

QUESTÃO 1

(25 %)

Em alguns problemas, desejamos que certos pares de vértices sejam vizinhos uns dos outros. Modifique o algoritmo do Prim para resolver o problema de árvore geradora mínima com esta restrição adicional.

↳ Aglomerar em um único vértice

QUESTÃO 2

(25 %)

Um caminho crítico é determinado pela identificação do maior período de atividades dependentes, além da consideração do tempo mínimo necessário para a realização de todas as tarefas (ou atividades). Uma aplicação interessante deste problema é a identificação do número mínimo de períodos para que um aluno possa se formar considerando todas as disciplinas de seu curso. Cumprir ressaltar que disciplinas que não estão na linha de pré-requisitos podem ser feitas em paralelo. **Modele** o problema do caminho crítico em grafos e **projete** um algoritmo para identificá-lo. Além disto, ilustre um exemplo da sua modelagem.

QUESTÃO 3

(35 %)

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples direcionado. Seja (G, W) um grafo ponderado em que $W: E \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Um caminho é dito monotônico de baixo crescimento se ele é estritamente crescente em que o peso de um elemento é menor que o dobro do elemento seguinte. Por exemplo, a sequência $[1, 3, 5]$ não é monotônico de baixo crescimento mas a sequência $[1, 3, 7]$ é uma sequência monotônica de baixo crescimento. Projete uma solução para encontrar em (G, W) o menor caminho monotônico de baixo crescimento.

QUESTÃO 4

(25 %)

Um grafo é dito euleriano se houver um caminho simples que passe por todas as arestas do grafo. Este caminho é chamado de caminho euleriano. Projete uma solução para encontrar um caminho euleriano em Grafo Euleriano.

Na



$$1 < 9 < 25$$

$$1 < 16 < 25$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$1, 3, 5$$

$$w < 2w$$

$$1 < 9 < 49$$

o peso de um elemento é menor que o dobro do elemento seguinte

QUESTÃO 1

(20 %)

Seja o grafo não-ponderado $G=(V,E)$ definido a seguir:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

e,

$$E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, h\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, h\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{e, h\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$$

- a) (10 %) No estado de Minas Gerais, o DER-MG é o órgão responsável pela inspeção das estradas estaduais. Para o planejamento das manutenções, torna-se necessária uma inspeção periódica das estradas a ser realizada por um funcionário do DER-MG. Com o intuito de minimizar os custos da viagem, o funcionário deveria criar uma rota passando em cada estrada uma única vez voltando para a cidade de onde partiu. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G , é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.
- b) (10 %) Em um ano de eleição, os candidatos ao governo do estado precisam visitar todas as cidades do referido estado. É importante que as visitas tenham o menor custo possível para a campanha. O marqueteiro da campanha deseja planejar a rota da viagem de forma a passar por todas as cidades retornando à cidade de onde iniciou a viagem. A partir do mapa rodoviário representado pelo grafo G , é possível identificar uma rota que atenda às especificações? Caso haja esta rota, mostre-a, e caso não haja tal rota, mostre o que deve ser feito para que criá-la. Justifique todas as suas respostas em termos de grafos.

QUESTÃO 2

(20 %)

Um *caminho crítico* é determinado pela identificação do maior período de atividades dependentes, além da consideração do tempo mínimo necessário para a realização de todas as tarefas (ou atividades). Uma aplicação interessante deste problema é a identificação do número mínimo de períodos para que um aluno possa se formar considerando todas as disciplinas de seu curso. Cumpre ressaltar que disciplinas que não estão na linha de pré-requisitos podem ser feitas em paralelo. **Modele** o problema do caminho crítico em grafos e **projete** um algoritmo para identificá-lo. Além disto, ilustre um exemplo da sua modelagem.

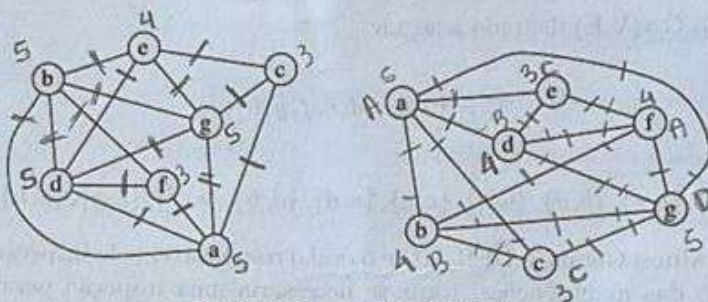
C, D, F
A, G

I, H, J
L, M, J, K

QUESTÃO 3

(20 %)

Sejam os dois grafos que são ilustrados na figura a seguir. Indique se estes grafos são planares ou não-planares, justificando sua resposta. *Serão analisadas somente as respostas que tiverem justificativas.*



Verificação de planaridade

QUESTÃO 4

(20 %)

A capacidade mínima de um caminho em um grafo ponderado é definida como o peso da aresta de menor peso do caminho. O problema de *Widest path* é um definido como um problema de encontrar, entre dois vertices especificados em um grafo ponderado, um caminho que maximize o peso dentre todas as capacidades mínimas (dos caminhos) do grafo. Este problema também é conhecido como *problema de caminho de capacidade máxima*. Projete uma solução para resolver o problema de caminho de capacidade máxima entre estes vértices. Apresente uma instância do problema com uma solução.

QUESTÃO 5

(20 %)

Em grandes cidades, a localização adequada de unidades de corpos de bombeiros pode ser muito importante para salvar vidas.

- (8 %) Considerando que a cidade contenha somente uma unidade do corpo de bombeiros, projete uma solução para minimizar a maior distância distância em que um caminhão-tanque deve percorrer para atender a um chamado de incêndio.
- (12 %) Considerando que a cidade contenha n unidades do corpo de bombeiros, projete uma solução para minimizar a maior distância distância em que um caminhão-tanque, localizado em alguma unidade dos corpos de bombeiro, deve percorrer para atender a um chamado de incêndio.



INSTRUÇÕES

A prova terá duração de 100 minutos com uma pontuação de 100%.

Nenhum material auxiliar é permitido. O uso de equipamentos eletrônicos é proibido.

Todas as questões só possuem uma resposta correta, e valem o mesmo valor.

Na folha de respostas, preencha totalmente sem ultrapassar as linhas, usando CANETA, o quadrado referente à sua resposta.

QUESTÃO 1

Seja um grafo não-direcionado e não-ponderado G . Seja uma busca em largura de G a partir de um vértice r . Sejam $d(r, u)$ e $d(r, v)$ os comprimentos dos caminhos mais curtos de r para u e v , respectivamente, em G . Se u for visitado antes de v durante a busca em largura, qual das seguintes afirmações está correta?

- ☐ A $d(r, u) > d(r, v)$ ☐ B $d(r, u) \leq d(r, v)$ ☐ C $d(r, u) \geq d(r, v)$ ☐ D $d(r, u) < d(r, v)$

QUESTÃO 2

Seja o grafo não-direcionado $G = (V, E)$. Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- () K_n (grafo completo) – O grafo completo K_n é regular para todos os valores de $n \geq 1$, já que o grau de cada vértice é $n - 1$.
() C_n (grafo ciclo) – O grafo ciclo C_n é regular para todos os valores de $n \geq 3$, já que o grau de cada vértice é sempre 2.
() W_n (grafo roda) – O grafo roda W_n é regular apenas para $n = 3$.
() W_n (grafo roda) – W_3 é isomorfo ao K_4 .

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

- ☐ A V – V – V – V ☐ B V – F – F – F ☐ C F – F – V – F ☐ D F – F – F – V



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 3

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado em que V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas.

- () Se $G' = (V, E')$ em que $E' = \{(u, v) \mid (u, v) \notin E\}$ então G e G' possuem os mesmos componentes conexos.
- () Se $G' = (V, E')$ em que $E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$ então G e G' possuem os mesmos componentes conexos.
- () Se $G' = (V, E')$ em que $E' = \{(u, v) \mid \text{existe um caminho de tamanho menor ou igual a 2 de } u \text{ para } v \text{ em } E\}$ então G e G' possuem os mesmos componentes conexos.
- () Se $G' = (V', E)$ em que V' é o conjunto de vértices em G que não são isolados então G e G' possuem os mesmos componentes conexos.

☐ A Há duas afirmativas corretas.

☐ C Há três afirmativas corretas.

☐ B Todas as afirmativas estão corretas.

☐ D Há somente uma afirmativa correta.

QUESTÃO 4

Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado, e (G, W) um grafo ponderado nas arestas. Considere que os pesos das arestas são inteiros positivos e todos os valores são distintos. Analise as assertivas a seguir.

1. A árvore geradora mínima é única.
2. O menor caminho entre quaisquer dois vértices é único pois todos os pesos das arestas são distintos.

☐ S Somente o item (1) está correto.

☐ C Somente o item (2) está correto.

☐ B Nenhum dos itens está correto.

☐ D Os dois itens estão corretos.



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 5

Seja o grafo não-direcionado $G = (V, E)$. Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- ☐ Um grafo direcionado é fortemente conexo se há um caminho de um vértice u para outro vértice v ou de v para u .
- ☐ Um grafo não direcionado é conexo se houver caminho entre quaisquer par de vértices.
- ☐ Em um grafo completo com 10 vértices (nomeado de A a J), o número total de circuitos hamiltonianos que iniciam em A é $10!$.
- ☐ Se um grafo possui um caminho (aberto) hamiltoniano então possui um caminho (aberto) euleriano.
- ☐ Se um grafo possui um caminho (aberto) euleriano então ele possui um caminho (aberto) hamiltoniano.
- ☐ Existe um algoritmo para identificar se um grafo possui um ciclo hamiltoniano.
- ☐ Existe um algoritmo para identificar se um grafo possui um ciclo euleriano.

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

☐ A F – V – F – F – F – F – V

☐ C V – F – V – V – V – F – F

☒ B F – V – F – F – F – V – V

☐ D V – F – V – V – V – F – F

QUESTÃO 6

Considere um grafo não direcionado G com vértices $\{a, b, c, d, e\}$. No grafo G , cada aresta tem peso distinto. A aresta $\{c, d\}$ é a aresta com peso mínimo e a aresta $\{a, b\}$ é a aresta com peso máximo. Então, qual das afirmações a seguir é falsa?

- ☐ A Toda árvore geradora mínima de G deve conter $\{c, d\}$.
- ☒ B Nenhuma árvore geradora mínima contém $\{a, b\}$.
- ☐ C G tem uma árvore geradora mínima única.
- ☐ D Se $\{a, b\}$ estiver em uma árvore geradora mínima, então sua remoção deve desconectar G .



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 7

Considere as seguintes afirmações.

- () Não existe grafo simples, conexo e não direcionados com 80 vértices e 77 arestas.
- () Todos os vértices de um grafo de Euler (possui ciclo euleriano) possuem grau par.
- () Todo grafo simples, acíclico, conexo e não direcionado com 50 vértices tem, no mínimo, dois vértices de grau 1.
- () Existe um grafo bipartido com mais que 10 vértices com conjunto independente de tamanho máximo igual a 2.

☐ A Há três afirmativas corretas.

☐ C Há duas afirmativas corretas.

☐ B Há somente uma afirmativa correta.

☒ Todas as afirmativas estão corretas.

QUESTÃO 8

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado, e (G, W) um grafo ponderado nas arestas. Analise as assertivas a seguir.

1. Supondo que todos os pesos das arestas são diferentes, a árvore geradora mínima de G e o a árvore geradora com *bottleneck* mínimo são iguais.
2. Achar uma árvore geradora mínima em G pode ser revolido por meio da solução de um problema de árvore de Steiner quando o critério de otimização é a minimização da soma dos pesos das arestas e os terminais são iguais a V .
3. Seja $T \subseteq G$ uma árvore geradora mínima de G . Sejam dois vértices u e v . Achar o menor caminho entre u e v em G é equivalente a encontrar o menor caminho entre u e v em T .

☒ Somente o item (2) está correto.

☐ C Há somente dois itens corretos.

☐ B Somente o item (3) está correto.

☐ D Nenhum dos itens está correto.



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 9

Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- ☐ Um grafo não direcionado e sem ciclos não possui vértices com grau de entrada zero.
- ☐ Seja um grafo $G = (V, E)$, se $e = \{u, v\}$ é uma aresta pertencente à E , pode-se afirmar que: (i) u e v são vértices e pertencem à V ; (ii) u e v são chamados de vértices adjacentes.
- ☐ Seja um grafo $G = (V, E)$, se $e = \{u, v\}$ é uma aresta pertencente à E , pode-se afirmar que: (i) u e v são vértices e pertencem à V ; (ii) u e v são chamados de vértices vizinhos.
- ☐ Seja um grafo $G = (V, E)$, se $e = (u, v)$ é uma aresta pertencente à E , pode-se afirmar que: (i) u é predecessor de v ; e (ii) v é sucessor de u .
- ☐ Seja um grafo $G = (V, E)$, se todo vértice $u \in V$ é vizinho a todo vértice $v \in V$, então G é chamado de grafo completo.
- ☐ O número de arestas de uma árvore geradora mínima de 10 vértices é igual a 10.
- ☐ Um grafo $G = (V, E)$ é chamado grafo nulo se $E = \emptyset$.

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

☐ A V – F – V – F – V – V – F

☐ C V – F – F – V – V – F – F

☐ B F – V – F – F – F – V – V

☒ F – V – V – V – F – F – V

QUESTÃO 10

Seja G um grafo não-direcionado ponderado e e uma aresta com peso máximo em G . Suponha que haja uma árvore geradora de peso mínimo em G contendo a aresta e . Qual das seguintes afirmações é sempre VERDADEIRA?

- ☐ A A aresta e não pode estar contida em um ciclo.
- ☐ B Existe um ciclo em G com todas as arestas de peso máximo.
- ☒ C Existe um cut-set em G com todas as arestas de peso máximo.
- ☐ D Todas as arestas em G têm o mesmo peso.



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 11

Seja o grafo não-direcionado $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d, e\}$ e

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{c, e\}\}$$

Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- ☐ O vértice “e” é um vértice pendente
- ☐ O vértice “d” é um vértice pendente
- ☐ O vértice “a” é um vértice de corte
- ☐ O vértice “c” é um vértice de corte
- ☐ Já um caminho entre os vértices “a” e “e”
- ☐ G é um grafo regular

☐ A F – F – V – V – F – F

☐ C F – V – F – F – F – V

☐ B V – V – V – F – V – V

☒ V – F – F – V – V – F

QUESTÃO 12

Seja $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}\}$. Quantas árvores geradoras mínimas existem no grafo G?

☐ A 3

☐ B 16

☐ C 7

☒ 8

QUESTÃO 13

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado e (G, W) um grafo ponderado nas arestas. Analise as assertivas a seguir.

1. G tem uma única árvore geradora mínima se não houver duas arestas em G com o mesmo peso.
2. G tem uma única árvore geradora mínima se, para cada corte de G, existe uma aresta de peso-mínimo cruzando o corte.

☐ A Somente o item (2) está correto.

☐ C Somente o item (1) está correto.

☒ Os dois itens estão corretos.

☐ D Nenhum dos itens está correto.



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 14

Em um grafo não-direcionado e conexo, uma ponte é uma aresta cuja remoção desconecta grafo. Qual afirmação é verdadeira?

- ☐ A Toda aresta de um clique de tamanho maior ou igual a 3 é um ponte.
- ☐ B Uma árvore não tem pontes.
- ☐ C Um grafo com pontes não pode ter um ciclo.
- ☒ D Uma ponte não pode ser parte de um ciclo simples.

QUESTÃO 15

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e (G, W) um grafo ponderado sendo $W : V \mapsto \mathbb{Z}^+$. Como alterar o algoritmo de Dijkstra para encontrar o menor caminho de um vértice s para todos os vértices do grafo? As menores distâncias serão armazenadas em um vetor d .

Análise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- () Alterar a função de atualização da distância em um vértice dado v , quando há uma aresta de u para v , para $d[v] = \min\{d[v], d[u] + w(v)\}$.
- () Não alterar a distância inicial atribuída para s .
- () Alterar a função de atualização da distância em um vértice dado v , quando há uma aresta de u para v , para $d[v] = \min\{d[v], d[v] + w(u)\}$.
- () Os valores iniciais das distâncias para todos os vértices, exceto o primeiro, será igual a ∞ .

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

- ☐ A F – V – V – V
- ☒ B V – F – F – V
- ☐ C V – V – F – F
- ☐ D F – F – V – F



Rafael Vilefort

CORRIGIDO

QUESTÃO 16

Considere um grafo não direcionado G com vértices $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- () Caso o conjunto de vértices $C = \{a, c, d\}$ for um conjunto independente máximo, então o subgrafo de G induzido pelos vértices $\{b, e, f, g\}$ é completo.
- () Caso o conjunto de vértices $C = \{a, c, d\}$ for uma cobertura de vértices mínima, então o subgrafo de G induzido pelos vértices $\{b, e, f, g\}$ é completo.
- () Caso o conjunto de vértices $C = \{a, c, d\}$ for uma cobertura de vértices, então o subgrafo de G induzido pelos vértices $\{b, e, f, g\}$ é nulo.

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

☐ A V – V – V

☐ B V – F – V

☒ C F – F – V

☐ D F – V – F

QUESTÃO 17

Considere um grafo não-direcionado G com vértices $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Analise as assertivas a seguir, assinalando V, se a assertiva for verdadeira, ou F, se a assertiva for falsa.

- () O algoritmo para encontrar um conjunto independente máximo é baseado na escolha dos vértices de menor grau.
- () Seja o algoritmo para encontrar um conjunto independente máximo baseado na escolha dos vértices de menor grau. Pode-se afirmar que este algoritmo sempre terá a resposta ótima quando todos os graus forem diferentes.
- () Considere que G seja um grafo bipartido em que há 2 vértices em um conjunto e 4 vértices no outro conjunto. Podemos afirmar que o conjunto independente máximo de G será igual a 4.

A ordem correta, de cima para baixo, das respostas destas assertivas é:

☒ A Todas as assertivas são falsas.

☐ B Há somente duas assertivas verdadeiras.

☐ C Há somente uma assertiva verdadeira.

☐ D Todas as assertivas são verdadeiras.