Problema 1

Un compromiso de negocios requiere 5 semanas de traslado continuo entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Los viajes se realizan saliendo de Fayetteville los lunes y regresando los miércoles. Un boleto redondo regular cuesta \$400, pero hay un descuento del 20% si el viaje cubre un fin de semana. Un boleto sencillo cuesta el 75% del precio de un boleto regular. Existen tres alternativas conocidas para minimizar el costo del traslado:

- Comprar cinco boletos regulares FYV-DEN-FYV.
- Comprar un boleto FYV-DEN, cuatro boletos DEN-FYV-DEN que incluyan fines de semana, y uno DEN-FYV.
- Comprar un boleto FYV-DEN-FYV para la primera semana y última semana, y cuatro boletos DEN-FYV-DEN para los viajes restantes.

Formulación del Problema

Parámetros

- Costo de un boleto redondo regular (FYV-DEN-FYV): \$400.
- Descuento del 20% si el boleto cubre un fin de semana: \$320 (80% de \$400).
- Costo de un boleto sencillo: 75% de \$400 = \$300.
- Duración del compromiso: 5 semanas.
- Días de viaje: Salida los lunes y regreso los miércoles.

Variables de Decisión

- x_1: Número de boletos redondos regulares FYV-DEN-FYV.
- x_2: Número de boletos redondos con descuento (que cubren un fin de semana) DEN-FYV-DEN.
- x_3: Número de boletos sencillos FYV-DEN.
- x_4: Número de boletos sencillos DEN-FYV.

Función Objetivo

Minimizar el costo total de los boletos:

$$\text{Minimizar } Z = 400x_1 + 320x_2 + 300x_3 + 300x_4$$

Restricciones

$$\begin{aligned}
\text{Viajes de ida:} \quad & x_1 + x_3 \geq 5 \\
\text{Viajes de vuelta:} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \geq 5 \\
\text{No negatividad:} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

a) Cuarta Alternativa Factible

Una cuarta alternativa factible que cumple con las restricciones del problema es:

- Comprar un boleto redondo regular FYV-DEN-FYV para la primera semana.
- Comprar cuatro boletos redondos con descuento DEN-FYV-DEN para las semanas intermedias.
- Comprar un boleto sencillo DEN-FYV para la última semana.

Valor Óptimo:

La alternativa que dé el costo mínimo será la mejor. Específicamente, tenemos:

- Costo de la alternativa 1 $= 5 \times 400 = \$2000$
- Costo de la alternativa 2 $= 0.75 \times 400 + 4 \times (0.8 \times 400) + 0.75 \times 400 = \$1880$
- Costo de la alternativa 3 $= 5 \times (0.8 \times 400) =$ **\$1600**

La alternativa 3 es la mejor porque es la más económica.

Problema 2

Un trozo de alambre de longitud L pulgadas debe utilizarse para formar un rectángulo con área máxima. El ancho w y la altura h del rectángulo están relacionados por la restricción:

$$2(w + h) = L$$

Donde w es el ancho y h la altura, ambas en pulgadas. Además, el ancho y la altura deben ser valores no negativos.

Formulación del Problema

Parámetros

- L: Longitud total del alambre (dato conocido).

Variables de Decisión

- w: Ancho del rectángulo.
- h: Altura del rectángulo.

Función Objetivo

Maximizar el área del rectángulo:

$$\text{Maximizar } A = w \times h$$

Restricciones

- La longitud del alambre limita el perímetro del rectángulo:

$$2(w + h) = L$$

- No negatividad de las variables:

$$w \geq 0, \quad h \geq 0$$

(a) Soluciones factibles:

En este caso, las alternativas para Jim y Joe son las siguientes:

Identifique dos soluciones factibles, es decir, dos combinaciones de w y h que satisfagan las restricciones.

- **Solución 1:**
$$w = \frac{L}{4}, \quad h = \frac{L}{4}$$
- **Solución 2:**
$$w = \frac{L}{6}, \quad h = \frac{L}{3}$$

(b) Mejor solución:

- **Solución 1:**
$$w = \frac{L}{4}, \quad h = \frac{L}{4}$$
El área correspondiente es:
$$A_1 = w \times h = \frac{L}{4} \times \frac{L}{4} = \frac{L^2}{16}$$
- **Solución 2:**
$$w = \frac{L}{6}, \quad h = \frac{L}{3}$$
El área correspondiente es:
$$A_2 = w \times h = \frac{L}{6} \times \frac{L}{3} = \frac{L^2}{18}$$

Como $\frac{L^2}{16} > \frac{L^2}{18}$, la **Solución 1** ($w = \frac{L}{4}$, $h = \frac{L}{4}$) es más óptima, ya que produce un área mayor.

Sustitución en las Restricciones:

Sustituyendo $w = \frac{L}{4}$ y $h = \frac{L}{4}$ en la restricción $2(w + h) = L$ y además, suponiendo que no son negativas:

$$2\left(\frac{L}{4} + \frac{L}{4}\right) = 2\left(\frac{L}{2}\right) = \mathbf{L}$$

Por lo tanto, la solución $w = h = \frac{L}{4}$ satisface la restricción:

$$\mathbf{2(w + h) = L}$$

Problema 3

Continuando con el problema anterior, determine la solución óptima del problema, maximizando el área del rectángulo. Sugerencia: Exprese la función objetivo (el área) en términos de una sola variable usando la restricción dada, y aplique cálculo diferencial para encontrar el máximo.

$$2(w + h) = L$$

Donde w es el ancho y h la altura, ambas en pulgadas. Además, el ancho y la altura deben ser valores no negativos.

Formulación del Problema

Parámetros

- L: Longitud total del alambre (dato conocido).

Variables de Decisión

- w: Ancho del rectángulo.
- h: Altura del rectángulo.

Función Objetivo

Maximizar el área del rectángulo:

$$\text{Maximizar } A = \frac{L}{2}w - w^2$$

Restricciones

- La longitud del alambre limita el perímetro del rectángulo:

$$2(w + h) = L$$

- No negatividad de las variables:

$$w \geq 0, \quad h \geq 0$$

Valor Óptimo:

Utilizando cálculo diferencial. La restricción es:

$$2(w + h) = L$$

Despejamos h:

$$h = \frac{L}{2} - w$$

La función objetivo (el área) es:

$$A(w) = w\left(\frac{L}{2} - w\right) = \frac{L}{2}w - w^2$$

Derivamos $A(w)$ con respecto a w:

$$\frac{dA}{dw} = \frac{L}{2} - 2w$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar el punto crítico:

$$\frac{L}{2} - 2w = 0 \implies w = \frac{L}{4}$$

Sustituyendo $w = \frac{L}{4}$ en la expresión para h:

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2A}{dw^2} = -2$$

Como la segunda derivada es negativa, el punto crítico corresponde a un máximo.

$$\mathbf{w = h =}\frac{L}{4}$$

la cual requiere la construcción de una forma cuadrada.

Sustitución en las Restricciones:

Sustituyendo $w = \frac{L}{4}$ y $h = \frac{L}{4}$ en la restricción $2(w + h) = L$:

$$2\left(\frac{L}{4} + \frac{L}{4}\right) = 2\left(\frac{L}{2}\right) = L$$

Por lo tanto, la solución $w = h = \frac{L}{4}$ satisface la restricción:

$$\mathbf{2(w + h) = L}$$