

# AY2025 Spring GCI199-1 Independent Study in GC Program

## “Set Theory and Topology”

### On Cantor’s Theorem and Cantor’s Diagonal Argument (カントールの定理とカントールの対角線論法について)

#### Cantor’s Theorem

For any set

$$|X| < |2^X|.$$

As part of this,

$$\text{there is no injection from } 2^X \text{ to } X. \quad (1)$$

The general proof is as follows.

#### [Proof of (1)]

$$\text{Assume there exists an injection } f : 2^X \rightarrow X. \quad (2)$$

Define a set  $A \in 2^X$  (i.e.  $A \subset X$ ) by

$$A = \{f(U) \mid U \in 2^X, f(U) \notin U\} \quad (3)$$

1. The case  $f(A) \notin A$ .

By definition of  $A$ ,  $f(A)$  meets the criterion for membership in  $A$ , so

$$f(A) \in A.$$

This is a contradiction.

2. The case  $f(A) \in A$ .

By definition of  $A$ , there exists  $U \in 2^X$  such that

$$f(A) = f(U), \quad \text{and} \quad f(U) \notin U.$$

Since  $f$  is injective,  $A = U$ , and hence

$$f(A) \notin A.$$

This is a contradiction.

This proof can be seen as a generalization of the well-known Cantor diagonal argument used to show that

$$\textbf{bijection } f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \text{ does not exist.}$$

Below, assume a bijection

$$f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

exists, and observe that the concrete instance of the above general proof becomes the Cantor diagonal argument (we are not proving anything new here, only illustrating the connection).

Suppose  $f$  is concretely given by the following mapping. The left side of each arrow is an element of  $\mathbb{N}$ , the right side is the corresponding subset  $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$ , and the final columns indicate, as usual, a “1” if the index is in  $U_i$  and “0” otherwise:

$\mathbb{N}$ element		$2^{\mathbb{N}}$ element ( $U_i$ )		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\dots$
0	$\leftrightarrow$	$U_0$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
1	$\leftrightarrow$	$U_1$	=	1	1	0	1	1	$\dots$
2	$\leftrightarrow$	$U_2$	=	1	0	0	1	1	$\dots$
3	$\leftrightarrow$	$U_3$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
4	$\leftrightarrow$	$U_4$	=	1	0	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

The set  $A$  defined in (3) consists precisely of those  $\mathbb{N}$ -elements  $u_i = f(U_i)$  for which  $u_i \notin U_i$ , corresponding to a “0” in the  $i$ -th position—namely, the blue entries:

$\mathbb{N}$ element		$2^{\mathbb{N}}$ element ( $U_i$ )		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\dots$
0	$\leftrightarrow$	$U_0$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
1	$\leftrightarrow$	$U_1$	=	1	1	0	1	1	$\dots$
2	$\leftrightarrow$	$U_2$	=	1	0	0	1	1	$\dots$
3	$\leftrightarrow$	$U_3$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
4	$\leftrightarrow$	$U_4$	=	1	0	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$A$	=	$\{0, 2, 3, \dots\}$	=	1	0	1	1	0	$\dots$
				$0 \in A$	$1 \notin A$	$2 \in A$	$3 \in A$	$4 \notin A$	$\dots$

Hence, since  $A$  differs from every  $U_i$ , no bijection  $f$  can exist. In constructing  $A$ , one is precisely building—via the binary expansion—a new element whose diagonal bits differ from those of each  $U_i$ . However, when relating this to the real interval  $[0, 1]$ , as in the usual Cantor diagonal proof, one must be careful about non-uniqueness of expansions (for example, in base 10  $1 = 0.999\dots$ , and in base 2  $1 = 0.111\dots$ ).

(同内容の日本語版を次頁から示す)

## カントールの定理

任意の集合について

$$|X| < |2^X|.$$

の一部である,

$$2^X \text{ から } X \text{ への単射は存在しない.} \quad (4)$$

の一般的な証明は以下の通りである.

### [(4) の証明]

$$\text{単射 } f: 2^X \rightarrow X \text{ が存在すると仮定する} \quad (5)$$

集合  $A \in 2^X$  (つまり  $A \subset X$ ) を以下のように定義する.

$$A = \{f(U) \mid U \in 2^X, f(U) \notin U\} \quad (6)$$

1.  $f(A) \notin A$  の場合.

$A$  の定義より,  $f(A)$  は  $A$  の元である条件を満たすので,

$$f(A) \in A.$$

したがって矛盾.

2.  $f(A) \in A$  の場合.

$A$  の定義より, ある  $U \in 2^X$  が存在し,

$$f(A) = f(U), \quad \text{かつ} \quad f(U) \notin U.$$

ここで,  $f$  は単射なので,  $A = U$  より

$$f(A) \notin A.$$

したがって矛盾.

この証明は, よくある,

$$\text{全単射 } f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \text{ は存在しない}$$

のを示すための, 有名なカントールの対角線論法の一般化であることがわかる. 以下では,

$$\text{全単射 } f: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

が存在するとして, 上の一般の場合の証明の具体例がカントールの対角線論法となっていることを見る (何かを証明しているわけでは全く無い. 関係性を見るだけである).

$f$  が具体的に以下のような写像であるとする. 矢印の左側が  $\mathbb{N}$  の元, 右側が  $2^{\mathbb{N}}$  の元を表しており, 最右辺は, よくあるように, 各桁の数字が, その桁が  $U_i \in 2^{\mathbb{N}}$  に含まれていれば 1, ふくまれていなければ 0 とする表記にしている:

$\mathbb{N}$ の元		$2^{\mathbb{N}}$ の元 ( $U_i$ )		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\dots$
0	$\leftrightarrow$	$U_0$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
1	$\leftrightarrow$	$U_1$	=	1	1	0	1	1	$\dots$
2	$\leftrightarrow$	$U_2$	=	1	0	0	1	1	$\dots$
3	$\leftrightarrow$	$U_3$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
4	$\leftrightarrow$	$U_4$	=	1	0	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

これに対して, 定義 (6) に従って定められる  $A$  は, 以下の左辺の  $\mathbb{N}$  の元  $u_i = f(U_i)$  のうち,  $u_i = f(U_i) \notin U_i$  を反映して, 0 が  $i$  桁目に表示されている, 青文字のもののみをすべて含む集合である:

$\mathbb{N}$ の元		$2^{\mathbb{N}}$ の元 ( $U_i$ )		$0 \in U_i$	$1 \in U_i$	$2 \in U_i$	$3 \in U_i$	$4 \in U_i$	$\dots$
0	$\leftrightarrow$	$U_0$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
1	$\leftrightarrow$	$U_1$	=	1	1	0	1	1	$\dots$
2	$\leftrightarrow$	$U_2$	=	1	0	0	1	1	$\dots$
3	$\leftrightarrow$	$U_3$	=	0	1	1	0	1	$\dots$
4	$\leftrightarrow$	$U_4$	=	1	0	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$A = \{0, 2, 3, \dots\} = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 \in A & 1 \notin A & 2 \in A & 3 \in A & 4 \notin A & \dots \end{array}$$

よって,  $A$  はどの  $i \in \mathbb{N}$  についても  $U_i$  と異なることから, 全単射  $f$  が存在しないことが言えるわけだが,  $A$  を構成する際, まさに, 二進数表示における, 対角線の上の偶奇 (ここでは 0 か 1 か) が異なる実数 (ここでは  $2^{\mathbb{N}}$  の要素) を構築している事がわかる. ただし, 実数の集合  $[0, 1]$  と対応付ける際は, これはもともとのよくあるカントールの対角線論法での証明でもそうであるが, 少数表示は一位でない (例えば十進法では  $1 = 0.999999\dots$  とか, 二進法では  $1 = 0.111111\dots$ ) に注意しなければならない.