微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題１０

1. [**?**, 問題 5.2] 以下の立体をパラメータで表示し，その体積を求めよ．
   (a) 点 $(1,2,3)$ を中心とする半径 1 および半径 2 の球面にはさまれた部分．
   (b) z 軸を中心軸とする半径 1 および 2 の円筒にはさまれた領域の $0 \leq z \leq 1$ の部分．
2. [**?**, 問題 5.5] 原点を中心とする半径 1 の球の内部領域を Ω とする．このとき次の体積分を求めよ．
   (a) $\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV$
   (b) $\int_\Omega z^2 dV$
3. [**?**, 問題 5.6] z 軸を中心軸とする半径 2 の円筒内部の $0 \leq z \leq 1$ の領域を Ω とする．このとき次の体積分を求めよ．
   (a) $\int_\Omega 1 + x dV$
   (b) $\int_\Omega z dV$
   (c) $\int_\Omega (x^2+y^2)dV$
4. [**?**, 問題 8.10] 領域 D のパラメータを ψ としたとき，D の体積は $V = \frac{1}{3}\int_{\partial D} \psi \cdot d\boldsymbol{S}$ となることを示せ．
5. [**?**, 章末問題 8.4] パラメータ ψ で表される 3 次元空間の領域 D に対して次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\partial D} \frac{1}{r^3}\psi \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0, & (0,0,0) \notin D, \\ 4\pi, & (0,0,0) \in D. \end{cases}$$

演習問題１０　解答

1. (a) 次のように極座標でパラメーター表示しよう（当然、パラメーター表示は複数考えられる）。

$$(x,y,z)=(1,2,3)+r(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$$

ただし各パラメーターは $D: 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi, 1\le r\le 2$ の範囲内で動くものとする。

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}V &= \int_D r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ &= \int_1^2 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &= 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = 4\pi\cdot\frac{7}{3}=\frac{28}{3}\pi\end{aligned}$$

(b) 次のように円柱座標でパラメーター表示しよう（当然、パラメーター表示は複数考えられる）。

$$(x,y,z)=(r\cos\phi,r\sin\phi,z)$$

ただし各パラメーターは $D: 1\le r\le 2, 0\le\phi<2\pi, 0\le z\le 1$ の範囲内で動くものとする。

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}V &= \int_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\\ &= \int_1^2 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = 2\pi\cdot\frac{3}{2}=3\pi\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^4\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_\Omega z^2\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^4\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{2}{5}\pi\int_{-1}^1 u^2\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{5}\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}\pi\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (1+x)\mathrm{d}V &= \int_\Omega (1+r\cos\phi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\\ &= \int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\\ &= \frac{4}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=4\pi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_\Omega z\mathrm{d}V &= \int_\Omega zr\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 z\mathrm{d}z \\ &= \frac{4}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 r^3\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}z \\ &= \frac{16}{4}\cdot 2\pi \cdot 1 = 8\pi\end{aligned}$$

4.

5.