac{v^2 + 2uv - u^2}{u^2+v^2} \\ &= \frac{u^2 - 2uv - v^2}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

(b) $x^2 + y^2 = 3$ 上の点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{Q}^2$ を見つけられない.

3.3

$x^2+y^2 = 1$ に $(-1, 0)$ を通り $m \in \mathbf{Q}$ を傾きとする直線の方程式 $y = m(x+1)$ を連立させると

$$\begin{aligned} x^2 - m^2(x+1)^2 &= 1. \\ (1-m^2)x^2 - 2m^2x - 1 - m^2 &= 0. \\ (x+1)((1-m^2)x - (1+m^2)) &= 0. \end{aligned}$$

$x \neq -1$ とすると

$$x = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$

これを $y = m(x+1)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
y &= m(x+1) \\
&= m \cdot (\frac{1+m^2}{1-m^2} + 1) \\
&= m \cdot \frac{1+m^2+1-m^2}{1-m^2} \\
&= \frac{2m}{1-m^2}.
\end{aligned}
$$

また, $m = \frac{v}{u}$ とおくと

$$x = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \quad y = \frac{2uv}{u^2-v^2}.$$

<u>3.4</u> TODO

4　第 4 章の回答例

4.1 略

4.2　(a) $a = xz, b = yz, c = z^2$ とおくと

$$x^3z^3 + y^3z^3 = z^4$$
$$x^3 + y^3 = z.$$

したがって, 例えば

- $x = 1, y = 2$ のとき $z = 1^3 + 2^3 = 9$ で

$$a = 1 \cdot 9 = 9, \quad b = 2 \cdot 9 = 18, \quad c = 9^2 = 81.$$

- $x = 2, y = 3$ のとき $z = 2^3 + 3^3 = 35$ で

$$a = 2 \cdot 35 = 70, \quad b = 3 \cdot 35 = 105, \quad c = 35^2.$$

(b) 仮定より

$$A^3 + B^3 = C^2.$$

このとき

$$\begin{aligned}(n^2A)^3 + (n^2B)^3 &= n^6(A^3 + B^3)\\ &= n^6C^2\\ &= (n^3C)^2.\end{aligned}$$

(c)

(a) の x, z が平方因子を持たず かつ互いに素であれば $a = xz$ に平方因子は現れないから (a, b, c) は (b) の意味の既約である.

以下のステップで解を見つける:

(i) $x = 1, y$ を適当な平方因子を持たない自然数として $z = x^3 + y^3$ を計算する.

(ii) z が平方因子を持たなければ $(a, b, c) = (xz, yz, z^2)$ は 既約である[1).]

$x = 1, y = 2$ のとき) $z = 1^3 = 9^3 = 9 = 3^2$. これは平方因子を持つ.

$x = 1, y = 3$ のとき) $z = 1^3 + 3^3 = 28 = 2^2 \cdot 7$. これは平方因子を持つ.

$x = 1, y = 4$ のとき) $z = 1^3 + 4^3 = 65 = 5 \times 13$. これは平方因子を持たない.

$x = 1, y = 5$ のとき) $z = 1^3 + 5^3 = 126 = 2 \times 63 = 2 \times 7 \times 3^2$. これは平方因子を持つ.

[1)] xz に平方因子が現れないため

$x=1, y=6$ のとき) $z=1^3+6^3=217=7\times 31$. これは平方因子を持たない.

$x=1, y=7$ のとき)

$$\begin{aligned} z &= 1^3+7^3 \\ &= 344 \\ &= 2^2\times 86. \end{aligned}$$

これは平方因子を持つ.

$x=1, y=8$ のとき)

$$\begin{aligned} z &= 1^3+8^3 \\ &= 513 \\ &= 3^2\times 57. \end{aligned}$$

これは平方因子を持つ.

$x=1, y=9$ のとき $z=1^3+9^3=730=2\times 3\times 73$. これは平方因子を持たない.

以上によって,

$$\begin{aligned} (a,b,c) = {} & (2,2,4), (65, 4\times 65, 65^2), \\ & (7\times 31, 6\times 7\times 31, 7^2\times 31^2), (2\times 3\times 73, 2\times 3^3\times 73, 2^2\times 3^2\times 73^2) \end{aligned}$$

は既約な $(*)$ の解である.

(d) 式 $(*)$ で $a=b$ とした方程式

$$2a^3=c^2$$

を考える. 左辺は偶数だから, c も偶数. よって 自然数 c_1 があって $c=2c_1$ と書ける. このとき

$$\begin{aligned} 2a^3 &= (2c_1)^2 \\ 2a^3 &= 4c_1^2 \\ a^3 &= 2c_1^2. \end{aligned}$$

同様に a は偶数なので, 自然数 a_1 があって $a=2a_1$. このとき

$$\begin{aligned} 8a_1^3 &= 2c_1^2 \\ 4a_1^3 &= c_1^2. \end{aligned}$$

同様に c_1 は偶数なので, 自然数 c_2 があって $c_1=2c_2$. このとき

$$\begin{aligned} 4a_1^3 &= 4c_2^2. \\ a_1^3 &= c_2^2. \end{aligned}$$

よって ある自然数 n があって $a_1 = n^2, c_2 = n^3$. したがって

$$a = 2a_1 = 2n^2,$$
$$c = 2c_1 = 4c_2 = 4n^3.$$

以上によって, $(a, b, c) = (2n^2, 2n^2, 4n^3)$($n$ は自然数).
(e) $x = 1$ とし

$$1 + y^3 = 1^3 + y^3 > 10^4$$

とすれば $y^3 > 10^4$ であるが, これをみたす自然数 y は $y \geq 22$ を満たす [2)]

$y = 22$ のとき: $z = 1^3 = 22^3 = 10649 = 23 \times 463$ であるから (c) の条件を満たす. 以上によって

$$(a, b, c) = (23 \times 463, 22 \times 23 \times 463, 23^2 \times 463^2)$$

は $a > 10^4$ を満たす $(*)$ の既約な解である.

[2)] $10^{4/3} = 21.544\ldots$ のため

5　第 5 章の回答例

5.1 (a) ユークリッドの互除法を用いると

$$
\begin{aligned}
67890 &= 12345 \times 5 + 6165 \\
12345 &= 6165 \times 2 + 15 \\
6165 &= 15 \times 411 + 0
\end{aligned}
$$

であるから, $\gcd(12345, 67890) = 15$ である.

(b) ユークリッドの互除法を用いると

$$
\begin{aligned}
54321 &= 9876 \times 5 + 4941 \\
9876 &= 4941 \times 1 + 4935 \\
4941 &= 4935 \times 1 + 6 \\
4935 &= 6 \times 822 + 3
\end{aligned}
$$

であるから, $\gcd(54321, 9876) = 3$.

5.2 考えているステップは

$$
\begin{aligned}
r_j &= q_{j+2} r_{j+1} + r_{j+2} \\
r_{j+1} &= q_{j+3} r_{j+2} + r_{j+3}
\end{aligned}
$$

である. $q_{j+2} \geq 2$ のときは

$$
\begin{aligned}
r_j &= q_{j+2} r_{j+1} + r_{j+2} \\
&\geq 2r_{j+1} + r_{j+2} > 2r_{j+1}
\end{aligned}
$$

より $r_{j+1} < \frac{1}{2} r_j$ が成り立つ. したがって $q_{j+2} = 1$ としてよい. 同様に $q_{j+3} = 1$ としてよい. このとき, 考えているステップは

$$
\begin{aligned}
r_j &= r_{j+1} + r_{j+2} \\
r_{j+1} &= r_{j+2} + r_{j+3}
\end{aligned}
$$

2 式を足すと

$$
\begin{aligned}
r_j + r_{j+1} &= r_{j+1} + 2r_{j+2} + r_{j+3} \\
r_j &= 2r_{j+2} + r_{j+3} > 2r_{j+2}.
\end{aligned}
$$

以上によって

$$
r_{j+2} < \frac{1}{2} r_j.
$$

$2\log_2(b) \leq 7(\log_{10}(b)+1)$ を示したい.

$$\begin{aligned}
&2\log_2(b) \leq 7(\log_{10}(b)+1) \\
\Leftrightarrow &2\log_2(b) \leq 7\log_{10}2 \cdot \log_2(b) + 7 \\
\Leftrightarrow &\log_2(b) \cdot (2 - 7\log_{10}(2)) \leq 7
\end{aligned}$$

である. ここで

$$10^2 < 2^7$$

より $2 < \log_{10} 2^7 = 7\log_{10} 2$ であるから, $2 - 7\log_{10} 2 < 0$ である. したがって, 命題が示された.

5.3 TODO

5.4 (a) (i) $8 = 2^3, 12 = 2^2 \cdot 3$ より

$$\mathrm{LCM}(8,12) = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

(ii) $20 = 2^2 \cdot 5, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ であるから

$$\mathrm{LCM}(20,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 20 \cdot 3 = 60.$$

(iii) $51 = 3 \cdot 17, 68 = 2^2 \cdot 17$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{LCM}(51,68) = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 &= 4 \cdot 51 \\
&= 204
\end{aligned}$$

(iv) $18 = 3^2 \cdot 2$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{LCM}(23,18) &= 23 \cdot 2 \cdot 3^2 \\
&= 46 \cdot 9 \\
&= 414.
\end{aligned}$$

(b) $mn = \gcd(m,n) \cdot \mathrm{LCM}(m,n)$.

(c) $\{p_1, p_2, \ldots\}$ を素数列とする. 十分大きな自然数 N 及び非負整数列 $\{e_j\}_{j=1}^N$, $\{e'_j\}_{j=1}^N$ を用いて

$$\begin{aligned}
m &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_N^{e_N}, \\
n &= p_1^{e'_1} p_2^{e'_2} \cdots p_N^{e'_N}
\end{aligned}$$

と表す. このとき

$$\begin{aligned}
\gcd(m,n) \cdot \mathrm{LCM}(m,n) &= p_1^{\min(e_1,e'_1)} p_2^{\min(e_2,e'_2)} \cdots p_N^{\min(e_N,e'_N)} \\
&\quad \times p_1^{\max(e_1,e'_1)} p_2^{\max(e_2,e'_2)} \cdots p_N^{\max(e_N,e'_N)} \\
&= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_N^{e_N} \times p_1^{e'_1} p_2^{e'_2} \cdots p_N^{e'_N} \\
&= mn.
\end{aligned}$$

(d) ユークリッドの互除法より

$$
\begin{aligned}
307829 &= 301337 \times 1 + 6492 \\
301337 &= 6492 \times 46 + 2705 \\
6492 &= 2705 \times 2 + 1082 \\
2705 &= 1082 \times 2 + 541 \\
1082 &= 541 \times 2.
\end{aligned}
$$

したがって $\gcd(301337, 307829) = 541$ である．よって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LCM}(301337, 307829) &= \frac{301337}{541} \times 307829 \\
&= 557 \times 307829 \\
&= 171460753.
\end{aligned}
$$