「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 28 年 12 月 31 日

1　第 1 章の回答例

<u>1.1</u> 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.

有効な方法は分からない.

こんな数はたぶん無限にある.

<u>1.2</u>

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2, \\
1 + 3 = 4 &= 2^2, \\
4 + 5 = 9 &= 3^2, \\
9 + 7 = 16 &= 4^2, \\
16 + 9 = 25 &= 5^2
\end{aligned}
$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$$

が予想される.

<u>1.3</u>

三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.

任意の自然数は $3l, 3l + 1, 3l + 2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.

$(p, p + 2, p + 4)$ を三つ子素数とする．このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l + 1, 3l + 2$ のいずれかで表される.

$l = 1$ のとき, $(p, p + 2, p + 4) = (3, 5, 7)$ である.

$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l + 1$ もしくは $3l + 2$ と表される.

$p = 3l + 1$ とすると, $p + 2 = 3l + 3 = 3(l + 1)$ となって, これは素数ではないから不敵.

$p=3l+2$ とすると, $p+2=3l+4, p+4=3l+6=3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3,5,7)$ に限る.

1.4 (a) N^2-1 が十数であるのは $N=2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2-1=(N-1)(N+1)$$

であり, N^2-1 が十数であるためには $N-1=1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. N によってそれぞれ調べてみると
$N=2 \Rightarrow N^2-2=2$; 素数,
$N=3 \Rightarrow N^2-2=7$; 素数,
$N=4 \Rightarrow N^2-2=14=2\times 7$,
$N=5 \Rightarrow N^2-2=23$; 素数,
$N=6 \Rightarrow N^2-2=34=2\times 17$,
$N=7 \Rightarrow N^2-2=47$; 素数,
$N=8 \Rightarrow N^2-2=62=2\times 31$,
$N=9 \Rightarrow N^2-2=79$; 素数,
$N=10 \Rightarrow N^2-2=98=2\times 7^2$,
$N=11 \Rightarrow N^2-2=119$,
$N=12 \Rightarrow N^2-2=142=2\times 71$,
$N=13 \Rightarrow N^2-2=167$,
$N=14 \Rightarrow N^2-2=194=2\times 97$,
$N=15 \Rightarrow N^2-2=253$.

(c) N^2-3 の形の素数は多分無数に存在する.
最初の方から正の数を列挙してみると
$N=2 \Rightarrow 2^2-3=1$,
$N=3 \Rightarrow 3^2-3=6=2\times 3$,
$N=4 \Rightarrow 4^2-3=13$; 素数,
$N=5 \Rightarrow 5^2-3=22=2\times 11$,
$N=6 \Rightarrow 6^2-3=33=3\times 11$,
$N=7 \Rightarrow 7^2-3=46=2\times 23$,
$N=8 \Rightarrow 8^2-3=61$; prime,
$N=9 \Rightarrow 9^2-3=78=2\times 39$,
$N=10 \Rightarrow 10^2-3=97$; prime

N^2-4 の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2-4=(N-2)(N+2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

1.5

n が空数のとき:
$n = 2m$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 2m &= (2m+1) + ((2m-1)+2) + ((2m-2)+3) + \cdots + ((m+1+m)) \\ &= m \cdot (2m+1) \\ &= \frac{n}{2}(n+1). \end{aligned}$$

n が奇数のとき:
$n = 2m-1$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (2m-1) &= (1 + (2m-1)) + (2 + (2m-2)) + \cdots + ((m-1) + (m+1)) + m \\ &= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\ &= 2m(m-1) + m \\ &= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1) + \frac{n+1}{2} \\ &= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1 + \frac{1}{2}) \\ &= (n+10 \cdots \frac{n+1-2+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1). \end{aligned}$$