חשבון אינפי 2 - 01040281
גליון 4

יונתן אבידור - 214269565

5 ביולי 2026

שאלה 1

הוכיחו שסדרות הפונקציות הבאות מתכנסות במידה שווה בקטעים הבאים

סעיף א'

$$\left\{\frac{1}{n}\cos\left(n^2x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$
$$x\in\mathbb{R}$$

סעיף ב'

$$\left\{n\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$
$$x\in[1,4]$$

פתרון 1

סעיף א'

נתחיל בלהוכיח התכנסות נקודתית
יהי $x_0\in\mathbb{R}$, נתבונן בסדרה $\left\{\frac{1}{n}\cos\left(nx_0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$
$\cos\left(nx_0\right)$ חסומה, בעוד $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$, לכן משיקול "חסומה כפול אפסה" הסדרה מתכנסת ל-0
נראה כעת כי $\left\{\frac{1}{n}\cos\left(n^2x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל$f\equiv 0$ במידה שווה
יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $N_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$, לכל $\mathbb{N}\ni n>N_\varepsilon$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{n}\cos\left(n^2x\right)-\underbrace{f\left(x\right)}_{=0}\right|\leq\frac{1}{n}\underbrace{\left|\cos\left(n^2x\right)\right|}_{\leq 1}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכן הסדרה מתכנסת במ"ש ל-$f\left(x\right)=0$
■

סעיף ב'

נתחיל בלהוכיח התכנסות נקודתית
יהי $x_0 \in [1,4]$, נתבונן בסדרה $\left\{n\ln\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)^{n}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)^{\frac{nx_0}{x_0}}\right)$$
$$=\ln\left(\left(\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)^{nx_0}\right)^{\frac{1}{x_0}}\right)=\frac{1}{x_0}\ln\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{nx_0}\right)^{nx_0}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty}e}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{x_0}\ln(e)=\frac{1}{x_0}$$

לכן הסדרה מתכנסת **נקודתית** ל-$\frac{1}{x}$
נוכיח התכנסות במידה שווה באמצעות האפיון השקול
נרצה להראות כי

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,4]}|f_n(x)-f(x)|=0$$

נגדיר סדרת פונקציות $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$ נגזור את הפונקציות $g_n(x)$ (תהליך הגזירה זהה לכל n)

$$g_n'(x)=(f_n(x)-f(x))'\underset{\text{לינאריות הנגזרת}}{=}f_n'(x)-f'(x)$$
$$=\left(n\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{nx}}\cdot\left(-\frac{1}{nx^2}\right)+\frac{1}{x^2}$$
$$=n\cdot\frac{\cancel{nx}}{1+nx}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{nx^2}}\right)+\frac{1}{x^2}=-\frac{n}{x(1+nx)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{-nx+1+nx}{x^2(1+nx)}=\frac{1}{x^2(1+nx)}$$

לכל $n>0$ ולכל $x\in[1,4]$ $x^2(1+nx)>0$, $\frac{1}{x^2(1+nx)}>0$, כלומר הנגזרת עולה ממש
נתבונן בהתנהגות של $g_n(x)$ בקצוות
כאשר $x=1$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n(1)-f(1))=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{1}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)-1$$
$$=\ln(e)-1=1-1=0$$

כאשר $x=4$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n\left(4\right)-f\left(4\right)\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{4}$$
$$\underset{\text{כפל וחלוקה ב-4}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot 4n\ln\left(1+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\ln\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\ln(e)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

מכיוון ש-$g_n(x)$ מונוטונית עולה ממש ב-$[1,4]$, מתקיים

$$g_n(1)\leq g_n(x)\leq g_n(4)$$

לכן, עבור הערך המוחלט מתקיים

$$\forall x\in[1,4]:\left|g_n(x)\right|\leq\max\left(\left|g_n(1)\right|,\left|g_n(4)\right|\right)$$

מכיוון שזה נכון לכל x, בפרט זה נכון עבור הסופרימום

$$0\leq\sup_{x\in[1,4]}\left|g_n(x)\right|\leq\max\left(\left|g_n(1)\right|,\left|g_n(4)\right|\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

לכן מכלל הסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,4]}\left|g_n(x)\right|=0$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,4]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$$

מכאן, מהאפיון השקול להתכנסות במ"ש. $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $\frac{1}{x}$
■

שאלה 2

תהא

$$f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx}, \text{for } x \geq 0$$

סעיף א'

הראו שהסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנס נקודתית לכל $x \geq 0$

סעיף ב'

הראו שהסדרה מתכנסת במ"ש עבור $x \in [0, \infty)$

פתרון 2

סעיף א'

יהי $x_0 \in [0, \infty)$ נראה כי הסדרה $\{\sqrt{n}x_0e^{-nx_0}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת
נחלק למקרים על פי x_0

$$x_0 = 0$$

כאשר x_0 הסדרה היא $\{\sqrt{n} \cdot 0 \cdot e^{-n \cdot 0}\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, כלומר הסדרה הקבועה 0, לכן היא שואפת נקודתית ל-$f(x) \equiv 0$

$$x_0 > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}x_0e^{-nx_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}x_0}{e^{nx_0}}$$

נשים לב כי במונה יש שורש n כפול קבוע, בעוד שבמכנה יש סדרה מעריכית עם חזקת n כפול קבוע.
לכן ממבחן המנה נקבל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}x_0}{e^{nx_0}} = 0$
לכן גם עבור $x_0 > 0$ הסדרה שואפת נקודתית ל-$f(x) \equiv 0$

קיבלנו כי לכל $x_0 \in [0,\infty)$ $f_n(x_0) \to 0$ לכן הסדרה מתכנסת נקודתית ל-$f(x) \equiv 0$
■

סעיף ב'

נוכיח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-$f(x) \equiv 0$ בקטע $[0,\infty)$ נוכיח זאת באמצעות האפיון השקול להתכנסות במ"ש, כלומר נרצה להראות כי

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ומכיוון ש-$f(x) \equiv 0$ זה בעצם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{\sqrt{n}x}{e^{nx}}\right| = 0$$

מכיוון שבקטע $[0,\infty)$, $f_n(x)$ תמיד חיובית, $|f_n(x)| = f_n(x)$ נגזור את $f_n(x)$

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}\cdot e^{nx} - n\cdot e^{nx}\cdot\sqrt{n}x}{e^{2nx}}$$

נמצא שורשים על מנת למצוא נקודות קיצון

$$\frac{\sqrt{n}e^{nx} - x\sqrt{n}ne^{nx}}{e^{2nx}} = 0$$
$$\underset{\times e^{2nx}}{\Longrightarrow} \sqrt{n}e^{nx} - x\sqrt{n}ne^{nx} = 0$$
$$\Longrightarrow \sqrt{n}e^{nx}(1-nx) = 0$$
$$\underset{\div\sqrt{n}e^{nx}}{\Longrightarrow} 1 - nx = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{n}$$

לפי משפט פרמה, הפונקציה יכולה לשנות את התנהגותה (מבחינת ירידה ועלייה) אך ורק ב-$x = \frac{1}{n}$, נבדוק את ההתנהגות בנקודות קרובות

$$f_n(0) = \frac{\sqrt{n}\cdot 0}{e^0} = 0$$
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}\frac{1}{n}}{e^{n\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}}}{e} = \frac{1}{e\sqrt{n}}$$
$$f_n(1) = \frac{\sqrt{n}\cdot 1}{e^{n\cdot 1}} = \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

נראה שלכל n מתקיים $\frac{1}{e\sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n}}{e^n}$
לכל n, $n < e^{n-1}$, נשתמש בזה

$$n < e^{n-1} \underset{\div e^n}{\Longrightarrow} \frac{n}{e^n} < \frac{1}{e} \underset{\div\sqrt{n}}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt{n}}{e^n} < \frac{1}{e\sqrt{n}}$$

לכן הנגזרת עולה ב-$\left[0, \frac{1}{n}\right)$ ויורדת ב-$\left(\frac{1}{n}, \infty\right)$
לכן הסופרימום נמצא ב-$x = \frac{1}{n}$, נמצא את הגבול של סדרת הפונקציות בנקודה זו

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\frac{1}{n}}{e^{n\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}}}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e\sqrt{n}} = 0$$

קיבלנו שהסופרימום שואף ל-0, לכן $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$ בקטע $[0, \infty)$

שאלה 3

סעיף א'

הראו שהסדרה $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[a,\infty)$ לכל $a>0$, אבל מתכנסת נקודתית בלבד ב-$(0,\infty)$

סעיף ב'

הראו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\ln\left(1+nx\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,b]$ לכל $b>0$ אבל מתכנסת נקודתית בלבד ב-$[0,\infty)$

פתרון 3

סעיף א'

נטען כי הסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה $f\left(x\right)\equiv 0$ ראשית, נראה כי הסדרה מתכנסת נקודתית בכל הקטע $(0,\infty)$ יהי $\varepsilon>0$ ויהי $x\in(0,\infty)$, נבחר $N_{x,\varepsilon}=\lfloor\frac{1}{x\varepsilon}+1\rfloor$ לכל $n>N_{x,\varepsilon}$

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{N_{x,\varepsilon}x}\leq\varepsilon$$

כעת, נוכיח כי הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[a,\infty)$ לכל $a>0$
יהי $a>0$
יהי $\varepsilon>0$, נבחר $N_\varepsilon=\lfloor\frac{1}{\varepsilon a}+1\rfloor$
לכל $n>N_\varepsilon$ ולכל $x\in[a,\infty)$

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{na}<\frac{1}{N_\varepsilon a}\leq\varepsilon$$

לכן לכל $a>0$, הסדרה מתכנסת שווה ל-0 בקטע $[a,\infty)$
כעת נוכיח כי היא **לא** מתכנסת במ"ש בקטע $(0,\infty)$ נתבונן בגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

נמצא את הסופרימום

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n\left(1+n^2x^2\right)-2n^2x\left(nx\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$
$$= \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{n\left(1-n^2x^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

נמצא שורשים

$$\frac{n\left(1-n^2x^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = 0 \underset{\times(1+n^2x^2)^2}{\Longrightarrow} n\left(1-n^2x^2\right) = 0 \underset{\div n}{\Longrightarrow} 1-n^2x^2 = 0$$
$$\Longrightarrow n^2x^2 = 1 \underset{\div n^2}{\Longrightarrow} x^2 = \frac{1}{n^2} \underset{\surd}{\Longrightarrow} x = \pm\frac{1}{n}$$

מכיוון ש-$x > 0$ השורש היחיד הרלוונטי הוא $x = \frac{1}{n}$
נשים לב שמכיוון ש-$n > 0$ וגם $\left(1+n^2x^2\right)^2 > 0$, החלק היחיד בנגזרת שיכול להשפיע על הסימן הוא $1-n^2x^2$, נתבונן בהתנהגות שלו בסמוך ל-$x = \frac{1}{n}$
כאשר $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$

$$1-n^2x^2 < 1-n^2\frac{1}{n^2} = 1-1 = 0$$

לכן הנגזרת שלילית בתחום הזה
נעבור ל-$x \in \left(\frac{1}{n}, \infty\right)$

$$1-n^2x^2 > 1-n^2\frac{1}{n^2} = 1-1 = 0$$

קיבלנו כי אכן מדובר בנקודת קיצון סופרימום, כעת נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

קיבלנו שהסופרימום שואף ל-$\frac{1}{2}$ ולא לאפס, לכן הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה, זאת מכיוון שמיחידות הגבול, אם סדרה מתנסת במ"ש לפונקציה, אזי היא גם תתכנס אליה נקודתית.
■

סעיף ב'

יהי $b > 0$, נראה התכנסות נקודתית בקטע $[0, \infty)$
יהי $x_0 \in [0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+nx_0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+nx_0\right)}{n}$$

נשתמש בקריטריון היינה ונגדיר פונקציה $h(x) = \frac{\ln(1+x\cdot x_0)}{x}$, כעת נסתכל עליה כאשר $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x\cdot x_0)}{x} \underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x_0}{1+x\cdot x_0}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x_0}{1+x\cdot x_0} = 0$$

לכן לפי היינה גם הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+nx_0)}{n} = 0$$

הראינו התכנסות נקודתית ל-$f(x) \equiv 0$
נראה התכנסות במ"ש בקטע $[0,b]$
נגזור את הפונקציות

$$\left(\frac{1}{n}\ln(1+nx)\right)' = \frac{1}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}}{1+nx} = \frac{1}{1+nx}$$

הנגזרת לא יכולה להתאפס והיא חיובית תמיד, אזי הפונקציות הן מונוטוניות עולות ממש, מכאן שהסופרימום בקטע $[0,b]$, נמצא ב-b
נעבור למצוא את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln(1+nb)}{n} - 0\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+nb)}{n}$$

כפי שכבר הראינו הגבול הזה הוא 0, לכן הסדרה מתכנסת במידה שווה ל-0 בקטע $[0,b]$
מכיוון שהפונקציות עולה ממש, בקרן $(0,\infty)$, **אין** סופרימום לאף אחת מהפונקציות.
לכן הגבול לא קיים, והסדרה לא מתכנסת במ"ש

שאלה 4

מצאו את התחום שבו הטור הבא מתכנס בצורה שווה והתחום שבו הוא מתכנס נקודתית

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{n(x^2-3x+2)}$$

פתרון 4

נגדיר $t = e^{x^2-3x+2}$, נציב בטור ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n$$

קיבלנו טור חזקות של t, נמצא את רדיוס ההתכנסות שלו לפי קושי-הדמר

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}}$$

נמצא את הגח"ק

$$\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

מכיוון ש-$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, הגבול העליון הוא הגבול ושווה ל-1, לכן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

נבדוק את הקצוות עבור $t = 1$, הטור הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

זה הטור ההרמוני המתחלף, והוא מתכנס, שכן הוא טור לייבניץ.
עבור $t = -1$ הטור הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

זה הטור ההרמוני המתחלף, והוא מתבדר.
לכן טור זה מתכנס בתחום $(-1,1]$. נחזיר את ההצבה ונדרוש כי $-1 < e^{x^2-3x+2} \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R} : e^{x^2-3x+2} > 0 > -1$, נשאר רק לדרוש $e^{x^2-3x+2} \leq 1$, נבדוק איפה זה מתקיים

$$e^{x^2-3x+2} \leq 1 \underset{\ln()}{\iff} x^2-3x+2 \leq \ln(1) \iff x^2-3x+2 \leq 0$$
$$\underset{\text{טרינום}}{\iff} (x-1)(x-2) \leq 0$$

לכן הטור מתכנס נקודתית עבור $x \in [1,2]$
ממשפט שראינו בהרצאה, מכיוון שהטור מתכנס ב-$t=1$, הטור מתכנס במידה שווה ב-$[0,1]$,נבדוק מה התחום הזה אומר מבחינת x
נבדוק מה התמונה של $t(x) = e^{x^2-3x+2}$ בקטע $[1,2]$
הפונקציה רציפה, לכן מספיק למצוא את נקודות הקיצון.
מכיוון שמדובר בפרבולה חיובית, המקסימום מתקבל בקצוות, נציב $x=1$

$$t(1) = e^{1-3+2} = e^0 = 1$$

והמינימום יתקבל ב-$x = \frac{3}{2}$ (ה"קודקוד" של הפרבולה)

$$t\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2} = e^{\frac{9}{4}-\frac{18}{4}+\frac{8}{4}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

קיבלנו כי $t([1,2]) = \left[e^{-\frac{1}{4}}, 1\right] \subseteq [0,1]$
לכן הטור מתכנס במידה שווה ב-$[1,2]$

שאלה 5

תהי $f_0\left(x\right)$ אינטגרבילית ב-$[0,a]$. לכל $n \geq 1$ נגדיר

$$f_n\left(x\right) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, x \in [0,a]$$

הוכיחו כי הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 במידה שווה בקטע $[0,a]$

פתרון 5

נוכיח באינדוקציה שקיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש לכל $x \in [0,a]$ $|f_n(x)| < M\frac{x^n}{n!}$

בסיס האינדוקציה

f_0 אינטגרבילית בקטע $[0,a]$, לכן היא חסומה שם, כלומר קיים חסם עליון $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0,a]$

$$|f_0\left(x\right)| \leq M = M\underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1}$$

הנחת האינדוקציה

נניח כי

$$|f_{n-1}| =\leq M\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

לכן

צעד האינדוקציה

$$|f_n| \underset{\text{הגדרת הסדרה}}{=} \left|\int_0^x f_{n-1}\left(t\right)\,dt\right| \leq \int_0^x \left|f_{n-1}\left(t\right)\right|\,dt$$
$$\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{<} \int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = M\frac{x^n}{n!}$$

נתבונן בגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)-0| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| < \lim_{n\to\infty} M\frac{x^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} M\frac{a^n}{n!}$$

נשתמש במבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{Ma^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Ma^{n+1}n!}{Ma^n n!\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} \underset{\text{חסומה כפול אפסה}}{=} 0$$

קיבלנו כי גבול המנה קיים וקטן מ-1 ולכן הסדרה שואפת ל-0
מצד שני, $\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| \geq |f_n(x)| \geq 0$
לכן מסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = 0$$

לכן הסדרה מתכנסת במ"ש ל-0 בכל הקטע
כנדרש
■

שאלה 6

תהא

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}, x \in [0,1], p > 0$$

סעיף א'

עבור אילו ערכי p הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-0

סעיף ב'

האם $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ עבור $p = 2$? עבור $p = 4$?

פתרון 6

סעיף א'

נתבונן בגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{nx}{1+n^2x^p}$$

נמצא את הסופרימום

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^p}\right)' = \frac{n\left(1+n^2x^p\right) - pn^2x^{p-1}(nx)}{\left(1+n^2x^p\right)^2}$$

$$= \frac{n\left(1+n^2x^p\right) - pn^3x^p}{\left(1+n^2x^p\right)^2} = \frac{n\left(1+n^2x^p - pn^2x^p\right)}{1+n^2x^p} = \frac{n\left(1+n^2x^p(1-p)\right)}{\left(1+n^2x^p\right)^2}$$

נמצא שורשים

$$\frac{n\left(1+n^2x^p\left(1-p\right)\right)}{\left(1+n^2x^p\right)^2}=0 \implies n\left(1+n^2x^p\left(1-p\right)\right)=0$$

$$\implies 1+n^2x^p\left(1-p\right)=0 \implies n^2x^p\left(1-p\right)=\frac{-1}{n^2\left(1-p\right)}$$

$$\implies x^p=\frac{1}{n^2\left(p-1\right)} \implies x=\frac{1}{n^{\frac{2}{p}}\left(p-1\right)^{\frac{1}{p}}}$$

נסמן את השורש הזה לכל n בתור x_n (אנחנו מעוניינים בחיובי בלבד בגלל התחום שלנו)

מתרגיל (3) אנחנו יודעים שמדובר בסופרימום, נמצא את הגבול בסופרימום הזה

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{1+n^2x_n^p}$$

נציב את הערך של x_n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{1+n^2x_n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{p}}(p-1)^{\frac{1}{p}}}\right)}{1+\frac{1}{p-1}}=\frac{p-1}{p}\cdot\frac{n}{n^{\frac{2}{p}}\left(p-1\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{p-1}{p(p-1)}\cdot n^{1-\frac{2}{p}}$$

נרצה שהמעריך יהיה שלילי

$$1-\frac{2}{p}<0 \implies 1<\frac{2}{p} \implies p<2$$

לכן

$$\boxed{0<p<2}$$

סעיף ב'

$$p=2$$

נשתמש בהצבה

$$t=1+n^2x^2$$
$$dt=2n^x$$
$$nxdx=\frac{1}{2n}du$$
$$x=0 \implies t=1$$
$$x=1 \implies t=1+n^2$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_1^{1+n^2}\frac{1}{t}\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln|t|\Big|_1^{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)-ln(1)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

לכן התשובה היא כן

$$p = 4$$

גם הפעם נעשה הצבה, אבל אחרת

$$t = nx^2$$
$$dt = 2nx\,dx$$
$$nxdx = \frac{1}{2}\,dt$$
$$x = 0 \implies t = 0$$
$$x = 1 \implies t = n$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\arctan n = \frac{\pi}{4}$$

לכן התשובה היא לא

שאלה 7

מצאו את רדיוסי ההתכנסות של טורי החזקות הבאים

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}$$

פתרון 7

סעיף א'

נחפש את גבול המנה של הסדרה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\cancel{\frac{1}{n!}}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{n!}}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\cancel{e^{n+1}}}}{\frac{n^n}{\cancel{e^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{1+n}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)^{n+1}}}{n^n} \cdot \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \underset{\text{הגבול הידוע של } e}{=} e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא 1

סעיף ב'

נשתמש במבחן השורש למצוא התכנסות

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{3n}\right|}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{3n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left|x^{3n}\right|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left|x^3\right|=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e}\underbrace{\left|x^3\right|}_{\to\left|x^3\right|}=e\left|x^3\right|$$

לפי מבחן השורש, יש התכנסות אם ורק אם הגבול קטן מ-1

$$e\left|x^3\right|<1\implies\left|x^3\right|<\frac{1}{e}\implies|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

שאלה 8

הוכיחו כי עבור $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$$

פתרון 8

נתבונן בטור ההנדסי

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ידוע כי ניתן לכתוב אותו גם בתור $\frac{1}{1-x}$ לכל $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

לכן, גם הנגזרות שלהם שוות

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

את הצד השמאלי נגזור באמצעות כלל השרשת

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left((1-x)^{-1}\right)' = -1 \cdot -1 \cdot (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

מכיוון שכאשר $|x| < 1$, הטור מתכנס, ניתן לגזור את הצד הימני של המשוואה לפי משפט גזירה איבר-איבר

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

מכיוון שעבור $n = 0$ מתקבל $0 \cdot x^{-1} = 0$, ניתן להתחיל את הסכימה ב-$n = 1$ קיבלנו כי

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

נגזור שוב

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)'$$

נעשה זאת באותה הדרך (כי ממשפט גזירה איבר-איבר, גם סדרת הנגזרות מתכנסת באותו התחום)

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left((1-x)^{-2}\right)' = -2 \cdot -1 \cdot (1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nx^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot n \cdot x^{n-2}$$

ושוב, $n = 1$ מביא לנו $0 \cdot 1 \cdot x^{-1} = 0$, לכן ניתן להתחיל עם $n = 2$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, x^{n-2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, x^{n-2}$$

נשנה את אינדקס ההתחלה ל-$n = 0$ ונוסיף 2 לכל ביטוי n ונקבל

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (n+2)\, x^n$$

כנדרש

■