微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 7

1. [1, 練習問題 5.5] 次の閉曲線 C に対して線積分 $\int_{\partial\Sigma} y^2dx + xdy$ を求めよ.
   (a) 頂点が $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ の正方形の周（反時計回り）.
   (b) 原点中心で半径 2 の円周（反時計回り）.
2. [1, 練習問題 5.3] 単位円周 C に沿う線積分 $\int_{\partial\Sigma}(2x^3 + y^3)dx - (x^3 + y^3)dy$ を求めよ.
3. （改定）[1, 練習問題 5.4] ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ と単位円盤 D に対して，グリーンの公式が成り立たないことを示せ.
4. [2, 問題 8.8, 8.2] 平面領域 Σ の面積を $S(\Sigma)$ とするとき，

$$S(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} -ydx + xdy = \int_{\partial\Sigma} xdy = -\int_{\partial\Sigma} ydx \tag{1}$$

   が成り立つことを示せ.
5. [2, 問題 8.9] 楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ.

演習問題７　解答

1. (a) $\mathrm{rot}(y^2, x) = 1 - 2y$ より，
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 - 4\int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y = 4$$
(b) $\mathrm{rot}(y^2, x) = 1 - 2y = 1 - 2r\sin\theta$ より，
$$\begin{aligned}\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta r(1-2r\sin\theta) &= \int_0^2 r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta - 2\int_0^2 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^2 \cdot 2\pi - 0 = 2\pi\cdot 2 = 4\pi\end{aligned}$$

2. $\mathrm{rot}(2x^3 + y^3, -x^3 - y^3) = -3x^2 - 3y^2 = -3r^2$ より，
$$-3\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = -3\cdot(\frac{1}{4})\cdot 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

3. 回転を計算すると
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.$$
したがって
$$\int_D \mathrm{rot}\boldsymbol{V} dS = 0.$$
一方
$$\int_{\partial D}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds = \int_0^{2\pi} dS = 2\pi \neq 0.$$
よってグリーンの公式は成り立たない．

4. 領域 Σ が
<u>（条件 A）２つのグラフ $y = f(x), g(x),\ f(x) > g(x),$ と２つの直線 $x = a, b$ で囲まれている</u>
を満たすとすると
$$S(\Sigma) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = -\int_{\partial\Sigma} ydx.$$
同様に，領域 Σ が
<u>（条件 B）２つのグラフ $x = k(y), h(y),\ k(y) > h(y),$ と２つの直線 $y = c, d$ で囲まれている</u>
を満たすとすると
$$S(\Sigma) = \int_c^d (k(y) - h(y))\, dy = \int_{\partial\Sigma} xdy.$$
領域 Σ が上記の条件 A,B を同時に満たすとすると，
$$S(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} xdy = -\int_{\partial\Sigma} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} -ydx + xdy. \tag{2}$$
一般の領域 Σ に対しては，条件 A,B を満たす領域に分割して足し上げれば主張が示される．

5. $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}$ と変数変換すると $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ であるから，
$$\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{u^2+v^2\leq 1} ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi ab$$

参考文献

[1] 谷口雅彦「なっとくするベクトル解析」（講談社）

[2] 小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）