微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題 1

1. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ を求めよ．また，関係式（**??**）$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ を用いて，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の間のなす各 θ（$0 \leq \theta \leq \pi$）を求めよ．
   (a) $\boldsymbol{u} = (-1, 0, 7), \boldsymbol{v} = (-4, 5, 3)$
   (b) $\boldsymbol{u} = (-1, 1, 0), \boldsymbol{v} = (1, -2, 2)$
2. ３次元ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対して「$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が直行 $\iff$ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$」を示せ.
3. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して外積 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ を求めよ.
   (a) $\boldsymbol{u} = (-2, 3, 7), \boldsymbol{v} = (-4, 2, 3)$
   (b) $\boldsymbol{u} = (4, 1, 1), \boldsymbol{v} = (0, -2, 2)$
4. 次の主張を確かめよ.「3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，外積 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ は 3 次元ベクトルで，矢印の向きは $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ 方向に右ネジを回してネジが進む方向、大きさは $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の張る平行四辺形の面積である.」

演習問題１　解答

1. (a)

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (-1)\times(-4) + 0\times 5 + 7\times 3 = 25$$
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

(b)

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (-1)\times 1 + 1\times(-2) + 0\times 2 = -3$$
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = \frac{3}{4}\pi$$

2. $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ すなわち $|\boldsymbol{u}|\neq 0, |\boldsymbol{v}|\neq 0$ また $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ より、

$$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v} \iff \cos\theta = 0 \iff \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta = 0$$

3. (a) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (-5, -22, 8)$

(b) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (4, -8, -8)$

4. $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$ と $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$ とおく。また $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とおく。

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$ より、

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = a(bz - cy) + b(xz - az) + c(ay - bx) = 0$$

また

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = x(bz - cy) + y(xz - az) + z(ay - bx) = 0$$

よって $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に直行している。すなわち $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の張る平面に直行していることがわかる。

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2 &= (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2 \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\cos^2\theta \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

より $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\sin\theta|$ である。よって $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ の大きさは $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]$ の行列式が正であることが言えれば、$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ の矢印の向きは $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ 方向に右ネジを回してネジが進む方向ということが言える。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} &= a^2y^2 + a^2z^2 - 2abxy - 2acxz + b^2x^2 + b^2z^2 - 2bcyz + c^2x^2 + c^2y^2 \\
&= (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2 > 0
\end{aligned}$$