

מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 2

יונתן אבידור - 214269565

23 בנובמבר 2025

תרגיל 1

הסימונים F ו- T מייצגים "ערך שקר" ו"ערך אמת".
הוכיחו/הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

1. לכל $x \in \{F, T\}$ קיים $y \in \{F, T\}$ כך ש- $x \vee y$ אמת.
2. קיים $x \in \{F, T\}$ כך שלכל $y \in \{F, T\}$ מתקיים ש- $x \vee y$ אמת.
3. לכל $x \in \{F, T\}$ קיים $y \in \{F, T\}$ כך ש- $x \wedge y$ אמת.

פתרון 1

1. כן, נסתכל על שתי האפשרויות. אם יוצא T באחת השורות בעמודה הימנית, אזי הטענה נכונה.
ראשית $x = T$

x	y	$x \vee y$
T	T	T
T	F	T

ראינו שיש (אפילו כולם) y שעבורו $x \vee y$ אמת כש- x אמת. נבדוק לגבי x שקר.

x	y	$x \vee y$
F	T	T
F	F	F

ראינו שיש y שעבורו $x \vee y$ אמת כש- x אמת. מכיוון שהראינו שזה אכן מתרחש לכל x , הטענה נכונה.

2. כן, $x = T$. נסתכל על טבלת האמת עם כל y . אם יוצא T בכל אחת מהשורות בעמודה הימנית. אזי הטענה נכונה

y	y	$x \vee y$
T	T	T
F	T	T

ראינו שעבור כל y מתרחש $x \vee y$ אמת ולכן הטענה נכונה.

3. לא, נביא דוגמה נגדית.

בעבור $x = F$ אין y כך ש- $x \wedge y$ אמת. נוכיח באמצעות טבלת אמת

x	y	$x \vee y$
F	T	F
F	F	F

אין y שעבורו $x \wedge y$ אמת ולכן הטענה לא נכונה

תרגיל 2

1. הראו שלכל p ראשוני ו- n טבעי מתקיים כי n מתחלק ב- p אם ורק אם n^2 מתחלק ב- p .
2. הראו שלכל p ראשוני, המספר \sqrt{p} אינו רציונלי.

פתרון 2

1. ראשית, נוכיח את הכיוון \Leftarrow כלומר אם $p|n$ אזי $p|n^2$.
אם $p|n$ זה אומר שקיים $r \in \mathbb{N}$ כך ש $r \cdot p = n$. מכיוון ש $n^2 = n \cdot n$ ניתן לומר ש $n^2 = n \cdot r \cdot p$.
מה שאומר ש $p|n^2$.
עכשיו נוכיח את \Rightarrow כלומר אם $p|n^2$ אזי $p|n$.
אם $p|n^2$ זה אומר ש $n^2 = p \cdot k$ עבור $k \in \mathbb{N}$. ידוע כי אם $a|b$ אז $a|b \cdot c$ או $a|b$ או $a|c$. או במקרה הזה שתי האפשרויות אומרות ש $p|n$. ■

2. נניח בשלילה כי לכל p ראשוני, \sqrt{p} רציונלי.
אם \sqrt{p} רציונלי זה אומר שניתן לכתוב את $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$. כלומר

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow pb^2 = a^2$$

כלומר $p|a^2$, על פי מה שהוכחנו, זה אומר ש $p|a$. מה שסותר את היות p ראשוני. ■

תרגיל 3

לכל אחת מהקבוצות הבאות, כתבו את גודל הקבוצה, מנו את איברי הקבוצה ומנו את כל תתי הקבוצות של הקבוצה.

1. \emptyset
2. $\{\emptyset\}$
3. $\{\{\emptyset\}\}$
4. $\{1\}$
5. $\{1, \emptyset\}$
6. $\{1, \{\emptyset\}\}$
7. $\{1, \{1\}\}$

פתרון 3

1. גודל הקבוצה 0. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. גודל הקבוצה 1. $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. גודל הקבוצה 1. $P(\{\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
4. גודל הקבוצה 1, $P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
5. גודל הקבוצה 2. $P(\{1, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$
6. גודל הקבוצה 2. $P(\{1, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{\emptyset\}\}, \{1, \{\emptyset\}\}\}$
7. גודל הקבוצה 2. $P(1, \{1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$