微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 6

1. [2, 問題 4.1] 次の面積分を求めよ．
   (a) $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2 dxdy$
   (b) $\int_0^2 \int_0^1 e^{x-y} dxdy$
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+2y) dxdy$
2. [2, 問題 4.2] 問 1 の重積分の順序を入れ替えて計算せよ．
3. [2, 問題 4.5] 領域 D を原点を中心とした半径 1 の円とする．次の面積分を極座標を用いて求めよ．
   (a) $\int_D x^2 dS$
   (b) $\int_D (x^2 + y^{2)} dS$
   (c) $\int_D x^2 y dS$
   (d) $\int_D e^{x^2+y^2} dS$

演習問題６　解答

1. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{1}{3}\left[(x+y)^3\right]_0^1 \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{(1+y)^3-y^3\right\}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[(y+1)^4-y^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}\cdot\{(2^4-1)-1\} = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^1 \mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^2\left[\mathrm{e}^{x}\right]_0^1 \\ &= (1-\mathrm{e}^{-2})(\mathrm{e}-1)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x+2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin(2y+\frac{\pi}{2})-\sin(2y)\}\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(2y)-\sin(2y)\}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-\sin(2y)\}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\cos(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1\end{aligned}$$

2. （省略する）

3. (a)

$$\begin{aligned}\int_D x^2\mathrm{d}S &= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}S &= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_D x^2y\mathrm{d}S &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}S &= \int_0^1 r\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_0^1 = \pi(\mathrm{e}-1)\end{aligned}$$

参考文献

[2]　小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）