אלגברה ב' - 01040168

גיליון 7

יונתן אבידור - 214269565

שאלה 1

יהי שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $\lambda \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}_+$.

סעיף א'

הראו כי

$$m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

סעיף ב'

הסיקו כי אם $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור שהפולינום האופייני שלו מתפצל מעל $\mathbb{F}$, ושהערכים העצמיים השונים שלו הם $\lambda_1, ..., \lambda_m$, מתקיים

$$m_T(x) = \prod_{i\in[m]} (x-\lambda_i)^{k_i}$$

כאשר k_i גודל בלוק ז'ורדן המקסימלי עם ערך עצמי λ_i בצורת ז'ורדן של T.

פתרון 1

סעיף א'

ראשית, נחשב את הפולינום האופייני

$$p_{J_n(\lambda)} = \det(xI - J_n(\lambda)) = \det\begin{pmatrix} x-\lambda & -1 & & \mathbf{0} \\ & x-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & & x-\lambda \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה, לכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר

$$p_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

ממסקנה ממשפט קיילי, הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני. לכן קיים $k \le n$ כך ש $m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^k$.

מהגדרת הפולינום המינימלי, המטריצה שלו מאפסת אותו ולכן $m_{J_n(\lambda)}(J_n(\lambda)) = 0_{n\times n}$ נציב

$$m_{J_n(\lambda)}(J_n(\lambda)) = (J_n(\lambda) - \lambda I)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0_{n\times n}$$

קיבלנו מטריצה המייצגת אופרטור הזזה ביחס לבסיס שעליו הוא פועל. ראינו בכיתה כי אופרטור הזזה הוא אופרטור נילפוטנטי עם אינדקס נילפוטנטיות n, מכאן שגם מטריצה מייצגת שלו היא נילפוטנטית עם אותו אינדקס. כלומר השוויון מתקבל כאשר $k = n$, מכאן ש

$$m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

■

סעיף ב'

למה

תהא מטריצת בלוקים אלכסונית

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_m$$

ופולינום $q(x)$

אזי

$$q(A) = q(A_1) \oplus q(A_2) \oplus ... \oplus q(A_m)$$

הוכחת הלמה

ראשית נראה באינדוקציה כי זה נכון ספציפית על העלאה של A בחזקת k

עבור $k = 0$,

$$A^1 = A = A_1^1 \oplus A_2^1 \oplus ... \oplus A_m^1$$

נניח שהוכחנו זאת עבור כל חזקה עד $k-1$, כעת נוכיח עבור k

$$A^k = A^{k-1} \cdot A = \begin{pmatrix} A_1^{k-1} & & & \\ & A_2^{k-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{הכפלת מטריצות בלוקים}}{=} \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^k \end{pmatrix}$$

כעת עבור פולינום כללי. יהיו $a_1, ..., a_l \in \mathbb{F}$ והפולינום

$$q(x) = \sum_i^l a_i x^i$$

נציב בו את המטריצה

$$q(A) = \sum_i^l a_i A^i \underset{\text{מה שהוכחנו עכשיו}}{=} \sum_i^l a_i \begin{pmatrix} A_1^i & & & \\ & A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i^l \begin{pmatrix} a_i A_1^i & & & \\ & a_i A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_i A_m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^l a_i A_1^i & & & \\ & \sum_i^l a_i A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_i^l a_i A_m^i \end{pmatrix}$$

$$q(A_1) \oplus q(A_2) \oplus ... \oplus q(A_m)$$

הוכחת הסעיף

הפולינום האופייני של T מתפצל מעל $\mathbb{F}$, לכן קיים בסיס $\mathcal{B}$ ל-V כך ש $[T]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצת ז'ורדן, נסמן $A = [T]_{\mathcal{B}}$

המטריצה A היא מטריצת ז'ורדן, ולכן ניתן לייצגה כסכום ישר של l בלוקי ז'ורדן, כלומר

$$A = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_l$$

מכיוון ש-A היא מטריצה מייצגת של T, $m_T(x) = m_A(x)$.
מהלמה שהוכחנו ומההגדרה של פולינום מינימלי

$$m_T(A) = m_T(J_1) \oplus ... \oplus m_T(J_l) = 0_{n\times n}$$

על מנת שזה יקרה, צריך להתקיים

$$\forall j \in [l] : m_T\big(J_j\big) = 0$$

מההגדרה של פולינום מינימלי, על m_T להיות המכנה המשותף הקטן ביותר של כל הפולינומים המינימליים של הבלוקים.
בסעיף א' הראינו שעבור בלוק בגודל k של ערך λ, הפולינום המינימלי שלו הוא $(x-\lambda)^k$, לכן המכנה המשותף של כל הפולינומים המינימליים של הבלוקים של ערך עצמי λ_i כלשהו של T הוא $(x-\lambda_i)^{k_i}$ כאשר k_i הוא הגודל של הבלוק הגדול ביותר של λ_i, זה נכון עבור כל אחד מ-m הערכים העצמיים, מכך ומכיוון שעבור $\lambda_i \neq \lambda_j$, הפולינומים $(x-\lambda_i)^{k_i}$ ו-$\big(x-\lambda_j\big)^{k_j}$ זרים, אנחנו מקבלים כי:

$$m_T(x) = \prod_{i\in[m]} (x-\lambda_i)^{k_i}$$

■

שאלה 2

יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורן

$$p_A(x) = p_B(x)$$
$$m_A(x) = m_B(x)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור אלו שאינן נכונות, מיצאו דוגמה נגדית.

סעיף א'

A, B דומות אם $n = 3$.

סעיף ב'

A, B דומות אם $n = 4$.

סעיף ג'

A, B דומות אם $n = 5$.

פתרון 2

סעיף א'

הטענה נכונה! נוכיח.

מכיוון של-A ול-B יש את אותו הפולינום האופייני, יש להם את אותם ערכים עצמיים, נחלק למקרים על פי כמה ע"ע **שונים** יש להם

שלושה ערכים עצמיים שונים

במצב הזה, A ו-B שתיהן יהיו מטריצות לכסינות, ושתיהן יהיו דומות לאותה מטריצה אלכסונית. לכן הן יהיו דומות.

שני ערכים עצמיים שונים

A ו-B הן מטריצות מעל $\mathbb{C}$, שזה שדה סגור אלגברית, לכן הפולינום האופייני שלהן בהכרח מתפצל ל-3 גורמים לינאריים, מכיוון שיש שני ערכים עצמיים שונים, אחד מהם הוא בריבוי של 1 ואחד בריבוי של 2.

נניח בה"כ כי $p_A(x) = p_B(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$

אם $m_A(x) = m_B(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ אזי גם לצורת ז'ורדן ושל A וגם לצורת ז'ורדן של B יש שני בלוקים של λ_1 בגודל 1 ובלוק אחד של λ_2 בגודל 1.

אם $m_A(x) = m_B(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)$ אזי גם לצורת ז'ורדן של A וגם לצורת ז'ורדן של B יש בלוק אחד של λ_1 בגודל 2 ובלוק אחד של λ_2 בגודל 1.

אזי צורות ז'ורדן של A ו-B זהות.

ערך עצמי אחד

עבור ערך עצמי אחד, נסמנו λ, מתקיים $p_A(x) = p_B(x) = (x - \lambda)^3$.

יש שלוש אפשרויות לגבי הפולינומים המינימליים.

אם $m_A(x) = m_B(x) = (x - \lambda)^3$, אזי יש בלוק אחד בגודל 3 ואז $A \sim B$

אם $m_A(x) = m_B(x) = (x - \lambda)^2$, אזי יש בלוק אחד בגודל 2 והאפשרות היחידה היא עוד בלוק בגודל 1 ואז $A \sim B$

אם $m_A(x) = m_B(x) = (x - \lambda)$ אז יש שלושה בלוקים בגודל 1, ואז $A \sim B$

סעיף ב'

הטענה לא נכונה! נביא דוגמה נגדית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שתיהן מטריצות ז'ורדן עם 1 על האלכסון הראשי, לכן $p_A(x) = p_B(x) = (x-1)^4$
בלוק ז'ורדן הגדול ביותר בשתיהן הוא בגודל 2, לכן $m_A(x) = m_B(x) = (x-1)^2$.
אך בעוד ש-A עשויה מבלוק אחד בגודל 2 ושני בלוקים בגודל 1, B עשויה משני בלוקים בגודל 2.
מכיוון שכל מטריצה דומה רק למטריצת ז'ורדן אחת (עד לסדר הבלוקים), ו-A ו-B כבר בצורת ז'ורדן שלהן, הן אינן דומות.

סעיף ג'

הטענה לא נכונה! נביא דוגמה נגדית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שתיהן מטריצות ז'ורדן עם 1 על האלכסון הראשי, לכן $p_A(x) = p_B(x) = (x-1)^5$
בלוק ז'ורדן הגדול ביותר בשתיהן הוא בגודל 3, לכן $m_A(x) = m_B(x) = (x-1)^3$.
אך בעוד ש-A עשויה מבלוק אחד בגודל 3 ושני בלוקים בגודל 1, B עשויה מבלוק אחד בגודל 3 ועוד בלוק בגודל 2.
מכיוון שכל מטריצה דומה רק למטריצת ז'ורדן אחת (עד לסדר הבלוקים), ו-A ו-B כבר בצורת ז'ורדן שלהן, הן אינן דומות.

שאלה 3

סעיף א'

מצאו את צורת ז'ורדן של $J_n(\lambda)^{-1}$ עבור $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ועבור $n \in \mathbb{N}_+$

סעיף ב'

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ הפיכה. מצאו את צורת ז'ורדן של A^{-1} כתלות בזאת של A

סעיף ג'

מצאו תנאי הכרחי ומספיק על הבלוקים של צורת ז'ורדן של $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך שיתקיים $A \sim A^{-1}$

פתרון 3

סעיף א'

כפי שהראינו בסעיף א' של שאלה 1

$$p_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

לכן הע"ע של $J_n(\lambda)$ הם λ בר"א של n
ממשפט השקולים, הע"ע של $J_n(\lambda)^{-1}$ הם $\frac{1}{\lambda}$, גם בר"א של n ועם אותו ריבוי גיאומטרי כמו אצל $J_n(\lambda)$, מכאן שחלוקת הבלוקים בצורת ז'ורדן זהה לאצל $J_n(\lambda)$, כלומר בלוק אחד של n. לכן צורת ז'ורדן של $J_n(\lambda)^{-1}$ היא בלוק ז'ורדן אחד של $\frac{1}{\lambda}$ בגודל n

סעיף ב'

נסמן ב-J_A את צורת ז'ורדן של A, נחפש את $J_{A^{-1}}$
$A \sim J_A$ לכן קיימת P הפיכה כך ש $A = PJ_AP^{-1}$, לכן

$$A^{-1} = \left(PJ_AP^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}J_A^{-1}P$$

נסמן $\lambda_1, ..., \lambda_n$ את הע"ע (לאו דווקא שונים) של A, ואת r להיות מספר בלוקי ז'ורדן בצורת ז'ורדן של A. מתקבל כי

$$J_A = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus J_{k_2}(\lambda_1) \oplus ... \oplus J_{k_r}(\lambda_r)$$

ואז, מתכונות מטריצת בלוקים אלכסונית

$$J_A^{-1} = J_{k_1}(\lambda_1)^{-1} \oplus J_{k_2}(\lambda_2)^{-1} \oplus ... \oplus J_{k_r}(\lambda_r)^{-1}$$

לפי סעיף א', כל בלוק $J_{k_i}(\lambda_i)^{-1}$ דומה לבלוק ז'ורדן $J_{k_i}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$ לכן צורת הז'ורדן של J_A^{-1} היא

$$J_{k_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) \oplus J_{k_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \oplus ... \oplus J_{k_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)$$

דמיון הוא יחס שקילות ולכן טרנזיטיבי, A^{-1} דומה ל-J_A^{-1} שדומה לצורת הז'ורדן שלה, לכן זוהי גם צורת ז'ורדן של A^{-1}.
מכאן שצורת ז'ורדן של A^{-1} מתקבלת על ידי לקיחת J_A והחלפת כל ערך עצמי בהופכי שלו

סעיף ג'

נטען כי התנאי הבא מספיק והכרחי:
$A \sim A^{-1}$ אם ורק אם עבור כל בלוק $J_k(\lambda)$ בצורת ז'ורדן של A, יש בצורת ז'ורדן של A גם בלוק $J_k(\lambda^{-1})$
נוכיח את הטענה

$\Longleftarrow$

נניח כי $A \sim A^{-1}$
מכאן שיש להן את אותה צורת ז'ורדן. בסעיף הקודם הראינו שצורת ז'ורדן של A^{-1} זהה לזו של A בגודל וכמות הבלוקים לכל ע"ע, אבל לכל $i \in r$ (כאשר r הוא כמות הבלוקים בצורת ז'ורדן של A ו-A^{-1}), הבלוק $J_{k_i}(\lambda_i)$ מוחלף ב-$J_{k_i}(\lambda_i^{-1})$.
מכיוון ש-A ו-A^{-1} חולקות צורת ז'ורדן, על כל בלוק מהצורה הראשונה צריך להיות בלוק "תאום" מהצורה ההופכית.

$\Longrightarrow$

נניח כי עבור כל בלוק $J_k(\lambda)$ בצורת ז'ורדן של A, יש בצורת ז'ורדן של A גם בלוק $J_k(\lambda^{-1})$
ממה שהראינו בסעיף ב', זה אומר ש J_A עשויה מאותם בלוקים כמו $J_{A^{-1}}$, מכאן שהן דומות.
אולם, כל מטריצה דומה למטריצת ז'ורדן אחת בלבד, לכן $J_A = J_{A^{-1}}$. $A^{-1} \sim J_{A^{-1}}$,

$$A \sim J_A$$

, והראינו עכשיו ש- $J_A = J_{A^{-1}}$ לכן

$$A^{-1} \sim A$$

הוכחנו שמדובר בטענה מסוג אם ורק אם ולכן מדובר בתנאי מספיק והכרחי

שאלה 4

תהיינה

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

מטריצות ב-$\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, ויהי $v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

נגיד כי וקטור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_+^3$ הוא שלשה פיתגורית אם

$$f(v) := a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

וכי וקטור כזה הוא שלשה פיתגורית פרימיטיבית אם בנוסף המחלק המשותף המקסימלי של a, b, c הוא 1 ו-b זוגי.

סעיף א'

מתקיים כי אם $v \in \mathbb{R}^3$ שלשה פיתגורית, גם $A_i v$ שלשה פיתגורית, וגם כי אם $v \in \mathbb{R}^3$ פרימיטיבית, גם $A_i v$ פרימיטיבית. הראו זאת עבור $i = 1$ והסיקו כי $A_1^k v_0$ שלשה פיתגורית פרימיטיבית לכל $k \in \mathbb{N}$.

סעיף ב'

ידוע כי 1 ערך עצמי של A_1 ושל A_3, וכי -1 ערך עצמי של A_2.
הראו כי A_2, A_3 לכסינות, ומצאו מטריצה $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ הפיכה, ומטריצת ז'ורדן $J \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $PA_1P = J$.

סעיף ג'

ידוע כי כל שלשה פיתגורית מתקבלת על ידי כפל משמאל של v_0 במטריצות מבין A_1, A_2, A_3. כלומר, קבוצת השלשות הפיתגוריות הפרימיטיביות היא

$$\left\{ \left(\prod_{j \in [k]} A_{i_j} \right) v_0 \;\middle|\; \begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ \forall j \in [k] : i_j \in [3] \end{matrix} \right\}$$

הראו כי הקבוצה $\left\{ A_1^k v_0 \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ היא בדיוק קבוצת השלשות הפיתגוריות הפרימיטיביות $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ עבורן $c = b + 1$, וחשבו את $A_1^k v_0$ כדי למצוא קבוצה זאת.

פתרון 4

סעיף א'

תהא שלשה פיתגורית $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_+^3$, נתבונן ב-$A_1 v$

$$A_1 v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b - 2c \\ 2a - b + 2c \\ 2a - 2b + 3c \end{pmatrix}$$

על מנת ש-A_1v תהיה שלשה פיתגורית צריך שיתקיים

$$(a-2b-2c)^2+(2a-b+2c)^2-(2a-2b+3c)^2=0$$

נפתח את החזקות ונבדוק

$$(a-2b+2c)^2+(2a-b+2c)^2-(2a-2b+3c)^2$$
$$=(a-2b+2c)(a-2b+2c)+(2a-b+2c)(2a-b+2c)-(2a-2b+3c)(2a-2b+3c)$$
$$=a^2-2ab+2ac-2ab+4b^2-4bc+2ac-4bc+4c^2$$
$$+4a^2-2ab+4ac-2ab+b^2-2bc+4ac-2bc+4c^2$$
$$-4a^2+4ab-6ac+4ab-4b^2+6bc-6ac+6bc-9c^2$$
$$=a^2+b^2-c^2$$

מכיוון ש-v היא שלשה פיתגורית, אכן מתקיים כי

$$(a-2b-2c)^2+(2a-b+2c)^2-(2a-2b+3c)^2=a^2+b^2-c^2=0$$

ולכן A_1v גם היא שלשה פיתגורית.

עכשיו נניח כי v היא שלשה פיתגורית פרימיטיבית, נרצה להוכיח כי גם A_1v פרימיטיבית.

נראה כי $2a-b+2c$ זוגי.

v שלשה פרימיטיבית ולכן b זוגי, $2c$,$2a$ הן כפולה של 2 ולכן בהכרח גם זוגיות. סכום של שלושה מספרים זוגיים הוא זוגי לכן $2a-b+2c$ זוגי. נשאר רק להראות כי שהמחלק המשותף המקסימלי של $a-2b-2c, 2a-b+2c, 2a-2b+3c$ הוא 1.

אבל קודם נראה כי A_1 הפיכה, וכי בכל הכניסות שלה יש מספרים שלמים.

נחשב את הדטרמיננטה של A_1

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\-2&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\2&-2\end{vmatrix}$$
$$=1+4-4=1$$

הדטרמיננטה של A_1 אינה 0, לכן ממשפט השקולים היא הפיכה.

מהמשפט על המטריצה המצורפת,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A)$$

$\det(A)=1$ ולכן

$$A^{-1}=\mathrm{adj}(A)$$

מכיוון שהמטריצה המצורפת של A עשויה ממינורים של A, וכל כניסות A הן מספרים שלמים, אין תת-מטריצה שהדטרמיננטה שלה תהיה מספר ממשי לא שלם.

נחזור להוכחה. נניח בשלילה כי קיים וקטור $u\in\mathbb{Z}_+^3$ וסקלאר $d>1\in\mathbb{N}_+$ כך ש

$$A_1v=d\cdot u$$

A_1 הפיכה, לכן ניתן להכפיל את שני הצדדים ב-A_1^{-1}

$$A_1v=d\cdot u\Longrightarrow A_1^{-1}A_1v=A_1^{-1}d\cdot v\Longrightarrow v=d\cdot A_1^{-1}\cdot u$$

נסמן $w:=A_1^{-1}\cdot u$, נשים לב שגם u וגם A_1^{-1} עשויים אך ורק ממספרים שלמים, לכן כך גם w.

קיבלנו כי קיים וקטור w שכאשר מכפילים אותו במספר שלם $d>1$ מקבלים את v, מכאן ש-d מחלק את a,b,c. בסתירה לכך שהמחלק המקסימלי של a,b,c הוא 1.

כעת נראה שלכל $k \in \mathbb{N}$, $A_1^k v_0$ היא שלשה פיתגורית פרימיטיבית. נעשה זאת באינדוקציה

צעד האינדוקציה

עבור $k = 0$, $A_1^0 = I$, לכן נשאר רק להראות כי v_0 שלשה פרימיטיבית.

$$3^2 + 4^2 - 5^2 = 9 + 16 - 25 = 0$$

$b = 4$ ואכן זוגי, בנוסף המחלק המשותף המקסימלי של $3, 4, 5$ הוא 1.

הנחת האינדוקציה

נניח כי הוכחנו עד k כי כל $v_k = A_1^k v_0$ היא שלשה פרימיטיבית

צעד האינדוקציה

נוכיח עבור $k + 1$

נשים לב $A_1^{k+1} v_0 = A_1 \cdot A_1^k v_0 = A_1 v_k$. מהנחת האינדוקציה, v_k היא שלשה פרימיטיבית, לכן ממה שהראינו. גם $A_1 v_k$ היא שלשה פרימיטיבית.

■

סעיף ב'

נמצא את $p_{A_2}(x)$

$$p_{A_2}(x) = \det(xI - A_2) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & x-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \cdot (x^2 - 4x - 1) - 2 \cdot (-2x + 2) - 2 \cdot (2x + 2)$$

$$= x^3 - 5x^2 - 5x + 1$$

נתון כי -1 ע"ע של A_2, לכן $x + 1$ שורש של הפ"א. נבצע חילוק פולינומים על מנת למצוא את שאר השורשים

x^2	$-6x$	$+1$		
x^3	$-5x^2$	$-5x$	$+1$	$x+1$
x^3	$+x^2$			
0	$-6x^2$	$-5x$		
	$-6x^2$	$-6x$		
	0	x	$+1$	
		x	$+1$	
		0	$+0$	

קיבלנו ש $p_{A_2}(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 1)$, נמצא את השורשים הנותרים באמצעות נוסחת שורשים

$$\lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

קיבלנו שיש שלושה ע"ע שונים, לכל אחד מהם חייב להיות ר"א של 1 וגם ר"ג של 1, לכן המטריצה לכסינה.
נעבור ל-A_3

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A_3)=1+1-3=-1$$

לכן

$$\lambda_2+\lambda_3=-2$$

נחשב את הדטרמיננטה של A_3

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\2&-3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&-2\\2&-3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}$$

$$=1+4-4=1$$

הדטרמיננטה שווה למכפלת הע"ע, לכן $1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=1$ ולכן $\lambda_2\cdot\lambda_3=1$
קיבלנו ש $\lambda_2+\lambda_3=-2,\lambda_2\cdot\lambda_3=1$, לכן מנוסחת הטרינום מתקבל כי ניתן לייצגם כשורשים של

$$\lambda^2+2\lambda+1$$

נשתמש בנוסחת שורשים

$$\lambda_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$$

נשאר רק להראות כי הר"ג של (-1) הוא 2. נחשב את $\dim(\mathrm{Ker}(A_3+I))$

$$\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

שלושת השורות של המטריצה זהות, לכן הדרגה היא 1 ומימד הגרעין הוא 2.
לכל ע"ע, הר"א שווה לר"ג לכן A_3 לכסינה.
נחפש את כל הע"ע של A_1, ידוע לנו כי $\lambda_1=1$, נשתמש בעקבה ובדטרמיננטה

$$\mathrm{tr}(A_1)=1+-1+3=3$$

$$\det(A_1)=1\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\-2&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\2&-2\end{vmatrix}$$

$$=1+4-4=1$$

קיבלנו כי $\lambda_2+\lambda_3=2,\lambda_2\cdot\lambda_3=1$, גם ללא טרינום ונוסחת שורשים ניתן לראות כי $\lambda_2=\lambda_3=1$.
נתבונן במטריצה A_1-I

$$A_1-I=\begin{pmatrix}0&-2&2\\2&-2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

השורה השנייה והשלישית זהות, בעוד הראשונה לא תלויה בהן לינארית.
לכן $\dim(\mathrm{Ker}(A_1-I))=1$, לכן יש בלוק אחד בלבד, זה מראה לנו ש

$$J=J_3(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נמצא וקטור עצמי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו ש $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ היא קבוצת הוקטורים העצמיים עבור הערך העצמי λ_1, נבחר $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נמצא וקטור עצמי מוכלל, נפעיל את פעולות הדירוג שביצענו על v_1 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת את הממ"ל באמצעות מטריצה מורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, נבחר $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נמצא וקטור עצמי מורחב נוסף באמצעותו.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ x \\ \frac{1}{4} - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ נבחר $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

ואז קיבלנו

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

ראשית נסמן

$$\forall k \in \mathbb{N} : A_1^k v_0 = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

נראה הכלה דו כיוונית.
נראה כי לכל $k \in \mathbb{N}$, $v_k := A_1^k v_0$ מקיים $c_k = b_k + 1$, נעשה זאת באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה

עבור $k = 0$
$v_k = A_1^0 v_0 = v_0$ ואכן $c = 5 = 4 + 1$

הנחת האינדוקציה

נניח כי הוכחנו את הטענה עד v_{k-1}

צעד האינדוקציה

נוכיח עבור k.

$$v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} A_1^k v_0 = A_1 \cdot A_1^{k-1} v_0 = A_1 \cdot v_{k-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k-1} - 2b_{k-1} + 2c_{k-1} \\ 2a_{k-1} - b_{k-1} + 2c_{k-1} \\ 2a_{k-1} - 2b_{k-1} + 3c_{k-1} \end{pmatrix}$$

נבדוק אם אכן $c_k = b_k + 1$

$$2a_{k-1} - 2b_{k-1} + 3c_{k-1} = 2a_{k-1} - b_{k-1} + 2c_{k-1} + 1$$
$$\implies 2a_{k-1} - 2b_{k-1} + 3c_{k-1} - 2a_{k-1} + b_{k-1} - 2c_{k-1} = 1$$
$$\implies c_{k-1} - b_{k-1} + = 1$$
$$\implies c_{k-1} = b_{k-1} + 1$$

ואכן, מהנחת האינדוקציה $c_{k-1} = b_{k-1} + 1$ ולכן הפסוק אמת.
כעת נוכיח את ההכלה השנייה.
יהי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b+1 \end{pmatrix}$ שלשה פרימיטיבית
מכיוון ש-v שלשה פרימיטיבית מתקיים $a^2 + b^2 - (b+1)^2 = 0$
לכן
$a^2 + b^2 - b^2 - 2b - 1 = 0$ ולכן $a^2 = 2b + 1$ זה מראה לנו ש-a מספר שלם זוגי.
לכן ניתן לכתוב כל a בתור $2k + 3$, נראה באינדוקציה כי $a_k = 2k + 3$.

בסיס האינדוקציה

עבור $k = 0$ אכן מתקיים כי $a_0 = 3$, נציב $3^2 = 2b + 1 \implies 2b = 8 \implies b = 4$
ואכן $v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

הנחת האינדוקציה

נניח שהשלשה שמתקבלת כאשר $c = b + 1$ ו $a = 2(k-1) + 3$ מתקבלת על ידי $A_1^{k-1} v_0$.

צעד האינדוקציה

תהא $v=\begin{pmatrix}a_k\\b_k\\c_k\end{pmatrix}$ השלשה הפרימיטיבית שבה $a_k=2k+3$ וכן $a_k=b_k+1$

המתקבלת על ידי $A_1^k v_0$

נתבונן ב $v'=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ המתקבלת כך

$$v'=A_1^{-1}v_k$$

בסעיף א' הראינו כי $A_1^{-1}=\operatorname{adj}(A_1)$, נחשב את A_1^{-1} כך

$$A_1^{-1}=\operatorname{adj}(A_1)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&2\\-2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2&2\\-2&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2&2\\-1&2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&-1\\2&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

ולכן

$$v'=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k\\b_k\\b_k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_k+2b_k-2(b_k+1)\\-2a_k-b_k+2(b_k+1)\\-2a_k-2b_k+3(b_k+1)\end{pmatrix}$$

נראה כי $c'-b'=1$

$$c'-b'=-\cancel{2a_k}+\cancel{b_k}+3+\cancel{2a_k}-\cancel{b_k}-2=1$$

נראה כי $a'=a_k-2$

$$a'=a_k+2b_k-2b_k+2=a_k-2$$

מהנחת האינדוקציה נקבל כי

$$v'=A_1^{k-1}v_0$$

אך מכיוון ש-$v'=A_1^{-1}v$ נקבל כי $v=A_1\cdot v'=A_1\cdot A_1^{k-1}v_0=A_1^k v_0$ הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן שוויון.

לסיום, נחשב את $\left\{A_1^k v_0\right\}$

בסעיף הקודם הראינו כי $A=PJP^{-1}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}0&\frac12&-\frac14\\1&0&0\\1&0&\frac14\end{pmatrix}$ ו-$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

נמצא את P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&\frac12&-\frac14&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&\frac14&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&\frac12&-\frac14&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&\frac14&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R-1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&\frac12&0&1&-1&1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&\frac14&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&\frac12&0&1&-1&1\\0&0&\frac14&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2,R_3\to 4R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&2&-2&2\\0&0&1&0&-4&4\end{array}\right)$$

עכשיו נחשב

$$A_1^k v_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right)^k v_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} v_0$$

לפי מה שראינו בתרגול

$$J_3(1)^k = \begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} \\ 0 & 1 & \binom{k}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned} A_1^k v_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2k-1}{4} \\ 1 & k & \frac{k^2-k}{2} \\ 1 & k & \frac{2k^2-2k-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2k+3 \\ 2k^2+6k+4 \\ 2k^2+6k+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן $\left\{ A_1^k v_0 | k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2k+3 \\ 2k^2+6k+4 \\ 2k^2+6k+5 \end{pmatrix} | k \in \mathbb{N} \right\}$