חשבון אינפי 2 - 01040281
גליון 4

יונתן אבידור - 214269565

23 ביוני 2026

שאלה 1

חשבו את הערך של האינטגרל הלא אמיתי הבא:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$$

פתרון 1

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\begin{array}{ll} u = \arctan x & v' = x^{-2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = \frac{-1}{x} \end{array}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= -\frac{\arctan x}{x}\bigg|_1^c - \int_1^c \frac{-1}{x(1+x^2)}\,dx \\ &= \lim_{c\to\infty} -\frac{\arctan c}{c} + \underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} + \int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \\ &\underset{\text{אריתמטיקה של גבולות, חיבור}}{=} \lim_{c\to\infty} -\frac{\arctan c}{c} + \frac{\pi}{4} + \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \end{aligned}$$

יש לציין שההשלב האחרון יעבוד רק אם אכן נמצא שהאיטנגרל הלא אמיתי מימין קיים, נבדוק זאת:

$$\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\,dx$$

נעשה פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

נפתח ונקבל

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 0x^2 + 0x + 1$$

לכן $A+B=0, C=0, A=1$, מכאן ש-$B=-1$, ומתקבל

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx &= \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \\
&\underset{\text{לינאריות, חשבון גבולות}}{=} \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,dx - \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&\underset{\text{ניוטון לייבניץ}}{=} \lim_{c\to\infty}\log x\Big|_1^c - \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx
\end{aligned}$$

נטפל באינטגרל שנותר

$$\lim_{c\to\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx \underset{\text{הכפלה וחילוק ב-2, לינאריות}}{=} \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

נשים לב ש-$(x^2+1)' = 2x$ ולכן יש לנו נגזרת חלקי הפונקציה ולכן

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_1^c$$

נשים לב ש-x^2+1 חיובית תמיד לכן אין צורך בערך מוחלט
נחזיר את הגבולות לביטוי אחד (מאריתמטיקת גבולות, חיבור)

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty}\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_1^c &\underset{\text{חוקי לוגים}}{=} \lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\Bigg|_1^c \\
&= \lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

נמצא את הגבול בתוך הלוגריתם

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} = \lim_{c\to\infty}\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\to 0}}} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

לכן

$$\lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log(1) - \log(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\log(2)}{2}$$

הגבול אכן קיים ולכן החיבור עובד. סה"כ קיבלנו

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}}$$

שאלה 2

מצאו את כל הערכים של $p > 0$ ושל $q > 0$ בהם האינטגרלים הבאים מתכנסים

סעיף א'

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$$

סעיף ב'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\,dx$$

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p\,(1+x)^q}\,dx$$

פתרון 2

סעיף א'

נטען כי האינטגרל מתכנס לכל $p > 0$, נרצה להשתמש במשפט דיריכלה.
נגדיר $g)x)$