

「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 2 月 19 日

1 第6章の回答例

6.1 (a) Step 1) $\gcd(6, 15) = 3$ であるから, $6x + 15y$ は 3 の倍数全体を動く.
よって, $6x + 15y = 3t$ とおき, まず

$$3t + 20z = 1 \quad (*)$$

の解 (t, z) を探す. ユークリッドの互除法より

$$20 = 3 \times 6 + 2 \quad (1)$$

$$3 = 2 \times 1 + 1 \quad (2)$$

$$2 = 1 \times 2. \quad (3)$$

$a = 3, b = 20$ とおくと (1) より

$$b = 6a + 2.$$

$$2 = b - 6a.$$

(2) より

$$a = b - 6a + 1$$

$$6a - b = 1.$$

よって, $(t, z) = (7, -1)$ が $(*)$ の解の一つである.

Step 2) 次に $6x + 15y = 3 \cdot 7 = 21$ すなわち

$$2x + 5y = 7$$

は $(x, y) = (1, 1)$ を解の一つとして持つ.

以上によって, $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ が解の一つである.

(b) ユークリッドの互除法より

$$94321 = 9876 \times 5 + 4941 \quad (1)$$

$$9876 = 4941 \times 1 + 4935 \quad (2)$$

$$4941 = 4935 \times 1 + 6 \quad (3)$$

$$4935 = 6 \times 822 + 3 \quad (4)$$

$$6 = 3 \times 2 \quad (5)$$

であるから, $\gcd(94321, 9876) = 3$ である.

また, (1) より $a = 54321, b = 9876$ とおくと

$$4941 = a - 5b.$$

(2) より

$$\begin{aligned}b &= a - 5b + 4935 \\4935 &= 6b - a.\end{aligned}$$

(3) より

$$\begin{aligned}a - 5b &= 6b - a + 6 \\2a - 11b &= 6.\end{aligned}$$

(4) より

$$\begin{aligned}6b - a &= (2a - 11b) \times 822 + 3 \\(6 + 11 \times 822)b - (1 + 2 \times 822)a &= 3 \\9048b - 1645a &= 3.\end{aligned}$$

以上によって $(a, b) = (-1645, 9048)$ は 1 つの解である.

(5) より

$$\begin{aligned}-8a + 7b &= (15a - 13b) \times 3 + 1 \\-53a + 46b &= 1.\end{aligned}$$

よって, $(x, y) = (-53, 46)$ は一つの方程式の解である.

また, $g = \gcd(105, 121) = 1$ であるから, 一般会は

$$x = -53 + 121k, \quad y = 46 - 105k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

である.

6.2 (a) ユークリッドの互除法より

$$121 = 105 \times 1 + 16 \tag{1}$$

$$105 = 16 \times 6 + 9 \tag{2}$$

$$16 = 9 \times 1 + 7 \tag{3}$$

$$9 = 7 \times 1 + 2 \tag{4}$$

$$7 = 2 \times 3 + 1 \tag{5}$$

$$2 = 1 \times 2 \tag{6}$$

であるから, $\gcd(121, 105) = 1$ である.

$b = 121, a = 105$ とおくと (1) より

$$\begin{aligned}b &= a + 16 \\16 &= b - a.\end{aligned}$$

(2) より

$$a = (b - a) \times 6 + 9$$

$$9 = 7a - 6b.$$

(3) より

$$b - a = 7a - 6b + 7$$

$$7 = -8a + 7b.$$

(4) より

$$7a - 6b = -8a + 7b + 2$$

$$2 = 15a - 13b.$$

(5) より

$$-8a + 7b = (15a - 13b) \times 3 + 1$$

$$-53a + 46b = 1.$$

よって, $(x, y) = (-53, 46)$ は一つの方程式の解である.

また, $g = \gcd(105, 121) = 1$ であるから, 一般解は

$$x = -53 + 121k, \quad y = 46 - 105 \quad (k \in \mathbf{Z})$$

である.

(b) Ex 6.1.a と同じ方程式である. 一般解は

$$(x, y) = (11, -2) + \frac{k}{15}(67890, -12345)$$

$$= (11, -2) + k(4526, -823)$$

である.

(c) Ex6.1.b と同じ方程式である. 一般解は

$$(x, y) = (-1645, 9048) + \frac{k}{3}(9876, -54321)$$

$$= (-1645, 9048) + k(3292, -18107)$$

である.

6.3 klm