微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 8

1. [1, 練習問題 4.9, 4.11, 章末問題 4.5] 次の領域の面積を面積分により計算せよ．
   (a) 点 $(0,0,1),(2,0,1),(2,1,1),(0,1,1)$ を頂点とする長方形.
   (b) 原点を中心とする半径 3 の球面の $z>0$ の部分.
   (c) z 軸を中心とし，半径 3 の円筒の側面の $-1 \leq z \leq 2$ の部分.
   (d) 平行四辺形 $\psi(s,t)=(s,t,2s+3t)$, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$.
   (e) 回転放物面 $\psi(t,\theta)=(t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1$.
   (f) xy 平面上の楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の内部の面積.
2. [1, 章末問題 4.6] 次の S と F の組に対して面積分 $\int_S f dS$ を計算せよ．
   (a) S は点 $(0,0,3),(2,0,3),(2,1,3),(0,1,3)$ を頂点とする長方形. $f=xyz$.
   (b) $S=\psi(s,t)=(s,t,st)$, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. $f=xy$.
   (c) $S=\psi(t,\theta)=(1+t\cos\theta, 1+t\sin\theta, t)$, $0 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$. $f=x+z^2$.
3. [1, 章末問題 4.7] パラメータ s,t で表された曲面 $(s\cos t, s\sin t, s)$ の $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分を S とする．
   (a) S の概形を描け.
   (b) S の面積を求めよ.

演習問題８　解答

1. (a)
$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y = 2$$

   (b) 求めるべき領域を D とおくと、
$$\int_D r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 9 \cdot 1 \cdot 2\pi = 18\pi$$

   (c) 求めるべき領域を D とおくと、
$$\int_D r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = r \int_{-1}^{2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 3 \cdot 3 \cdot 2\pi = 18\pi$$

   (d) $|(1,0,2)\times(0,1,3)| = |(-2,-3,1)| = \sqrt{17}$ より、
$$\sqrt{17}\int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \sqrt{17}$$

   (e)

   (f)

2.

3.

参考文献

[2]　小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）