

「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 29 年 1 月 1 日

1 第 1 章の回答例

1.1 以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.

有効な方法は分らない.

こんな数はたぶん無限にある.

1.2

$$\begin{aligned}1 &= 1^2, \\1 + 3 &= 4 = 2^2, \\4 + 5 &= 9 = 3^2, \\9 + 7 &= 16 = 4^2, \\16 + 9 &= 25 = 5^2\end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

が予想される.

1.3

三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.

任意の自然数は $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.

$(p, p+2, p+4)$ を三つ子素数とする. このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l+1, 3l+2$ のいずれかで表される.

$l = 1$ のとき, $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$ である.

$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l+1$ もしくは $3l+2$ と表される.

$p = 3l+1$ とすると, $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$ となって, これは素数ではないから不敵.

$p = 3l+2$ とすると, $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって、三つ子素数は (3, 5, 7) に限る.

1.4 (a) $N^2 - 1$ が十数であるのは $N = 2$ のときに限る. なぜなら,

$$N^2 - 1 = (N - 1)(N + 1)$$

であり, $N^2 - 1$ が十数であるためには $N - 1 = 1$ となる必要があるからである.

(b) おそらく無数に存在する. N によってそれぞれ調べてみると

$$N = 2 \Rightarrow N^2 - 2 = 2; \text{素数},$$

$$N = 3 \Rightarrow N^2 - 2 = 7; \text{素数},$$

$$N = 4 \Rightarrow N^2 - 2 = 14 = 2 \times 7,$$

$$N = 5 \Rightarrow N^2 - 2 = 23; \text{素数},$$

$$N = 6 \Rightarrow N^2 - 2 = 34 = 2 \times 17,$$

$$N = 7 \Rightarrow N^2 - 2 = 47; \text{素数},$$

$$N = 8 \Rightarrow N^2 - 2 = 62 = 2 \times 31,$$

$$N = 9 \Rightarrow N^2 - 2 = 79; \text{素数},$$

$$N = 10 \Rightarrow N^2 - 2 = 98 = 2 \times 7^2,$$

$$N = 11 \Rightarrow N^2 - 2 = 119,$$

$$N = 12 \Rightarrow N^2 - 2 = 142 = 2 \times 71,$$

$$N = 13 \Rightarrow N^2 - 2 = 167,$$

$$N = 14 \Rightarrow N^2 - 2 = 194 = 2 \times 97,$$

$$N = 15 \Rightarrow N^2 - 2 = 253.$$

(c) $N^2 - 3$ の形の素数は多分無数に存在する.

最初の方から正の数を列挙してみると

$$N = 2 \Rightarrow 2^2 - 3 = 1,$$

$$N = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 6 = 2 \times 3,$$

$$N = 4 \Rightarrow 4^2 - 3 = 13; \text{素数},$$

$$N = 5 \Rightarrow 5^2 - 3 = 22 = 2 \times 11,$$

$$N = 6 \Rightarrow 6^2 - 3 = 33 = 3 \times 11,$$

$$N = 7 \Rightarrow 7^2 - 3 = 46 = 2 \times 23,$$

$$N = 8 \Rightarrow 8^2 - 3 = 61; \text{prime},$$

$$N = 9 \Rightarrow 9^2 - 3 = 78 = 2 \times 39,$$

$$N = 10 \Rightarrow 10^2 - 3 = 97; \text{prime}$$

$N^2 - 4$ の形の素数は 5 に限る. なぜなら

$$N^2 - 4 = (N - 2)(N + 2)$$

となるからである.

(d) 少なくとも平方数ではない.

1.5

n が偶数のとき:

$n = 2m$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 2m &= (2m + 1) + ((2m - 1) + 2) + ((2m - 2) + 3) + \cdots + ((m + 1) + m) \\ &= m \cdot (2m + 1) \\ &= \frac{n}{2}(n + 1). \end{aligned}$$

n が奇数のとき:

$n = 2m - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (2m - 1) &= (1 + (2m - 1)) + (2 + (2m - 2)) + \cdots + ((m - 1) + (m + 1)) + m \\ &= \underbrace{2m + 2m + \cdots + 2m}_{m-1} + m \\ &= 2m(m - 1) + m \\ &= (n + 1)\left(\frac{n + 1}{2} - 1\right) + \frac{n + 1}{2} \\ &= (n + 1)\left(\frac{n + 1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= (n + 1) \cdot \frac{n + 1 - 2 + 1}{2} = \frac{n}{2}(n + 1). \end{aligned}$$

2 第2章の回答例

2.1 (a) 組み合わせとして考えるのは

$$\begin{aligned} (a, b) &= (3m, 3n), (3m + 1, 3n), (3m + 2, 3n), \\ &\quad (3m, 3n + 1), (3m + 1, 3n + 1), (3m + 2, 3n + 1), \\ &\quad (3m, 3n + 2), (3m + 1, 3n + 2), (3m + 2, 3n + 2) \end{aligned}$$

のように書かれる場合である. 必要なら a と b を入れ替えることによって, この表の右上半分だけを考える. すなわち,

$$(a, b) = (3m + 1, 3n + 1), (3m + 2, 3n + 1), (3m + 2, 3n + 2)$$

の場合 対応する既約ピタゴラス数 (a, b, c) が存在しないことを示したい.

まず, $c = 3l$ とかけているとき, c^2 は 3 の倍数であり, $c = 3l + 1$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余り, $c = 3l + 2$ とかけているとき, c^2 は 3 で割ると 1 余る.

$(a, b) = (3m + 1, 3n + 1)$ のとき,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (3m + 1)^2 + (3n + 1)^2 \\ &= 9(m^2 + n^2) + 6(m + n) + 2 \end{aligned}$$

となるが, c^2 は 3 で割ると 2 余る組がないから不適.

$(a, b) = (3m + 2, 3n + 1)$ のとき,

$$a^2 + b^2 = 9(m^2 + n^2) + 6(2m + n) + 5.$$

よって, この場合も $a^2 + b^2$ を 3 で割ると 2 余るので不適.

$(a, b) = (3m + 2, 3n + 2)$ のとき

$$(3m + 2)^2 + (3n + 2)^2 = 9(m^2 + n^2) + 12(m + n) + 8.$$

よってこの場合も $a^2 + b^2$ を 3 で割ると 2 余るので不適.

(b) 分らない.

2.2 家庭より, ある整数 k_1, k_2 があって

$$m = dk_1,$$

$$n = dk_2$$

が成り立つ. このとき,

$$m + n = d(k_1 + k_2),$$

$$m - n = d(k_1 - k_2)$$

となるから, 主張を得る.