אלגברה א' 01040066
גליון 5

יונתן אבידור - 214269565

2 בפברואר 2026

שאלה 1

סעיף א'

נתבונן V הכוללת את כל הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה 3, תחת הפעולות הבאות:

$$p\left(x\right)\oplus q\left(x\right)=p\left(x\right)+q(x)+x^{2}$$
$$\alpha\odot p(x)=\alpha p(x)+(\alpha-1)x^{2}$$

הוכיחו כי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

סעיף ב'

נתבונן בקבוצה $B=\left\{(x,y):x,y\in\mathbb{Z}_{11}\right\}$ תחת הפעולות:

$$(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$$
$$\alpha(x,y)=(\alpha x,y)$$

האם B מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_{11}$?

פתרון 1

סעיף א'

נוכיח את כל האקסיומות של מרחב וקטורי
יהיו $p,q,r\in\mathbb{R}_{3}\left[x\right]$ ו$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$p=a_{3}\cdot x^{3}+a_{2}\cdot x^{2}+a_{1}\cdot x+a_{0}$$
$$q=b_{3}\cdot x^{3}+b_{2}\cdot x^{2}+b_{1}\cdot x+b_{0}$$
$$r=c_{3}\cdot x^{3}+c_{2}\cdot x^{2}+c_{1}\cdot x+c_{0}$$

סגירות לחיבור $(\oplus)$

ראינו בכיתה שהדרגה של חיבור פולינומים היא לכל היותר המקסימום בין שני הפולינומים כלומר:

$$\begin{aligned}\deg(p(x)+q(x)+x^{2})&\leq\max\left\{\deg(p(x)),\deg(q(x)),\deg(x^{2})\right\}\\&=\max\left\{3,3,2\right\}\leq3\end{aligned}$$

קומוטטיביות לחיבור ($\oplus$)

$$q(x) \oplus p(x) = q(x) + p(x) + x^2 \underset{\text{קומוטטיביות של חיבור}}{=} p(x) + q(x) + x^2 = p(x) \oplus q(x)$$

אסוציאטיביות לחיבור ($\oplus$)

$$\begin{aligned} p \oplus (q \oplus r) &= p(x) + \left(q(x) + r(x) + x^2\right) + x^2 \\ &\underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות בשדה}}{=} p(x) + q(x) + r(x) + 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \oplus q) \oplus r &= \left(p(x) + q(x) + x^2\right) + r(x) + x^2 \\ &\underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות בשדה}}{=} p(x) + q(x) + r(x) + 2x^2 \\ &\implies p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r \end{aligned}$$

קיום איבר אדיש חיבורית

נחפש פולינום שיהיה האיבר האדיש החיבורי $\vec{0} \in V$, נתבונן ב$\vec{0} = -x^2$

$$p \oplus \left(-x^2\right) = p(x) + \left(-x^2\right) + x^2 = p(x)$$

קיום איבר נגדי

יהא $p \in V$, נחפש $q \in V$ כך ש-$p \oplus q = \vec{0}$ (כאשר $\vec{0}$ הוא האדיש החיבורי שמצאנו כרגע), נתבונן ב-$-p - 2x^2$

$$p \oplus q = p - p - 2x^2 + x^2 = -x^2 = \vec{0}$$

סגירות לכפל בסקלאר

$$\begin{aligned} \deg(\alpha \odot p) &\leq \max\left\{\deg\left(\alpha p\right), \deg\left((\alpha - 1)x^2\right)\right\} \\ &\leq \max\left\{\deg(p), deg(x^2)\right\} = \max\{3, 2\} \leq 3 \\ &\implies \alpha \odot p \in V \end{aligned}$$

אסוציאטיביות בכפל בסקלאר

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot p) &= \alpha \cdot \left(\beta \cdot p(x) + (\beta - 1)\, x^2\right) + (\alpha - 1)\, x^2 \\ &\underset{\text{דיסטריבוטיביות בממשיים}}{=} \alpha\beta \cdot p(x) + (\alpha\beta - \alpha)x^2 + (\alpha - 1)x^2 \\ &\underset{\text{דיסטריבוטיביות בממשיים}}{=} \alpha\beta \cdot p(x) + (\alpha\beta - 1)\, x^2 \\ &= (\alpha\beta) \odot p\end{aligned}$$

1 אדיש כפלי

נראה שהסקלאר הממשי 1 הוא אדיש כפלי

$$1 \odot p = 1 \cdot p(x) + (1-1)x^2 = p(x) + 0 \cdot x^2 = p(x)$$

דיסטריבוטיביות א'

$$\alpha \odot (p \oplus q) = \alpha \odot \left(p(x) + q(x) + x^2\right) = \alpha \cdot \left(p(x) + q(x) + x^2\right) + (\alpha - 1)\, x^2$$

$$\begin{aligned}(\alpha \odot p) \oplus (\alpha \odot q) &= \left(\alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2\right) \oplus \left(\alpha q(x) + (\alpha - 1)\, x^2\right) \\ &\alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + \alpha q(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + x^2 \\ &\alpha \cdot (p(x) + q(x) + x^2) + (\alpha - 1)\, x^2\end{aligned}$$

דיסטריבוטיביות ב'

$$(\alpha + \beta) \oplus p(x) = (\alpha + \beta)\, p(x) + (\alpha + \beta - 1)\, x^2$$

$$\begin{aligned}(\alpha \odot p) \oplus (\beta \odot p) &= \alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + \beta p(x) + (\beta - 1)\, x^2 + x^2 \\ &= (\alpha + \beta)\, p(x) + (\alpha + \beta - 1)\, x^2\end{aligned}$$

V מקיים את כל האקסיומות של מרחב וקטורי ולכן הוא מרחב וקטורי

סעיף ב׳

לא! זה לא מקיים דיסטריבוטיביות ב׳, נראה דוגמה

$$\alpha = 1, \beta = 2, x = 3, y = 4$$

$$(1+2) \cdot (3,4) = (9,4)$$
$$(1 \cdot (3,4)) + (2 \cdot (3,4)) = (3,4) + (6,4) = (9,8)$$
$$(9,4) \neq (9,8)$$

שאלה 2

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. בהינתן $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \in V$, נגדיר את הישר העובר דרך $\vec{w}$ בכיוון $\vec{v}$ בתור:

$$L_{\vec{w},\vec{v}} = \{\vec{w} + t\vec{v} | t \in \mathbb{F}\}$$

הוכיחו כל כל שני ישרים במרחב הם או זרים, או זהים, או נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

פתרון 2

יהיו $\vec{a} \neq 0, \vec{b}, \vec{c} \neq 0, \vec{d} \in V$. נתבונן בשני הישרים

$$L_{\vec{b},\vec{a}} = \left\{\vec{b} + t\vec{a} | t \in \mathbb{F}\right\}$$
$$L_{\vec{d},\vec{c}} = \left\{\vec{d} + t\vec{c} | t \in \mathbb{F}\right\}$$

ראשית נראה כי הם יכולים להיות זרים. אין לי כוח

שאלה 3

סעיף א'

יהא V מרחב-וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $W, U \subset V$ תמ"ו של V. נניח כי $U \cup W$ תמ"ו. הוכיחו כי $U \subset W$ או $W \subset U$

פתרון 3

נניח בשלילה כי $U \not\subset W$ ו$W \not\subset U$ אזי קיימים

$$w \in W, w \notin U$$
$$u \in U, u \notin W$$