「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 2 月 15 日

6　第 6 章の回答例

6.1 (a) Step 1) $gcd(6,15)=3$ であるから, $6x+15y$ は 3 の倍数全体を動く. よって, $6x+15y=3t$ とおき, まず

$$3t+20z=1 \tag{$*$}$$

の解 (t,z) を探す. ユークリッドの互除法より

$$20=3\times 6+2 \tag{1}$$
$$3=2\times 1+1 \tag{2}$$
$$2=1\times 2. \tag{3}$$

$a=3$, $b=20$ とおくと (1) より

$$b=6a+2.$$
$$2=b-6a.$$

(2) より

$$a=b-6a+1$$
$$6a-b=1.$$

よって, $(t,z)=(7,-1)$ が $(*)$ の解の一つである.

Step 2) 次に $6x+15y=3\cdot 7=21$ すなわち

$$2x+5y=7$$

は $(x,y)=(1,1)$ を解の一つとして持つ.

以上によって, $(x,y,z)=(1,1,-1)$ が解の一つである.

(b) ユークリッドの互除法より

$$94321=9876\times 5+4941 \tag{1}$$
$$9876=4941\times 1+4935 \tag{2}$$
$$4941=4935\times 1+6 \tag{3}$$
$$4935=6\times 822+3 \tag{4}$$
$$6=3\times 2 \tag{5}$$

であるから, $\gcd(94321,9876)=3$ である.

また, (1) より $a=54321, b=9876$ とおくと

$$4941=a-5b.$$

(2) より

$$
\begin{aligned}
b &= a - 5b + 4935 \\
4935 &= 6b - a.
\end{aligned}
$$

(3) より

$$
\begin{aligned}
a - 5b &= 6b - a + 6 \\
2a - 11b &= 6.
\end{aligned}
$$

(4) より

$$
\begin{aligned}
6b - a &= (2a - 11b) \times 822 + 3 \\
(6 + 11 \times 822)b - (1 + 2 \times 822)a &= 3 \\
9048b - 1645a &= 3.
\end{aligned}
$$

以上によって $(a, b) = (-1645, 9048)$ は 1 つの解である.
(5) より

$$
\begin{aligned}
-8a + 7b &= (15a - 13b) \times 3 + 1 \\
-53a + 46b &= 1.
\end{aligned}
$$

よって, $(x, y) = (-53, 46)$ は一つの方程式の解である.
また, $g = \gcd(105, 121) = 1$ であるから, 一般会は

$$
x = -53 + 121k, y = 46 - 105k \quad (k \in \mathbf{Z})
$$

である.