# ...cia Universidade Católica de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas e Informática

D... de Ciência da Computação – Ciência da Computação

Teoria de Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães

2024/1 (Prova 1)

Aluno: Dalton de Oliveira Cardoso | Total da Prova: 50 / 100 %

## Questão 1 (30 %)

25

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e direcionado. Projete uma solução para encontrar (i) (15%) uma base e (ii) (15%) uma anti-base em $G$. Cumpre reforçar que a cardinalidade de ambos os conjuntos deva ser a menor possível.

## Questão 2 (20 %)

0

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado completo com $n$ vértices. Determine o número de subgrafos de $G$. Justifique sua resposta. $\Sigma\, 2^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}$ $\frac{m}{k}$

## Questão 3 (22 %)

0

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com pelo menos dois vértices. Prove que $G$ conterá pelo menos dois vértices de mesmo grau.

## Questão 4 (28 %)

Seja o grafo $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e 9

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\{b, d\}\{c, g\}\{d, e\}\{d, g\}\{d, h\}\{c, f\}, \{h, i\}, \{a, i\}\}.$$

25

Responda e justifique suas respostas:

(i) (08%) Encontre a excentricidade de cada vértice.

(ii) (05%) Qual o raio e o diâmetro de G?

(iii) (05%) Defina o(s) centro(s) de G.

(iv) (10%) Projete um algoritmo para encontrar o diâmetro de um grafo simples e não-direcionado.

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Dpto de Ciência da Computação – Ciência da Computação
Teoria de Grafos e Computabilidade – Prof. Silvio Jamil F. Guimarães
2023/1 (Prova 1)

Aluno: [redacted] Total da Prova: 28 / 100 %

## Questão 1

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado, $|V| = n$ e $|E| = m$.

4

- a) (4 %) Mostre que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
- b) (4 %) Mostre que se G é um grafo bipartido então $m \leq \frac{n^2}{4}$.
- c) (4 %) G pode ser regular se $n = 15$ e o grau de cada vértice for 3?
- d) (4 %) A seguinte sequência de graus $1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9$ pode representar um grafo G?
- e) (4 %) Se G é um grafo tripartido, qual o maior número de arestas de G. Faças as considerações que julgar necessárias.

## Questão 2

(20 %)

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 13 vértices e 6 componentes, responda e **justifique** as seguintes questões (respostas sem justificativas serão desconsideradas):

11

- a) (3 %) É possível que esse grafo possua 06 arestas?
- b) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 14?
- c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 56?
- d) (4 %) É possível transformar este grafo em um grafo conexo com a inclusão de 5 arestas?
- e) (5 %) É possível que esse grafo seja regular?

## Questão 3

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado. O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G} = (V', E')$, é definido por $V' = V$ e $E' = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E\}$. Um grafo é dito *auto-complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

2 a) (6 %) Dê dois exemplos de grafos *auto-complementar* com mais de 4 vértices.

0 b) (14 %) Prove que um grafo *auto-complementar* tem $4k$ ou $4k+1$ vértices, para $k$ um inteiro não negativo

## Questão 4

(15 %)

7 a) (7 %) Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

4 b) (8 %) O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não-direcionado? E de um grafo direcionado?

## Questão 5

(25 %)

0

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado e um vértice $v \in V$. Projete um algoritmo para encontrar o número de arestas entre $v$ e todos os outros vértices do grafo $G$. Portanto, a saída do algoritmo deverá ser, para cada vértice $u \in V$ a distância, em número de arestas, entre $v$ e $u$. *Deixe claro todos os elementos e etapas de seu algoritmo.*

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E INFORMÁTICA
DPTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
TEORIA DE GRAFOS E COMPUTABILIDADE – PROF. SILVIO JAMIL F. GUIMARÃES
2022/2 (PROVA 1)

76

Aluno: [redacted] Total da Prova: 62 / 100 %

## QUESTÃO 1 (10 %)

Considerando um grafo não-direcionado simples $G = (V, E)$ com 11 vértices e 6 componentes, responda e justifique as seguintes questões:

3 a) (3 %) É possível que esse grafo possua 05 arestas?

3 b) (3 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja igual a 12?

4 c) (4 %) É possível que a soma de graus de todos os vértices seja maior que 100?

## QUESTÃO 2 (30 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$ e representado pela seguinte matriz de adjacência

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| E | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Responda e justifique as seguintes questões:

4 a) (4 %) Qual o fecho transitivo direto do vértice A?

6 b) (6 %) Qual o fecho transitivo inverso do conjunto de vértices $\{B, F\}$?

1 c) (10 %) Como seria um algoritmo para identificar uma base em um grafo? Sua solução funciona para quais tipos de grafos?

1 d) (10 %) Como seria um algoritmo para identificar uma ant-base em um grafo? Sua solução funciona para quais tipos de grafos?

## Questão 3

(20 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ e representado pela seguinte lista de adjacência de sucessores

| | lista de sucessores |
|---|---|
| A | B – F |
| B | – |
| C | A – D |
| D | C – F |
| E | C – D |
| F | E |
| G | A – E – J |
| H | G – I |
| I | H – J |
| J | K – L |
| K | M |
| L | E – M |
| M | J |

6 a) (6 %) Qual seria a ordem de visita dos vértices na busca em profundidade, iniciando no vértice A, considerando a ordem alfabética para a prioridade na visita dos vizinhos?

14 b) (14 %) O grafo é acíclico? Justifique sua resposta mostrando um algoritmo para detectar ciclos.

## Questão 4

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado. O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G} = (V', E')$, é definido por $V' = V$ e $E' = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \notin E\}$. Um grafo é dito *auto–complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

6 a) (6 %) Dê um exemplo de um grafo *auto–complementar* com mais de 3 vértices.

0 b) (14 %) Mostre o que o número de arestas de um grafo *auto–complementar* é divisível por 4.

## Questão 5

(20 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não-direcionado.

0 a) (6 %) Mostre todos os subgrafos de um grafo completo com 3 vértices.

14 b) (14 %) Quantos subgrafos existem em um grafo completo com $n$ vértices em que $n = |V|$? $\sum_{i=1}^{\infty} n^{\frac{i[i-1]}{2}} \binom{n}{i}$

## Questão 5

(20 %)

Seja um grafo G com o seguinte conjunto de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ e representado pela seguinte lista de adjacência de sucessores

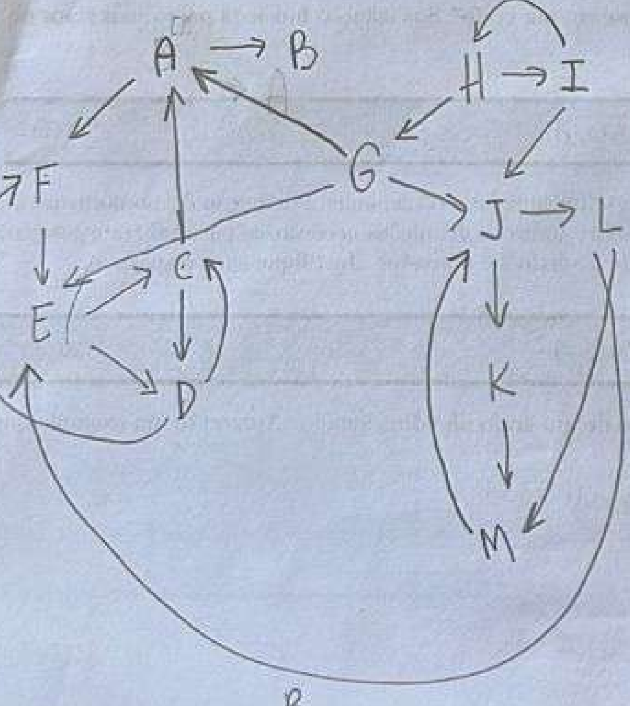
18

| | lista de sucessores |
|---|---|
| A | B – F |
| B | – |
| C | A – D |
| D | C – F |
| E | C – D |
| F | E |
| G | A – E – J |
| H | G – I |
| I | H – J |
| J | K – L |
| K | M |
| L | E – M |
| M | J |

Determine os componentes fortemente conexos do grafo $G$, justificando suas respostas.

→ Todos os vértices tem caminho de ida e volta p/ todos os outros vértices

1. Busca em profundidade incluindo tempo de início e de fim
2. Gerar grafo transposto → inverter a direção das arestas
3. A partir do vértice de maior tempo de fim, fazer nova busca em profundidade pintando os que foram visitados
4. Se ainda houverem vértices não visitados depois disso, repetir a busca em profundidade a partir do vértice de maior tempo de fim não visitado até que não sobrem vértices
5. Cada uma das buscas realizadas nos passos 3 e 4 identifica um componente fortemente conexo




A, B
L, M, J, K
E, C, D, F
I, H, G

B
F, E, D, C, A
I, H, G
L, M, J, K