「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 2 月 19 日

6　第 6 章の回答例

6.1 (a) Step 1) $gcd(6,15)=3$ であるから, $6x+15y$ は 3 の倍数全体を動く.
よって, $6x+15y=3t$ とおき, まず

$$3t+20z=1 \tag{$*$}$$

の解 (t,z) を探す. ユークリッドの互除法より

$$20=3\times 6+2 \tag{1}$$
$$3=2\times 1+1 \tag{2}$$
$$2=1\times 2. \tag{3}$$

$a=3$, $b=20$ とおくと (1) より

$$b=6a+2.$$
$$2=b-6a.$$

(2) より

$$a=b-6a+1$$
$$6a-b=1.$$

よって, $(t,z)=(7,-1)$ が $(*)$ の解の一つである.
Step 2) 次に $6x+15y=3\cdot 7=21$ すなわち

$$2x+5y=7$$

は $(x,y)=(1,1)$ を解の一つとして持つ.
以上によって, $(x,y,z)=(1,1,-1)$ が解の一つである.

(b) ユークリッドの互除法より

$$94321=9876\times 5+4941 \tag{1}$$
$$9876=4941\times 1+4935 \tag{2}$$
$$4941=4935\times 1+6 \tag{3}$$
$$4935=6\times 822+3 \tag{4}$$
$$6=3\times 2 \tag{5}$$

であるから, $\mathrm{gcd}(94321,9876)=3$ である.
また, (1) より $a=54321, b=9876$ とおくと

$$4941=a-5b.$$

(2) より

$$\begin{aligned} b &= a - 5b + 4935 \\ 4935 &= 6b - a. \end{aligned}$$

(3) より

$$\begin{aligned} a - 5b &= 6b - a + 6 \\ 2a - 11b &= 6. \end{aligned}$$

(4) より

$$\begin{aligned} 6b - a &= (2a - 11b) \times 822 + 3 \\ (6 + 11 \times 822)b - (1 + 2 \times 822)a &= 3 \\ 9048b - 1645a &= 3. \end{aligned}$$

以上によって $(a, b) = (-1645, 9048)$ は 1 つの解である.
(5) より

$$\begin{aligned} -8a + 7b &= (15a - 13b) \times 3 + 1 \\ -53a + 46b &= 1. \end{aligned}$$

よって, $(x, y) = (-53, 46)$ は一つの方程式の解である.
また, $g = \gcd(105, 121) = 1$ であるから, 一般会は

$$x = -53 + 121k, \quad y = 46 - 105k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

である.

6.2 (a) ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned} 121 &= 105 \times 1 + 16 && (1) \\ 105 &= 16 \times 6 + 9 && (2) \\ 16 &= 9 \times 1 + 7 && (3) \\ 9 &= 7 \times 1 + 2 && (4) \\ 7 &= 2 \times 3 + 1 && (5) \\ 2 &= 1 \times 2 && (6) \end{aligned}$$

であるから, $\gcd(121, 105) = 1$ である.
$b = 121, a = 105$ とおくと (1) より

$$\begin{aligned} b &= a + 16 \\ 16 &= b - a. \end{aligned}$$

(2) より

$$
\begin{aligned}
a &= (b-a) \times 6 + 9 \\
9 &= 7a - 6b.
\end{aligned}
$$

(3) より

$$
\begin{aligned}
b - a &= 7a - 6b + 7 \\
7 &= -8a + 7b.
\end{aligned}
$$

(4) より

$$
\begin{aligned}
7a - 6b &= -8a + 7b + 2 \\
2 &= 15a - 13b.
\end{aligned}
$$

(5) より

$$
\begin{aligned}
-8a + 7b &= (15a - 13b) \times 3 + 1 \\
-53a + 46b &= 1.
\end{aligned}
$$

よって, $(x, y) = (-53, 46)$ は一つの方程式の解である.
また,$g = \gcd(105, 121) = 1$ であるから, 一般解は

$$
x = -53 + 121k, \quad y = 46 - 105 \quad (k \in \mathbf{Z})
$$

である.

(b) Ex 6.1.a と同じ方程式である. 一般解は

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (11, -2) + \frac{k}{15}(67890, -12345) \\
&= (11, -2) + k(4526, -823)
\end{aligned}
$$

である.

(c) Ex6.1.b と同じ方程式である. 一般解は

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (-1645, 9048) + \frac{k}{3}(9876, -54321) \\
&= (-1645, 9048) + k(3292, -18107)
\end{aligned}
$$

である.

6.3 (a) Step 1) $\gcd(6, 15) = 3$ であるから, $6x + 15y$ は 3 の倍数全体を動く.
よって, $6x + 15y = 3t$ とおき, まず

$$
3t + 20z = 1 \qquad (*)
$$

の解 (t,z) を探す．ユークリッドの互除法より

$$
\begin{align}
20 &= 3 \times 6 + 2 \tag{1}\\
3 &= 2 \times 1 + 1 \tag{2}\\
2 &= 1 \times 2. \tag{3}
\end{align}
$$

$a=3, b=20$ とおくと (1) より

$$
\begin{aligned}
b &= 6a + 2\\
2 &= b - 6a.
\end{aligned}
$$

(2) より

$$
\begin{aligned}
a &= b - 6a + 1\\
7a - b &= 1.
\end{aligned}
$$

よって, $(t,z) = (7,-1)$ は $(*)$ の解の一つである.

Step 2) 次に $6x + 15y = 3 \cdot 7 = 21$ すなわち

$$2x + 5y = 7$$

は $(x,y) = (1,1)$ を解の一つとして持つ.

以上によって, $(x,y,z) = (1,1,-1)$ が解の一つである.