אלגברה ב' - 01040168

גיליון 10

יונתן אבידור - 214269565

שאלה 1

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי ויהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ כך שהאופרטור $q(T)$ הפיך. נסמן $S = p(T)q(T)^{-1}$.

הוכיחו כי

$$\sigma(S) = \left\{ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \;\middle|\; \lambda \in \sigma(T) \right\}$$

וכי לכל $\lambda' \in \sigma(S)$

$$r_a^S(\lambda') = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda)$$

$$r_g^S(\lambda') = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda)$$

פתרון 1

יהי $v \neq 0_V \in V$ ו"ע של T עם ע"ע $\lambda \in \sigma(T)$, אזי

$$Tv = \lambda v$$

נפעיל p על שני צדדים המשוואה

$$p(Tv) = p(\lambda v)$$

מלינאריות

$$(*) : p(T)v = p(\lambda)v$$

נעשה אותו דבר עם q

$$q(T)v = q(\lambda)v$$

$q(T)$ הפיכה, לכן קיים $q(T)^{-1}$, נפעיל $q(T)^{-1}$ על שני צדדי המשוואה

$$q(T)^{-1}(q(T)v) = q(T)^{-1}(q(\lambda)v)$$

מאסוציאטיביות נקבל

$$\big(q(T)^{-1}q(T)\big)v = q(T)^{-1}(q(\lambda)v)$$

$q(T)^{-1}q(T) = Id_V$ ולכן

$$v = q(T)^{-1}(q(\lambda)v) = q(\lambda)q(T)^{-1}v$$

נחלק את שני הצדדים ב-$q(\lambda)$

$$(**) : \frac{1}{q(\lambda)}v = q(T)^{-1}v$$

נתבונן ב-Sv

$$Sv = \big(p(T)q(T)^{-1}\big)v \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} p(T)\big(q(T)^{-1}v\big) \underset{(**)}{=} p(T)\frac{1}{q(\lambda)}v$$

$$= \frac{1}{q(\lambda)}p(T)v \underset{(*)}{=} \frac{1}{q(\lambda)}p(\lambda)v = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}v$$

לכן

$$Sv = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}v$$

לכן v ו"ע של S עם ע"ע $\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}$
משרירותיות $\lambda \in \sigma(T)$, מתקבל כי

$$\boxed{\sigma(S) = \left\{ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \;\middle|\; \lambda \in \sigma(T) \right\}}$$

נתון כי T אופרטור נורמלי, לכן ממשפט הפירוק הספקטרלי, קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}$ כך ש $[T]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית. כלומר

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נחפש את $[S]_{\mathcal{B}}$

$$[S]_{\mathcal{B}} = \left[p(T)q(T)^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = [p(T)]_{\mathcal{B}}\left[q(T)^{-1}\right]_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & \\ & p(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q(\lambda_1)^{-1} & & & \\ & q(\lambda_2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q(\lambda_n)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{כפל מטריצות אלכסוניות}}{=} \begin{pmatrix} p(\lambda_1)q(\lambda_1)^{-1} & & & \\ & p(\lambda_2)q(\lambda_2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda_n)q(\lambda_n)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{הגדרת } S}{=} \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & & & \\ & S(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & S(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לפי מה שהוכחנו בתחילת השאלה

$$\forall \lambda_i \in \lambda_1, ..., \lambda_n = \sigma(T) : S(\lambda_i) = \frac{p(\lambda_i)}{q(\lambda_i)} \in \sigma(S)$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} S(\lambda_1) & & & \\ & S(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & S(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p(\lambda_1)}{q(\lambda_1)} & & & \\ & \frac{p(\lambda_2)}{q(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{p(\lambda_n)}{q(\lambda_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & \\ & \lambda'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n'} \end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל $\lambda' \in \sigma(S)$ יש בין 1 ל-n ערכים עצמיים שונים של T λ כך ש $\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'$
נראה באינדוקציה כי הריבוי האלגברי של λ' הוא סכום הריבויים האלגבריים של

אותם λ. אם יש רק ערך עצמי אחד λ כך ש $\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'$, על כל פעם ש λ מופיעה על האלכסון הראשי ב-$[T]_{\mathcal{B}}$, λ' מופיעה על האלכסון הראשי ב-$[S]_{\mathcal{B}}$, לכן

$$r_a^T(\lambda) = r_a^S(\lambda')$$

כעת נניח שהוכחנו שעבור $k-1 < n$, מתקיים

$$r_a^S(\lambda') = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda)$$

נראה עבור $k \leq n$

יהי λ' כך שקיימים k ע"ע שונים של T λ כך ש $\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'$

נבחר אחד מאותם ע"ע, נסמנו $\tilde{\lambda}$, עבור כל פעם ש-$\tilde{\lambda}$ מופיע על האלכסון הראשי של $[T]_{\mathcal{B}}$, λ' מופיע על האלכסון הראשי של $[S]_{\mathcal{B}}$, מהנחת האינדוקציה מתקיים

$$r_a^S(\lambda') - r_a^T(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \setminus \tilde{\lambda} \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda)$$

לכן

$$r_a^S(\lambda') = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda)$$

כנדרש.

מכיוון ש-T לכסינה, לכל $\lambda \in \sigma(T)$ מתקיים $r_a^T(\lambda) = r_g^T(\lambda)$

הראינו ש-S לכסינה גם היא)מצאנו בסיס שעבורו המטריצה המייצגת של S היא אלכסונית(, ולכן לכל $\lambda' \in \sigma(S)$ מתקיים $r_a^S(\lambda') = r_g^S(\lambda')$ לכן

$$r_g^S(\lambda') = r_a^S(\lambda') = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_a^T(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda'}} r_g^T(\lambda)$$

כנדרש

■

שאלה 2

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ נורמלי, ונניח כי $3,4$ ערכים עצמיים של T. הראו שיש $v \in V$ עבורו $\|v\| = \sqrt{2}$ וגם $\|Tv\| = 5$.

פתרון 2

יהי $u' \neq 0 \in V$ וקטור עצמי של T עם ע"ע 4, נגדיר $u = \frac{u'}{\|u'\|}$, מכיוון ש-$u \in \mathrm{Span}(u')$, גם u הוא וקטור עצמי של T עם ע"ע 4, בנוסף, $\|u\| = 1$
באותה דרך נגדיר w ו"ע של T עם ע"ע 3 ונורמה 1.
נגדיר $v = u + w$ ונתבונן ב-$\|Tv\|^2$

$$
\begin{aligned}
&\langle T(v), T(v)\rangle^2 \\
&\underset{\text{הגדרת } v}{=} \langle T(u+w), T(u+w)\rangle \\
&\underset{\text{לינאריות } T}{=} \langle T(u)+T(w), T(v)\rangle \\
&\underset{\text{לינאריות ברכיב הראשון}}{=} \langle T(u), T(v)\rangle + \langle T(w), T(v)\rangle \\
&\underset{\text{הרמיטיות}}{=} \overline{\langle T(v), T(u)\rangle} + \overline{\langle T(v), T(w)\rangle} \\
&\underset{\text{הגדרת } v}{=} \overline{\langle T(u+w), T(u)\rangle} + \overline{\langle T(u+w), T(w)\rangle} \\
&\underset{\text{לינאריות ברכיב הראשון}}{=} \overline{\langle T(u), T(u)\rangle} + \overline{\langle T(w), T(u)\rangle} + \overline{\langle T(u), T(w)\rangle} + \overline{\langle T(w), T(w)\rangle} \\
&\underset{\text{ו"ע של אופרטור נורמלי עם ע"ע שונים הם אורתוגונלים}}{=} \overline{\langle T(u), T(u)\rangle} + 0 + 0 + \overline{\langle T(w), T(w)\rangle} \\
&\underset{\text{הגדרת נורמה}}{=} \overline{\|T(u)\|^2} + \overline{\|T(w)\|^2} \\
&\underset{\text{ריבוע מבטל צמוד}}{=} \|T(u)\|^2 + \|T(w)\|^2 \\
&\underset{\text{הגדרת } u \text{ ו-} w}{=} \|4u\|^2 + \|3w\|^2 \\
&= 4^2\|u\|^2 + 3^2\|w\| \\
&= 16 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 16 + 9 = 25
\end{aligned}
$$

$\|Tv\|^2 = 25$ לכן $\|Tv\| = \sqrt{5} = 5$
נתבונן ב-$\|v\|^2$

$$
\begin{aligned}
&\|v\|^2 \\
&\underset{\text{הגדרת } v}{=} \|u+w\|^2 \\
&\underset{\text{הגדרת נורמה}}{=} \langle u+w, u+w\rangle \\
&\underset{\text{לינאריות ברכיב הראשון}}{=} \langle u, u+w\rangle + \langle w, u+w\rangle \\
&\underset{\text{הרמיטיות}}{=} \overline{\langle u+w, u\rangle} + \overline{\langle u+w, w\rangle} \\
&\underset{\text{לינאריות ברכיב הראשון}}{=} \overline{\langle u, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} + \overline{\langle u, w\rangle} + \overline{\langle w, w\rangle} \\
&\underset{\text{ו"ע של אופרטור נורמלי עם ע"ע שונים הם אורתוגונלים}}{=} \overline{\langle u, u\rangle} + 0 + 0 + \overline{\langle w, w\rangle} \\
&\underset{\text{הגדרת נורמה}}{=} \overline{\|u\|^2} + \overline{\|w\|^2} \\
&\underset{\text{ריבוע מבטל צמוד}}{=} \left\|u^2\right\| + \|w\|^2 \\
&= 1 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

$\|v\|^2 = 2$, לכן $\|v\| = \sqrt{2}$

מצאנו וקטור $v \in V$ המקיים $\|v\| = \sqrt{2}$ ו-$\|Tv\| = 5$

כנדרש

■

שאלה 3

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ עבורו $|a| \neq 1$

סעיף א'

הראו כי אם $T^* = aT$ אז $T = 0$

סעיף ב'

נניח כי T נורמלי, ויהי $S = T - aT^*$ הוכיחו כי $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$

פתרון 3

סעיף א'

נניח כי $T^* = aT$

יהיו $0_V \neq v \in V$, נתבונן ב-$\|Tv\|^2$

$$\begin{aligned}
&\|Tv\|^2 \\
&\underset{\text{הגדרת נורמה}}{=} \langle Tv, Tv\rangle \underset{\text{הגדרת } T^*}{=} \langle v, T^*Tv\rangle \\
&\underset{\text{נתון } T^*=aT}{=} \langle v, \alpha TTv\rangle \\
&\underset{\text{הומוגניות צמודה ברכיב השני}}{=} \overline{a}\langle v, TTv\rangle \\
&\underset{\text{הגדרת } T^*}{=} \overline{a}\langle T^*v, Tv\rangle \\
&\underset{\text{נתון } T^*=aT}{=} \overline{a}\langle aTv, Tv\rangle \\
&\underset{\text{לינאריות ברכיב הראשון}}{=} \overline{a}a\langle Tv, Tv\rangle \\
&\underset{\text{הגדרת נורמה}}{=} |a|^2 \ \|v\|^2
\end{aligned}$$

לכן

$$\|Tv\|^2 = |a|^2 \ \|v\|^2$$

נעביר אגפים

$$\|Tv\|^2(1 - |a|^2) = 0$$

נתון כי $|a| \neq 1$ ולכן $\|Tv\|^2 = 0$

משרירותיות v, זה נכון עבור **כל** $v \in V$

הוקטור היחיד שהנורמה שלו היא 0 הוא וקטור האפס, האופרטור היחיד ששולח כל וקטור לוקטור האפס הוא אופרטור האפס

לכן $T = 0$ כנדרש

■

סעיף ב'

נראה כי $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$ באמצעות הכלה דו-כיוונית

$$\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(S)$$

יהי $v \in \mathrm{Ker}(T)$, מכאן ש $Tv = 0_V$, לכן $\|Tv\| = 0$, נתון כי T אופרטור נורמלי, לכן $\|T^*v\| = \|Tv\| = 0$

הוקטור שהנורמה שלו היא 0 הוא וקטור האפס, לכן $T^*v = 0_V$
נתבונן ב-Sv

$$Sv = (T - aT^*)v = Tv - aT^*v = 0_V - a \cdot 0_V = 0_V$$

לכן $Sv = 0_V$, ומכאן $v \in \mathrm{Ker}(S)$
משרירותיות v קיבלנו כי לכל $v \in \mathrm{Ker}(T)$, $v \in \mathrm{Ker}(S)$, לכן $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(S)$

$\mathrm{Ker}(S) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$

יהי $v \in \mathrm{Ker}(S)$, מכאן ש $Sv = 0_V$, מהגדרת S זה אומר $(T - aT^*)v = 0_V$
נעביר אגפים ונקבל $Tv = aT^*v$, נוציא את הנורמה של שני האגפים ונקבל כי $\|Tv\| = \|aT^*v\|$. מאידך, נתון כי T נורמלי ולכן $\|Tv\| = \|T^*v\|$
לכן

$$\|T^*v\| = \|aT^*v\| = |a| \ \|T^*v\|$$

מכאן שמתקיים הפסוק הבא

$$|a| = 1 \vee T^*v = 0_V$$

ומכיוון שנתון $|a| \neq 1$, בהכרח מתקיים $T^*v = 0_V$ לכן $\|T^*v\| = 0$, מנור מליות T מתקבל $\|Tv\| = 0$.
לכן $Tv = 0$, כלומר $v \in \mathrm{Ker}(T)$
משרירותיות v קיבלנו כי לכל $v \in \mathrm{Ker}(S)$, $v \in \mathrm{Ker}(T)$, לכן $\mathrm{Ker}(S) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$
הראינו הכלה דו-כיוונית, ולכן שוויון
כנדרש
■

שאלה 4

סעיף א'

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הרמיטי עם $r_\sigma(T) < 1$ מיצאו $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ אוניטרי עבורו

$$T = \frac{S + S^*}{2}$$

סעיף ב'

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הוכיחו כי T ניתן לכתיבה כצירוף לינארי של ארבעה אופרטורים אוניטריים.

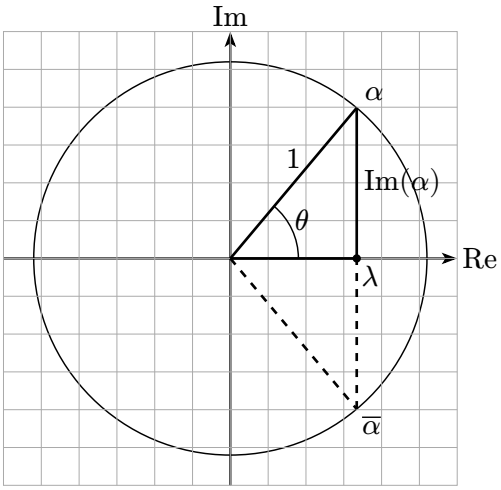
פתרון 4

השאלה הייתה מגניבה כל כך (ואני ממש גאה בתרשים שעשיתי ב-cetz), לכן נתחיל עם אינטואיציה שתעזור לנו להבין מה אנחנו רוצים לעשות.

אינטואיציה

נחפש כיוון דרך ההקבלה בין $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}$ ל-$\mathbb{C}$. (נתעלם מכך שזה לא בחומר לגיליון הזה) כפי שניתן לתאר $z \in \mathbb{C}$ בתור $a + ib$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$. נוכל לתאר $Z \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}$ בתור $A + iB$ כאשר A, B הרמיטים.

כל הע"ע של T ממשיים כי הוא נורמלי, וכולם ב-$(-1, 1)$, על מערכת הצירים המרוכבת אפשר לומר שהם כולם על אותו הקוטר של מעגל היחידה. אנחנו יודעים לבנות אופרטור אוניטרי באמצעות n ע"ע עם ערך מוחלט (מודולו? מודול? רדיוס?) 1, לכן נרצה "להעביר" את הע"ע שיש לנו למעגל היחידה



לכן $\alpha = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, ידוע לנו האורך של הניצב הקרוב ל-θ ושל היתר, לכן $\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\lambda}{1}\right) = \cos(\lambda)$, כלומר $\theta = \arccos(\lambda)$.
לכן

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \cos(\arccos(\lambda)) = \lambda$$

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \sin(\arccos(\lambda)) = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

ומכיוון ש-$|\lambda| < 1$ מתקבל מספר ממשי תקין.
באותה מידה נקבל את $\overline{\alpha}$

$$\mathrm{Re}(\overline{\alpha}) = \lambda$$

$$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}) = -\sqrt{1-\lambda^2}$$

קיבלנו את היכולת לייצג כל מספר ממשי עם רדיוס קטן מ-1 באמצעות שני מספרים מרוכבים עם רדיוס 1 בדיוק.
כעת לסעיף ב' נרצה להרחיב את זה לכל מספר מרוכב.
מספר מרוכב עשוי משני מספרים ממשיים, מכיוון שיש לנו דרך לייצג כל ממשי בטווח $(0,1)$, ולכן אפשר באמצעות כפל בסקלאר לייצג כל מספר ממשי. כך נייצג כל מספר מרוכב באמצעות צ"ל של ארבעה מספרים מרוכבים עם רדיוס 1

סעיף א'

נסמן $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n = \sigma(T)$
לפי המשפט הספקטרלי, קיים בסיס $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ (כאשר $n = \dim(V)$) כך ש

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נשים לב כי לכל $j \in [n]$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ כי T הרמיטי, ובנוסף $-1 < \lambda_j < 1$ מהנתון.
נגדיר $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ בדרך הבאה, לכל $j \in [n]$, נגדיר $\theta_j = \arccos(\lambda_j)$ ו-$\alpha_j = \cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j)$ (בסימונים של אלגברה א' $a_j = e^{i\theta_j}$).
נזכר בשתי זהויות טריגונומטריות. יהי $-1 \le a \le 1 \in \mathbb{R}$
נסמן $\gamma = \arccos(a) \in [0, \pi]$ אזי

$$\cos(\gamma) = a$$

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1-a^2}$$

כאשר הזהות הראשונה מתקבלת מהיות arccos הפונקציה ההופכית של cos
את הזהות השנייה נקבל כך:
לפי זהות פיתגורס $\sin(\gamma)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$
מהזהות הראשונה שהראינו $\cos(\gamma) = a$, לכן $\sin(\gamma)^2 + a^2 = 1$, נעביר אגפים ונקבל $\sin(\gamma)^2 = 1 - a^2$
נוציא שורש לשני צדדי המשוואה ונקבל $\sin(\gamma) = \sqrt{1-a^2}$, מכיוון ש $|a| < 1$, $1 - a^2 > 0$ והשורש קיים.
לפי הזהויות הללו, נוכל למצוא את α_j

$$\alpha_j = \cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j) = \lambda_j + i\sqrt{1-\lambda_j^2}$$

נגדיר את המטריצה האלכסונית הבאה

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

A אלכסונית ולכן סימטרית, לכן

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & & \\ & \overline{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

נשים לב כי A אוניטרית, זאת מכיוון ש

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\alpha_1 & & & \\ & \overline{\alpha_2}\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\alpha_n}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & & & \\ & |\alpha_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$|\alpha_j|^2 = \lambda_j^2 + \sqrt{1-\lambda_j^2}^2 = \lambda_j^2 + 1 - \lambda_j^2 = 1$$

לכן

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

מכאן ש$A^* = A^{-1}$, כלומר A אוניטרית.
נתבונן במטריצה $\frac{1}{2} \cdot (A + A^*)$

$$\frac{1}{2} \cdot (A + A^*) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} + \alpha_1 & & & \\ & \overline{\alpha_2} + \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\alpha_n} + \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \sqrt{1-\lambda_1^2} + \lambda_1 - \sqrt{1-\lambda_1^2} & & & \\ & \lambda_2 + \sqrt{1-\lambda_2^2} + \lambda_2 - \sqrt{1-\lambda_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n + \sqrt{1-\lambda_n^2} + \lambda_n - \sqrt{1-\lambda_n^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & & & \\ & 2\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}}$$

נגדיר את האופרטור S על פי הדרך שבה הוא פועל על איברי הבסיס $\mathcal{B}$.

$$S : V \to V$$

$$b \in \mathcal{B} \mapsto \left(\lambda_j + i\sqrt{1-\lambda_j^2}\right) b$$

נשים לב שלכל $j \in [n]$, b_j הוא ו"ע של S עם ע"ע $\lambda_j + \sqrt{1-\lambda_j^2} = \alpha_j$, לכן המטריצה המייצגת של S ביחס לבסיס $\mathcal{B}$ היא A, לכן $[S^*]_{\mathcal{B}} = ([S]_{\mathcal{B}})^* = A^*$, ובנוסף S אוניטרית (כי מריצה מייצגת שלה היא אוניטרית).
קיבלנו כי

$$\left[\frac{S+S^*}{2}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{[S]_{\mathcal{B}} + [S^*]_{\mathcal{B}}}{2} = [T]_{\mathcal{B}}$$

לכן $\frac{S+S^*}{2} = T$

סעיף ב'

נגדיר שני אופרטורים

$$A = \frac{T+T^*}{2}$$
$$B = \frac{T-T^*}{2i}$$

נשים לב ש $A+iB = T$

$$A+iB = \frac{T+\cancel{T^*}}{2} + \cancel{i}\frac{T-\cancel{T^*}}{2\cancel{i}} = \frac{2T}{2} = T$$

ובנוסף A, B הרמיטיות

$$A^* = \left(\frac{T+T^*}{2}\right)^* = \frac{(T+T^*)^*}{\overline{2}} = \frac{T^*+T}{2} = \frac{T+T^*}{2} = A$$
$$B^* = \left(\frac{T-T^*}{2i}\right)^* = \frac{(T-T^*)^*}{-2} = \frac{T^*-T}{-2} = \frac{T-T^*}{2} = B$$

כעת נגדיר שני אופרטורים חדשים

$$\tilde{A} = \left(\frac{1}{r_\sigma(A)+1}\right)A$$
$$\tilde{B} = \left(\frac{1}{r_\sigma(B)+1}\right)B$$

מכיוון ש-$\tilde{A}, \tilde{B}$ הם פשוט כפל בסקלאר של A, B, הע"ע שלהם זהים לשל A, B, אבל מוכפלים גם הם ע"י אותו סקלאר. לכן $r_\sigma\left(\tilde{A}\right) = \frac{r_\sigma(A)}{r_\sigma(A)+1} < 1$, ומאותה סיבה גם $r_\sigma\left(\tilde{B}\right) < 1$. מסעיף א', אנחנו יודעים כי אפשר לכתוב כל אופרטור הרמיטי בתור צ"ל של שני אופרטורים אוניטרים.

כך נוכל לכתוב את A בתור צ"ל של שני אופרטורים אוניטרים שיביאו לנו את $\tilde{A}$ ואז להכפיל ב $r_\sigma(A)+1$ ולקבל את A (אין כאן בעיית הגדרה מעגלית שכן $r_\sigma(A)$ הוא פשוט סקלאר), ובאותה מידה ניתן לכתוב את B.

כפי שהראינו בתחילת הסעיף, כל אופרטור יכול להיכתב כצ"ל של שני אופרטורים הרמיטים.

בכך הראינו שכל אופרטור יכול להיכתב כצ"ל של ארבעה אופרטורים אוניטריים כנדרש

■

שאלה 5

שיקוף ב-$\mathbb{R}^n$ הוא אופרטור T כך שקיים $v \in V$ עבורו $T(v) = -v$ וגם $T(w) = w$ לכל $w \in \mathrm{Span}(v)^\perp$. נסמנו R_v ונסמן גם $R := R_{e_1}$

סעיף א'

תהי $\theta \in \mathbb{R}$, תהי

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ויהי $\rho_\theta := T_{A_\theta}$ אופרטור הכפל משמאל ב-A_θ.
מיצאו $v \in V$ עבורו $\rho_\theta = R_v \circ R$ והסיקו כי כל אופרטור אורתוגונלי על $\mathbb{R}^2$ הוא הרכבה של לכל היותר שני שיקופים.

סעיף ב'

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ אורתוגונלי. הראו שקיים בסיס $\mathcal{B}$ של $\mathbb{R}^3$, שקיימת $\lambda \in \{\pm 1\}$ ושקיימת $O \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ אורתוגונלית עבורם מתקיים

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & O \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

הוכיחו כי כל אופרטור אורתוגונלי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ הוא הרכבה של לכל היותר 3 שיקופים.

פתרון 5

סעיף א'

נשים לב שמהגדרת R,

$$R(e_1) = -e_1$$
$$R(e_2) = e_2$$

לכן

$$[R]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחפש $v \in V$ כך ש

$$R_v R = \rho_\theta$$

כלומר

$$[R_v]_{\mathcal{E}} [R]_{\mathcal{E}} = A_\theta$$

ממה שמצאנו זה אומר ש

$$[R_v]_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_\theta$$

כעת, נשים לב לכך ש

$$R(R(e_1)) = e_1$$
$$R(R(e_2)) = e_2$$

כלומר $RR = I$, משמע $R = R^{-1}$, מכיוון ש-$[R]_{\mathcal{E}}$ סימטרית, זה בעצם אומר ש-R אורתוגונלית.

נחזור למשוואה שלנו ונכפיל את שני הצדדים **מימין** ב-R

$$[R_v]_{\mathcal{E}}[R]_{\mathcal{E}}[R]_{\mathcal{E}} = A_\theta[R]_{\mathcal{E}}$$

לכן

$$[R_v]_{\mathcal{E}} = A_\theta[R]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

נסמן $v = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$[R_v]_{\mathcal{E}}v = \begin{pmatrix}-\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}v = \begin{pmatrix}-\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y\end{pmatrix}$$

מהגדרת שיקוף, $R_v v = -v$, לכן

$$\begin{pmatrix}-\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}$$

נסדר זאת כמערכת משוואות לינארית

$$-\cos(\theta)x - \sin(\theta)y = -x$$
$$-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = -y$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב--1 ונעביר אגפים

$$\sin(\theta)y = x(1-\cos(\theta))$$

נזכר בזהויות הטריגונומטריות הבאות

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin(\alpha)^2$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

נציב אותן במשוואה (כאשר $\theta = 2\alpha$)

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = x\left(1 - \left(1 - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)\right)$$

נפשט

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 x$$

נעביר אגפים

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x\right) = 0$$

אם כך או ש-$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, כלומר קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $\theta = 2\pi$, ובמקרה הזה

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

לכן $\rho_\theta = Id_V$, מכאן ש $R_v \circ R = Id_V$

כלומר $R_v = R^{-1} = R$ ואז $v = e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

האפשרות השנייה היא ש $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x$

לכן

$$x = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ולכן

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}}$$

ראינו בתרגול כי יש שני סוגים של איזומטריות מעל $\mathbb{R}^2$, סיבובים והרכבה של סיבובים והשיקוף R. בתרגיל זה הראינו כי כל סיבוב הוא עצמו הרכבה של שיקוף על וקטור כלשהו והשיקוף R, לכן עבור סיבובים ניתן לייצגם בתור הרכבה כפי שהראינו, ועבור הרכבה של סיבוב עם R, אפשר לכתוב בתור הרכבה של שיקוף R_v כלשהו עם R^2.
כנדרש
■

סעיף ב'

T אופרטור מעל $\mathbb{R}^3$, לכן $\deg(p_T) = 3$, לכל פולינום ממעלה 3 אי-זוגית יש לפחות שורש אחד, לכן יש ל-T לפחות ערך עצמי אחד..
מכיוון ש-T אורתוגונלי, כל הערכים העצמיים שלו הם בעלי ערך מוחלט 1. לכן קיים $\lambda \in \{\pm 1\}$ ע"ע של T, לכן קיים $0_{\mathbb{R}^3} \neq v_1 \in \mathbb{R}^3$ ו"ע נורמלי של T עם ע"ע λ. ניקח את v_1 ונשלים אותו לבסיס אורתונורמלי $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, נתבונן ב-$[T]_{\mathcal{B}}$.
v_1 הוא ו"ע של T, ולכן העמודה הראשונה של $[T]_{\mathcal{V}}$ תהיה $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{V}$ בסיס אורתונורמלי, לכן עבור $i \in \{2,3\}$, $\langle v_i, v_1 \rangle = 0$
מכיוון ש-T אופרטור אורתוגונלי, הוא שומר על מכפלה פנימית.
לכן $\langle T(v_i), T(v_1) \rangle$, v_1 ו"ע של T עם ע"ע λ, לכן $T(v_1) = \lambda v_1$
$$0 = \langle T(v_i), T(v_1) \rangle = \langle T(v_i), \lambda v_i \rangle = \lambda \langle T(v_i), v_1 \rangle$$
מכיוון ש $\lambda \in \{\pm 1\}$, $\lambda \neq 0$ וניתן לחלק בו, לכן $\langle T(v_i), v_1 \rangle = 0$, מכאן שהגורם של v_1 ב-$T(v_i)$ הוא 0, לכן שאר השורה הראשונה היא 0.
מכאן ש

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & O \end{pmatrix}$$

נראה כי O אורתוגונלית.
T אופרטור אורתוגונלי ו-$\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי, לכן $[T]_{(\mathcal{B}}$ היא מטריצה אורתוגונלית.
מכאן ש$[T]_{\mathcal{B}}[T]^t_{\mathcal{B}} = I$

$$[T]_{\mathcal{B}}[T]^t_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & OO^t \end{pmatrix}$$

בין אם $\lambda = 1$ או $\lambda = -1$, $\lambda^2 = 1$. מכך ש-$OO^t = I_2$ מתקבל כי $O^{-1} = O^t$, כלומר O מטריצה אורתוגונלית. כנדרש

■

סעיף ג'

יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ אורתוגונלי, בסעיף ב' הראינו כי קיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & O \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda \in \{\pm 1\}$ ו-$O \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ אורתוגונלית. מכפל מטריצות בלוקים, ניתן לייצג את $[T]_{\mathcal{B}}$ ככפל שתי מטריצות

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & O \end{pmatrix}$$

נסמן

$$\left[\tilde{T}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & I_2 \end{pmatrix}$$

$$\left[T'\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & O \end{pmatrix}$$

$\tilde{T}$ הוא שיקוף על הוקטור v_1, וש-T' הוא שיקוף הרכבה של שיקוף על הוקטור v_2 ושיקוף על הוקטור v_3, לכן T שהוא הרכבה של $\tilde{T}$ ו-T' הוא בעצם הרכבה של שלושה שיקופים.

כנדרש.

■