אלגברה א' 01040066
גליון 7

יונתן אבידור - 214269565

3 בפברואר 2026

שאלה 3

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{Z}_7$. נגדיר: U - מרחב הפתרונות של הממ"ל $Ax = 0$. W - מרחב העמודות של A.

1. מצאו בסיס (קבוצה פורשת ובת"ל) עבור U ו-W.
2. הוכיחו כי $U \oplus W = (\mathbb{Z}_7)^3$
3. מצאו בסיס לחיתוך של מרחב השורות $row(A)$ ומרחב העמודות $col(A)$
4. מצאו את כל הוקטורים $b \in (\mathbb{Z}_7)^3$ עבורם למערכת $Ax = b$ יש פיתרון והוכיחו כי זהו תת-מרחב של $(\mathbb{Z}_7)^3$

פתרון 3

סעיף 1

נתחיל בלדרג

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&5&2\\3&1&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1,R_3\to R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&6&5\\0&6&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&6&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\to 6R_2}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן ש

$$x+3z=0 \implies x=-3z \implies x=4z$$
$$y+2z=0 \implies y=-2z=y=5z$$

ולכן נוכל לכתוב את U בדרך הבאה:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}4z\\5z\\1\end{pmatrix}\middle| z\in\mathbb{Z}_7\right\}=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$$