מועד א׳

10 בפברואר 2026

1. (a) (10 points) תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה כך שלכל $x,z\in A$ ו-$y\in\mathbb{R}$, אם $x\leq y\leq z$ אזי גם $y\in A$. הוכיחו שקבוצה זו היא קטע סגור, פתוח או חצי-סגור חצי-פתוח

   (b) (8 points) תהיינה $f,g:[0,\infty)$ גזירות המקיימות $f(0)=g(0)$, וכמו כן $f'(x)\leq g'(x)$ לכל $x\geq 0$. הוכיחו כי $f(x)\leq g(x)$

   (c) (8 points)] תהא $f:[0,a)\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש, הוכיחו כי קיים הגבול $\lim_{x\to a^-}f(x)$

   (d) (9 points) תהא $f:[0,a)\to\mathbb{R}$ רציפה, נתון כי הגבול $\lim_{x\to a^-}f(x)$ קיים. הוכיחו כי f רציפה במ"ש

2. (a) (7 points) צטטו במפורש את קריטריון היינה לקיום גבול בנקודה

   (b) (8 points) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו כי לכל סדרה מתכנסת $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתנכסת.

   (c) (10 points) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל סדרה מתנכסת $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנכסת. הוכיחו כי f רציפה

3. (a) (10 points) נסחו את קריטריון קושי להתנכסות סדרות

   (b) (10 points) תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $q\in(0,1)$ כך שלכל n מתקיים $|a_{n+1}-a_n|\leq q^n$ הוכיחו כי a_n מתכנסת.

   (c) (7 points) הגדירו מתי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא ליפשיצית

   (d) (8 points) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ליפשיצית עם קבוע ליפיץ $0\leq C\leq 1$. הוכיחו כי קיימת נקודה יחידה $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=x$

   (e) (5 points) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שההרכבה $g=f\circ f$ היא פונקציה ליפשיצית עם קבוע ליפשיץ $0\leq C\leq 1$. הוכיחו כי קיימת נקודה יחידה $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=x$