微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

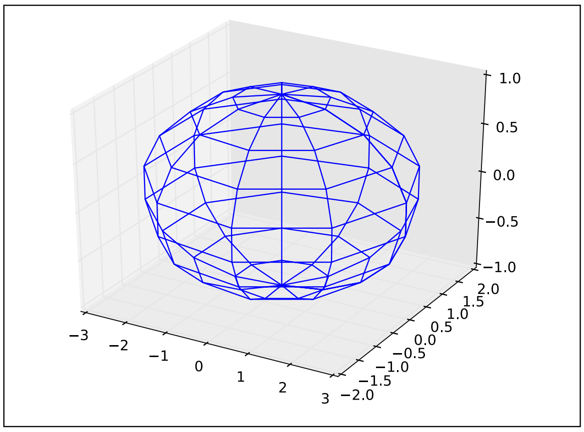
平成 27 年度前期

演習問題 9

1. [2, 章末問題 2.9] 曲面 $(3\sin\theta\cos\varphi, 2sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, を考える.
   (a) この曲線の概形を描け.
   (b) $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ における点での単位法線ベクトルを求めよ.
2. [2, 問題 2.48] 曲面 $\boldsymbol{r}(s,t) = (s, t, e^{s-t})$ の上の点 $\boldsymbol{r}(1,0)$ においての接平面の式を求めよ.
3. [2, 問題 7.12] 次のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転を求め，さらに原点において，単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向を軸とする回転を求めよ.
   (a) （修正版）$\boldsymbol{V} = (y+z, xz, x^2y)$, $\quad \boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
   (b) $\boldsymbol{V} = (\sin x + \sin z, \cos y + z\cos x, x\sin z)$, $\quad \boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
   (c) $\boldsymbol{V} = (e^{-y}, e^{-z}, e^{-x})$, $\quad \boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
4. [2, 問題 8.16] 球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ の $z \geq 0$ の部分を Σ とし，$\boldsymbol{V} = (y, 0, x^2+z^2)$ とする．このとき $\int_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．ただし Σ の表は $x^2+y^2+z^2 > 1$ の側とする.
5. [2, 章末問題 8.9] 回転放物面 $z = x^2+y^2$ の $z \leq 1$ の部分を Σ とし，領域 $\{(x,y,z) \mid z < x^2+y^2\}$ の方を表とする．このときベクトル場 $\boldsymbol{V} = (-y+z, xz, e^x)$ に対して $\int_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

演習問題９　解答

1. (a)



(b) まず法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求める．曲面の式を $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\\ &= (3\cos\theta\cos\varphi, 2\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)\times(-3\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)\\ &= (-2\sin\theta\cos\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, 6\cos\theta)\end{aligned}$$

よって $\theta=\frac{\pi}{3}, \varphi=\frac{\pi}{4}$ における法線ベクトルは,

$$\boldsymbol{n} = (-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 3)$$

$|\boldsymbol{n}| = \sqrt{\frac{111}{8}}$ であるから求めるべき単位法線ベクトルは,

$$\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\sqrt{37}}(2, 3, 2\sqrt{6})$$

2. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = (1, 0, e^{s-t})$ かつ $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = (0, 1, -e^{s-t})$ であるから，(s,t) における法線ベクトルは $(-e^{s-t}, e^{s-t}, 1)$ となる．よって $(1,0)$ おける法線ベクトルは $(-e, e, 1)$ である．また $\boldsymbol{r}(1,0) = (1,0,e)$ から，求めるべき接平面の式は,

$$-e(x-1)+ey+(z-e) = -ex+ey+z = 0$$

3. (a)

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = (x^2-x, 1-2xy, z-1)$$

単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向を軸とする回転は $\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-x-2xy+1)$ よって原点におけるそれは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．

(b)

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = (-\cos x, \cos z-\sin z, -z\sin x)$$

単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向を軸とする回転は $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos x+\cos z-\sin z)$ よって原点におけるそれは 0 となる．

(c)

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = (e^{-z}, e^{-x}, e^{-y})$$

単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の方向を軸とする回転は $\frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-z}+e^{-x}+e^{-y})$ よって原点におけるそれは $\sqrt{3}$ となる．

4. C を xy 平面に含まれる原点を中心とした半径 1 の円とする．また C の回転方向は反時計周りとする．

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_C \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_C y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = -\pi\end{aligned}$$

5. C を $z=1$ 平面に含まれる $(0,0,1)$ を中心とした半径 1 の円とする．また C の回転方向は反時計周りとする．

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\int_C \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_C (-y+1)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \\ &= -\int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = -2\pi\end{aligned}$$

参考文献

[2] 小林亮，高橋大輔「ベクトル解析入門」（東京大学出版会）