חשבון אינפיטסימלי 1 - 01040195
גליון 6

יונתן אבידור - 214269565

29 בינואר 2026

שאלה 1

עבור אילו ערכי p ו-$q > 0$ הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \left|x\right|^{p}\cos\left(\frac{\pi}{\left|x\right|^{q}}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

רציפה באפס? גזירה באפס? גזירה ברציפות באפס?

פתרון 1

נבדוק רציפות
נתבונן בגבול של הפונקציה כש-x שואף ל-0

$$\lim_{x\to0}\left|x\right|^{p}\cos\left(\frac{\pi}{\left|x\right|^{q}}\right)$$

על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב-0 נדרוש כי הגבול יהיה שווה ל-0
נפרק למקרים על פי ערכי p
עבור $p>0$

$$\lim_{x\to0}\left|x\right|^{p}=0$$

בנוסף, נטען כי $\lim_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{\left|x\right|^{q}}\right)$ לא קיים.
בדומה למה שראינו בכיתה עם $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, נשתמש בקריטריון היינה
נגדיר שתי סדרות

$$x_{n}=\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[q]{0}=0$$

$$y_{n}=\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}\sqrt[q]{0}=0$$

נתבונן ב-$\cos\left(\frac{\pi}{|x_n|^q}\right)$ ו-$\cos\left(\frac{\pi}{|y_n|^q}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{|x_n|^q}\right) &= \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}\right|^q}\right)\\ &\underset{\sqrt{x}>0}{=} \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}^q}\right)\\ &\underset{\sqrt[q]{x}^q=x}{=} \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi) = 1\end{aligned}$$

ובצורה דומה

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{|y_n|^q}\right) &= \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}\right|^q}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}^q}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2n+1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\cos((2n+1)\pi) = -1\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{|x_n|^q}\right) \neq \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{|y_n|^q}\right)$,
על פי היינה זה אומר שלא קיים $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{|x|^q}\right)$
וידוע כי cos חסומה בין 1 ל--1, ולכן "חסומה כפול אפסה"

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{|x|^p}_{\to 0}\ \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{|x|^q}\right)}_{\text{Bounded}} = 0$$

כלומר עבור $p > 0$, לכל $q > 0$ f רציפה ב-0
עבור $p < 0$

נשתמש באותן סדרות x_n, y_n

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}\right|^p \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}\right|^q}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cos\left(2\pi n\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\sqrt[q]{\frac{1}{2n}}\right)^{-p}}_{\to 0}}$$
$$= \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}\right|^p \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\left|\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}\right|^q}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cos\left(\left(2n+1\right)\pi\right)}^{\to -1}}{\underbrace{\left(\sqrt[q]{\frac{1}{2n+1}}\right)^{-p}}_{\to 0}}$$
$$= -\infty$$

שני הגבולות שונים ולכן כש$p < 0$, לכל $q > 0$, f לא רציפה
עבור $p = 0$

$$\lim_{x\to 0} |x|^0 = |x|^0 = 1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} |x|^0 \cos\left(\frac{\pi}{|x|^q}\right) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{|x|^q}\right) = \text{D.N.E}$$

ולכן כאשר $p=0$, לכל $q>0$, f לא רציפה ב-0
לסיכום, קיבלנו שכל $p>0$, לכל $q>0$. f רציפה

נעבור לגזירות
נתעניין רק כש$p>0$ כי רק שם הפונקציה רציפה ב-0 ופונקציה לא רציפה היא בהכרח לא גזירה.
נבחן את הגבול

$$\lim_{x\to0}\frac{|x|^{p}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)}{x}=\lim_{x\to0}|x|^{p-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)$$

נגדיר $p=:k$ ונראה כי

$$\lim_{x\to0}|x|^{k}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)$$

כפי שראינו, הגבול הנ"ל קיים רק כש-$k>0$, ובמצב הזה הוא 0 כלומר כש$p-1>0$,
מכאן שהגבול הנ"ל קיים רק כש$p>1$
נעבור לגזירות ברציפות
על מנת לבדוק את זה, נמצא את הנגזרת של f, נניח $p>1$ כי רק אז הנגזרת קיימת

$$f'\left(x\right)=\left(|x|^{p}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\right)'=\left(|x|^{p}\right)'\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)+\left(\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\right)'\cdot\left(|x|^{p}\right)$$

נחשב את הנגזרות

$$\left(|x|^{p}\right)'=p\,|x|^{p-1}$$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\right)'=-\sin\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\cdot\frac{-\pi\cdot q\,|x|^{q-1}}{|x|^{2q}}=-\sin\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\cdot-\pi\cdot q\,|x|^{-q-1}$$

לכן

$$f'\left(x\right)=p\,|x|^{p-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\cdot-\pi\cdot q\,|x|^{-q-1}\cdot|x|^{p}$$

נתבונן בגבול

$$\lim_{x\to0}p\,|x|^{p-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{|x|^{p}}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{|x|^{q}}\right)\cdot-\pi\cdot q\,|x|^{-q-1}\cdot|x|^{p}$$

על מנת שהפונקציה תהיה גזירה ברציפות ב-0, נדרוש שהגבול הנ"ל יהיה 0.
בגלל שהביטויים בcos ובsin זהים, וsin וcos מתאפסים במקומות שונים ($\sin 2k\pi$ ל$\cos 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ו), נדרוש שהחלק השנים בכל ביטוי ישאף לאפס, כלומר $p\left|x\right|^{p-1} \xrightarrow{x\to 0} 0$ ו-$-\pi q\left|x\right|^{p-q-1} \xrightarrow{x\to 0} 0$
על מנת שזה יקרה, נצטרך שהמעריך יהיה חיובי, כלומר מהצד השמאלי של הביטוי צריך ש$p > 1$ (וזה כבר המצב), בעוד שמהצד הימני $p - q - 1 > 1$ כלומר $p > q + 1$
לכן, על מנת שהפונקציה תהיה גזירה ברציפות ב-0 צריך ש

$$p > q + 1$$

שאלה 2

א. יהיו $a \neq 0$ ו$n \in \mathbb{N}$ מספר זוגי.
הוכיחו כי $\left(x+a\right)^n = a^n + x^n$ מתקיים אם ורק אם $x = 0$.
ב. יהיו $a \neq 0$ ו$2 < n \in \mathbb{N}$ מספר אי-זוגי.
הוכיחו כי $\left(x+a\right)^n = x^n + a^n$ מתקיים אם ורק אם $x = 0$ או $x = -a$

פתרון 2

ראשית נוכיח $\Leftarrow$
נניח כי $\left(x+a\right)^n = a^n + x^n$, נרצה להוכיח כי $x = 0$
נגדיר $f\left(x\right) = \left(x+a\right)^n - x^n - a^n$, מספיק להוכיח ש

$$f\left(x\right) = 0 \iff x = 0$$

נתבונן בנגזרת של f

$$f'\left(x\right) = n\left(x+a\right)^{n-1} - nx^{n-1}$$

נשווה את הנגזרת ל0

$$n\left(x+a\right)^{n-1} - nx^{n-1} \implies n\left(x+a\right)^{n-1} = nx^{n-1} \implies \left(x+a\right)^{n-1} = x^{n-1}$$

מכיוון שn זוגי, $n-1$ אי-זוגי. בחזקות אי-זוגיות $a = b \iff a^n = b^n$ ולכן

$$x + a = x \implies a = 0$$

סתירה לנתון ש$a \neq 0$, לכן הנגזרת של f אף פעם לא שווה ל-0, אזי f מונוטונית ממש, פונקציה מונוטונית היא חח"ע, לכן מספיק להוכיח ש$f\left(0\right) = 0$

$$f\left(0\right) = \left(0+a\right)^n - 0^n - a^n = a^n - a^n = 0$$

כעת נוכיח $\Longrightarrow$
נניח כי $x=0$ ונראה ש$(x+a)^n = a^n + x^n$

$$(0+a)^n = a^n + 0^n \implies a^n = a^n$$

קיבלנו פסוק אמת
ב.
כמו בסעיף נגדיר $f(x) = (x+a)^n - x^n - a^n$ ונשווה את הנגזרת ל0

$$n\left((x+a)^{n-1} - x^{n-1}\right) = 0 \implies (x+a)^{n-1} - x^{n-1} = 0 \implies (x+a)^{n-1} = x^{n-1}$$

מכיוון שn אי-זוגי, $n-1$ זוגי. בחזקות זוגיות $a=\pm b \iff a^n = b^n$ ולכן

$$(x+a)^{n-1} = x^{n-1} \implies x = -x - a \vee x = x + a$$

מכיוון ש$a \neq 0$, הנגזרת מתאפסת אם ורק אם $x = -\frac{a}{2}$
כעת נניח בשלילה כי קיים ל-f שורש שאינו $-a$ או 0, נסמנו בx_0
לפי משפט רול, בין הנקודה x_0 ל$-a$ קיימת נקודה בה הנגזרת מתאפסת, וכך גם בין הנקודה x_0 ל$-a$, בסתירה לכך שהראינו שהנגזרת מתאפסת אך ורק בנקודה אחת.
כעת נוכיח $\Longrightarrow$
נניח כי $x \in \{0, -a\}$ ונראה ש$(a+x)^n = a^n + x^n$
עבור $x=0$

$$(a+0)^n = a^n + 0^n$$

עבור $x=-a$

$$(a-a)^n = a^n + (-a)^n$$

מכיוון שעבור n אי זוגי $a^n = (-a)^n$ מתקיים

$$(0)^n = 0 = a^n + (-a)^n = a^n - a^n = 0$$

■

שאלה 3

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נניח שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^2)}{n^2} = \infty$. הוכיחו שקיימת סדרה $c_n \to \infty$ כך ש$f'(c_n) \to \infty$

פתרון 3

צריך להוכיח שקיימת סדרה $c_n \to \infty$ כך ש$f'(c_n) \to \infty$
נגדיר את הסדרה c_n בדרך הבאה
לכל n, c_n תהיה הנקודה c הנתונה הנתונה ממשפט לגרנז' בקטע $[0, n^2]$ כך ש

$$f'(c) = \frac{f(n^2) - f(0)}{n^2 - 0} = \frac{f(n^2)}{n^2} - \frac{f(0)}{n^2}$$

נתון כי $\frac{f(n^2)}{n^2} \to \infty$, לכן $\lim_{n\to\infty} f'(c_n) = \infty$
כעת צריך רק להוכיח ש$c_n \to \infty$.
ראשית נשים לב שהיא לא שואפת ל-$-\infty$. מכיוון שיש לה אינפימום ב0 (כל איבר בה נמצא בקטע $[0, n^2]$). אזי $c_n \to \infty$ או שהיא חסומה.
נניח בשלילה כי היא חסומה.
מכיוון שהסדרה c_n חסומה, על פי משפט BW, קיימת לה תת-סדרה מתכנסת במובן הצר $(c_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, אזי קיים L כך ש$c_{n_k} \to L$. מכאן על פי היינה, $f'(c_{n_k}) \to L$, בסתירה לכך ש$f'(c_n) \to \infty$.
■

שאלה 4

תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בקטע $(0, \infty)$. נתון כי $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$. הוכיחו כי f לא גזירה ב-0.

פתרון 4

נרצה להראות כי לא קיים $f'(0)$, על מנת לעשות כן נראה כי לא קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = L$$

נתמקד בגבול החד צדדי $x \to 0^+$.
אם הפונקציה f לא רציפה ב-0, אזי f בהכרח לא גזירה ב-0, לכן מעתה נניח כי f רציפה ב-0
לכל $x \in (0, \infty)$, f גזירה ב-$(0, x)$ ורציפה ב-$[0, x]$ ולכן על פי משפט לגרנז' קיימת נקודה $0 < c_x < x$ כך ש

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

מסנדוויץ', כאשר $x \to 0$ גם $c_x \to 0$
מהנתון

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \implies \lim_{x\to 0^+} f'(c_x) = \infty \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \infty$$

לכן לא קיים $f'(0)$
■

שאלה 5

א.
נגדיר $f:(0,\pi)\to(-1,1)$ על ידי $f(x)=\cos(x)$. השתמשו במשפט הנגזרת של פונקציה הפוכה כדי למצוא נוסחה לנגזרת של f^{-1}
ב.
נגדיר $g:(-\pi,0)\to(-1,1)$ על ידי $g(x)=\cos(x)$. השתמשו במשפט הנגזרת של פונקציה הפוכה כדי למצוא נוסחה לנגזרת של g^{-1}.

פתרון 5

א.
נחפש נוסחה לנגזרת של f^{-1} לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה

$$\forall y_0 \in \mathrm{Im}(f) : \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{-\sin\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

לפי זהויות טריגונומטריות

$$\cos(x)^2+\sin(x)^2=1 \implies \sin(x)^2 = 1-\cos(x)^2 \implies \sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos(x)^2}$$

$\sin(x) > 0 \iff \sin(x)$, ובתחום $(0,\pi)$ $\sin$ תמיד חיובית ולכן

$$-\sin\left(f^{-1}(y_0)\right) = -\sqrt{1-\cos\left(f^{-1}(y_0)\right)^2}$$

נציב $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$

$$-\sin\left(\cos^{-1}(y_0)\right) = -\sqrt{1 - \cos\left(\cos^{-1}(y_0)\right)^2}$$

מכיוון ש$f\left(f^{-1}\right) = I$, $\cos\left(\cos^{-1}(y_0)\right) = y_0$
ולכן

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{-\sqrt{1 - y_0^2}}$$

ב.
נחפש נוסחה לנגזרת של f^{-1} לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה

$$\forall y_0 \in \mathrm{Im}(f) : \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{-\sin\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

לפי זהויות טריגונומטריות

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \implies \sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2 \implies \sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos(x)^2}$$

$\sin(x) > 0 \iff \sin(x)$, ובתחום $(-\pi, 0)$ sin תמיד שלילית ולכן

$$-\sin\left(f^{-1}(y_0)\right) = \sqrt{1 - \cos\left(f^{-1}(y_0)\right)^2}$$

נציב $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$

$$-\sin\left(\cos^{-1}(y_0)\right) = \sqrt{1 - \cos\left(\cos^{-1}(y_0)\right)^2}$$

מכיוון ש$f\left(f^{-1}\right) = I$, $\cos\left(\cos^{-1}(y_0)\right) = y_0$
ולכן

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$