

微分積分統論（ベクトル解析）

鈴木 咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 9

- [?, 章末問題 2.9] 曲面 $(3 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, を考える .
 - この曲線の概形を描け .
 - $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ における点での単位法線ベクトルを求めよ .
- [?, 問題 2.48] 曲面 $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, e^{s-t})$ の上の点 $\mathbf{r}(1, 0)$ における接平面の式を求めよ .
- [?, 問題 7.12] 次のベクトル場 \mathbf{V} の回転を求め , さらに原点において , 単位ベクトル \mathbf{u} の方向を軸とする回転 を求めよ .
 - $\mathbf{V} = (y + z, xz, x^{2y})$, $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
 - $\mathbf{V} = (\sin x + \sin z, \cos y + z \cos x, x \sin z)$, $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
 - $\mathbf{V} = (e^{-y}, e^{-z}, e^{-x})$, $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
- [?, 問題 8.16] 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \geq 0$ の部分を Σ とし , $\mathbf{V} = (y, 0, x^2 + z^2)$ とする . このとき $\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ . ただし Σ の表は $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ の側とする .
- [?, 章末問題 8.9] 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ の $z \leq 1$ の部分を Σ とし , 領域 $\{(x, y, z) \mid z < x^2 + y^2\}$ の方を表とする . このときベクトル場 $\mathbf{V} = (-y + z, xz, e^x)$ に対して $\int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ .

演習問題 9 解答

1. (a) (次ページを参照)

(b)

2. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (1, 0, e^{s-t})$ かつ $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (0, 1, -e^{s-t})$ であるから、 (s, t) における法線ベクトルは $(-e^{s-t}, e^{s-t}, 1)$ となる。よって $(1, 0)$ における法線ベクトルは $(-e, e, 1)$ である。また $\mathbf{r}(1, 0) = (1, 0, e)$ から、求めるべき接平面の式は、

$$-e(x-1) + ey + (z-e) = -ex + ey + z = 0$$

3. (a)

(b)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (-\cos x, \cos z - \sin z, -z \sin x)$$

単位ベクトル \mathbf{u} の方向を軸とする回転は $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos x + \cos z - \sin z)$ よって原点におけるそれは 0 となる。

(c)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (e^{-z}, e^{-x}, e^{-y})$$

単位ベクトル \mathbf{u} の方向を軸とする回転は $\frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-z} + e^{-x} + e^{-y})$ よって原点におけるそれは $\sqrt{3}$ となる。

4. C を xy 平面に含まれる原点を中心とした半径 1 の円とする。また C の回転方向は反時計回りとする。

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \end{aligned}$$

5. C を $z = 1$ 平面に含まれる $(0, 0, 1)$ を中心とした半径 1 の円とする。また C の回転方向は反時計回りとする。

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C (-y + 1) dx + x dy \\ &= - \int_C -y dx + x dy = -2\pi \end{aligned}$$

