קומבינטוריקה 1040286
גליון 1

יונתן אבידור - 214269565
רותם עשת - 212674683

27 באפריל 2026

שאלה 1

בכמה מהמספרים הזוגיים בקטע $[30000, 40000]$ ספרות האחדות, העשרות ומהאות הן ספרות שונות?

פתרון 1

ראשית נשים לב שכל האפשרויות שלנו הן בקטע $[30000, 39999]$, שכן 40000 לא תקין.
על מנת לברר כמה אפשרויות יש סך הכל, נבדוק כמה אפשרויות יש לכל אחת מהספרות.
על מנת שהמספר יהיה זוגי, יש 5 אפשרויות לספרת האחדות, $0, 2, 4, 6, 8$.
ספרת העשרות צריכה להיות שונה מספרת האחדות, אז יש 9 אפשרויות.
ספרת המאות צריכה להיות שונה מספרת האחדות ומספרת העשרות, אז יש 8 אפשרויות.
אין שום הגבלה על ספרת האלפים, אז יש 10 אפשרויות.
ספרת העשרות-אלפים תהיה 3 ולכן יש אפשרות אחת בלבד.
סך הכל:

$$\underset{\text{אחדות}}{5} \cdot \underset{\text{עשרות}}{9} \cdot \underset{\text{מאות}}{8} \cdot \underset{\text{אלפים}}{10} \cdot \underset{\text{עשרות-אלפים}}{1} = \boxed{3600}$$

■

שאלה 2

כמה מספרים בעלי חמש ספרות יש, כשכל הספרות בסדר עולה, שונות זו מזו, וההפרש בין הספרה הראשונה לאחרונה הוא 5?
למשל: 76542 הוא דוגמה למספר כזה.

פתרון 2

נתחיל עם ספרת האחדות, מכיוון שאנחנו רוצים שיהיה הפרש של 5 וגם סדר עולה, יש 5 אפשרויות לספרת האחדות, $0, 1, 2, 3, 4$
מהמגבלה של ההפרש, יש לנו אפשרות אחת בלבד גם עבור ספרת העשרות-אלפים (הספרה של האחדות+5)
כעת יש לבחור את ספרת העשרות, המאות והאלפים.
ישנן 4 ספרות אפשריות, מתוכן יש לבחור 3, לכן מספר האפשרויות הוא $\binom{4}{3}$
נחשב את כמות האפשרויות לכל הספרות.

$$\underset{\text{ספרת האחדות}}{5} \cdot \underset{\text{עשרות, מאות, אלפים}}{\binom{4}{3}} \cdot \underset{\text{עשרות-אלפים}}{1} = 5 \cdot \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 5 \cdot \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \cdot 4 = \boxed{20}$$

■

שאלה 3

אבי, בני, גדי, דינה, הילה ו-ורד מסתדרים במעגל. לכל אחד מן התנאים הבאים, מצאו את מספר הסידורים השונים המקיימים את התנאי (אין להבחין בין סידורים המתקבלים זה מזה על ידי סיבוב)

א. אבי ודינה אינם עומדים זה על יד זו.

ב. בני והילה עומדים זה מול זו.

ג. בנים ובנות מופיעים לסרוגין.

ד. גדי קרוב יותר להילה מאשר לורד.

פתרון 3

סעיף א'

נספור את כל הסידורים בהם אבי ודינה עומדים זה על יד זו
ונחסיר אותם מסך האפשרויות הכולל
אם נתייחס לאבי ודינה כאובייקט אחד, כמות האפשרויות היא כמו להעמיד חמישה אנשים במעגל ללא מגבלות, שזה $4!$ אפשרויות.
בנוסף יש 2 אפשרויות לגבי איפה להעמיד את דינה ביחס לאבי, ימין או שמאל.

$$\underbrace{5!}_{\text{כל הסידורים}} - \underbrace{2}_{\text{הסדר בין אבי ודינה}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{העמדת חמישה אנשים במעגל}} = 120 - 48 = \boxed{72}$$

לכן יש 72 אפשרויות שונות
■

סעיף ב'

מכיוון שהמיקום של אבי יקבע את המיקום של דינה ולהפך, אפשר להתייחס אליהם כאובייקט אחד ואז כמות האפשרויות שלנו היא כמו להעמיד חמישה אנשים במעגל ללא מגבלות. שזה $\boxed{4!}$ אפשרויות
■

סעיף ג'

נתחיל בלהעמיד בן בתוך "קיבוע" ששאר המעגל יסודר על פיו, מכיוון שאנחנו במעגל זה לא משנה במי נבחר (הבחירה עצמה בבן לעומת בת שרירותית גם היא).
נשים מימינו, בת משמאלו ובת מולו, ישנן $3!$ דרכים שונות לעשות סידור שכזה.
עכשיו צריך לבחור איפה יעמדו שני הבנים האחרים, יש $2!$ דרכים שונות לסדר אותם.

$$\underset{\text{העמדת הבן הראשון}}{1} \cdot \underset{\text{סידור הבנות}}{3!} \cdot \underset{\text{סידור הבנים הנותרים}}{2!} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{12}$$

■

סעיף ד'

על פי כלל החיבור, ניקח את האפשרויות לפי כל מרחק בין גדי והילה ונחבר אותן.

גדי והילה עומדים אחד ליד השנייה

"נקבע" את גדי, ואז יש 2 אפשרויות לגבי העמדת הילה (מימינו או משמאלו).
אחרי זה יש 3 אפשרויות לגבי העמדת ורד (היא לא יכולה לעמוד לצד גדי, ויש כבר שני מקומות תפוסים), לשאר שלושת האנשים יש $3!$ אפשרויות העמדה שונות.

$$\underset{\text{הילה}}{2} \cdot \underset{\text{ורד}}{3} \cdot \underset{\text{השאר}}{3!} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$$

גדי במרחק אדם אחר מהילה

נקבע שוב את גדי, וגם כאן יש 2 אפשרויות לגבי העמדת הילה (2 מקומות מימינו או 2 מקומות משמאלו).
לורד יש הפעם רק מקום אפשרי אחד, ישירות מול גדי, ושוב יש $3!$ אפשרויות לשלושת האנשים אחרים.

$$\underset{\text{הילה}}{2} \cdot \underset{\text{ורד}}{1} \cdot \underset{\text{השאר}}{3!} = 2 \cdot 6 = 12$$

אי אפשר שהילה תעמוד מול גדי, שכן אז ורד בהכרח תהיה קרובה יותר לגדי מאשר הילה, לכן אלו כל האפשרויות שיש לנו, נסכום אותן.

$$36 + 12 = \boxed{48}$$

■

שאלה 4

סביב שולחן עגול רוצים לסדר 10 כלבים ו10 חתולים. החתולים והכלבים ממוספרים. חתולים מספר $1,2,3,4$ יושבים אחד ליד השני, לא בהכרח בסדר הזה. וכלבים מספר $1,2,3$ יושבים אחד ליד השני, לא בהכרח בסדר הזה.
שני סידורים יחשבו זהים אם הם מתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב. כמה סידורים שונים יש?

פתרון 4

לפי כלל הכפל, נספור את האפשרויות ל"סידור הפנימי" של הכלבים והחתולים, ונכפיל את זה עם כמות האפשרויות כשמתייחסים לחתולים $1-4$ וכלבים $1-3$ כ"מחוברים" אם מתייחסים לחתולים $1-4$ כאובייקט אחד, וכך גם לכלבים $1-3$, נותרים לנו 15 "אובייקטים" לסדר במעגלל, שזה נותן לנו $14!$ אפשרויות
נוסיף לזה את $4!$ האפשרויות השונות שיש עבור סידור ארבעת החתולים שקיבצנו, ואת $3!$ האפשרויות עבור הכלבים ואנחנו מקבלים

$$14! \cdot 4! \cdot 3!$$

תרגיל 5

א. כמה מחלקים חיוביים יש למספר 2000?

ב. בהתנן מספר טבעי

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

כאשר $p_1, \ldots, p_m$ ראשוניים שונים, ו-$k_1, \ldots, k_m$ מספרים טבעיים חיוביים, כמה מחלקים חיוביים יש ל-n?

פתרון 5

סעיף א'

נפרק את 2000 למכפלת מספרים ראשוניים:

$$\begin{aligned}
\frac{2000}{2} &= 1000 \\
\frac{1000}{2} &= 500 \\
\frac{500}{2} &= 250 \\
\frac{250}{2} &= 125 \\
\frac{125}{5} &= 25 \\
\frac{25}{5} &= 5 \\
\implies 2000 &= 2^4 \cdot 5^3
\end{aligned}$$

מספר מחלק את 2000 אמ"מ המחלקים הראשוניים שלו מוכלים במחלקים הראשוניים (עם ריבוי) של 2000, כלומר אם אפשר לפשט אותו לצורה של $2^k \cdot 5^l$ כאשר $0 \leq k \leq 4$ ו $0 \leq l \leq 3$

$$\underset{\text{המעריך של 2}}{5} \cdot \underset{\text{המעריך של 5}}{4} = \boxed{20}$$

■

סעיף ב'

בהכללה של סעיף א', עבור מספר טבעי n מהצורה $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$
כל מספר מהצורה $p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_m^{q_m}$ כאשר $\forall i \in [m] : 0 \leq q_i \leq k_i$ הוא מחלק של n.
לכן, כמות המחלקים נקבעת לפי האפשרויות השונות שיש לכל q_i שכזה.

k_1+1	$\cdot$	k_2+1	$\cdots$	k_m+1
האפשרויות עבור q_1		האפשרויות עבור q_2		האפשרויות עבור q_m

■

תרגיל 6

נסמן ב-$[n]$ את קבוצת המספרים מ-1 עד n, כלומר

$$[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}\,.$$

ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהו מספר הפונקציות מ-$[10]$ ל-$[20]$?

ב. מהו מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ-$[10]$ ל-$[20]$?

ג. מהו מספר הפונקציות שאינן חד-חד-ערכיות מ-$[10]$ ל-$[20]$?

פתרון 6

סעיף א'

לכל איבר בתחום, נבחר איבר מהטווח.
ישנם 10 איברים בתחום, לכל אחד יש 20 אפשרויות לגבי האיבר מהטווח שהפונקציה תמפה אליו.

$$\underbrace{\underset{\text{אפשרויות עבור 1}}{20} \cdot \underset{\text{אפשרויות עבור 2}}{20} \cdots \underset{\text{אפשרויות עבור 10}}{20}}_{10} = \boxed{20^{10}}$$

סעיף ב'

בפונקציה חד-חד-ערכית אי אפשר לבחור למפות לאותו איבר ב-$[20]$ פעמיים, לכן בעוד שיש לנו 20 אפשרויות לאן למפות את 1, יש לנו רק 19 אפשרויות עבור 2 וכן הלאה.
עלינו לבחור 10 בחירות שונות ללא חזרות מתוך קבוצה של 20, ראינו בהרצאה שהנוסחה לבחור k בחירות לא תלויות ללא חזרות מתוך קבוצה בגודל n היא $\frac{n!}{(n-k)!}$ ולכן

$$\boxed{\frac{20!}{10!}}$$

סעיף ג'

כמות הפונקציות שאינן חד-חד-ערכיות שווה לכמות הפונקציות בכללי פחות מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות.

$$\boxed{20^{10} - \frac{20!}{10!}}$$

תרגיל 7

מהן מספר הסדרות באורך n מעל $\{0,1\}$ בהן מספר האפסים זוגי? פתרו ע"י הגדרת פונקציה חח"ע ועל כלשהי.

פתרון 7

לשם הנוחות נגדיר שלוש קבוצות:
G תהיה קבוצת הסדרות באורך n מעל $\{0,1\}$.
E תהיה קבוצת הסדרות באורך n מעל $\{0,1\}$ בהן מספר האפסים זוגי.
O תהיה קבוצת הסדרות באורך n מעל $\{0,1\}$ בהן מספר האפסים אי-זוגי.
נטען כי $|E| = |O|$, על ידי בניית פונקציה חח"ע ועל.

$$f : E \to O$$

עבור סדרה כלשהי $S \in E$, נגדיר את $f(S)$ להיות S עצמה, מלבד האיבר הראשון, אותו "נהפוך".
קרי אם $S_1 = 1$ אז $f(S)_1 = 0$ ולהיפך.
בין אם S_1 הוא 0 או 1, f משנה את כמות האפסים ב-S באחד בדיוק. מכיוון שהתחום של הפונקציה הוא E, הפונקציה "תוציא" רק סדרות מ-O, ולכן היא מוגדרת היטב. כעת יש להראות כי f חח"ע ועל.

f חד-חד-ערכית

יהיו $S, T \in E$ כך ש $S \neq T$. נרצה להראות כי $f(S) \neq f(T)$.
$S \neq T$ ולכן קיים $i \in [n]$ כך ש-$S_i \neq T_i$, נחלק למקרים לפי הערך של i.
נניח בה"כ כי $S_i = 0, T_i = 1$ (אם המצב הפוך, ההמשך זהה מלבד החלפה של 0 ב-1 ולהיפך).
כאשר $i = 1$, מכיוון שf מחליפה את האיבר הראשון

$$f(S)_i = 1, f(T)_i = 0 \implies f(S) \neq f(T)$$

כאשר $i \neq 1$, מכיוון שf לא משפיעה על אף איבר מלבד הראשון, ולכן

$$f(S)_i = S_i = 0, f(T)_i = T_i = 1 \implies f(S) \neq f(T)$$

ולכן f חח"ע

f על

תהא $T \in O$, נרצה להראות כי קיימת $S \in E$ כך ש $f(S) = T$.
נגדיר את S להיות זהה לT מלבד האיבר הראשון, אותו נהפוך. (נשים לב שS אכן שייכת ל-E כי בכך שהפכנו איבר אחד ב-T, בהכרח שינינו את הזוגיות של כמות האפסים בסדרה)
ואכן מתקיים ש $f(S) = T$, מכיוון ש-f מחליפה רק את האיבר הראשון, ו-S היא מראש החלפה של האיבר הראשון של T, ואז f מביאה את T עצמה.
ולכן f על.

f חח"ע ועל המוגדרת $E \to O$, ומכאן נובע ש $|E| = |O|$, כלומר כמות הסדרות עם כמות זוגית של אפסים זהה לכמות הסדרות עם כמות אי-זוגית של אפסים.
מכיוון ש $E \cup O = G$ (כי לסדרה ב-G יכול להיות או מספר זוגי של אפסים או מספר אי-זוגי של אפסים) מתקבל כי $|G| = 2|E|$. ראינו בהרצאה שיש 2^n סדרות מעל $\{0,1\}$

$$|G| = 2^n \implies |E| = \frac{2^n}{2} = \boxed{2^{n-1}}$$

בדיחת קרש

אבא שלי לימד אותי לספור בבינארית מגיל צעיר, הוא תמיד קרא לי אפס אחד.