מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 6

yavidor

16 בפברואר 2026

שאלה 1

נתבונן ביחס השקילות "שיקלות מודולו n" על קבוצת השלמים, המוגדר באופן הבא:
$x \equiv_n y$ אם ורק אם $n|x-y$ (כלומר, קיים k שלם כך ש-$x-y=nk$).
הראו: לכל n, היחס "שקילות מודולו n" מהווה יחס שקילות על קבוצת השלמים.

פתרון 1

יהי $n \in \mathbb{N}$, נרצה להוכיח ש $\equiv_n$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{Z}$

רפלקסיביות

יהי $x \in \mathbb{Z}$
מההגדרה, $x \equiv_n x \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = nk$
$x - x = 0$, ולכן לכל x, $k = 0$ מקיים את התנאי: $x - x = 0 = n \cdot 0$ כלומר לכל x מתקיים $x \equiv_n x$, ולכן רפלקסיבי

סימטרי

יהיו $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש$x \equiv_n y$, נרצה להראות כי $y \equiv_n x$

$$x \equiv_n y \implies \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = nk \underset{\times -1}{\implies} y - x = n \cdot (-k) \implies y \equiv_n x$$

טרנזיטיבי

יהיו $x, y, z \in \mathbb{Z}$ כך ש$x \equiv_n y$ ו$y \equiv_n z$, נרצה להראות כי $x \equiv_n z$

$$\begin{array}{l} x \equiv_n y \implies \exists k_0 \in \mathbb{Z} : x - y = nk_0 \\ y \equiv_n z \implies \exists k_1 \in \mathbb{Z} : y - z = nk_1 \end{array} \underset{+}{\implies} x - y + y - z = nk_0 + nk_1$$

נארגן קצת את המשוואה

$$x - y + y - z = nk_0 + nk_1 \implies x - z = n \cdot (k_0 + k_1) \implies n|x - z \implies x \equiv_n z$$

שאלה 2

בהינתן שני יחסי שקילות R, S על קבוצה X, נאמר שהיחס S הוא עידון של היחס R אם לכל $x \in X$ מתקיים $[x]_R \subseteq [x]_S$.

סעיף א'

הראו שהיחס "שקילות מודלו 4" הוא עידון של היחס "שקילות מודולו 2".

סעיף ב'

נתונים שני יחסי שקילות R, S על קבוצה X כך ש-S הוא עידון של R, ונתון ש$R \neq S$. נתון חתך A של S. הראו: A אינו חתך של R.

פתרון 2

סעיף א'

יהי $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש $x \equiv_4 y$. נרצה להוכיח כי $x \equiv_2 y$.

$$x \equiv_4 y \implies 4|x-y \implies \exists k \in \mathbb{Z} : x-y = 4k$$
$$\implies x-y = 2\cdot(2k) \implies 2|x-y \implies x \equiv_2 y$$

כלומר לכל x, y שנמצאים באותה מחלקת שקילות של $\equiv_4$, הם נמצאים גם באותה מחלקת שקילות של $\equiv_2$

■

סעיף ב'

יהיו $S \neq R$ יחסי שקילות על X כך ש-S הוא עידון של R, ו-A חתך של S. צריך להראות ש-A אינו חתך של R

נניח בשלילה כי A חתך של S

יהיו $x, y \in X$ כך ש $[x]_S = [y]_S$ **אבל** $[x]_R \neq [y]_R$, אנחנו יודעים שזה אפשרי כי

$S \neq R$.

יהיו $a, b \in A$ הנציגים ממחלקות השקילות של $[y]_R, [x]_R$ בהתאמה.

a הוא הנציג של x בחתך A על פי ההגדרה. $[x]_S = [y]_S$, וb הוא הנציג של y ב-A,

לכן b הוא הנציג של x ב-A, סתירה

קיבלנו שאו שיש ל-x שני נציגים בחתך, וזו סתירה להגדרת חתך, או ש$a = b$, שזו סתירה לזה שלכל מחלקת שקילות קיים נציג יחיד בחתך

■