

# 微分積分統論 (ベクトル解析)

鈴木 咲衣

平成 27 年度前期

## 演習問題 9

- [?, 章末問題 2.9] 曲面  $(3 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , を考える .
  - この曲線の概形を描け .
  - $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$  における点での単位法線ベクトルを求めよ .
- [?, 問題 2.48] 曲面  $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, e^{s-t})$  の上の点  $\mathbf{r}(1, 0)$  における接平面の式を求めよ .
- [?, 問題 7.12] 次のベクトル場  $\mathbf{V}$  の回転を求め , さらに原点において , 単位ベクトル  $\mathbf{u}$  の方向を軸とする回転 を求めよ .
  - $\mathbf{V} = (y + z, xz, x^2y)$ ,  $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,
  - $\mathbf{V} = (\sin x + \sin z, \cos y + z \cos x, x \sin z)$ ,  $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,
  - $\mathbf{V} = (e^{-y}, e^{-z}, e^{-x})$ ,  $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .
- [?, 問題 8.16] 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  の  $z \geq 0$  の部分を  $\Sigma$  とし ,  $\mathbf{V} = (y, 0, x^2 + z^2)$  とする . このとき  $\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ . ただし  $\Sigma$  の表は  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$  の側とする .
- [?, 章末問題 8.9] 回転放物面  $z = x^2 + y^2$  の  $z \leq 1$  の部分を  $\Sigma$  とし , 領域  $\{(x, y, z) \mid z < x^2 + y^2\}$  の方を表とする . このときベクトル場  $\mathbf{V} = (-y + z, xz, e^x)$  に対して  $\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ .

## 演習問題 9 解答

1. (a) (別ファイルを参照)

(b) まず法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を求める。曲面の式を  $r(\theta, \varphi)$  とおくと、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \\ &= (3 \cos \theta \cos \varphi, 2 \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \times (-3 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0) \\ &= (-2 \sin \theta \cos \varphi, 3 \sin \theta \sin \varphi, 6 \cos \theta)\end{aligned}$$

よって  $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$  における法線ベクトルは、

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 3\right)$$

$|\mathbf{n}| = \sqrt{\frac{111}{8}}$  であるから求めるべき単位法線ベクトルは、

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{111}}(-2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 6\sqrt{2})$$

2.  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (1, 0, e^{s-t})$  かつ  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (0, 1, -e^{s-t})$  であるから、 $(s, t)$  における法線ベクトルは  $(-e^{s-t}, e^{s-t}, 1)$  となる。よって  $(1, 0)$  における法線ベクトルは  $(-e, e, 1)$  である。また  $\mathbf{r}(1, 0) = (1, 0, e)$  から、求めるべき接平面の式は、

$$-e(x-1) + ey + (z-e) = -ex + ey + z = 0$$

3. (a)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (x^2 - x, 1 - 2xy, z - 1)$$

単位ベクトル  $\mathbf{u}$  の方向を軸とする回転は  $\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x - 2xy + 1)$  よって原点におけるそれは  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  となる。

(b)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (-\cos x, \cos z - \sin z, -z \sin x)$$

単位ベクトル  $\mathbf{u}$  の方向を軸とする回転は  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos x + \cos z - \sin z)$  よって原点におけるそれは 0 となる。

(c)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (e^{-z}, e^{-x}, e^{-y})$$

単位ベクトル  $\mathbf{u}$  の方向を軸とする回転は  $\frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-z} + e^{-x} + e^{-y})$  よって原点におけるそれは  $\sqrt{3}$  となる。

4.  $C$  を  $xy$  平面に含まれる原点を中心とした半径 1 の円とする。また  $C$  の回転方向は反時計回りとする。

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi\end{aligned}$$

5.  $C$  を  $z = 1$  平面に含まれる  $(0, 0, 1)$  を中心とした半径 1 の円とする。また  $C$  の回転方向は反時計回りとする。

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C (-y + 1) dx + x dy \\ &= - \int_C -y dx + x dy = -2\pi\end{aligned}$$