קומבינטוריקה - 01040286

גיליון 8

יונתן אבידור - 214269565
רותם עשת - 212674683

שאלה 1

סעיף א'

הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

סעיף ב'

הסיקו כי לכל k טבעי מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

פתרון 1

סעיף א'

הפונקציה $\frac{1}{1-x}$ היא הטור הפורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

לכן

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^k = \underbrace{(x^0+x^1+...)(x^0+x^1+...)\cdots(x^0+x^1+...)}_{k \text{ פעמים}}$$

נגדיר סדרה $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^k$

נחפש את c_n (המקדם של x^n) לכל $n \in \mathbb{N}$

על מנת לקבל x^n, צריך לבחור אחד מהמעריכים בסוגריים הראשונים (נסמן e_1), אחד מהבאים (e_2) וכן הלאה עוד הסוגריים ה-k (e_k) כך ש

$$e_1 + e_2 + ... + e_k = n$$

$e_1, ..., e_k$ שלמים אי שליליים, ולכן כמות הפתרונות למשוואה היא

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

לכן $c_n = \binom{n+k-1}{k-1}$

ולכן קיבלנו

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

כנדרש

■

סעיף ב'

נכתוב את הביטוי מצד ימין בתור $x^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

לפי סעיף א'

$$x^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+(k+1)-1}{(k+1)-1} x^n = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^{n+k}$$

מכיוון שכל ביטוי של n מופיע בתור $n+k$, נשנה את אינדקס ההתחלה

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$$

מכיוון שכל עוד $n < k$, הביטוי $\binom{n}{k}$ הוא אפס, שכן **אין דרכים לעשות בחירות שכאלה**, לכן עבורם הסכום מתאפס וניתן להחזיר את האינדקס ל-0 בלי לשנות את הסכום, כלומר

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$$

ולכן

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$$

כנדרש

■

שאלה 2

פתרו בעזרת פונקציות יוצרות.
כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$$

כאשר x_2 הוא מספר זוגי ו-x_3 הוא מספר אי-זוגי. ניתן להשאיר את התשובה כסכום של מספר קטן של מחוברים.

פתרון 2

נחפש $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, a_n הוא מספר הפתרונות עבור n, ואז a_{31} יהיה הפתרון נסתכל על המגבלות המתקבלות על ידי האיברים בסכום עבור x_1, x_4, x_5, הם יכולים להיות כל מספר עד n, לכן ניתן לבטאם כפונקציה יוצרת $\frac{1}{1-x}$, ואת האפשרויות לשלושתם יחדיו בתור

$$\frac{1}{(1-x)^3}$$

x_2 צריך להיות זוגי, לכן בייצוג האפשרויות של x_2 כטור פורמלי, המקדמים של החזקות האי-זוגיות יהיו 0, כלומר טור הנדסי עם מקדם x^2

$$\frac{1}{1-x^2}$$

באותה מידה, עבור x_3, המקדמים של החזקות הזוגיות יהיו 0, ולכן צריך "להזיז" את הטור מקום אחד ימינה, ניתן לעשות זאת בכך שנכפול כל אחד מאיברי הטור ב-x

$$\frac{x}{1-x^2}$$

על מנת לקבל את האפשרויות לכל החמישה, נכפול בכל איבר את הפונקציות היוצרות שלהם לכן

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

נשתמש בזהויות שהראינו בשאלה (1)
לפי סעיף א'

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

נפצל את הביטוי השני

$$\frac{x}{(1-x^2)^2} = x \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

נציב $y = x^2$ ונקבל

$$\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n$$

נחזיר את ההצבה

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{2n}$$

ולכן

$$\frac{x}{(1-x^2)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$$

קיבלנו כי

$$F(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+2}{2}x^m\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}\right)$$

נרצה למצוא את המקדם של x^{31}

המקדמים של 31 הם סכום כל האפשרויות לבחור m,n כך ש $m+2n+1=31$,
או לחלופין $m+2n=30$.

$$\sum_{m+2n=30}\binom{m+2}{2}(n+1)$$

לכל בחירת n מ-0 ועד 15, m נבחר ביחידות ושווה ל-$30-2n$, לכן יש 16 אפשרויות לבחור את m,n לכן הסכום שווה ל

$$\boxed{\sum_{n=0}^{15}\binom{32-2n}{2}(n-1)}$$

שאלה 3

מצאו בעיה מתאימה לפונקציה יוצרת:

$$F(x) = \frac{1-x^{15}}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x}$$

פתרון 3

נסתכל על הבעיה בדרך הפוכה לזו הסתכלנו על הבעיה הקודמת
ננסה להבין את ההשפעה שיש למונים ולמכנים בביטוי בתור מגבלות על מספרים שלמים אי-שליליים.
נתחיל מהשבר הראשון

$$\frac{1-x^{15}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{15}}{1-x}$$

החלק הראשון הוא הטור ההנדסי ה"סטנדרטי", בעוד שהחלק השני הוא **מינוס** סדרה עם "הזחה" של 15, נראה אותן יחדיו

$$\begin{array}{c} 1+x+x^2+x^3+...+x^{14}+x^{15}+x^{16}+... \\ - \\ 0+0+0+0+...+0+x^{15}+x^{16}+... \\ = \\ 1+x+x^2+x^3+...+x^{14}+0+0+... \end{array}$$

לכן מדובר בסדרה ש-15 המקדמים הראשונים שלה 1 ולאחר מכן 0 עד אינסוף
השבר השני

$$\frac{1}{1-x^2}$$

ראינו ב-(2) שזו סדרה של שלמים זוגיים בלבד
השבר השלישי

$$\frac{x}{1-x}$$

ראינו שזו "הזחה" ימינה של כל הסדרה, כלומר $0+x^1+x^2+...$, לכן אלו מספרים **חיוביים** בלבד.
כעת יש לנו את כל מה שצריך על מנת למצוא בעיה.

מצאו כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש למשוואה
$x_1+x_2+x_3=50$
כאשר $x_1 \leq 14$, x_2 זוגי ו-x_3 חיובי ממש.

שאלה 4

תהי

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

הפונקציה היוצרת של הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ נגדיר סדרת חדשה (סדרת הסכומים החלקיים) על ידי:

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$$

בטאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ על ידי הפונקציה $F(x)$

פתרון 4

נחפש את הפונקציה היוצרת של b_n

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot a_k\right)x^n$$

בתוך הסוגריים (המקדם של x^n) יש לנו מכפלת פונקציות יוצרות, כאשר פונקציה אחת היא הפונקציה היוצרת של הסדרה הקבועה 1, והשנייה היא $F(x)$, לכן

$$\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot a_k=F(x)\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{F(x)}{1-x}$$

לכן

$$G(x)=\frac{F(x)}{1-x}$$

ולכן

שאלה 5

יהיו n נקודות ממוספרות, מסודרות במעגל. נסמן ב-M_n את מספר הדרכים לחבר n נקודות על המעגל, על ידי מיתרים שאינם נחתכים.
למשל:

$$M_0 = M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4, M_4 = 9$$

שימו לב: לא כל הנקודות חייבות להיות מחוברות, אנו סופרים גם את האפשרות שאין אף מיתר במעגל

סעיף א'

מצאו נוסחת נסיגה עבור M_n

סעיף ב'

מצאו ביטוי פשוט לפונקציה היוצרת

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$$

פתרון 5

סעיף א'

נביט בנקודה כלשהי, נחלק למקרים
אם אין מיתר שמחבר אותו לנקודות אחר, מספר האפשרויות למיתרים על $n-1$ הנקודות הנותרות הוא M_{n-1}
אם הנקודה כן מחוברת במיתר לנקודה אחרת (נסמנה k), המיתר מחלק את המעגל לשניים, ובכך גם את הנקודות האחרות
נשים לב שלא ניתן לחבר נקודה מצד אחד של המיתר לנקודה שנמצאת בצד השני.
לכן נכפיל את האפשרויות שיש לנו להמשך החלוקה בכל צד של המעגל.
נשים לב גם כי בצד של המיתר יש $k-2$ נקודות ובצידו השני יש $n-k$ נקודות, מתקבל כי במקרה זה מספר הדרכים לחלוקה עם המיתר הזה הוא $M_{k-2} \cdot M_{n-k}$
מעיקרון החיבור, נסכום את האפשרויות לכל k
לכן מתקבל

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} M_{k-2} \cdot M_{n-k}$$

סעיף ב'

נחפש פונקציה יוצרת

$$M(x)=\sum_{n=0}^{\infty}M_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}M_nx^n+1+x=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(M_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}M_{k-2}\cdot M_{n-k}\right)x^n$$

$$=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}M_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}(M_{k-2}M_{n-k})x^n$$

$$=1+x+x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(M_nx^n)-1\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(M_kM_{n-k})x^{n+2}$$

$$=1+x+xM(x)-x+M(x)^2x^2=M(x)^2x^2+M(x)x+1$$

נזכור שזה שווה ל-$M(x)$

$$M(x)=M(x)^2x^2+M(x)x+1$$

$$\Longrightarrow 0=x^2M(x)^2+M(x)(x-1)+1$$

נשתמש בנוסחת שורשים

$$M(x)=\frac{-(x-1)\pm\sqrt{(x-1)^2-4x^2}}{2x^2}=\frac{1-x\pm\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$$

על מנת שנקבל $M(0)=1$, נבחר במינוס, לכן

$$\boxed{M(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}}$$

בדיחת קרש

חשבנו על n בדיחות עבור $n+1$ גליונות, בהכרח קיימת בדיחה שנכתוב בשני גליונות שונים