

# 「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 1 月 1 日

## 1 第 1 章の回答例

**1.1** 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は  $1225 = 35^2$ ,  $416 = 204^2$ .

有効な方法は分らない.

こんな数はたぶん無限にある.

### **1.2**

$$\begin{aligned}1 &= 1^2, \\1 + 3 &= 4 = 2^2, \\4 + 5 &= 9 = 3^2, \\9 + 7 &= 16 = 4^2, \\16 + 9 &= 25 = 5^2\end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

が予想される.

### **1.3**

三つ子素数は  $(3, 5, 7)$  に限ることを示す.

任意の自然数は  $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$  と表すことができる.

$(p, p+2, p+4)$  を三つ子素数とする. このとき, ある自然数  $l$  があって,  $p = 3l, 3l+1, 3l+2$  のいずれかで表される.

$l = 1$  のとき,  $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$  である.

$l \neq 1$  のとき,  $3l$  は素数ではないから,  $p = 3l+1$  もしくは  $3l+2$  と表される.

$p = 3l+1$  とすると,  $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$  となって, これは素数ではないから不敵.

$p = 3l+2$  とすると,  $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$  となるから,  $p+4$  は素数ではない.

以上によって、三つ子素数は (3, 5, 7) に限る.

**1.4** (a)  $N^2 - 1$  が十数であるのは  $N = 2$  のときに限る. なぜなら,

$$N^2 - 1 = (N - 1)(N + 1)$$

であり,  $N^2 - 1$  が十数であるためには  $N - 1 = 1$  となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する.  $N$  によってそれぞれ調べてみると

$$N = 2 \Rightarrow N^2 - 2 = 2; \text{素数},$$

$$N = 3 \Rightarrow N^2 - 2 = 7; \text{素数},$$

$$N = 4 \Rightarrow N^2 - 2 = 14 = 2 \times 7,$$

$$N = 5 \Rightarrow N^2 - 2 = 23; \text{素数},$$

$$N = 6 \Rightarrow N^2 - 2 = 34 = 2 \times 17,$$

$$N = 7 \Rightarrow N^2 - 2 = 47; \text{素数},$$

$$N = 8 \Rightarrow N^2 - 2 = 62 = 2 \times 31,$$

$$N = 9 \Rightarrow N^2 - 2 = 79; \text{素数},$$

$$N = 10 \Rightarrow N^2 - 2 = 98 = 2 \times 7^2,$$

$$N = 11 \Rightarrow N^2 - 2 = 119,$$

$$N = 12 \Rightarrow N^2 - 2 = 142 = 2 \times 71,$$

$$N = 13 \Rightarrow N^2 - 2 = 167,$$

$$N = 14 \Rightarrow N^2 - 2 = 194 = 2 \times 97,$$

$$N = 15 \Rightarrow N^2 - 2 = 253.$$

(c)  $N^2 - 3$  の形の素数は多分無数に存在する.

最初の方から正の数を列挙してみると

$$N = 2 \Rightarrow 2^2 - 3 = 1,$$

$$N = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 6 = 2 \times 3,$$

$$N = 4 \Rightarrow 4^2 - 3 = 13; \text{素数},$$

$$N = 5 \Rightarrow 5^2 - 3 = 22 = 2 \times 11,$$

$$N = 6 \Rightarrow 6^2 - 3 = 33 = 3 \times 11,$$

$$N = 7 \Rightarrow 7^2 - 3 = 46 = 2 \times 23,$$

$$N = 8 \Rightarrow 8^2 - 3 = 61; \text{prime},$$

$$N = 9 \Rightarrow 9^2 - 3 = 78 = 2 \times 39,$$

$$N = 10 \Rightarrow 10^2 - 3 = 97; \text{prime}$$

$N^2 - 4$  の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2 - 4 = (N - 2)(N + 2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

## **1.5**

$n$  が空数のとき:

$n = 2m$  とおくと

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + 2m &= (2m + 1) + ((2m - 1) + 2) + ((2m - 2) + 3) + \cdots + ((m + 1) + m) \\&= m \cdot (2m + 1) \\&= \frac{n}{2}(n + 1).\end{aligned}$$

$n$  が奇数のとき:

$n = 2m - 1$  とおくと

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + (2m - 1) &= (1 + (2m - 1)) + (2 + (2m - 2)) + \cdots + ((m - 1) + (m + 1)) + m \\&= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\&= 2m(m - 1) + m \\&= (n + 1)\left(\frac{n + 1}{2} - 1\right) + \frac{n + 1}{2} \\&= (n + 1)\left(\frac{n + 1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) \\&= (n + 1) \cdot \frac{n + 1 - 2 + 1}{2} = \frac{n}{2}(n + 1).\end{aligned}$$