# 微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

## 演習問題 3

1. 次の曲線を図示し，その長さを求めよ.
   (a) 放物線 $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2$.
   (b) Cycloid $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   (c) Cardioid $\boldsymbol{r}(t) = ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Cycloid $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, と $x$ 軸で囲まれた領域の面積を求めよ.
3. 次の線積分を求めよ
   (a) 曲線 $\boldsymbol{r} = (t, 2t + 1)$, $0 \leq t \leq 2$, に沿った関数 $f(t) = t^2 + 1$ の線積分.
   (b) 曲線 $\boldsymbol{r} = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, に沿った関数 $f(t) = t$ の線積分.

# 演習問題３　解答

1. (a) $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2t)$ より、

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$

最後の式は $2t = u$ と変数変換しているだけである。

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \log|x+\sqrt{1+x^2}|)$$

上記の積分公式を使うと、

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[(u\sqrt{1+u^2} + \log|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_0^4 = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\log(4+\sqrt{17})$$

(b) $\boldsymbol{r}'(t) = (1-\cos t, \sin t), |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{2-2\cos t} = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ より、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2|\cos\frac{t}{2}|\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi} |\cos u|\mathrm{d}u = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\mathrm{d}u = 8\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8$$

途中、$t = 2u$ と変数変換した。

(c) $\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t - \sin 2t, \cos t + \cos 2t), |\boldsymbol{r}'(t)| = 2|\cos t|$ より、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} |\cos t|\mathrm{d}t = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t = 8$$

2. 求めるべき面積を $S$ とおくと、

$$S = \int_0^{2\pi} y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2})\mathrm{d}t$$

最後の式でコサインの積分が消えることに注目すると、

$$S = \int_0^{2\pi} (1+\frac{1}{2})\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\times 2\pi = 3\pi$$

3. (a) $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2), |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{5}$ より、

$$\int_0^2 f(t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_0^2 (1+t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{5}(2+\frac{8}{3}) = \frac{14}{3}\sqrt{5}$$

(b) $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2t), |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$ より、

$$\int_0^1 f(t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$