微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 8

1. [2, 練習問題 4.9, 4.11, 章末問題 4.5] 次の領域の面積を面積分により計算せよ．
   (a) 点 $(0,0,1),(2,0,1),(2,1,1),(0,1,1)$ を頂点とする長方形.
   (b) 原点を中心とする半径 3 の球面の $z>0$ の部分.
   (c) z 軸を中心とし，半径 3 の円筒の側面の $-1 \leq z \leq 2$ の部分.
   (d) 平行四辺形 $\psi(s,t)=(s,t,2s+3t)$, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$.
   (e) 回転放物面 $\psi(t,\theta)=(t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1$.
   (f) xy 平面上の楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の内部の面積.
2. [2, 章末問題 4.6] 次の S と f の組に対して面積分 $\int_S f dS$ を計算せよ．
   (a) S は点 $(0,0,3),(2,0,3),(2,1,3),(0,1,3)$ を頂点とする長方形. $f=xyz$.
   (b) $S=\psi(s,t)=(s,t,st)$, $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. $f=xy$.
   (c) $S=\psi(t,\theta)=(1+t\cos\theta, 1+t\sin\theta, t)$, $0 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$. $f=x+z^2$.
3. [2, 章末問題 4.7] パラメータ s,t で表された曲面 $(s\cos t, s\sin t, s)$ の $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分を S とする．
   (a) S の概形を描け.
   (b) S の面積を求めよ．

演習問題８　解答

1. (a)
$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y = 2$$
   (b) 求めるべき領域を D とおくと,
$$\int_D r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 9 \cdot 1 \cdot 2\pi = 18\pi$$
   (c) 求めるべき領域を D とおくと,
$$\int_D r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = r \int_{-1}^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 3 \cdot 3 \cdot 2\pi = 18\pi$$
   (d) $|(1,0,2) \times (0,1,3)| = |(-2,-3,1)| = \sqrt{14}$ より,
$$\sqrt{14} \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \sqrt{14}$$
   (e)
$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| &= |(-t\sin\theta, t\cos\theta, 0) \times (\cos\theta, \sin\theta, 2t)| \\ &= \left|(2t^2\cos\theta, 2t^2\sin\theta, -t)\right| \\ &= t\sqrt{4t^2+1} \end{aligned}$$
   よって求めるべき面積 S は,
$$S = \int_0^1 t\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$
   (f) 楕円は $x = r\cos\theta, y = 2r\sin\theta$ ただし $0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 2\pi$ と表示できる.
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$
   よって求めるべき面積 S は,
$$S = \int_0^1 2r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

2. (a)
$$\int_S f \mathrm{d}S = 3 \int_0^2 x \mathrm{d}x \int_0^1 y \mathrm{d}y = 3 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$$
   (b)
$$|(1,0,y) \times (0,1,x)| = |(-y,-x,1)| = \sqrt{1+x^2+y^2}$$
   より,
$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y xy\sqrt{1+x^2+y^2} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{3}x(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{3}x\left\{(2+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}(2+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}3^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}2^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{15}\left(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{7}{2}} + 1\right) \\ &= \frac{1}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right) \end{aligned}$$

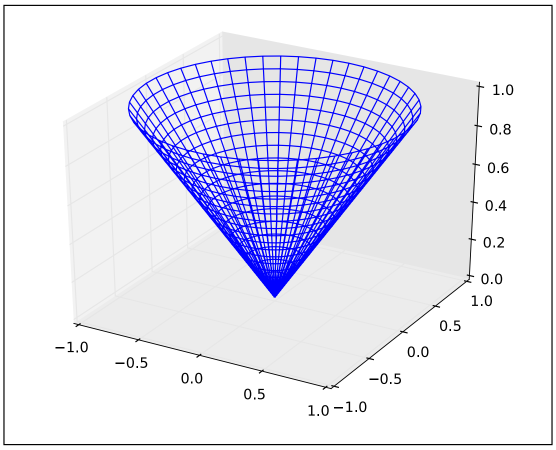
(c)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\times\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right| &= |(\cos\theta,\sin\theta,1)\times(-t\sin\theta,t\cos\theta,t)| \\ &= \sqrt{2}t\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^\pi\left((1+t\cos\theta+t^2)\sqrt{2}t\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\right) &= \sqrt{2}\int_0^1 t[\theta+t\sin\theta+t^2\theta]_0^\pi\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 t(\pi+\pi t^2)\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\pi\left[\frac{t^2}{2}+\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

3. (a)



(b)

$$(\cos t,\sin t,0)\times(-s\sin t,s\cos t,1)=s(\sin t,-\cos t,1)$$

よって,

$$\int_S\mathrm{d}S=\sqrt{2}\int_0^1 s\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\sqrt{2}\pi$$

参考文献

[2] 小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）