Exercício 1

1) Somatório dos graus de todos os vértices

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Dentro do somatórios, divisão dos vértices com grau ímpar e par.

$$\underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{pares}} + \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{ímpar}} = 2|E|$$

se o resultado dos somatórios é par, o somatórios dos vértices de grau ímpar é sempre par.

$$\sum_{v \in V} 2k+1 = \text{par}$$

$$\sum_{v \in V} 2k + \underbrace{\sum_{v \in V} 1}_{\text{par}} = \text{par}$$

$2 \cdot \sum_{v \in V} k$ sempre será par

2) $p \leftrightarrow v = 10$

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ apertos de mão}$$

A relação com grafos se dá a partir do momento em que consideramos que cada aperto de mão seria mapeado como uma aresta e que cada pessoa será um vértice. O número de arestas podem ser calculado através do teorema do aperto de mãos: $\frac{v \cdot (v-1)}{2}$

3) grafo conexo: existe um caminho entre qualquer par de vértices → nº arestas $= v - 1$

$v = 7$ $\quad 10 = 2|E|$

$d(v) = 10$ $\quad E = 5$

não é conexo pois o número de arestas de um grafo conexo deve ser $v - 1 = 6$

4) $v = 5$

$d(v) = 10$ → grau 2

$10 = 2|E|$

$E = 5$

é possível

$d(v) = 15$

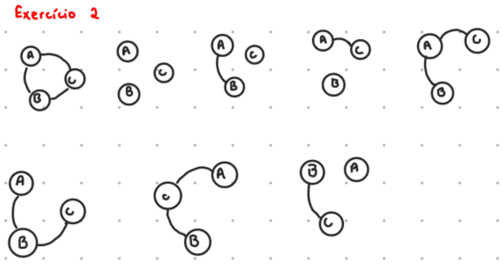
$15 = 2|E|$

$E = 7.5$

não é possível pois não existem 7.5 arestas

Exercício 2

1)



2) a) Nulo : $|V| = n$, $|E| = 0$

b) Grafo ciclo : $|V| = N$, $|E| = N$

c) Grafo completo : $|V| = n$, $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$

d) Grafo bipartido completo $K_{m,n}$: $|V| = n + m$, $|E| = n \times m$

3) Num grafo simples:

$|V| = n$

$d(V) = 2 \cdot |E|$

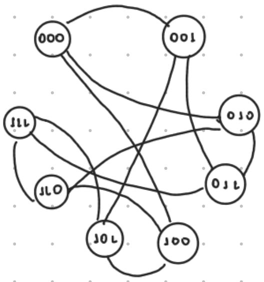
Grau varia : $0 - (n-1)$

Pelo princípio da casa dos pombos, se temos n vértices, tal que $n \geq 2$, e temos $(n-1)$ possibilidades de combinações de arestas, ao menos 2 terão o mesmo grau

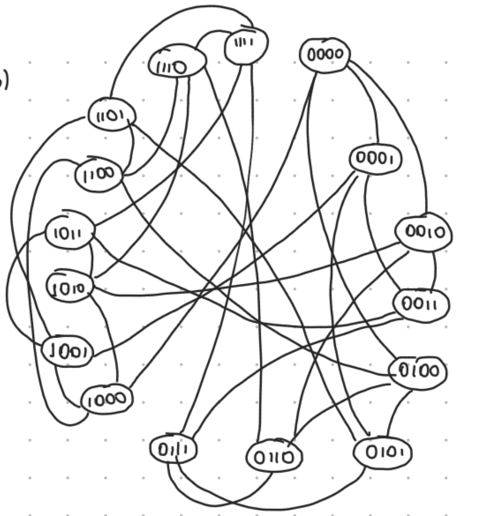
Por exemplo se $n = 2$, podemos ter grau 0 e grau 1, se atribuíssimos um grau diferente para cada vértice teríamos um vértice isolado e outro com loop, o que não satisfaz a condição de um grafo simples, logo ambos teriam que ter o mesmo grau.

4) comprimento 3 = B_1, B_2, B_3

a)

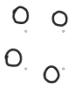


B)

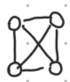


Exercício 3

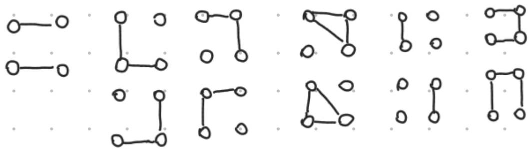
1) $|V| = 4$



grafo nulo

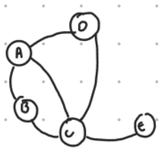


grafo completo



... etc

2) $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \rightarrow$ é possível



3) grafos regulares ⟶ todos os vértices possuem o mesmo grau

$|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

máximo grau é $(n-1)$

grau 1

$d(v) = 2 \cdot |E|$

$5 = 2 \cdot |E|$

$E = 2,5$

grau 1 não é possível

$d(v) = 2|E|$

$10 = 2|E|$

$E = 5$

grau 2 → possível

$d(v) = 2|E|$

$15 = 2|E|$

$E = 7,5$

não é possível

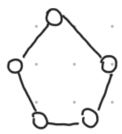
$d(v) = 2|E|$

$20 = 2|E|$

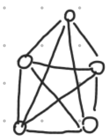
$\frac{20}{2} = |E|$

$10 = |E|$

possível



grau 2



grau 4

4) $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

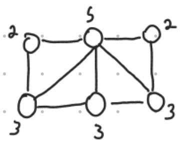
$d(v) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$

não é possível pois geraria arestas paralelas que não são característica de um grafo simples

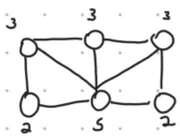
5) Não é possível pois a quantidade de vértices com grau ímpar deve ser par.

6) $v = 6$

$E = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

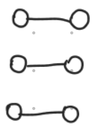


(2 2 3 3 3 5)



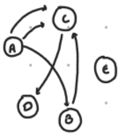
(2 2 3 3 3 5)

7)



Exercício 4

1)



a) o grafo é direcionado pois o conjunto de arestas está representado por parêntese.

B) (A,C) (B,C) são adjacentes

c) (A,C) (A,C) são paralelas

D) A_1 = A C A_2 = A C A_3 = A B A_4 = B C A_5 = C D

5) Sim, o vértice E é isolado

6) Não há ciclo pois não existe um caminho que permita sair de um vértice C e voltar para ele mesmo sem repetir vértices e arestas.

Exercício 5

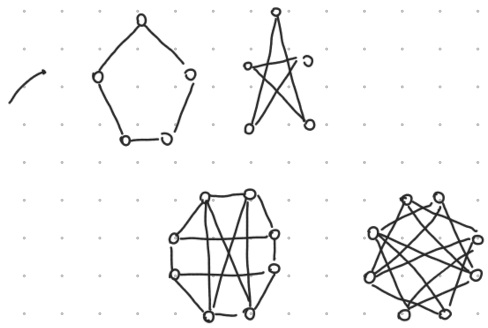
1) O menor número será 0 → grafo nulo

O maior número será $\frac{v.(v-1)}{2}$ → grafo completo

2) O menor será 1 → grafo conexo

3) Grafo complementar possui todas as arestas faltantes de G

↳ nº de arestas $\frac{v(v-1)}{4}$

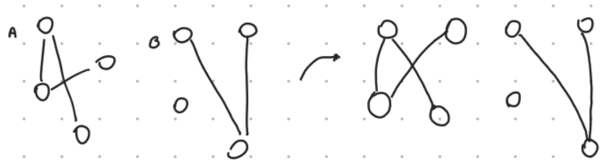


4) Valores em que V ou (V-1) sejam divisíveis por 4 tal que:

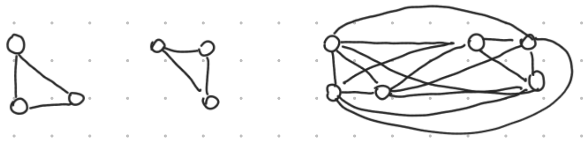
↳ $\frac{v}{4}.(v-1)$ ou $v.\frac{(v-1)}{4}$

Exercício 6

1)



A U B

2) 

A + B

3) Se $G_3 = G_1 \cup G_2$

$G_3 = \{(V_1 \cup V_2), (E_1, E_2)\}$

$\Updownarrow$

$\{(V_2 \cup V_1), (E_1, E_2)\}$

da mesma forma se tenho $H \cup G_3 = G_1 \cup G_2$

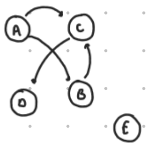
posso

$H_3 \cup G_1 \cup G_2$

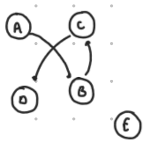
$H_3 \cup G_2 \cup G_1$

Exercício 7

1) G:

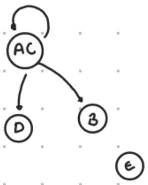


A) G':

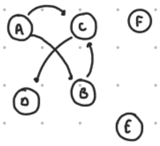


B) G':

c) G':



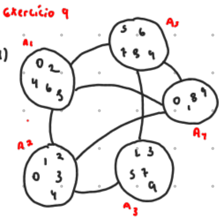
D) G':



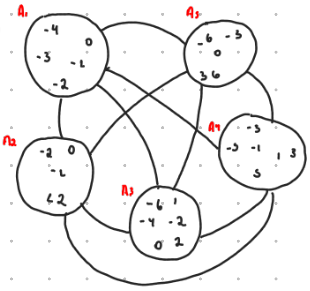
Exercício 8

Exercício 9

1)

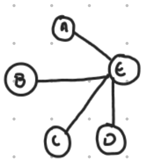


2)



Exercício 10

1) G:



é bipartido

divide o grafo em um conjunto X e Y tal que não existem arestas que ligam os vértices do mesmo conjunto e deve haver um extremo que conecta os conjuntos