FY1001: Prosjekt
Rullebevegelse ned en kvartsirkel

NTNU

October 23, 2020

Introduksjon

I denne oppgaven skal vi studere objekter (ball og sylinder) som ruller og slurer på en kvartsirkel. Målet er å lage en numerisk modell som beskriver objektets bevegelse ned kvartsirkelen, og sammenligne dette med eksperimentelle målinger.

Oppsett

Systemet vi skal studere er skissert i figur 1. De ulike legemene har masse m og befinner seg på utsiden av en kvartsirkel med radius R. Avstanden fra legemets massesenter ned til kontaktpunktet med kvartsirkelen er r. Vi neglisjerer luftmotstand slik at det er tre krefter som virker på objektet; tyngdekraften mg, normalkraften N og friksjonskraften f.

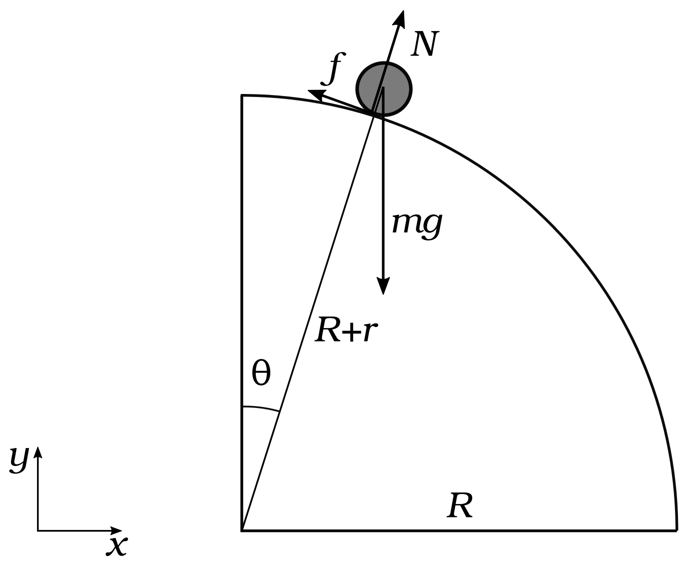

Figure 1: Skisse av det eksperimentelle oppsettet med relevante størrelser og krefter på ballen under bevegelsen

Så lenge objektet har kontakt med kvartsirkelen kan posisjonen beskrives ved avstanden ut til massesenteret og vinkelen θ som:

$$x(t) = (R + r)\sin\theta(t). \tag{1}$$

$$y(t) = (R + r)\cos\theta(t). \tag{2}$$

Ettersom objektet utfører en sirkelbevegelse om senteret av kvartsirkelen, vil hastigheten alltid ha retning langs banens overflate (normalt på radiell retning). Vi kan da uttrykke hastigheten til objektets massesenter ved en vinkelhastighet ω som

$$v(t) = (r + R)\omega(t), \tag{3}$$

og tilsvarende massesenterets akselerasjon *langs overflaten* ($a_{||}$) ved hjelp av en vinkelaskelerasjon α som

$$a_{||}(t) = (r + R)\alpha(t). \tag{4}$$

Dersom friksjonskraften er ulik null, vil objektet rulle eller slure nedover kvartsirkelen. Vi kommer til å studere en ball og en sylinder som begge har rotasjonssymmetri om en akse gjennom tyngdepunktet normalt på bevegelsesretningen. Vi kan dermed alltid skrive treghetsmomentet til legemet på formen

$$I_0 = cmr^2, \tag{5}$$

der r er rulleradiusen og konstanten c avhenger av massefordelingen til legemet.

Numerisk metode

For å studere objektets bevegelse må vi løse bevegelsesligningene langs banen. I polar-koordinater blir dette ligninger for vinkelen θ og vinkelhastigheten ω

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \tag{6}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}, \tag{7}$$

som igjen kan brukes til å finne banehastighet og posisjon. Vi kan nå gjøre en tidsdiskretisering, og bruke Eulers metode til å finne vinkelhastigheten og vinkelen iterativt ved hjelp av formelene

$$\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \frac{d\omega(t)}{dt}\Delta t, \tag{8}$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \frac{d\theta(t)}{dt}\Delta t. \tag{9}$$

En grundigere gjennomgang av Eulers metode er gitt i numerisk øving 3.

Eksperimentelt oppsett

Det eksperimentelle oppsettet består av

- Bane, kvartsirkelformet, laget i aluminium.
- Kamera (Panasonic DMC-FZ-200).
- Kule.

- Sylinder, hul og kompakt.
- Diverse teip, for å endre friksjonen til banen.
- Div. måleutstyr; målestokk, skyvelær, vekt.

De eksperimentelle målingene består av å filme objektets bevegelse ned kvartsirkelen og analysere videoene i Tracker. Programmet kan lastes ned her.

Oppgaver

Prosjektet består av tre oppgaver, som er ulikt vektet med økende vanskelighetsgrad (og forventet tidsbruk). Ettersom dere skal jobbe i grupper på opptil seks studenter ber vi om at dere skriver opp de individuelle bidragsyterne til hver av oppgavene i besvarelsen. Poenget her er *ikke* at dere skal fordele de tre oppgavene jevnt blant gruppen, men at studenter som ikke har ambisjoner om den høyeste karakteren kan melde seg av enkelte oppgaver uten å forhindre mer dedikerte studenter fra å gjøre disse. Oppgavenes uttelling er oppgitt som prosent av endelig karakter i faget (maks score er 30%).

Oppgave 1 (5%)

Vi starter med å anta at det ikke er friksjon mellom objektet og underlaget, slik at objektet sklir ned halvsirkelen. Anta at objektet starter på toppen av halvsirkelen og bestem vinkelen der det mister kontakt med underlaget. Undersøk videre hva som skjer hvis du varierer startposisjonen.

Gi først en analytisk løsning på problemet, og programmer deretter en numerisk løsning der dere bruker Eulers metode. Sammenlign de to løsningene i en tabell eller lignende for ulike utgangsposisjoner.

Oppgave 2 (15%)

Anta nå at det er friksjon mellom objektet og underlaget, slik at objektet ruller ned halvsirkelen. Anta videre at den maksimale friksjonskraften er så stor at objektet ruller rent hele tiden (uten å slure). Oppgaven er å bestemme vinkelen der 1) en ball og 2) en sylinder mister kontakten med underlaget, samt undersøke hvordan dette avhenger av utgangsposisjonen.

Programmer en numerisk løsning (dette blir en utvidelse av koden i oppgave 1). Undersøk også problemet eksperimentelt, og sammenlign resultatene med de numeriske. Er det avvik mellom eksperiment og numerikk, og i så fall hvorfor? Diskuter og forklar eventuelle avvik. Sammenlign også med svarene fra oppgave 1 og diskuter.

Oppgave 3 (10%)

I denne oppgaven ser vi kun på sylindere. Undersøk hvordan overflatefriksjonen påvirker bevegelsen og vinkelen der sylinderen mister kontakt med underlaget.

Utvid den numeriske løsningen fra oppgave 2 til å inkludere mulighet for både rulling og sluring. Utfør også forsøk der sylinderen slurer ned deler av halvsirkelen. Sammenlign numeriske og eksperimentelle resultater for ulike utgangsposisjoner og diskuter/forklar eventuelle avvik. Sammenlign videre med resultatene fra oppgave 1,2 og diskuter.

Vurderingskriterier

- **Form på besvarelse:** Besvarelsen skal bestå av et dokument, der dere besvarer de tre oppgavene separat. Dere skal legge ved koden til de numeriske løsningene (som jupyter notebook eller .py filer).

- **Analytiske løsninger:** Gi fullstendige analytiske løsninger der dere introduserer alle størrelser og inkluderer alle steg i utledningen.

- **Numeriske løsninger:** Koden kan skrives i jupyter notebook eller som enkeltstående py-filer for hver oppgave. Gi størrelser fornuftig variabel-navn og kommenter koden slik at den er leselig for en som ikke har skrevet den. Selv om oppgavene kun ber om vinkelen der objektet mister kontakt med underlaget, er det lurt å inkludere andre størrelser i besvarelsen (objektets bane ila bevegelsen, energi s.f.a. tid osv). Dette kan hjelpe dere med å sjekke at koden fungerer og tilsvarende overbevise sensor om det samme. Disse vil også være nyttige i en diskusjon av resultatene.

- **Eksperimentelt:** Gjør kort rede for deres eksperimentelle metode og feilkilder. Disse må diskuteres når dere sammenligner med numeriske resultater. Rådata trenger ikke inkluderes i besvarelsen, men skal være tilgjengelig ved forespørsel.

- **Frist:** Svar skal sendes inn *senest* tre uker etter at dere har lab 3 23:59 samme dag (dette blir ila uke 47). Dere avtaler med studass for deres gruppe hvordan dere skal levere.