אלגברה א' ????????
גליון 11

????? ?????? - ?????????

4 במאי 2026

שאלה 1

סעיף א'

נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

חשבו את $adj\left(A\right)$. באמצעות חישוב זה, חשבו את A^{-1}

סעיף ב'

נתון כי $|B| = \frac{1}{3}, |A^tB^2| = \frac{2}{9}$. חשבו את

$$\left|AB^tB^{-1}A^tB^4\left(A^{-1}\right)^t\left(A^t\right)^{-1}\right|$$

סעיף ג'

תהא $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. נבצע את פעולות הדירוג הבאות על שורות ועמודות לפי הסדר

$$R_4 \to -3R_4$$
$$R_3 \to R_3 + 4R_2$$
$$C_1 \leftrightarrow C_3$$

נסמן את המטריצה שהתקבלה לאחר הפעולות ב-B. נתון כי $\left|\left(B^{-1}\right)^t\right| = \frac{1}{4}$. חשבו את $|A|$

פתרון 1

נחשב את $adj\left(A\right)$
ראשית, נחשב את המינורים:

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= 3\cdot 3 - 8\cdot 1 = 1\\
M_{1,2} &= -1\cdot 3 - 8\cdot -1 = -3+8 = 5\\
M_{1,3} &= -1\cdot 1 - 3\cdot -1 = -1+3 = 2\\
M_{2,1} &= -2\cdot 3 - -5\cdot 1 = -6 - -5 = -6+5 = -1\\
M_{2,2} &= 1\cdot 3 - -5\cdot -1 = 3-5 = -2\\
M_{2,3} &= 1\cdot 1 - -2\cdot -1 = 1-2 = -1\\
M_{3,1} &= -2\cdot 8 - -5\cdot 3 = -16+15 = -1\\
M_{3,2} &= 1\cdot 8 - -5\cdot -1 = 8-5 = 3\\
M_{3,3} &= 1\cdot 3 - -2\cdot -1 = 3-2 = 1
\end{aligned}$$

על פי זה ניצור את $adj\left(A\right)$

$$adj\left(A\right) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -5 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את A^{-1} על פי הנוסחה

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A\right)$$

ראשית, נחשב את הדטרמיננטה של A (ונגלה אם היא בכלל הפיכה)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5\\ -1 & 3 & 8\\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

נעשה פעולות דירוג, ונשים לב לשינויים שהם עלולים ליצור לדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 + R_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

במטריצה משולשת עליונה, הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון ולכן $|A| = 1$
מכאן ניתן לחשב את ההופכית

$$A^{-1} = 1 \cdot adj\left(A\right) = adj\left(A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נציין כמה תכונות דטרמיננטה

$$\left|A^t\right| = |A|$$
$$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$$
$$|A^n| = |A|^n \, |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$\left|AB^tB^{-1}A^tB^4\left(A^{-1}\right)^t\left(A^t\right)^{-1}\right| = |A| \cdot |B| \cdot |B|^{-1} \cdot |A| \cdot |B|^4 \cdot |A|^{-1} \cdot |A|^{-1}$$

מקומוטטיביות כפל סקלארים מעל השדה $\mathbb{F}$

$$|A| \cdot |B| \cdot |B|^{-1} \cdot |A| \cdot |B|^4 \cdot |A|^{-1} \cdot |A|^{-1} = |A| \cdot |A|^{-1} \cdot |A| \cdot |A|^{-1} \cdot |B| \cdot |B|^{-1} \cdot |B|^4$$

מאקסיומת השדה האומרת $\forall a \in \mathbb{F} : a \cdot a^{-1} = 1$:

$$|A| \cdot |A|^{-1} \cdot |A| \cdot |A|^{-1} \cdot |B| \cdot |B|^{-1} \cdot |B|^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |B|^4 = |B|^4$$

נתון לנו כי $|B| = \frac{1}{3}$ ולכן:

$$\boxed{|B|^4 = \frac{1}{3}^4 = \frac{1}{3^4} = 81}$$

סעיף ג'

נסמן $x = |A|\,, y = |B|$, נרצה למצוא את x

$$y = x \cdot -3 \cdot 1 \cdot -1 \implies = 3x$$

מכיוון שדטרמיננטה לא משתנה תחת שחלוף, $|B^{-1}| = |B|^{-1}$, ו$y = |B|$ אנחנו מקבלים כי

$$\frac{1}{4} = \left|\left(B^{-1}\right)\right| = \left|B^{-1}\right| = |B|^{-1} = y^{-1} \implies y = 4 = 3x \implies x = \frac{4}{3} = |A|$$

שאלה 2

תהא $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A^n = 0$ אך $A^{n-1} \neq 0$

סעיף א'

הוכיחו כי קיים $v \in \mathbb{F}^n$ כך ש$A^{n-1}v \neq 0$

סעיף ב'

עבור אותו v, הוכיחו כי הקבוצה $\{v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v\}$ בת"ל.

סעיף ג'

הוכיחו כי A דומה למטריצה הבאה:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ד'

חשבו את $r(A)$ ואת $tr(A)$

פתרון 2

סעיף א'

$$A^{n-1} \neq 0 \implies \exists i,j \in [n] : \left(A^{n-1}\right)_{ij} \neq 0$$

נתבונן ב$v := e_j$, כלומר וקטור העמודה שבכל הכניסות שלו יש 0 מלבד האחת הכניסה הj-ית שם יש 1
נתבונן ב$A^{n-1}v$ במקום ה$i,1$

$$\left(A^{n-1}v\right)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} \left(A^{n-1}\right)_{ik} \cdot v_{k1}$$

הביטוי שבתוך הסכום מתאפס עבור כל $k \neq j$ שכן $\forall k \in [n] : v_{k1} \neq 0 \iff k = j$ לכן

$$\left(A^{n-1}v\right)_{i,1} = 0 + 0 + \ldots + \left(A^{n-1}\right)_{ij} \cdot v_{j1} + \ldots + 0$$

נזכור ש$v_{j1} = 1, \left(A^{n-1}\right)_{ij} \neq 0$ ולכן הכפל שלהם גם הוא לא שווה ל-0
לכן $\left(A^{n-1}v\right)_{i,1} \neq 0 \implies A^{n-1}v \neq \vec{0}$
■

סעיף ב'

יהיו $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$\alpha_0 v + \alpha_1 (Av) + \alpha_2 \left(A^2 v\right) + \ldots + \alpha_{n-1} \left(A^{n-1}v\right) = \vec{0}$$

על מנת להוכיח ש $\{v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v\}$ בת"ל, מספיק להוכיח כי

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$$

נוכיח את זה אינדוקטיבית על $k \in [n]$ נכפיל משמאל את שני צדדי המשוואה בA^{n-1}

$$A^{n-1} \cdot \left(\alpha_0 v + \alpha_1 (Av) + \alpha_2 \left(A^2 v\right) + \ldots + \alpha_{n-1} \left(A^{n-1}v\right)\right) = A^{n-1}\vec{0}$$

נשים לב שצד ימין נשאר $\vec{0}$
נפתח את הצד השמאלי של המשוואה באמצעות דיסטריבוטיביות כפל מעל חיבור עם מטריצות

$$\begin{aligned}
&A^{n-1}\cdot\left(\alpha_0 v+\alpha_1\left(Av\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)\right)\\
&=A^{n-1}\alpha_0 v+A^{n-1}\alpha_1\left(Av\right)+\ldots+A^{n-1}\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)\\
&\underset{(*)}{=}\alpha_0\left(A^{n-1}v\right)+\alpha_1\left(\underbrace{A^{n-1}A}_{A^n}v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(\underbrace{A^{n-1}A^{n-1}}_{A^{2n-2}}v\right)
\end{aligned}$$

$(*)$ קומוטטיביות כפל בסקלאר של במטריצות, אסוציאטיביות של כפל בסקלאר של מטריצות
נתון כי $A^n=0$, לכן עבור כל $n'>n$ מתקיים

$$A^k=A^{n'-n}\cdot A^n=A^{n'-n}\cdot 0=0$$

ולכן

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\left(A^{n-1}v\right)+\alpha_1\left(A^{n-1}Av\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}A^{n-1}v\right)\\
&=\alpha_0\left(A^{n-1}v\right)+0+\ldots+0=\alpha_0\left(A^{n-1}v\right)\implies\alpha_0\left(A^{n-1}v\right)=0
\end{aligned}$$

נתון לנו כי $A^{n-1}v\neq 0$ לכן $\alpha_0=0$
צעד האינדוקציה
נניח כי הוכחנו כי כל המקדמים עד α_{k-2} (כולל) הם 0, נוכיח כי גם $\alpha_{k-1}=0$ (נזכיר שאת האלפות התחלנו לספור ב-0)

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\alpha_0}_{0}v+\underbrace{\alpha_1}_{0}\left(Av\right)+\ldots+\alpha_{k-1}\left(A^{k-1}v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)=\vec{0}\\
&=\alpha_{k-1}\left(A^k v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)\\
&\underset{\times A^{n-k}}{\implies}A^{n-k}\left(\alpha_{k-1}\left(A^{k-1}v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)\right)=A^{n-k}0=0
\end{aligned}$$

באותה צורה שעשינו בהנחת האינדוקציה נעביר את המקדמים להתחלה

$$\begin{aligned}
&A^{n-k}\left(\alpha_{k-1}\left(A^{k-1}v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(A^{n-1}v\right)\right)\\
&=\alpha_{k-1}\left(\underbrace{A^{n-k}A^{k-1}}_{A^{n-1}}v\right)+\alpha_k\left(\underbrace{A^{n-k}A^{k}}_{A^{n}}v\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(\underbrace{A^{n-k}A^{n-1}}_{A^{2n-k-1}}v\right)\\
&=\alpha_{k-1}\left(A^{n-1}v\right)=0\implies\alpha_{k-1}=0
\end{aligned}$$

הוכחנו באינדוקציה כי כל $\alpha=0$ לכן הקבוצה בת"ל
■

סעיף ג'

נרצה להוכיח ש$A \sim J$, נעשה זאת בכך שנוכיח ששתיהן מטריצות מייצגות לאותה העתקה לינארית
תהא העתקה T

$$T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$
$$\forall u \in \mathbb{F} : T(u) = Au$$

ראינו בכיתה כי $[T]_E = A$
נסמן $B = \{v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v\}$
נשים לב B קבוצה בת"ל בגודל n ולכן היא בסיס ל-$\mathbb{F}^n$ נטען כי $[T]_B = J$
נתבונן ב$[T]$

$$T(b_1) = A \cdot b_1 = Av = b_2 \implies [T(b_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = A \cdot b_2 = A(Av) = A^2v = b_3 \implies [T(b_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T(b_n) = A \cdot b_n = A\left(A^{n-1}v\right) = A^n v = 0 \implies [T(b_n)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו ש

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

מכיוון ש-A ו-J מטריצות מייצגות של אותה ההעתקה בבסיסים שונים, הן דומות ■

שאלה 3

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ונגדיר העתקה לינארית $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י

$$T(X) = AX$$

הראו שקבוצת הערכים העצמיים של T שווה לקבוצת הערכים העצמיים של A

פתרון 3

על מנת להראות שקבוצת הע"ע של T שווה לקבוצת הע"ע A צריך להראות שכל ע"ע של T הוא גם ע"ע של A ולהיפך (הכלה דו כיוונית)

$\lambda_T \subseteq \lambda_A$

יהי λ ע"ע של T, נרצה להוכיח כי λ ע"ע של A
λ ע"ע של T ולכן קיימת מטריצה $0 \neq X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ המקיימת

$$T(X) = \lambda X = A \cdot X$$

נחפש $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = \lambda v$

$$X \neq 0 \implies \exists i, j \in [n] : X_{ij} \neq 0$$

עם ה-j הזו, נסתכל על העמודה הj של AX ונקרא לה v
נתבונן בAv
מכיוון שv היא העמודה ה-j של X, Av יביא את העמודה ה-j של AX, ולכן λv היא הכפלה ב-λ של העמודה ה-j של AX, אבל הרי $AX = \lambda X$ לעמודה ה-j של λX, כלומר λv. קיבלנו ש $Av = \lambda v$ ולכן λ ע"ע של A

$\lambda_A \subseteq \lambda_T$

יהא $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A, נרצה להוכיח כי λ ע"ע של T.
מהיות λ ע"ע של A קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש
נרצה להראות כי קיים $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ כך ש$T(X) = \lambda X$
נגדיר את X בצורה הבאה:

$$X = \begin{pmatrix} | & & | \\ v & \dots & v \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נתבונן בAX. כל עמודה של AX היא $A \cdot v = \lambda v$. לכן $AX = T(X) = \lambda X$
■

שאלה 4

נתונה העתקה לינארית $T : \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_5) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ b+c & c+d \end{pmatrix}$$

סעיף א'

מצאו את כל הע"ע + ו"ע של T

סעיף ב'

מהי העקבה של המטריצה המייצגת של ההעתקה $T^2 + 3T$

תשובה 4

סעיף א'

נמצא מטריצה מייצגת לT לפי הבסיס הסטנדרטי E

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies [T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies [T(e_3)]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
T(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies [T(e_4)]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \implies [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה משולשת לכן הע"ע הם איברי האלכסון, האלכסון מורכב כולו מ-1 ולכן הע"ע היחיד הוא 1 בריבוי אלגברי של 4, נמצא ו"ע

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הגרעין של $A - I$ הוא $\operatorname{sp}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

אנחנו מחפשים וקטורים עצמיים לכן זה לא כולל את וקטור האפס

$$v_A = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

סעיף ב'

מלינאריות העקבה

$$tr\left(T^2+3T\right)=tr\left(T^2\right)+tr\left(3T\right)$$

נחשב את $tr(T^2)=4$ נחשב את $tr\left(T\right)$

$$tr\left(T\right)=1+1+1+1=4$$

נציב

$$tr\left(T^2\right)+tr\left(3T\right)=4+12=16\equiv_5=1$$