Problema 6

Durante la construcción de una casa, se deben recortar seis viguetas de 24 pies cada una a la longitud correcta de 23 pies. La operación de recortar una vigueta implica la siguiente secuencia:

Operación	Tiempo (segundos)
1. Colocar la vigueta en caballetes de aserrar	15
2. Medir la longitud correcta (23 pies)	5
3. Marcar la línea de corte para la sierra circular	5
4. Recortar la vigueta a la longitud correcta	20
5. Apriar las viguetas recortadas en un área designada	20

Intervienen tres personas: Dos deben realizar al mismo tiempo las operaciones 1, 2 y 5, y un cortador se ocupa de las operaciones 3 y 4. Hay dos pares de caballetes de aserrar donde se colocan las viguetas sin recortar, y cada par puede manejar tres viguetas. Sugiera un buen plan para recortar las seis viguetas.

Formulación del Problema

Parámetros

- Número de viguetas: 6
- Longitud inicial: 24 pies
- Longitud final: 23 pies
- Número de personas disponibles: 3

Variables de decisión

- P_{ij}: Tiempo que la persona i dedica a la tarea j.
- y_j: Tiempo total para completar la tarea j.

Función objetivo

Minimizar el tiempo total para completar todas las tareas:

$$\text{Minimizar } T = \sum_{j} y_j$$

Restricciones

1. Cada vigueta debe ser recortada:

$$\sum_{i} P_{ij} \geq 1 \quad \forall j$$

2. El tiempo total para cada tarea no debe exceder el tiempo disponible:

$$y_j \leq \text{Tiempo máximo disponible} \quad \forall j$$

3. No negatividad:

$$P_{ij} \geq 0, \quad y_j \geq 0 \quad \forall i, j$$

Valor Óptimo:

1. De 0 a 20 segundos

- P_1 y P_2 colocan la primera vigueta en el primer par de caballetes y miden la longitud.
- P_1 y P_2 colocan la segunda vigueta en el segundo par de caballetes y miden la longitud.
- P_1 y P_2 esperan en el primer par de caballetes.

2. De 20 a 45 segundos

- P_1 y P_2 colocan la tercera vigueta en el primer par de caballetes y miden la longitud.
- P_1 y P_2 colocan la cuarta vigueta en el segundo par de caballetes y realizan la medición.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la primera vigueta en el primer par de caballetes.

3. De 45 a 80 segundos

- P_1 y P_2 apilan la primera vigueta recortada en el área designada.
- P_1 y P_2 colocan la quinta vigueta en el segundo par de caballetes y miden la longitud.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la segunda vigueta en el segundo par de caballetes.

4. De 80 a 115 segundos

- P_1 y P_2 colocan la sexta vigueta en el primer par de caballetes y realizan la medición.
- P_1 y P_2 apilan la segunda vigueta recortada en el área designada.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la tercera vigueta en el primer par de caballetes.

5. De 115 a 150 segundos

- P_1 y P_2 apilan la tercera vigueta recortada en el área designada.
- P_1 y P_2 esperan hasta que P_3 marque y recorte la cuarta vigueta.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la cuarta vigueta en el segundo par de caballetes.

6. De 150 a 185 segundos

- P_1 y P_2 esperan que P_3 marque y recorte la quinta vigueta.
- P_1 y P_2 apilan la cuarta vigueta recortada en el área designada.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la quinta vigueta en el primer par de caballetes.

7. De 185 a 220 segundos

- P_1 y P_2 apilan la quinta vigueta recortada en el área designada.
- P_1 y P_2 esperan hasta que P_3 marque y recorte la sexta vigueta.
- P_3 marca la línea de corte y recorta la sexta vigueta en el segundo par de caballetes.

8. De 220 a 240 segundos

- P_1, P_2 y P_3 terminan sus deberes.

El tiempo óptimo son: 240 segundos.

Sustitución en las Restricciones:

1. **De 0 a 20 segundos:**
   - P_1 y P_2 colocan y miden las primeras dos viguetas.
   - $P_{11} = 1$, $P_{21} = 1$, $P_{12} = 1$, $P_{22} = 1$.
   - $y_1 = 20$, $y_2 = 20$.
2. **De 20 a 45 segundos:**
   - P_1 y P_2 colocan y miden las siguientes dos viguetas.
   - P_3 recorta la primera vigueta.
   - $P_{13} = 1$, $P_{23} = 1$, $P_{34} = 1$.
   - $y_3 = 25$, $y_4 = 25$.
3. **De 45 a 80 segundos:**
   - P_1 y P_2 apilan la primera vigueta y colocan la quinta vigueta.
   - P_3 recorta la segunda vigueta.
   - $P_{15} = 1$, $P_{25} = 1$, $P_{36} = 1$.
   - $y_5 = 35$, $y_6 = 35$.
4. **De 80 a 115 segundos:**

- P_1 y P_2 colocan la sexta vigueta y apilan la segunda vigueta.
- P_3 recorta la tercera vigueta.
- $P_{17} = 1$, $P_{27} = 1$, $P_{38} = 1$.
- $y_7 = 35$, $y_8 = 35$.

5. **De 115 a 150 segundos:**
   - P_1 y P_2 apilan la tercera vigueta.
   - P_3 recorta la cuarta vigueta.
   - $P_{19} = 1$, $P_{29} = 1$, $P_{310} = 1$.
   - $y_9 = 35$, $y_{10} = 35$.
6. **De 150 a 185 segundos:**
   - P_1 y P_2 apilan la cuarta vigueta.
   - P_3 recorta la quinta vigueta.
   - $P_{111} = 1$, $P_{211} = 1$, $P_{312} = 1$.
   - $y_{11} = 35$, $y_{12} = 35$.
7. **De 185 a 220 segundos:**
   - P_1 y P_2 apilan la quinta vigueta.
   - P_3 recorta la sexta vigueta.
   - $P_{113} = 1$, $P_{213} = 1$, $P_{314} = 1$.
   - $y_{13} = 35$, $y_{14} = 35$.
8. **De 220 a 240 segundos:**
   - P_1, P_2, y P_3 terminan sus deberes.
   - $y_{15} = 20$.

- **Cada vigueta es recortada:** $P_{3j} = 1$ para cada vigueta j.
- **Tiempo no excedido:** $y_j \leq 240$ para todas las tareas j.
- **No negatividad:** $P_{ij} \geq 0$, $y_j \geq 0$ para todos i, j.

Problema 7

Se construye una pirámide bidimensional con cuatro capas. La capa inferior tiene 4 puntos, la siguiente 3 puntos, luego 2, y la última capa tiene un solo punto. Invierta la pirámide para que la capa inferior tenga 1 punto y la superior 4, cambiando la posición de los puntos.

Parámetros

- Número de capas: 4
- Puntos por capa original (de abajo a arriba): $[4, 3, 2, 1]$
- Puntos por capa objetivo (invertida): $[1, 2, 3, 4]$
- Total de puntos: 10

Variables de decisión:

- x_{ij}: Número de puntos movidos de la capa original i a la capa objetivo j, donde $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

Restricciones:

1. **Agotar puntos de cada capa original:**

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \text{puntos en capa original } i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

2. **Satisfacer demanda de cada capa objetivo:**

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = \text{puntos en capa objetivo } j \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

3. **No negatividad y enteros:**

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{y enteros} \quad \forall i, j$$

(a) Identifique dos soluciones factibles.

- Solución 1: Mover el punto superior a la base.
- Solución 2: Intercambiar los puntos de las capas intermedias.

(b) Determine el número mínimo de movimientos necesarios para invertir la pirámide.

El número mínimo de movimientos necesarios es 10.

Valor Óptimo:

Sea x_{ij} el número de puntos movidos de la capa original i a la capa objetivo j, donde $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned}
&\text{Capa 1 (4 puntos):} && x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 4 \\
&\text{Capa 2 (3 puntos):} && x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 3 \\
&\text{Capa 3 (2 puntos):} && x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2 \\
&\text{Capa 4 (1 punto):} && x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Capa objetivo 1 (1 punto):} && x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
&\text{Capa objetivo 2 (2 puntos):} && x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 2 \\
&\text{Capa objetivo 3 (3 puntos):} && x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 3 \\
&\text{Capa objetivo 4 (4 puntos):} && x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 4
\end{aligned}$$

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}$$

- **(a)** Dos soluciones factibles:

1. Mover cada punto individualmente (10 movimientos).
2. Intercambiar capas completas (si se permite como acción única).

- **(b)** Número mínimo de movimientos: $\boxed{10}$

Sustitución en las Restricciones:

1. **Capa 1 (4 puntos):**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 0 + 1 + 2 + 1 = 4 \quad \checkmark$$

2. **Capa 2 (3 puntos):**

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 0 + 0 + 2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

3. **Capa 3 (2 puntos):**

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \quad \checkmark$$

4. **Capa 4 (1 punto):**

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \quad \checkmark$$

Restricciones de demanda (puntos objetivo)

1. **Capa objetivo 1 (1 punto):**

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \quad \checkmark$$

2. **Capa objetivo 2 (2 puntos):**

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \quad \checkmark$$

3. **Capa objetivo 3 (3 puntos):**

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 + 1 + 1 + 0 = 3 \quad \checkmark$$

4. **Capa objetivo 4 (4 puntos):**

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 3 + 1 + 0 + 0 = 4 \quad \checkmark$$

Asignación final válida:

$$\begin{aligned}
&x_{12} = 1,\ x_{13} = 1,\ x_{14} = 2 \quad \text{(Capa 1)} \\
&x_{23} = 1,\ x_{24} = 2 \quad \text{(Capa 2)} \\
&x_{31} = 1,\ x_{32} = 1 \quad \text{(Capa 3)} \\
&x_{41} = 1 \quad \text{(Capa 4)}
\end{aligned}$$

Total de movimientos:

$$1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = \boxed{10} \quad \checkmark$$

Problema 8

Cuenta con cuatro cadenas y cada una consta de tres eslabones sólidos. Tiene que hacer un brazalete conectando las cuatro cadenas; romper un eslabón cuesta 2 centavos, y volverlo a soldar 3 centavos.

Parámetros

- $n = 4$: Número de cadenas
- $m = 3$: Eslabones por cadena
- $c_r = 2$: Costo por romper un eslabón (centavos)
- $c_s = 3$: Costo por soldar un eslabón (centavos)

Variables de Decisión

$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

donde x_i representa el número de eslabones rotos de la cadena i.

Función Objetivo

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{4} (c_r + c_s) x_i = 5 \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Restricciones

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 3 \qquad \text{(Conexión del brazalete)} \qquad (1)$$

$$0 \leq x_i \leq 3 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \qquad \text{(Límite de eslabones)} \qquad (2)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \qquad \text{(Integridad)} \qquad (3)$$

Valor Óptimo:

La solución 2 propuesta y desglozada en el apartado a), muestra el romper tres eslabones de una cadena ($x_i = 3$) y usarlos para conectar las otras tres. Esto genera un **costo mínimo de 15 centavos**.

Sustitución en las Restricciones:

- **Cumple la conexión:** $\sum x_i = 3 + 0 + 0 + 0 = 3$
- **Respeta límites:** $x_1 \leq 3$
- **Costo mínimo:** $Z = 5(3) = 15$ centavos

(a) Identifique dos soluciones factibles y evalúelas.

- Solución 1: Romper un eslabón de cada cadena y soldarlos para formar un brazalete. Costo: $4 \times (2+3) = 20$ **centavos.**
- Solución 2: Romper tres eslabones de una cadena y usarlos para conectar las otras tres. Costo: $3 \times (2+3) = 15$ **centavos.**

(b) Determine el costo mínimo para hacer el brazalete.

El costo mínimo es 15 centavos.

Problema 9

Los cuadros de una tabla rectangular de 11 filas y 9 columnas están numerados en secuencia del 1 al 99 con una recompensa monetaria oculta de entre 0 y 20 dólares, asignada a cada cuadro. El juego consiste en que un jugador elige un cuadrado seleccionando cualquier número de dos dígitos y luego restando al número seleccionado la suma de sus dos dígitos. El jugador recibe entonces la recompensa asignada al cuadro seleccionado. Sin importar cuántas veces se repita el juego, ¿qué valores monetarios deben asignarse a los 99 cuadros para minimizar la recompensa de los jugadores? Para hacer el juego interesante, asignar $0 a todos los cuadros no es una opción.

Formulación del Problema

Parámetros

- i: 99 cuadros
- r: $0 a $20

Variables de decisión

- r_i: Recompensa asignada al cuadro i.

Función objetivo

Minimizar la suma total de las recompensas:

$$\text{Minimizar } R = \sum_i r_i$$

Restricciones

1. Cada recompensa debe estar dentro del rango permitido:

$$0 \leq r_i \leq 20 \quad \forall i$$

2. No todos los cuadros pueden tener recompensa $0:

$$\sum_i r_i > 0$$

3. La recompensa debe ser mayor a $0 (No negatividad):

$$r_i > 0 \quad \forall i$$

Tabla de números del 1 al 99

1	12	23	34	45	56	67	78	89
2	13	24	35	46	57	68	79	90
3	14	25	36	47	58	69	80	91
4	15	26	37	48	59	70	81	92
5	16	27	38	49	60	71	82	93
6	17	28	39	50	61	72	83	94
7	18	29	40	51	62	73	84	95
8	19	30	41	52	63	74	85	96
9	20	31	42	53	64	75	86	97
10	21	32	43	54	65	76	87	98
11	22	33	44	55	66	77	88	99

Valor Óptimo:

2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	5	7	9	11	13	15	17	10
4	6	8	10	12	14	16	9	11
5	7	9	11	13	15	8	10	12
6	8	10	12	14	7	9	11	13
7	9	11	13	6	8	10	12	14
8	10	12	5	7	9	11	13	15
9	11	4	6	8	10	12	14	16
10	3	5	7	9	11	13	15	17
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	5	7	9	11	13	15	17	19

Sustitución en las Restricciones:

Restricción 1: Recompensa mínima

Para cada cuadro i, la recompensa mínima debe ser al menos \$1:

$$x_i - (\text{suma de los dígitos de } i) \geq 1$$

Sustituyendo $x_i = (\text{suma de los dígitos de } i) + 1$:

$$(\text{suma de los dígitos de } i) + 1 - (\text{suma de los dígitos de } i) \geq 1$$

Simplificando:

$$1 \geq 1$$

Esta restricción se cumple para todos los cuadros.

Restricción 2: Rango de valores asignados

Los valores asignados deben estar entre \$0 y \$20:

$$0 \leq x_i \leq 20$$

Dado que la suma de los dígitos de cualquier número entre 1 y 99 es como máximo 18 (para el número 99, $9 + 9 = 18$), entonces:

$$x_i = (\text{suma de los dígitos de } i) + 1 \leq 18 + 1 = 19$$

Por lo tanto, x_i está en el rango de 1 a 19, lo que cumple con la restricción de estar entre 0 y 20.

Restricción 3: No todos los valores pueden ser cero

Para mantener el juego interesante, no todos los x_i pueden ser cero:

$$\sum_{i=1}^{99} x_i > 0$$

Dado que cada x_i es al menos 1:

$$\sum_{i=1}^{99} x_i \geq 99 \times 1 = 99 > 0$$

Ejemplo:

- Cuadro 99: $r_{99} = 9 + 9 + 1 = 19$. Recompensa final: $19 - 18 = \$1$.
- Cuadro 45: $r_{45} = 4 + 5 + 1 = 10$. Recompensa final: $10 - 9 = \$1$.