

AY2025 Spring GCI199-1 Independent Study in GC Program

“Set Theory and Topology”

On Cantor’s Theorem and Cantor’s Diagonal Argument (カントールの定理とカントールの対角線論法について)

Cantor’s Theorem

For any set

$$|X| < |2^X|.$$

As part of this,

$$\text{there is no injection from } 2^X \text{ to } X. \quad (1)$$

The general proof is as follows.

[Proof of (1)]

$$\text{Assume there exists an injection } f : 2^X \rightarrow X. \quad (2)$$

Define a set $A \in 2^X$ (i.e. $A \subset X$) by

$$A = \{f(U) \mid U \in 2^X, f(U) \notin U\} \quad (3)$$

1. The case $f(A) \notin A$.

By definition of A , $f(A)$ meets the criterion for membership in A , so

$$f(A) \in A.$$

This is a contradiction.

2. The case $f(A) \in A$.

By definition of A , there exists $U \in 2^X$ such that

$$f(A) = f(U), \quad \text{and} \quad f(U) \notin U.$$

Since f is injective, $A = U$, and hence

$$f(A) \notin A.$$

This is a contradiction.

This proof can be seen as a generalization of the well-known Cantor diagonal argument used to show that

$$\textbf{bijection } f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \text{ does not exist.}$$

Below, assume a bijection

$$f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

exists, and observe that the concrete instance of the above general proof becomes the Cantor diagonal argument (we are not proving anything new here, only illustrating the connection).

Suppose f is concretely given by the following mapping. The left side of each arrow is an element of \mathbb{N} , the right side is the corresponding subset $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$, and the final columns indicate, as usual, a “1” if the index is in U_i and “0” otherwise:

\mathbb{N} element		$2^{\mathbb{N}}$ element (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	\dots
0	\leftrightarrow	U_0	=	0	1	1	0	1	\dots
1	\leftrightarrow	U_1	=	1	1	0	1	1	\dots
2	\leftrightarrow	U_2	=	1	0	0	1	1	\dots
3	\leftrightarrow	U_3	=	0	1	1	0	1	\dots
4	\leftrightarrow	U_4	=	1	0	1	1	1	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

The set A defined in (3) consists precisely of those \mathbb{N} -elements $u_i = f(U_i)$ for which $u_i \notin U_i$, corresponding to a “0” in the i -th position—namely, the blue entries:

\mathbb{N} element		$2^{\mathbb{N}}$ element (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	\dots
0	\leftrightarrow	U_0	=	0	1	1	0	1	\dots
1	\leftrightarrow	U_1	=	1	1	0	1	1	\dots
2	\leftrightarrow	U_2	=	1	0	0	1	1	\dots
3	\leftrightarrow	U_3	=	0	1	1	0	1	\dots
4	\leftrightarrow	U_4	=	1	0	1	1	1	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
A	=	$\{0, 2, 3, \dots\}$	=	1	0	1	1	0	\dots
				$0 \in A$	$1 \notin A$	$2 \in A$	$3 \in A$	$4 \notin A$	\dots

Hence, since A differs from every U_i , no bijection f can exist. In constructing A , one is precisely building—via the binary expansion—a new element whose diagonal bits differ from those of each U_i . However, when relating this to the real interval $[0, 1]$, as in the usual Cantor diagonal proof, one must be careful about non-uniqueness of expansions (for example, in base 10 $1 = 0.999\dots$, and in base 2 $1 = 0.111\dots$).

(同内容の日本語版を次頁から示す)

カントールの定理

任意の集合について

$$|X| < |2^X|.$$

の一部である,

$$2^X \text{ から } X \text{ への単射は存在しない.} \quad (4)$$

の一般的な証明は以下の通りである.

[(4) の証明]

$$\text{単射 } f: 2^X \rightarrow X \text{ が存在すると仮定する} \quad (5)$$

集合 $A \in 2^X$ (つまり $A \subset X$) を以下のように定義する.

$$A = \{f(U) \mid U \in 2^X, f(U) \notin U\} \quad (6)$$

1. $f(A) \notin A$ の場合.

A の定義より, $f(A)$ は A の元である条件を満たすので,

$$f(A) \in A.$$

したがって矛盾.

2. $f(A) \in A$ の場合.

A の定義より, ある $U \in 2^X$ が存在し,

$$f(A) = f(U), \quad \text{かつ} \quad f(U) \notin U.$$

ここで, f は単射なので, $A = U$ より

$$f(A) \notin A.$$

したがって矛盾.

この証明は, よくある,

$$\text{全単射 } f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \text{ は存在しない}$$

のを示すための, 有名なカントールの対角線論法の一般化であることがわかる. 以下では,

$$\text{全単射 } f: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

が存在するとして, 上の一般の場合の証明の具体例がカントールの対角線論法となっていることを見る (何かを証明しているわけでは全く無い. 関係性を見るだけである).

f が具体的に以下のような写像であるとする. 矢印の左側が \mathbb{N} の元, 右側が $2^{\mathbb{N}}$ の元を表しており, 最右辺は, よくあるように, 各桁の数字が, その桁が $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$ に含まれていれば 1, ふくまれていなければ 0 とする表記にしている:

\mathbb{N} の元		$2^{\mathbb{N}}$ の元 (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	\dots
0	\leftrightarrow	U_0	=	0	1	1	0	1	\dots
1	\leftrightarrow	U_1	=	1	1	0	1	1	\dots
2	\leftrightarrow	U_2	=	1	0	0	1	1	\dots
3	\leftrightarrow	U_3	=	0	1	1	0	1	\dots
4	\leftrightarrow	U_4	=	1	0	1	1	1	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

これに対して, 定義 (6) に従って定められる A は, 以下の左辺の \mathbb{N} の元 $u_i = f(U_i)$ のうち, $u_i = f(U_i) \notin U_i$ を反映して, 0 が i 桁目に表示されている, 青文字のもののみをすべて含む集合である:

\mathbb{N} element		$2^{\mathbb{N}}$ element (U_i)		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	\dots
0	\leftrightarrow	U_0	=	0	1	1	0	1	\dots
1	\leftrightarrow	U_1	=	1	1	0	1	1	\dots
2	\leftrightarrow	U_2	=	1	0	0	1	1	\dots
3	\leftrightarrow	U_3	=	0	1	1	0	1	\dots
4	\leftrightarrow	U_4	=	1	0	1	1	1	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
$A = \{0, 2, 3, \dots\}$				1	0	1	1	0	\dots
				$0 \in A$	$1 \notin A$	$2 \in A$	$3 \in A$	$4 \notin A$	\dots

よって, A はどの $i \in \mathbb{N}$ についても U_i と異なることから, 全単射 f が存在しないことが言えるわけだが, A を構成する際, まさに, 二進数表示における, 対角線上の偶奇 (ここでは 0 か 1 か) が異なる $[0, 1]$ 内の実数 (ここでは $2^{\mathbb{N}}$ の要素) を構築している事がわかる. ただし, 本当に実数と対応付ける際は, これはもともとのよくあるカントールの対角線論法での証明でもそうであるが, 少数表示は一意でない (例えば十進法では $1 = 0.999999\dots$ とか, 二進法では $1 = 0.111111\dots$) に注意しなければならない.