Problema 4

Cuatro personas (Amy, Jim, John y Kelly) desean cruzar un río utilizando una canoa que solo puede llevar a dos personas a la vez. Cada persona tarda un tiempo diferente en remar:

- Amy: 1 minuto
- Jim: 2 minutos
- John: 5 minutos
- Kelly: 10 minutos

El tiempo que toma el cruce para dos personas está determinado por la persona más lenta. El objetivo es encontrar el menor tiempo necesario para que las cuatro personas crucen el río, cumpliendo con las restricciones.

Formulación del Problema

Parámetros

- t_i: Tiempo que le toma a la persona i cruzar el río.
  - $t_1 = 1$ (Amy)
  - $t_2 = 2$ (Jim)
  - $t_3 = 5$ (John)
  - $t_4 = 10$ (Kelly)
- $C = 2$: Capacidad máxima de la canoa (dos personas).

Variables de decisión

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$:
  - $x_{ij} = 1$ si las personas i y j cruzan juntas en la canoa.
  - $x_{ij} = 0$ en caso contrario.
  - $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$.

- $y_i \in \{0, 1\}$:
  - $y_i = 1$ si la persona i regresa con la canoa al otro lado.
  - $y_i = 0$ en caso contrario.
- T: Tiempo total del cruce. Es la variable que queremos minimizar.

Función objetivo

Minimizar el tiempo total necesario para cruzar el río:

$$\text{Minimizar } T = \sum_{i,j} \max(t_i, t_j) \cdot x_{ij} + \sum_i t_i \cdot y_i$$

Restricciones

1. Cada persona debe cruzar al menos una vez:

$$\sum_{j \in \text{Personas}} x_{ij} + y_i \geq 1 \quad \forall i \in \text{Personas}$$

2. La canoa no puede viajar vacía:

$$\sum_{i,j \in \text{Personas}} x_{ij} + \sum_{i \in \text{Personas}} y_i \geq 1$$

3. Número máximo de viajes:

$$\sum_{i,j \in \text{Personas}} x_{ij} + \sum_{i \in \text{Personas}} y_i \leq \text{Número máximo de viajes permitidos}$$

4. El tiempo de cruce está determinado por la persona más lenta:

$$t_{ij} = \max(t_i, t_j) \quad \forall i, j \in \text{Personas}$$

5. No negatividad:

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad \forall i, j \in \text{Personas}$$

6. Restricción de consistencia en los viajes:

$$\sum_{j \in \text{Personas}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \text{Personas}$$

7. Restricción de regreso de la canoa:

$$\sum_{i \in \text{Personas}} y_i \geq \sum_{i,j \in \text{Personas}} x_{ij} - 1$$

a) Planes factibles para cruzar el río

Plan 1:

- Amy (1 minuto) y Kelly (10 minutos) cruzan. (**Kelly rema +10 minutos**).
- Amy regresa. (**+1 minuto**).
- John (5 minutos) y Amy (1 minuto) cruzan. (**John rema +5 minutos**).
- Amy regresa. (**+1 minutos**).
- Amy (1 minuto) y Jim (2 minutos) cruzan nuevamente. (**Jim rema +2 minutos**).

Tiempo total: 10 + 1 + 5 + 1 + 2 = **19 minutos**.

Plan 2:

- Amy (1 minuto) y Jim (2 minutos) cruzan. (**Jim rema +2 minutos**).
- Amy regresa. (**+1 minuto**).
- John (5 minutos) y Kelly (10 minutos) cruzan. (**Kelly rema +10 minutos**).
- Jim regresa. (**+2 minutos**).
- Amy (1 minuto) y Jim (2 minutos) cruzan nuevamente. (**Jim rema +2 minutos**).

Tiempo total: 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = **17 minutos**.

b) Criterio para Evaluar las Alternativas

El criterio principal para evaluar las alternativas es el tiempo total que toma llevar a todas las personas al otro lado del río. La alternativa con el menor tiempo total será considerada la más eficiente.

c) Menor Tiempo para Cruzar el Río

De los dos planes presentados, el **Plan 2 es más eficiente,** con un tiempo total de **17 minutos**. Este plan minimiza el tiempo total al reducir el número de viajes lentos y optimizar el uso de la canoa.

Valor Óptimo:

- Amy (1 minuto) y Jim (2 minutos) cruzan. (**Jim rema +2 minutos**).
- Amy regresa. (**+1 minuto**).
- John (5 minutos) y Kelly (10 minutos) cruzan. (**Kelly rema +10 minutos**).
- Jim regresa. (**+2 minutos**).
- Amy (1 minuto) y Jim (2 minutos) cruzan nuevamente. (**Jim rema +2 minutos**).

Tiempo total: 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = **17 minutos**.

Sustitución en las Restricciones:

1. Cada persona debe cruzar al menos una vez:

$$\begin{cases} x_{A,J} + y_A = 1 + 1 = 2 \geq 1 & \text{(Amy)} \\ x_{A,J} + y_J = 1 + 1 = 2 \geq 1 & \text{(Jim)} \\ x_{Jo,K} = 1 \geq 1 & \text{(John)} \\ x_{Jo,K} = 1 \geq 1 & \text{(Kelly)} \end{cases}$$

2. La canoa no puede viajar vacía:

$$x_{A,J} + x_{Jo,K} + y_A + y_J = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \geq 1$$

3. Número máximo de viajes:

$$x_{A,J} + x_{Jo,K} + y_A + y_J = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \leq 5$$

4. El tiempo de cruce está determinado por la persona más lenta:

$$\begin{cases} t_{A,J} = \max(1,2) = 2 & \text{(Amy y Jim)} \\ t_{Jo,K} = \max(5,10) = 10 & \text{(John y Kelly)} \end{cases}$$

5. No negatividad:

$$x_{A,J} = 1 \geq 0, \quad x_{Jo,K} = 1 \geq 0, \quad y_A = 1 \geq 0, \quad y_J = 1 \geq 0$$

6. Restricción de consistencia en los viajes:

$$\begin{cases} x_{A,J} = 1 \leq 1 & \text{(Amy)} \\ x_{A,J} = 1 \leq 1 & \text{(Jim)} \\ x_{Jo,K} = 1 \leq 1 & \text{(John)} \\ x_{Jo,K} = 1 \leq 1 & \text{(Kelly)} \end{cases}$$

7. Restricción de regreso de la canoa:

$$y_A + y_J = 1 + 1 = 2 \geq x_{A,J} + x_{Jo,K} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

Problema 5

En un juego de béisbol, Jim es el lanzador y Joe es el bateador. Supongamos que Jim puede lanzar una bola rápida o una curva al azar. Si Joe predice correctamente una curva, puede mantener un promedio de bateo de 0.500. De otra manera, si Jim lanza una curva y Joe está preparado para una bola rápida, su promedio de bateo se mantiene por debajo de 0.200. Por otra parte, si Joe predice correctamente una bola rápida, mantiene un promedio de bateo de 0.300, pero si predice mal y está preparado para una curva, su promedio es de solo 0.100.

Formulación del Problema

Parámetros

Los parámetros dados en el problema son los siguientes:

- Si Joe predice correctamente una **curva**, su promedio de bateo es 0.500.
- Si Joe predice incorrectamente una **curva** (Jim lanza una curva y Joe predice una bola rápida), su promedio de bateo es 0.200.
- Si Joe predice correctamente una **bola rápida**, su promedio de bateo es 0.300.
- Si Joe predice incorrectamente una **bola rápida** (Jim lanza una bola rápida y Joe predice una curva), su promedio de bateo es 0.100.

Variables de decisión

- Para Jim (Lanzador):
  - p: Probabilidad de que Jim elija lanzar una **bola rápida**.
  - $1-p$: Probabilidad de que Jim elija lanzar una **curva**.
- Para Joe (Bateador):
  - q: Probabilidad de que Joe elija predecir una **bola rápida**.
  - $1-q$: Probabilidad de que Joe elija predecir una **curva**.

Función Objetivo

La función objetivo depende de la perspectiva:

- **Perspectiva de Joe (Maximizar su promedio de bateo)**:

  $$\text{Maximizar} \quad 0.300pq+0.100p(1-q)+0.200(1-p)q+0.500(1-p)(1-q)$$

- **Perspectiva de Jim (Minimizar el promedio de bateo de Joe)**:

  $$\text{Minimizar} \quad 0.300pq+0.100p(1-q)+0.200(1-p)q+0.500(1-p)(1-q)$$

Restricciones

Las restricciones del problema son las siguientes:

1. Restricciones de probabilidad para Jim:

$$p + (1 - p) = 1$$

2. Restricciones de probabilidad para Joe:

$$q + (1 - q) = 1$$

3. Restricciones de no negatividad: Las probabilidades deben ser mayores o iguales a cero:

$$0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1$$

(a) Definición de las alternativas

En este caso, las alternativas para Jim y Joe son las siguientes:

- **Alternativas de Jim (lanzador):**
  - Lanzar una bola rápida (denotado por R).
  - Lanzar una bola curva (denotado por C).
- **Alternativas de Joe (bateador):**
  - Prepararse para una bola rápida (denotado por R).
  - Prepararse para una bola curva (denotado por C).

(b) Función objetivo y diferencias con la optimización común

El objetivo es maximizar el promedio de bateo de Joe, dado el comportamiento aleatorio de los lanzamientos de Jim. Para formularlo, utilizamos una matriz de pagos que describe las ganancias (promedio de bateo) dependiendo de las decisiones de ambos jugadores.

Joe/Jim	R	C
R	0.3	0.1
C	0.5	0.2

El objetivo es que Joe maximice su promedio de bateo, lo que implica que él debe elegir la estrategia que maximice su promedio esperado de bateo, dado que el lanzamiento de Jim es aleatorio.

La función objetivo para Joe es maximizar su promedio de bateo esperado, el cual se puede calcular como una combinación ponderada de las alternativas de Jim (ya que Jim lanza aleatoriamente). Por lo tanto, el promedio de bateo esperado de Joe ($E[Joe]$) es:

$$0.300pq + 0.100p(1-q) + 0.200(1-p)q + 0.500(1-p)(1-q)$$

Donde:
- p es la probabilidad de que Jim lance una bola rápida,
- $1-p$ es la probabilidad de una curva de Jim,
- q es el promedio de bateo de Joe cuando se prepara para una bola rápida,
- $1-q$ es el promedio de bateo de Joe cuando se prepara para una curva.

Diferencia con la optimización común

Este problema no se resuelve de manera común (maximización o minimización directa de un criterio) porque las decisiones de los jugadores dependen de la incertidumbre sobre lo que el otro jugador elegirá. En lugar de un problema de optimización clásico con un solo objetivo y criterios fijos, este es un juego de estrategias mixtas. La solución óptima se obtiene cuando ambos jugadores eligen estrategias probabilísticas para maximizar su resultado esperado, lo que se traduce en un equilibrio de Nash en el que ambos jugadores no tienen incentivos para cambiar su estrategia dado que la otra parte sigue su curso.

Valor Óptimo

- **Estrategia Óptima de Jim**:
  - Lanzar una **bola rápida** con probabilidad 0.8.
  - Lanzar una **curva** con probabilidad 0.2.
- **Estrategia Óptima de Joe**:
  - Predecir una **bola rápida** con probabilidad 0.6.
  - Predecir una **curva** con probabilidad 0.4.

- **Promedio de Bateo de Joe (Mínimo)**:

$$0.300 \cdot 0.8 \cdot 0.6 + 0.100 \cdot 0.8 \cdot 0.4 + 0.200 \cdot 0.2 \cdot 0.6 + 0.500 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = \mathbf{0.260}$$

Sustitución en las Restricciones:

- Para Jim:

$$p + (1 - p) = 0.8 + 0.2 = 1 \quad \text{(Se cumple)}$$
$$0 \leq p = \mathbf{0.8} \leq 1 \quad \text{(Se cumple)}$$

- Para Joe:

$$q + (1 - q) = 0.6 + 0.4 = 1 \quad \text{(Se cumple)}$$
$$0 \leq q = \mathbf{0.6} \leq 1 \quad \text{(Se cumple)}$$

Restricciones de Equilibrio

- Para Jim:

$$0.300q + 0.200(1 - q) = 0.300 \cdot 0.6 + 0.200 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.08 = 0.26$$

$$0.100q + 0.500(1 - q) = 0.100 \cdot 0.6 + 0.500 \cdot 0.4 = 0.06 + 0.20 = 0.26$$
$$0.26 = \mathbf{0.260} \quad \text{(Se cumple)}$$

- Para Joe:

$$0.300p + 0.100(1 - p) = 0.300 \cdot 0.8 + 0.100 \cdot 0.2 = 0.24 + 0.02 = 0.26$$

$$0.200p + 0.500(1 - p) = 0.200 \cdot 0.8 + 0.500 \cdot 0.2 = 0.16 + 0.10 = 0.26$$
$$0.26 = \mathbf{0.260} \quad \text{(Se cumple)}$$