微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 5

1. 次のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の単位円周 $C : \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, に沿った渦巻き量と湧き出し量を求めよ.
   (a) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_r$
   (b) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_\theta$
2. ５章 (14)–(16) を示せ.
3. ５章 (33)–(35) を示せ.
4. [2, 問題 6.16]　次の各ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ について，回転 $\mathrm{rot} V(x, y)$ と発散 $\mathrm{div} V(x, y)$ を求めよ.
   (a) $\boldsymbol{V} = (1, 0)$
   (b) $\boldsymbol{V} = (1, 1)$
   (c) $\boldsymbol{V} = (y, 0)$
   (d) $\boldsymbol{V} = (0, x)$
   (e) $\boldsymbol{V} = (x, 0)$
   (f) $\boldsymbol{V} = (0, -y)$
   (g) $\boldsymbol{V} = (x, y)$
   (h) $\boldsymbol{V} = (x, -y)$
   (i) $\boldsymbol{V} = (-y, x)$
   (j) $\boldsymbol{V} = (y, x)$
5. [2, 問題 6.24, 6.28] ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が極座標表示で $\boldsymbol{V}(r, \theta) = P(r, \theta)\boldsymbol{e}_r + Q(r, \theta)\boldsymbol{e}_\theta$ と表されているとき，
   (a) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}(r, \theta)$ を計算せよ.
   (b) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}(r, \theta)$ を計算せよ.

演習問題５　解答

1. (a) 渦巻き量は 0，湧き出し量は 2π

   (b) 渦巻き量は 2π，湧き出し量は 0

2.

$$\int_{C_2} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x+\frac{h}{2}, y+s), Q(x+\frac{h}{2}, y+s))\cdot(0,1)ds \tag{1}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(x+\frac{h}{2}, y+s)ds \tag{2}$$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x+s, y+\frac{h}{2}), Q(x+s, y+\frac{h}{2}))\cdot(-1,0)ds \tag{3}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -P(x+s, y+\frac{h}{2})ds \tag{4}$$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x-\frac{h}{2}, y+s), Q(x-\frac{h}{2}, y+s)\cdot(0,-1)ds \tag{5}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -Q(x-\frac{h}{2}, y+s)ds \tag{6}$$

3.

$$\int_{C_2} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x+\frac{h}{2}, y+s), Q(x+\frac{h}{2}, y+s))\cdot(1,0)ds \tag{7}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} P(x+\frac{h}{2}, y+s)ds \tag{8}$$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x+s, y+\frac{h}{2}), Q(x+s, y+\frac{h}{2}))\cdot(0,1)ds \tag{9}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(x+s, y+\frac{h}{2})ds \tag{10}$$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P(x-\frac{h}{2}, y+s), Q(x-\frac{h}{2}, y+s))\cdot(-1,0)ds \tag{11}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -P(x-\frac{h}{2}, y+s)ds \tag{12}$$

4. (a)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

   (b)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

   (c)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = -1$$

(d)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 1$$

(e)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 1, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

(f)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = -1, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

(g)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 2, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

(h)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

(i)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 2$$

(j)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}(r,\theta) &= \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{1}{r}Q - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ) - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{V}(r,\theta) &= \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}P + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP) + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}\end{aligned}$$

参考文献

[2]　小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）