

Quantenmechanik 1 bei Prof. Brüggmann

Felix Wiesner, Wilhelm Eschen und Katharina Wölfl

16. April 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Quantenmechanik	2
1.1	Klassische Mechanik	2
1.1.1	Kinematik	2
1.1.2	Dynamik (Zeitentwicklung, Vorhersagen)	2
1.1.3	Weltbild der klassischen Physik vor ca. 1900	3
1.2	Physik als Würfel	3
1.3	Unvollständigkeit der KM und Elektrodynamik	3
1.4	Welle-Teilchen-Dualität	4
1.5	Postulate der QM	5
1.5.1	Bedeutung von Ψ	5
1.5.2	Messung	5
1.5.3	Schrödingergleichung	5
1.5.4	Quantisierungsregeln	6
1.6	Freie Teilchen, Wellenpakete	6

Kapitel 1

Grundlagen der Quantenmechanik

1.1 Klassische Mechanik

1.1.1 Kinematik

- System. z.B Planet, geladenes Teilchen, elektromagn. Feld
- Observable $\hat{=}$ Messgrößen, z.B.:

$$\vec{x}, \vec{v}, \vec{p}, E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$
$$\vec{B}, \vec{E}, E = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$
$$\vec{P} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\vec{E} \times \vec{B})$$

- Zustand: vollständige Information zu einem Zeitpunkt t des Systems, z.B.:

$$(\vec{x}_i, \vec{p}_i), i=1, \dots, N \quad (N \text{ Teilchen, Massen } m)$$
$$(\vec{E}, \vec{B})$$

- $\{Observable\} \rightarrow \{reelleZahl\}$
- alle Funktionen von Observablen sind Observable

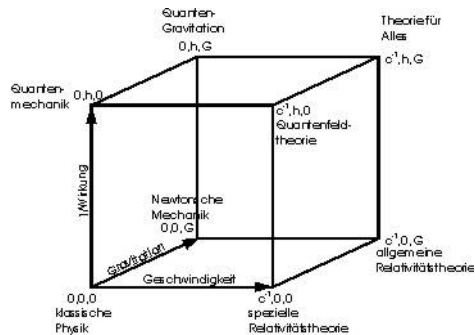
1.1.2 Dynamik(Zeitentwicklung, Vorhersagen)

- spezifische Wechselwirkungen \leadsto Kräfte, Potentiale, Lagrange, Hamilton, Bewegungsgleichungen $\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$
- Vorhersagen(deterministisch): gegeben (\vec{x}, \vec{p}) für t=0 kann $(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ berechnet werden
- vollständig (!)

1.1.3 Weltbild der klassischen Physik vor ca. 1900

- insgesamt ausreichend für experimentelle Befunde
- Materie (Newton etc.) \neq Strahlung (Elektromagnetismus)
- Verknüpfung über Lorentzkraft

1.2 Physik als Würfel



1.3 Unvollständigkeit der KM und Elektrodynamik

Beispiele:

1. Stabilität der Materie: $T_{stabil} \gg 1$ Tag

- $E(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$
- $E(\vec{x}, 0) = -\frac{e^2}{r}$ unbeschränkt nach unten
- instabil bei Störungen, Strahlung (!)

$$\Rightarrow T_{stabil} \ll 10^{-30} s$$

2. kontinuierliches Spektrum vorhergesagt, diskretes beobachtet

3. Lichtquanten

- Planck 1900: Hohlraumstrahlung, E-M-Welle $E = n \cdot (h \cdot \nu)$, $h = 6,7 \cdot 10^{-34} Js$
- Einstein 1903: Photoeffekt: Korpuskulartheorie
- Einstein-de-Broglie: $E = h\nu = \hbar\omega$, $p = \hbar\vec{k}$, $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$, $p = \frac{h}{\lambda}$

- zum Photoeffekt:
Energie der Strahlung $E_{Licht} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ erwartet klassisch
 $E_{Licht} \propto E_{Elektron}$, Überraschung: $E_{Elektron} \propto \nu_{Licht}$
- 1905: Strahlung als Teilchen, Photon erklärt
- 1924: Compton-Effekt

4. Materiewellen

- de Broglie: $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$
- 1923 für materielle Teilchen
- 1927 Elektronenbeugungsversuch (Nobelpreis 1937)
- Beispiel: Staubkorn
 $d = 1\mu m, m = 10^{-15} kg, v = 1 \frac{mm}{s}$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot v} = 10^{-15} m$

1.4 Welle-Teilchen-Dualität

Doppelspaltversuch in verschiedenen Ausführungen:

- Klassisch:
 - Die E-Felder addieren sich: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
 - Es kommt zu einem Interferenzmuster
 - Nur ein Spalt führt zu keinem Interferenzmuster
 - Mit e^- als Quelle:
 - Einfachspalt führt zu keinem Interferenzmuster
 - Klassische Erwartung für Teilchen: $P = P_1 + P_2$, Addition der Wahrscheinlichkeiten
 - Experiment: $P \neq P_1 + P_2$
 - Verdünnte Strahl \rightarrow einzelne Lichtquanten, räumlich getrennt
 - Klassische Erwartung für Welle: Interferenz mit $I \rightarrow 0$ (Falsch)
 - Resultat: Photon interferiert mit sich selbst
 - Ortsvermessung durch Blockieren eines Spalts oder Detektor am Spalt.
 - Ortsmessung \rightarrow keine Interferenz (Impulsmessung)
 - Interferenzmessung \rightarrow keine Ortsmessung am Spalt
- \Rightarrow Welle-Teilchen-Dualität, Auflösung in der QM mit Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$ und Wahrscheinlichkeit $|\psi|^2$

- Zusammenfassung:
 - Zustand - Wahrscheinlichkeitsamplitude
 $P = |A|^2$ $P_1 = |A_1|^2$ $P_2 = |A_2|^2$
 $P = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$
 - Nicht alle Variablen haben exakte Werte in einem Zustand: Zufall!
 Keine klassische statistische Verteilung.
 - klassisch: \vec{E} beliebig, QM: $E = nh\nu$
 - Blockieren eines Spalts entspricht Ortsmessung
 - Messung eines Interferenzmusters entspricht der Bestimmung von Impuls/Wellenlängen

1.5 Postulate der QM

1.5.1 Bedeutung von Ψ

- $\Psi(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Wahrscheinlichkeitsamplitude $dP(\vec{r}, t) = C * |\Psi|^2 d^3r$. Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen zum Zeitpunkt t in d^3r um Punkt \vec{r} zu finden ist.
- Bem:
 - C=Normierung
 - $\int dP(\vec{r}, t) = 1$, Irgendwo befindet sich das Teilchen
 $\implies \int |\Psi|^2 d^3r = \frac{1}{C}$
 - Schrödingergleichung: $\frac{dC}{dt} = 0$

1.5.2 Messung

- Ergebnisse nach Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Kollaps der Wellenfunktion(Punktaufschlag)
- Messwerte: Eigenwerte von Operatoren auf dem Raum der W.fkt.

1.5.3 Schrödingergleichung

- $i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$
- ohne Hamiltonoperator $i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$

1.5.4 Quantisierungsregeln

- KM: x Koordinate $\mapsto \hat{X}$ Operator
- $\{, \}$ $\mapsto [,]$
- Hamiltonsche Form der KM \mapsto Schrödinger Gleichung
- Bemerkung:
 - Was ist real?

$$\vec{r}(t) : 3 \text{ Zahlen} \mapsto \Psi(\vec{r}, t) : \infty \text{ viele Zahlen}$$

- γ : erzeugt und vernichtet \Leftrightarrow Elektronen, Teilchen: bleiben erhalten

1.6 Freie Teilchen, Wellenpakete

- potentielle Energie $V(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow$ kräftefrei
- Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t)$$

- Lösungsansatz: ebene Welle

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= A \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= -i\omega A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -i\omega \Psi \\ \Delta \Psi(\vec{r}, t) &= -A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \cdot k^2 = -\Psi \cdot k^2 \\ \Rightarrow \hbar\omega \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Einstein-de Broglie-Bedingung:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{mit } \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

- $\omega(k)$ **Dispersionsrelation**
- ebene Welle nur Lösung, wenn Dispersionsrelation erfüllt ist
- Umkehrung:

$$0. \text{ Einstein-de Broglie: } E = \hbar\omega, \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

1. klassisch: Energie des Teilchens: $E = \frac{p^2}{2m}$
 $\Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$
2. ebene Wellen sollen Lösungen sein: Materiewelle $\Psi = Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$
3. lineare PDE soll gelten:
 - Wellengleichung: $\square\Psi = 0$?
 - wegen $\omega \sim k^2 \rightsquigarrow \partial_t\Psi \sim \Delta\Psi \quad \nrightarrow$ z.B. Schrödinger-Gleichung

• Bemerkung:

- $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |A|^2$ konstante Wahrscheinlichkeit:

$$\int |\Psi|^2 d^3r \rightarrow \infty \quad \nexists$$

- unphysikalisch (wie in Optik!), nicht integrierbar
- Lösung: Wellenpakete: Linearkombination ebener Wellen

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} d^3k$$

- jede quadratintegrierbare Wellenfunktion kann so geschrieben werden (Bedingung an $g(\vec{k})$)
- im eindimensionalen:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

- Anfangswerte:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

- Form des Wellenpakets
- Spezialfall: $k_0, k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{ik_0x} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 - \frac{\Delta k}{2})x} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 + \frac{\Delta k}{2})x} \right) \\ &= \frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0x} \left(1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x\right) \right) \end{aligned}$$

✓ Paket, aber periodisch

- "Unschärfe": $\Psi(x) = 0$ für $x = \pm \frac{\Delta x}{2}$ für Phasenunterschied $\pm\pi$
 $\leadsto \boxed{\Delta x \cdot \Delta k = 4\pi}$
- später(allgemein):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{Heisenberg})$$

$$\text{statt: } \Delta x \cdot \Delta p = 4\pi\hbar \quad (p = \hbar k)$$

- kohärente Welle:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\pi}{2}$$

- Zeitliche Entwicklung (freies Wellenpaket):
 - Phasengeschwindigkeit $e^{i(kx-\omega t)}$: $v_\phi(k) = \frac{\omega}{k}$
 - dispersives Medium: $v_\phi(k) = \frac{c}{n(k)}$ (vgl. Optik)
 - Teilchenwelle: $v_\phi = \frac{\hbar k}{2m}$ wegen $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$
 - Gruppengeschwindigkeit: physikalisch!
 (Signal, Energieausbreitung,...)
 - * Beispiel: 3 Wellen

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(k_0 x - \omega t)} + \frac{1}{2} e^{i((k_0 - \frac{\Delta k}{2})x - (\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2})t)} + \frac{1}{2} e^{i((\dots)x + (\dots)t)} \right) \\ &= \frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{\underbrace{i(k_0 x - \omega_0 t)}_{\text{Phase}}} \underbrace{\left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \right]}_{\text{Gruppe}} \end{aligned}$$

- * Maximum:

$$\boxed{x_m(t) = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} t}$$

- allgemein: Gruppengeschwindigkeit ist Geschwindigkeit des Maximums des Wellenpakets

$$\boxed{v_G(k_0) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}}$$

- Teilchenwelle:

$$\boxed{v_G(k_0) = \frac{\hbar k_0}{m} = 2v_\phi(k_0)}$$