חשבון אינפי 2 - 01040281
גליון 4

יונתן אבידור - 214269565

24 ביוני 2026

שאלה 1

חשבו את הערך של האינטגרל המוכלל הבא:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$$

פתרון 1

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\begin{array}{ll} u = \arctan x & v' = x^{-2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = \frac{-1}{x} \end{array}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= -\frac{\arctan x}{x}\bigg|_1^c - \int_1^c \frac{-1}{x(1+x^2)}\,dx \\ &= \lim_{c\to\infty} -\frac{\arctan c}{c} + \underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} + \int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \\ &\underset{\text{אריתמטיקה של גבולות, חיבור}}{=} \lim_{c\to\infty} -\frac{\arctan c}{c} + \frac{\pi}{4} + \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \end{aligned}$$

יש לציין שההשלב האחרון יעבוד רק אם אכן נמצא שהאיטנגרל המוכלל מימין קיים, נבדוק זאת:

$$\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\,dx$$

נעשה פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

נפתח ונקבל

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 0x^2 + 0x + 1$$

לכן $A+B=0, C=0, A=1$, מכאן ש-$B=-1$, ומתקבל

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx &= \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \\
&\underset{\text{לינאריות, חשבון גבולות}}{=} \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}\,dx - \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&\underset{\text{ניוטון לייבניץ}}{=} \lim_{c\to\infty}\log x\Big|_1^c - \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx
\end{aligned}$$

נטפל באינטגרל שנותר

$$\lim_{c\to\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx \underset{\text{הכפלה וחילוק ב-2, לינאריות}}{=} \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

נשים לב ש-$(x^2+1)' = 2x$ ולכן יש לנו נגזרת חלקי הפונקציה ולכן

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_1^c$$

נשים לב ש-x^2+1 חיובית תמיד לכן אין צורך בערך מוחלט
נחזיר את הגבולות לביטוי אחד (מאריתמטיקת גבולות, חיבור)

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty}\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_1^c &\underset{\text{חוקי לוגים}}{=} \lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\Bigg|_1^c \\
&= \lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

נמצא את הגבול בתוך הלוגריתם

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} = \lim_{c\to\infty}\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\to 0}}} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

לכן

$$\lim_{c\to\infty}\log\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log(1) - \log(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\log(2)}{2}$$

הגבול אכן קיים ולכן החיבור עובד. סה"כ קיבלנו

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}}$$

שאלה 2

מצאו את כל הערכים של $p > 0$ ושל $q > 0$ בהם האינטגרלים הבאים מתכנסים

סעיף א'

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$$

סעיף ב'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\,dx$$

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p\,(1+x)^q}\,dx$$

פתרון 2

סעיף א'

נטען כי האינטגרל מתכנס לכל $p > 0$, נרצה להשתמש במשפט דיריכלה.
נגדיר $f(x) = \sin(x), g(x) = \frac{1}{x^p}$
$F(x)$ חסומה
נחשב את $g'(x)$

$$g(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p} \implies g'(x) = -p \cdot x^{p+1} = -\frac{p}{x^{p+1}}$$

נבדוק את $\int_1^\infty |g'(x)|\,dx$, נשים לב שלכל x ולכל $p > 0$, $\left|-\frac{p}{x^{p+1}}\right| = \frac{p}{x^{p+1}}$

$$\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{p}{x^{p+1}}\,dx = \lim_{c\to\infty} p\int_1^c x^{-p-1}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{-1}{x^p}\right)\Bigg|_1^c = \lim_{c\to\infty}\underbrace{\frac{-1}{c^p}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{-1}{1^p}}_{\to -1} = 1$$

הגבול קיים ולכן האינטגרל המוכלל מתכנס.
לכל $p > 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ כגבול ידוע מאינפי 1
כל התנאים של משפט דיריכלה מתקיימים, לכן לפי משפט דיריכלה, האינטגרל המוכלל $\int_1^\infty (f \cdot g)(x) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ מתכנס לכל $\boxed{p > 0}$

סעיף ב'

הפונקציה "בעייתית" בשני איזורים, כאשר $x \to 0$ וכאשר $x \to \infty$, נרצה לטפל במקרים הללו בנפרד, לכן נפצל את האינטגרל בדרך הבאה:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\, dx \underset{\text{אדטיביות, אם האינטגרלים מתכנסים}}{=} \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\, dx$$

נשים לב שהפונקציה חיובית בכל תחום האינטגרציה, נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי
נגדיר $m := \min\{p, q\}$ נתבונן ב-$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^m}}$

$$x^{p-m} + x^{q-m} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^m}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^m}{x^p + x^q} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{p-m} + x^{q-m}}$$

מכיוון ש-m הוא המינימום של p, q, אחד מהמעריכים הוא 0 והשני הוא אי-שלילי, לכן הגבול הוא מספר חיובי כלשהו, לכן מבחן ההשוואה הגבולי תקף.
$\frac{1}{x^m}$ מתכנס לכל $m > 1$, לכן $\int_0^1 \frac{1}{x^p+x^q}\, dx$ מתכנס אמ"מ $\min\{p, q\} < 1$
עבור $[1, \infty)$ נשתמש גם במבחן ההשוואה הגבולי
נגדיר $M := \max\{p, q\}$
נתבונן ב-$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^M}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^M}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^M}{x^p + x^q} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{p-M} + x^{q-M}}$$

מכיוון ש-M הוא המקסימום של p, q, אחד מהמעריכים הוא 0 והשני הוא אי-חיובי, לכן הגבול הוא מספר חיובי כלשהו, לכן מבחן ההשוואה הגבולי תקף.
$\frac{1}{x^M}$ מתכנס לכל $M > 1$, לכן $\int_1^\infty \frac{1}{x^p+x^q}\, dx$ מתכנס אמ"מ $\max\{p, q\} > 1$
האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{x^p+x^q}\, dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_0^1 \frac{1}{x^p+x^q}\, dx$ ו-$\int_1^\infty \frac{1}{x^p+x^q}\, dx$ מתכנסים, כלומר כאשר

$$\boxed{\min\{p, q\} < 1 < \max\{p, q\}}$$

סעיף ג'

מנימוק זהה לסעיף ב', נפצל את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p\left(1+x\right)^q}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p\left(1+x\right)^q}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p\left(1+x\right)^q}\,dx$$

עבור האינטגרל הראשון נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^p}$ $x^p \leq x^p\left(1+x\right)^q$ ולכן $\frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{x^p+(1+x)^q}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^p(1+x)^q}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x)^q} = 1$$

הגבול קיים וחיובי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה
$\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ קיים אם ורק אם $p<1$, נעבור לאינטגרל השני
נשתמש שוב במבחן ההשוואה הגבולי, אבל הפעם עם $\frac{1}{x^{p+q}}$
כאשר $x \geq 1$, $x^{p+q} \leq x^p(1+x)^q$ ולכן $\frac{1}{x^{p+q}} \geq \frac{1}{x^p(1+x)^q}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^p(1+x)^q}}{\frac{1}{x^{p+q}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p\cdot x^q}{x^p+x^{p+q}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{(1+x)^q} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^q = 1$$

הגבול קיים וחיובי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה
$\int_0^1 \frac{1}{x^{p+q}}$ קיים אם ורק אם $p+q>1$. לכן

$$\boxed{p<1, q>1-p}$$

שאלה 3

בדקו האם האינטגרלים המוכללים הבאים קיימים

סעיף א'

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$$

סעיף ב'

$$\int_0^1 \frac{1}{\log x}\,dx$$

סעיף ג'

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}}\,dx$$

פתרון 3

סעיף א'

$\forall x \in [0,1] : e^x \geq 1$ ולכן $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x}$, בנוסף לכך, שתי הפונקציות אי-שליליות, לכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה.
$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ מתבדר ולכן $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ מתבדר גם כן

סעיף ב'

יש שתי נקודות בעייתיות. $x = 1$ ו-$x = 0$
לכן נפצל את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{\log x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\log x}\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{\log x}\,dx$$

נציב $y = \log x$

$$\begin{aligned} y &= \log x \\ e^y &= x \\ dy &= \frac{1}{x}\,dx \\ dx &= x\,dy = e^y\,dy \\ x \to 0^+ &\implies y \to -\infty \\ x = \frac{1}{e} &\implies y = -1 \\ x \to 1^- &\implies y \to 0^- \end{aligned}$$

ואז

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\log x}\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{\log x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^y}{y}\,dy + \int_{-1}^0 \frac{e^y}{y}\,dy$$

לכל $y \in (-\infty, -1]$ $|y| \geq 1$, לכן $\frac{e^y}{|y|} \leq e^y$, נשתמש במבחן ההשוואה
נבדוק אם $\int_{-\infty}^{-1} e^y\,dy$ מתכנס

$$\int_{-\infty}^{-1} e^y\,dy = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{-1} e^y\,dy \underset{N-L}{=} \lim_{c\to\infty} e^y\Big|_{-c}^{-1} = \lim_{c\to\infty} e^{-1} - \underbrace{e^{-c}}_{\to 0} = \frac{1}{e}$$

הגבול קיים לכן $\frac{e^y}{|y|}$ מתכנס, לכן $\frac{e^y}{y}$ מתכנס בהחלט.
אינטגרל שמתכנס בהחלט בהחלט מתכנס ולכן $\frac{e^y}{y}$ מתכנס.
נעבור לאינטגרל השני
נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{\frac{e^y}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^-} e^y = 1$$

האינטגרל $\int_{-1}^0 \frac{1}{y}\,dy$ מתבדר, ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי $\frac{e^y}{y}$ מתבדר גם הוא.
אינטגרל אחד מתבדר והשני מתכנס, לכן האינטגרל כולו מתבדר.

סעיף ג'

נראה שהפונקציה זוגית

$$\frac{2(-x)}{e^{-x}-e^{x}}=\frac{-2x}{-\left(e^{x}-e^{-x}\right)}=\frac{2x}{e^{x}-e^{-x}}$$

הפונקציה זוגית, לכן מספיק להראות כי $\int_0^\infty \frac{2x}{e^x-e^{-x}}\,dx$ קיים
נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הפונקציה $\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{e^x-e^{-x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{e^x-\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{e^x}$$

יש פולינום ממעלה שלישית במונה ופונקציה מעריכית במכנה, לכן אם נעשה לופיטל שלוש פעמים נקבל שהגבול הוא 0
לכן ממסקנה של מבחן ההשוואה הגבולי ומזה ש $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ מתכנס, $\int_0^\infty \frac{2x}{e^x-e^{-x}}\,dx$ מתכנס

שאלה 4

תהא f רציפה ב-$[0,1]$ ותיהיו $0 < a < b$. הראו כי הגבול הבא קיים ומצאו אותו

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x)}{x}\, dx$$

פתרון 4

שאלה 5

בדקו האם הטורים הבאים מתכנסים

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+5n}{n\left(n^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

פתרון 5

שאלה 6

בדקו האם הטורים הבאים מתכנסים

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)$$

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{\frac{1}{4}}}$$

פתרון 6

שאלה 7

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית. הוכיחו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < \infty$$

פתרון 7

שאלה 8

סעיף א'

תהא f פונקציה חיובית מונוטונית יורדת בקרן $[1,\infty)$.
יהיו $I_n=\int_1^n f\left(x\right)\,dx$ ו- $S_n=\sum_{k=1}^n f\left(k\right), n=1,2,\ldots$.
נגדיר $u_n=S_n-I_n$.
הוכיחו כי הסדרה $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת

סעיף ב'

השתמשו בסעיף א' על מנת להוכיח כי הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\log n$$

קיים.

פתרון 8