

微分積分統論（ベクトル解析）

鈴木 咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 8

1. [2, 練習問題 4.9, 4.11, 章末問題 4.5] 次の領域の面積を面積分により計算せよ .
 - (a) 点 $(0, 0, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 1)$ を頂点とする長方形.
 - (b) 原点を中心とする半径 3 の球面の $z > 0$ の部分 .
 - (c) z 軸を中心とし , 半径 3 の円筒の側面の $-1 \leq z \leq 2$ の部分 .
 - (d) 平行四辺形 $\psi(s, t) = (s, t, 2s + 3t), 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$.
 - (e) 回転放物面 $\psi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t^2), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1$.
 - (f) xy 平面上の楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の内部の面積.
2. [2, 章末問題 4.6] 次の S と f の組に対して面積分 $\int_S f dS$ を計算せよ .
 - (a) S は点 $(0, 0, 3), (2, 0, 3), (2, 1, 3), (0, 1, 3)$ を頂点とする長方形. $f = xyz$.
 - (b) $S = \psi(s, t) = (s, t, st), 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. $f = xy$.
 - (c) $S = \psi(t, \theta) = (1 + t \cos \theta, 1 + t \sin \theta, t), 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$. $f = x + z^2$.
3. [2, 章末問題 4.7] パラメータ s, t で表された曲面 $(s \cos t, s \sin t, s)$ の $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ の部分を S とする .
 - (a) S の概形を描け .
 - (b) S の面積を求めよ .

演習問題 8 解答

1. (a)

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy = 2$$

(b) 求めるべき領域を D とおくと、

$$\int_D r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 9 \cdot 1 \cdot 2\pi = 18\pi$$

(c) 求めるべき領域を D とおくと、

$$\int_D r d\theta dz = r \int_{-1}^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta = 3 \cdot 3 \cdot 2\pi = 18\pi$$

(d) $|(1, 0, 2) \times (0, 1, 3)| = |(-2, -3, 1)| = \sqrt{17}$ より、

$$\sqrt{17} \int_0^1 \int_0^1 ds dt = \sqrt{17}$$

(e)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| &= |(\cos \theta, \sin \theta, 2t) \times (-t \sin \theta, t \cos \theta, t^2)| \\ &= |(t^2 \sin \theta - 2t^2 \cos \theta, -2t^2 \sin \theta - t^2 \cos \theta, t)| \\ &= t^2 + 5t^4 \end{aligned}$$

よって求めるべき面積 S は、

$$S = \int_0^1 (t^2 + 5t^4) dt \int_0^{2\pi} d\theta = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \cdot 2\pi = \frac{8}{3}\pi$$

(f) 楕円は $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$ ただし $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ と表示できる。

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2r \cos \theta \end{vmatrix} = 2r$$

よって求めるべき面積 S は、

$$S = \int_0^1 2r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

2. (a)

$$\int_S f dS = 3 \int_0^2 x dx \int_0^1 y dy = 3 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(b)

$$|(1, 0, y) \times (0, 1, x)| = |(-y, -x, 1)| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 dy xy \sqrt{1 + x^2 + y^2} &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} x (1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{3} x \left\{ (2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} (2 + x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} (1 + x^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} 3^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} 2^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{7}{2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

(c)

3. (a) (別ファイルを参照)

(b)

$$(\cos t, \sin t, 0) \times (-s \sin t, s \cos t, 1) = s(\sin t, -\cos t, 1)$$

よって、

$$\int_S dS = \sqrt{2} \int_0^1 s ds \int_0^{2\pi} dt = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \sqrt{2}\pi$$

参考文献

- [2] 小林亮, 高橋大輔「ベクトル解析入門」(東京大学出版会)