微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 7

1. [?, 練習問題 5.5] 次の閉曲線 C に対して線積分 $\int_{\partial\Sigma} y^2dx + xdy$ を求めよ.
   (a) 頂点が $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ の正方形の周（反時計回り）.
   (b) 原点中心で半径 2 の円周（反時計回り）.
2. [?, 練習問題 5.3] 単位円周 C に沿う線積分 $\int_{\partial\Sigma}(2x^3+y^3)dx-(x^3+y^3)dy$ を求めよ.
3. [?, 練習問題 5.4] ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (\frac{-y}{x^2y^2}, \frac{x}{x^2y^2})$ と単位円周 C に対して，グリーンの定理が成り立たないことを示せ.
4. [?, 問題 8.8, 8.2] 平面領域 Σ の面積を S とするとき,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} -ydx + xdy = \int_{\partial\Sigma} xdy = -\int_{\partial\Sigma} ydx \tag{1}$$

   が成り立つことを示せ.
5. [?, 問題 8.9] 楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ.

演習問題７　解答

1. (a) $\mathrm{rot}(y^2, x) = 1 - 2y$ より、

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 - 4\int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y = 4$$

(b) $\mathrm{rot}(y^2, x) = 1 - 2y = 1 - 2r\sin\theta$ より、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta r(1 - r\sin\theta) &= \int_0^2 r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta - \int_0^2 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^2 \cdot 2\pi - 0 = 2\pi\cdot 2 = 4\pi\end{aligned}$$

2. $\mathrm{rot}(2x^3 + y^3, -x^3 - y^3) = -3x^2 - 3y^2 = -3r^2$ より、

$$-3\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = -3\cdot(\frac{1}{4})\cdot 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

3. （省略）

4. （省略）

5. $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}$ と変数変換すると $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ であるから、

$$\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{u^2+v^2\le 1} ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi ab$$