מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 8

yavidor

17 בפברואר 2026

תרגיל 1

סעיף א׳

נתונות קבוצות A,B,C,D כך ש-$|B|=|D|$, $|A|=|C|$, הראו: $|A\times B|=|C\times D|$

סעיף ב׳

נתונה קבוצה A לא ריקה. הראו

$$|A|\leq|A\times A|$$

סעיף ג׳

תנו דוגמה לקבוצה A כך ש-$|A|=|A\times A\times A|$

סעיף ד׳

תנו דוגמה לקבוצה A כך ש-$|A|<|A\times A\times A|$

פתרון 1

סעיף א׳

$|A|=|B|$, ולכן קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע ועל.
$|C|=|D|$, ולכן קיימת פונקציה $g:C\to D$ חח"ע ועל.
נרצה להראות $|A\times B|$ = $|C\times D|$ כלומר שקיימת פונקציה חח"ע ועל עם תחום $A\times B$ וטווח $C\times D$
נעשה זאת בכך שנבנה אותה ישירות

$$h:A\times B\to C\times D$$
$$\forall\left(a,b\right)\in\left(A\times B\right):h\left(\left(a,b\right)\right)=\left(f(a),g(b)\right)$$

כעת נראה ש-h חח"ע ועל

חד-חד ערכית

יהיו $(a_1,b_2),(a_2,b_2) \in A \times B$ **כך ש-**$h((a_1,b_1)) = h((a_2,b_2))$

$$h((a_1,b_1)) = h((a_2,b_2)) \implies (f(a_1),g(b_2)) = (f(a_2),g(b_2))$$

f,g חח"ע ולכן:

$$\begin{array}{c} f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \\ g(b_1) = g(b_2) \implies b_1 = b_2 \end{array} \implies (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$$

אזי h חח"ע

על

יהי $(c,d) \in C \times D$
נרצה להוכיח כי בהכרח קיים $(a,b) \in A \times B$ **כך ש-**$h\left((a,b)\right) = (c,d)$
f על, ולכן עבור c **בהכרח** קיים a **כך ש** $f\left(a\right) = c$
g על, ולכן עבור d **בהכרח** קיים b **כך ש** $g\left(b\right) = d$ לכן

$$h\left((a,b)\right) = (f(a),g(b)) = (c,d)$$

מכאן ש-h חד-חד ערכית ועל. על פי משפט שראינו בהרצאה, שתי קבוצות הן שוות עוצמה אם קיימת פונקציה חד-חד ערכית ועל מאחת לשנייה, לכן

$$|A \times B| = |C \times D|$$

■

סעיף ב׳

צריך להראות ש $|A| \leq |A \times A|$, כלומר שקיימת $f: A \to A \times A$ חח"ע, נגדיר אותה **במפורש**

$$f: A \to A \times A$$
$$\forall a \in A: f\left(a\right) = (a,a)$$

נראה כי f חח"ע
יהיו $a_1,a_2 \in A$ **כך** $f(a_1) = f(a_2)$

$$\begin{aligned} f(a_1) = (a_1,a_1) = f(a_2) = (a_2,a_2) &\implies (a_1,a_1) = (a_2,a_2) \\ &\implies a_1 = a_2 \wedge a_1 = a_2 \\ &\implies a_1 = a_2 \end{aligned}$$

הראינו שקיימת פונקציה חח"ע $A \to A \times A$ ולכן לפי הגדרה $|A| \leq |A \times A|$

■

סעיף ג'

$A = \emptyset$

ראינו בכיתה.

■

סעיף ד'

$A = \{1, 2\}$

■

תרגיל 2

סעיף א'

בהינתן קבוצה A, מצאו פונקציה חח"ע ועל בין $\mathcal{P}\left(A\right)$ ו-$\{0,1\}^{A}$

סעיף ב'

הראו: $\left|\mathbb{N}\right| < \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$

פתרון 2

סעיף א׳

נגדיר פונקציה F כך שתעביר כל תת-קבוצה של A לפונקציית האינדיקטור שלה

$$F:\mathcal{P}\left(A\right)\to\left\{ 0,1\right\} ^{A}$$
$$\forall\tilde{A}\in\mathcal{P}\left(A\right):F(\tilde{A})=f_{\tilde{A}}$$
$$f_{\tilde{A}}:A\to\left\{ 0,1\right\}$$
$$\forall a\in A:f_{\tilde{A}}\left(a\right)=\begin{cases} 1 & a\in\tilde{A}\\ 0 & a\notin\tilde{A} \end{cases}$$

נראה כי F חח"ע ועל

חד-חד ערכית

יהיו $A_1,A_2\in\mathcal{P}(A)$ כך ש$F(A_1)=F(A_2)$
כלומר לכל $a\in A$ מתקיים $f_{A_1}(a)=f_{A_2}(a)$
מכאן שלכל $a\in A$, אם $f_{A_1}\left(a\right)=1$ אזי גם $f_{A_2}\left(a\right)=1$ כלומר אם $a\in A_1$ גם $a\in A_2$
ואם $f_{A_1}\left(a\right)=0$ אזי גם $f_{A_2}\left(a\right)=0$ כלומר אם $a\notin A_1$ אז גם $a\notin A_2$ אם כך

$$\forall a\in A:\begin{cases} a\in A_{1}\implies a\in A_{2}\\ a\notin A_{1}\implies a\notin A_{2} \end{cases}\implies A_{1}=A_{2}$$

על

תהא $f_{\tilde{A}}\in\left\{ 0,1\right\} ^{A}$, נרצה למצוא $\tilde{A}$ כך ש-$F\left(\tilde{A}\right)=f_{\tilde{A}}$

$$\tilde{A}=\left\{ a\in A\middle|f_{\tilde{A}}\left(a\right)=1\right\}$$

בנינו איבר כנדרש
■

סעיף ב'

ראשית נראה כי $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq |\mathbb{N}|$, נבנה פונקציה חח"ע מ-$\mathbb{N}$ אל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{gathered}F:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\\ \forall n\in\mathbb{N}:F\left(n\right)=f_{n}\\ f_{n}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ \forall k\in\mathbb{N}:f_{n}\left(k\right)=n\end{gathered}$$

נראה כי F חח"ע יהיו n_1, n_2 כך ש-$F(n_1) = F(n_2)$

$$\begin{gathered}F(n_1)=f_{n_1}=F(n_2)=f_{n_2}\\ f_{n_1}=f_{n_2}\implies\forall k\in\mathbb{N}:f_{n_1}\left(k\right)=f_{n_2}\left(k\right)\end{gathered}$$

מכיוון ש-f_{n_1} היא הפונקציה הקבועה n_1 ו-f_{n_2} היא הפונקציה הקבועה n_2, ולכל $k \in \mathbb{N}$ $f_{n_1}(k) = f_{n_2}(k)$, מתקבל כי $n_1 = n_2$ מכאן ש -F חח"ע
משפט קנטור, $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)|$, מטרנזיטיביות של יחס סדר על עוצמות, אם נוכיח ש-$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq |\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)|$ זה יוכיח את הנדרש, כי

$$|\mathbb{N}|<|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)|\wedge|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)|\leq\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|\implies|\mathbb{N}|<\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$$

על מנת לעשות כן, נבנה פנקציה חח"ע

$$\begin{gathered}G:\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\\ \forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right):G\left(A\right)=g_{A}\\ g_{A}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ \forall n\in\mathbb{N}:g_{A}(n)=\begin{cases}1 & n\in A\\ 0 & n\notin A\end{cases}\end{gathered}$$

נראה כי G חח"ע
יהיו $A, B \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ כך ש$G(A) = G(B)$

$$G\left(A\right)=g_{A}=g_{B}=G\left(B\right)$$

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{cases}g_{A}(a)=1\implies g_{B}(a)=1\implies a\in A\wedge a\in B\\ g_{A}(a)=0\implies g_{B}(a)=0\implies a\notin A\wedge a\notin B\end{cases}$$

כלומר אם A $a \in A$ אזי $a \in B$ ואם $a \notin A$ אזי $a \notin B$, מכאן שכל איבר בA נמצא ב-B
ולהיפך, בנוסף כל טבעי שלא A גם לא ב-B ולהיפך, אזי $A = B$
לכן G חח"ע
G חח"ע ולכן $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \wedge |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \implies |\mathbb{N}| < \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$$

כנדרש
■

תרגיל 3

הראו: אם X, Y, Z קבוצות כך ש-$|X| < |Y|$ וגם $|Y| < |Z|$ אז $|X| < |Z|$

פתרון 3

יהיו X, Y, Z קבוצות כך ש-$|X| < |Y|$ וגם $|Y| < |Z|$
כלומר קיימות פונקציות חח"ע ולא על $f : X \to Y$ ו-$g : Y \to Z$
נבנה פונקציה $h : X \to Z$

$$\forall x \in X : h\left(x\right) = g(f(x))$$

ממשפט שהוכחנו בכיתה על תכונות הרכבה, מכיוון ש-f, g חח"ע, גם h חח"ע, נוכיח כי היא לא על.
אם h על, אזי לכל $z \in Z$ קיים $x \in X$ כך ש-$h\left(x\right) = z$
נניח בשלילה ש-h על, מכאן שלכל $z \in Z$ קיים $x \in X$ כך ש-$h\left(x\right) = z$. מכיוון שh זה פשוט להפעיל את g על איבר כלשהו בY, h על $\Longleftarrow$ g על. סתירה לכך ש$|Y| < |Z|$!
לא קיימת פונקצי חח"ע ועל $Y \to Z$