קומבינטוריקה - 01040286

גיליון 9

יונתן אבידור - 214269565
רותם עשת - 212674683

שאלה 1

קבעו האם קיים גרף בעל 6 קודקודים עם הדרגות הבאות:

סעיף א'

$$5, 5, 4, 3, 2, 1$$

סעיף ב'

$$5, 4, 4, 3, 2, 1$$

סעיף ג'

$$5, 4, 3, 3, 2, 1$$

פתרון 1

סעיף א'

לא קיים גרף שכזה!
ננסה (לראשונה) להסביר זאת באמצעות סיפור.
נקביל גרף שכזה ללחיצות ידיים במסיבה של שישה אנשים.
אבי, בני, גלית, דניאל, הודיה ו-ורד במסיבה.
אבי לחץ ידיים לחמישה מבין חברי המסיבה.
בני לחץ ידיים לחמישה מבין חברי המסיבה.
גלית לחצה ידיים לארבעה מבין חברי המסיבה.
דניאל לחץ ידיים לשלושה מבין חברי המסיבה.
הודיה לחצה ידיים לשניים מבין חברי המסיבה.
ורד לחצה ידיים לאחד מבין חברי המסיבה.
ראשית, אבי לחץ ידיים לחמישה מבין חברי המסיבה, מכיוון שיש שישה אנשים במסיבה מדובר בכולם.
לאחר מכן, בני ניסה ללחוץ ידיים לכולם, אך כשהגיע לורד הוא גילה שהיא כבר לחצה יד לאבי, וכעת הוא לא יכול להשלים חמש לחיצות ידיים!
בגרף, זה אומר שאי אפשר שיהיו שני קודקודים שמקושרים לכל שאר הקודקודים ובנוסף שיהיה קודקוד עם צלע אחת בלבד.
בפרט, הגרף מהשאלה אינו גרף אפשרי.

סעיף ב'

לא קיים גרף שכזה!
נזכר בתכונה חשובה של גרפים

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\ |E|$$

כלומר, סכום הדרגות של הקודקודים שווה לפעמיים כמות הצלעות.
כמסקנה מזה, סכום הדרגות צריך להיות זוגי.
לעומת זאת, אם נסכום את כל הדרגות נראה כי

$$5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 19 \nmid 2$$

לכן גרף זה אינו אפשרי.

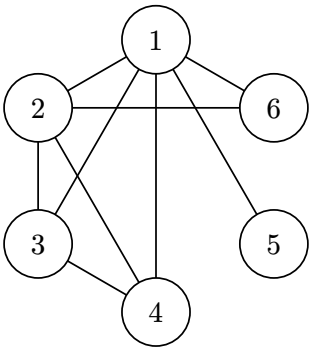
סעיף ג'

גרף שכזה אפשרי לחלוטין, נתארו

$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$$



שאלה 2

סעיף א'

נתבונן בקבוצת הקודקודים

$$V = \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

נחבר את הקודקודים u, v בצלע אם

$$|u - v| = \pm 3 \pmod 7$$

ציירו את הגרף $G = (V, E)$. כמה רכיבי קשירות יש לגרף? האם יש מעגלים בגרף?

סעיף ב'

נתבונן בקבוצת הקודקודים

$$V = \mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

נחבר את הקודקודים u, v בצלע אם

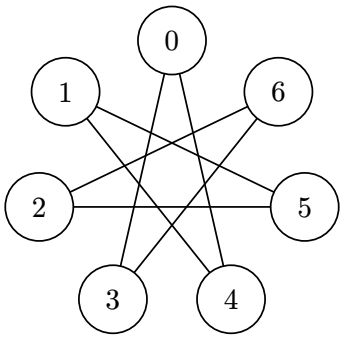
$$|u - v| = \pm 3 \pmod 9$$

ציירו את הגרף $G = (V, E)$. כמה רכיבי קשירות יש לגרף? האם יש מעגלים בגרף?

פתרון 2

סעיף א'

נצייר את הגרף

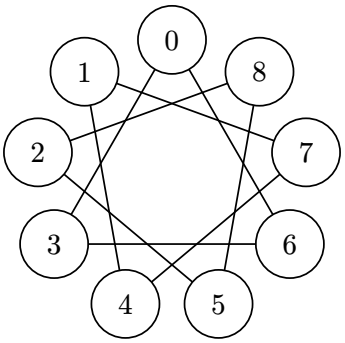


מכיוון שאפשר לתאר את הגרף כמעגל אוילר אחד

$$0 - 3 - 6 - 2 - 5 - 1 - 4 - 0$$

יש רכיב קשירות אחד, ומעגל אחד.

סעיף ב'



נראה שיש שלושה רכיבי קשירות, בהתאם לשלושת מחלקות השקילות של mod 3.
$(0,3,6),(1,4,7),(2,5,8)$. כל רכיב קשירות הוא גם מעגל בפני עצמו באורך 3

$$0-3-6$$
$$1-4-7$$
$$2-5-8$$

שאלה 3

יהי $G=(V,E)$ גרף. הגרף המשלים של G הוא הגרף

$$\overline{G}=\left(V,\overline{E}\right)$$

על אותה קבוצת קודקודים, שבו

$$\{u,v\}\in\overline{E}\iff\{u,v\}$$

הוכיחו כי לכל גרף G, לפחות אחד מבין G ו-$\overline{G}$ הוא קשיר.

פתרון 3

יהא גרף $G=(V,E)$

אם G קשיר סיימנו.

נניח כי G אינו קשיר, נראה כי $\overline{G}=\left(V,\overline{E}\right)$ קשיר.

יהיו $u,v\in V$, נחלק למקרים.

אם u,v ברכיבי קשירות שונים ב-G, אזי $\{u,v\}\notin E$, ולכן מהגדרת המשלים $\{u,v\}\in\overline{E}$, וצלע זו מהווה מסלול בין u ל-v.

אילו u,v כן באותו רכיב קשירות ב-G, אז מכיוון ש-G לא קשיר, היה $w\in V$ אשר לא נמצא באותו רכיב קשירות כמו.

אם כן, $\{u,v\},\{v,w\}\notin E$, ולכן מהגדרת המשלים $\{u,v\},\{v,w\}\in\overline{E}$, שרשור שלהם מהווה מסלול בין u ל-v ב-$\overline{E}$.

הראינו כי לכל זוג קודקודים ב-$\overline{E}$ קיים מסלול ביניהם, לכן $\overline{G}$ קשיר, כנדרש

■

שאלה 4

עבור גרף $G=(V,E)$ מסמנים ב $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית בגרף. הראו כי בכל עץ T עם $\Delta(T)=k$ יש לפחות k עלים.

פתרון 4

$\Delta(T)=k$, לכן קיים קודקוד $v\in V$ כך ש $d(v)=k$, כלומר יש k צלעות שיוצאות ממנו.
אם נתחיל k מסלולים מ-v, כך שהמסלול ה-i עובר בשכן ה-i של v, ונסיים כל מסלול רק כשנגיע לעלה (ניתן ליצור מסלולים שכאלה, שכן T הוא עץ ולכן קשיר), נגיע ל-k עלים שונים (שכן אין מעגלים ב-T, מהגדרתו כעץ).
הגענו ל-k עלים שונים בלי שעברנו על כל העץ, לכן יש **לפחות** k עלים שונים.
כנדרש
■

שאלה 5

יהי T עץ ללא קודקודים מדרגה 2. הראו כי ב-T יש יותר עלים מאשר קודקודים שאינם עלים.

פתרון 5

נסמן ב-L את העלים וב-U את הקודקודים שאינם עלים.
נשים לב כי $U + L = |V|$
נביט בסכום הדרגות של קודקודי העץ

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2((|L| + |U|) - 1) = 2|L| + 2|U| - 2$$

ומצד שני

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{l \in L} d(l) + \sum_{u \in U} d(u)$$

נתון כי אי קודקודים בעלי דרגה 2, לכן כל קודקוד ב-u הוא בעל דרגה 3 ומעלה, לכן

$$\sum_{l \in L} d(l) + \sum_{u \in U} d(u) \geq 1 \cdot |L| + 3 \cdot |U|$$

קיבלנו כי

$$|L| + 3|U| \leq 2|L| + 2|U| + 2$$

מכאן ש

$$|U| \leq |L| + 2$$

כלומר יש לפחות עלה אחד מאשר קודקוד שאינו עלה.
לכן יש יותר עלים מקודקודים שאינם עלים
כנדרש
■

שאלה 6

יהי $T=(V,E)$ עץ פורש על n קודקודים.

סעיף א'

הראו שלכל $e \notin E$ הגרף $T+e$ מכיל מעגל.

סעיף ב'

הראו שלכל $e \notin E$ ולכל צלע f על המעגל מסעיף א', הגרף

$$T' = T + e - f$$

הוא עץ פורש על n הקודקודים.

פתרון 6

סעיף א'

יהי $e \notin E$, e מחבר בין שני קודקודים ב-T, נסמנן u, v.
מהיות T עץ, קיימת מסילה **אחת** המקשרת בין u ו-v. $u - ... - v$.
הוספת e יוצרת עוד מסילה $u - v$.
אם נשרשר את המסילות נקבל $u - ... - v - u$, ולכן הגרף החדש מכיל מעגל.
■

סעיף ב'

ב-T יש $n-1$ צלעות, לכן ב-$T+e-f$ יש $n-1$ צלעות, לכן אם נראה כי הוא קשיר, הוא יהיה עץ (שכן אחת מההגדרות לעץ היא גרף קשיר המקיים

$$|V| = |E| + 1$$

הוספת e ל-T יוצר מעגל (כפי שהראינו בסעיף א'), ובכך נותן שני מסלולים שונים בין כל שני קודקודים על המעגל. לאחר הורדת f נותרת עדיין מסילה אחת, לכן עדיין יש מסילה בין כל הקודקודים על המעגל, ומהיות T עץ, גם שאר הגרף קשיר.
לכן $T+e-f$ עץ
■

שאלה 7

יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי עם חלוקה

$$V=V_1\cup V_2 \qquad V_1\cap V_2=\varnothing$$

וקבוצת הצלעות מוכלת בקבוצה

$$\{\{v_1,v_2\}:v_1\in V_1,v_2\in V_2\}$$

הראו כי

$$|E|=\sum_{v_1\in V_1}\deg_G(v_1)=\sum_{v_2\in V_2}\deg_G(v_2)$$

פתרון 7

מכיוון שכל צלע מחוברת לקודקוד אחד מ-V_1 וקודקוד אחד מ-V_2, סכום הדרגות של איברי V_1 שווה לסכום הדרגות של איברי V_2, ומכיוון שאלו כל הצלעות, זהו סך כל הצלעות.

כנדרש

■

214269565
212674683

שאלה 8

יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי A מטריצת השכנויות של הגרף, כלומר $A_{i,j}=1$ אם i,j שכנים בגרף V, ו- $A_{i,j}=0$ אם i,j אינם שכנים בגרף V.
הראו כי לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל $i,j\in V$, מספר המסלולים בגרף באורך k בין הקודקודים i,j הוא

$$\left(A^k\right)_{i,j}$$

כלומר הכניסה (i,j) במטריצה A^k

פתרון 8

נסמן ב-$P_k(i,j)$ את מספר המסלולים בין i ל-j מאורך k וב-N_v את קבוצת השכנים של v, כלומר

$$\forall v'\in V: v'\in N_v \iff A_{v',v}=1$$

כעת נוכיח באינדוקציה

בסיס האינדוקציה

$k=1$, מסלול בין שני קודקודים $i,j\in V$ באורך 1 קיים אם ורק אם i,j שכנים.
לכן i,j לא שכנים, אין מסלולים שכאלה ו-$A^1_{i,j}=0$, ואם i,j שכנים, יש מסלול אחד שכזה בדיוק ו-$A^1_{i,i}=1$ לכן $P_1(i,j)=1=\left(A^1\right)_{i,j}$

הנחת האינדוקציה

נניח כי $P_k(i,j)=\left(A^k\right)_{i,j}$

צעד האינדוקציה

נשים לב לכך שמספר המסלולים באורך $k+1$ בין i,j הוא המספר הכולל של מסלולים מ-i ל-$l\in V$ שכן של j (ולהפך)

$$P_{k+1}(i,j)=\sum_{l\in N_j}P_k(i,l)=\sum_{l\in N_j}P_k(i,l)\cdot 1=\sum_{l\in N_j}P_k(i,l)\cdot P_1(l,j)$$

כאשר השוויון האחרון מתקבל מכך ש $l\in N_j$ ולכן l,j שכנים, כלומר קיים מסלול אחד בין l ל-j
מהנחת האינדוקציה נקבל כי

$$P_{k+1}(i,j)=\sum_{l\in N_j}P_k(i,l)\cdot P_1(l,j)=\sum_{l\in N_j}A^k_{i,l}\cdot A_{l,j}=A^{k+1}_{i,j}$$

כשהשוויון האחרון מתקבל מהגדרת כפל מטריצות.

■

214269565
212674683

שאלה 9

ליעקב יש תיל מתכתי באורך 12 מטרים. יעקב רוצה לקפל ממנו, בלי לחתוך, צלעות של קובייה בעלת אורך צלע 1 מטר. האם הוא יכול לשות זאת? הסביר כיצד או הוכיחו כי זה בלתי אפשרי.

פתרון 9

לצערו של יעקב, אין ביכולתו ליצור קובייה שכזו.
נתאר קוביה כגרף בעל 8 קודקודים ו-12 צלעות, כאשר יוצאות 3 צלעות מכל קודקוד בגרף.
בשביל ליצור קוביה עם אורך צלע של מטר 1 מתיל באורך 12 מטרים, יש להשתמש בכל מטר של צלע עבור צלע אחת בדיוק, לכן אין לעבור פעמיים על אותה הצלע.
המעבר צלע-צלע עם התיל הוא בעצם יצירת מסלול אוילר.
קיים מסלול אוילר בגרף אם ורק אם יש 0 או 2 קודקודים עם דרגה אי-זוגית. אולם בגרף שמייצג את הקובייה יש 8 קודקודים עם דרגה אי-זוגית.
לכן מסלול שכזה אינו אפשרי ויעקב לא יכול ליצור קובייה כפי שהוא רוצה.

שאלה 10

סעיף א'

האם ניתן לסדר על המעגל את הספרות

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

(כל ספרה יכולה להופיע כמה פעמים!) כך שלכל שתי ספרות שונות a, b, ספרות אלו יופיעו כשכנות בדיוק פעם אחת (ללא חשיבות לסדר)?
אם כן, תנו דוגמה, ואם לא - הוכיחו.

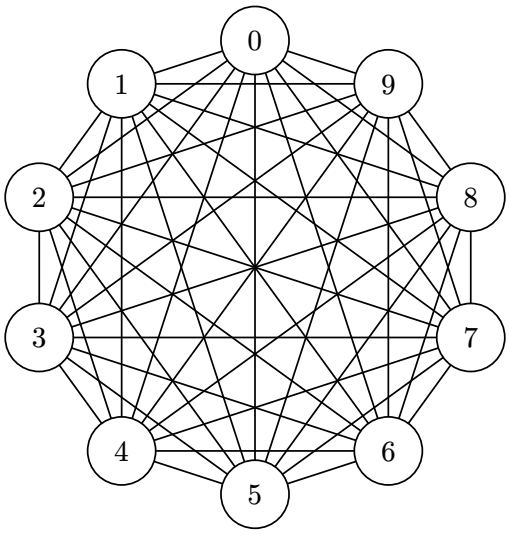
סעיף ב'

אותה שאלה עבור הספרות

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

פתרון 10

נקביל מעגל של מספרים לגרף שהקודקודים שלו הם הספרות, ושעבור שתי ספרות שונות a, b אם ורק אם $\{a, b\} \in E$ שכנים לפחות פעם אחת
מצב שבו כל שתי ספרות הן שכנות שקול למעגל השלם K_n, מצב שבו כל שתי ספרות הן שכנות בדיוק פעם אחת שקול לקיום מעגל אוילר בגרף.
מכיוון שהגרף הוא הגרף המלא, כל קודקוד מחובר לכל השאר, ולכן דרגתו היא $n-1$.

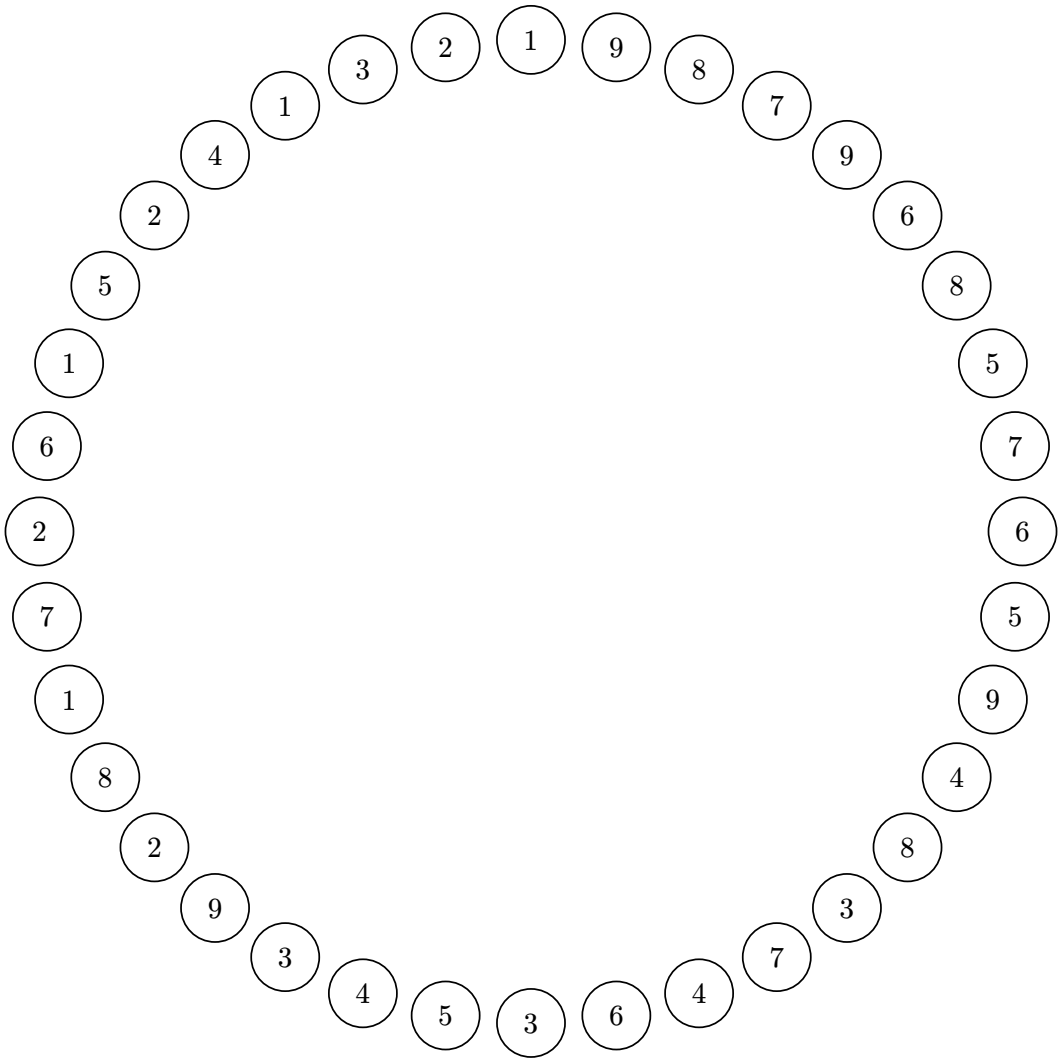


סעיף א'

מכיוון ש-$|\{0, 1, ..., 9\}| = 10$, הדרגה של כל קודקוד היא 9, אולם מעגל אוילר יכול להתקיים אם ורק אם הדרגה של כל קודקוד היא זוגית.
לכן לא קיים מעגל אוילר ולא ניתן לסדר את הספרות במעגל כמתואר

214269565
212674683

סעיף ב'



214269565
212674683

בדיחת קרש

הקוקטייל האהוב עליי הוא הקוקטייל הרקורסיבי.
מרכיביו הם 50% וודקה ו-50% קוקטייל רקורסיבי.

214269565
212674683