微分積分続論（ベクトル解析）

鈴木　咲衣

平成 27 年度前期

演習問題１０

1. [?, 問題 5.2] 以下の立体をパラメータで表示し，その体積を求めよ．
   (a) 点 $(1,2,3)$ を中心とする半径 1 および半径 2 の球面にはさまれた部分．
   (b) z 軸を中心軸とする半径 1 および 2 の円筒にはさまれた領域の $0 \leq z \leq 1$ の部分．
2. [?, 問題 5.5] 原点を中心とする半径 1 の球の内部領域を Ω とする．このとき次の体積分を求めよ．
   (a) $\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV$
   (b) $\int_\Omega z^2 dV$
3. [?, 問題 5.6] z 軸を中心軸とする半径 2 の円筒内部の $0 \leq z \leq 1$ の領域を Ω とする．このとき次の体積分を求めよ．
   (a) $\int_\Omega 1 + x dV$
   (b) $\int_\Omega z dV$
   (c) $\int_\Omega (x^2+y^2)dV$
4. [?, 問題 8.10] 領域 D のパラメータを ψ としたとき，D の体積は $V = \frac{1}{3}\int_{\partial D} \psi \cdot d\boldsymbol{S}$ となることを示せ．
5. [?, 章末問題 8.4] パラメータ ψ で表される 3 次元空間の領域 D に対して次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\partial D} \frac{1}{r^3}\psi \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0, & (0,0,0) \notin D, \\ 4\pi, & (0,0,0) \in D. \end{cases}$$

演習問題１０　解答

1. (a) 次のように極座標でパラメーター表示しよう（当然、パラメーター表示は複数考えられる）。

$$(x,y,z)=(1,2,3)+r(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$$

ただし各パラメーターは $D:0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi, 1\le r\le 2$ の範囲内で動くものとする。

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}V &= \int_D r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ &= \int_1^2 r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &= 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = 4\pi\cdot\frac{7}{3}=\frac{28}{3}\pi\end{aligned}$$

(b) 次のように円柱座標でパラメーター表示しよう（当然、パラメーター表示は複数考えられる）。

$$(x,y,z)=(r\cos\phi,r\sin\phi,z)$$

ただし各パラメーターは $D:1\le r\le 2, 0\le\phi<2\pi, 0\le z\le 1$ の範囲内で動くものとする。

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}V &= \int_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\\ &= \int_1^2 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = 2\pi\cdot\frac{3}{2}=3\pi\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^4\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_\Omega z^2\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^4\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{2}{5}\pi\int_{-1}^1 u^2\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{5}\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}\pi\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (1+x)\mathrm{d}V &= \int_\Omega (1+r\cos\phi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\\ &= \int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\\ &= \frac{4}{2}\cdot 2\pi\cdot 1 = 4\pi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_\Omega z\mathrm{d}V &= \int_\Omega zr\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 z\mathrm{d}z \\ &= \frac{4}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}V &= \int_\Omega r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 r^3\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}z \\ &= \frac{16}{4}\cdot 2\pi \cdot 1 = 8\pi\end{aligned}$$

4. ここで $\psi = (x, y, z)$ である。ガウスの定理より、

$$\frac{1}{3}\int_{\partial D} \psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{3}\int_{\partial D} (\mathrm{div}\psi)\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\int_D 3\mathrm{d}V = \int_D \mathrm{d}V$$

5. ここで $\psi = (x, y, z)$ である。また原点を除いて、$\mathrm{div}\frac{\psi}{r^3} = \mathbf{0}$ である。よって領域 D が原点を含まない場合は、

$$\int_{\partial D} \frac{\psi}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

領域 D が原点を含む場合は、原点を中心とした半径 ϵ の球が D に含まれるように ϵ を充分小さく取る。この球を S_ϵ とする。$D = (D - S_\epsilon) \cup S_\epsilon$ と分割できる。両辺の面積分をとれば求めるべき値となるが、このとき右辺第一項は原点を除いて発散がゼロになることからゼロになる。よって、

$$\int_{\partial D} \frac{\psi}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_\epsilon} \frac{\psi}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi$$