חשבון אינפיטסימלי 1 - 01040195
גליון 1

יונתן אבידור - 214269565

20 בנובמבר 2025

שאלה 1

1. פתרו את אי השיוויון הבא:

$$3+|x-9|<\frac{2|x-1|}{x}$$

2. הוכיחו כי אם $|x-7|<\frac{1}{2}$ אז

$$\left|\frac{x^2-4x-21}{x-6}\right|<\frac{21}{2}$$

פתרון 1

1. נשים לב לכך שהצד השמאלי של אי השיוויון חיובי תמיד שכן הוא חיבור בין ביטוי חיובי וביטוי אי שלילי, לכן הצד הימני חייב להיות חיובי.
המונה תמיד יהיה אי שלילי כי הוא מורכב ממכפלה של סקלאר עם ביטוי אי שלילי, על מנת שהמונה יהיה חיובי תמיד נשים לב ש $x\neq 2$ שמאפס את המונה. בהתחשב בזה שהמונה תמיד חיובי גם המכנה צריך תמיד להיות חיובי (ושונה מ0) ולכן $x\neq 1>0$
נפרק למקרים לפי הערכים שמחליפים את הסימון של הביטויים שנמצאים בתוך ערך מוחלט

$$\begin{aligned} 0<x<1: 3-x+9&<\frac{2(-x+1)}{x} \\ \iff 0&<x+\frac{-2x+2}{x}-12 \\ \iff 0&<x^2-14x+2 \end{aligned}$$

נמצא את השורשים

$$\begin{aligned} x_{1,2}&=\frac{14\pm\sqrt{196-8}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{4\cdot 47}}{2} \\ &=\frac{14\pm 2\sqrt{47}}{2}=7\pm\sqrt{47} \end{aligned}$$

מכאן אנחנו רואים שמה שמאפס את x זה $7\pm\sqrt{47}$
הפלוס נפסל כי 7 ועוד מספר אי שלילי בהכרח גדול מ1 ולכן לא בטווח
המינוס עובר כי $\sqrt{47}$ נמצא בין 6 ל7 (כי $\sqrt{36}<\sqrt{47}<\sqrt{49}$) כלומר בין $0=7-7$

ו$1 = 6 - 7$ שאלה הגבולות שלנו

עכשיו כשאנחנו יודעים ש$7 - \sqrt{47}$ שורש של הפולינום ומקיים את התנאים של x,
נבדוק אם $0 < x < 7 - \sqrt{47}$ או $1 < x < 7 - \sqrt{47}$, על מנת לעשות את זה, נבדוק
אם הפולינום חיובי לפני או אחרי הנקודה

נציב את x בגבולות ונבדוק את הסימון

$(7-7)^2 - 14 \cdot (7-7) + 2 = 0 - 0 + 2$

כלומר כש$0 < x < 7 - \sqrt{47}$ הפלינום חיובי

$(7-6)^2 - 14 \cdot (7-6) + 2 = 1 - 14 + 2 = -11$

כלומר כש $1 > x > 7 - \sqrt{47}$ הפולינום שלילי (לא מקיים את התנאי)

ולכן נמצא טווח אפשרי

$0 < x < 7 - \sqrt{47}$

נבדוק $1 < x < 9$

$$
\begin{aligned}
3 - x + 9 &< \frac{2(x-1)}{x} \\
\iff -x + 12 &< \frac{2(x-1)}{x} \\
\iff 0 &< x + \frac{2(x-1)}{x} - 12 \\
&= x^2 + 2x - 2 - 12x = x^2 - 10x - 2
\end{aligned}
$$

נמצא את השורשים

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{100+8}}{2} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{108}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 3}}{2} \\
&= \frac{10 \pm 6\sqrt{3}}{2} = 5 \pm 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

נבדוק אם $1 < 5 \pm 3\sqrt{3} < 9$

נתחיל מהאגף השמאלי, ונתעלם מ$5 + 3\sqrt{3}$ כי 5 + מספר אי שלילי בהכרח גדול מ1

$$1 < 5 - 3\sqrt{3} \iff -4 < -3\sqrt{3} \underset{\times -1 \text{ and } ()^2}{\iff} 16 > 27$$

קיבלנו סתירה

נעבור לאגף הימני

$5 + 3\sqrt{3} < 9 \iff 3\sqrt{3} < 4 \iff 27 < 16$
קיבלנו סתירה
לכן אין פתרונות בטווח $1 < x < 9$
נבדוק את האחרון, $x > 9$

$$
\begin{aligned}
&3 + x - 9 < \frac{2(x-1)}{x} \\
&\iff x - 6 < \frac{2\left(x-1\right)}{x} \\
&\iff 0 > x - 6 - \frac{2\left(x-1\right)}{x} \\
&= x^2 - 6x - 2x + 2 = x^2 - 8x + 2
\end{aligned}
$$

נמצא את השורשים

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4 \cdot 14}}{2} = 4 \pm \sqrt{14}$$

נתעלם מ $4 - \sqrt{14}$ כי 4 פחות מספר אי שלילי בהכרח קטן מ9
אפשר לראות ש $\sqrt{14} < \sqrt{16} = 4$ כך ש $4 + \sqrt{14} < 8$ וזה סותר את זה ש$x > 9$ ולכן
גם בטווח הזה אין פתרונות
הפתרון היחיד ל$3 + |x-9| < \frac{2|x-1|}{x}$ הוא $0 < x < 7 - \sqrt{47}$
2. נתון לנו $|x-7| < \frac{1}{2}$ ולכן $-\frac{1}{2} < x - 7 < \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{x^2 - 4x - 21}{x-6}\right| = \frac{|x-7|\,|x+3|}{|x-6|}$$

נציב בנתון

$$
\begin{aligned}
+0 - \frac{1}{2} < x - 7 < \frac{1}{2} &\implies \boxed{|x+7| < \frac{1}{2}} \\
+109.5 < x + 3 < 10.5 &\implies 6.5 < \boxed{|x+3| < 10.5} \\
-2 - 2.5 < x - 6 < -1.5 &\implies \boxed{1.5 < |x-6|} < 2.5
\end{aligned}
$$

$$\frac{|x-7|\,|x+3|}{|x-6|} < \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{3} < \frac{21}{2}$$

■

שאלה 2

1. יהיו $a_1, \ldots, a_n$ מספרים חיוביים קטנים מ1. הוכיחו באינדוקציה כי מכפלתם $a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n$ קטנה מ- 1.
2. הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

פתרון 2

1. נוכיח באינדוקציה

צעד האינדוקציה:

כש $n = 1$ אז $a_1 < 1$ לפי הנתון

הנחת האינדוקציה

התנאי מתקיים ל$n-1$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} < 1$$

צעד האינדוקציה n

צריך להוכיח ש

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_n < 1$$

נקרא לביטוי $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ בשם x ונציין כי $x < 1$ לפי הנחת האינדוקציה

בנוסף, מכיוון שכל המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ חיוביים גם x חיובי כלומר

$0 < x < 1$

נכתוב מחדש את הביטוי כולו $x \cdot a_n$

ידוע כי $0 < a_n < 1$ לפי הנתון וכי $0 < x < 1$כפי שאמרנו

מכיוון שכפולת שני מספרים חיוביים הקטנים מאחד, קטנה מאחד

$$\underbrace{x}_{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \cdot a_n < 1$$

■

2. ראשית, נפתור את הצד השמאלי של המשוואה
נפתח את הבינום

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \iff \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

נשים לב ש $k! > 0$ ונכפיל ב$k!$

$$\iff \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \leq 1 \underset{\text{factorial}}{\iff} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} \cdot \frac{1}{n^k} \leq 1$$

נוציא מכנים משותפים מהשבר השמאלי, $1, 2, \ldots, (n-k)$ שכמובן כולם חיוביים

$$\iff \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{1} \cdot \frac{1}{n^k} \leq 1 \underset{\times n^k > 0}{\iff} (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n \leq n^k$$

נשים לב שבצד השמאלי של אי השוויון יש כפל של k ביטויים שכולם (פרט לאחד מהם) קטנים מn
בעוד שהצד הימני של אי השוויון ניתן גם לכתוב ככפל של k ביטוי שכולם הם n
לכן, מכיוון ששני האגפים הם כפולה של אותה כמות איברים, וכל איבר בצד השמאלי קטן או שווה לכל איבר בצד הימני
האגף הימני אכן גדול מהאגף השמאלי
ולכן

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

נעבור לצד הימני של המשוואה

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \underset{\times(k! \cdot 2^{k-1})}{\iff} 2^{k-1} \leq k! \iff \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ members}} \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ members}}$$

בצד שמאל של אי השוויון יש $k-1$ כפולות של 2, בצד ימין של אי השווין יש (אחרי שמתעלמים מ1 שהוא אדיש כפלית) $k-1$ כפולות של מספרים הגדולים או שווים ל2
ולכן צד ימין גדול מצד שמאל.
ולכן מכיוון שהמעבר בין כל צעד שעשינו הוא מעבר דו צדדי ($\iff$)

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

הוכחנו את צד ימין של המשוואה המקורית, ואם מחברים את שתי ההוכחות שלנו מקבלים ש

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

■

שאלה 3

יהיו $a_1, \ldots, a_n$ מספרים חיוביים המקיימים $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. הוכיחו כי

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$$

פתרון 3

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$$
$$\underset{\div 2^n}{\iff} \frac{(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)}{2^n} \geq 1$$

נשים לב שבמונה יש n כפולות, והמכנה שקול לn כפולות של 2, נכתוב מחדש את הצד השמאלי של אי השוויון

$$\iff \frac{(1 + a_1)}{2} \cdot \frac{(1 + a_2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(1 + a_n)}{2} \geq 1$$

בצד השמאלי של המשוואה יש לנו ממוצעים **חשבוניים** של שני איברים 1 וa_i (כש$1 \leq i \leq n$)
נשתמש באי שוויון הממוצעים בין ממוצע חשבוני לממוצע גיאומטרי
לכל אחד מהם אפשר לומר $\frac{(1+a_i)}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_i} = \sqrt{a_i}$ ולכן

$$\implies \frac{(1 + a_1)}{2} \cdot \frac{(1 + a_2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(1 + a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}$$
$$\iff \frac{(1 + a_1)}{2} \cdot \frac{(1 + a_2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(1 + a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt{1} = 1$$

ולכן מכיוון שהמעבר בין כל צעד שעשינו הוא מעבר דו צדדי ($\iff$)
קיבלנו ש

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$$

■

שאלה 4

יהיו a, b מספרים טבעיים שונים כך ש$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$ הם אי רציונליים. הוכיחו כי $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ הינו אי-רציונלי.

פתרון 4

נניח בשלילה כי $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$
נכפיל בצמוד $1=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ כך שאין השפעה על ערך הביטוי

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{1}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

טענת עזר

יהיו $0\neq x\in\mathbb{Q},0\neq y\notin\mathbb{Q}$ אזי $x-y\notin\mathbb{Q}$ וגם $\frac{x}{y}\notin\mathbb{Q}$

הוכחת טענת העזר

ראשית נוכיח לגבי החיסור, נניח בשלילה כי $x-y\in\mathbb{Q}$, כלומר אפשר גם לכתוב:

$$x-y=\frac{p}{q}$$

כש$p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0$

$$x-y=\frac{p}{q}\underset{-x}{\iff}-y=\frac{p}{q}-x$$

$x\in\mathbb{Q}$ ולכן ניתן לכתוב גם

$$x=\frac{r}{s}$$

כש$r,s\in\mathbb{Z},s\neq 0$
לפי ההגדרה חדשה נכתוב את הביטוי שלנו

$$-y=\frac{p}{q}-x\iff -y=\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\iff -y=\frac{ps-rq}{qs}\underset{\times -1}{\iff}=y=\frac{rq-ps}{qs}$$

מכיוון ש$\mathbb{Z}$ סגורה תחת כפל, חיבור וחיסור ו$p,q,r,s\in\mathbb{Z}$ אפשר לראות ש$(rq-ps)\in$ $\mathbb{Z}$ וש$qs\in\mathbb{Z}$, וכמובן $qs\neq 0$ כי גם $q\neq 0$ וגם $s\neq 0$, המסקנות הללו ביחד אומרות ש $\frac{rq-ps}{qs}\in\mathbb{Q}$

כלומר מכיוון ש$y = \frac{rq-ps}{qa}$, מתקיים $y \in \mathbb{Q}$. סתירה
בצורה דומה נניח בשלילה כי$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$
כלומר אפשר גם לכתוב

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$$

כש$p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ (כמובן אין קשר בין p, q לאותן p, q מההוכחה של החיסור שעשינו כרגע)
נשים לב שגם $p \neq 0$ כי $x \neq 0$
נארגן מחדש את המשוואה

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \iff y = \frac{xq}{p}$$

$x \in \mathbb{Q}$ ולכן ניתן לכתוב גם

$$x = \frac{r}{s}$$

כש$r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$
נכתוב מחדש את המשוואה

$$y = \frac{xq}{p} \iff y = \frac{\frac{r}{s} \cdot q}{p} \iff y = \frac{rq}{ps}$$

$\mathbb{Z}$ סגורה לכפל ולכן $rq, ps \in \mathbb{Z}$ וכמובן $ps \neq 0$ כי גם $p \neq 0$ וגם $s \neq 0$, המסקנות הללו ביחד אומרות ש $\frac{rq}{ps} \in \mathbb{Q}$
ומכיוון ש$y = \frac{rq}{ps}$ מתקיים $y \in \mathbb{Q}$. סתירה ■
בחזרה להוכחה
נתבונן במכנה

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \underbrace{\sqrt{a} + \sqrt{b}}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{2\sqrt{b}}_{\notin \mathbb{Q}} \underset{(*)}{\notin} \mathbb{Q}$$

(*) לפי טענת העזר, ההפרש בין מספר רציונלי למספר אי רציונלי הוא אי רציונלי
נעבור למונה
נתון לנו ש$a, b \in \mathbb{N}$ ולכן

$$(a - b) \underset{(**)}{\in} \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \implies (a - b) \in \mathbb{Q}$$

(**) הטבעיים לא סגורים תחת חיסור, אבל השלמים כן והטבעיים מהווים תת קבוצה של השלמים
נעבור לביטוי כולו

$$\frac{\overbrace{a-b}^{\in\mathbb{Q}}}{\underbrace{\sqrt{a}-\sqrt{b}}_{\notin\mathbb{Q}}}$$

על פי טענת העזר, המנה של מספר רציונלי ומספר אי רציונלית היא אי רציונלית כלומר $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \notin \mathbb{Q}$ ומכיוון ש$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ מתקיים $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. סתירה
■

שאלה 5

הוכיחו את הטענות הבאות
א. לכל n טבעי, אם $\sqrt[3]{n}$ איננו שלם, $\sqrt[3]{n}$ איננו רציונאלי.
ב. לכל k, n טבעיים, אם $\sqrt[k]{n}$ איננו שלם, אז הוא איננו רציונאלי.

פתרון 5

א.
נניח בשלילה שקיים n שעבורו $\sqrt[3]{n}$ איננו שלם אבל כן רציונאלי.
יהי $q \in \mathbb{N}$ המספר השלם הקטן ביותר כך ש$q\left(\sqrt[3]{n}\right) \in \mathbb{N}$.
נגדיר $r := q\left(\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 - \lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor\right)$ אם $r < q$, $r \in \mathbb{N}$ וגם $r\left(\sqrt[3]{n}\right) \in \mathbb{N}$ נגיעה לסתירה
ראשית נראה ש $r < q$.
r הוא מכפלה של q ב$\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 - \lfloor\sqrt[3]{n}^2\rfloor$ על פי ההגדרה $0 \le x - \lfloor x\rfloor < 1$ ולכן r הוא מכפלה של q במספר קטן מ1 ולכן קטן q.
נראה ש $r \in \mathbb{N}$.

$$r = q\left(\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 - \lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor\right) = \underbrace{q\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}_{(*)} - \underbrace{q\lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor}_{(**)} \underbrace{\Longrightarrow}_{(***)} r \in \mathbb{N}$$

$$(*)\ q\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 \in N \text{ מההגדרה של } q$$

$$(**)\ q \in N \text{ מההגדרה של } q \wedge \lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor \in \mathbb{N} \text{ תכונה של } \lfloor x\rfloor$$

$$(***)\ \left(\lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor\right) \in \mathbb{N}\text{הטבעיים סגורים לכפל}$$

מה שאומר ש$q > r \in \mathbb{N}$, עכשיו רק נשאר להוכיח כי $r\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} r\sqrt[3]{n} &= q\left(\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 - \lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor\right)\left(\sqrt[3]{n}\right) \\ &= \left(q\left(\sqrt[3]{n}\right)^2 - q\lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor\right)\left(\sqrt[3]{n}\right) \\ &= q\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\left(\sqrt[3]{n}\right) - q\left(\sqrt[3]{n}\right)\lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor \\ &= \underbrace{qn}_{\mathbb{N}} - \underbrace{q\left(\sqrt[3]{n}\right)}_{\mathbb{N}} \cdot \underbrace{\lfloor\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\rfloor}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

הגענו לסתירה. שכן q הוגדר כמספר הטבעי הקטן ביותר שמכפלתו עם $\sqrt[3]{n}$ יוצרת מספר טבעי

ב.

נניח בשלילה שקיים n שעבורו $\sqrt[k]{n}$ איננו שלם אבל כן רציונאלי. יהי $q \in \mathbb{N}$ המספר השלם הקטן ביותר כך ש$q\left(\sqrt[k]{n}\right) \in \mathbb{N}$.

נגדיר $r := q\left(\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1} - \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor\right)$

אם $q > r$ וגם $r\left(\sqrt[k]{n}\right) \in \mathbb{N}$ נגיע לסתירה.

ראשית נראה ש$q > r$. r הוא מכפלה של q ב$\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1} - \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor$ על פי ההגדרה $1 > x - \lfloor x\rfloor \geq 0$ ולכן r הוא מכפלה של q במספר קטן מ1 ולכן קטן מq. נראה ש $r \in \mathbb{N}$.

$$r = q\left(\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1} - \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor\right) = \underbrace{q\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}}_{(*)} - \underbrace{q\lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor}_{(**)} \underbrace{\Longrightarrow}_{(***)} r \in \mathbb{N}$$

$$(*)\, q\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1} \in \mathbb{N} \text{ מההגדרה של } q$$

$$(**)\, q \in \mathbb{N} \text{ מההגדרה של } q, \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor \in \mathbb{N} \text{ תכונה של } \lfloor x\rfloor$$

$$(***)\, q\left(\lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor\right) \in \mathbb{N} \text{ הטבעיים סגור לכפל}$$

מה שאומר ש $q > r \ni \mathbb{N}$, עכשיו רק נשאר להוכיח כי $r\sqrt[k]{n} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} r\sqrt[k]{n} &= q\left(\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1} - \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor\right)\left(\sqrt[k]{n}\right) \\ &= qn - q\left(\sqrt[k]{n}\right) \cdot \lfloor\left(\sqrt[k]{n}\right)^{k-1}\rfloor \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

הגענו לסתירה שכן q הוגדר כמספר הטבעי הקטן ביותר משכפלתו עם $\sqrt[k]{n}$ יוצרת מספר טבעי

■

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\sup A < \inf B$ אז $A \cap B = \emptyset$.

ב. אם A קבוצה אינסופית שאין לה מינימום, אז A לא חסומה מלרע.

ג. אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש-$a < b$ אז $\sup A < \sup \mathrm{B}$

פתרון 6

א.

נכון, נוכיח

נניח בשלילה ש$\sup A < \inf B$ ושהקבוצה $A \cap B \neq \emptyset$

נגדיר $C := A \cap B = \{c | c \in A \wedge c \in B\}$

מכיוון שכל $c \in C$ נמצא גם B , מתקיים $c \geq \inf B$

מכיוון שכל $c \in C$ נמצא גם בA, מתקיים $c \leq \sup A$

כלומר $\inf B \leq c \leq \sup A$, סתירה.

ב.

לא נכון!

ניתן דוגמה נגדית

$A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ על פי הגדרת הקבוצה, היא חסומה מלמעטה ע"י 0 ואין לה מינימום כי היא מייצגת קטע פתוח

ג.

לא נכון!

נניח שהתנאי מתקיים ונגיע לסתירה

יהי x כך ש

$$A = (-\infty, x)$$
$$B = \{x\}$$

לכל $A \in a$ קיים $b = x \in B$ שגדול ממנו
הסופרמום של B הוא x כי הוא חסם עליון $x \geq x$ וגם המקסימום $x \in B$
הסופרמום של A הוא x כי על פי למת האינפימום מתקיים שלכל $\epsilon > 0$ קיים $a \in A$
כך ש$a > x - \epsilon$ (על פי היות A קטע פתוח שנגמר בx)
כלומר $\sup A = \sup \mathrm{B}$ סתירה
■

שאלה 7

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות חסומות מלעיל. הוכיחו כי $\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$

פתרון 7

נגדיר $S_A = \sup A$, אנחנו יודעים שS_A קיים לפי אקסיומת השלמות כי A קבוצה חסומה מלעיל ואינה ריקה
בצורה דומה נגדיר $S_B = \sup B$
נגדיר את קבוצת האיחוד של A וB

$$C = A \cup B = \{c | c \in A \vee c \in B\}$$

נרצה להוכיח ש$\sup (C) = \max \{S_A, S_B\}$
ראשית נוכיח כי מדובר בחסם עליון
נראה שלכל $c \in C$ מתקיים $c \leq \max \{S_A, S_B\}$
כל c נמצא לפחות באחת הקבוצות A, B, נחלק למקרים (אין צורך להתייחס למקרה בו הוא נמצא בשתי הקבוצות, המקרה הזה מוכל בתוך שני המקרים האחרים)

$$\begin{cases} c \in A, \ c \leq S_A \leq \max \{S_A, S_B\} \\ c \in B, c \leq S_B \leq \max \{S_A, S_B\} \end{cases}$$

כלומר מתקיים $c \leq \max \{S_A, S_B\}$ ולכן חסם עליון, עכשיו רק צריך להראות שזה גם הסופרמום

יהי $\epsilon > 0$, נראה שקיים $c \in C$ כך שמתקיים $\max\{S_A, S_B\} - \epsilon < c$
נבחר $c \in B$ ובלי הגבלת כלליות נניח ש$S_A < S_B$ (במצב ההפוך נבחר $c \in A$)
מכיוון ש$S_A < S_B$, אפשר לומר ש$\max\{S_A, S_B\} = S_B$
מכיוון שS_B הסופרמום של B, קיים $b \in B$ כך ש$S_B - \epsilon < b$
מכיוון שכל איבר בB מוכל בC, אפשר לבחור את c כך שיהיה b, כלומר ישנו $c \in C$ המקיים $S_B - \epsilon < c$, אזי $S_B = \max\{S_A, S_B\} = \sup C$
■

שאלה 8

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות חסומות מלעיל.
א. נניח שקיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש $a + \epsilon < b$. הוכיחו $\sup A < \sup B$
ב. נניח כי לכל $a \in A$ קיימים $\epsilon > 0$ ו-$b \in B$ כך ש $a + \epsilon < b$. הוכיחו או הפריכו: $\sup A < \sup B$

פתרון 8

א.
נגדיר $S_A := \sup A, S_B := \sup B$.
לפי למת הסופרימום, מתקיים לכל ϵ (נבחר כמובן את האחד הנתון לנו) קיים $a \in A$ כך ש$S_A - \epsilon < a$
לפי הנתון, לאותו a קיים $b \in B$ כך ש$a + \epsilon < b$

$$S_A - \epsilon < a \underset{+\epsilon}{\iff} S_A < a + \epsilon \underset{\text{נתון}}{<} b \underset{(*)}{\leq} S_B \iff S_A < S_B$$

כל איבר בקבוצה קטן מהסופרימום של הקבוצה$(*)$

■
ב.
לא נכון!
ניקח כדוגמה נגדית קבוצה מונוטונית עולה חסומה גם כA וגם כB (נבחר את $A = B = -\frac{1}{n}$ לשם הנוחות). התנאי לא מתקיים מכיוון שהקבוצות זהות ועל כן גם הסופרימום שלהם, כלומר $\sup A = \sup B$
נראה שהקבוצות שבחרנו מתאימות לנתון
מכיוון שהקבוצה עולה, לכל a_n מתקיים $a_n < a_{n+1} = b_{n+1}$

נמצא עכשיו $\epsilon > 0$ כך ש $\underbrace{b}_{b_{n+1}} < \underbrace{a}_{a_n} + \epsilon$

$$a + \epsilon < b \iff \epsilon < b - a$$

נבחר $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot |b - a|$
מכיוון שקיים אותו ϵ, קיימים A, B כך ש $\sup A = \sup B$

שאלה 9

יהא b מספר ממשי. נגדיר $A = \left\{ \frac{\lfloor n \cdot b \rfloor}{n} | n \in \mathbb{N} \right\}$. הוכיחו כי A חסומה מלעיל ומצאו את $\sup A$

פתרון 9

נמצא חסם עליון של A

$$a_n = \frac{\lfloor n \cdot b \rfloor}{n} \leq \frac{n \cdot b}{n} = b$$

b חסם עליון של A ולכן A חסומה מלעיל נגדיר $S := \sup A$, אנחנו יודעים שS קיים לפי אקסיומת השלמות וזה שA חסומה מלעיל ולא ריקה
יהי $\epsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש$a \in (S - \epsilon, S]$ כלומר צריך למצוא n שעבורו $S \geq a_n > S - \epsilon$
ננסה להקטין את a

$$\frac{\lfloor n \cdot b \rfloor}{n} > \frac{(n \cdot b) - 1}{n} \underset{x-1<\lfloor x \rfloor}{\iff} \lfloor n \cdot b \rfloor > b - \frac{1}{n}$$

זה אומר ש

$$b \geq a_n > b - \frac{1}{n}$$

אז אם נגדיר $n = \frac{1}{\epsilon}$ נקבל

$$b \geq a_n > b - \frac{1}{\frac{1}{e}} \iff b \geq a_n > b - \epsilon$$

מה שאומר ש $\boxed{\sup \mathrm{A} = b}$

שאלה 10

הוכיחו לפי הגדרה
א. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}=2$
ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n+4}{n^{2/3}}=0$

פתרון 10

א.
יהי $\epsilon<0$, צריך למצוא N כך ש $n>N$ (כש$n\in\mathbb{N}$) מתקיים

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right|<\epsilon$$

נרצה למצוא אפשרות לN, קודם נפשט את המשוואה.
נוציא מכנה משותף

$$\left|\frac{2n^2-7n+8-2\left(n^2+3n+9\right)}{n^2+3n+9}\right|=\left|\frac{-13n-10}{n^2+3n+9}\right|\underset{|-x|=x}{=}\frac{13n+10}{n^2+3n+9}$$

על מנת לקרב את הביטוי כמה שאפשר לϵ נרצה להגדיל את המונה ולהקטין את המכנה

$$\frac{13n+10}{n^2+3n+9}<\frac{13n+10n}{n^2}<\frac{23}{n}\underset{n>N}{<}\frac{23}{N}$$

נרצה שיתקיים $\frac{23}{N}\leq\epsilon$ כלומר $\frac{23}{\epsilon}\geq N$, נבחר $N=\left\lceil\frac{23}{\epsilon}\right\rceil+2$
כלומר לכל ϵ, כאשר $N=\left\lceil\frac{23}{\epsilon}+2\right\rceil$, לכל $\mathbb{N}\ni n>N$ מתקיים

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right|<\frac{23}{n}<\frac{23}{N}<\epsilon$$

כלומר, הגבול הוא 2.
■
ב.
יהי $\epsilon>0$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\mathbb{N}\ni n>N$ מתקיים

$$\left|\frac{\cos n+4}{n^{2/3}}\right|<\epsilon$$

נרצה למצוא אפשרות לN.
על מנת לקרב את הביטוי כמה שאפשר לϵ נרצה להגדלי את המונה ולהקטין את המכנה

$$\left|\frac{\cos n+4}{n^{2/3}}\right| \leq \left|\frac{1+4}{n^{2/3}}\right| < \frac{5}{\sqrt{n}} \underset{n>N}{<} \frac{5}{\sqrt{N}}$$

נרצה שיתקיים $\frac{5}{\sqrt{N}} \leq \epsilon$, כלומר $N \geq \frac{25}{\epsilon^2}$, נבחר ב$N = \left\lceil\frac{25}{\epsilon^2}\right\rceil + 5$
כלומר לכל ϵ, כאשר $N = \left\lceil\frac{25}{\epsilon^2}\right\rceil + 5$, לכל $\mathbb{N} \ni n > N$ מתקיים

$$\left|\frac{\cos n+4}{n^{2/3}}\right| < \frac{5}{\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{N}} < \epsilon$$

■

שאלה 11

א. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת כך שלכל n, $a_n \neq 0$. הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.
ב. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית מתכנסת. הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$

פתרון 11

א.
יהי $\epsilon > 0$, צריך למצוא N כך שלכל $\mathbb{N} \ni n > N$ מתרחש

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon$$

נרצה לקרב את הביטוי לϵ, על מנת לעשות את זה נגדיל את המונה ונקטין את המכנה.
קודם כל נפשט את הביטוי.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - a_n|}{|a_n \cdot L|}$$

לא הצלחנו להגיע למצב שבו אין ביטוי התלוי בn במכנה או במונה. לכן נצטרך למצוא אפשרויות שונות לN לפי ההגבלות המכנה ולפי המונה.

נתבונן בגבול של a_n
על פי הגדרת הגבול של a_n, לכל $\epsilon_0 > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n < N_0$, מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon_0$$

מכיוון שביטוי זה נכון לכל ϵ_0 נבחר $\epsilon_0 = \frac{|L|}{2}$, נזכור ש$L \neq 0$ כך שאכן מתקיים $\epsilon_0 > 0$ כלומר

$$\begin{aligned} \frac{|L|}{2} > |a_n - L| \underset{(*)}{\geq} ||a_n| - |L|| \\ \iff \frac{|L|}{2} > ||a_n| - |L|| \\ \underset{(**)}{\iff} -\frac{|L|}{2} < |a_n| - |L| < \frac{|L|}{2} \\ \iff |a_n| > -\frac{|L|}{2} + |L| \\ \iff |a_n| > \frac{|L|}{2} \end{aligned}$$

נקטין את המכנה

$$\frac{|L - a_n|}{|a_n \cdot L|} < \frac{|L - a_n|}{\frac{|L|}{2}|L|} = \frac{|L - a_n|}{\frac{|L|^2}{2}} < \epsilon$$

נסדר את הביטוי

$$\frac{|L - a_n|}{\frac{|L|^2}{2}} = |L - a_n| \cdot \frac{2}{|L|^2} < \epsilon \iff |L - a_n| > \frac{\epsilon |L|^2}{2}$$

נסתכל על המונה.

$$|L - a_n| = |a_n - L|$$

על פי הגדרת הגבול של a_n, לכל $\epsilon_1 > 0$ קיים N_1 כך שלכל $n < N_1$, מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon_1$$

מכיוון שביטוי זה נכון לכל ϵ_1. נבחר $\epsilon_1 = \frac{\epsilon|L|^2}{2}$. נזכור ש$L \neq 0$ ולכן $\epsilon_1 > 0$ נבחר את N אותו אנחנו מחפשים להיות $N = \max\ \{N_0, N_1\}$ ואז אכן מתקיים

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - a_n|}{|a_n \cdot L|} < \frac{|L - a_n|}{\frac{|L|^2}{2}} < \epsilon$$

■

ב.

ראשית על מנת שנוכל להתעסק עם שורש של L נצטרך קודם להראות שL אי שלילי.
נתון ש$\{a_n\}$ אי שלילית לכל n. מה שאומר שלכל ϵ כל איברי הסביבה (פרט למספר סופי של איברים) נמצאים בסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$, מכיוון שכל איברי $\{a_n\}$ אי שליליים ונמצאים בסביבת L גם L אי שלילי.
הוכחנו שL אי שלילי ולכן אפשר להתחיל להתעסק עם השורש. כעת צריך להוכיח ש$\sqrt{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{L}$
יהי $\epsilon > 0$ צריך למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתרחש

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$$

נפרק את הביטוי למקרים
אם $L = 0$

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}\right| = |\sqrt{a_n}| = \sqrt{a_n} < \epsilon \iff a_n < \epsilon^2$$

מה שאומר שיש N_0 כך שלכל $N_0 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$ כדרוש
נעבור ל $L > 0$
נתבונן בצד השמאלי של המשוואה

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| &= \frac{\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right|}{1} \cdot \frac{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|}{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|} \\
&= \frac{\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| \cdot \left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|}{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right|} \\
&= \frac{\left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right) \cdot \left(\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right)\right|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}
\end{aligned}$$

על מנת לקרב את הביטוי לϵ נרצה להקטין את המונה ולהגדיל את המכנה

$$\frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}}$$

נסתכל על המונה
על פי הגדרת הגבול של a_n, לכל ϵ_1 קיים N_1 כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתרחש

$$|a_n - L| < \epsilon_1$$

מכיוון שביטוי זה נכון לכל ϵ_1, נבחר $\epsilon_1 = \epsilon\sqrt{L}$ נזכור ש $L > 0$ כך ש- $\epsilon_1 > 0$
מה שאומר לכל $n > N_1$ מתרחש

$$\leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} < \frac{\epsilon\sqrt{L}}{L} = \epsilon$$

■