Actividad 8: Laboratorio de Álgebra Lineal

Gerardo Enrique Torres Flores 2064063

22 de febrero de 2025

1. Operaciones con matrices y determinantes

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

En lo personal, lo paso a resolver con el método de Gauss-Jordan, para ello uso la matriz aumentada $[F \mid I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Se hace 0 el *5* de la tercera fila.

$$(R_3 \to R_3 - 5R_1):$$

R_3 : $[5-5\cdot1,\ 6-5\cdot2,\ 0-5\cdot3 \mid 0-5\cdot1,\ 0-5\cdot0,\ 1-5\cdot0] = [\mathbf{0},\ \mathbf{-4},\ \mathbf{-15} \mid \mathbf{-5},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}]$.

Paso 2: Se hace 0 el *-4* de la tercera fila que acabamos de calcular.

$$(R_3 \to R_3 + 4R_2):$$

R_3 : $[0,\ -4+4\cdot1,\ -15+4\cdot4 \mid -5+4\cdot0,\ 0+4\cdot1,\ 1+4\cdot0] = [\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1} \mid \mathbf{-5},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1}]$.

La matriz nos queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 3: Hacemos 0 el *4* de la segunda fila tercera columna; de igual forma, hacemos 0 el *3* de la primer fila tercera columna.

- En R_2: $R_2 \to R_2 - 4R_3$

  $R_2: \quad [0,\ 1,\ 4{-}4{\cdot}1 \mid 0{-}4(-5),\ 1{-}4{\cdot}4,\ 0{-}4{\cdot}1] = [\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0} \mid \mathbf{20},\ \mathbf{-15},\ \mathbf{-4}].$

- En R_1: $R_1 \to R_1 - 3R_3$

  $R_1: \quad [1,\ 2,\ 3{-}3{\cdot}1 \mid 1{-}3(-5),\ 0{-}3{\cdot}4,\ 0{-}3{\cdot}1] = [\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0} \mid \mathbf{16},\ \mathbf{-12},\ \mathbf{-3}].$

Paso 4: Por último, hacemos 0 el *2* de la primer fila segunda columna.

$$R_1 \to R_1 - 2R_2,$$

nos queda:

$R_1: \quad [1,\ 2{-}2{\cdot}1,\ 0{-}2{\cdot}0 \mid 16{-}2{\cdot}20,\ -12{-}2(-15),\ -3{-}2(-4)] = [\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0} \mid \mathbf{-24},\ \mathbf{18},\ \mathbf{5}].$

La matriz inversa es la que queda del lado derecho. Por lo que su inversa es:

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propiedad del determinante

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n.

Caso 1: A es invertible.
Si A es invertible, se puede escribir como producto de matrices elementales:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Cada matriz elemental E_i cumple la **propiedad multiplicativa**:

$$\det(E_i B) = \det(E_i)\det(B).$$

Por lo tanto,

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(B).$$

Por la propiedad de los determinantes de las matrices elementales, se tiene:

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k).$$

Por lo que:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Caso 2: A es singular.

Si A es singular, entonces $\det(A) = 0$. Además, la propiedad de los determinantes implica que el producto AB también es singular (pues la existencia de una inversa para AB implicaría que A es invertible). Por lo tanto,

$$\det(AB) = 0.$$

De este modo,

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B).$$

Conclusión: En ambos casos se cumple que:

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B).}$$

Ahora, veámoslo con un ejemplo: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Paso 1: Calculamos $\det(A)$ y $\det(B)$

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5,$$

$$\det(B) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = 40 - 42 = -2.$$

El producto de los determinantes es:

$$\det(A)\det(B) = 5 \cdot (-2) = -10.$$

Paso 2: Calculamos el producto de matrices AB

$$AB = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 10+21 & 12+24 \\ 5+28 & 6+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Calculamos $\det(AB)$

$$\det(AB) = 31 \cdot 38 - 36 \cdot 33.$$
$$31 \cdot 38 = 1178, \quad 36 \cdot 33 = 1188,$$
$$\det(AB) = 1178 - 1188 = -10.$$

Por lo que:

$$\det(AB) = -10 = \det(A)\det(B).$$

Se confirma la propiedad fundamental de los determinantes.

2. Sistemas de Ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7, \\ -2x + 4y - 2z = 1, \\ x - y + 3z = 5. \end{cases}$$

Desepejamos la variable correspondiente en cada una de las ecuaciones:

$$x = \frac{7 + y - z}{4},$$
$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4},$$
$$z = \frac{5 - x + y}{3}.$$

Vamos a suponer un valor inicial para cada una de las variables $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$ y $z^{(0)} = 0$, y se realizan las siguientes iteraciones:

Iteración 1:

$$x^{(1)} = \frac{7 + 0 - 0}{4} = 1{,}75,$$
$$y^{(1)} = \frac{1 + 2(1{,}75) + 0}{4} = 1{,}125,$$
$$z^{(1)} = \frac{5 - 1{,}75 + 1{,}125}{3} \approx 1{,}458.$$

Iteración 2:

$$x^{(2)} = \frac{7 + 1{,}125 - 1{,}458}{4} \approx 1{,}667,$$

$$y^{(2)} = \frac{1 + 2(1{,}667) + 2(1{,}458)}{4} \approx 1{,}813,$$

$$z^{(2)} = \frac{5 - 1{,}667 + 1{,}813}{3} \approx 1{,}715.$$

Iteración 3:

$$x^{(3)} = \frac{7 + 1{,}813 - 1{,}715}{4} \approx 1{,}774,$$

$$y^{(3)} = \frac{1 + 2(1{,}774) + 2(1{,}715)}{4} \approx 1{,}995,$$

$$z^{(3)} = \frac{5 - 1{,}774 + 1{,}995}{3} \approx 1{,}740.$$

Las variables convergen a aproximadamente a los siguientes valores:

$$\mathbf{x \approx 1.82}, \quad \mathbf{y \approx 2.03}, \quad \mathbf{z \approx 1.74}.$$

Sistema Homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + 4y + 6z = 0, \\ 3x + 6y + 9z = 0, \end{cases}$$

Se ve que la segunda y tercera ecuació son múltiplos de la primera, 2 y 3 respectivamente, por lo que, la ecuación a resolver sería la primera:

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Despejando x:

$$x = -2y - 3z,$$

la solución general es:

$$(x, y, z) = (-2s - 3t,\ s,\ t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Donde, **y** y **z** son arbitrarias, por lo que se dice que tiene un **número infinito de soluciones**.

3. Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

Se tienen los siguientes vectores:

$$\{(1,2,3),\ (2,4,6),\ (3,6,9)\},$$

Sin embargo, los últimos dos vectores son múltiplos del primer vector:

$$(2,4,6) = 2 \cdot (1,2,3) \quad \text{y} \quad (3,6,9) = 3 \cdot (1,2,3).$$

Por lo que, todos son colineales y el subespacio generado tiene dimensión 1. Una base es:

$$\{(\mathbf{1,2,3})\}.$$

Autovalores y autovectores

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

El se calcula el polinomio lambda con el determinante:

$$\det(G - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - (-2)^2 = (5-\lambda)^2 - 4 = 0.$$

Resolviendo el polinomio

$$(5-\lambda)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad 5 - \lambda = \pm 2,$$

se obtiene que los valores de lambda son:

$$\lambda_1 = \mathbf{3} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \mathbf{7}.$$

Para $\lambda_1 = 3$:

$$G - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $2x - 2y = 0$ nos dice que $x = y$, por lo que un autovector es:

(1,1)

Para $\lambda_2 = 7$:

$$G - 7I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $-2x - 2y = 0$ nos dice que $x = -y$, por lo que un autovector es:

(1,-1)

4. Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

El Análisis de Componentes Principales (PCA) utiliza el álgebra lineal para reducir la dimensión de los datos.

- Se calcula la matriz de covarianza de los datos.
- Se realiza una descomposición en valores propios (o SVD) de dicha matriz.
- Los autovectores asociados a los mayores autovalores indican las direcciones de mayor varianza (componentes principales).
- Al proyectar los datos sobre estas direcciones se obtiene una representación de menor dimensión que retiene la mayor parte de la información.

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Sea

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la SVD de H se sigue el siguiente procedimiento:

1. Calcular $H^T H$:

$$H^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^T H = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar los autovalores de $H^T H$:

$$\det \begin{pmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0.$$

   Las soluciones son:

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 9 - \sqrt{65}.$$

3. Los valores singulares de H son:

$$\sigma_1 = \sqrt{9+\sqrt{65}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{9-\sqrt{65}}.$$

4. Se determinan los autovectores (derechos) v_1 y v_2 de $H^T H$ asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente (normalizados, por ejemplo, $v_1 \approx (0{,}864, 0{,}502)$ y $v_2 \approx (0{,}502, -0{,}865)$).

5. Los autovectores izquierdos se obtienen mediante:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} H v_i,$$

   dando aproximadamente:

$$u_1 \approx (0{,}749, 0{,}662), \quad u_2 \approx (0{,}661, -0{,}750).$$

Finalmente, la SVD de H se expresa como:

$$H = U \Sigma V^T,$$

donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad U = [u_1 \ u_2], \quad V = [v_1 \ v_2].$$

Aplicaciones del álgebra lineal en el aprendizaje profundo

- Permite representar datos mediante vectores, matrices y tensores.

- Facilita las transformaciones lineales en las capas de las redes neuronales.
- Es esencial para el cálculo de gradientes y la optimización durante el entrenamiento.
- Se utilizan técnicas como la SVD y PCA para la reducción y compresión de modelos.

Impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA

Los espacios vectoriales proporcionan un marco para representar datos en $\mathbb{R}^n$, lo que permite:

- Medir similitudes y distancias entre datos mediante normas y productos internos.
- Reducir la dimensionalidad a través de proyecciones en subespacios, eliminando redundancias.
- Transformar y modelar datos mediante cambios de base, lo que es crucial en técnicas de reconocimiento, clasificación y clustering.

Esto mejora la eficiencia y precisión de los algoritmos de inteligencia artificial.