

「はじめての数論」の回答例

yassu

平成 28 年 12 月 31 日

1 第 1 章の回答例

1.1以下のプログラムによって, 3, 4 番目の三角数は $1225 = 35^2$, $416 = 204^2$.

有効な方法は分からない.

こんな数はたぶん無限にある.

1.2

$$\begin{aligned}1 &= 1^2, \\1 + 3 &= 4 = 2^2, \\4 + 5 &= 9 = 3^2, \\9 + 7 &= 16 = 4^2, \\16 + 9 &= 25 = 5^2\end{aligned}$$

などとなるから

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

が予想される.

1.3

三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限ることを示す.

任意の自然数は $3l, 3l+1, 3l+2 (l \in \mathbf{N})$ と表すことができる.

$(p, p+2, p+4)$ を三つ子素数とする. このとき, ある自然数 l があって, $p = 3l, 3l+1, 3l+2$ のいずれかで表される.

$l = 1$ のとき, $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$ である.

$l \neq 1$ のとき, $3l$ は素数ではないから, $p = 3l+1$ もしくは $3l+2$ と表される.

$p = 3l+1$ とすると, $p+2 = 3l+3 = 3(l+1)$ となって, これは素数ではないから不敵.

$p = 3l+2$ とすると, $p+2 = 3l+4, p+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ となるから, $p+4$ は素数ではない.

以上によって, 三つ子素数は $(3, 5, 7)$ に限る.