Задача 1. Модифицирайте алгоритъм НАУЧИ-ЕДНО-ПРАВИЛО от Таблица 5.2 в Лекция 5 по такъв начин, че той да може да научава правила, чиито предусловия включват ограничения (прагове) върху непрекъснати атрибути (например, Температура >30). Напишете вашия алгоритъм като множество от добавки (промени) към алгоритъма от Таблица 5.2.

I. Разширение на дефиницията за „ограничение“

Добавка в стъпка 3 (инициализация):

Всички_ограничения =

- всички ограничения от вида $a=v$ за категориални атрибути
- всички прагови ограничения $a \le t$ и $a>t$ за непрекъснати атрибути, където $t$ t обхожда стойностите на атрибута в Примери.

II. Добавка при генериране на специализации

Добавка 2 (нова специализация за непрекъснат атрибут)

При създаване на специализация чрез добавяне на ограничение c, ако c е прагово ограничение:

- ако $c=(a \le t)$, новата хипотеза е $h \wedge (a \le t)$
- ако $c=(a>t)$, новата хипотеза е $h \wedge (a>t)$

III. Добавка към проверката за съвместимост и максимална специфичност

При сравнение на две хипотези включващи прагове добавяме следните правила

- $a \le t1$ е по-специфично от $a \le t2$ , ако $t1<t2$
- $a>t1$ е по-специфично от $a>t2$, ако $t1 >t2$
- Хипотези, съдържащи противоречащи ограничения се премахват като несъвместими

IV. Добавка към изчисляването на ПОВЕДЕНИЕ (entropy)

Добавка 4 (за проверка на покриване):

При оценка дали един пример е покрит от h:

- ако ограничението е a>t: приемаме примера ако a(x)>t
- ако ограничението е a≤t: приемаме ако a(x)≤t

V. Добавка при статистическата значимост

Добавка 5:

За хипотези съдържащи прагове се прилага същият критерий, но статистическата оценка се основава на разделянето на примери според праг.

Задача 2. Нека има два персептрона (А и В), чиято повърхността на решение се определя с формулата w0 + w1x1 + w2 x2 > 0. Персептрон А има следните стойностите на теглата: w0 = 1, w1 = 2, w2 = 1 Персептрон В има следните стойностите на теглата: w0 = 0, w1 = 2, w2 = 1 Какво е отношение между двата персептрона в термините на отношение по-общ-от? (виж Лекция 1)

## Персептрон A:

- $w_0 = 1$
- $w_1 = 2$
- $w_2 = 1$

Условие за положителна класификация:

$$1 + 2x_1 + x_2 > 0$$

## Персептрон B:

- $w_0 = 0$
- $w_1 = 2$
- $w_2 = 1$

Условие:

$$2x_1 + x_2 > 0$$

Всеки пример, който $h_1$класифицира като положителен, **се класифицира като положителен и от** $h_2$.

# Сравнение на персептрон A и B

## Условията са:

Персептрон A:

$$1 + 2x_1 + x_2 > 0(1)$$

Персептрон B:

$$2x_1 + x_2 > 0(2)$$

## Нека видим зависимостта между тях.

Ако условие 1 е изпълнено:

$$1 + 2x_1 + x_2 > 0$$

То със сигурност:

$$2x_1 + x_2 > -1$$

Но това **не гарантира**:

$$2x_1 + x_2 > 0$$

## Пример, който е положителен за A, но отрицателен за B:

Избираме:

$$2x_1 + x_2 = -0.5$$

Тогава:

За A:

$$1 + (-0.5) = 0.5 > 0 \Rightarrow \text{положителен за A}$$

За B:

$$-0.5 \not> 0 \Rightarrow \text{отрицателен за B}$$

Следователно:

$$h_A(x) = 1,\ h_B(x) = 0$$

Т.е. **A НЕ е подмножество на B**.

## Обратно:

Ако B класифицира пример като положителен:

$$2x_1 + x_2 > 0$$

Тогава:

$$1 + 2x_1 + x_2 > 1 > 0$$

=> **всеки положителен пример за B е положителен и за A**.

Тоест:

$$h_B(x) = 1 \Rightarrow h_A(x) = 1$$

## Положителната област на B е подмножество на тази на A.

$$Positive(B) \subset Positive(A)$$

=> Персептрон **A** класифицира **повече примери** като положителни.

=> A е **по-общ-от** B.

Задача 3. а) Конструирайте персептрон с два входа, който имплементира булевата функция A ∧ ¬B (напомням, че булевите стойности се кодират като 1 (истина) и -1 (лъжа)).

а)

Търсим персептрон:

$$\text{sign}(w_0 + w_1 A + w_2 B)$$

такъв, че да дава 1 само когато $A = 1, B = -1$и -1 в останалите случаи.

Един коректен избор на тегла е:

$$w_0 = -0.8, w_1 = 0.5, w_2 = -0.5$$

| **A** | **B** | **сума (s = w_0 + w_1A + w_2B)** | **изход** | **(A \land \neg B)** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | (-0.8 + 0.5 - 0.5 = -0.8) | -1 | 0 (лъжа) |
| 1 | -1 | (-0.8 + 0.5 + 0.5 = 0.2) | **1** | 1 (истина) |
| -1 | 1 | (-0.8 - 0.5 - 0.5 = -1.8) | -1 | 0 |
| -1 | -1 | (-0.8 - 0.5 + 0.5 = -0.8) | -1 | 0 |

б)

## Двуслойна мрежа за $A$ XOR $B$

Подсказката е:

$$A \text{ XOR } B = (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$$

Ще направим **2-слойна мрежа**:

- **Скрити персептрони (първи слой):**
  - $h_1$изчислява $A \land \neg B$
  - $h_2$изчислява $\neg A \land B$
- **Изходен персептрон (втори слой):**
  - прави OR на $h_1$и $h_2$

## 1. Персептрон за AND (от примера)

За AND на два входа $x_1, x_2 \in \{-1,1\}$имаме (от условието):

- $w_0 = -0.8$
- $w_1 = 0.5$
- $w_2 = 0.5$

Това дава 1 само за (1,1).

## 2. Персептрон за $A \land \neg B$

Искаме да е 1 само за $A = 1, B = -1$.
Можем да вземем AND и просто да обърнем знака на теглото към B:

- $w_0^{(h1)} = -0.8$
- $w_1^{(h1)} = 0.5$(за A)
- $w_2^{(h1)} = -0.5$(за B – за да стане $\neg B$)

Проверка (накратко):

- (1, -1): $-0.8 + 0.5 \cdot 1 - 0.5 \cdot (-1) = 0.2 > 0 \Rightarrow 1$
- останалите три комбинации дават <0 → -1.

## 3. Персептрон за $\neg A \land B$

Аналогично, обръщаме теглото към A:

- $w_0^{(h2)} = -0.8$
- $w_1^{(h2)} = -0.5$(за A – за $\neg A$)
- $w_2^{(h2)} = 0.5$(за B)

Този персептрон е 1 само при $A = -1, B = 1$.

## 4. Изходен персептрон – OR на $h_1, h_2$

От примера за OR:

- $w_0^{(out)} = 0.3$
- $w_1^{(out)} = 0.5$
- $w_2^{(out)} = 0.5$

Сега входовете към този персептрон са $h_1, h_2 \in \{-1,1\}$

| A | B | (h1=A AND !B) | (h2=!A AND B) | OR(h1,h2) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

Задача 4. Изведете правилото за обучение чрез градиентното спускане на един линеен възел, чийто изход о се задава от формулата:

$$o = w_0 + w_1 x_1 + w_1 x_1^2 + \ldots + w_n x_n + w_n x_n^2$$

## 1. Функция на грешката

За един обучаващ пример $(\mathbf{x}, t)$(където $t$е целевият изход) използваме квадратичната грешка:

$$E = \frac{1}{2}(t - o)^2$$

## 2. Градиенти по теглата

Общо правило за градиентно спускане:

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial E}{\partial w}$$

където $\eta$е скоростта на обучение

### За $w_0$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_0} = (o - t)\frac{\partial o}{\partial w_0} = (o - t) \cdot 1$$
$$\Rightarrow \Delta w_0 = -\eta(o - t) = \eta(t - o)$$

### За линейните тегла $w_i$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = (o - t)\frac{\partial o}{\partial w_i} = (o - t)\, x_i$$

$$\Rightarrow \Delta w_i = -\eta(o-t)x_i = \eta(t-o)x_i$$

За квадратичните тегла $w_i'$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_i'} = (o-t)\frac{\partial o}{\partial w_i'} = (o-t)\,x_i^2$$
$$\Rightarrow \Delta w_i' = -\eta(o-t)x_i^2 = \eta(t-o)x_i^2$$

1) Обновяване на $w_0$

$$w_0 \leftarrow w_0 + \eta(t-o)$$

2) Обновяване на линейните тегла $w_i$

$$w_i \leftarrow w_i + \eta(t-o)\,x_i$$

3) Обновяване на квадратичните тегла $w_i'$

$$w_i' \leftarrow w_i' + \eta(t-o)\,x_i^2$$