מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 8

yavidor

17 בפברואר 2026

תרגיל 1

סעיף א׳

נתונות קבוצות A,B,C,D כך ש-$|B|=|D|\,,|A|=|C|$, הראו: $|A\times B|=|C\times D|$

סעיף ב׳

נתונה קבוצה A לא ריקה. הראו

$$|A|\leq|A\times A|$$

סעיף ג׳

תנו דוגמה לקבוצה A כך ש-$|A|=|A\times A\times A|$

סעיף ד׳

תנו דוגמה לקבוצה A כך ש-$|A|<|A\times A\times A|$

פתרון 1

סעיף א׳

$|A|=|B|$, ולכן קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע ועל.
$|C|=|D|$, ולכן קיימת פונקציה $g:C\to D$ חח"ע ועל.
נרצה להראות $|A\times B|$ = $|C\times D|$ כלומר שקיימת פונקציה חח"ע ועל עם תחום $A\times B$ וטווח $C\times D$
נעשה זאת בכך שנבנה אותה ישירות

$$h:A\times B\to C\times D$$
$$\forall\left(a,b\right)\in\left(A\times B\right):h\left(\left(a,b\right)\right)=\left(f(a),g(b)\right)$$

כעת נראה ש-h חח"ע ועל

חד-חד ערכית

יהיו $(a_1,b_2),(a_2,b_2)\in A\times B$ **כך ש**-$h((a_1,b_1))=h((a_2,b_2))$

$$h((a_1,b_1))=h((a_2,b_2))\implies(f(a_1),g(b_2))=(f(a_2),g(b_2))$$

f,g חח"ע ולכן:

$$\begin{matrix}f(a_1)=f(a_2)\implies a_1=a_2\\g(b_1)=g(b_2)\implies b_1=b_2\end{matrix}\implies(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$$

אזי h חח"ע

על

יהי $(c,d)\in C\times D$
נרצה להוכיח כי בהכרח קיים $(a,b)\in A\times B$ **כך ש**-$h\left((a,b)\right)=(c,d)$
f על, ולכן עבור c **בהכרח** קיים a **כך ש** $f\left(a\right)=c$
g על, ולכן עבור d **בהכרח** קיים b **כך ש** $g\left(b\right)=d$ לכן

$$h\left((a,b)\right)=(f(a),g(b))=(c,d)$$

מכאן ש-h חד-חד ערכית ועל. על פי משפט שראינו בהרצאה, שתי קבוצות הן שוות עוצמה אם קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל מאחת לשנייה, לכן

$$|A\times B|=|C\times D|$$

■

סעיף ב׳

צריך להראות ש $|A|\le|A\times A|$, כלומר שקיימת $f:A\to A\times A$ חח"ע, נגדיר אותה **במפורש**

$$f:A\to A\times A$$
$$\forall a\in A:f\left(a\right)=(a,a)$$

נראה כי f חח"ע
יהיו $a_1,a_2\in A$ **כך** $f(a_1)=f(a_2)$

$$f(a_1)=(a_1,a_1)=f(a_2)=(a_2,a_2)\implies(a_1,a_1)=(a_2,a_2)$$
$$\implies a_1=a_2\wedge a_1=a_2$$
$$\implies a_1=a_2$$

הראינו שקיימת פונקציה חח"ע $A\to A\times A$ ולכן לפי הגדרה $|A|\le|A\times A|$ ■

סעיף ג׳

$A = \emptyset$

ראינו בכיתה.

■

סעיף ד׳

$A = \{1, 2\}$

■

תרגיל 2

סעיף א'

בהינתן קבוצה A, מצאו פונקציה חח"ע ועל בין $\mathcal{P}\left(A\right)$ ו-$\{0,1\}^{A}$

סעיף ב'

הראו: $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{N}\right|$

פתרון 2

סעיף א'

נגדיר פונקציה F כך שתעביר כל תת-קבוצה של A לפונקציית האינדיקטור שלה

$$F:\mathcal{P}\left(A\right)\to\left\{ 0,1\right\} ^{A}$$
$$\forall\tilde{A}\in\mathcal{P}\left(A\right):F(\tilde{A})=f_{\tilde{A}}$$
$$f_{\tilde{A}}:A\to\left\{ 0,1\right\}$$
$$\forall a\in A:f_{\tilde{A}}\left(a\right)=\begin{cases} 1 & a\in\tilde{A}\\ 0 & a\notin\tilde{A} \end{cases}$$

נראה כי F חח"ע ועל

חד-חד ערכית

יהיו $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$ כך ש$F(A_1) = F(A_2)$
כלומר לכל $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ מתקיים $f_{A_1}(a_1) = f_{A_2}(a_2)$
מכאן שלכל $a \in A$

$$f_{A_1}(a) = 1 \implies f_{A_2}$$

214269565

תרגיל 3

הראו: אם X,Y,Z קבוצות כך ש-$|Y|<|X|$ וגם $|Z|<|Y|$ אז $|X|<|Z|$

214269565