אלגברה ב' - 01040168

גיליון 6

יונתן אבידור - 214269565

שאלה 1

יהי שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $\lambda \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}_+$.

סעיף א'

הראו כי

$$m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

סעיף ב'

הסיקו כי אם $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ אופרטור שהפולינום האופייני שלו מתפצל מעל $\mathbb{F}$, ושהערכים העצמיים השונים שלו הם $\lambda_1, ..., \lambda_m$, מתקיים

$$m_T(x) = \prod_{i\in[m]} (x-\lambda_i)^{k_i}$$

כאשר k_i גודל בלוק ז'ורדן המקסימלי עם ערך עצמי λ_i בצורת ז'ורדן של T.

פתרון 1

סעיף א'

ראשית, נחשב את הפולינום האופייני

$$p_{J_n(\lambda)} = \det(xI - J_n(\lambda)) = \det\begin{pmatrix} x-\lambda & -1 & & \mathbf{0} \\ & x-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & & x-\lambda \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה, לכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר

$$p_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

ממסקנה ממשפט קיילי, הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני. לכן קיים $k \le n$ כך ש $m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^k$.

מהגדרת הפולינום המינימלי, המטריצה שלו מאפסת אותו ולכן $m_{J_n(\lambda)}(J_n(\lambda)) = 0_{n\times n}$ נציב

$$m_{J_n(\lambda)}(J_n(\lambda)) = (J_n(\lambda) - \lambda I)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0_{n\times n}$$

קיבלנו מטריצה המייצגת אופרטור הזזה ביחס לבסיס שעליו הוא פועל. ראינו בכיתה כי אופרטור הזזה הוא אופרטור נילפוטנטי עם אינדקס נילפוטנטיות n, מכאן שגם מטריצה מייצגת שלו היא נילפוטנטית עם אותו אינדקס. כלומר השוויון מתקבל כאשר $k = n$, מכאן ש

$$m_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$$

■

סעיף ב'

למה

תהא מטריצת בלוקים אלכסונית

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_m$$

ופולינום $q(x)$

אזי

$$q(A) = q(A_1) \oplus q(A_2) \oplus ... \oplus q(A_m)$$

הוכחת הלמה

ראשית נראה באינדוקציה כי זה נכון ספציפית על העלאה של A בחזקת k

עבור $k = 0$,

$$A^1 = A = A_1^1 \oplus A_2^1 \oplus ... \oplus A_m^1$$

נניח שהוכחנו זאת עבור כל חזקה עד $k-1$, כעת נוכיח עבור k

$$A^k = A^{k-1} \cdot A = \begin{pmatrix} A_1^{k-1} & & & \\ & A_2^{k-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{הכפלת מטריצות בלוקים}}{=} \begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^k \end{pmatrix}$$

כעת עבור פולינום כללי. יהיו $a_1, ..., a_l \in \mathbb{F}$ והפולינום

$$q(x) = \sum_i^l a_i x^i$$

נציב בו את המטריצה

$$q(A) = \sum_i^l a_i A^i \underset{\text{מה שהוכחנו עכשיו}}{=} \sum_i^l a_i \begin{pmatrix} A_1^i & & & \\ & A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i^l \begin{pmatrix} a_i A_1^i & & & \\ & a_i A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_i A_m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^l a_i A_1^i & & & \\ & \sum_i^l a_i A_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_i^l a_i A_m^i \end{pmatrix}$$

$$q(A_1) \oplus q(A_2) \oplus ... \oplus q(A_m)$$

הוכחת הסעיף

הפולינום האופייני של T מתפצל מעל $\mathbb{F}$, לכן קיים בסיס $\mathcal{B}$ ל-V כך ש $[T]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצת ז'ורדן, נסמן $A = [T]_{\mathcal{B}}$

המטריצה A היא מטריצת ז'ורדן, ולכן ניתן לייצגה כסכום ישר של l בלוקי ז'ורדן, כלומר

$$A = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_l$$

מכיוון ש-A היא מטריצה מייצגת של T, $m_T(x) = m_A(x)$.
מהלמה שהוכחנו וממסקנה על משפט קיילי המילטון

$$m_T(A) = m_T(J_1) \oplus ... \oplus m_T(J_l) = 0_{n\times n}$$

על מנת שזה יקרה, צריך להתקיים

$$\forall j \in l : m_T\big(J_j\big) = 0$$

מההגדרה של פולינום מינימלי, על m_T להיות המכנה המשותף הקטן ביותר של כל הפולינומים המינימליים של הבלוקים.
בסעיף א' הראינו שעבור בלוק בגודל k של ערך λ, הפולינום המינימלי שלו הוא $(x-\lambda)^k$, לכן המכנה המשותף של כל הפולינומים המינימליים של הבלוקים של ערך עצמי λ_i כלשהו של T הוא $(x-\lambda_i)^{k_i}$ כאשר k_i הוא הגודל של הבלוק הגדול ביותר של λ_i, זה נכון עבור כל אחד מ-m הערכים העצמיים ולכן:

$$m_T(x) = \prod_{i\in[m]} (x-\lambda_i)^{k_i}$$

שאלה 2

יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ עבורן

$$p_A(x) = p_B(x)$$
$$m_A(x) = m_B(x)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור אלו שאינן נכונות, מיצאו דוגמה נגדית.

1. A, B דומות אם $n = 3$.
2. A, B דומות אם $n = 4$.
3. A, B דומות אם $n = 5$.

שאלה 3