AY2025 Spring GCI199-1 Independent Study in GC Program
"Set Theory and Topology"
On Cantor's Theorem and Cantor's Diagonal Argument
(カントールの定理とカントールの対角線論法について)

Cantor's Theorem
For any set

$$|X| < \left|2^X\right|.$$

As part of this,

$$\text{there is no injection from } 2^X \text{ to } X. \tag{1}$$

The general proof is as follows.

[**Proof of** (1)]

$$\text{Assume there exists an injection} \quad f : 2^X \to X. \tag{2}$$

Define a set $A \in 2^X$ (i.e. $A \subset X$) by

$$A = \left\{ f(U) \,\middle|\, U \in 2^X,\ f(U) \notin U \right\} \tag{3}$$

1. The case $f(A) \notin A$.

   By definition of A, $f(A)$ meets the criterion for membership in A, so

   $$f(A) \in A.$$

   This is a contradiction.

2. The case $f(A) \in A$.

   By definition of A, there exists $U \in 2^X$ such that

   $$f(A) = f(U), \quad \text{and} \quad f(U) \notin U.$$

Since f is injective, $A = U$, and hence

$$f(A) \notin A.$$

This is a contradiction.

This proof can be seen as a generalization of the well-known Cantor diagonal argument used to show that

$$\textbf{bijection} \quad f: \quad \mathbb{N} \to [0,1] \quad \text{does not exist.}$$

Below, assume a bijection

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

exists, and observe that the concrete instance of the above general proof becomes the Cantor diagonal argument (we are not proving anything new here, only illustrating the connection).

Suppose f is concretely given by the following mapping. The left side of each arrow is an element of $\mathbb{N}$, the right side is the corresponding subset $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$, and the final columns indicate, as usual, a "1" if the index is in U_i and "0" otherwise:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{N}\text{ element} & & 2^{\mathbb{N}}\text{ element } (U_i) & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & U_0 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \leftarrow\!\shortmid & U_1 & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
2 & \leftarrow\!\shortmid & U_2 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
3 & \leftarrow\!\shortmid & U_3 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
4 & \leftarrow\!\shortmid & U_4 & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

The set A defined in (3) consists precisely of those $\mathbb{N}$-elements $u_i = f(U_i)$ for which $u_i \notin U_i$, corresponding to a "0" in the i-th position—namely, the blue entries:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{N}\text{ element} & & 2^{\mathbb{N}}\text{ element } (U_i) & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
\color{blue}{0} & \leftarrow\!\shortmid & U_0 & = & \color{blue}{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \leftarrow\!\shortmid & U_1 & = & 1 & \color{green}{1} & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{2} & \leftarrow\!\shortmid & U_2 & = & 1 & 0 & \color{blue}{0} & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{3} & \leftarrow\!\shortmid & U_3 & = & 0 & 1 & 1 & \color{blue}{0} & 1 & \cdots \\
4 & \leftarrow\!\shortmid & U_4 & = & 1 & 0 & 1 & 1 & \color{green}{1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 & & & & & & & & & \\
A & = & \{\color{blue}{0}, \color{blue}{2}, \color{blue}{3}, \dots\} & = & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \cdots \\
 & & & & 0 \in A & 1 \notin A & 2 \in A & 3 \in A & 4 \notin A & \cdots
\end{array}$$

Hence, since A differs from every U_i, no bijection f can exist. In constructing A, one is precisely building —via the binary expansion—a new element whose diagonal bits differ from those of each U_i. However, when relating this to the real interval $[0, 1]$, as in the usual Cantor diagonal proof, one must be careful about non-uniqueness of expansions (for example, in base 10 $1 = 0.999\ldots$, and in base 2 $1 = 0.111\ldots$).

(同内容の日本語版を次頁から示す)

カントールの定理
任意の集合について

$$|X| < \left|2^X\right|.$$

の一部である,

$$2^X \text{ から} X \text{への単射は存在しない.} \tag{4}$$

の一般的な証明は以下の通りである.

[(4) **の証明**]

$$\text{単射} \quad f : 2^X \to X \quad \text{が存在すると仮定する} \tag{5}$$

集合 $A \in 2^X$ (つまり $A \subset X$) を以下のように定義する.

$$A = \left\{ f(U) \middle| U \in 2^X,\, f(U) \notin U \right\} \tag{6}$$

1. $f(A) \notin A$ の場合.

   A の定義より, $f(A)$ は A の元である条件を満たすので,

   $$f(A) \in A.$$

   したがって矛盾.

2. $f(A) \in A$ の場合.

   A の定義より, ある $U \in 2^X$ が存在し,

   $$f(A) = f(U), \quad \text{かつ} \quad f(U) \notin U.$$

   ここで, f は単射なので, $A = U$ より

   $$f(A) \notin A.$$

   したがって矛盾.

この証明は, よくある,

$$\text{全単射} \quad f : \quad \mathbb{N} \to [0,1] \quad \text{は存在しない}$$

のを示すための, 有名なカントールの対角線論法の一般化であることがわかる. 以下では,

$$\textbf{全}\text{単射} \quad f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

が存在するとして, 上の一般の場合の証明の具体例がカントールの対角線論法となっていることを見る (何かを証明しているわけでは全く無い. 関係性を見るだけである).

f が具体的に以下のような写像であるとする. 矢印の左側が $\mathbb{N}$ の元, 右側が $2^{\mathbb{N}}$ の元を表しており, 最右辺は, よくあるように, 各桁の数字が, その桁が $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$ に含まれていれば 1, ふくまれていなければ 0 とする表記にしている:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N}\text{ の元} & & 2^{\mathbb{N}}\text{ の元 }(U_i) & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
0 & \hookleftarrow & U_0 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \hookleftarrow & U_1 & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
2 & \hookleftarrow & U_2 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
3 & \hookleftarrow & U_3 & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
4 & \hookleftarrow & U_4 & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

これに対して, 定義 (6) に従って定められる A は, 以下の左辺の $\mathbb{N}$ の元 $u_i = f(U_i)$ のうち, $u_i = f(U_i) \notin U_i$ を反映して, 0 が i 桁目に表示されている, 青文字のもののみをすべて含む集合である:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N}\text{ の元} & & 2^{\mathbb{N}}\text{ の元 }(U_i) & & 0 \in U_i & 1 \in U_i & 2 \in U_i & 3 \in U_i & 4 \in U_i & \cdots \\
\color{blue}{0} & \hookleftarrow & U_0 & = & \color{blue}{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & \hookleftarrow & U_1 & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{2} & \hookleftarrow & U_2 & = & 1 & 0 & \color{blue}{0} & 1 & 1 & \cdots \\
\color{blue}{3} & \hookleftarrow & U_3 & = & 0 & 1 & 1 & \color{blue}{0} & 1 & \cdots \\
4 & \hookleftarrow & U_4 & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 & & & & & & & & & \\
A & = & \{\color{blue}{0}, \color{blue}{2}, \color{blue}{3}, \cdots\} & = & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \cdots \\
 & & & & 0 \in A & 1 \notin A & 2 \in A & 3 \in A & 4 \notin A & \cdots
\end{array}
$$

よって, A はどの $i \in \mathbb{N}$ についても U_i とも異なことから, 全単射 f が存在しないことが言えるわけだが, A を構成する際, まさに, 二進数表示における, 対角線上の偶奇 (ここでは 0 か 1 か) が異なる $[0, 1]$ 内の実数 (ここでは $2^{\mathbb{N}}$ の要素) を構築している事がわかる. ただし, 本当に実数と対応付ける際は, これはもともとのよくあるカントールの対角線論法での証明でもそうであるが, 少数表示は一意でない (例えば十進法では $1 = 0.999999\ldots$ とか, 二進法では $1 = 0.111111\ldots$) に注意しなければならない.