# חשבון אינפיטסימלי 1 - 01040195
# גליון 4

יונתן אבידור - 214269565

7 בינואר 2026

## שאלה 1

יהא $a > 1$ ותהא $(b_n)$ סדרה מתכנסת לגבול $b$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$

$$a^{b_n - b} \to 1$$
$$a^{b_n} = a^{b_n - b} \cdot a^b = 1 \cdot a^b = a^b$$

## פתרון 1

נרצה להוכיח שלכל $\mathbb{R} \ni a > 1$, ולכל $(b_n)_{n=1}^{\infty} \to b$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$
נזכיר כמה חוקים שראינו בכיתה לגבי חזקות ממשיות
יהיו $\mathbb{R} \ni x > 1$ ו$y, z \in \mathbb{R}$

1. $x^y \cdot x^z = x^{y+z}$
2. $\frac{x^y}{x^z} = x^{y-z}$

$$a^{b_n} = a^{b_n} \cdot \frac{a^b}{a^b} = \frac{a^{b_n} \cdot a^b}{a^b} = \frac{a^{b_n+b}}{a^b} = a^{b_n+b-b} = a^{b_n-b} \cdot a^b$$

לפי הנתון $b_n \to b$ ולכן $b_n - b \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n-b} \cdot a^b = a^0 \cdot a^b = 1 \cdot a^b = a^b$$

■

## שאלה 2

תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה. $f$ נקראת חסומה מקומית ב-$A$ אם לכל $x_0 \in A$ קיימת $\delta > 0$ כך ש-$f$ חסומה ב$A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

### סעיף א

תהא $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ חסומה מקומית ב-$[0,1]$, הוכיחו כי $f$ חסומה $[0,1]$

### סעיף ב

תנו דוגמה לפונקציה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ חסומה מקומית ב-$(0,1)$ אבל לא חסומה ב-$(0,1)$

## פתרון 2

### סעיף א

יהי $x_0\in[0,1]$ מהנתון, לכל $x_0$ קיימת סביבת $\delta$ כך ש$f$ חסומה בתוך אותה סביבה, כלומר לכל $x_0$ קיימים $m_{x_0},M_{x_0}$, כך ש$m_{x_0}<f(x)<M_{x_0}$. כל הסביבות האלה של כל הנקודות ב$[0,1]$ מהוות כיסוי אינסופי, מכיוון ש$[0,1]$ היא קבוצה קומפקטית, לפי למת היינה-בורל, קיים לכיסוי הנ"ל תת-כיסוי סופי, כלומר קיימים קבוצה סופית של נקודות $x_0$ שמכסים את הקטע $[0,1]$ ובסביבות ה$\delta_{x_0}$ שלהם $f$ חסומה. נסמן את גודל הקבוצה הזו $n$
כלומר קיימים $\{m_0,\dots,m_n\}$ חסמים תחתונים $\{M_0,\dots,M_n\}$ חסמים עליונים. מכיוון שמדובר בקבוצות סופיות, על פי אקסיומת השלמות ניתן לקחת להן מקסימום ומינימום, נסמן

$$m'=\min\{m_0,\dots,m_n\}$$
$$M'=\max\{M_0,\dots,M_n\}$$

מכיוון שלכל קטע $I_j$ בתת-הכיסוי הזה, $m_j<f<M_j$
בכל $[0,1]$, $m'<f<M'$. כלומר קיימים ל-$f$ חסם עליון ותחתון. ועל כן $f$ חסומה.

### סעיף ב

נראה כי הפונקציה

$$f:(0,1)\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=\frac{1}{x}$$

חסומה מקומית ב-$(0,1)$, אבל לא חסומה ב-$(0,1)$
חסומה מקומית:
הפונקציה חיובית בכל התחום, לכן $0$ תמיד חסם תחתון וצריך למצוא רק חסם עליון
יהי $x_0\in(0,1)$, עבור $\delta=\frac{x_0}{2}$, מכיוון ש$x_0>0$, $x_0>\frac{x_0}{2}>0$
מכיוון ש$f(x)$ מונוטונית יורדת חזק, מספיק למצוא חסם תחתון לקטע $\left(x_0-\frac{x_0}{2},x_0\right]\subseteq(0,1)$, בנוסף בגלל המונוטוניות תמיד מתקיים ש$f\left(x-\frac{x_0}{2}\right)>f(x_0)$. כלומר לכל $x_0$

קיים $\delta = \frac{x_0}{2}$ שעבורו $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ חסום מלמעלה על ידי $f(x_0 - \delta)$ ומלמטה על ידי $0$ ולכן $f(x)$ חסומה מקומית ב-$(0,1)$
לא חסומה
מכיוון שהחסם העליון שלנו היה תלוי בערך של $x$, ו$f(x) \xrightarrow{x\to 0} \infty$, לא משנה איזה חסם עליון $M$ ניקח, קיים $x_0$ שעבורו $f(x_0) > M$ כלומר ל$f(x)$ לא קיים חסם עליון אחד שמתאים לכל התחום, ולכן $f(x)$ אינה חסומה
■

# שאלה 3

הוכיחו לפי הגדרה

## סעיף א

$$\lim_{x\to\frac{1}{9}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$$

## סעיף ב

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-9x^2+9x}{2x^2+8} = -\frac{9}{2}$$

# פתרון 3

## סעיף א

יהי $\epsilon > 0$, נחפש $\delta > 0$ כך ש

$$0 < \left|x - \frac{1}{9}\right| < \delta \implies \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right| < \epsilon$$

נתבונן בצד הימני של הביטוי
נרצה להגדיל את הביטוי

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right| = \left|\frac{1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+3\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{1-9x}{\sqrt{x}+3x}\right|$$

נעבור לצד השמאלי של הביטוי המקורי

$$\left|x-\frac{1}{9}\right|<\delta \implies \left|\frac{9x-1}{9}\right|<\delta$$
$$\implies \frac{|9x-1|}{9}<\delta \implies \frac{|1-9x|}{9}<\delta \implies |1-9x|<9\delta$$

ולכן

$$\left|\frac{1-9x}{\sqrt{x}+3x}\right|<\left|\frac{9\delta}{\sqrt{x}+3x}\right|$$

נשים לב שיש לנו $\sqrt{x}$, זה אומר שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x>0$, לכן $\sqrt{x}+3x$ חיובי, ואפשר להוריד ממנו את הערך המוחלט, בנוסף אנו מחפשים $\delta>0$ ולכן גם מהמונה אפשר להוריד את הערך המוחלט

$$(*):\ \frac{9\delta}{\sqrt{x}+3x}<\frac{9\delta}{3x}=\frac{3\delta}{x}$$

נניח ש $\delta\le\frac{1}{10}$, נרצה לחסום את $x$ (מלמטה)

$$\left|x-\frac{1}{9}\right|<\frac{1}{10} \implies \frac{-1}{10}<x-\frac{1}{9}<\frac{1}{10} \implies \frac{-1}{10}+\frac{1}{9}<x \implies \frac{1}{90}<x$$

ולכן

$$\frac{3\delta}{x}<\frac{3\delta}{\frac{1}{90}}=270\delta\le\epsilon \implies \delta\le\frac{\epsilon}{270}$$

אם כך, נבחר $\delta=\min\left\{\frac{1}{10},\frac{\epsilon}{270}\right\}$
ואכן, לכל $\epsilon>0$, כש $\delta=\min\left\{\frac{1}{10},\frac{\epsilon}{270}\right\}$

$$\left|x-\frac{1}{9}\right|\underset{\delta\le\frac{1}{10}}{<}\frac{1}{10} \implies x<\frac{1}{90} \implies \left|\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right|\underset{(*)\ text}{<}\frac{1}{x}\cdot 3\delta$$
$$<90\cdot 3\delta=270\delta\underset{\delta\le\frac{\epsilon}{270}}{<}\frac{\epsilon}{270}\cdot 270=\epsilon$$

■

## סעיף ב

יהי $\epsilon > 0$, נרצה למצוא $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים

$$\left|\frac{-9x^2+9x}{2x^2+8}+\frac{9}{2}\right| < \epsilon$$

נרצה להגדיל את הצד השמאלי של הביטוי

$$\left|\frac{2\left(-9x^2+9x\right)+9\left(2x^2+8\right)}{4x^2+16}\right| = \left|\frac{-18x^2+18x+18x^2+72}{4x^2+16}\right|$$
$$= \left|\frac{18x+72}{4x^2+16}\right| = \left|\frac{18(x+4)}{4(x^2+4)}\right| = \left|\frac{9(x+4)}{2(x^2+4)}\right|$$

מכיוון ש$x > M > 0$, $x$ חיובי, ולכן גם המכנה וגם המונה חיוביים, ואפשר להיפטר מהערך המוחלט. בנוסף, נניח ש$x > 4$

$$\frac{9\left(x+4\right)}{2\left(x^2+4\right)} < \frac{9\cdot 2x}{2\left(x^2+4\right)} = \frac{9x}{x^2+4} < \frac{9x}{x^2} = \frac{9}{x} \underset{x\geq M}{\leq} \frac{9}{M} \leq \epsilon \implies M \geq \frac{9}{\epsilon}$$

לכן נבחר $M = \max\left\{4, \frac{9}{\epsilon}\right\}$
ואכן, לכל $\epsilon > 0$, כש$M = \max\left\{4, \frac{9}{\epsilon}\right\}$, לכל $x > M$

$$\left|\frac{-9x^2+9x}{2x^2+8}+\frac{9}{2}\right| = \frac{9\left(x+4\right)}{2\left(x^2+4\right)} \underset{x>4}{<} \frac{9}{x} \underset{x>\frac{9}{\epsilon}}{<} \frac{9}{\frac{9}{\epsilon}} = \epsilon$$

■

# שאלה 4

תהא $f$ פונקציה חיובית המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x = 0$. נתון ש$\lim_{x\to 0}\left(f\left(x\right)+\frac{1}{f(x)}\right) =$ 2. הוכיחו כי

## סעיף א

קיימת סביבה של 0 שבה $f\left(x\right)$ חסומה

### סעיף ב

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

## פתרון 4

### סעיף א

נתון כי $f$ חיובית, לכן חסומה ממלרע על ידי 0, נראה כי קיימת סביבה של $0$ שבה ל-$f(x)$ קיים חסם ממלעיל.
מהנתון, ידוע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta_\epsilon > 0$ כך שלכל $x \in (-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon) \setminus \{0\}$ מתקיים

$$\left|\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) - 2\right| < \epsilon$$

$$\left|\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) - 2\right| < \epsilon \implies -\epsilon < \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) - 2 < \epsilon$$
$$\implies f(x) + \frac{1}{f(x)} < \epsilon + 2$$
$$\implies f(x) \underset{f(x)>0}{<} f(x) + \frac{1}{f(x)} < \epsilon + 2 \implies f(x) < \epsilon + 2$$

מכיוון שזה נכון עבור כל $\epsilon$, נבחר $\epsilon = 1$
ואז עבור סביבת $\delta_1$ נקובה של $0$ מתקיים

$$0 < f(x) < \underset{1+2}{3}$$

### סעיף ב

יהי $\epsilon' > 0$, נחפש $\delta' > 0$ כך ש

$$0 < |x| < \delta' \implies |f(x) - 1| < \epsilon'$$

מהסעיף הקודם, אנחנו יודעים שלכל $\epsilon$, עבור $\delta_\epsilon$, כאשר $0 < |x| < \delta_\epsilon$ מתקיים

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} < \epsilon + 2$$

$$f(x)+\frac{1}{f(x)}-2<\epsilon \implies (f(x)-1)^2<\epsilon\cdot f(x)$$

נניח ש $\delta'\le\delta_\epsilon$, ואז $3>f(x)$, ולכן

$$(f(x)-1)^2<\epsilon\cdot 3 \underset{\checkmark}{\implies} |f(x)-1|<\sqrt{3\epsilon}$$

נרצה ש $\sqrt{3\epsilon}$ יהיה קטן מ$\epsilon'$, ומכיוון שידוע שלנו שאי השוויון הזה מתקיים לכל $\epsilon$, נוכל לבחור אותו להיות מה שנרצה, בפרט $\epsilon=\frac{\epsilon'^2}{3}$
ואז נוכל לבחור את $\delta'=\delta_{\frac{\epsilon'}{3}}$ המתאימה ואכן

$$0<|x|<\delta' \implies |f(x)-1|<\sqrt{\frac{\epsilon'}{3}\cdot 3}=\epsilon'$$

■

## שאלה 5

ראיתם בכיתה את פונקציית דיריכלה $D(x)$, נגדיר

$$f(x)=x^2\cdot D(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

מצאו באילו נקודות $a\in\mathbb{R}$ הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים? הוכיחו תשובתכם בעזרת הגדרת הגבול בלבד.

## פתרון 5

נראה כי עבור $a=0$ קיים גבול $L$ וש-$L=0$
יהי $\epsilon>0$, נחפש $\delta>0$ כך ש

$$0<|x|<\delta \implies |f(x)|<\epsilon$$

מכיוון שלכל $x$, $f(x)=x^2\cdot x^2$ או 0, $f(x)\ge 0$ לכל $x$ ולכן אפשר להוריד את הערך המוחלט.
נפרק למקרים
אם $x$ אי רציונלי

$$f(x)=0<\epsilon$$

ואז $f(x) < \epsilon$ נכון תמיד
אם $x$ רציונלי

$$f(x) = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

נניח ש$\delta < 1$, בערכים האלה $0 < |x| < \delta < 1$ ולכן $|x| > x^4$

$$0 < x^4 < |x| < \delta \implies (x^4 < \delta \implies x^4 < \epsilon)$$

אם כך, נצטרך ש$\delta \leq \epsilon$, ולכן נבחר $\delta = \min\{1, \epsilon\}$.
ואכן

$$\begin{cases} \epsilon < 1 & |x| < \epsilon < 1 \implies x^4 < |x| < \epsilon < 1 \implies x^4 < \epsilon \\ \epsilon \geq 1 & |x| < 1 \implies x^4 < \epsilon \end{cases}$$

כעת נראה שאין $a \neq 0$, שעבורו קיים גבול $L$
יהי $a \neq 0$, נניח בשלילה שקיים $L$ כך שלכל $\epsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ כך ש

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

נחלק למקרים לפי $x$
אם $x$ אי רציונלי

$$0 < |x - a| < \delta \implies |0 - L| < \epsilon \implies |L| < \epsilon$$

כלומר לכל $\epsilon > 0$, $|L| < \epsilon$, וזה אפשרי אם ורק אם $L = 0$
לכן מעתה נניח כי $L = 0$
אם $x$ רציונלי

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left|x^4 - L\right| < \epsilon$$

$$\left|x^4 - L\right| < \epsilon \underset{L=0, x^4>0}{\implies} x^4 < \epsilon$$

מכיוון שאנחנו מניחים שזה נכון לכל $\epsilon$, זה בפרט נכון עבור $\epsilon = \frac{a^4}{2}$
ולכן

$$0 < |x - a| < \delta \implies x^4 < \frac{a^4}{2}$$

נסמן את החישוב הזה $(*)$
מכיון ש

$$\lim_{x\to a} x^4 = a^4$$

מאריתמטיקת גבולות (חזקה) על הגבול $\lim_{x\to a} x = a$
לכל $\epsilon > 0$, ובפרט ל$\epsilon = \frac{a^4}{2}$, קיים $\delta$ כך ש

$$|x-a| < \delta \implies \left|x^4 - a^4\right| < \frac{a^4}{2} \implies -\frac{a^4}{2} < x^4 - a^4 < \frac{a^4}{2}$$
$$\underset{+a^4}{\implies} \frac{a^4}{2} < x^4 < \frac{3a^4}{2}$$

נסמן את החישוב הזה ב$(**)$
הגענו לסתירה, מכיוון שזה אומר ש

$$\frac{a^4}{2} \underset{(**)}{<} x^4 \underset{(*)}{<} \frac{a^4}{2}$$

לכן לכל $a \neq 0$, לא קיים אף גבול $L$
■

# שאלה 6

## סעיף א

הוכיחו דרכים כי אם $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{y\to b} f(y) = c$, ונתון כי $g(x) \neq b$ בסביבת $a$, אזי $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$

### תת-סעיף 1

בעזרת משפט היינה

### תת-סעיף 2

בעזרת הגדרת הגבול

## סעיף ב

הראו כי אם מוותרים על התנאי כי $g(x) \neq b$, אזי הטענה איננה נכונה.

### סעיף ג

נמקו מדוע

$$\lim_{x\to(-\pi)} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} = 1$$

## פתרון 6

### סעיף א

#### תת-סעיף 1

על פי קריטריון היינה, מכיוון ש$g(x) \xrightarrow{x\to a} b$, אזי לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים $g(x_n) \to b$
מכיוון ש$g(x) \neq b$, מן הסתם גם $g(x_n) \neq b$
בנוסף, על פי משפט היינה מתקבל כי $f(g(x_n)) \to c$, ומהצד השני של משפט היינה

$$f(g(x)) \xrightarrow{x\to a} c$$

כנדרש

#### תת-סעיף 1

יהי $\epsilon > 0$ נחפש $\delta > 0$ כך ש

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(g(x)) - c| < \epsilon$$

לפי הנתון על $f$, לכל $\epsilon > 0$, קיים $\delta_f > 0$ כך ש

$$0 < |y-b| < \delta_f \implies |f(y) - c| < \epsilon$$

לפי הנתון על $g$, לכל $\epsilon > 0$ קיים, ובפרט עבור $\epsilon = \delta_f$ $\delta_g > 0$ כך ש

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x) - b| < \delta_f$$

ובפרט אם נניח $\delta \leq \delta_g$

$$0 < |x-a| < \delta \implies |g(x) - b| < \delta_f$$

מכיוון ש$g(x) \neq b$ אנחנו מקבלים ש $|g(x) - b| > 0$ תמיד
לכן אם נציב $y = g(x)$ בנתון על $f$ נקבל

$$0 < |g(x) - b| < \delta_f \implies |f(g(x)) - c| < \epsilon$$

לכן אם נקבע את $\delta = \delta_g$נקבל

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - b| < \delta_f \implies |f(g(x)) - c| < \epsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - c| < \epsilon$$

כדרוש
■

## סעיף ב

בלי התנאי $g(x) \neq b$, אין הבטחה ש$|g(x) - b| > 0$, ואז הגדרת הגבול לא מתקיימת.
המקור של הבעיה הוא ההבדל בין שני התנאים הבאים

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

מתוך הגדרת הגבול לפונקציה בנקודה

$$|x - x_0| < \delta$$

שזה התנאי שמתקבל אם מורידים את הדרישה $g(x) \neq b$
לכן ללא התנאי, לא מתקבלת התאמה להגדרת הגבול

## סעיף ג

נראה ש

$$\lim_{x \to -\pi} \frac{\sin(x + \pi)}{x + \pi} = 1$$

הוא מקרה פרטי של המשפט שהוכחנו בסעיף א כאשר

$$g(x) = x + \pi$$

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$$

$$a = -\pi, b = 0, c = 1$$

נבדוק את כל הדרישות של סעיף א'

**דרישה ראשונה**

$$\lim_{x\to a} g\left(x\right) = b$$

נציב ונבדוק

$$\lim_{x\to -\pi} \underset{\to -\pi}{x} + \underset{\to \pi}{\pi} = 0 \implies -\pi + \pi = 0 \implies 0 = 0$$

**דרישה שנייה**

$$\lim_{y\to b} f\left(y\right) = c$$

נציב ונבדוק

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(y\right)}{y} = 1$$

אנחנו יודעים שזה נכון לפי זהות שראינו בכיתה

**דרישה שלישית**

$$g\left(x\right) \neq b \quad \text{בסביבת } a$$

$g\left(x\right)$ לא מוגדרת ב$-\pi$, בנקודת אי רציפות מסוג סליקה, ולכן $g\left(x\right) \neq b$ מכיוון שכל הדרישות של סעיף 1 מתקיימות, אכן

$$\lim_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right) = c$$

כלומר

$$l \lim_{x\to -\pi} \frac{\sin\left(x+\pi\right)}{x+\pi} = 1$$

■