מושגי יסוד במתמטיקה 01040002
גליון 4

יונתן אבידור - 214269565

7 בדצמבר 2025

תרגיל 1

יהיו $\{Y_i\}_{i\in I}, \{X_i\}_{i\in I}$ שני אוספי קבוצות. א. הראו

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)=\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cup Y_i\right)$$

ב. הראו

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cap\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\supseteq\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cap Y_i\right)$$

ג. תנו דוגמה לאוספים $\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_i\}_{i\in I}$ עבורם מתקיימת הכלה ממש בסעיף הקודם (כלומר, לא מתקיים שוויון).

פתרון 1

א. על מנת להראות שוויון נראה הכלה דו כיוונית. ראשית נראה $\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cup Y_i\right)\subseteq\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$ יהי $a\in\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cup Y_i\right)$ בהכרח a נמצא ב(לפחות) אחד מהאיחודים, כלומר $\exists i\in I.a\in\left(X_i\cup Y_i\right)$ ניתן לומר שהמצאות a באיחוד נובעת מהיותו ב(לפחות) אחד מX_i, Y_i, כלומר או ש$a\in\bigcup_{i\in I} X_i$ או ש$a\in\bigcup_{i\in I} Y_i$. כלומר $a\in\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$. כעת נראה $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\subseteq\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cup Y_i\right)$ יהי $a\in\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$ כלומר או ש$a\in\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ או ש$a\in\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$ נניח בלי הגבלת הכלליות כי $a\in\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ (ההוכחה זהה לחלוטין אם $a\in\bigcup_{i\in I} Y_i$), כלומר $\exists i\in I.a\in X_i$ מכאן נובע כי עבור אותו i מתרחש $a\in X_i\cup Y_i$. ניתן לכתוב את המסקנה הזו כי $a\in\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cup Y_i\right)$ הראינו הכלה דו כיוונית ולכן מתקיים שוויון ■

ב. יהי $a\in\bigcup_{i\in I}\left(X_i\cap Y_i\right)$ כלומר $\exists i\in I.a\in\left(X_i\cap Y_i\right)$, כלומר עבור אותו i מתרחש גם $a\in X_i$ וגם $a\in Y_i$ ניתן גם לכתוב ש$a\in\bigcup_{i\in I} X_i$ ו$a\in\bigcup_{i\in I} Y_i$ ובפרט

$$a\in\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cap\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$$

■ ג.

$$X=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$
$$Y=\{\{3\},\{2\},\{1\}\}$$

$$\underbrace{\left(\bigcup_{i\in I}X_i\right)\cap\left(\bigcup_{i\in I}Y_i\right)}_{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}\supset\underbrace{\bigcup_{i\in I}(X_i\cap Y_i)}_{\{2\}}$$

שאלה 2

הראו: לא קיימות קבוצות $X,Y\subseteq\mathbb{N}$ כך ש

$$X\times Y=\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$$

פתרון 2

נניח בשלילה שקיימות קבוצות $X,Y\subseteq\mathbb{N}$ כך ש

$$X\times Y=\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$$

ונגיע לסתירה. בקבוצה $\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$ מופיעים כל הזוגות הסדורים של מספר עם עצמו, כלומר

$$\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}=\{(1,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\,,(4,4)\,,\dots\}$$

בפרט, על פי הארבעה שהראינו, על מנת ש$X\times Y=\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$, צריך ש

$$\{1,2,3,4\}\subsetneq X,\{1,2,3,4\}\subsetneq Y$$

אבל זה אומר שבקבוצה $X\times Y$ יש גם את האיברים

$$(1,2)\,,(1,3)\,,(1,4)\,,(2,1)\,,\dots$$

אבל האיברים הללו לא קיימים ב$\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$. סתירה לכן לא קיימות קבוצות $X,Y\subseteq\mathbb{N}$ כך ש

$$X\times Y=\{(i,i)\,|i\in\mathbb{N}\}$$

■