חשבון אינפיטסימלי 1 - 01040195
גליון 5

יונתן אבידור - 214269565

15 בינואר 2026

שאלה 1

הראו שהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}$ איננו קיים בארבע דרכים:
א. בעזרת הגדרת הגבול.
ב. בעזרת משפט היינה.
ג. בעזרת גבולות חד צדדים.
ד. בעזרת תנאי קושי.

פתרון 1

נגדיר $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}$
א.
יהי L נרצה להראות שקיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x כך ש$0<|x|<\delta$ אבל

$$\left|\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}-L\right|\geq\epsilon$$

נחלק למקרים
אם $L=0$
נתבונן ב-$\epsilon=\frac{1}{1000}$

$$\left|\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}\right|\geq\frac{1}{1000}$$

נניח כי $0>x\geq\max\left\{-\frac{1}{10},-\frac{\delta}{10}\right\}$
ואכן

$$0<|x|\underset{x\geq-\frac{\delta}{2}>-\delta}{<}\delta$$

מכיוון ש$0>x\geq-\frac{1}{10}$, $\lfloor x\rfloor=-1$

$$\left|\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}\right|=\left|\frac{-1\sin x}{x}\right|\underset{|-1|=|1|}{=}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

על פי זהות שראינו בכיתה, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
כלומר עבור $\epsilon_1=\frac{1}{3}$ קיים $\delta_1>0$ כך ש

$$0<|x|<\delta_1\implies\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{1}{3} \implies -\frac{1}{3}<\frac{\sin x}{x}-1<\frac{1}{3} \implies \frac{2}{3}<\frac{\sin x}{x}<\frac{4}{3}$$

לכן נבחר $x=\max\left\{\frac{-\delta}{2},\frac{-\delta_1}{2},-\frac{1}{10}\right\}$
ואז

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|>\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}>\frac{1}{1000}=\epsilon$$

ולכן $L\neq 0$
עכשיו נוכיח גם עבור $L\neq 0$
נתבונן ב $\epsilon=\frac{|L|}{2}$

$$\left|\frac{\lfloor x\rfloor\sin x}{x}-L\right|\geq\frac{|L|}{2}$$

בדומה לחלק הקודם, נבחר $x=\min\left\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{10}\right\}$, ואכן

$$0<|x|\underset{x\leq\frac{\delta}{2}<\delta}{<}\delta$$

מכיוון ש$0<x<\frac{1}{10}$, $\lfloor x\rfloor=0$

$$\left|\frac{\lfloor x\rfloor\sin x}{x}-L\right|=\left|\frac{0\sin x}{x}-L\right|=|0-L|=|L|>\frac{|L|}{2}$$

ולכן גם $L\neq 0$ לא אפשרי.
לכן אין גבול
■
ב.
נרצה להראות שקיימות שתי קבוצות, $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\to 0$ כך ש

$$f(x_n)\to L_1$$
$$f(y_n)\to L_2$$
$$L_1\neq L_2$$

נתבונן בסדרות הבאות אותן אנחנו מכירים מהכיתה

$$x_n=\frac{1}{n}$$
$$y_n=\frac{-1}{n}$$

שתיהן שואפות ל-0 ולעולם לא שוות ל-0, ולכן הן מתאימות בשביל שימוש במשפט היינה.
נבדוק את $f(x_n), f(y_n)$
עבור כל $n>1$

$$f(x_n)=\frac{\lfloor x_n\rfloor \sin x_n}{x_n} \underset{0<\frac{1}{n}<1 \Longrightarrow \lfloor x_n\rfloor=0}{=} \frac{0\sin x_n}{x_n}=0$$

$$f(y_n)=\frac{\lfloor y_n\rfloor \sin(y_n)}{y_n} = \underset{0>-\frac{1}{n}>-1}{=} \frac{-1\sin y_n}{y_n}$$

מכיוון ש$y_n\to 0$, ו$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\frac{\sin y_n}{y_n}\to 1$

$$\frac{-1\sin y_n}{y_n}=-\frac{\sin y_n}{y_n}\to -1$$

$0\neq -1$ ולכן על פי משפט היינה, לפונקציה אין גבול ב0 $x\to$
■ ג.
נחשב את

$$\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\lfloor x\rfloor}_{\xrightarrow{x\to 0^-}-1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0^-}1}=-1\cdot 1=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\lfloor x\rfloor \sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\lfloor x\rfloor}_{\xrightarrow{x\to 0^+}0}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0^+}1}=0\cdot 1=0$$

מכיוון ששני הגבולות החד-צדדיים שונים, הגבול הנקודה לא קיים
■
ד.
נראה כי קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $0<|x|<\delta, 0<|y|<\delta$ כך ש

$$|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$$

נתבונן ב-$\epsilon = \frac{1}{1000}, x \geq \max\left\{-\frac{\delta}{2}, -\frac{1}{10}\right\}, y = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{10}\right\}$
ואכן

$$0 < |x| \underset{x \geq -\frac{\delta}{2} > -\delta}{<} \delta$$
$$0 < |y| \underset{y \leq \frac{\delta}{2} < \delta}{<} \delta$$

על פי זהות שראינו בכיתה, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
כלומר עבור $\epsilon_1 = \frac{1}{3}$ קיים $\delta_1 > 0$ כך ש

$$0 < |x| < \delta_1 \implies \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{1}{3} \implies -\frac{1}{3} < \frac{\sin x}{x} - 1 < \frac{1}{3} \implies \frac{2}{3} < \frac{\sin x}{x} < \frac{4}{3}$$

ולכן נבחר $x = \max\left\{-\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta_1}{2}, -\frac{1}{10}\right\}$
נבחן את $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor$
מכיוון ש-x הוא המקסימום של שלושה מספרים שליליים, x שלילי. מכיוון ש-y הוא המקסימום של שני מספרים חיוביים, y חיובי.

$$0 > x \geq -\frac{1}{10} \implies \lfloor x \rfloor = -1$$
$$0 < y \leq \frac{1}{10} \implies \lfloor y \rfloor = 0$$

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{\lfloor x \rfloor \sin x}{x} - \frac{\lfloor y \rfloor \sin y}{y}\right| = \left|\frac{-1 \sin x}{x} - \frac{0 \sin y}{y}\right|$$
$$= \left|-1 \cdot \frac{\sin x}{x} - 0\right| \underset{|x| < \frac{\delta_1}{2} < \delta_1}{>} \left|-1 \cdot \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} > \frac{1}{1000} = \epsilon$$

■

שאלה 2

תהא $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. לכל $U \subset \mathbb{R}$ נגדיר:

$$f^{-1}(U) = \{x \in (a,b) : f(x) \in U\}$$

הוכיחו כי f רציפה ב-x_0 אמ"מ לכל קבוצה $U \subset \mathbb{R}$, אם $f(x_0) \in \text{int}(U)$, אזי $x_0 \in \text{int}(f^{-1}(U))$.

פתרון 2

ראשית נוכיח $\Leftarrow$
נניח כי f רציפה ב-x_0 ונרצה להוכיח שלכל קבוצה $U \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x_0) \in \text{int}(U) \implies x_0 \in \text{int}\left(f^{-1}(U)\right)$$

יהיו $U \subset \mathbb{R}$,
יהי $x_0 \in (a,b)$ כך ש-$f(x_0) \in \text{int}(U)$, מהגדרת $f(x_0)$ כנקודת פנים של U, קיים $\epsilon > 0$ כך ש

$$(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq U$$

לפי הגדרת הרציפות מתקיים

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

לכן, עבור ϵ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (הסביבה לא נקובה, כי f מוגדרת בx_0) מתקיים

$$f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

מהגדרת קבוצת המקורות

$$\begin{aligned} & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \implies & f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq U \\ \implies & (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}(U) \\ \implies & x_0 \in \text{int}\left(f^{-1}(U)\right) \end{aligned}$$

כעת נוכיח $\Rightarrow$
נניח כי לכל קבוצה $U \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x_0) \in \text{int}(U) \implies x_0 \in \text{int}\left(f^{-1}(U)\right)$$

נרצה להוכיח כי f רציפה
יהי $\epsilon > 0$, תהא $x_0 \in (a,b)$, נבחר $U = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ נרצה למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a,b)$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

מכיוון ש$f\left(x_{0}\right)\in\text{int}\left(U\right)$, $x_{0}\in\text{int}\left(f^{-1}\left(U\right)\right)$, כלומר, קיים $\delta'>0$ כך ש

$$\left(x_{0}-\delta',x_{0}+\delta'\right)\subseteq f^{-1}\left(U\right)$$

כלומר כל נקודת $x\in\left(x_{0}-\delta',x_{0}+\delta'\right)$ היא מקור של f כך שהתמונה שלו היא איבר ב-U, ולכן

$$\left|x-x_{0}\right|<\delta'\implies f\left(x\right)\in\left(f\left(x_{0}\right)-\epsilon,f\left(x_{0}\right)+\epsilon\right)$$

נבחר $\delta=\delta'$ ונקבל

$$\left|x-x_{0}\right|<\delta\implies\left|f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)\right|<\epsilon$$

כנדרש

■

שאלה 3

תהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ ותהא $x_{0}\in\left(a,b\right)$. הוכיחו כי התכונות הבאות שקולות:

א. f רציפה ב-x_{0}

ב. קיימת פונקציה $\epsilon:A\to\mathbb{R}$, מוגדרת בסביבה כלשהי של 0, רציפה ב-0, המקיימת $\epsilon\left(0\right)=0$, כך ש:

$$f\left(x\right)=f\left(x_{0}\right)+\epsilon\left(x-x_{0}\right)$$

פתרון 3

ראשית נוכיח א $\Longleftarrow$ ב

נניח כי f רציפה ב-x_{0}, נרצה להוכיח כי קיימת פונקציה $\epsilon:A\to\mathbb{R}$, מוגדרת בסביבה כלשהי של 0, רציפה ב-0, המקיימת $\epsilon\left(0\right)=0$, כך ש:

$$f\left(x\right)=f\left(x_{0}\right)+\epsilon\left(x-x_{0}\right)$$

f רציפה ב-x_{0} ולכן

יהי $\epsilon_{1}>0$ קיים $\delta_{1}>0$ כך שלכל $x\in\left(x_{0}-\delta_{1},x_{0}+\delta_{1}\right)$ מתקיים

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)\right|<\epsilon_{1}$$

נגדיר פונקציה $\epsilon\left(x\right)$ בדרך הבאה

$$\epsilon:\left(-\delta_1,\delta_1\right)\to\mathbb{R}$$
$$\epsilon\left(h\right)=f\left(h+x_0\right)-f\left(x_0\right)$$

נראה שאכן כל התנאים מתקיימים,
הפונקציה מוגדרת לסביבת δ_1 של 0, נראה ש $\epsilon\left(0\right)=0$

$$\epsilon\left(0\right)=f\left(0+x_0\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)=0$$

נראה רציפות ב-0

$$\lim_{h\to0}\epsilon\left(h\right)=\lim_{h\to0}f\left(h+x_0\right)-f\left(x_0\right)$$

מכיוון שf רציפה בx_0

$$\lim_{h\to0}f\left(h+x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

ולכן מאריתמטיקת גבולות (חיסור)

$$\lim_{h\to0}f\left(h+x_0\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)=0=\epsilon\left(0\right)$$

עכשיו נותר רק להראות ש

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\epsilon\left(x-x_0\right)$$

נציב $h=x-x_0$בפונקציה ϵ ונקבל

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f\left(x-x_0+x_0\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)+f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x\right)$$

כעת נוכיח ב $\Leftarrow$ א
נניח כי כי קיימת פונקציה $\epsilon:A\to\mathbb{R}$, מוגדרת בסביבה כלשהי של 0, רציפה ב-0,
המקיימת $\epsilon\left(0\right)=0$, כך ש:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\epsilon\left(x-x_0\right)$$

ונרצה להוכיח ש-f רציפה ב-x_0
נתבונן בגבול

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=$$

מהנתון $f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\epsilon\left(x-x_0\right)$, ולכן

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x_0\right)+\epsilon\left(\underbrace{x-x_0}_{\to0}\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x_0\right)+\epsilon\underbrace{\left(0\right)}_{\to0}=f\left(x_0\right)$$

כלומר קיים לf גבול בx_0 והגבול הוא $f\left(x_0\right)$, אזי f רציפה ב-x_0
■

שאלה 4

תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת $L=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}$. הוכיחו כי f לא חח"ע.

פתרון 4

נגדיר פונקציה g כ"הרחבה" של f

$$g(x):[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in(a,b)\\ L & x=a\vee x=b\end{cases}$$

g רציפה כי f בתחום הגדרתה ומהנתון ש$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}=L$
ממשפט ויירשטראס, לg יש נקודת מקסימום שנסמנה M, ונקודת מינימום שנסמנה m.
נגדיר $x_M\in[a,b]$ בתור הנקודה הקטנה ביותר המקיימת $g(x_M)=M$ ואת $x_m\in[a,b]$ בתור הנקודה הקטנה ביותר המקיימת $g(x_m)=m$.
נחלק למקרים לפי הערכים של m,M
אם $L=M=m$ אזי g היא הפונקציה הקבועה $g(x)=L$ ולכן גם f היא הפונקציה הקבועה $f(x)=L$, ועל כן לא חח"ע
אם $L=m\neq M$, אזי $x_m=a$. נסמן $y:=\frac{M+m}{2}$ את נקודת האמצע בין m ל-M. ממשפט ערך הביניים קיים $a<x_1<x_M$ כך ש$g(x_1)=y$. ממשפט ערך הביניים קיים גם $x_M<x_2<b$ כך ש$g(x_2)=y$, $x_1\neq x_2$ כי הם נמצאים בקטעים זרים, $x_1\in(a,x_M)\,,x_2\in(x_M,b)$.
מכיוון ש $x_1,x_2\in(a,b)$

$$g(x_1)=f(x_1)=g(x_2)=f(x_2)=y$$

ולכן f לא חח"ע
אם $L=M\neq m$ אזי $x_M=a$, נסמן $y:=\frac{M+m}{2}$ את נקודת האמצע בין m ל-M. ממשפט ערך הביניים קיים $a<x_1<x_m$ כך ש$g(x_1)=y$. ממשפט ערך הביניים קיים גם $x_M<x_2<b$ כך ש$g(x_2)=y$, $x_1\neq x_2$ כי הם נמצאים בקטעים זרים, $x_1\in(a,x_m)\,,x_2\in(x_m,b)$.
מכיוון ש $x_1,x_2\in(a,b)$

$$g(x_1)=f(x_1)=g(x_2)=f(x_2)=y$$

ולכן f לא חח"ע
אם $M\neq L,m\neq L,m\neq M$, אזי $m,M\in(a,b)$. נניח בה"כ כי $x_M>x_m$ (במצב

ההפוך, נהפוך את המיקומים שלהם בכל אי-שיוויון בהמשך ההוכחה).
נסמן $y := \frac{L+m}{2}$ את נקודת האמצע בין m ל-L. ממשפט ערך הביניים קיים $a < x_1 < x_m$ כך ש$g(x_1) = y$, ממשפט ערך הביניים קיים $x_m < x_2 < x_M$ כך ש$g(x_2) = y$
$x_1 \neq x_2$ כי הם נמצאים בקטעים זרים, $x_1 \in (a, x_m), x_2 \in (x_m, x_M)$.
מכיוון ש $x_1, x_2 \in (a, b)$

$$g(x_1) = f(x_1) = g(x_2) = f(x_2) = y$$

לכן f לא חח"ע
הוכחנו לכל אפשרות.
■

שאלה 5

תהי $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ רציפה, כך שהגבולות $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ו-$\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיימים וסופיים.
א. הוכיחו כי f רציפה במ"ש
ב. אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ הוכיחו כי f מקבלת מינימום או מקסימום.
ג. נגדיר את הפונקציה $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

הוכיחו כי f רציפה במ"ש ומקבלת מקסימום גלובלי.

פתרון 5

נגדיר $L_1 := \lim_{x\to a^+} f(x), L_2 := \lim_{x\to\infty} f(x)$
נגדיר פונקציה g כ"הרחבה" של f (בדומה לשאלה 4)

$$g(x) : [a, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, \infty) \\ L_1 & x = a \end{cases}$$

יהי $\epsilon > 0$, נרצה למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in [a, \infty)$ המקיימים $|x - y| < \delta$ מתקיים

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

מתנאי קושי לגבול באינסוף, עבור ϵ קיים $N > a$ כך שלכל $x, y > N$ מתקיים

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

נתבונן בקטע $[a, N+1]$, g רציפה בקטע הזה, ולכן לפי משפט קנטור היינה, בגלל שזה קטע סגור, היא גם רציפה במ"ש, לכן עבור ϵ קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x, y \in [a, N+1]$ המקיימים $|x - y| < \delta_1$ מתקיים

$$|g(x) - g(y)| < \epsilon$$

נחבר את התנאים שלנו ועל כן נבחר $\delta = \min\{1, \delta_1\}$
בגלל ש-g הרחבה של f, זה נכון על כל g ועל כן על כל f
ב.
נגדיר $L = L_1 = L_2$
אם $f(x) = L$, אז כל נקודה היא גם המינימום וגם המקסימום, כי זו הפונקציה הקבועה.
עכשיו עבור פונקציה לא קבועה
מכיוון שהפונקציה לא קבועה קיים $b \in (a, \infty)$ כך ש $f(b) \neq L$
נסתכל על הקטע הסגור $[a, b]$.
על פי משפט ווירשטראס $g(x)$ מקבלת שם מקסימום ומינימום, ולפחות אחד מהם לא נמצא ב$g(a)$ כי f לא פונקציה קבועה, ולכן גם $f(x)$ מקבלת מינימום ומקסימום ב$(a, b]$
לכן אם $f(b) > L$, אחרי b, $f(x)$ צריכה בסופו של דבר לרדת על מנת "להתקרב" ל-L, ואז גם אם אין מינימום, עדיין יש מקסימום
אם $f(b) < L$, אחרי b, $f(x)$ צריכה בסופו של דבר לעלות על מנת "להתקרב" ל-L ואז גם אם אין מקסימום עדיין יש מינימום.
ג.
נתבונן בפונקציה

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ניתן לכתוב אותה מחדש בצורה שקולה בדרך הבאה

$$f(x) = e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} + e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

מכאן, f רציפה כהרכבה וסכום של פונקציות אלמנטריות
נמצא את הגבולות בקצוות של תחום ההגדרה של f

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}_{\to 1} = e + 1$$

הגבול קיים וסופי

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} + \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{\to e} = e+1$$

הגבול קיים וסופי
מכאן על פי סעיף א', f רציפה במ"ש
מכיוון שהגבולות גם שווים, על פי סעיף ב' קיים מינימום או מקסימום. על מנת לבדוק אם קיים מקסימום, נבדוק אם קיימת נקודה $x_0 \in (0,\infty)$ שעבורה $f\left(x_0\right) > e+1$
נתבונן בנקודה $x=1$

$$f\left(1\right) = \left(1+1\right)^{1} + \left(1+1\right)^{1} = 4 > e+1$$

ולכן קיימת נקודת מקסימום
■