

מושגי יסוד במתמטיקה 01040002  
גליון 8

yavidor

16 בפברואר 2026

---

# תרגיל 1

## סעיף א'

נתונות קבוצות  $A, B, C, D$  כך ש- $|A| = |C|$ ,  $|B| = |D|$ , הראו:  $|A \times B| = |C \times D|$

## סעיף ב'

נתונה קבוצה  $A$  לא ריקה. הראו

$$|A| \leq |A \times A|$$

## סעיף ג'

תנו דוגמה לקבוצה  $A$  כך ש- $|A| = |A \times A \times A|$

## סעיף ד'

תנו דוגמה לקבוצה  $A$  כך ש- $|A| < |A \times A \times A|$

# פתרון 1

## סעיף א'

$|A| = |B|$ , ולכן קיימת פונקציה  $f : A \rightarrow B$  חח"ע ועל.  
 $|C| = |D|$ , ולכן קיימת פונקציה  $g : C \rightarrow D$  חח"ע ועל.  
נרצה להראות  $|A \times B| = |C \times D|$  כלומר שקיימת פונקציה חח"ע ועל עם תחום  $A \times B$  וטווח  $C \times D$   
נעשה זאת בכך שנבנה אותה ישירות

$$h : A \times B \rightarrow C \times D$$

$$\forall a \in A, b \in B : h(a, b) = (f(a), g(b))$$

בעת נראה ש- $h$  חח"ע ועל

---

## חד-חד ערכית

יהיו  $h(a_1, b_1) = h(a_2, b_2)$  כך ש  $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$

$$h(a_1, b_1) = h(a_2, b_2) \Rightarrow (f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$$

$f, g$  חד-חד ע"ל ולכן:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$$

ולכן  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$  אזי  $h$  חד-חד ע"ל

## על

יהי  $(c, d) \in C \times D$

נרצה להוכיח כי בהכרח קיים  $(a, b) \in A \times B$  כך ש  $h(a, b) = (c, d)$

$f$  על, ולכן עבור  $c$  בהכרח קיים  $a$  כך ש  $f(a) = c$   
 $g$  על, ולכן עבור  $d$  בהכרח קיים  $b$  כך ש  $g(b) = d$  לכן

$$h(a, b) = h(f(a), g(b)) = (c, d)$$

מכאן ש- $h$  חד-חד ערכית ועל. על פי משפט שראינו בהרצאה, שתי קבוצות הן שוות עוצמה אם קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל מאחת לשנייה, לכן

$$|A \times B| = |C \times D|$$



## סעיף ב'

---

## תרגיל 2

### סעיף א'

בהינתן קבוצה  $A$ , מצאו פונקציה חת"ע ועל בין  $\mathcal{P}(A)$  ו- $\{0, 1\}^A$

### סעיף ב'

הראו:  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

---

## תרגיל 3

הראו: אם  $X, Y, Z$  קבוצות כך ש- $|X| < |Y|$  וגם  $|Y| < |Z|$  אז  $|X| < |Z|$