# 「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 1 月 1 日

## 1　第 1 章の回答例

**1.1** 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.
有効な方法は分からない.
こんな数はたぶん無限にある.

**1.2**

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2, \\
1 + 3 = 4 &= 2^2, \\
4 + 5 = 9 &= 3^2, \\
9 + 7 = 16 &= 4^2, \\
16 + 9 = 25 &= 5^2
\end{aligned}
$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

が予想される.

**1.3**

三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.

任意の自然数は $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.

$(p, p+2, p+4)$ を三つ子素数とする. このとき, ある自然数 $l$ があって, $p = 3l, 3l+1, 3l+2$ のいずれかで表される.

$l = 1$ のとき, $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$ である.

$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l+1$ もしくは $3l+2$ と表される.

$p = 3l+1$ とすると, $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$ となって, これは素数ではないから不敵.

$p = 3l+2$ とすると, $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限る.

**<u>1.4</u>** (a) $N^2 - 1$ が十数であるのは $N = 2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2 - 1 = (N - 1)(N + 1)$$

であり, $N^2 - 1$ が十数であるためには $N - 1 = 1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. $N$ によってそれぞれ調べてみると
$N = 2 \Rightarrow N^2 - 2 = 2$; 素数,
$N = 3 \Rightarrow N^2 - 2 = 7$; 素数,
$N = 4 \Rightarrow N^2 - 2 = 14 = 2 \times 7$,
$N = 5 \Rightarrow N^2 - 2 = 23$; 素数,
$N = 6 \Rightarrow N^2 - 2 = 34 = 2 \times 17$,
$N = 7 \Rightarrow N^2 - 2 = 47$; 素数,
$N = 8 \Rightarrow N^2 - 2 = 62 = 2 \times 31$,
$N = 9 \Rightarrow N^2 - 2 = 79$; 素数,
$N = 10 \Rightarrow N^2 - 2 = 98 = 2 \times 7^2$,
$N = 11 \Rightarrow N^2 - 2 = 119$,
$N = 12 \Rightarrow N^2 - 2 = 142 = 2 \times 71$,
$N = 13 \Rightarrow N^2 - 2 = 167$,
$N = 14 \Rightarrow N^2 - 2 = 194 = 2 \times 97$,
$N = 15 \Rightarrow N^2 - 2 = 253$.

(c) $N^2 - 3$ の形の素数は多分無数に存在する.
最初の方から正の数を列挙してみると
$N = 2 \Rightarrow 2^2 - 3 = 1$,
$N = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 6 = 2 \times 3$,
$N = 4 \Rightarrow 4^2 - 3 = 13$; 素数,
$N = 5 \Rightarrow 5^2 - 3 = 22 = 2 \times 11$,
$N = 6 \Rightarrow 6^2 - 3 = 33 = 3 \times 11$,
$N = 7 \Rightarrow 7^2 - 3 = 46 = 2 \times 23$,
$N = 8 \Rightarrow 8^2 - 3 = 61$; prime,
$N = 9 \Rightarrow 9^2 - 3 = 78 = 2 \times 39$,
$N = 10 \Rightarrow 10^2 - 3 = 97$; prime

$N^2 - 4$ の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2 - 4 = (N - 2)(N + 2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

**<u>1.5</u>**

$n$ が偶数のとき:
$n = 2m$ とおくと

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + 2m &= (2m+1) + ((2m-1)+2) + ((2m-2)+3) + \cdots + ((m+1+m)) \\
&= m \cdot (2m+1) \\
&= \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}$$

$n$ が奇数のとき:
$n = 2m-1$ とおくと

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + (2m-1) &= (1 + (2m-1)) + (2 + (2m-2)) + \cdots + ((m-1) + (m+1)) + m \\
&= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\
&= 2m(m-1) + m \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1) + \frac{n+1}{2} \\
&= (n+1)(\frac{n+1}{2} - 1 + \frac{1}{2}) \\
&= (n+1) \cdot \frac{n+1-2+1}{2} = \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}$$

## 2 第2章の回答例

**2.1** (a) 組み合わせとして考えるのは

$$\begin{aligned}
(a,b) =& (3m,3n), (3m+1,3n), (3m+2,3n), \\
& (3m,3n+1), (3m+1,3n+1), (3m+2,3n+1), \\
& (3m,3n+2), (3m+1,3n+2), (3m+2,3n+2)
\end{aligned}$$

のように書かれる場合である. 必要なら $a$ と $b$ を入れ替えることによって, この表の右上半分だけを考える. すなわち,

$$(a,b) = (3m+1,3n+1), (3m+2,3n+1), (3m+2,3n+2)$$

の場合 対応する既約ピタゴラス数 $(a,b,c)$ が存在しないことを示したい.

まず, $c = 3l$ とかけているとき, $c^2$ は 3 の倍数であり, $c = 3l+1$ とかけているとき, $c^2$ は 3 で割ると 1 余り, $c = 3l+2$ とかけているとき, $c^2$ は 3 で割ると 1 余る.
$(a,b) = (3m+1,3n+1)$ のとき,

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (3m+1)^2 + (3n+1)^2 \\
&= 9(m^2+n^2) + 6(m+n) + 2
\end{aligned}$$

となるが, $c^2$ は 3 で割ると 2 余る組がないから不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+1)$ のとき,

$$a^2+b^2=9(m^2+n^2)+6(2m+n)+5.$$

よって, この場合も $a^2+b^2$ を 3 で割ると 2 余るので不適.
$(a,b)=(3m+2,3n+2)$ のとき

$$(3m+2)^2+(3n+2)^2=9(m^2+n^2)+12(m+n)+8.$$

よってこの場合も $a^2+b^2$ を 3 で割ると 2 余るので不適.

(b) 分からない.

**2.2** 仮定より, ある整数 $k_1,k_2$ があって

$$m=dk_1,$$
$$n=dk_2$$

が成り立つ. このとき,

$$m+n=d(k_1+k_2),$$
$$m-n=d(k_1-k_2)$$

となるから, 主張を得る.

**2.3** (a) 任意の 1 より大きな奇数が現れる. 実際, 定理 2.1 で $t=1$ とおけば $a=s$.

(b) 少なくとも 4 の倍数が現れる. 8 で割って 4 余る数はかならず現れる.

$b$ は 4 の倍数であることを示す.

$s,t$ はともに奇数であるから, ある自然数 $s_1,t_1$ があって, $s=2s_1-1$, $t=2t_1-1$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(s-t)(s+t) \\ &= \frac{1}{2}(2s_1-t_1)(2s_1+2t_1-2) \\ &= 2(s_1-t_1)(s_1+t_1-1) \end{aligned}$$

となる. ここで, $s_1-t_1$ と $s_1+t_1-1$ は 2 を法として異なるので, $b$ は 4 の倍数である.

次に, 8 で割って 4 余る数は必ず現れることを示す.

$b$ を 4 で割って 8 余る自然数とする. ある互いに素な奇数 $s,t(s>t)$ があって

$$b=\frac{s^2-t^2}{2}$$

を満たすことを示したい. $b=4k(k$ は奇数$)$ と置くと

$$4k=\frac{s^2-t^2}{2}.$$

分母を払って

$$8k = s^2 - t^2.$$

ここで

$$\begin{aligned} s^2 &= t^2 + 8k \\ &= t^2 + 8(k-2) + 16 \end{aligned}$$

であるから, $t = (k-2)^2$ と置くと

$$\begin{aligned} s^2 &= (k-2)^2 + 8(k-2) + 16 \\ &= (k+2)^2. \end{aligned}$$

よって, $s = k+2$ と置けばよい. 最後に, $k$ は奇数であったから, $k-2$ と $k+2$ は互いに素である.

(c) 4 で割ると 1 余る数.

$s = 2s_1 - 1$, $t = 2s_2 - 1$ と置くと

$$\begin{aligned} c &= \frac{s^2 + t^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}((2s_1-1)^2 + (2s_2-1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(8(s_1^2 + s_2^2) - 8s_1s_2 + 2) \\ &= 4(s_1^2 + s_2^2) - 4s_1s_2 + 1 \\ &= 4(s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2) + 1 \end{aligned}$$

となるから, $c$ は 4 で割ると 1 余る.

**2.4** 見つけられない.

**2.5** a) $n \leq 4$ における $a, b, c$ の値を表にすると

$$\begin{array}{lll} T_1 = 1 & b_1 = 4 \cdot 1 = 4 & 3^2 + 4^2 = 5^2, \\ T_2 = 1 + 2 = 3 & b_2 = 4 \cdot 3 = 12 & 5^2 + 12^2 = 13^2, \\ T_3 = 3 + 3 = 6 & b_3 = 4 \cdot 6 = 24 & 7^2 + 24^2 = 25^2, \\ T_4 = 6 + 4 = 10 & b_4 = 4 \cdot 10 = 40 & 9^2 + 40^2 = 41^2. \end{array}$$

ここで, $b_n$ を $T_n$ に対応する既約ピタゴラス数の $b$ とおいた.

$T_5$) $T_5 = 10 + 5 = 15$. また, $b_5 = 4 \cdot 15 = 60$.

これより, $11^2 + 60^2 = 61^2$ が予想できる. 実際計算してみると

$$11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721 = 61^2.$$

$T_6$) $T_6 = 15 + 6 = 21$, $b_6 = 4 \cdot 21 = 84$ より

$$13^2 + 84^2 = 85^2$$

が予想できる．計算してみると

$$\begin{aligned}13^2+84^2&=169+7059\\&=7225,\\85^2&=7225\end{aligned}$$

であるから, 確かに成り立っている．
$T_7$) $T_7=21+7=28$, $b_7=4\cdot 28=112$ であるから

$$15^2+112^2=113^2$$

が予想される．実際

$$\begin{aligned}15^2+112^2&=225+12544\\&=12769,\\113^2&=12769\end{aligned}$$

なので, 確かに成り立っている．
b) 存在する．

$$(a,b,c)=(2n+1,4T_n,4T_n+1)$$

が既約ピタゴラス数の組であることを示す．実際, 定理 2.1 において $t=1, s=2n+1$ とおけば $t$ と $s$ は互いに素で

$$\begin{aligned}a&=2n+1,\\b&=\frac{(2n+1)^2-1}{2}\\&=\frac{4n^2+4n}{2}\\&=2n(n+1)\\&=4\cdot\frac{n}{2}(n+1)=4T_n,\\c&=\frac{1^2+(2n+1)^2}{2}\\&=\frac{4n^2+4n+2}{2}\\&=2n^2+2n+1\\&=4\cdot\frac{n}{2}(n+1)+1=4T_n+1.\end{aligned}$$

**2.6**

定理 2.1 において $c-a=2$ とおけば

$$c-a=\frac{s^2+t^2}{2}-st=2$$

より

$$s = t + 2$$

を得る.

(a)

$t = 1, s = 3$ とおけば

$$a = 3, \quad b = \frac{9-1}{2} = 4, \quad c = \frac{3^2+1^2}{2} = 5.$$