אלגברה ב' - 01040168

גיליון 8

יונתן אבידור - 214269565

שאלה 1

עבור ההעתקות הבאות f_i, קיבעו האם f_i מכפלה פנימית. הוכיחו את קביעתכן.

סעיף א'

$$f_1 : \mathrm{M}_{n(\mathbb{R})} \times \mathrm{M}_{n(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}$$
$$(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(B^t A)$$

סעיף ב'

$$f_2 : \mathrm{M}_{n(\mathbb{C})} \times \mathrm{M}_{n(\mathbb{C})} \to \mathbb{C}$$
$$(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(B^t A)$$

סעיף ג'

$$f_3 \mathbb{R}_{\leq n}[x] \times \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}$$
$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + ... + f(n)g(n)$$

סעיף ד'

$$f_4 \mathbb{C}_{\leq n}[x] \times \mathbb{C}_{\leq n}[x] \to \mathbb{C}$$
$$(f, g) \mapsto f(0)g(0) + ... + f(n)g(n)$$

פתרון 1

סעיף א'

כן! נוכיח

יהיו $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$

נראה מהי בעצם הפונקציה הזו

$$f_1(A, B) = \mathrm{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^{n} (B^t A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B^t_{j,i} A_{i,j}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} A_{i,j}$$

כעת, נוכיח את ארבעת התכונות של מכפלה פנימית

חיוביות ומוגדרות

$$f_1(A, A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} A_{i,j}$$

כלומר $f_1(A, A)$ הוא סכום הריבועים של הכניסות של A, ולכן $A^2_{i,j} \geq 0$, ו-$A^2_{i,j} =$ 0 אם ורק אם $A_{i,j} = 0$, לכן $f_1(A, A) = 0$ אם ורק אם A היא מטריצת האפס, ולכל מקרה אחר $f_1(A, A) > 0$

לינאריות ברכיב הראשון

$$f_1(\alpha A+C,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}(\alpha A+C)_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}(\alpha A+C)_{i,j}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}(\alpha(A+C))_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}\alpha((A+C))_{i,j}$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(B_{i,j}A_{i,j}\right)+\left(B_{i,j}C_{i,j}\right)$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}A_{i,j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{i,j}C_{i,j}$$
$$=\alpha f_1(A,B)+f_1(C,B)$$

הרמיטיות

$$f_1(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}B_{i,j}\underset{\text{קומוטטיביות בסכום סופי}}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}B_{i,j}$$

מכיוון ש-A,B מטריצות מעל שדה הממשיים, $f_1(B,A)=\overline{f_1(B,A)}$ הראינו את כל התכונות של מכפלה פנימית, לכן f_1 היא מכפלה פנימית

סעיף ב'

לא נכון! נראה דוגמה נגדית

תהא $A=\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, נראה שלא מתקיימת חיוביות.

$$f_2(A,A)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}A_{i,j}A_{i,j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}i\cdot i=(i\cdot i)\cdot 4=-1\cdot 4=-4<0$$

לא מתקיימת חיוביות, לכן הפונקציה אינה מכפלה פנימית

סעיף ג'

כן! נוכיח

יהיו $f,g,h\in\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$

חיוביות ומוגדרות

$$f_3(f,f)=\sum_{k=0}^{n}f(k)^2$$

סכום של ריבועים של מספרים ממשיים תמיד יהיה גדול או שווה לאפס, ולכן מתקיים חיוביות.

הדרך היחידה בה הסכום יהיה אפס, היא אם כל אחד מהמחוברים הוא אפס, כלומר

$$\forall k\in\{0,n\}:f(k)=0$$

אזי, יש ל-f $n+1$ שורשים לפחות. הפולינום מ-$\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ שיש לו מעל n שורשים הוא פולינום האפס. לכן $f_3(f,f)=0\Longrightarrow f=0$

לינאריות ברכיב הראשון

$$f_3(\alpha f+h,g)=\sum_{k=0}^{n}(af+h)(k)\cdot g(k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha f(k)+h(k)\cdot g(k)$$

$$=\alpha\sum_{k=0}^{n}(f(k)+h(k))\cdot g(k)=\alpha\sum_{k=0}^{n}f(k)g(k)+\sum_{k=0}^{n}h(k)g(k)=\alpha f_3(f,g)+f_3(h,g)$$

הרמיטיות

$$f_3(f,g)=\sum_{k=0}^{n}f(k)g(k)\underset{\text{קומוטטיביות כפל}}{=}\sum_{k=0}^{n}g(k)f(k)=f_3(g,f)\underset{\text{צמוד מעל הממשיים}}{=}\overline{f_3(g,f)}$$

הראינו את כל התכונות של מכפלה פנימית, לכן f_3 היא מכפלה פנימית

סעיף ד'

לא נכון! נראה דוגמה נגדית

יהי $f(x)=i+ix\in\mathbb{C}_{\leq 1}[x]$. נראה שלא מתקיימת חיוביות.

$$f_4(f,f)=\sum_{k=0}^{1}f(k)f(k)=i\cdot i+2i\cdot 2i=-1+(-4)=-5<0$$

לא מתקיימת חיוביות, לכן הפונקציה אינה מכפלה פנימית

שאלה 2

היעזרו באי-שוויון קושי-שוורץ כדי להראות שמתקיים

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+ : x+y+z\le 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

פתרון 2

נגדיר שני וקטורים ב-$(\mathbb{R}^3,\langle .,.\rangle)$ כש-$\langle .,.\rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$v=\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{x+z}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$$
$$w=\left(\sqrt{y+z},\sqrt{x+z},\sqrt{x+y}\right)$$

נשים לב שמכיוון ש-$x,y,z\in\mathbb{R}_+$ הוקטורים מוגדרים מיטב
נתבונן במכפלה הפנימית של v ו-w ובנורמות שלהם

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle &= \frac{x}{\sqrt{y+z}}\cdot\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{x+z}}\cdot\sqrt{x+z}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\cdot\sqrt{x+y}\\ &= x+y+z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|w\| &= \sqrt{\sqrt{y+z}^2+\sqrt{x+z}^2+\sqrt{x+y}^2}\\ &= \sqrt{y+z+x+z+x+y}=\sqrt{2(x+y+z)}\end{aligned}$$

לפי אי-שוויון קושי-שוורץ

$$|x+y+z|\le\sqrt{\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}}\cdot\sqrt{2x+2y+2z}$$

נשים לב שמכיוון ש-$x,y,z\in\mathbb{R}_+$ $x+y+z>0$ ולכן $|x+y+z|=x+y+z$
נעלה את שני צדדי המשוואה בריבוע

$$(x+y+z)^2\le\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\cdot 2\cdot(x+y+z)$$

נחלק את שני צדדי המשוואה ב-$x+y+z$ (נזכור ש-$x+y+z>0$ ולכן ניתן לעשות כן) ונקבל כי

$$x+y+z\le 2\cdot\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

כנדרש

■

שאלה 3

יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ותהיינה

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\langle f, g \rangle_2 = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

שתי מכפלות פנימיות על V. יהי

$$W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\} \leq V$$

סעיף א'

מצאו בסיס $B = (w_1, ..., w_n)$ של W והשלימו אותו לבסיס C של V. בצעו את תהליך גרם-שמידט על C לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות כדי לקבל בסיסים אורתונורמליים לפיהן.

סעיף ב'

היעזרו בסיסים שמצאתן בסעיף הקודם כדי למצוא את

$$W^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in W : \langle f, g \rangle = 0\}$$

לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות.

סעיף ג'

מצאו את ההטלה P_W על W במקביל ל-$W^\perp$ לפי כל אחת מהמכפלות הפנימיות. הטלה זאת נקראת ההטלה האורתוגונלית על W (לפי המכפלה הפנימית המתאימה) ונראה בהמשך כי $P_W(v)$ הוא הוקטור הקרוב ביותר ל-v ב-W

פתרון 3

סעיף א'

סעיף ב'

סעיף ג'