Probabilidad y Estadística

Gerardo Enrique Torres Flores 2064063

14 de febrero de 2025

1. Tipos de datos y Medidas de tendencia central

Datos

Se tiene la siguiente tabla de 10 empleados:

Nombre	**Edad**	**Área de trabajo**
Ana	25	Ventas
Luis	30	Administración
Marta	40	Producción
Carlos	35	Ventas
Elena	28	Recursos Humanos
Juan	50	Producción
Sofía	45	Administración
Pedro	38	Ventas
Daniel	33	Producción
Laura	27	Recursos Humanos

1. Clasificación de las variables

- **Nombre:** Variable cualitativa *(cualidad/texto)*.
- **Edad:** Variable cuantitativa *(número)*.
- **Área de trabajo:** Variable cualitativa *(cualidad/texto)*.

2. Cálculo de media, mediana y moda de la variable Edad

Edades:

$$25,\ 30,\ 40,\ 35,\ 28,\ 50,\ 45,\ 38,\ 33,\ 27.$$

Media:

$$\text{Media} = \frac{25+30+40+35+28+50+45+38+33+27}{10} = \frac{351}{10} = \mathbf{35.1.}$$

Mediana:
Ordenando los datos de forma ascendente:

$$25,\ 27,\ 28,\ 30,\ 33,\ 35,\ 38,\ 40,\ 45,\ 50.$$

Con 10 valores, la mediana es el promedio del 5º y 6º:

$$\text{Mediana} = \frac{33+35}{2} = \mathbf{34.}$$

Moda:
No existe moda, ya que ninguna edad se repite.

3. Interpretación

La **media (35.1)** y la **mediana (34)** son valores cercanos, lo que indica que la distribución de edades tiene datos cercanos a la centralidad *(tendencia a la normal)*. Además, no hay un valor que se repita por lo que es **amodal**.

2. Medidas de dispersión

Calificaciones:

$$X = \{70, 85, 90, 95, 88, 92, 75, 80\}.$$

1. Cálculo de la varianza y la desviación estándar

Media:

$$\bar{X} = \frac{70 + 85 + 90 + 95 + 88 + 92 + 75 + 80}{8} = \frac{675}{8} = \mathbf{84.375.}$$

Desviaciones respecto a la media, elevadas al cuadrado:

$$\begin{aligned}
(70 - 84{,}375)^2 &\approx 206{,}64, \\
(85 - 84{,}375)^2 &\approx 0{,}39, \\
(90 - 84{,}375)^2 &\approx 31{,}64, \\
(95 - 84{,}375)^2 &\approx 112{,}89, \\
(88 - 84{,}375)^2 &\approx 13{,}14, \\
(92 - 84{,}375)^2 &\approx 58{,}14, \\
(75 - 84{,}375)^2 &\approx 87{,}89, \\
(80 - 84{,}375)^2 &\approx 19{,}14.
\end{aligned}$$

$$206{,}64 + 0{,}39 + 31{,}64 + 112{,}89 + 13{,}14 + 58{,}14 + 87{,}89 + 19{,}14 \approx 529{,}88.$$

La varianza **(usando la fórmula de población)** es:

$$\sigma^2 = \frac{529{,}88}{8} \approx \mathbf{66.23.}$$

La desviación estándar es:

$$\sigma \approx \sqrt{66{,}23} \approx \mathbf{8.14.}$$

2. Interpretación

La desviación estándar de 8.14 indica que las calificaciones se desvían 8.14 puntos de la media (84.38), esto da una idea que los datos no estan muy dispersos. Además, usando el coeficiente de variación

$$CV\,\% = \frac{8{,}14}{84{,}375} * 100\,\% \approx \mathbf{9.65\,\%}$$

por lo tanto, los datos se desvian tan solo **casi 10 %** de la media.

3. Probabilidades y Teorema de Bayes

Se tiene la siguiente información sobre una empresa:

- 60 % de los empleados son programadores.
- 40 % son diseñadores.
- 70 % de los programadores tienen conocimientos de IA.
- 30 % de los diseñadores tienen conocimientos de IA.

Probabilidad

La probabilidad de que un empleado que tiene conocimientos de IA sea programador:

$$P(\text{Prog} \mid IA) = \frac{P(IA \mid \text{Prog}) \cdot P(\text{Prog})}{P(IA)},$$

donde:

$$P(IA) = P(IA \mid \text{Prog}) \cdot P(\text{Prog}) + P(IA \mid \text{Diseñador}) \cdot P(\text{Diseñador})$$

$$= 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54.$$

Así:

$$P(\text{Prog} \mid IA) = \frac{0{,}7 \times 0{,}6}{0{,}54} = \frac{0{,}42}{0{,}54} \approx \mathbf{0.7778.}$$

Existe aproximadamente un **77.78 % de probabilidad** de que un empleado con conocimientos de IA sea programador.

4. Distribuciones de probabilidad

Suponga que el número de defectos en un lote de producción sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 3$ defectos por lote.

1. Probabilidad de exactamente 2 defectos

$$P(X) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, ...$$

Sustituyendo:

$$P(X = 2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9 \cdot e^{-3}}{2} \approx 4{,}5 \cdot e^{-3} \approx 4{,}5 \times 0{,}04979 \approx \mathbf{0.224.}$$

Hay una **probabilidad del 22.4 %** de encontrar 2 artefactos defectuosos.

2. Probabilidad de al menos 1 defecto

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = 1 - e^{-3} \approx 1 - 0{,}04979 \approx \mathbf{0.9502.}$$

Hay una **probabilidad del 95.02 %** de encontrar al menos 1 artefacto defectuoso.

5. Funciones de densidad y distribución acumulativa

Sea X una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 10)$.

1. Probabilidad de que $X < 45$

Estandarizando la función normal a z:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{45 - 50}{10} = -0{,}5.$$

Usando la tabla de la normal estándar, se obtiene:

$$P(X < 45) \approx \mathbf{0.3085.}$$

Hay una **probabilidad del 30.85 %** de que $x < 45$

2. Probabilidad de que X esté entre 40 y 60

Para $X = 40$:

$$z = \frac{40 - 50}{10} = -1,$$

y para $X = 60$:

$$z = \frac{60 - 50}{10} = 1.$$

Entonces:

$$P(40 < X < 60) = P(z < 1) - P(z < -1) \approx 0{,}8413 - 0{,}1587 \approx \mathbf{0.6826.}$$

Hay una **probabilidad del 68.26 %** de que $40 < x < 60$

6. Probabilidad condicional

Se lanza un dado justo de seis caras dos veces.

1. Probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que el primero fue impar

Como son eventos independientes, la probabilidad de obtener un número par es:

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \mathbf{0.5.}$$

La probabilidad en el segundo sigue siendo del **50 %.**

2. Interpretación

El primer lanzamiento no afecta al segundo, ya que son **eventos independientes.**

7. Distribución binomial

Se analiza un examen de opción múltiple con 5 preguntas, cada una con 4 opciones (una sola correcta). Un estudiante responde al azar.

1. Probabilidad de acertar exactamente 3 respuestas

La probabilidad de acertar en cada pregunta es $p = \frac{1}{4}$. Usando la binomial:

$$P(X) = \binom{n}{x}\theta^x(\theta-1)^{(}n-x).$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Calculando:

$$\binom{5}{3} = 10, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$P(X=3) = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} \approx \mathbf{0.0879.}$$

Hay una **probabilidad del 8.79 %** de acertar correctamente 3 respuestas.

2. Probabilidad de acertar al menos una respuesta

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 1 - 0{,}2373 \approx \mathbf{0.7627.}$$

Hay una **probabilidad del 76.27 %** de acertar correctamente al menos 1 respuesta.

8. Regla de Laplace

En una urna hay 5 bolas rojas y 7 bolas azules.

1. Probabilidad de extraer una bola roja

$$P(\text{roja}) = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12} \approx \mathbf{0.4167.}$$

Hay una **probabilidad del 41.67 %** de sacar una bola roja.

2. Probabilidad de extraer dos bolas azules sin reemplazo

Probabilidad de extraer una bola azul es:

$$P(\text{azul en } 1^{\text{a}}) = \frac{7}{12}.$$

Luego, sin devolverla, la probabilidad de que la segunda bola sea azul es:

$$P(\text{azul en } 2^{\text{a}} \mid \text{azul en } 1^{\text{a}}) = \frac{6}{11}.$$

$$P(\text{ambas azules}) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{132} \approx \mathbf{0.3182.}$$

Hay una **probabilidad del 31.82 %** de sacar dos bolas azules sin devolverlas.

9. Esperanza matemática

En una lotería, el premio es de \$1000 con una probabilidad de 0.01, y el costo del boleto es de \$10.

1. Cálculo de la esperanza matemática

Si se gana, la ganancia neta es \$990 (premio menos costo) y, si se pierde, se tiene una pérdida de \$10. Entonces:

$$E(X) = 0{,}01 \times 990 + 0{,}99 \times (-10) = 9{,}9 - 9{,}9 = \mathbf{0.}$$

El valor esperado del premio es de 0.

2. Interpretación

El **juego es neutral** para el jugador ya que no se obtiene ganancia ni pérdida en promedio.

10. Ley de los grandes números

Se lanza una moneda justa 1000 veces y se calcula la frecuencia relativa de obtener cara.

1. Valor esperado de la frecuencia relativa

La probabilidad de obtener cara en un lanzamiento es 0.5, el valor esperado de la frecuencia relativa es:

$$E\left(\frac{\text{caras}}{1000}\right) = \mathbf{0.5.}$$

Haciendo todos los lanzamientos, el valor esperado es cercano a 0.5.

2. Relación con la Ley de los Grandes Números

La Ley de los Grandes Números establece que, conforme aumenta el número de ensayos, la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad de un solo experimento. **Al realizar 1000 lanzamientos, se espera que la proporción de caras se acerque a 0.5.**