מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 1

יונתן אבידור - 214269565

15 בנובמבר 2025

שאלה 1

נגדיר את הקשר NAND על ידי:

$$P \odot Q = \neg (P \wedge Q)$$

א. כתבו את טבלת האמת של הקשר $\odot$.
ב. הראו: $(P \odot P) \equiv \neg P$
ג. הראו: הקשר $\odot$ בפני עצמו מהווה מערכת קשרים שלמה.

פתרון

א.

P	Q	$P \odot Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

ב. נוכיח באמצעות טבלת אמת

P	$P \odot P$	$\neg P$
T	F	F
F	T	T

ג.
ידוע לנו כי $\neg, \wedge, \vee$ מייצרים מערכת קשרים שלמה, כלומר אם נצליח באמצעות $\odot$ לייצר את הקשרים הללו, נוכל לייצר מערכת קשרים שלמה אך ורק באמצעות $\odot$
את $\neg$ כבר יצרנו בסעיף הקודם, $P \odot P$
מכיוון ש$P \odot Q \equiv \neg (P \wedge Q)$ ניתן לומר כי $P \wedge Q \equiv \neg (P \odot Q)$, נוכיח באמצעות טבלת אמת

P	Q	$\overset{x}{P \odot Q}$	$\neg x$	$P \wedge Q$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

נשאר רק $\vee$, נסתכל על טבלת האמת של $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ניתן לראות שהטבלה דומה מאוד לטבלה של $P \odot Q$ רק ש$T \vee T = T$ ו$F \vee F = F$, לכן כל מה שצריך זה לעשות היפוך על P וQ, כלומר $P \vee Q \equiv \neg P \odot \neg Q$ נוכיח באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P \odot \neg Q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

קיבלנו שהביטויים שקולים.
הוכחנו שבאמצעות $\odot$ בלבד ניתן לייצר את הקשרים $\vee, \wedge, \neg$, וידוע לנו שהם מהווים מערכת קשרים שלמה, אזי $\odot$ לבדו מהווה מערכת קשרים שלמה.

שאלה 2

הוכיחו את הזהויות הבאות:
א.

$$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

ב.

$$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

פתרון 2

א.
נוכיח באמצעות טבלת אמת

P	Q	$\overset{x}{P \wedge Q}$	$\neg x$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

ב. נוכיח באמצעות טבלת אמת

P	Q	$\overset{x}{P \vee Q}$	$\neg x$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	T

תרגיל 3

הקדמה
נאמר, שפסוק הוא בצורת CNF אם הוא מהצורה $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ כאשר כל C_i הוא מהצורה $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ ו-A_i הוא המשתנה x_i או שלילתו $\neg x_i$.
נאמר, שפסוק הוא בצורת DNF אם הוא מהצורה $D_1 \vee \ldots \vee D_k$ כאשר כל D_i הוא מהצורה של $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ ו-A_i הוא המשתנה x_i או שלילתו $\neg x_i$.
לדוגמה: הפסוק

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$

הוא פסוק בצורת DNF, והפסוק

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

הוא בצורת CNF.
בתרגול ראינו (בניסוח אחר) את הרעיון מאחורי ההוכחה לעבודה הבאה:
עובדה:
לכל טבלת אמת על המשתנים $x_1, \ldots, x_n$ קיים פסוק בצורת DNF שמייצג אותה.

התרגיל:
הראו: לכל טבלת אמת על המשתנים $x_1, \ldots, x_n$ קיים פסוק בצורת CNF שמייצג אותה.

פתרון 3

נרצה להוכיח שלכל טבלת אמת של (נקרא לה P) $CNF\left(P\right) \equiv P$
נסתכל על הביטוי $DNF\left(P\right) \equiv P$ לטבלת האמת ההופכית ל $\neg P$, נמצא את הקשר בין $DNF\left(\neg P\right)$ לP

$$DNF\left(\neg P\right) \equiv \neg P \iff \neg DNF\left(\neg P\right) \equiv \neg\left(\neg P\right) \equiv P$$

או בקצרה

$$P \equiv \neg DNF\left(\neg P\right)$$

$$\neg DNF\left(\neg P\right) \equiv \neg\left(D(\neg P)_1 \vee \ldots \vee D(\neg P)_n\right)$$

על פי מה שהוכחנו בשאלה 2

$$\neg DNF\left(\neg P\right) \equiv \left(\neg D(\neg P)_1 \wedge \ldots \wedge \neg D(\neg P)_n\right)$$

עכשיו נסתכל בתוך $D\left(P\right)_i$

$$D\left(P\right)_i \equiv \left(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\right)$$

על פי מה שהוכחנו בשאלה 2

$$\neg D\left(\neg P\right)_i \equiv \neg\left(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n\right) \equiv \left(A_1 \vee \ldots \vee A_n\right)$$

מכיוון שאנחנו רוצים להסתכל על P
ניתן לראות שהצורה של הביטוי הפכה לביטוי מסוג CNF
רצף ביטויים (A_i) שמחוברים תחת קשר $\vee$, שמייצרים רצף ביטויים C_i שמחוברים תחת קשר $\wedge$
הביטוי כולו כזכור שקול לP ולכן מצאנו את

$$\boxed{CNF\left(P\right) \equiv P}$$