אלגברה ב' - 01040168
גליון 3

יונתן אבידור - 214269565

19 במאי 2026

שאלה 1

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהי

$$\begin{aligned} D : V &\to V \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

העתקת הנגזרת. תהי $T := Id_V + D$

סעיף א'

הראו כי T הפיכה

סעיף ב'

מיצאו באמצעות כלל קרמר פולינום $p(x)$ עבורו $T(p) = x^3$

פתרון 1

סעיף א'

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס הסטנדרטי

$$\mathcal{E} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

$$T\left(e_1\right) = D\left(1\right) + Id_V\left(1\right) = 1 \implies \left[T\left(e_1\right)\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(e_2\right) = D\left(x\right) + Id_V\left(x\right) = 1 + x \implies \left[T\left(e_2\right)\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(e_3\right) = D\left(x^2\right) + Id_V\left(x^2\right) = 2x + x^2 \implies \left[T\left(e_3\right)\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(e_4\right) = D\left(x^3\right) + Id_V\left(x^3\right) = 3x^2 + x^3 \implies \left[T\left(e_4\right)\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left[T\right]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שמדובר במטריצה משולשית עליונה, לכן הדטרמיננטה שלה שווה לכפל איברי האלכסון

$$\det\left(\left[T\right]_{\mathcal{E}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

הדטרמיננטה שונה מאפס, לכן המטריצה הפיכה. אם מטריצה מייצגת כלשהי של העתקה היא הפיכה אזי ההעתקה היא הפיכה ולכן T הפיכה
■

סעיף ב'

ראשית, למען נוחות הכתיבה והקריאה נגדיר $A := [T]_{\mathcal{E}}$
נחפש פולינום $p(x)$ כך ש

$$A \cdot [p]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אנחנו יודעים כי קיים פולינום יחיד שכזה כי A הפיכה וכי $\mathbb{R}_3[x]$ איזומורפי ל-$\mathbb{R}^4$
נסמן $v := [p]_{\mathcal{E}}$, על פי כלל קרמר אנחנו יכולים לחשב את הכניסות של v

$$\forall i \in [4] : v_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר A_i היא המטריצה המתקבלת על-ידי החלפת העמודה ה-i ב- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את $\det(A_1)$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1, C_4 \to C_4 - C_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

נשים לב שהתמורה היחידה שלא מתאפסת בסיטואציה הזו היא

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את הסימן שלה

$$(4;1) \circ (3;1) \circ (2;1) \circ \sigma = I_4 \implies \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

לכן

$$\det(A_1) = -1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = -6$$

ומכאן נובע כי

$$v_1 = \frac{-6}{1} = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את $\det(A_2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2, C_4 \to C_4 - C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

נשים לב שהתמורה היחידה שלא מתאפסת בסיטואציה הזו היא

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הסימן שלה

$$(4;2) \circ (3;2) \circ \sigma = I_4 \implies \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

לכן

$$\det(A_2) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

ומכאן נובע כי

$$v_2 = \frac{6}{1} = 6$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את $\det(A_3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2, C_4 \to C_4 - C_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

נשים לב שהתמורה היחידה שלא מתאפסת בסיטואציה הזו היא

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

נחשב את הסימן שלה

$$(4;3) \circ \sigma = I_4 \implies \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

$$\det(A_3) = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

ומכאן נובע כי

$$v_3 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שמדובר במטריצה משולשית עליונה ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון

$$\det\left(A_4\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

ומכאן נובע כי

$$v_4 = \frac{1}{1} = 1$$

לכן

$$v = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נצא מקואודרינטות ונקבל

$$p\left(x\right) = -6 + 6x - 3x^2 + x^3$$

בדיקת שפיות אחרונה, נבדוק שאכן $T\left(p\right) = x^3$

$$T\left(p\right) = p'\left(x\right) + p\left(x\right) = 6 - 6x + 3x^2 - 6 + 6x - 3x^2 + x^3 = x^3$$

שאלה 2

תהי $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ הפיכה.

סעיף א'

הוכיחו כי

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} A$$

סעיף ב'

הוכיחו כי

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$$

סעיף ג'

נניח גם כי A דומה למטריצה אלכסונית $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $(D)_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_i$ כאשר

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

מיצאו מטריצה אלכסונית D^{adj} הדומה ל-$\operatorname{adj}(A)$ והוכיחו כי הן דומות.

פתרון 2

סעיף א'

נזכר כי $\operatorname{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(\operatorname{adj}(A)) (\operatorname{adj}(A))^{-1}$$

נשתמש שוב במשפט הזה ונקבל

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A) A^{-1}$$