



SZKOŁA GŁÓWNA HANDLOWA W WARSZAWIE
WARSAW SCHOOL OF ECONOMICS

Studium Licencjackie

Kierunek: Metody ilościowe i systemy informacyjne

Specjalność: Metody analizy decyzji

Yauheni Semianiuk

Nr albumu: 82591

Prognozowanie zmienności oraz obliczenie wartości zagrożonej dla indeksu WIG-20

Praca licencjacka

napisana w Instytucie Ekonometrii

pod kierunkiem naukowym

dr Zuzanny Wośko

Warszawa 2021

Spis treści

Wstęp	3
Rozdział I: Opis zjawiska	5
1.1 WIG20	5
1.2 Ryzyko finansowe i zmienność	6
1.3 Prawne i pozaprawne przyczyny stosowania wartości zagrożonej	9
1.4 Wartość zagrożona jako miara ryzyka	10
1.5 Oczekiwany niedobór	11
Rozdział II: Opis metody badawczej	13
2.1 Zjawiska charakterystyczne dla stop zwrotów	13
2.2 Modele ARCH i GARCH	14
2.3 Wybór specyfikacji modelu GARCH	15
2.4 Rozszerzenia modelu GARCH	16
2.5 Dowody empiryczne	19
Rozdział III: Wyniki przeprowadzonych analiz	20
3.1 Analiza danych	20
3.2 Wybór modelu	27
3.3 Backtesting	29
Podsumowanie	34
Bibliografia	35
Spis rysunków	39
Spis tabeli	40
Streszczenie	41

Wstęp

Zmienność stała się ważną częścią analizy finansowej, zarówno do celów zarządzania ryzykiem, jak i do celów regulacyjnych. Różni inwestorzy mają różne poziomy ryzyka, które są skłonni podjąć. Wysoki stopień zmienności wskazuje, że papier wartościowy będzie miał duże oczekiwane wahania cenowe. Zdolność do prognozowania zmienności rynków finansowych jest ważna dla wyboru portfela i zarządzania nim, a także dla wyceny aktywów pierwotnych i pochodnych. Jednymi z miar ewaluacji potencjalnej straty są wartość zagrożona oraz oczekiwany niedobór, które są powszechnie stosowane do oceny wielkości ryzyka. Mają one bezpośredni związek ze zmiennością. Celem niniejszej pracy jest ocena wysokości zmienności indeksu giełdowego WIG20 oraz próba jej przybliżenia za pomocą odpowiednich modeli. Najlepsze przybliżenie pozwoli dokładnie obliczyć wielkość wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru, co z kolei pomoże inwestorom bądź instytucjom regulacyjnym podjąć prawidłowe decyzje związane ze sterowaniem ryzykiem.

Rzeczywistej zmienności nie można zaobserwować, dlatego trudno jest ocenić, które modele są lepsze z punktu widzenia samej jej estymacji. Przeprowadzono wiele badań przy użyciu różnych metod prognozowania zmienności, w tym za pomocą modeli z rodziny GARCH. Możemy dojść do wniosku, że zwyczajnie nie istnieje model uniwersalny dla wszystkich rynków. Dlatego ważne jest decydowanie jaka postać GARCH powinna zostać przyjęta w przypadku rozważania polskiego rynku finansowego. W tym miejscu zasadny jest wybór indeksu WIG20. Jest to najważniejszy wskaźnik notowany na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, obejmujący 20 spółek, będących istotnymi dla rozwoju gospodarczego Polski. Prawidłowa ocena zmienności oraz obliczanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru będzie miało wpływ nie tylko na pojedynczy instrument finansowy, lecz na całą gospodarkę.

Za pomocą odpowiednich analiz stwierdzono, że indeks WIG20 charakteryzuje się kilkoma zjawiskami utrudniającymi prognozowanie zmienności. Wyniki empiryczne pracy wskazują na to, że najlepszym rozwiązaniem w tym przypadku będzie zastosowanie wykładniczego uogólnionego modelu autoregresyjnej warunkowej heteroskedastyczności EGARCH(1, 1). Backtesting również świadczy, że model ten w lepszy sposób oblicza wartość zagrożoną oraz oczekiwany niedobór w porównaniu do standardowych metod.

W pierwszej części pracy zostaną opisane skład indeksu WIG20, pojęcia ryzyka bądź zmienności, oraz przyczyny i skutki stosowania wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru jako miar ryzyka. Następnie przedstawione będą zjawiska charakterystyczne dla stóp zwrotu z papierów wartościowych oraz różne modele rodziny GARCH, które będą stanowiły metodologię niniejszej pracy. Rozdział III opisuje dane wykorzystane w badaniach oraz przedstawia wyniki obliczeń wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru metodą EGARCH(1, 1) w porównaniu do klasycznej metody symulacji historycznej. Ostatnia część dotyczy podsumowania najważniejszych aspektów niniejszego badania.

Rozdział I: Opis zjawiska

1.1 WIG20

WIG20 jest indeksem giełdowym notowanym na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych od 16 kwietnia 1994 roku. Jest on indeksem blue-chip, obejmującym największe i najbardziej płynne spółki Rzeczypospolitej Polskiej. W skład WIG20 wchodzi 20 przedsiębiorstw z najmocniejszą pozycją w rankingu. Ranking jest obliczony na podstawie wielkości transakcji za ostatnie 12 miesięcy. Na jego skład wpływają wartości akcji w wolnym obrocie, kreowane w oparciu o kurs zamknięcia. Kurs ten jest wyznaczony w sposób losowy z pięciu ostatnich dni sesyjnych. W rankingu nie biorą udział najmniejsze spółki z ostatniego kwartyła kapitalizacji w wolnym obrocie. Proporcja jednej spółki nie może przekroczyć 15% od całej struktury indeksu. Pakiety spółek, których frakcje są powyżej tego limitu, są ograniczane. Indeks WIG20 jest indeksem typu cenowego, co oznacza, że przy jego obliczaniu bierze się pod uwagę jedynie ceny uwzględnionych w nim transakcji, a nie zawiera dochodów z tytułu dywidend. WIG20 jest skonstruowany w taki sposób, że nie może wchodzić więcej niż 5 spółek z jednego sektora gospodarki. Matematycznie konstrukcja indeksu wygląda następująco:

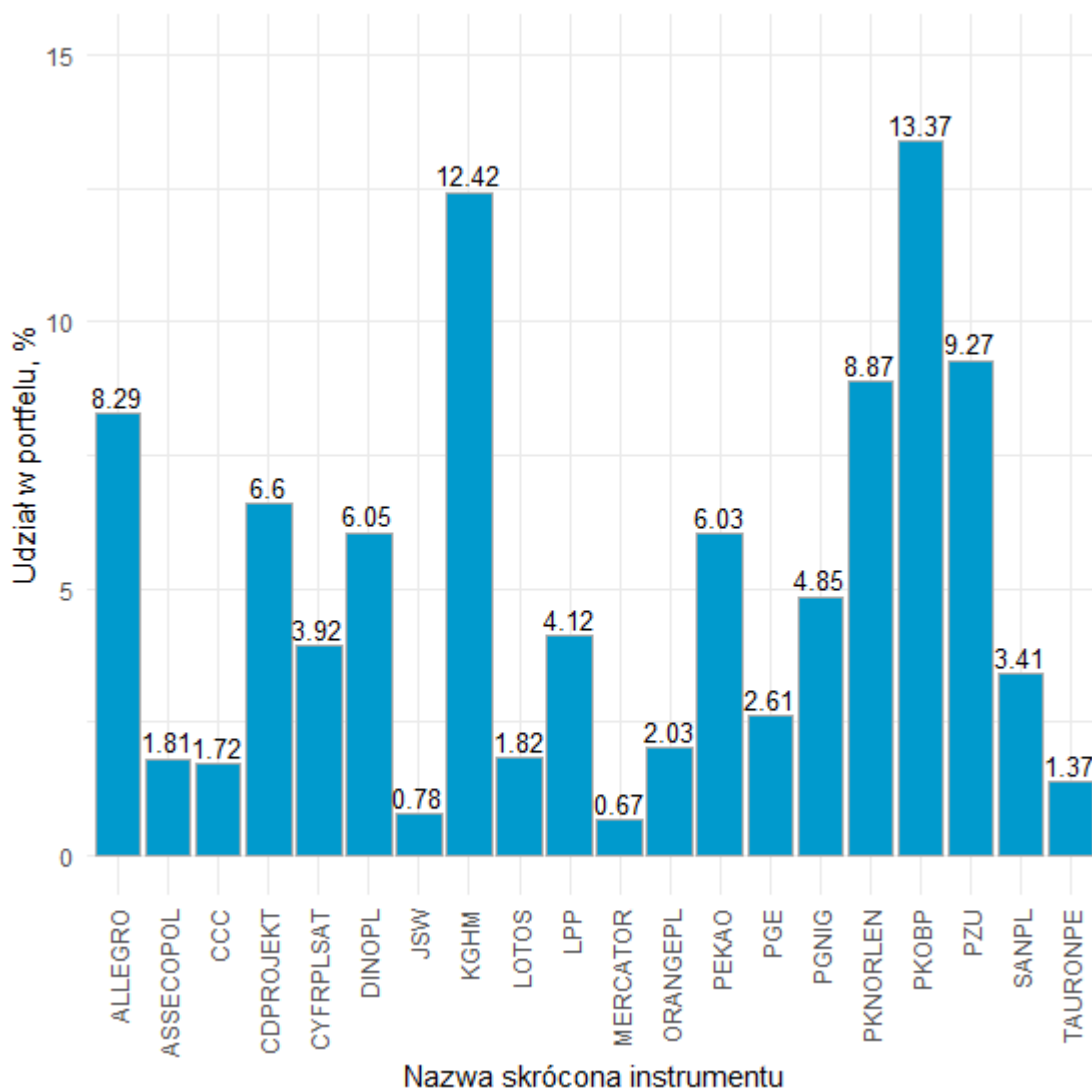
$$WIG20 = \frac{M(t)}{M(0) * K(t)} * 1000,$$

gdzie $M(t)$ – kapitalizacja portfela indeksu w trakcie sesji t , $M(0)$ – kapitalizacja portfela indeksu w dniu bazowym, $K(t)$ – współczynnik korygujący.

Na dzień 4 kwietnia 2021 roku uczestnikami WIG20 były następujące firmy: Allegro.eu (ALLEGRO), Asseco Poland (ASSECOPOL), CCC, CD Project, Cyfrowy Polsat (CYFRPLSAT), Dino Polska (DINOPL), JSW, KGHM, Lotos, LPP, Mercator Medical (MERCATOR), Orange Polska (ORANGEPL), Bank Pekao (PEKAO), Polska Grupa Energetyczna (PGE), Polskie Górnictwo Naftowe i Gazownictwo (PGNIG), PKN Orlen, PKO Bank Polski (PKOBP), Powszechny Zakład Ubezpieczeń (PZU), Santander Bank Polska (SANPL).¹ Na poniższym wykresie przedstawiony jest procentowy wkład spółek w budowie indeksu:

¹ <https://gpwbenchmark.pl/karta-indeksu?isin=PL9999999987> dostęp 04.04.2021.

Rysunek 1.1. Procentowy udział spółek indeksu WIG20



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW

Wartość rynkowa na koniec grudnia 2018 roku stanowiła 33,6% całkowitej kapitalizacji akcji Głównego Rynku GPW.² Takie znakomite obroty przyczyniają się do dużego zainteresowania WIG20 jako instrumentem finansowym.

1.2 Ryzyko finansowe i zmienność

Ryzyko finansowe jest rodzajem ryzyka, wskazującym na prawdopodobieństwo utraty części kapitału. Generalnie ta definicja implikuje podstawową kategorię ryzyka

²https://gpwbenchmark.pl/pub/BENCHMARK/files/PDF/metodologia_indeksow/WIG20_metodologia_2019_12_01.pdf, dostęp 04.04.2021.

finansowego, którym jest ryzyko rynkowe, mające związek z fluktuacją cen na rynkach kapitałowych. Z kolei ryzyko rynkowe dzieli się na cztery typy:

- ryzyko zmiany cen akcji (*stock price risk*),
- ryzyko zmiany cen towarów (*commodity price risk*),
- ryzyko zmiany kursu walutowego (*exchange rate risk*),
- ryzyko zmiany stopy procentowej (*interest rate risk*).³

Przedmiotem zainteresowania niniejszej pracy jest ryzyko zmiany cen akcji, a mówiąc ściślej cen indeksu giełdowego WIG20. Miary, przydatne do ewaluacji ryzyka rynkowego, można zaklasyfikować następująco:

- miary zagrożenia (*downside risk measures*),
- miary zmienności (*volatility measures*),
- miary wrażliwości (*sensitivity measures*).⁴

W kolejnych częściach ryzyko zmian cen akcji będzie estymowane za pomocą dwóch miar ryzyka: miary zmienności i miary zagrożenia.

Zmienność cen instrumentu jest jednym z najważniejszych pojęć z obszaru finansów. Opisuje ona siłę wahań stop zwrotu z tego instrumentu w określonym przedziale czasowym. Większa zmienność oznacza podwyższoną niepewność co do przyszłych wielkości ceny i możliwość osiągnięcia nieoczekiwanych wyników. Istnieje wielu badań teoretycznych bądź wdrażeń praktycznych podkreślających znaczenie zmienności we współczesnej ekonometrii finansowej (Schwert 1989⁵; Fleming, Kirby, Ostdiek 2001⁶; Poon, Granger 2003⁷). Uintensywnienie zmienności na globalnych rynkach kapitałowych w latach powojennych

³ Krzysztof Jajuga, Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000, s. 122.

⁴ Ibidem, s.122.

⁵ William G. Schwert, Why does stock market volatility change over time?, The Journal of Finance, Volume 44, American Finance Association, Hoboken 1989, s.1115–1153.

⁶ Jeff Fleming, Chris Kirby, Barbara Ostdiek, The economic value of volatility timing, The Journal of Finance, Volume 56, American Finance Association, Hoboken 2001, s. 329–352.

⁷ Ser-Huang Poon, Clive W. J. Granger, Forecasting volatility in financial markets: a review, Journal of Economic Literature, Volume 41, American Economic Association, Nashville 2003, s.478–539.

XX wieku sprowadzili do rozwinięcia narzędzi analitycznych i powstania nowych metod zarządzania ryzykiem. Jednym z kluczowych osiągnięć okazała się koncepcja teorii portfelowej, upowszechniona przez Harry'ego Markowitza.⁸ Zaproponował on stosowanie wariancji warunkowej (lub odchylenia standardowego) stopy zwrotu z instrumentu finansowego jako miary zmienności. Formalnie możemy zapisać to w sposób:

$$\sigma_T^2 = \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2,$$

gdzie σ_T^2 oznacza wariancję warunkową, czyli zmienność za okres T , r_t oznacza stopy zwrotu z instrumentu finansowego w bieżącym okresie t , zaś \bar{r} – średnią stopę zwrotu za okres T . Ważne tutaj jest, że chociaż ceny instrumentów są punktem wyjścia wielu badań z przestrzeni ekonometrycznej, sugerowane jest przekształcenie cen do stop zwrotów (często nazywane po prostu zwrotami), czyli do zysku lub straty z instrumentu w danym okresie.⁹ Zwroty są najczęściej uwyrażnione w arytmetycznej lub logarytmicznej postaci. W niniejszej pracy zostanie użyta logarytmiczna stopa zwrotu r_t , którą można ustalić jako:

$$r_t = 100 * \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right),$$

gdzie y_t jest ceną instrumentu finansowego w okresie t , y_{t-1} – ceną instrumentu w poprzednim okresie $t - 1$.

Rzeczywista zmienność stop zwrotów jest jednak wielkością nieobserwowalną i jej poziom można jedynie przybliżyć. Jest główną barierą, którą napotyka się w prognozowaniu zmienności. Jej oszacowania zależą od przyjętego modelu statystycznego. Jednak przywiedziona powyżej formuła zakłada pewną stabilność zmienności w okresie t , podczas gdy zmienność instrumentu zwyczajnie podlega się znacznym wahaniom nawet w ciągu jednego dnia. Dlatego coraz większą popularnością cieszą się dynamiczne modele zmienności. Zarówno zjawiska charakterystyczne dla stopu zwrotów, jak i dynamiczne modele zmienności rodziny GARCH będą tematem drugiego rozdziału.

⁸ Harry M. Markowitz, Portfolio selection, The Journal of Finance, Volume 7, American Finance Association, Hoboken 1952, s. 77–91.

⁹ John Y. Campbell, Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay, The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, Princeton 1997, s. 9

1.3 Prawne i pozaprawne przyczyny stosowania wartości zagrożonej

Zainteresowanie alternatywnymi metodami determinowania ryzyka poza wariancją stop zwrotów nasiliło się w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Decydującym stymulatorem tego był tzw. Czarny poniedziałek – dzień 19 października 1987 roku, kiedy sztanदारowy indeks Nowojorskiej Giełdy Papierów Wartościowych Dow Jones Industrial Average gwałtownie spadł o 22,6%.¹⁰ Dalej w 1993 roku nastąpił upadek niemieckiego zakładu Metallgesellschaft, gdy spadek cen ropy naftowej pociągnął za sobą straty inwestorów w wysokości 1,3 mld USD.¹¹

W związku z tym w 1994 roku JP Morgan wprowadził do obiegu system RiskMetrics.¹² RiskMetrics opisywał nową metodę pomiaru ryzyka rynkowego – wartości zagrożonej VaR (*Value at Risk*). 8 lat później pojawił się zmodyfikowany system RiskMetrics2006, zarekomendowany przez Gillesa Zumbacha. Zasadniczą siłą sprawczą dokonania zmian było znaczne zwiększenie mocy obliczeniowych komputerów. Wraz z implementacją zaawansowanego oprogramowania przyczyniło to do możliwości określenia ryzyka nawet dla bardzo złożonych instrumentów finansowych, takich jak opcje i kontrakty terminowe.

Dominującą instytucją, która oddziaływała na rozwój innowacyjnych technik zarządzania ryzykiem, został Komitet Bazylejski do spraw Nadzoru Bankowego (*Basel Committee on Banking Supervision*), utworzony w 1974 roku. BCBS organizuje współpracę państw członkowskich w ramach kontrolowania sektora bankowego. Fundamentalną intencją jest deklaracja międzynarodowych standardów prowadzenia działalności finansowej. W 1988 roku państwa członkowskie zatwierdziły Umowę Kapitałową (*Basel Capital Accord*). Jest to dokument regulujący minimalne wymogi kapitałowe, zabezpieczające przed różnymi odmianami ryzyka finansowego i operacyjnego. Basel III obowiązuje wykorzystanie wartości zagrożonej VaR jako podstawowej miary ryzyka.¹³ Wykazane także rekomendowane metody wyznaczania VaR oraz sugerowane poziomy

¹⁰ John C. Bogle, Black Monday and Black Swans, Financial Analysts Journal, Volume 64, CFA institute, Charlottesville 2008, s. 30–40.

¹¹ Laurent L. Jacque, Global Derivative Debacles: From Theory to Malpractice, World Scientific, Singapur 2010, s. 87.

¹² <https://www.msci.com/www/research-paper/1996-riskmetrics-technical/018482266>, dostęp 04.04.2021.

¹³ Minimum capital requirements for market risk, s. 24, <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>, dostęp 04.04.2021.

ufności. W Polsce od 31 marca 2019 roku działa trzecia wersja umowy kapitałowej (*Third Basel Accord, Basel III*).

Ponadto poprawne funkcjonowanie rynku finansowego chroni Komisja Nadzoru Finansowego (KNF). Sformowała się ona w dniu 19 września 2006 roku. Do priorytetowych zobowiązań KNF należy przeprowadzenie nadzoru w zakresie sektora bankowego, rynków kapitałowego, ubezpieczeniowego i emerytalnego oraz instytucji pieniądza elektronicznego. Zawiera on również wymogi kierowania się VaR, jak to przypisują ustawy Unii Europejskiej oraz Basel III.

1.4 Wartość zagrożona jako miara ryzyka

Wyróżnia się kilka wyjaśnień wartości zagrożonej. W niniejszej pracy wartość zagrożona będzie traktowana jako maksymalna kwota, którą można stracić w wyniku inwestycji w instrument finansowy na sprecyzowanym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie ufności. Wartość zagrożona charakteryzuje się dwoma parametrami. Pierwszym z nich jest przedział czasowy, podczas którego jednostka gospodarcza jest zobowiązana do utrzymania instrumentu w niezmienionym składzie. Konwencjonalnymi przedziałami czasowymi do kalkulacji VaR są 1 dzień, 10 dni lub 1 rok. Komitet Bazylejski do spraw Nadzoru Bankowego wymaga dziesięciodniowego przedziału czasowego w odniesieniu do ryzyka rynkowego, natomiast dla ryzyka kredytowego obligatoryjny jest jednoroczny przedział. Drugim parametrem wartości zagrożonej jest poziom ufności. Opisuje on prawdopodobieństwo, że VaR nie przekroczy ustalonej maksymalnej straty. Typowo stosowanymi poziomami ufności są 5% oraz 1%.¹⁴ Wartość zagrożoną w postaci matematycznej można zapisać za pomocą wzoru:

$$VaR_{\beta} = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \beta\},$$

gdzie β oznacza przyjęty poziom ufności. VaR instrumentu na poziomie ufności jest wyznaczona jako najmniejsza wartość l taka, że prawdopodobieństwo, że strata L osiągnie l , jest nie większa niż $(1 - \beta)$. Zauważając zakres obserwowany w przedziale od $t - 1$ do t , możemy zdefiniować wartość zagrożoną jako:

¹⁴ Ibidem, s.90.

$$P(y_t \leq y_{t-1} - VaR_\beta) = 1 - \beta,$$

gdzie y_t – wartość instrumentu finansowego w momencie t . Jak było już powiedziano wcześniej, ze względów statystycznych zalecane jest przekształcenie wartości instrumentu do logarytmicznych stop zwrotów r_t . Wtedy wzór można zapisać:

$$P(r_t \leq -VaR_\beta) = 1 - \beta,$$

W związku z tym wielkość VaR_β jest $(1 - \beta)$ – kwantylem rozkładu procentowego stop zwrotów.

Wartość zagrożona ocenia ryzyko, wykorzystując różne modele statystyczne. Aczkolwiek, każda z metod opiera się na uznaniu, że historyczne dane rynkowe są głównym źródłem informacji pozwalających skonkretyzować zmiany stop zwrotów z instrumentów finansowych w przyszłości. Jedną z powszechnie realizowanych metod jest metoda wariancji – kowariancji, która została spopularyzowana przez wymieniony wcześniej RiskMetrics. W tym momencie powstaje relacja pomiędzy zmiennością stop zwrotów a wartością zagrożoną. Wartość zagrożoną dla pojedynczego instrumentu można uzyskać zgodnie ze wzorem:

$$VaR_\beta = -(\bar{r} - c\sigma)W_0$$

gdzie, \bar{r} – wartość oczekiwana stop zwrotu, σ – odchylenie standardowe stóp zwrotu, c – parametr stały zależny od poziomu ufności, W_0 – obecna wartość instrumentu. Wielkość stałej c dla poziomu ufności 95% wynosi 1,65, zaś dla 99% – 2,32. Wielkości te można otrzymać z tablic statystycznych dla wartości dystrybuanty rozkładu normalnego, gdyż c jest odpowiednio 95%- i 99%- kwantylem rozkładu normalnego. Często także dla uproszczenia przypuszcza się, że wartość oczekiwana stop zwrotu wynosi zero.

1.5 Oczekiwany niedobór

Niemniej jednak VaR cechuje się jednym bardzo ważnym mankamentem. Wartość zagrożona jest bardzo wrażliwa na kształt ogonów rozkładu strat.¹⁵ W istocie zapewnia ona jedynie najniższą granicę strat i jest nastawiona na optymizm zamiast konserwatyizmu, który powinien dominować w szacowaniu i zarządzaniu ryzykiem. Alternatywną miarą, odporną

¹⁵ Carlo Acerbi, Dirk Tasche, On the coherence of Expected Shortfall, Journal of Banking & Finance, Volume 26, Elsevier, Amsterdam 2002, s. 1494–1495.

na zbyt grube ogony rozkładu strat jest oczekiwany niedobór ES (*Expected Shortfall*). Szerokie wykorzystanie otrzymał po kryzysie 2008 roku. Oczekiwany niedobór na poziomie β to średnie zwroty z instrumentu finansowego w najgorszych $100 * \beta$ % przypadkach:

$$ES_{\beta}(r_t) = E(r_t | r_t \geq VaR_{\beta}(r_t))$$

gdzie r_t – stopy zwrotu z instrumentu finansowego, VaR_{β} – wartość zagrożona, $(1 - \beta)$ poziom ufności. Z definicji wynika, że $ES_{\beta}(r_t)$ jest warunkową wartością oczekiwaną straty, o ile strata ta przekroczy poziom $VaR_{\beta}(r_t)$. Zazwyczaj przyjmuje się do jego obliczeń 5-procentowy poziom ufności, jednakże Basel III proponuje stosować 1%.¹⁶

W następnym rozdziale zostaną omówione dynamiczne modele zmienności z rodziny GARCH, które będą z kolei stanowiły usprawiedliwienie metodologiczne praktycznej części niniejszej pracy.

¹⁶ Minimum capital requirements for market risk, s. 95, <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>, dostęp 04.04.2021.

Rozdział II: Opis metody badawczej

2.1 Zjawiska charakterystyczne dla stop zwrotów

Dla najwierniejszego odzwierciedlenia stop zwrotów kluczowe jest wykrycie ich specyficznych własności. Przy modelowaniu ekonometrycznym szeregów czasowych zakłada się, że wariancja składnika losowego jest stała w czasie oraz jego rozkład przyjmuje formę rozkładu normalnego. Jednakże po przełomowych pracach Mandelbrota¹⁷ i Famy¹⁸ wielu badaczy doszło do wniosku, że systematycznie empiryczne rozkłady szeregów finansowych nie spełniają dane założenie. Hagerman (1978) stwierdził, że rozkłady takich szeregów są leptokurtyczne.¹⁹ Oznacza to, że w przypadku stop zwrotów częściej, w porównaniu do rozkładu normalnego, występują obserwacje nietypowe.

Oprócz tego, Mandelbrot (1963) udowodnił, że szeregi czasowe zwrotów z aktywów finansowych często wykazują się zjawiskiem grupowania wariancji (*volatility clustering*). Polega ono na tym, że zmiany cen mają tendencję do gromadzenia się razem. Zatem, po znaczących zmianach zwykle następują duże zmiany, natomiast relatywnie niewielkie zmiany są poprzedzone małymi zmianami. Innymi słowy, wariancja składnika losowego nie jest stała w czasie. Ponieważ wariancja (lub odchylenie standardowe) jest regularnie zaimplantowana jako miara ryzyka, jej modelowanie i prognozowanie jest obszarem dużego zainteresowania wielu ekspertów. W każdym razie, użycie klasycznych modeli analizy szeregów czasowych, takich jak model autoregresyjny ze średnią ruchomą ARMA (*Autoregressive Moving Average*), do modelowania i prognozowania wariancji będzie charakteryzowało się zbyt dużą niepewnością w przypadku szeregów stop zwrotów z instrumentów finansowych.

Ponadto mnóstwo procesów ekonomicznych podlega efektu dźwigni (*leverage effect*), lub inaczej zmienności asymetrycznej.²⁰ Efekt ten opisuje negatywny związek między wartością aktywów a zmiennością ich wariancji. Ogólna eksplikacja jest taka, że negatywne

¹⁷ Benoit Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, The Journal of Business, Volume 36, The University of Chicago Press, Chicago 1963, s.394–397, 406–410, 415–419.

¹⁸ Eugene Fama, The behavior of stock-market prices, The Journal of Business, Volume 38, University of Chicago Press, Chicago 1965, s. 89–92.

¹⁹ Robert Hagerman, More evidence on the distribution of security returns, The Journal of Finance, Volume 33, American Finance Association, Hoboken 1978, s.1213–1221.

²⁰ Fischer Black, Studies of stock price volatility changes, The Journal of Statistics, American Statistical Association, Abingdon-on-Thames 1976, s. 177–181.

szoki wzmacniają intensywność zmienności w większym stopniu niż pozytywne szoki o jednakowej wielkości. Obecnie egzystuje niemało opracowań wychwycenia istnienia efektu dźwigni dla różnych krajów i rynków (Black, 1976²¹; Schwert, 1989²²; Braun, Nelson i Sunier, 1995²³). Powyżej wymienione zjawiska, specyficzne dla wielu szeregów zwrotów, w tym z indeksów giełdowych, w znaczny sposób utrudniły je modelowanie i prognozowanie.

2.2 Modele ARCH i GARCH

Po kilku latach rozważań teoretycznych amerykański ekonomista Robert Engle (1982) zaproponował posłużyć się modelem autoregresyjnej warunkowej heteroskedastyczności, ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) do konstruowania i prognozowania zmiennej w czasie wariancji składnika losowego.²⁴ Podstawowa postać modelu ARCH(P) wygląda następująco:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \epsilon_{t-p}^2,$$

gdzie r_t oznacza stopy zwrotów z instrumentu finansowego, μ_t jest średnią wielookresową, ϵ_t jest składnikiem losowym modelu oraz $\omega > 0$, $\alpha_p \geq 0$ dla $p \in \{1, 2, \dots, P\}$. Takie restrykcje zapewniają nieujemność wartości wariancji warunkowej σ_t^2 . Idea modelu Engle'a polegała na tym, że jeżeli kwadrat reszt z modelu ekonometrycznego jest relatywnie wysoki w bieżącym okresie t , spowoduje to zwiększenie wartości wariancji σ_{t+p}^2 w kolejnych okresach $p = 1, 2, \dots, P$. Aczkolwiek w wielu zastosowaniach praktycznych model ARCH(P) wymaga przyjęcia wysokich wartości P dążących do nieskończoności²⁵. Przyczyną tego jest długotrwałość wpływu szoków na zmienność szeregów. Do słabych stron modelu ARCH także należy fakt, że zakłada on taki sam wpływ zarówno dodatnich jak i

²¹ Black Fischer, Studies of stock price volatility changes, The Journal of Statistics, American Statistical Association, Abingdon-on-Thames 1976, s. 177–181.

²² William G. Schwert, Why does stock market volatility change over time?, Journal of Finance, Volume 44, American Finance Association, Hoboken 1989, s. 1115–1153.

²³ Alain M. Sunier, Daniel B. Nelson, Philip A. Brown, Good News, Bad News, Volatility, and Betas, Journal of Finance, Volume 50, American Finance Association, Hoboken 1995, s. 1575–1603.

²⁴ Robert Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, Econometrica, Volume 50, Econometric Society, Hoboken 1982, s. 987–999.

²⁵ Michał Rubaszek, Modelowanie polskiej gospodarki z pakietem R, Oficyna wydawnicza SGH, Warszawa 2012, s. 157.

negatywnych szoków na zmienność stop zwrotu, ponieważ specyfikacja modelu zawiera wyłącznie kwadraty reszt. Wobec tego ARCH nie uwzględnia efektu dźwigni finansowej, co wywołuje zasadniczo mniejszą precyzję modelu. Wreszcie Engle nie przeanalizował czynników, które pośrednio lub bezpośrednio oddziałują na zmienność cen i wyjaśniają wystąpienie określonych zdarzeń, a jedynie w mechaniczny sposób odwzorował wariancję warunkową, zakładając jej powtarzalność. W konsekwencji model zwyczajnie prognozuje znacznie wyższą wariancję, niż ma to miejsce w rzeczywistości.

Rozwinięcie do modelu ARCH(P) wyartykułował duński ekonomista Tim Bollerslev w 1986 roku.²⁶ Zamanifestowany przez niego uogólniony model autoregresyjnej warunkowej heteroskedastyczności, GARCH(P, Q) (*Generalized ARCH*) rozwiązał główną cechę ujemną modelu Engle'a, czyli konieczność doboru dużych wartości P do modelowania zjawiska grupowanej wariancji. Bollerslev zaproponował strukturę postaci:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^2,$$

gdzie $\omega > 0$, $\alpha_p \geq 0$ dla $p \in \{1, 2, \dots, P\}$, $\beta_q \geq 0$ dla $q \in \{1, 2, \dots, Q\}$. Takim czynem, uznana została zależność wariancji warunkowej od własnych opóźnień. Zależność pomiędzy procesami ARCH i GARCH można skonfrontować do relacji między modelem autoregresji AR(P) i modelem ARMA(P, Q). Włączanie własnych opóźnień wariancji warunkowej pozwoliło na znakomite uproszczenie istniejących dotychczas modeli poprzez redukcję liczby opóźnionych kwadratów realizacji składnika losowego.

2.3 Wybór specyfikacji modelu GARCH

Obecnie modeli klasy GARCH są najczęściej używanymi modelami do konstruowania i prognozowania zmienności stop zwrotów instrumentów finansowych. Udowodniono, że niewielkie opóźnienie jest wystarczające do modelowania wariancji zmieniającej się długookresowo.²⁷ Dlatego w praktycznych badaniach najczęściej posługują się modelem

²⁶ Tim Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, Elsevier, Amsterdam 1986, s. 307–317.

²⁷ Philip H. Franses, Dick Van Dijk, Forecasting stock market volatility using (non-linear) GARCH models, Journal of Forecasting, Volume 15, John Wiley & Sons, Hoboken 1996, s. 229–231, 234.

GARCH(1, 1). Jest to standardowa notacja, gdzie pierwsza liczba w nawiasach odnosi się do ilości opóźnień autoregresyjnych lub inaczej terminów ARCH występujących w równaniu, podczas gdy druga liczba dotyczy ilości określonych średnich ruchomych, które są często nazywane liczbą terminów GARCH. Matematycznie możemy opisać to jako:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

gdzie $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$. Rzadziej są stosowane modele GARCH(2,1) oraz GARCH(1,2). Formalnie dobór opóźnień najczęściej jest wykonany za pomocą kryteriów informacyjnych, takich jak HQIC (Hannan i Quinn, 1979), AIC (Akaike, 1974) oraz BIC (Schwarz, 1978).²⁸ Niższe wartości kryteriów oznaczają lepszy wybór specyfikacji modelu.

2.4 Rozszerzenia modelu GARCH

Mimo że GARCH wychwytuje klastry zmienności i może usunąć nadmierną akumulację obserwacji wokół średniej, hamując zjawisko leptokurtozy, model nie ujawnia skośności rozkładu składnika losowego. Prosty model GARCH zakłada, że reakcja zmienności na jak na wstrząsy dodatnie, tak i ujemne jest symetryczna. To znaczy, że efektu dźwigni, jak i w przypadku modelu ARCH jest lekceważony. W związku z tym można oczekiwać, że estymacje i wariancje błędów prognozy z modelu GARCH będą obciążone. Innym problemem napotkanym podczas korzystania z modeli GARCH jest to, że nie zawsze w pełni obejmuje on zjawisko grubych ogonów, właściwe dla szeregów finansowych o wysokiej częstotliwości. Poza tym, gdy parametry $\alpha_p + \beta_q = 1$, wartość wariancji bezwarunkowej nie jest zdefiniowana.²⁹ Nie mniej ważnym mankamentem jest to, że ograniczenia nieujemności parametrów α_p, β_q mogą być naruszone ze względu na fakt, że zmienność nie jest stała w czasie i może stwarzać trudności w szacowaniu modelu GARCH.

Zintegrowany GARCH (*Integrated GARCH*) rozważony przez Engle'a i Bollerslev'a (1986) został wprowadzony jako rozwiązanie problemu nieokreśloności wartości wariancji warunkowej, gdy parametry $\alpha_p + \beta_q = 1$.³⁰ Model IGARCH jest modelem GARCH z pierwiastkiem jednostkowym. Podobnie jak w przypadku modeli ARIMA, kluczową cechą

²⁸ Michał Rubaszek, s.163.

²⁹ Choo Wei Chong, Muhammad Idrees Ahmad Mat, Yusoff Abdullah, Journal of Forecasting. Volume 18, Issue 5, Journal of Forecasting, Hoboken 1999, s. 335.

³⁰ Robert Engle, Tim Bollerslev, Modelling the Persistence of Conditional Variance, Econometric Reviews, Volume 5, 1986, s.26–31.

modeli IGARCH jest to, że wpływ poprzednich szoków kwadratowych jest trwały. Możemy odzwierciedlić model jako:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{p=2}^P (\epsilon_{t-p}^2 - \epsilon_{t-1}^2) + \sum_{q=1}^Q \beta_q (\sigma_{t-q}^2 - \epsilon_{t-1}^2),$$

Aby wyjaśnić problem figurowania efektu dźwigni, zaproponowano wiele nieliniowych rozszerzeń GARCH, jednym z których jest model wykładniczy EGARCH(P, Q) (*Exponential GARCH*) autorstwa Nelsona.³¹ Uwzględnia on niesymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych realizacji składnika losowego na wariancję poprzez nienakładania restrykcji co do nieujemności parametrów α_p i β_q . Konstrukcja modelu jest postaci:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p \frac{|\epsilon_{t-p}| + \gamma_p \epsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} + \sum_{q=1}^Q \beta_q \ln(\sigma_{t-q}^2),$$

gdzie atrybut γ_p określa stopień niesymetryczności rozkładu składnika losowego. Przy $\alpha_p < 0$ efekt dźwigni następuje dla dodatnich wartości atrybutu γ_p , natomiast przy $\alpha_p > 0$ efekt dźwigni ma miejsce dla ujemnych wartości γ_p .

Kolejnym modelem rozpatrującym skośność rozkładu stop zwrotów został model progowy GLR-GARCH(P, Q).³² Domniemaniem tego modelu jest to, że oddziaływanie wcześniejszych reszt na wariancję warunkową zależy od znaku składnika losowego. Konstrukcja matematyczna GLR-GARCH wygląda w ten sposób:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^P (\alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + \gamma_p \epsilon_{t-p}^2 I(\epsilon_{t-p} < 0)) + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^2,$$

³¹ Daniel Nelson, Conditional heteroskedasticity in asset pricing: A new approach, *Econometrica*, Volume 59, Econometric Society, Hoboken 1991, s. 350–354.

³² Lawrence R. Glosten, Ravi Jagannathan, David E. Runkle, On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, Volume 48, American Finance Association, Hoboken 1993, s.1781–1789, 1799.

gdzie $\omega > 0$, $\alpha_p \geq 0$, $\beta_q \geq 0$, $\gamma_p \geq 0$ dla $p \in \{1, 2, \dots, P\}$, $q \in \{1, 2, \dots, Q\}$ oraz:

$$I(\epsilon_{t-p} < 0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \epsilon_t < 0 \\ 0 & \text{dla } \epsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

Na istnienie efektu dźwigni finansowej wskazuje parametr γ_p . Przy wartościach $\gamma_p \gg 0$ rozkład reszt z modelu będzie się charakteryzował zmiennością asymetrycznej.

Model asymetryczny APARCH(P, Q) (*Asymmetric Power ARCH*) przedstawiony przez Dinga, Grangera i Engle'a jest trzecim najpopularniejszym przykładem modelu który bierze pod uwagę efekt zmienności asymetrycznej.³³ Model można zaprezentować następująco:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{p=1}^P \alpha_p (|\epsilon_{t-p}| + \gamma_p \epsilon_{t-p})^\delta + \sum_{q=1}^Q \beta_q \sigma_{t-q}^\delta,$$

gdzie $\delta > 0$ i parametr efektu dźwigni $\gamma_p \in [-1; 1]$. Dodatnie wartości parametru oznaczają, że negatywne wydarzenia mają silniejszy wpływ na zmienność stóp zwrotu, niż wydarzenia pozytywne.

Zupełnie inne podejście do nienormalności rozkładu reszt zaproponował Baillie i Bollerslev.³⁴ Zamiast tego, żeby zakładać normalność rozkładu składnika losowego, możliwe jest przyjęcie założenia, że składnik losowy ma rozkład t-Studenta lub rozkład GED (*general error distribution*). Okazało się, że rozkład t-Studenta dobrze opisuje zjawisko grubych ogonów, czyli częste wystąpienie obserwacji nietypowych, zaś rozkład GED jest dopasowany do deskrypcji zachowania reszt wokół wartości oczekiwanej.³⁵ W zastosowaniach praktycznych jednak zjawisko grubych ogonów występuje znacznie częściej, dlatego rozkład t-Studenta jest zdecydowanie szerzej wykorzystany w stosunku do GED.

³³ Zhuanhin Ding, Clive W. J. Granger, Robert Engle, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, Volume 1, Elsevier, Amsterdam 1993, s. 99–102.

³⁴ Richard T. Baillie, Bollerslev, The message in daily exchange rates: A conditional-variance tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, Volume 7, American Statistical Association, Boston 1989, s.297–305.

³⁵ Angelidis Timotheos, Alexandros Benos, Degiannakis Stavros, The use of GARCH models in VaR estimation, University of Peloponnese, Tripoli 2004, s.18, 22.

2.5 Dowody empiryczne

Na przestrzeni lat przeprowadzono mnóstwo badań na temat zdolności predykccyjnej modeli rodziny GARCH. Pagan i Schwert (1990) rozpoznawali efektywność prognozowania miesięcznych zwrotów w Stanach Zjednoczonych za pomocą modeli GARCH, EGARCH, MRS-GARCH (*Markov-Switching GARCH*) i trzech modeli nieparametrycznych. Okazało się, że modele GARCH i EGARCH dają umiarkowane według precyzyjności wyniki, gdy inne modele cechują się zbyt słabą dokładnością. Franses i Dijk (1996) porównywali modele GARCH, QGARCH (*Quadratic GARCH*) i GJR-GARCH do przewidywania tygodniowej zmienności europejskich indeksów giełdowych. Odkryli, że akuratność prognozy nieliniowych modeli GARCH nie przewyższa precyzji prostego modelu GARCH, jeżeli próba zawiera obserwacje ekstremalne. Brailsford i Faff (1996) stwierdzają, że modele GJR-GARCH i GARCH są dominujące w przypadku przewidywania zmienności miesięcznych indeksów giełdowych w Australii. Hansen i Lunde (2005) kolacjonują kilka modeli, aby wywnioskować, czy ewolucja modeli zmienności i przejście do nieliniowych modeli GARCH doprowadziła do poprawniejszych prognoz. Udowodniają, że istnieją niezbite dowody na to, że model GARCH (1,1) nie jest lepszy od innych modeli w zakresie dziennego zwrotu indeksów giełdowych w Stanach Zjednoczonych. Chong (1999) omawia wyniki zestawienia modeli GARCH z wykorzystaniem pięciu dziennych obserwowanych indeksów giełdowych na giełdzie w Kuala Lumpur. Okazało się, że model EGARCH jest przewyborny spośród innych modyfikacji modelu GARCH, zaś IGARCH został najgorszym modelem do prognozowania zmienności. Awartani i Corradi (2005) mieli podobne ustalenia dla indeksu S&P 500 skorygowanego o dywidendy zarówno dla bliskiego jak i dłuższego horyzontu czasu.

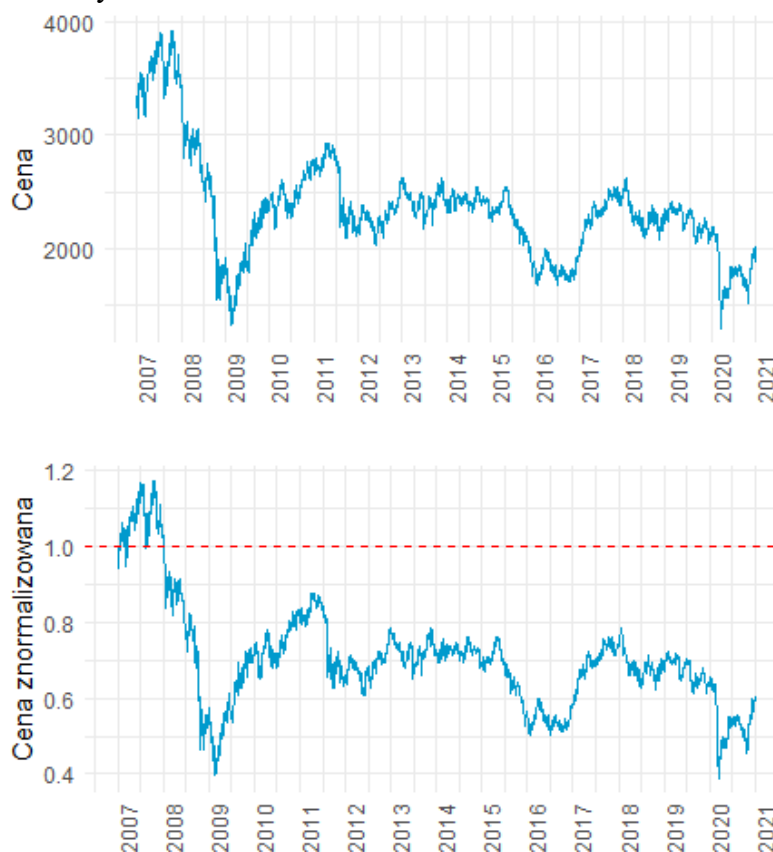
W następnej części pracy będą przeciwstawione prosty model GARCH, zintegrowany model GARCH, wykładniczy model EGARCH, model Glosten-Jagannathan-Runkle (GJR-GARCH), i asymetryczny model GARCH (APARCH) z rozkładem składnika losowego podobnego do rozkładu normalnego oraz t-Studenta. Następnie najlepszy z tych modeli zostanie przeciwstawiony symulacji historycznej. Wykorzystane one będą do modelowania i prognozowania zmienności stop zwrotu z indeksu giełdowego WIG20 i dalszego obliczenia wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru na 5- i 1-procentowym poziomie ufności. Poprawność prognozy będzie oceniona za pomocą odpowiednich testów na nieobciążoność.

Rozdział III: Wyniki przeprowadzonych analiz

3.1 Analiza danych

Niniejsza praca koncentruje się na prognozowaniu zmienności oraz obliczeniu wartości zagrożonej indeksu giełdowego WIG20. Dane zostały pozyskane z serwisu finansowego Stooq.pl.³⁶ Analizowany okres obejmuje niepełne 14 lat od 01 lutego 2007 do 30 grudnia 2020 roku, łącznie 3500 obserwacji. Przed usprawiedliwieniem implementacji wybranych modeli ze zbioru GARCH należy sprawdzić, czy WIG20 charakteryzuje się wymienionymi zjawiskami właściwymi dla szeregów finansowych.

Rysunek 3.1. Cena zwykła i cena znormalizowana indeksu WIG20



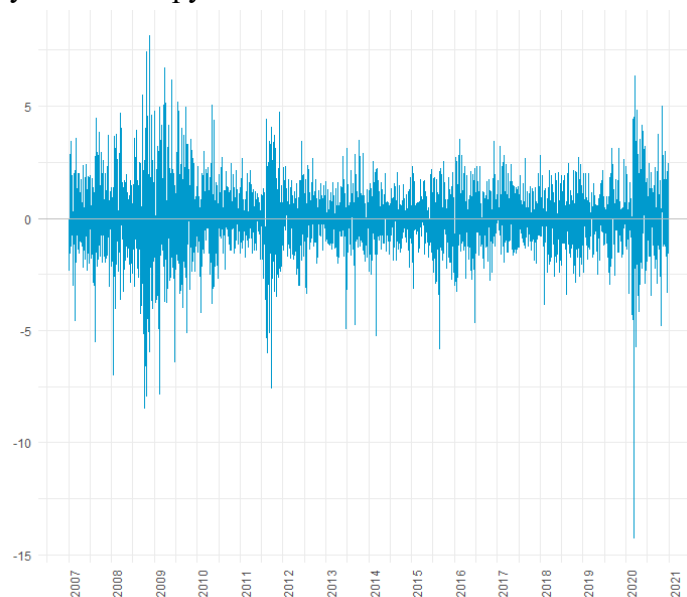
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.1 egzemplifikuje ceny indeksu WIG20 na wskazanym horyzoncie czasowym wyrażone w naturalnej bądź w normalizowanej postaci. Początkowa cena wynosiła 3347,75

³⁶ <https://stooq.pl/q/d/?s=wig20&c=0&d1=20070101&d2=20210101>, dostęp 17.04.2021

pkt., natomiast na koniec okresu jej wartość spadła do 1983,98 pkt. (o 40,7%). Wykres wskazuje, że WIG20 wzmacniał się tylko w ciągu 2007 roku. Zaczynając od 08.01.2008 wartość indeksu nigdy nie przekraczała już pierwotny poziom. Co więcej, ten dzień był powstaniem recesji która trwała się do II kwartału 2009 roku. Miało to bezpośredni związek z kryzysem finansowym 2007-2009 roku.³⁷ Dalej nastąpił długi okres wzrostu, dopóki w I kwartale 2011 roku ceny gwałtownie się nie załamały. W ciągu kilka dni indeks stracił 15% swojej wartości. Bezpośrednio od tej daty, ceny podlegały permanentnym wahaniom do początku 2015, kiedy zdarzyło się trzecie niekontrolowane osłabienie. Na początek 2017 roku wartość WIG20 powróciła do stanu 2011, jednak pandemia COVID-19 i nadchodzenie pierwszej kwarantanny w Polsce powodziły kolejny wstrząs, doprowadzając do ugruntowania najmniejszej ceny indeksu za cały rozważany okres, która stanowiła 1305,73 pkt. Obecnie występuje oczywisty pozytywny trend, co może oznaczać nową hossę na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Takie znaczne fluktuacji cen i już czwarty przypadek rwącego je skarlówacenia implikuje skrupulatnego podejścia do prognozowania wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru.

Rysunek 3.2. Logarytmiczne stopy zwrotów indeksu WIG20



Źródło: opracowanie własne

³⁷ Eliza Buszkowska, Piotr Płuciennik, Wpływ kryzysu subprime na determinanty wariacji warunkowej indeksu WIG20, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Poznań 2014, s. 3-5.

Rysunek 3.2 unaocznia stopy zwrotów w postaci logarytmicznej za okres badawczy 01.03.2007 – 30.12.2020, dając w sumie 3499 obserwacji. Wykres wyjaśnia, że najmniejsza stopa zwrotu ustaliła się na poziomie około -14.2% w dniu 12.03.2020. Widać także, że straty są zwyczajnie nieco większe niż zyski, co może sygnalizować anomalną skośność rozkładu stop zwrotów. Wyniki wstępnej analizy graficznej w pełni zatwierdzają obliczenia statystyczne. Tabela 3.1 zawiera dane dotyczące rozkładu stop zwrotów.

Tabela 3.1 Statystyki opisowe rozkładu stop zwrotów

Nazwa charakterystyki	Wartość
Przeciętna liczba dni sesyjnych w roku	249,8796713
Średnia	-3,7362942
Odchylenie standardowe	23,2383550
Wartość minimalna	-14,2455786
Wartość maksymalna	8,1548386
Skośność	-0,4975732
Kurtoza	8,7725868
Statystyka testu Jarque-Bera	5002,5604215

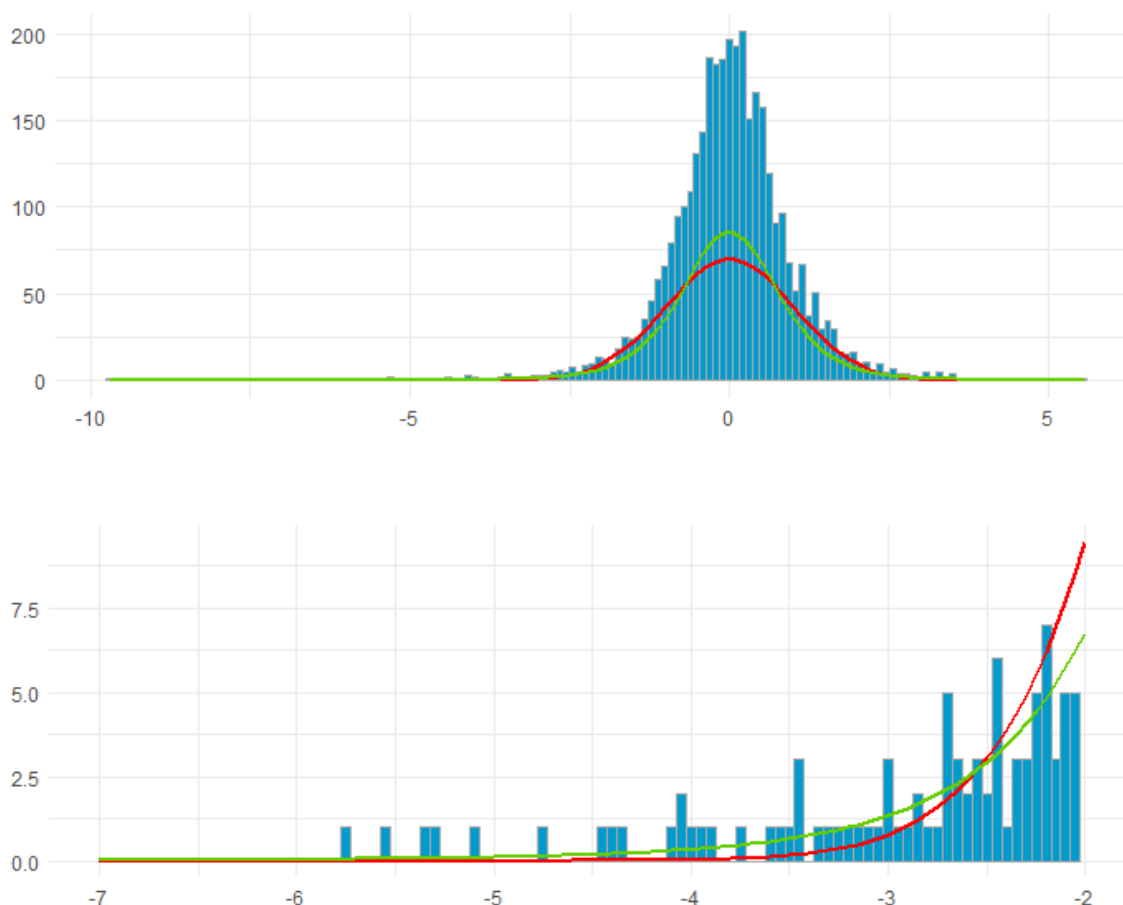
Źródło: opracowanie własne

Dane odzwierciedlają, że odchylenie standardowe jest dość wysokie w porównaniu do wartości oczekiwanej. Oprócz tego oszacowana kurtoza jest znacznie wyższa od 3, co konotuje większe, w stosunku do rozkładu normalnego, skupienie wartości wokół średniej. Ujemna skośność skutkuje także częstsze istnienie strat, niż zysków w rozkładzie stop zwrotów. Te wnioski są podbudowane testem Jarque-Bera, który sprawdza, czy informacje z próby pasują do rozkładu normalnego.³⁸ Statystyka testowa dla hipotezy alternatywnej stanowi 5002,56, zaś statystyka testowa dla hipotezy zerowej na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ jest równa 77,929. Hipoteza zerowa mówiąca o normalności rozkładu stop zwrotów musi być odrzucona. W konsekwencji można z pewnością stwierdzić, że stopy zwrotów indeksu WIG20 charakteryzują się leptokurtycznością bądź asymetrycznością.

³⁸ Carlos M. Jarque, Anil K. Bera, Efficient test for normality, homoscedasticity and serial independence of residuals. *Economic Letters*, Volume 6, Elsevier, Amsterdam 1980, s. 255–259.

Świadczenie na temat nienormalności rozkładu stop zwrotów można znaleźć, patrząc również na jego histogram standaryzowany, prezentowany na rysunku 3.3.

Rysunek 3.3. Histogram standaryzowanych stop zwrotów

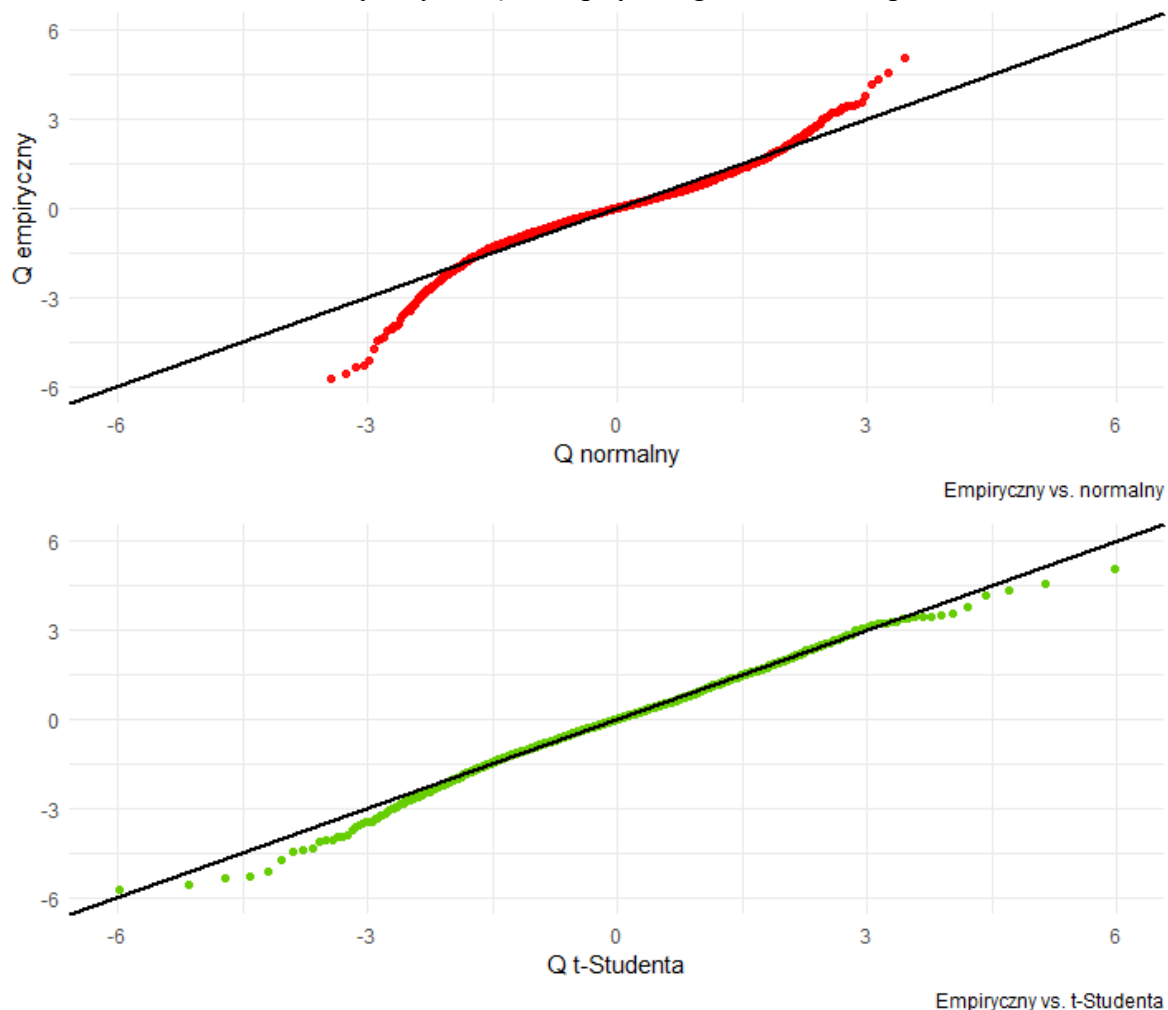


Źródło: opracowanie własne

Po pierwsze, rozkład stop zwrotów znacznie się różni zarówno od rozkładu normalnego, którego gęstość jest ograniczona czerwoną linią, jak i od rozkładu t-Studenta, zaznaczonego na zielono. Po drugie, rozkład stop zwrotów jest bardziej rozciągnięty do góry, niż w przypadku rozkładu normalnego i t-Studenta. W końcu ujemne stopy zwrotu mają tendencję do grupowania wokół średniej znacznie większą, niż wartości dodatnie. Niemniej jednak głównym wnioskiem jest to, że w rozkładzie stop zwrotów z indeksu WIG20 znacznie częściej pojawiają się skrajne obserwacje nietypowe. Po skalowaniu histogramu można zauważyć, że ogony są grubsze, niż gdyby to było dla rozkładu normalnego i t-Studenta.

Więcej o grubych ogonach można wyeksplorować za pomocą wykresów kwantyl-kwantyl, QQ (*Quantile-Quantile plot*), zademonstrowanych na rysunku 3.4.

Rysunek 3.4. Porównanie teoretycznych bądź empirycznego rozkładu stop zwrotów



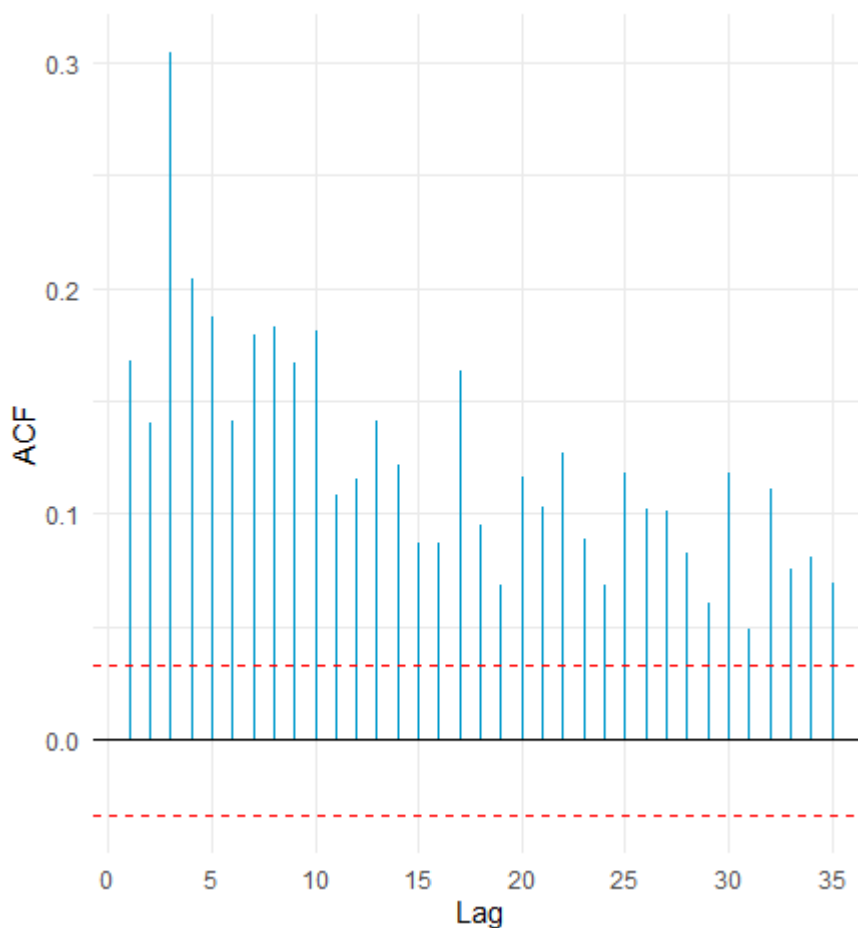
Źródło: opracowanie własne

Jeżeliby rozkład zbliżał się do rozkładu normalnego, obserwacje kształtowałyby się wokół linii trendu. W przypadku rozkładu normalnego założenie to jest jawne naruszone. Z drugiej strony, rozkład t-Studenta w lepszym stopniu opisuje rozkład stop zwrotów, o czym świadczy kumulacja obserwacji wzdłuż diagonalni. Jednakże nawet w tym przypadku zjawisko grubych ogonów jest nadal zbyt odczuwalne ze względu na niedopasowanie obserwacji odstawiających.

Następnie badaniom podległ efekt grupowania wariancji. W tym celu zbudowany został rysunek 3.5, czyli wykres funkcji autokorelacji kwadratu stop zwrotów, ACF

(*Autocorrelation Function*). Wykorzystanie kwadratów pomoże pozbyć się znaku przy stopach zwrotu, co z kolei posłuży do wyznaczenia związku wartości zwrotów.

Rysunek 3.5. Funkcja autokorelacji kwadratu stop zwrotów



Źródło: opracowanie własne

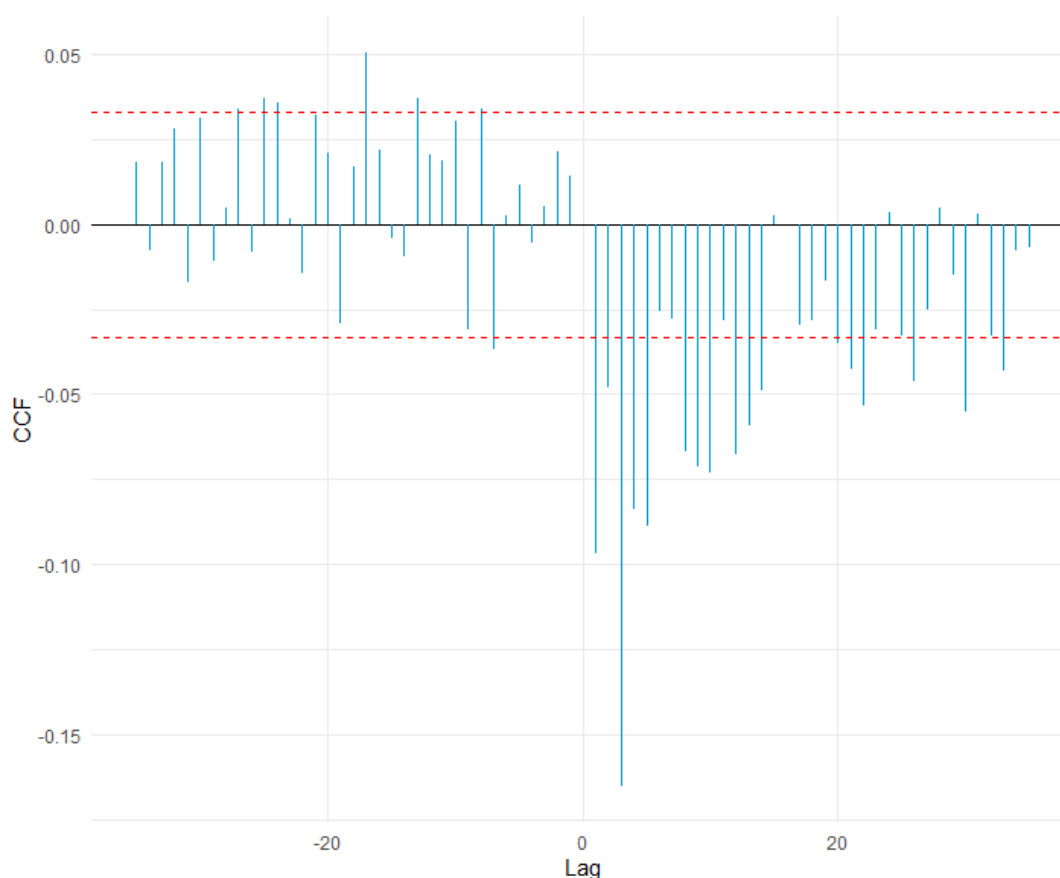
Wysokość słupków kolumnowych wskazuje, że dzisiejsze kwadraty stop zwrotów są mocno skorelowane ze wszystkimi kwadratami stop zwrotów z poprzednich dni. Co więcej, na istnienie efektu grupowania wariancji wskazuje test Box'a-Ljung'a, zaprojektowany do wykrycia autokorelacji szeregów czasowych.³⁹ W teraźniejszym przypadku rozpatrywane są jednocześnie 20 opóźnień. Statystyka testu, wynosząca 1726,2 (znacznie większa niż statystyka chi-kwadrat dla poziomu istotności $\alpha = 0.05$ równa 77,929), wskazuje na

³⁹ Greta M. Ljung, George E. P. Box, On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika*, Volume 65, Oxford University Press, Oxford 1978, s. 297–303.

konieczność odrzucenia hipotezy zerowej, mówiącej o niezależności kwadratu stop zwrotu dzisiejszych od poprzednich.

Ostatni został sprawdzony efekt dźwigni finansowej. Rysunek 3.6 ilustruje wykres funkcji korelacji krzyżowej kwadratu stop zwrotów i stop zwrotów, CCF (*Cross Correlation Function*). Zaczynając od pierwszego opóźnienia, związek ten jest ujemny. Oznacza to, że wariancja warunkowa zależy od znaku przeszłych zwrotów, co powoduje asymetryczność wpływu negatywnych i pozytywnych szoków.

Rysunek 3.6. Funkcja korelacji krzyżowej kwadratu stop zwrotów i stop zwrotów



Źródło: opracowanie własne

Wyjaśnione zjawiska (leptokurtyczność, asymptotyczność, grube ogony oraz grupowanie wariancji) udowadniają stosowanie modeli klasy GARCH do prognozowania zmienności i obliczenia wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru indeksu WIG20. Natomiast efekt dźwigni finansowej, występujący w rozkładzie wymaga weryfikowania, czy

takie rozszerzenia GARCH jak EGARCH, GJR-GARCH oraz APARCH będą pokazywały lepsze rezultaty na istniejących danych.

3.2 Wybór modelu

Pierwszym krokiem do definiowania najlepszego modelu będzie definiowanie rzędu opóźnień wariancji warunkowej i własnych opóźnień składnika losowego oraz selekcjonowanie rozkładu stop zwrotów. Wybór specyfikacji będzie dokonywany na przykładzie klasycznego modelu GARCH(P, Q). Wyniki porównań będą w tym samym stopniu dotyczyły rozważonych dalej w tym rozdziale modyfikacji modelu GARCH. Decyzja będzie podejmowana zgodnie z kryteriami informacyjnymi Akaike'a (AIC), Schwarz'a (BIC), oraz Hannan'a i Quinn'a (HQIC). Poniższa tabela zawiera wartości AIC, BIC i HQIC dla czterech rozkładów (normalnego, t-Studenta oraz ich skośnych wersji) dla 20 kombinacji opóźnień (P, Q).

Tabela 3.2. Kryterium informacyjne dla poszczególnych rozkładów i opóźnień

P,Q	Rozkład normalny			Normalny skośny			t-Studenta			t-Studenta skośny		
	AIC	BIC	HQIC	AIC	BIC	HQIC	AIC	BIC	HQIC	AIC	BIC	HQIC
1, 0	3,543	3,548	3,545	3,543	3,550	3,545	3,433	3,440	3,436	3,434	3,443	3,437
1, 1	3,340	3,347	3,342	3,336	3,345	3,340	3,310	3,319	3,313	3,309	3,320	3,313
1, 2	3,340	3,349	3,344	3,337	3,348	3,341	3,310	3,321	3,314	3,310	3,322	3,314
1, 3	3,341	3,352	3,345	3,338	3,350	3,342	3,311	3,323	3,315	3,311	3,325	3,315
1, 4	3,342	3,354	3,346	3,338	3,352	3,343	3,312	3,326	3,317	3,311	3,327	3,317
2, 0	3,500	3,507	3,502	3,499	3,508	3,502	3,406	3,415	3,409	3,407	3,417	3,410
2, 1	3,340	3,349	3,343	3,337	3,347	3,340	3,310	3,320	3,313	3,309	3,321	3,313
2, 2	3,341	3,351	3,345	3,337	3,350	3,342	3,310	3,323	3,315	3,310	3,324	3,315
2, 3	3,341	3,354	3,346	3,338	3,352	3,343	3,311	3,325	3,316	3,310	3,326	3,316
2, 4	3,342	3,356	3,347	3,338	3,354	3,344	3,311	3,327	3,317	3,311	3,328	3,317
3, 0	3,447	3,455	3,450	3,446	3,456	3,449	3,383	3,393	3,386	3,383	3,395	3,387
3, 1	3,339	3,350	3,343	3,336	3,348	3,340	3,310	3,332	3,314	3,309	3,323	3,314
3, 2	3,340	3,352	3,344	3,336	3,351	3,342	3,310	3,324	3,315	3,310	3,326	3,315
3, 3	3,340	3,354	3,345	3,336	3,352	3,342	3,311	3,326	3,316	3,310	3,328	3,316
3, 4	3,340	3,356	3,346	3,337	3,355	3,343	3,311	3,329	3,317	3,311	3,330	3,317
4, 0	3,406	3,417	3,410	3,405	3,417	3,409	3,359	3,371	3,363	3,359	3,373	3,364
4, 1	3,340	3,352	3,344	3,337	3,351	3,342	3,310	3,324	3,315	3,310	3,326	3,315
4, 2	3,340	3,354	3,345	3,336	3,352	3,342	3,311	3,327	3,316	3,309	3,327	3,316
4, 3	3,340	3,356	3,345	3,336	3,354	3,343	3,311	3,328	3,317	3,310	3,329	3,317
4, 4	3,340	3,357	3,346	3,336	3,356	3,343	3,311	3,330	3,318	3,310	3,331	3,317
min	3,339	3,347	3,342	3,336	3,345	3,340	3,310	3,319	3,313	3,309	3,320	3,313

Źródło: opracowanie własne

Pierwszym spostrzeżeniem jest to, że prawie wszystkie kryterium dla czterech rozkładów przyjmują swoje najmniejsze wartości dla kombinacji opóźnień (P, Q) = (1, 1). Prowokuje to, że przy modelowaniu wariancji warunkowej zostaną uwzględnione jej wartość oraz

wartość składnika losowego w dni wczorajszym. Co więcej, rozkłady t-Studenta mają znacznie mniejsze wartości kryterium w analogii do rozkładów normalnych. Odpowiada to uzyskaniom z wykresów kwantowych. Jedyny problem, który powstaje na tym etapie, jest pytanie co do konieczności liczenia się ze skośnością rozkładu t-Studenta. Wartości kryterium HQIC wskazują na równowartość obu metod. Niemniej jednak kryterium BIC ma większe znaczenie w stosunku do AIC ze względu na swoją restrykcyjność. W ten sposób najlepszą specyfikacją modeli z rodziny GARCH będzie model, który zakłada, że stopy zwrotów mogą być opisane za pomocą rozkładu t-Studenta, oraz że wariancja składnika losowego zależy od jej wczorajszego opóźnienia oraz wczorajszego opóźnienia reszt z modelu.

Ponieważ podczas analizy graficznej zauważony został efekt dźwigni finansowej, umożliwia to zestawienie kilka modyfikacji GARCH, biorących pod uwagę asymetrię reakcji na szoki. Ponadto wliczany został także model IGARCH w celu pozbawiania się możliwej problemy nieokreśloności wartości wariancji warunkowej. Głównym czynnikiem wyboru będą wspomniane wcześniej kryteria informacyjne.

Tabela 3.3. Kryterium informacyjne dla poszczególnych rozszerzeń modelu GARCH

	GARCH(1, 1)	IGARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	APARCH(1, 1)
AIC	3,310	3,351	3,293	3,296	3,294
BIC	3,319	3,351	3,304	3,307	3,306
HQIC	3,313	3,351	3,297	3,300	3,299

Źródło: opracowanie własne

Zarówno kryterium AIC, BIC jak i HQIC wskazują na to, że najlepszym modelem jest wykładniczy model EGARCH(1, 1). Ostateczna specyfikacja modelu z dostosowanymi wartościami paramentów wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
 r_t &= -0,017719590 + \epsilon_t \\
 \ln(\sigma_t^2) &= 0,005356395 - 0,077633244 * \frac{|\epsilon_{t-1}| + 0,106142759 * \epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \\
 &\quad + 0,988394354 * \ln(\sigma_{t-1}^2) \leftrightarrow \\
 \ln(\sigma_t^2) &= 0,005356395 - 0,0858734507 * \frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + 0,988394354 * \ln(\sigma_{t-1}^2)
 \end{aligned}$$

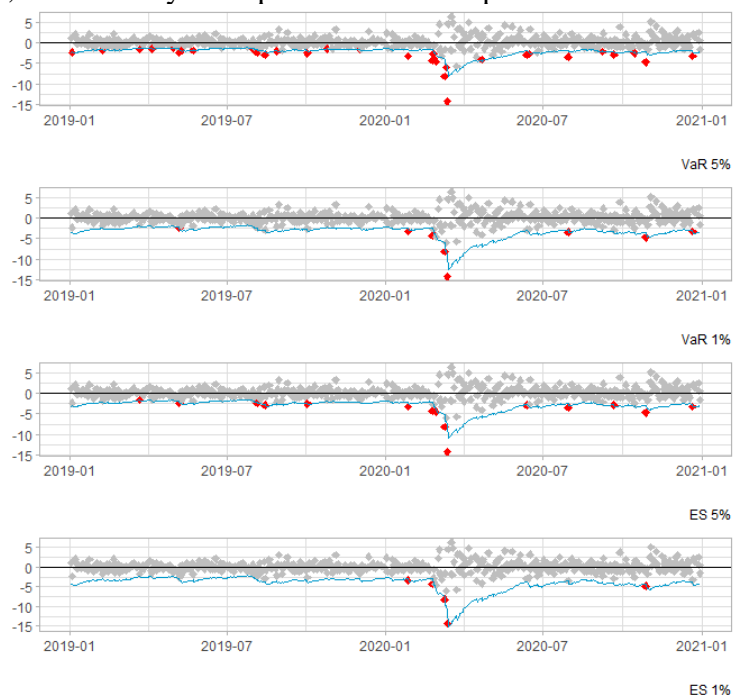
Z tego można wydedukować, że średnia stopa zwrotu z indeksu WIG20 za okres badawczy wynosiła koło -0.01. Ujemny współczynnik α_1 i dodatni współczynnik γ_1 aprobuje obecność efektu dźwigni.

3.3 Backtesting

Kolejna część pracy dotyczy ewaluacji nieobciążoności wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru dla modelu EGARCH(1, 1) oraz porównywanie tych wyników ze zwykłą symulacją historyczną. Nieobciążoność jest rozumiana jako zgodność liczby przekroczeń VaR i ES z założonym poziomem istotności oraz niezależność przekroczeń w czasie, czyli nie istnienia grupowań błędnych prognoz. Wartości VaR i ES będą wygenerowane za pomocą schematu jednodniowej prognozy kroczącej. Okres prognozy *ex-post* zawiera dwa ostatnie lata od 02.01.2019 do 30.12.2020 (łącznie 500 obserwacji). Symulacja historyczna zakłada normalność rozkładu stop zwrotów oraz stałą wariancję wyliczoną na podstawie poprzednich 3000 przykładów. Liczba przekroczeń powinna odpowiadać poziomowi istotności – w szczególności, dla poziomu ufności 0,05 i 0,01, oczekiwana liczba przekroczeń stanowi 25 i 5 zdarzeń odpowiednio. Graficznie dni, kiedy stopy zwrotów przekraczały poziom VaR i ES przedstawia rysunki 3.7 oraz 3.8.

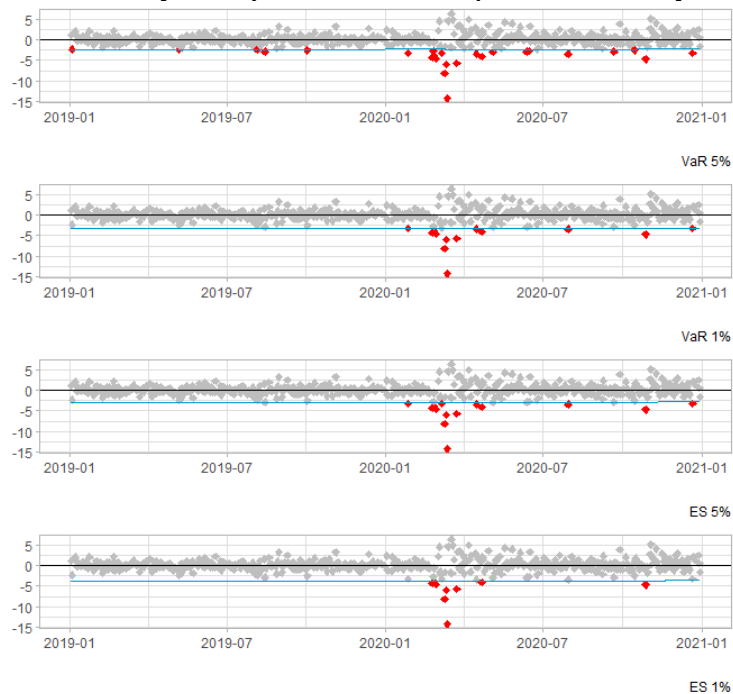
Czerwone romby określają incydenty, kiedy stopy zwrotów przekroczyły poziom VaR i ES, natomiast same wartości VaR i ES są zaznaczone niebieskimi liniami. Dla modelu EGARCH(1, 1) wykres świadczy o tym, że poziom ufności równy 1% daje znacznie lepsze wyniki, mianowicie w przypadku oczekiwanego niedoboru, gdy liczba przekroczeń teoretycznych (5) równia się liczbie przekroczeń rzeczywistych. Oznacza to, że ES na poziomie ufności $\alpha = 0.01$ w pełni oszacował ryzyko występowania nadzwyczajnych strat. Co więcej, ze względu na ilość czerwonych rombów oczywistym wydaje się wniosek, że model EGARCH(1, 1) w lepszym stopniu prognozuje rzeczywiste straty. Jednakże patrząc jedynie graficznie, nie jest możliwe łatwe dokonywanie oceny co do sprawności prognozowania oczekiwanego niedoboru na poziomie $\alpha = 0.05$ oraz wartości zagrożonej dla obu poziomów. W tym celu zastosowane będą testy nieobciążoności miar ryzyka.

Rysunek 3.7. VaR, ES a rzeczywiste przekroczenia stop zwrotów dla modelu EGARCH



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3.8. VaR, ES a rzeczywiste przekroczenia stop zwrotów dla symulacji historycznej



Źródło: opracowanie własne

Pierwszym takim testem jest test bezwarunkowego pokrycia Kupca, który sprawdza, czy różnica pomiędzy rzeczywistymi a oczekiwanymi przekroczeniami jest statystycznie istotna.⁴⁰ Poniższa tabela zawiera obliczenia tego testu.

Tabela 3.4. Test Kupca dla wartości zagrożonej na 5- i 1-procentowym poziomie ufności

Model	EGARCH(1, 1)		Symulacja historyczna	
	5%	1%	5%	1%
Poziom ufności	5%	1%	5%	1%
Oczekiwane przekroczenia	25	5	25	5
Rzeczywiste przekroczenia	32	9	25	13
Statystyka testu	1,903	2,613	0	8.973
Wartość krytyczna	3,841	3,841	3,841	3,841
Wartość p	0,168	0,106	1	0.002

Źródło: opracowanie własne

Jak pokazuje test Kupca, różnica pomiędzy teoretycznymi a praktycznymi przekroczeniami dla obu wartości VaR dla modelu EGARCH(1, 1) nie jest duża na poziomie istotności 5% ze względu na zbyt niskie statystyki testowe. Oprócz tego, okazało się, że symulacja historyczna posiada lepsze prognozy wartości zagrożonej dla poziomu ufności = 5%. Jednakże, ponieważ wyniki testów wskazują na odrzucenia hipotezy zerowej o statystycznej nieistotności różnic wartości teoretycznych a praktycznych dla wartości zagrożonej $Var_{1\%}$ dla symulacji historycznej, z czego możemy wywnioskować, że EGARCH(1, 1) jest modelem preferowanym.

Tabela 3.5. Test Christophersena dla wartości zagrożonej na 5- i 1-% poziomie ufności

Model	EGARCH(1, 1)		Symulacja historyczna	
	5%	1%	5%	1%
Poziom ufności	5%	1%	5%	1%
Statystyka testu	3,614	2,943	7,629	13,216
Wartość krytyczna	5,991	5,991	5,991	5,991
Wartość p	0,164	0,23	0,02	0,001

⁴⁰ Paul H. Kupiec, Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, The Journal of Derivatives, Volume 3, Institutional Investor Systems, Nowy Jork 1995, s. 73–84.

Źródło: opracowanie własne

Rozszerzeniem testu Kupca jest test Christophersena, który oprócz istotności różnic przekroczeń bada niezależność uzyskanych błędnych prognoz w czasie.⁴¹ Jak i w przypadku testu Kupca, dla modelu EGARCH(1, 1) nie istnieje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, mówiącej o nieistotności różnic przekroczeń oraz je niezależności w czasie ze względu na to, że wartość krytyczna testu jest większa niż statystyka hipotezy alternatywnej. W przypadku symulacji historycznej wyniki świadczą o odrzuceniu hipotezy zerowej dla obu poziomów wartości zagrożonej. Podsumowując, oba testy wskazują na to, że uzyskane za pomocą schematu prognozy kroczącej wartości VaR dla modelu EGARCH(1, 1) są nieobciążone i wiarygodne, a więc model może być wykorzystany do obliczenia przyszłych wartości zagrożonych.

Tabela 3.6. McNeil’a i Frey’a dla oczekiwanego niedoboru na 5- i 1-% poziomie ufności

Model	EGARCH(1, 1)		Symulacja historyczna	
	5%	1%	5%	1%
Poziom ufności	5%	1%	5%	1%
Oczekiwane przekroczenia	25	5	25	5
Rzeczywiste przekroczenia	32	5	25	13
Wartość p	0,089	0,081	0,010	0,027

Źródło: opracowanie własne

Kolejnym etapem jest estymacja oczekiwanego niedoboru. W tym celu przeprowadzony został test McNeil’a i Frey’a z hipotezą zerowej zakładającej, że nadwyżka oczekiwanego niedoboru jest niezależna i identycznie dystrybuowana i ma zerową średnią.⁴² Wartość p testu wyniosła 0,089 dla $ES_{5\%}$ oraz 0,081 dla $ES_{1\%}$ w przypadku EGARCH(1, 1). Z uwagi na fakt, iż poziom istotności testu jest ustalony na poziomie 0,05, założenia hipotezy zerowej zostają spełnione. W następstwie wartości ES są nieobciążone. Co dotyczy symulacji historycznej, uzyskane wyniki wskazują na przyjęcie znacznie niższego poziomu istotności testu żeby

⁴¹ Peter F. Christoffersen, Evaluating Interval Forecasts, International Economic Review, Volume 39, University of Pennsylvania and Osaka University, Hoboken 1998 s. 842–850.

⁴² Alexander J. McNeil, Rudiger Frey, Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, Journal of Empirical Finance, Volume 7, Elsevier, Amsterdam 2000, s. 291–295.

mówić o poprawności ocen oczekiwanego niedoboru. Doprowadzi to do wniosku, że po raz kolejny EGARCH(1,1) działa lepiej niż klasyczna metoda obliczania oczekiwanego niedoboru i wartości zagrożonej.

Zarówno analiza graficzna jak i statystyki testowe wskazują na to, że zaprognozowane przez model EGARCH(1, 1) wartości VaR i ES dla 95- i 99-procentowe kwantyle w pełni zgadzają się z wartościami rzeczywistymi i ogólnie są akuratsze niż w przypadku zastosowania klasycznej metody symulacji historycznej, co stanowi praktyczną podstawę wykorzystania tej modeli do prognozowania zmienności i kolejnego obliczenia wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru indeksu giełdowego WIG20.

Podsumowanie

Niniejsza praca koncentruje się na przewidywaniu zmienności i ocenie dokładności prognozy wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru za pomocą modeli z rodziny GARCH. Porównaniu podległy 5 modeli GARCH oraz zwyczajna symulacja historyczna w celu znalezienia, który model najlepiej sprawdza się w prognozowaniu zmienności indeksu WIG20.

Wyniki przeprowadzonej analizy są zgodne z założeniami teoretycznymi omówionymi w pierwszych dwóch rozdziałach pracy. Przy szacowaniu miar opartych na wartości zagrożonej na poziomie ufności 5% oraz 1% najlepszą specyfikacją modelu GARCH okazał się wykładniczy model Nelsona EGARCH(1, 1) z rozkładem t-Studenta. Jednakże VaR wykazała się mniejszą dokładnością niż oczekiwany niedobór. Ze względu na szybsze dostosowanie ES do aktualnych szoków rynkowych, z większym prawdopodobieństwem możliwe jest prawidłowe zarządzanie ryzykiem. W kwestii skuteczności zaprezentowanych miar, stosowanych do pomiaru ryzyka, ES należy uznać za bardzo precyzyjną miarę. Niewielka liczba przekroczeń oraz jej niezależność w czasie świadczą o pozytywnej odpowiedzi na pytanie, czy modele rodziny z GARCH efektywnie prognozują przyszłe straty i pozwalają w pełni zarządzać ryzykiem finansowym.

Nie jest możliwe stworzenie idealnego modelu ryzyka. Osoba odpowiedzialna za jego prognozowanie musi ocenić zalety i wady różnych modeli oraz zdecydować się na odpowiedni wybór danych, aby zbudować coś, co nieuchronnie może być tylko niedoskonałym modelem. W przypadku prognozowania zmienności próbuje się przewidzieć, co wydarzy się w przyszłości, więc żaden model nie jest w stanie tego osiągnąć w stopniu 100-procentowym. Można jednak użyć różnych modeli, aby uzyskać lepszą możliwą prognozę zmienności. Zastosowanie nowych modeli GARCH lub innych modeli może generować lepsze predykcje. Co więcej, stosowanie innych miar ewaluacji ryzyka, takich jak np. sVaR, może też pozwolić na bardziej akurată estymację indeksu giełdowego WIG20.

Bibliografia

1. Adrian R. Pagan, William G. Schwert, Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*, Volume 45, Elsevier, Amsterdam 1990, s. 267–290.
2. Alain M. Sunier, Daniel B. Nelson, Philip A. Brown, Good News, Bad News, Volatility, and Betas, *Journal of Finance*, Volume 50, American Finance Association, Hoboken 1995, s. 1575–1603.
3. Alexander J. McNeil, Rudiger Frey, Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, Volume 7, Elsevier, Amsterdam 2000, s. 271–300.
4. Alexandros Benos, Angelidis Timotheos, Degiannakis Stavros, The use of GARCH models in VaR estimation, University of Peloponnese, Tripoli 2004, s.1–34.
5. Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay, John Y. Campbell, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton 1997, s. 1–50.
6. Anil K. Bera, Carlos M. Jarque, Efficient test for normality, homoscedasticity and serial independence of residuals. *Economic Letters*, Volume 6, Elsevier, Amsterdam 1980, s. 255–259.
7. Asger Lunde, Peter R. Hansen, A forecast comparison of volatility models: does anything beat a garch(1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, Volume 20, John Wiley & Sons, Hoboken 2005 s. 873–889.
8. Barbara Ostdiek, Chris Kirby, Jeff Fleming, The economic value of volatility timing, *The Journal of Finance*, Volume 56, American Finance Association, Hoboken 2001, s. 329–352.
9. Basel M. Awartani, Valentina Corradi, Predicting the volatility of the S&P-500 stock index via garch models: the role of asymmetries, *International Journal of Forecasting*, Volume 21, 2005, s.167–183.
10. Benoit Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, *The Journal of Business*, Volume 36, The University of Chicago Press, Chicago 1963, s.394–419.
11. Black Fischer, Studies of stock price volatility changes, *The Journal of Statistics*, American Statistical Association, Abingdon-on-Thames 1976, s. 177–181.

12. Carlo Acerbi, Dirk Tasche, On the coherence of Expected Shortfall, *Journal of Banking & Finance*, Volume 26, Elsevier, Amsterdam 2002, s. 1487–1503.
13. Choo Wei Chong, Muhammad Idrees Ahmad Mat, Yusoff Abdullah, *Journal of Forecasting*. Volume 18, Issue 5, *Journal of Forecasting*, Hoboken 1999, s. 333–343.
14. Clive W. J. Granger, Robert Engle, Zhuanhin Ding, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, Volume 1, Elsevier, Amsterdam 1993, s. 83–106.
15. Clive W. J. Granger, Ser-Huang Poon, Forecasting volatility in financial markets: a review, *Journal of Economic Literature*, Volume 41, American Economic Association, Nashville 2003, s.478–539.
16. Daniel Nelson, Conditional heteroskedasticity in asset pricing: A new approach, *Econometrica*, Volume 59, Econometric Society, Hoboken 1991, s. 349–370.
17. David E. Runkle, Lawrence R. Glosten, Ravi Jagannathan, On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, Volume 48, American Finance Association, Hoboken 1993, s.1779–1801.
18. Dick Van Dijk, Philip H. Franses, Forecasting stock market volatility using (non-linear) GARCH models, *Journal of Forecasting*, Volume 15, John Wiley & Sons, Hoboken 1996, s. 229–235.
19. Eliza Buszkowska, Piotr Płuciennik, Wpływ kryzysu subprime na determinanty wariacji warunkowej indeksu WIG20, *Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu*, Poznań 2014, s. 1–10.
20. Eugene Fama, The behavior of stock-market prices, *The Journal of Business*, Volume 38, University of Chicago Press, Chicago 1965, s. 34–105.
21. George E. P. Box, Greta M. Ljung, On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika*, Volume 65, Oxford University Press, Oxford 1978, s. 297–303.
22. Harry M. Markowitz, Portfolio selection, *The Journal of Finance*, Volume 7, American Finance Association, Hoboken 1952, s. 77–91.
23. John C. Bogle, Black Monday and Black Swans, *Financial Analysts Journal*, Volume 64, CFA institute, Charlottesville 2008, s. 30–41.

24. Krzysztof Jajuga, Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000, s. 100–122.
25. Laurent L. Jacque, Global Derivative Debacles: From Theory to Malpractice, World Scientific, Singapur 2010, s. 65–87.
26. Michał Rubaszek, Modelowanie polskiej gospodarki z pakietem R, Oficyna wydawnicza SGH, Warszawa 2012, s.153–166.
27. Minimum capital requirements for market risk,
<https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>, dostęp 04.04.2021.
28. Paul H. Kupiec, Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, The Journal of Derivatives, Volume 3, Institutional Investor Systems, Nowy Jork 1995, s. 73–84.
29. Peter F. Christoffersen, Evaluating Interval Forecasts, International Economic Review, Volume 39, University of Pennsylvania and Osaka University, Hoboken 1998 s. 841–862.
30. Richard T. Baillie, Tim Bollerslev, The message in daily exchange rates: A conditional-variance tale, Journal of Business and Economic Statistics, Volume 7, American Statistical Association, Boston 1989, s. 297–305.
31. Riskmetrics <https://www.msci.com/www/research-paper/1996-riskmetrics-technical/018482266>, dostęp 04.04.2021.
32. Robert Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, Econometrica, Volume 50, Econometric Society, Hoboken 1982, s. 987–1007.
33. Robert Engle, Tim Bollerslev, Modelling the Persistence of Conditional Variance, Econometric Reviews, Volume 5, 1986, s. 1–50.
34. Robert Hagerman, More evidence on the distribution of security returns, The Journal of Finance, Volume 33, American Finance Association, Hoboken 1978, s.1213–1221.
35. Robert W. Faff, Timothy J. Brailsford, An evaluation of volatility forecasting techniques. Journal of Banking and Finance, Volume 20, Elsevier, Amsterdam 1996, s. 38–419.

36. Serwis finansowy Stooq.pl,
<https://stooq.pl/q/d/?s=wig20&c=0&d1=20070101&d2=20210101>, dostęp
17.04.2021.
37. Tim Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, Volume 31, Elsevier, Amsterdam 1986, s. 307–327.
38. William G. Schwert, Why does stock market volatility change over time?, The Journal of Finance, Volume 44, American Finance Association, Hoboken 1989, s.1115–1153.

Spis rysunków

Rysunek 1.1. Procentowy udział spółek indeksu WIG20.....	6
Rysunek 3.1. Cena zwykła i cena znormalizowana indeksu WIG20	20
Rysunek 3.2. Logarytmiczne stopy zwrotów indeksu WIG20	21
Rysunek 3.3. Histogram standaryzowanych stop zwrotów	23
Rysunek 3.4. Porównanie teoretycznych bądź empirycznego rozkładu stop zwrotów	24
Rysunek 3.5. Funkcja autokorelacji kwadratu stop zwrotów	25
Rysunek 3.6. Funkcja korelacji krzyżowej kwadratu stop zwrotów i stop zwrotów.....	26
Rysunek 3.7. VaR, ES a rzeczywiste przekroczenia stop zwrotów dla modelu EGARCH	30
Rysunek 3.8. VaR, ES a rzeczywiste przekroczenia stop zwrotów dla symulacji historycznej.....	30

Spis tabeli

Tabela 3.1 Statystyki opisowe rozkładu stop zwrotów.....	22
Tabela 3.2. Kryterium informacyjne dla poszczególnych rozkładów i opóźnień.....	27
Tabela 3.3. Kryterium informacyjne dla poszczególnych rozszerzeń modelu GARCH	28
Tabela 3.4. Test Kupca dla wartości zagrożonej na 5- i 1-procentowym poziomie ufności	31
Tabela 3.5. Test Christophersena dla wartości zagrożonej na 5- i 1-% poziomie ufności ...	31
Tabela 3.6. McNeil’a i Frey’a dla oczekiwanego niedoboru na 5- i 1-% poziomie ufności	32

Streszczenie

Celem pracy jest prognozowanie zmienności indeksu WIG20 w tym, żeby prawidłowo ocenić wartość zagrożoną oraz oczekiwany niedobór. Cel ten został osiągnięty przy pomocy porównywania pięciu modeli GARCH oraz klasycznej metody symulacji historycznej. W pierwszym rozdziale zawarte są informacje na temat pojęcia ryzyka finansowego, zmienności, wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru. Drugi rozdział zawiera opis zjawisk charakterystycznych dla stopów zwrotów z instrumentów finansowych, przedstawia historię rozwoju modeli GARCH oraz wskazuje na dowody empiryczne wybrania wskazanych modeli. W trzecim rozdziale przedstawiona jest analiza danych dotyczących indeksu WIG20 oraz wszystkie zbędne porównywania wzmocnione wykresami bądź odpowiednimi testami. Analiza pokazała, że wykładniczy model EGARCH(1, 1) jest najlepszy ze względu na prawidłowość oszacowań wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru na poziomach ufności 5- i 1%, co umożliwia wykorzystanie tego modelu do prognozowania zmian cen indeksu w przyszłych okresach czasowych.