חשבון אינפי 2 - 01040281
גליון 3

יונתן אבידור - 214269565

7 ביוני 2026

שאלה 1

חשבו

סעיף א'

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

סעיף ב'

$$\int_1^2 \log^2(x)\,dx$$

פתרון 1

סעיף א'

נציב $t = 1+\sqrt{x}$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \implies dx = 2\left(t-1\right)\,dt$$

נציב את גבולות האינטגרציה

$$\sqrt{1}+1 = 2$$
$$\sqrt{0}+1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\left(2t-2\right)\,dt = \int_1^2 2-\frac{2}{t}\,dt = 2\int_1^2 1-\frac{1}{t}\,dt$$
$$= 2\left(\int_1^2 1\,dt - \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt\right) = 2\left(t\Big|_1^2 - \log(t)\Big|_1^2\right) = \boxed{2\left(1-\log(2)\right)}$$

סעיף ב'

נציב $t = \log(x)$

$$dt = \frac{1}{x}dx \implies dx = e^t\,dt$$

נציב את גבולות האינטגרציה

$$\log(1) = 0$$

את $\log(2)$ אין לנו דרך לפשט אז זה נשאר $\log(2)$

$$\int_1^2 \log^2 x = \int_0^{\log(2)} t^2 e^t\,dt$$

נעשה אינטגרציה בחלקים

$$\begin{array}{ll} u = t^2 & v' = e^t \\ u' = 2t & v = e^t \end{array}$$

$$\int_0^{\log(2)} t^2 e^t\,dt = \left(t^2 \cdot e^t\right)\Big|_0^{\log(2)} - \int_0^{\log(2)} 2t \cdot e^t\,dt$$

נפתור את האינטגרל שנשאר

$$\int_0^{\log(2)} 2t \cdot e^t\,dt = 2\int_0^{\log(2)} t \cdot e^t\,dt$$

נבצע שוב אינטגרציה בחלקים

$$\begin{array}{ll} u = t & v' = e^t \\ u' = 1 & v = e^t \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\log(2)} t \cdot e^t\,dt &= \left(t \cdot e^t\right)\Big|_0^{\log(2)} - \int_0^{\log(2)} e^t\,dt \\ &= \left(\log(2) \cdot e^{\log(2)}\right)\left(0 \cdot e^0\right) - e^t\Big|_0^{\log(2)} \\ &= 2\log(2) - \left(e^{\log(2)} - e^0\right) \\ &= 2\log(2) - 1 \end{aligned}$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו

$$\begin{aligned}
&\left(t^2 \cdot e^t\right)\Big|_0^{\log(2)} - \int_0^{\log(2)} 2t \cdot e^t \, dt \\
&= \left(t^2 \cdot e^t\right)\Big|_0^{\log(2)} - 2\left(2\log(2) - 1\right) \\
&= \left(\log^2(2) \cdot e^{\log(2)}\right) - \left(0^2 \cdot e^0\right) - 4\log(2) + 2 \\
&= 2\log^2(2) - 4\log(2) + 2 \\
&= \boxed{2\left(\log(2) - 1\right)^2}
\end{aligned}$$

שאלה 2

חשבו

סעיף א'

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(n^2+j^2\right)^2}$$

סעיף ב'

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(n^2+j^2\right)^2}$$

פתרון 2

סעיף א'

נתבונן בביטוי בתוך הסכום

$$\frac{1}{\left(n^2+j^2\right)^2} = \frac{1}{\left(n^2\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)\right)^2} = \frac{1}{n^4\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)^2}$$

נציב

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{n^3} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{n^4}\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}: f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

הפונקציה הזו רציפה, ולכן אינטגרבילית
נשים לב שעבור סדרת החלוקות $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ על הקטע $[0,1]$ מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda(P_n) = \frac{1}{n} \implies \lambda(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן, עבור כל בחירת נקודות, ובפרט $\{t_j\} : t_j \in [x_{j-1}, x_j] = x_j = \frac{j}{n}$, כלומר בחירת הנקודה הימנית ביותר בכל תת-קטע מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R(f, P_n, \{t_j\})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \cdot \Delta_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

מכאן שמספיק לחשב את $\int_0^1 f(x)\, dx$.
נעשה זאת בכך שנמצא פונקציה קדומה ונשתמש במשפט ניוטון-לייבניץ
נחפש את

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

נעשה הצבה טיגרונומטרית עבור המכנה

$$x = \tan(\theta)$$
$$dx = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta$$
$$x(0) = 0 \implies 0 = \tan(\theta) = \theta = 0$$
$$x(1) = 1 \implies 1 = \tan(\theta) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(\theta))^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta = \cancel{\cos^4(\theta)} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2(\theta)}}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

נשתמש בזהות $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\ d\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\ d\theta\right)$$

לפי כללי גזירה של הרכבה

$$\sin(\theta)' = \cos(\theta) \implies \sin(2\theta)' = 2\cos(2\theta) \implies \frac{1}{2}\sin(2\theta)' = \cos(2\theta)$$

לכן

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\ d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi+2}{8}}$$

סעיף ב'

נשים לב כי

$$n^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n^2+j^2)^2} = \frac{1}{n}\left(n^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n^2+j^2)^2}\right)$$

בסעיף הקודם הראינו כי $\lim_{n\to\infty} n^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n^2+j^2)^2} = \frac{\pi+2}{8}$ לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n^2+j^2)^2}\right) \underset{\text{אריתמטיקת גבולות - כפל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} n^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n^2+j^2)^2}$$

הגבול $\lim_{n\to\infty}$ הוא גבול ידוע מאינפי 1 ושווה ל-0, לכן. לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} n^3 \frac{1}{(n^2+j^2)^2} \underset{\text{חסומה כפול אפסה}}{=} \boxed{0}$$

שאלה 3

תהא g פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ ונניח כי $g(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.
הוכיחו כי למשוואה $x = \int_0^2 g(x)\,dy$ יש פתרון אחד בלבד עבור $x \in [0,1]$, בפרט ב-$x = 0$

פתרון 3

נגדיר פונקציית עזר

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$\forall x \in [0,1] : f(x) = x - \int_0^{x^2} g(y)\ dy$$

מכיוון ש-f היא פונקציית ההפרש בין צדדי המשוואה, נותר להוכיח רק כי $f(0) = 0$ וכי אין אף נקודה $x \in (0,1]$ בה $f(x) = 0$
נראה כי $f(0) = 0$

$$f(0) = 0 - \int_0^0 g(y)\ dy$$

כל אינטגרל מ-0 ל-0 שווה 0, לכן

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

כעת נשאר להראות שזה השורש היחיד של הפונקציה בקטע $[0,1]$
נעשה זאת בכך שנראה שהפונקציה מונוטונית עולה ממש.
נגזור את f

$$f'(x) = 1 - \left(\int_0^{x^2} g(y)\ dy\right)'$$

מהמשפט היסודי של החדו"א אנחנו מקבלים כי

$$\left(\int_0^{x^2} g(y)\ dy\right)' = g\left(x^2\right) \cdot 2x$$

לכן

$$f'(x) = 1 - g\left(x^2\right) \cdot 2x$$

נתון כי $g\left(x\right) < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכן

$$g\left(x^2\right) < \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

נזכר ש-$x \in (0,1]$ לכן ניתן להכפיל את שני צדדי המשוואה ב-$2x$ בלי לשנות את הכיוון של אי השוויון

$$g\left(x^2\right) < \frac{1}{2x} \underset{\times 2x}{\Longrightarrow} g\left(x^2\right) \cdot 2x < \frac{1}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{2x} \Longrightarrow g\left(x^2\right) \cdot 2x < 1$$

לכן

$$f'\left(x\right) = 1 - \underbrace{g\left(x^2\right) \cdot 2x}_{<1} > 0$$

מכאן ש-f' חיובית ממש בכל התחום, ו-f עולה ממש.
f עולה ממש בכל הקטע $(0,1)$ ו-$f\left(0\right)$, לכן לא קיים $x \in (0,1]$ אשר עבורו מתקיים $f\left(x\right) = 0$
כנדרש
■

שאלה 4

חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\tan t\,dt}{\int_0^{\sin^2 x}t^2\,dt}$$

פתרון 4

כאשר $x\to 0$, גם $x^3\to 0$ ו-$sin^2x\to 0$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{x^3}\tan t\,dt=0$$
$$\lim_{x\to 0}\int_0^{\sin^2 x}t^2\,dt=0$$

לכן נעשה לופיטל מסוג "$\frac{0}{0}$"

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\tan t\,dt}{\int_0^{\sin^2 x}t^2\,dt}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^3}\tan t\,dt\right)'}{\left(\int_0^{\sin^2 x}t^2\,dt\right)'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(x^3\right)\cdot 3x^2}{\sin^4 x\cdot 2\cos x\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{\sin^5 x}\cdot\frac{\frac{\sin\left(x^3\right)}{\cos\left(x^3\right)}}{\cos x\cdot x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\underbrace{\frac{x^5}{\sin^5 x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x\cos\left(x^3\right)}}_{\to 1}\\
&=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

שאלה 5

חשבו את אורך הקשת של העקום $y = \log x, 1 \leq x \leq 2$

פתרון 5

נשתמש בנוסחה לחישוב אורך קשת

$$A = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

נשתמש בהצבה

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1+x^2} \\ dt &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\ dx &= \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \\ t(1) &= \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2} \\ t(2) &= \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

נציב

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}\, dt \end{aligned}$$

נשתמש ב"טריק הידוע" (להוסיף ולהחסיר אחד)

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}\, dt &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2+1-1}{t^2-1}\, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1 + \frac{1}{t^2-1}\, dt \\ &\underset{\text{לינאריות האינטגרל}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1\, dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1}\, dt \\ &\underset{\text{ניוטון לייבניץ}}{=} \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1}\, dt \end{aligned}$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}$$
$$\Longrightarrow\ A\left(t+1\right)+B\left(t-1\right)=1$$
$$\Longrightarrow\ \begin{cases}A-B=1\\A+B=0\end{cases}$$

נפתור את המשוואה

$$A+B=0\ \Longrightarrow\ A=-B$$
$$\Longrightarrow\ A-B=-2B=1\ \Longrightarrow\ B=-\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ A=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{1}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{1}{t-1}\,dt-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{1}{t+1}\,dt$$
$$\underset{\int\frac{1}{a+t}=ln(a+t),\text{ניוטון לייבניץ}}{=}\frac{1}{2}\left(\log\left(t-1\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{2}\left(\log\left(t+1\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log\left(\sqrt{5}-1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)-\log\left(\sqrt{5}+1\right)+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)-\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$$

נציב את כל החלקים שקיבלנו

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=\boxed{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)-\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)}$$

שאלה 6

חשבו את השטח של האסטרואיד A_a המוגדר על ידי

$$A_a = \left\{(x,y) : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\right\}$$

עבור $a > 0$ כלשהו

פתרון 6

נשים לב כי האסטרואיד סימטרי ביחס לציר ה-y וגם ביחס לציר ה-x, לכן מספיק לחשב את השטח בין האסטרואיד לציר ה-x ברביע הראשון ולהכפיל ב-4
נכתוב בצורה אחרת את המשוואה על מנת להתאים אותה לאינטגרל

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} \implies a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \geq y^{\frac{2}{3}}$$

מכיוון שאנחנו ברביע הראשון, ניתן להעלות את כל הביטוי בחזקת $\frac{3}{2}$, וזה ישמור על יחס הסדר

$$\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \geq y$$

כלומר שטח האסטרואיד (ברביע הראשון) הוא השטח שמתחת לגרף $\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ בקטע $[0,a]$, מהגדרת האינטגרל זה

$$\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

השורש $\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ קיים, לכן $a^{\frac{2}{3}} > x^{\frac{2}{3}}$ נציב $A = a^{\frac{1}{3}}$, קיימת θ כך ש-$x^{\frac{1}{3}} = A\sin\theta$

$$x = A^3 \sin^3\theta$$
$$dx = 3A^3 \sin^2\theta \cos\theta$$
$$x(0) = 0 = 3A^3 \sin^2\theta \implies 0 = \sin\theta \implies \theta = 0$$
$$x(a) = a \implies A^3 = A^3 \sin^2\theta \implies 1 = \sin^2\theta \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

נציב

$$\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(A^2 - A^2 \sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 3A^3 \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta$$
$$= 3A^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$$