אלגברה א' 01040066
גליון 1

יונתן אבידור - 214269565

15 בנובמבר 2025

שאלה 1

א. פתרו את המשוואה $z^2+|z^2|=1+2i$
ב. יהיו $z_1,\ldots,z_{10}$ מספרים מרוכבים המקיימים $|z_i|=3$ לכל $i=1,\ldots,10$. נתון כי $|z_1+\cdots+z_{10}|=9$. חשבו את ערך הביטוי

$$\left|\frac{1}{z_1}+\ldots+\frac{1}{z_{10}}\right|$$

פתרון 1

א.
נתבונן בצד השמאלי של המשוואה
ראשית, נשים לב ש $|z^2|=|z|^2$
נכתוב מחדש את המשוואה ונפרק לחלק ממשי וחלק מדומה

$$z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})\implies$$
$$z^2+|z|^2=(a+bi)^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=a^2+2abi-b^2+a^2+b^2=2a^2+2abi$$

עכשיו כשיש לנו חלק ממשי ($2a^2$) וחלק מדומה ($2abi$), נשווה ל$1+2i$

$$\begin{cases}2a^2=1\underset{\div 2}{\implies}a=\frac{1}{2}\underset{\sqrt{}}{\implies}a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 2ab=2\underset{\div 2}{\implies}ab=1\underset{a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}{\implies}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}b=1\underset{\div\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}{\implies}b=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

קיבלנו את שני השורשים הריבועיים של z

$$\boxed{z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}i,z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}i}$$

ב.
ראשית, נרצה להוציא את המספר המרוכב מהמכנה, נעשה זאת באמצעות הכפלה בצמוד.

$$\frac{1}{z_i}=\frac{1}{z_i}\cdot\frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_i}=\frac{\bar{z}_i}{|z_i|^2}\underset{(*)}{=}\frac{\bar{z}_i}{3^2}=\frac{\bar{z}_i}{9}$$

(*) נתון לנו ש$|z_i| = 3$
נכתוב מחדש את הביטוי שעלינו לחשב

$$\begin{aligned}\left|\frac{\bar{z_1}}{9}+\ldots+\frac{\bar{z_{10}}}{9}\right| &= \left|\frac{1}{9}\cdot(\bar{z_1}+\ldots+\bar{z_{10}})\right| \\ &\underset{(*)}{=} \left|\frac{1}{9}\cdot(\overline{z_1+\ldots+z_{10}})\right| \\ &\underset{(**)}{=} \left|\frac{1}{9}\right|\cdot|\overline{z_1+\ldots+z_{10}}| \\ &\underset{(***)}{=} \frac{1}{9}\cdot|z_1+\ldots+z_{10}| \\ &\underset{(****)}{=} \frac{1}{9}\cdot 9 = \boxed{1}\end{aligned}$$

$$(*)\ \bar{z}+\bar{w}=\overline{z+w}$$
$$(**)\ \ |x\cdot y| = |x|\cdot|y|$$
$$(***)\ \ |\bar{z}| = |z|$$
$(****)$ נתון $|z_1+\cdots+z_{10}|$

שאלה 2

א. יהיו w, z מספרים מרוכבים שאינם ממשיים, כך שמתקיים $wz \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $w = \alpha\bar{z}$ ב. יהא $z \neq 0$. הוכיחו כי:

$$\mathrm{Re}\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)\right) < 1$$

ג. הוכיחו כי קיימים זוג מספרים שלמים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים:

$$\left(2882^2+2022^2\right)\left(38^2+6725^2\right) = a^2+b^2$$

פתרון 2

א.
נכתוב מחדש את z, w ונפרק אותם לחלק ממשי וחלק מדומה, נשים לב שהחלק המדומה

שונה מ-0

$$z = a + bi \, (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$$
$$w = c + di \, (c, d \in \mathbb{R}, d \neq 0)$$

ראשית נרצה לטפל במקרה הקצה שבו אחד המספרים הוא מדומה טהור, נבדוק מה קורה כשהתנאי מתרחש ואחד המספרים הוא מדומה טהור

$$a = 0 \iff c + di = \alpha \left(-bi\right)$$
$$\iff c + di = -\alpha bi$$
$$\iff c = \left(-\alpha b - d\right) i \iff c + 0i = 0 + \left(-\alpha b - d\right) i$$

נשווה ממשי ומדומה בנפרד

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\alpha b - d = 0 \iff -d = \alpha b \iff -\frac{d}{b} = \alpha \end{cases}$$

מכאן מגיעות שתי מסקנות. הראשונה היא שz מדומה טהור אם ורק אם w מדומה טהור, השנייה היא שבמצב הזה $\alpha = -\frac{d}{b}$

הגענו לפתרון כשz וw מדומים טהורים, עכשיו נפתור לשאר המקרים ונדע ש$a \neq 0, c \neq 0$

נתבונן במכפלת z וw

$$zw = \left(a + bi\right)\left(c + di\right) = ac + \left(ad\right) i + \left(bc\right) i - bd = \left(ac - bd\right) + \left(ad + bc\right) i$$

ידוע לנו ש$zw \in \mathbb{R}$, כלומר החלק המדומה שווה ל0

$$ad + bc = 0 \iff$$
$$ad = -bc \iff$$
$$-\frac{ad}{c} = b$$

נציב את b בנוסחה $w = \alpha\bar{z}$

$$c + di = \alpha\left(a + \frac{ad}{c} i\right) \iff c + di = \alpha a + \frac{\alpha ad}{c} i$$

נשווה שוב בנפרד את החלק הממשי והחלק המדומה, המטרה שלנו היא להראות שיש ערך זהה לα שיהיה מתאים גם לחלק הממשי וגם לחלק המדומה כדי שנוכל להשתמש בו

$$\begin{cases} c = \alpha a \iff \alpha = \frac{a}{c} \\ d = \frac{\alpha ad}{c} \iff dc = \alpha ad \iff c = \alpha a \iff \alpha = \frac{a}{c} \end{cases}$$

■

ב. ראשית, נרצה להוציא את המספר המרוכב מהמכנים, נעשה זאת באמצעות הכפלה בצמוד.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z}{|\bar{z}|^2} = \frac{z}{|z|^2}$$

ונכתוב מחדש את הביטוי

$$\text{Re}\left(\left(1 + \frac{z}{|z|^2}\right)\left(1 - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)\right)$$

נפתח סוגריים

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{z}{|z|^2}\right)\left(1 - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) \\
&= 1 - \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{|z|^2} - \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2 \cdot |z|^2} \\
&= 1 + \frac{z - \bar{z}}{|z|^2} - \frac{|z|^2}{|z|^2 \cdot |z^2|} \\
&= 1 + \frac{z - \bar{z} - 1}{|z|^2}
\end{aligned}$$

נכתוב מחדש את z על מנת להפריד בין החלק הממשי לחלק המדומה, ונכתוב כך מחדש את המשוואה

$$\begin{aligned}
&z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R}) \implies \\
1 + \frac{z - \bar{z} - 1}{|z|^2} &= 1 + \frac{(a + bi) - (a - bi) - 1}{\sqrt{a^2 + b^2}^2} = 1 + \frac{2bi - 1}{a^2 + b^2} \\
&= \underbrace{1 - \frac{1}{a^2 + b^2}}_{\text{Re}} + \underbrace{\frac{2b}{a^2 + b^2}}_{\text{Im}} i
\end{aligned}$$

כעת כל מה שצריך להוכיח זה ש$1 - \frac{1}{a^2+b^2} < 1$

$$1 - \frac{1}{a^2 + b^2} < 1 \underset{-1}{\iff} \frac{1}{a^2 + b^2} < 0 \underset{\times -1}{\iff} \frac{1}{a^2 + b^2} > 0$$

יצא לנו פסוק אמת מכיוון שגם המונה וגם המכנה חיוביים (המונה הוא 1 והמכנה הוא סכום של שני מספר בריבוע ושונה מ0 ולכן חיובי) כך שהביטוי מצד שמאל של המשוואה חיובי ובכך גדול מ0

■

ג.

למען הנוחות ניתן שמות למספרים בנוסחה: $c = 2882, d = 2002, e = 38, f = 6725$
נכתוב מחדש את הנוסחא

$$\left(c^2 + d^2\right)\left(e^2 + f^2\right) = \left(a^2 + b^2\right)$$

ניתן להסתכל על כל ביטוי שבתוך סוגריים בתור מודול של מספר מרוכב בריבוע, נתייחס כך לצד השמאלי של המשוואה ונפתח סוגריים

$$\begin{aligned}
&\left(c^2 + d^2\right)\left(e^2 + f^2\right) \\
&= (c + di)\,(c - di)(e - fi)(e + fi) \\
&= ((c + di)\,(e + fi))\,((c - di)\,(e - fi)) \\
&= \underbrace{((ce - df) + i\,(cf + de))}_{z}\ \underbrace{((ce - df) - i\,(cf + de))}_{\bar{z}} \\
&\underset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \sqrt{(cd - df)^2 + (cf + de)^2}^{\,2} \\
&= (cd - df)^2 + (cf + de)^2
\end{aligned}$$

נשים את מה שיצא לנו במשוואה המקורית

$$(cd - df)^2 + (cf + de)^2 = a^2 + b^2$$

מכאן אפשר לומר ש

$$\begin{aligned}
a &= cd - df \\
b &= cf + de
\end{aligned}$$

מכיוון ש$\mathbb{Z}$ סגורה לחיבור, חיסור וכפל ו$c, d, f, e \in \mathbb{Z}$. $a, b \in \mathbb{Z}$

■

שאלה 3

מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ ייקרא שורש יחידה מסדר n ($0 < n \in \mathbb{N}$ כלשהו) אם z הוא פתרון $z^n = 1$.

א. מצאו את שורשי היחידה מסדר n בהצגה פולרית.
ב. יהא $n > 1$. מהו סכום שורשי היחידה מסדר n?
ג. מהי מכפלת שורשי היחידה מסדר n?

פתרון 3

א. $z^n = 1 + 0i$, נמצא את הארגומנט והמודול שלz^n

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

על פי משפט דה-מואבר ניתן לכתוב את n השורשים של מספר מרוכב w^n כ= w_k $r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$ כש$0 \leq k \leq n-1$ נציב בz שלנו.

$$z_k = 1^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{0+2\pi k}{n}} = \boxed{1e^{i\frac{2\pi k}{n}}}$$

ב.
נתבונן בz

$$e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

נקרא ל $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, כלומר $z_k = \alpha^k$. עכשיו נכתוב את הסכום

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$$

יצא לנו סכום של סדרה הנדסית כש$q = a$ ו$a_1 = 1$

$$S_n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \underset{\alpha^n=1}{=} \frac{1-1}{\alpha-1} = \boxed{0}$$

ג. נשאר עם ההגדרה לα מהסעיף הקודם ונתבונן במכפלה

$$\alpha^0 \cdot \alpha^1 \cdot \alpha^2 \cdot \ldots \cdot \alpha^{n-1}$$

על פי חוקי חזקות ניתן גם לכתוב

$$\alpha^{0+1+2+\ldots+n-1}$$

נראה שבחזקה יש סדרה חשבונית שבה $a_1 = 0$ ו $d = 1$

$$a^{\sum_{k=0}^{n-1} k}$$

נחשב את סכום n האיברים הראשונים

$$S_n = \frac{n\left(0 + n - 1\right)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

נציב בחזרה בα, ונפתח את α בחזרה לערך המקורי

$$\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \underset{\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}}{=} e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\frac{2\pi n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)}$$

$e^{i\pi}$ הוא מספר מרוכב בעל מודול 1 וזוויות של 180° כלומר הוא נמצא על הציר הממשי בנקודה -1 מה שאומר ש

$$\text{סכום שורשי היחידה} = e^{i\pi(n-1)} = \boxed{(-1)^{n-1}}$$

שאלה 4

א. הוכיחו את מבחן השורש הרציונלי - יהא $f = a_n x^n + \ldots + a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים.
אם ל-f יש שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזי $p|a_0$ ו-$q|a_n$

ב. הוכיחו את נוסחת וייטה - יהא $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ פולינום ממשי/מרוכב. נסמן את שורשיו (כולל ריבוי) בתור $\alpha_1, .., \alpha_n$. אזי:

1. $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot a_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
2. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

פתרון

א.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^i = 0$$

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

נכפיל q^n שכמובן שונה מ0

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q_n = 0$$
$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} = -a_0 \cdot q^n$$
$$p \cdot \left(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} q + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}\right) = -a_0 \cdot q^n$$

הביטוי בתוך הסוגריים שלם (סגירות השלמים לכפל וחיבור), נקרא לו α. יוצא ש $\alpha \cdot p = -a_0 \cdot q^n$ כלומר $p| - a_0 \cdot q^n$, מכיוון שp, q זרים, מתקיים $p \nmid q$ ולכן $p|a_0 \iff p| - a_0$
עכשיו נוכיח את $q|a_n$
כמו בחצי הראשון, נכפיל בq^n

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q_n = 0$$
$$a_{n-1} \cdot p^{n-1} q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} q^2 + \ldots + a_0 \cdot q_n = -a_n \cdot p^n$$
$$q \cdot (a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} q + \ldots + a_0 q^{n-1}) = -a_n \cdot p^n$$

הביטוי בתוך הסוגריים שלם (סגירות השלמים לכפל וחיבור), נקרא לו α. יוצא ש $\alpha \cdot q = -a_n \cdot p^n$ כלומר $q| - a_n \cdot p^n$, מכיוון שp, q זרים, מתקיים $q \nmid p$ ולכן $q|a_n \iff q| - a_n$
■

ב. נציג את $f(x)$ כמכפלת גורמים לינארים

$$f(x)_n = a_n (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}_{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

נפתור את המשוואות באמצעות השוואת מקדמים
המקדם של x^n בצד הימני הוא a_n, ובצד השמאלי על מנת לקבל x^n יש לבחור בכל מכפלה את הx ולא את ה α_i (לכל α_i בין α_1 לα_n). יש רק אפשרות אחת בשביל זה ולכן המקדם הוא $a_n \cdot 1 = a_n$
בצורה דומה המקדם של x^{n-1} בצד הימני הוא a_{n-1}. בצד השמאלי צריך לבחור בכל מכפלה את הx מלבד פעם אחת, יש לזה אפשרות אחת לכל α_i ולכן $a_n \cdot (-\alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_n)$, כלומר

$$a_{n-1} = a_n \cdot (-\alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_n)$$

באותה דרך אפשר להמשיך עד x^0, כלומר המקדם החופשי. בצד הימני זה a_0, בצד הימני יש לבחור בכל מכפלה את α_i (על מנת לא לקבל אף x)

$$a_0 = a_n \cdot (-\alpha_1 \cdot -\alpha_2 \cdot \ldots \cdot -\alpha_n) = a_n \cdot (-1)^n (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)$$

עכשיו כשיש לנו ייצוג לכל האלמנטים בנוסחה, נסדר אותם
נזכור ש$a_n \neq 0$ כי אז מדובר בעצם במפולינום ממעלה $n-1$

$$\begin{aligned}
& a_0 = a_n \cdot (-1)^n \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n\right) \\
\underset{\div a_n}{\iff} \; & \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n\right) \\
\underset{\div (-1)^n}{\iff} \; & \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{(-1)^n} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \\
\iff \; & \frac{a_0}{a_n} (-1)^n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n
\end{aligned}$$

הוכחנו את הנוסחה הראשונה, נוכיח את השנייה

$$\begin{aligned}
& a_{n-1} = a_n \cdot \left(-\alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_n\right) \\
\underset{\div a_n}{\iff} \; & \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n \\
\underset{\times -1}{\iff} \; & -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n
\end{aligned}$$

■

שאלה 5

נתון הפולינום

$$p(x) = 3x^6 - 9x^5 - 3x^4 + 33x^3 - 36x^2 + 12x$$

רשמו את $p(x)$ כמכפלת גורמים לינארים מעל $\mathbb{C}$.

פתרון

ניתן לראות שכל המקדמים מתחלקים ב3 ושאין מקדם חופשי מה שאומר שאפשר לחלק ב$3x$

$$f(x) = \frac{p(x)}{3x} = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$$

מעתה נעבוד עם $f(x)$ בשביל הנוחות ונזכור להכפיל בסוף ב$3x$ (ו‑0 שורש)

ידוע לנו שאם סכום המקדמים שווים ל0 אז 1 שורש, נבדוק

$$1-3-1+11-12+4=0$$

נגזור לבדוק ריבוי

$$f'(x)=5x^4-12x^3-3x^2+22x-12$$
$$f'(1)=5-12-3+22-12=0$$
$$f''(x)=20x^3-36x^2-6x+22$$
$$f''(1)=20-36-6+22=0$$
$$f'''(x)=60x^2-72x-6$$
$$f'''(1)=60-72-6=-18$$

1 שורש מריבוי 3 נבדוק את מבחן השורש הרציונלי

$$\frac{p}{q}=f(x) \implies p|4,\ q|1 \implies \frac{p}{q}\in\{\pm1,\pm2,\pm4\}$$

בדקנו את 1, נבדוק את -1

$$f(-1)=-1-3+1+11+12+4=24$$

-1 לא שורש נבדוק את 2

$$f(2)=32-48-8+44-24+4=0$$
$$f'(2)=80-96-12+44-12=4$$

2 שורש מריבוי 1 נבדוק את -2

$$f(-2)=-32-48+8+44+24+4=0$$

אין צורך לגזור כי לפי המשפט היסודי של האלגברה יש 6 שורשים וכבר מצאנו מספיק, כך ש -2 שורש מריבוי 1.
יצא שיש ל$f(x)$ את השורשים 1 מריבוי 3, 2 מריבוי 1, -2 מריבוי 1. נכפיל את $f(x)$ ב$3x$ כפי שציינו קודם על מנת לקבל את $p(x)$

$$\boxed{p(x)=3x(x-1)^3(x-2)(x+2)}$$