Actividad 8: Laboratorio de Álgebra Lineal

Gerardo Enrique Torres Flores 2064063

22 de febrero de 2025

Problema 1

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss–Jordan:

$$3x - y + 2z = 7,$$
$$-2x + 4y + z = -3,$$
$$5x + 2y - 3z = 10.$$

Primero, escribimos la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right].$$

Dividimos la primera fila por 3 para obtener un *1* en la primera fila:

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right].$$

Hacemos *0* en la fila 2 y 3 para la variable x:

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1.$$

$$
\begin{aligned}
-2+2(1) &= 0,\\
4+2\Big(-\frac{1}{3}\Big) &= 4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3},\\
1+2\Big(\frac{2}{3}\Big) &= 1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3},\\
-3+2\Big(\frac{7}{3}\Big) &= -3+\frac{14}{3}=\frac{-9+14}{3}=\frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1.$$

$$
\begin{aligned}
5-5(1) &= 0,\\
2-5\Big(-\frac{1}{3}\Big) &= 2+\frac{5}{3}=\frac{6+5}{3}=\frac{11}{3},\\
-3-5\Big(\frac{2}{3}\Big) &= -3-\frac{10}{3}=-\frac{9+10}{3}=-\frac{19}{3},\\
10-5\Big(\frac{7}{3}\Big) &= 10-\frac{35}{3}=\frac{30-35}{3}=-\frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

La matriz nos queda:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3}\\
0 & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} & \frac{5}{3}\\
0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{5}{3}
\end{array}\right].
$$

Hacemos *1* la segunda fila en la variable y:

$$R_2 \leftarrow \frac{3}{10}R_2 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 1,\ \frac{7}{10},\ \frac{1}{2}).$$

La matriz queda:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3}\\
0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2}\\
0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{5}{3}
\end{array}\right].
$$

Repetimos el mimso proceso haciendo *0* en la primera y tercera fila para la variable y:

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{3}R_2.$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{7}{30}=\frac{20}{30}+\frac{7}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10},\\
&\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}+\frac{1}{6}=\frac{14}{6}+\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{11}{3}R_2.$$

$$-\frac{19}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{7}{10} = -\frac{19}{3} - \frac{77}{30} = -\frac{190}{30} - \frac{77}{30} = -\frac{267}{30} = -\frac{89}{10},$$
$$-\frac{5}{3} - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{3} - \frac{11}{6} = -\frac{10}{6} - \frac{11}{6} = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}.$$

La matriz nos queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{89}{10} & -\frac{7}{2} \end{array}\right].$$

Hacemos *1* la tercera fila en la variable z: Multiplicamos la fila 3 por $-\frac{10}{89}$ para obtener un 1 en la posición (3,3):

$$R_3 \leftarrow -\frac{10}{89}R_3 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 0,\ 1,\ \frac{35}{89}).$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{89} \end{array}\right].$$

Repetimos el mimso proceso que en los pasos anteriores haciendo *0* en la primera y segunda fila para la variable z:

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{9}{10}R_3.$$

$$\frac{5}{2} - \frac{9}{10} \cdot \frac{35}{89} = \frac{5}{2} - \frac{315}{890} = \frac{2225}{890} - \frac{315}{890} = \frac{1910}{890} = \frac{191}{89}.$$

$$(1,\ 0,\ 0,\ \frac{191}{89}).$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{7}{10}R_3.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{10} \cdot \frac{35}{89} = \frac{445}{890} - \frac{245}{890} = \frac{200}{890} = \frac{20}{89}.$$

$$(0,\ 1,\ 0,\ \frac{20}{89}).$$

La matriz aumentada finalmente nos queda como:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{191}{89} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{89} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{89} \end{array}\right].$$

La solución del sistema es:

$$\boldsymbol{x =}\frac{\mathbf{191}}{\mathbf{89}}, \quad \boldsymbol{y =}\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{89}}, \quad \boldsymbol{z =}\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{89}}.$$

Problema 2

Determine todas las soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0, \\ 2x - y + 3z &= 0, \\ -x + 4y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

La escribimos en forma de matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Para la fila 2:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1.$$

$$\begin{aligned} 2 - 2(1) &= 0, \\ -1 - 2(1) &= -3, \\ 3 - 2(-1) &= 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Para la fila 3:

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1.$$

$$
\begin{aligned}
-1+1&=0,\\
4+1&=5,\\
2+(-1)&=1.
\end{aligned}
$$

La matriz nos queda:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & 0\\
0 & -3 & 5 & 0\\
0 & 5 & 1 & 0
\end{array}\right].
$$

Multiplicamos la fila 2 por $-\frac{1}{3}$ para obtener un *1*:

$$
R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 1,\ -\frac{5}{3},\ 0).
$$

Para la fila 1:

$$
R_1 \leftarrow R_1 - R_2.
$$

$$
\begin{aligned}
1-0&=1,\\
1-1&=0,\\
-1-\left(-\frac{5}{3}\right)&=-1+\frac{5}{3}=\frac{-3+5}{3}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Para la fila 3:

$$
R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2.
$$

$$
\begin{aligned}
5-5(1)&=0,\\
1-5\left(-\frac{5}{3}\right)&=1+\frac{25}{3}=\frac{3+25}{3}=\frac{28}{3}.
\end{aligned}
$$

La matriz va quedando de la siguiente forma:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{3} & 0\\
0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0\\
0 & 0 & \frac{28}{3} & 0
\end{array}\right].
$$

Multiplicamos la fila 3 por $\frac{3}{28}$ para obtener un *1*:

$$
R_3 \leftarrow \frac{3}{28}R_3 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 0,\ 1,\ 0).
$$

Para la fila 1:

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{2}{3}R_3.$$

Para la fila 2:

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{5}{3}R_3.$$

La matriz aumentada finalmente nos queda como:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La solución al sistema es:

$$\boldsymbol{x = 0}, \quad \boldsymbol{y = 0}, \quad \boldsymbol{z = 0}.$$

Solución trivial.

Problema 3

Encuentre la inversa de la matriz si existe.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

Calculamos el determinante:

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - (-2)(4) = 8,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2)(3) = 1 + 6 = 7,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 4.$$

$$\det(A) = 2 \cdot 8 + 7 + 3 \cdot 4 = 16 + 7 + 12 = 35 \neq 0.$$

La inversa se calcula como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A^T).$$

La adjunta es:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 4 \\ 13 & -7 & -11 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

La trasponemos:

$$\mathrm{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 2 \\ -7 & -7 & 7 \\ 4 & -11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nos queda que la inversa es:,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \mathbf{\frac{1}{35}} \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{13} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-11} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Problema 4

Determine si la siguiente matriz es ortogonal:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Una matriz es ortogonal si se verifica que el producto punto de sus vectores es **0**.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \mathbf{0}.$$

La matriz *B* es ortogonal.

Problema 5

Explique la importancia de las matrices en la optimización lineal y resuelva un problema de transporte usando matrices.

En programación lineal, las matrices ***permiten representar de forma compacta el sistema de restricciones y la función objetivo***. Por ejemplo, en un problema de transporte se utilizan:

- Un vector de oferta (disponibilidad).
- Un vector de demanda (requerimiento).
- Una matriz de costos, donde cada entrada representa el costo de transportar una unidad desde un origen hasta un destino.

Ejemplo práctico:

Supongamos tres fábricas F_1, F_2 y F_3 con oferta de 20, 30 y 25 unidades, respectivamente, y tres almacenes A_1, A_2 y A_3 con demanda de 10, 35 y 30 unidades. La matriz de costos es:

	A_1	A_2	A_3
F_1	8	6	10
F_2	9	7	4
F_3	3	4	2

Aplicando el método de la esquina noroeste:

1. Desde F_1 a A_1: asignamos $\min(20, 10) = 10$ unidades. Queda oferta de $F_1 = 10$ y A_1 queda satisfecho.
2. Con la oferta restante de F_1, se asignan 10 unidades a A_2 (demanda restante de A_2 es 25).
3. Desde F_2 a A_2: se asignan $\min(30, 25) = 25$ unidades. Queda $F_2 = 5$ y A_2 se satisface.
4. El remanente de F_2 (5 unidades) se asigna a A_3.
5. Finalmente, F_3 suministra 25 unidades a A_3 para satisfacer la demanda restante.

El costo total se calcula:

$$\begin{aligned} F_1 \to A_1: &\quad 10 \cdot 8 = 80, \\ F_1 \to A_2: &\quad 10 \cdot 6 = 60, \\ F_2 \to A_2: &\quad 25 \cdot 7 = 175, \\ F_2 \to A_3: &\quad 5 \cdot 4 = 20, \\ F_3 \to A_3: &\quad 25 \cdot 2 = 50. \end{aligned}$$

Costo total: $80 + 60 + 175 + 20 + 50 = \mathbf{385}$.

Problema 6

Determine el rango de la matriz y explique su significado en un contexto de programación lineal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix},$$

Todas las filas son linealmente dependientes, ya que son múltiplos de la primera fila; doble, triple y cuádruple, respectivamente. Por lo que el **rango es 1**.

$$\boldsymbol{R = 1}$$

En programación lineal, el rango indica el número de ecuaciones linealmente independientes. Por lo que nos dice si hay ***restricciones redundantes***.

Problema 7

Encuentre la factorización LU de la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Escribimos la matriz de forma $D = LU$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix}.$$

- $u_1 = 4$.
- $u_2 = 3$.
- $l \cdot u_1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
- $l \cdot u_2 + u_3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2} \cdot 3 + u_3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad u_3 = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$.

Por lo que la factorización es:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Problema 8

Resuelva el sistema mediante factorización LU:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 6, \\ 2x + 3y + 3z &= 14, \\ y + 4z &= 8. \end{aligned}$$

Escribimos el sistema en forma matricial $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$A = LU$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

- **Para el renglón 1:**

$$u_{11} = 1, \quad u_{12} = 2, \quad u_{13} = 1.$$

- **Para el renglón 2:**

$$l_{21}\, u_{11} = 2 \quad \Longrightarrow \quad l_{21} = 2.$$

Luego,

$$l_{21}\, u_{12} + u_{22} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot 2 + u_{22} = 3 \quad \Longrightarrow \quad u_{22} = -1,$$

y

$$l_{21}\, u_{13} + u_{23} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot 1 + u_{23} = 3 \quad \Longrightarrow \quad u_{23} = 1.$$

- **Para el renglón 3:**

$$l_{31}\, u_{11} = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_{31} = 0.$$

Luego,

$$l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 + l_{32}\,(-1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad l_{32} = -1,$$

y

$$l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + u_{33} = 4 \quad \Longrightarrow \quad 0 + (-1) \cdot 1 + u_{33} = 4 \quad \Longrightarrow \quad u_{33} = 5.$$

Por lo tanto:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos para $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 6, \\ 2y_1 + y_2 &= 14 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = 14 - 2 \cdot 6 = 2, \\ -y_2 + y_3 &= 8 \quad \Longrightarrow \quad y_3 = 8 + 2 = 10. \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} 5z &= 10 \quad \Longrightarrow \quad z = 2, \\ -y + z &= 2 \quad \Longrightarrow \quad -y + 2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 0, \\ x + 2y + z &= 6 \quad \Longrightarrow \quad x + 0 + 2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 4. \end{aligned}$$

La solución del sistema es:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{4}, \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{z} = \mathbf{2}.$$

Problema 9

Determine si la siguiente matriz es diagonalizable y justifique su respuesta:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz E tiene un único valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2. Por lo tanto, como la matriz es de dimensión 2 y el espacio propio es 1, $1 \neq 2$.

$\boldsymbol{E}$ no es diagonalizable.

Problema 10

Explique y aplique el método de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 10x + 2y - z &= 27, \\ -3x - 6y + 2z &= -61, \\ x + y + 5z &= -21. \end{aligned}$$

El método de Jacobi es un procedimiento iterativo para resolver sistemas lineales de la forma $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Se despeja cada variable en función de las demás. La convergencia será correcta si la matriz A es diagonalmente dominante.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \, x_j^{(k)} \right).$$

Despejando la variable principal para cada ecuación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \frac{27 - 2y + z}{10}, \\ \boldsymbol{y} &= \frac{61 - 3x + 2z}{6}, \\ \mathbf{z} &= \frac{-21 - x - y}{5}. \end{aligned}$$

Hay que generar las siguientes aproximaciones:

$$x^{(k+1)} = \frac{27 - 2y^{(k)} + z^{(k)}}{10},$$
$$y^{(k+1)} = \frac{61 - 3x^{(k)} + 2z^{(k)}}{6},$$
$$z^{(k+1)} = \frac{-21 - x^{(k)} - y^{(k)}}{5}.$$

Iterando con los valores iniciales $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, se aproxima:.
Iteración 1:

$$x^{(1)} = \frac{27 - 2 \cdot 0 + 0}{10} = 2{,}7,$$
$$y^{(1)} = \frac{61 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{6} \approx 10{,}1667,$$
$$z^{(1)} = \frac{-21 - 0 - 0}{5} = -4{,}2.$$

Iteración 2:

$$x^{(2)} = \frac{27 - 2 \cdot (10{,}1667) + (-4{,}2)}{10} \approx 0{,}24666,$$
$$y^{(2)} = \frac{61 - 3 \cdot (2{,}7) + 2 \cdot (-4{,}2)}{6} \approx 7{,}41667,$$
$$z^{(2)} = \frac{-21 - 2{,}7 - 10{,}1667}{5} \approx -6{,}77333.$$

Se continua hasta que converge a un solo valor cada variable, por lo que la solución al sistema es aproximadamente:

$$\boldsymbol{x} \approx \mathbf{0.52}, \quad \boldsymbol{y} \approx \mathbf{7.94}, \quad \boldsymbol{z} \approx \textbf{-5.89}$$