אלגברה א' 01040066
גליון 5

יונתן אבידור - 214269565

2 בפברואר 2026

שאלה 1

סעיף א'

נתבונן V הכוללת את כל הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה 3, תחת הפעולות הבאות:

$$p(x) \oplus q(x) = p(x) + q(x) + x^2$$
$$\alpha \odot p(x) = \alpha p(x) + (\alpha - 1)x^2$$

הוכיחו כי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

סעיף ב'

נתבונן בקבוצה $B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}_{11}\}$ תחת הפעולות:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$$

האם B מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_{11}$?

פתרון 1

סעיף א'

נוכיח את כל האקסיומות של מרחב וקטורי
יהיו $p, q, r \in \mathbb{R}_3[x]$ ו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$
$$q = b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$
$$r = c_3 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0$$

סגירות לחיבור ($\oplus$)

ראינו בכיתה שהדרגה של חיבור פולינומים היא לכל היותר המקסימום בין שני הפולינומים כלומר:

$$\deg(p(x) + q(x) + x^2) \leq \max\left\{\deg(p(x)), \deg(q(x)), \deg(x^2)\right\}$$
$$= \max\{3, 3, 2\} \leq 3$$

קומוטטיביות לחיבור ($\oplus$)

$$q(x) \oplus p(x) = q(x) + p(x) + x^2 \underset{\text{קומוטטיביות של חיבור}}{=} p(x) + q(x) + x^2 = p(x) \oplus q(x)$$

אסוציאטיביות לחיבור ($\oplus$)

$$\begin{aligned} p \oplus (q \oplus r) &= p(x) + \left(q(x) + r(x) + x^2\right) + x^2 \\ &\underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות בשדה}}{=} p(x) + q(x) + r(x) + 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \oplus q) \oplus r &= \left(p(x) + q(x) + x^2\right) + r(x) + x^2 \\ &\underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות בשדה}}{=} p(x) + q(x) + r(x) + 2x^2 \\ &\implies p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r \end{aligned}$$

קיום איבר אדיש חיבורית

נחפש פולינום שיהיה האיבר האדיש החיבורי $\vec{0} \in V$, נתבונן ב$\vec{0} = -x^2$

$$p \oplus \left(-x^2\right) = p(x) + \left(-x^2\right) + x^2 = p(x)$$

קיום איבר נגדי

יהא $p \in V$, נחפש $q \in V$ כך ש-$p \oplus q = \vec{0}$ (כאשר $\vec{0}$ הוא האדיש החיבורי שמצאנו כרגע), נתבונן ב-$-p - 2x^2$

$$p \oplus q = p - p - 2x^2 + x^2 = -x^2 = \vec{0}$$

סגירות לכפל בסקלאר

$$\begin{aligned} \deg(\alpha \odot p) &\leq \max\left\{\deg\left(\alpha p\right), \deg\left((\alpha - 1)x^2\right)\right\} \\ &\leq \max\left\{\deg(p), deg(x^2)\right\} = \max\{3, 2\} \leq 3 \\ &\implies \alpha \odot p \in V \end{aligned}$$

אסוציאטיביות בכפל בסקלאר

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot p) &= \alpha \cdot \left(\beta \cdot p(x) + (\beta - 1)\, x^2\right) + (\alpha - 1)\, x^2 \\ &\underset{\text{דיסטריבוטיביות בממשיים}}{=} \alpha\beta \cdot p(x) + (\alpha\beta - \alpha)x^2 + (\alpha - 1)x^2 \\ &\underset{\text{דיסטריבוטיביות בממשיים}}{=} \alpha\beta \cdot p(x) + (\alpha\beta - 1)\, x^2 \\ &= (\alpha\beta) \odot p\end{aligned}$$

אדיש כפלי 1

נראה שהסקלאר הממשי 1 הוא אדיש כפלי

$$1 \odot p = 1 \cdot p(x) + (1 - 1)x^2 = p(x) + 0 \cdot x^2 = p(x)$$

דיסטריבוטיביות א'

$$\alpha \odot (p \oplus q) = \alpha \odot \left(p(x) + q(x) + x^2\right) = \alpha \cdot \left(p(x) + q(x) + x^2\right) + (\alpha - 1)\, x^2$$

$$\begin{gathered}(\alpha \odot p) \oplus (\alpha \odot q) = \left(\alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2\right) \oplus \left(\alpha q(x) + (\alpha - 1)\, x^2\right) \\ \alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + \alpha q(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + x^2 \\ \alpha \cdot (p(x) + q(x) + x^2) + (\alpha - 1)\, x^2\end{gathered}$$

דיסטריבוטיביות ב'

$$(\alpha + \beta) \oplus p(x) = (\alpha + \beta)\, p(x) + (\alpha + \beta - 1)\, x^2$$

$$\begin{aligned}(\alpha \odot p) \oplus (\beta \odot p) &= \alpha p(x) + (\alpha - 1)\, x^2 + \beta p(x) + (\beta - 1)\, x^2 + x^2 \\ &= (\alpha + \beta)\, p(x) + (\alpha + \beta - 1)\, x^2\end{aligned}$$

V מקיים את כל האקסיומות של מרחב וקטורי ולכן הוא מרחב וקטורי

סעיף ב'

לא! זה לא מקיים דיסטריבוטיביות ב', נראה דוגמה

$$\alpha = 1, \beta = 2, x = 3, y = 4$$

$$(1+2) \cdot (3,4) = (9,4)$$
$$(1 \cdot (3,4)) + (2 \cdot (3,4)) = (3,4) + (6,4) = (9,8)$$
$$(9,4) \neq (9,8)$$

שאלה 2

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. בהינתן $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \in V$, נגדיר את הישר העובר דרך $\vec{w}$ בכיוון $\vec{v}$ בתור:

$$L_{\vec{w},\vec{v}} = \{\vec{w} + t\vec{v} | t \in \mathbb{F}\}$$

הוכיחו כל כל שני ישרים במרחב הם או זרים, או זהים, או נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

פתרון 2

יהיו $\vec{a} \neq 0, \vec{b}, \vec{c} \neq 0, \vec{d} \in V$. נתבונן בשני הישרים

$$L_{\vec{b},\vec{a}} = \left\{\vec{b} + t\vec{a} | t \in \mathbb{F}\right\}$$
$$L_{\vec{d},\vec{c}} = \left\{\vec{d} + t\vec{c} | t \in \mathbb{F}\right\}$$

ראשית נראה כי הם יכולים להיות זרים. אין לי כוח

שאלה 3

סעיף א'

יהא V מרחב-וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $W, U \subset V$ תמ"ו של V. נניח כי $U \cup W$ תמ"ו. הוכיחו כי $U \subset W$ או $W \subset U$

סעיף ב'

תנו דוגמה למ"ו V מעל שדה F, ותמ"ו U_1, U_2, U_3, כך שאף תמ"ו לא מוכל באחר, וגם $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = V$.

פתרון 3

סעיף א'

נניח בשלילה כי $U \not\subset W$ ו$W \not\subset U$ אבל $U \cup W$ תמ"ו אזי קיימים

$$w \in W, w \notin U$$
$$u \in U, u \notin W$$

מכיוון ש$U \cup W$ תמ"ו, יש בו סגירות לחיבור וקטורים, בפרט $u + w \in U \cup W$
נגדיר $z := u + w$
מכיוון ש $U \cup W$ סגור לחיבור, חייב שלפחות אחד מהתנאים הבאים יתקיימו:
$z \in U$ או $z \in W$ אם $z \in U$

$$w + u = z \implies w = z - u$$

מכיוון ש-U תמ"ו, הוא סגור לחיבור. כלומר

$$z + (-u) \in U \implies w \in U$$

אבל הגדרנו ש$w \notin U$, לכן זה לא יכול לקרות. אזי $z \notin U$ לכן $w + u = z \implies u = z - w = z + (-w)$ מכיוון ש-W תמ"ו, הוא סגור לחיבור, אזי

$$z + (-w) \in W \implies u \in W$$

אבל הגדרנו ש $u \notin W$, לכן גם זה לא יכול לקרות, אזי $z \notin W$ מכיוון ש$z \notin U$ וגם $z \notin W$, $z \notin U \cup W$ כלומר קיימים $u, w \in U \cup W$ כך ש$u + w \notin U \cup W$, כלומר $U \cup W$ לא סגור לחיבור, סתירה להיותו מרחב וקטורי

סעיף ב'

נסתכל על $V = \mathbb{Z}_2^2$

$$U_1 = \text{sp}\{(1,0)\}$$
$$U_2 = \text{sp}\{(0,1)\}$$
$$U_3 = \text{sp}\{(1,1)\}$$

שאלה 4

הוכיחו/הפריכו א. אם $V = sp(S), U = sp(M)$, אזי $V \cap U = sp(S \cap M)$ ב. יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $u, v, w \in V$. אם קיימים סקלארים α, β, γ, לא כולם 0, כך שמתקיים

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

אזי $sp\{u, v\} = sp\{u, w\}$

פתרון 4