「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 1 月 2 日

1　第 1 章の回答例

1.1 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.
　有効な方法は分からない.
　こんな数はたぶん無限にある.

1.2

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 = 4 &= 2^2, \\ 4+5 = 9 &= 3^2, \\ 9+7 = 16 &= 4^2, \\ 16+9 = 25 &= 5^2 \end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

が予想される.

1.3

　三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.
　任意の自然数は $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.
　$(p, p+2, p+4)$ を三つ子素数とする．このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l+1, 3l+2$ のいずれかで表される.
　$l = 1$ のとき, $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$ である.
　$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l+1$ もしくは $3l+2$ と表される.
　$p = 3l+1$ とすると, $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$ となって, これは素数ではないから不敵.
　$p = 3l+2$ とすると, $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3,5,7)$ に限る.

1.4 (a) N^2-1 が十数であるのは $N=2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2-1=(N-1)(N+1)$$

であり, N^2-1 が十数であるためには $N-1=1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. N によってそれぞれ調べてみると

$N=2 \Rightarrow N^2-2=2$; 素数,
$N=3 \Rightarrow N^2-2=7$; 素数,
$N=4 \Rightarrow N^2-2=14=2\times 7$,
$N=5 \Rightarrow N^2-2=23$; 素数,
$N=6 \Rightarrow N^2-2=34=2\times 17$,
$N=7 \Rightarrow N^2-2=47$; 素数,
$N=8 \Rightarrow N^2-2=62=2\times 31$,
$N=9 \Rightarrow N^2-2=79$; 素数,
$N=10 \Rightarrow N^2-2=98=2\times 7^2$,
$N=11 \Rightarrow N^2-2=119$,
$N=12 \Rightarrow N^2-2=142=2\times 71$,
$N=13 \Rightarrow N^2-2=167$,
$N=14 \Rightarrow N^2-2=194=2\times 97$,
$N=15 \Rightarrow N^2-2=253$.

(c) N^2-3 の形の素数は多分無数に存在する.
最初の方から正の数を列挙してみると

$N=2 \Rightarrow 2^2-3=1$,
$N=3 \Rightarrow 3^2-3=6=2\times 3$,
$N=4 \Rightarrow 4^2-3=13$; 素数,
$N=5 \Rightarrow 5^2-3=22=2\times 11$,
$N=6 \Rightarrow 6^2-3=33=3\times 11$,
$N=7 \Rightarrow 7^2-3=46=2\times 23$,
$N=8 \Rightarrow 8^2-3=61$; prime,
$N=9 \Rightarrow 9^2-3=78=2\times 39$,
$N=10 \Rightarrow 10^2-3=97$; prime

N^2-4 の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2-4=(N-2)(N+2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

1.5

n が偶数のとき:
$n = 2m$ とおくと

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+2m &= (2m+1)+((2m-1)+2)+((2m-2)+3)+\cdots+((m+1+m)) \\
&= m\cdot(2m+1) \\
&= \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}
$$

n が奇数のとき:
$n = 2m-1$ とおくと

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+(2m-1) &= (1+(2m-1))+(2+(2m-2))+\cdots+((m-1)+(m+1))+m \\
&= \underbrace{2m+2m+\cdots+2m}_{m-1}+m \\
&= 2m(m-1)+m \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2}-1)+\frac{n+1}{2} \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2}-1+\frac{1}{2}) \\
&= (n+1)\cdot\frac{n+1-2+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}
$$

2　第 2 章の回答例

<u>2.1</u>　(a) 組み合わせとして考えるのは

$$
\begin{aligned}
(a,b) =&(3m,3n),(3m+1,3n),(3m+2,3n), \\
&(3m,3n+1),(3m+1,3n+1),(3m+2,3n+1), \\
&(3m,3n+2),(3m+1,3n+2),(3m+2,3n+2)
\end{aligned}
$$

のように書かれる場合である. 必要なら a と b を入れ替えることによって, この表の右上半分だけを考える. すなわち,

$$(a,b) = (3m+1,3n+1),(3m+2,3n+1),(3m+2,3n+2)$$

の場合 対応する既約ピタゴラス数 (a,b,c) が存在しないことを示したい.
　まず, $c = 3l$ とかけているとき, c^2 は 3 の倍数であり, $c = 3l+1$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余り, $c = 3l+2$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余る.
$(a,b) = (3m+1,3n+1)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (3m+1)^2+(3n+1)^2 \\
&= 9(m^2+n^2)+6(m+n)+2
\end{aligned}
$$

となるが, c^2 は 3 で割ると 2 余る組がないから不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+1)$ のとき,

$$a^2+b^2=9(m^2+n^2)+6(2m+n)+5.$$

よって, この場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+2)$ のとき

$$(3m+2)^2+(3n+2)^2=9(m^2+n^2)+12(m+n)+8.$$

よってこの場合も a^2+b^2 を 3 で割ると 2 余るので不適.

(b) 分からない.

2.2 仮定より, ある整数 k_1,k_2 があって

$$m=dk_1,$$
$$n=dk_2$$

が成り立つ. このとき,

$$m+n=d(k_1+k_2),$$
$$m-n=d(k_1-k_2)$$

となるから, 主張を得る.

2.3 (a) 任意の 1 より大きな奇数が現れる. 実際, 定理 2.1 で $t=1$ とおけば $a=s$.

(b) 少なくとも 4 の倍数が現れる. 8 で割って 4 余る数はかならず現れる.

b は 4 の倍数であることを示す.

s,t はともに奇数であるから, ある自然数 s_1,t_1 があって, $s=2s_1-1$, $t=2t_1-1$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(s-t)(s+t) \\ &= \frac{1}{2}(2s_1-t_1)(2s_1+2t_1-2) \\ &= 2(s_1-t_1)(s_1+t_1-1) \end{aligned}$$

となる. ここで, s_1-t_1 と s_1+t_1-1 は 2 を法として異なるので, b は 4 の倍数である.

次に, 8 で割って 4 余る数は必ず現れることを示す.

b を 4 で割って 8 余る自然数とする. ある互いに素な奇数 $s,t(s>t)$ があって

$$b=\frac{s^2-t^2}{2}$$

を満たすことを示したい. $b=4k(k$ は奇数) と置くと

$$4k=\frac{s^2-t^2}{2}.$$

分母を払って

$$8k = s^2 - t^2.$$

ここで

$$\begin{aligned} s^2 &= t^2 + 8k \\ &= t^2 + 8(k-2) + 16 \end{aligned}$$

であるから, $t = (k-2)^2$ と置くと

$$\begin{aligned} s^2 &= (k-2)^2 + 8(k-2) + 16 \\ &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

よって, $s = k+2$ と置けばよい. 最後に, k は奇数であったから, $k-2$ と $k+2$ は互いに素である.

(c) 4 で割ると 1 余る数.

$s = 2s_1 - 1$, $t = 2s_2 - 1$ と置くと

$$\begin{aligned} c &= \frac{s^2+t^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}((2s_1-1)^2 + (2s_2-1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(8(s_1^2+s_2^2) - 8s_1s_2 + 2) \\ &= 4(s_1^2+s_2^2) - 4s_1s_2 + 1 \\ &= 4(s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2) + 1 \end{aligned}$$

となるから, c は 4 で割ると 1 余る.

2.4 見つけられない.

2.5 a) $n \leq 4$ における a, b, c の値を表にすると

$$\begin{array}{lll} T_1 = 1 & b_1 = 4 \cdot 1 = 4 & 3^2 + 4^2 = 5^2, \\ T_2 = 1 + 2 = 3 & b_2 = 4 \cdot 3 = 12 & 5^2 + 12^2 = 13^2, \\ T_3 = 3 + 3 = 6 & b_3 = 4 \cdot 6 = 24 & 7^2 + 24^2 = 25^2, \\ T_4 = 6 + 4 = 10 & b_4 = 4 \cdot 10 = 40 & 9^2 + 40^2 = 41^2. \end{array}$$

ここで, b_n を T_n に対応する既約ピタゴラス数の b とおいた.

T_5) $T_5 = 10 + 5 = 15$. また, $b_5 = 4 \cdot 15 = 60$.

これより, $11^2 + 60^2 = 61^2$ が予想できる. 実際計算してみると

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2.$$

T_6) $T_6 = 15 + 6 = 21$, $b_6 = 4 \cdot 21 = 84$ より

$$13^2 + 84^2 = 85^2$$

が予想できる．計算してみると

$$\begin{aligned}13^2+84^2 &= 169+7059\\ &= 7225,\\ 85^2 &= 7225\end{aligned}$$

であるから, 確かに成り立っている．
T_7) $T_7=21+7=28$, $b_7=4\cdot 28=112$ であるから

$$15^2+112^2=113^2$$

が予想される．実際

$$\begin{aligned}15^2+112^2 &= 225+12544\\ &= 12769,\\ 113^2 &= 12769\end{aligned}$$

なので, 確かに成り立っている．
b) 存在する．

$$(a,b,c)=(2n+1,4T_n,4T_n+1)$$

が既約ピタゴラス数の組であることを示す．実際, 定理 2.1 において $t=1, s=2n+1$ とおけば t と s は互いに素で

$$\begin{aligned}a &= 2n+1,\\ b &= \frac{(2n+1)^2-1}{2}\\ &= \frac{4n^2+4n}{2}\\ &= 2n(n+1)\\ &= 4\cdot\frac{n}{2}(n+1)=4T_n,\\ c &= \frac{1^2+(2n+1)^2}{2}\\ &= \frac{4n^2+4n+2}{2}\\ &= 2n^2+2n+1\\ &= 4\cdot\frac{n}{2}(n+1)+1=4T_n+1.\end{aligned}$$

2.6

定理 2.1 において $c-a=2$ とおけば

$$c-a=\frac{s^2+t^2}{2}-st=2$$

より
$$s = t + 2$$
を得る.

(a)

$t = 1, s = 3$ とおけば
$$a = 3, \quad b = \frac{9-1}{2} = 4, \quad c = \frac{3^2+1^2}{2} = 5.$$
また, $t = 3, s = 5$ とおけば
$$a = 15, b = \frac{5^2-3^2}{2} = \frac{16}{2} = 8, c = \frac{3^2+5^2}{2} = 17.$$

(b)

差が 2 である自然数の組が共通因数を持つには, その 2 つの自然数が偶数であり, 共通因数は 2 である場合にかぎる.

例えば, $s = 999, t = 997$ とおくと
$$a = 999 \cdot 997, b = \frac{999^2 - 997^2}{2}, c = \frac{999^2 * 997^2}{2}$$
を得て, $c - a = 2$ である.

(c) $s = t + 2$ を定理 2.1 に代入すればよい. すなわち
$$\begin{aligned} a &= t \cdot (t+2), \\ b &= \frac{(t+2)^2 - t^2}{2} \\ &= \frac{4t+4}{2} \\ &= 2(t+1), \\ c &= \frac{t^2 + (t+2)^2}{2} \\ &= \frac{2t^2+4t+4}{2} \\ &= t^2 + 2t + 2. \end{aligned}$$

ここで, t は奇数.

2.7 定理 2.1 の下の表に $2c - 2a = 2(c-a)$ の値を追記すると以下のようになる.

s	t	a	b	c	2(c-a)
3	1	3	4	5	4
5	1	5	12	13	8
7	1	7	24	25	36
9	1	9	40	41	64
5	3	15	8	17	4
7	3	21	20	29	16
7	5	35	12	37	4
9	5	45	28	53	16
9	7	63	15	65	4