INF1132 Session Automne 2022
Devoir 2

Professeurs : Srečko Brlek, kelrB okčerS

Nom : NIARE YAYA

Code permanent : NIAY84360305

1	2	3	4	5	**Total**
/ 20	/ 20	/ 20	/ 20	/ 20	/ 100

Directives

1. Le devoir doit être rédigé **individuellement** et remis **avant le 8 décembre 2022 avant midi**.
2. **Aucun retard** n'est permis, car la solution sera mise en ligne après l'heure limite de remise.
3. Votre document doit être **rédigé en LaTeX** , à partir du modèle fourni incluant la page de couverture.
4. Vous devez remplir cette page comme page couverture pour vous identifier lors de la remise de votre devoir sinon votre travail **ne sera pas corrigé**.
5. Vous devez remettre sur Moodle **un fichier compressé (.zip) contenant le pdf de votre devoir ET le code LaTeX ayant servi à le générer.**
6. Pour que votre devoir soit corrigé, l'archive doit obligatoirement être nommée : **VOTRECODEPERMANENT_INF1132_DEVOIR2.zip**.
7. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses.
8. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées.

Question 1 sur les algorithmes et la complexité (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (10 points)

Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ une suite d'entiers naturels. Considérons l'algorithme suivant

```
1:  procedure Mystere(T : Tableau d'entiers)
2:      n ← Longueur(T)
3:      i ← 0
4:      tant que i < n − 1 faire
5:          p ← i
6:          pour j ← i + 1, i + 2, ..., n − 1 faire
7:              si T[j] < T[p] alors p ← j
8:              fin si
9:          fin pour
10:         t ← T[p]; T[p] ← T[i]; T[i] ← t
11:         i ← i + 1
12:     fin tant que
13: fin procedure
```

(**5** pts) 1) Faites une trace de l'exécution de l'algorithme `Mystere` dans le cas de la suite

`T = (-3, 0, 10, -11, 0, 13, -9, 17).`

Plus précisément, vous devez donner les valeurs de `i`, `p` et `T[0]`,`T[1]`,`T[2]`,...,`T[7]` après chaque itération de la boucle extérieure **tant que** (à la ligne 10).

i	p	T[0]	T[1]	T[2]	T[3]	T[4]	T[5]	T[6]	T[7]
		-3	0	10	-11	0	13	-9	17
0	3	-11	0	10	-3	0	13	-9	17
1	6	-11	-9	10	-3	0	13	0	17
2	3	-11	-9	-3	10	0	13	0	17
3	4	-11	-9	-3	0	10	13	0	17
4	6	-11	-9	-3	0	0	10	13	17
5	6	-11	-9	-3	0	0	10	13	17
6	6	-11	-9	-3	0	0	10	13	17

(**2** pts) 2) Que fait cet algorithme ?

RÉPONSE : Cet algorithme permet de trier de dans l'ordre croissant le suite de nombre entier a = (a1, a2 , ... , an).

(**3** pts) 3) Donnez un estimé avec la notation $\mathcal{O}$ du nombre de comparaisons effectuées par cet algorithme en fonction de n.

RÉPONSE : Je donne une notation $\mathcal{O}$ du nombre de comparaisons éffectuées en fonction de n :
Soit x le nombre de comparaison :
$x = ((n + (n - 1)) + (n + (n - 3)) + ... + 1) + n - 1$
$x = n^2 + (n - 1)$ donc x est $\mathcal{O}(n^2)$

(**5** pts) 4) **Question Bonus**. Donnez un exemple de tableau d'entiers pour le **pire cas** et un exemple pour le **meilleur cas** de l'algorithme `Mystere` et donner dans chacun des cas le nombre de comparaisons effectuées

RÉPONSE : Le pire ou le meilleur des cas dependent de la longueur du tableau. Je donne un exemple de tableau d'entier et nombre de comparaison éffectuée :
T = (7,0,32,-3,2,-17) ; n=6 ;
x =$6^2 + (6 - 1)$
x = 41 donc il y'aura 41 comparaisons éfféctuées dans le pire ou le meilleur des cas.

Partie B (10 points)

Soit deux ensembles `A = {-1,0,1,2,3,4,5}` et `B = {a,b,c,d,e,f,g,h}`. On considère la fonction `F: A --> B` donnée comme sous-ensemble $\mathtt{R}_F \subseteq \mathtt{A} \times \mathtt{B}$

$$
\begin{aligned}
R_F &= \{(x, F(x)) | x \in A\} \\
&= \{(-1, g), (0, a), (1, e), (2, d), (3, d), (4, f), (5, c))\}
\end{aligned}
$$

(**2** pts) 1) Donner la représentation de `F` par la table T définie par

$$T[x, y] = 1 \text{ si } F(x) = y; \quad T[x, y] = 0 \text{ si } F(x) \neq y.$$

F	a	b	c	d	e	f	g	h
-1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0

(**4** pts) 2) Donner un algorithme pour décider si une fonction représentée par un tableau est injective.

fonction EST_INJECTIVE(T : Tableau d'entiers) : booléen
    $n, m \leftarrow Longueur(T)$
    $i \leftarrow 0$
    si $i >= n$ **alors** retourner faux
    fin si
    tant que $i < n$ **faire**
        $j \leftarrow 0$
        $x \leftarrow 0$
        tant que $j < m$ **faire**
            si $F(T[i]) = T[j]$ **alors** $T[i, j] \leftarrow 1$
                Sinon $T[i, j] \leftarrow 0$
            fin si
            $x = x + T[i, j]$
            $j \leftarrow j + 1$
        fin tant que

```
        si x ≠ 1 alors retourner faux
        fin si
        i ← i + 1
    fin tant que
    retourner vraie
fin fonction
```

Donner la complexité (en pire cas et meilleur cas) de cet algorithme en fonction de $|A| = n$ et $|B| = m$ pour une fonction

(i) injective : Lorsqu'une fonction est injective, la complèxité est de :
Pour le meilleur et le pire cas est $\mathcal{O}(n)$, car il y'a $(2m+1)*n+2n+2$ comparaisons.

(ii) non injective : Lorsqu'une fonction n'est pas injective, la complèxité est de :
Pour le meilleur des cas : $\mathcal{O}(1)$ car il y'a qu'une comparaison.
Pour le pire cas : $\mathcal{O}(n)$ car il y'a $(2m + 1) * n + 2n + 1$ comparaison.

Justifiez vos réponses.
Lorsqu'une fonction est injective, tous les éléments seront parcourus jusqu'au dernier, donc toutes comparaisons possibles seront faites dans le meilleur ou le pire des cas. Alors la complèxité est de $\mathcal{O}(n)$:
$n * (2m + 1) + (2n + 1) + 1$.
Exemple : $|A| = 3$ et $|B| = 5$
Le nombre Nb de comparaison éffectuée est :
$Nb = 3 * (10 + 1) + (6 + 1) + 1 = 41$
Lorsqu'une fonction n'est pas injective, dans le meilleur des cas il fera 1 comparaison sinon dans le pire des cas il fera une comparaison de moins qu'une fonction injective.

(**4** pts) 3) Donner un algorithme pour décider si une fonction représentée par un tableau est surjective

```
fonction Est_Surjective(T : Tableau d'entiers) : booléen
    n, m ← Longueur(T)
    j ← 0
    si j >= m alors retourner faux
    fin si
    tant que j < m faire
        i ← 0
        x ← 0
        tant que i < n faire
            si F(T[i]) = T[j] alors T[i, j] ← 1
                Sinon T[i, j] ← 0
            fin si
            x = x + T[i, j]
            j ← j + 1
        fin tant que
        si x = 0 alors retourner faux
        fin si
        i ← i + 1
    fin tant que
    retourner vraie
fin fonction
```

Donner la complexité (en pire cas et meilleur cas) de cet algorithme en fonction de $|A| = n$ et $|B| = m$ pour une fonction

(i) injective : Lorsqu'une fonction est injective, la complèxité est de $\mathcal{O}(m)$ pour le meilleur et le pire cas car le nombre de comparaison est de :
$(2n + 1) * m + 2m + 2$.

(ii) non injective : Lorsqu'une fonction n'est pas injective, la complèxité est de :
Pour le meilleur des cas $\mathcal{O}(1)$.
Pour le pire cas : $\mathcal{O}(m)$ car il y'a $(2n + 1) * m + 2m + 1$ comparaison.

Justifiez vos réponses. Lorsqu'une fonction est surjective, tous les éléments seront parcourus jusqu'au dernier, donc toutes comparaisons possibles seront faites dans le meilleur ou le pire des cas. Alors la complèxité est de $\mathcal{O}(m)$:
$m * (2n + 1) + (2m + 1) + 1$.
Exemple : $|A| = 3$ et $|B| = 5$
Le nombre Nb de comparaison éffectuée est :
$Nb = 5 * (6 + 1) + (10 + 1) + 1 = 41$

Lorsqu'une fonction n'est pas surjective, dans le meilleur des cas il fera 1 comparaison sinon dans le pire des cas il fera une comparaison de moins qu'une fonction surjecctive.

Question 2 sur les entiers et la division (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (8 points)
Dans ce qui suit on utilise la base $\mathbb{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pour écrire les nombres.

(**1** pts) 1. Donner la table d'addition des nombres en base $\mathbb{B}$;

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

(**1** pts) 2. Donner la table de multiplication des nombres en base $\mathbb{B}$;

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	15	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

(**1** pts) 3. Calculer $x = 123454321 + 4142$;

REPONSE : Je calcule : $x = 123454321 + 4142$
$x = 123502503$

(**1** pts) 4. Calculer $y = x * 215$;

REPONSE : Je calcule : $y = x * 215$
$y = 31531132153$

(**2** pts) 5. Convertir y dans la base $\mathbb{D} = \{0, 1, 2\}$.

REPONSE : converssion des y en base D :
$y = 111222210022200120$

(**2** pts) 6. Donner la liste ordonnée des nombres premiers inférieurs ou égaux à 135 (ici 135 désigne un nombre écrit en base $\mathbb{B}$) ;

> REPONSE : Je donne a liste ordonnée des nombres premiers inférieurs ou égaux à 135 en base $\mathbb{B}$:
> Convertissons 135 en base 10 :
> 135 en base $\mathbb{B}$est égal à 59 en base 10.
> La liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 59 en base 10 sont :
> $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59$.
> Je les convertis en base $\mathbb{B}$:
> $2, 3, 5, 11, 15, 21, 25, 31, 35, 45, 51, 101, 105, 111, 115, 125, 135$.

Partie B (12 points)

Dans cette partie, on utilise la base décimale usuelle. Soit la suite $S_n = 3^n - 4 \mod 13$

(**4** pts) 1. Calculer les 15 premiers termes de la suite.

La suite des 15 premiers termes est ;

$$(10, 12, 5, 10, 12, 5, 10, 12, 5, 10, 12, 5, 10, 12, 5)$$

(**8** pts) 2. Déterminer la forme des entiers naturels n tels que $3^n - 4 \equiv 10 \mod 13$.
Conseil : formuler une hypothèse en examinant les premiers termes puis utiliser une démonstration par induction pour conclure.

Théorème.
Soit n un entier naturel, $3^n - 4 \equiv 10 \mod 13$ si et seulement si n est un multiple de 3, $n = 3k$ avec $k \in N$
Démonstration
pour $n = 0$, $3^0 - 4 \equiv 10 \mod 13$
pour $n = 3$, $3^3 - 4 \equiv 10 \mod 13$
pour $n = 6$, $3^6 - 4 \equiv 10 \mod 13$
Vu que la relation $3^n - 4 \equiv 10 \mod 13$ n'est vraie que si n prend des multiples de 3 alors $n = 3 * k$, avec k est un entier naturel.

- **Initialisation**.
  $k = 0$
  $n = 0$
  $P(n) = 3^0 - 4 \equiv ? \mod 13$
  $P(n) = -3 \equiv 10 \mod 13$ vraie
- **Hérédité**.
  Supposons vraie la proposition P(n) et verifions au rang n+3 : $3^{n+3} - 4 \equiv ? \mod 13$
  $3^n * 3^3 - 4 \equiv ? \mod 13$
  or 3^n dans ce cas $n = 3k$, donc n est multiple de 3.
  3^3 dans ce cas $n = 3$, donc n est multiple de 3.
  donc dans $(3^n * 3^3)$, n est multiple de 3
  $(3^n * 3) - 4 \equiv 10 \mod 13$
- **Conclusion**.
  On a obtenue que $3^0 - 4 \equiv 10 \mod 13$ est vraie, cette même proposition est vraie au rang n et n+3 donc, $\forall k \in N, n = 3k$, $3^n - 4 \equiv 10 \mod 13$ est vraie.

Question 3 sur l'induction et la récursivité (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (10 points) Définitions inductives

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de chaînes binaires, défini récursivement de la manière suivante :

- **Cas de base.** $\varepsilon \in \mathcal{B}$;
- **Règles récursives.** Si la chaîne $b \in \mathcal{B}$, alors,

  R1. $1b0 \in \mathcal{B}$ (règle 1)

  R2. $0b1 \in \mathcal{B}$ (règle 2)

  R3. $bb \in \mathcal{B}$ (règle 3)

(**2** pts) **1)** Parmi les chaînes binaires suivantes, lesquelles sont des éléments de $\mathcal{B}$?
00101011, 000000, 0101, 01010101, 11001100, 0, 0110110, 010101010101

RÉPONSE : $00101011 \in \mathcal{B}$
$0101 \in \mathcal{B}$
$01010101 \in \mathcal{B}$
$11001100 \in \mathcal{B}$
$010101010101 \in \mathcal{B}$

(**2** pts) **2)** Calculer toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ de longueur $n < 11$

RÉPONSE : Je calcule les chaînes de $\mathcal{B}$ de longueur $n < 11$:
Si la chaîne $\mathcal{B}$ est de longueur n=2, le nombre de chaîne est de 2
Les chaines de B de longueur 2 :
01
10.
Si $\mathcal{B}$ est de longueur n=4, alors le nombre de chaîne est de 4.
Les chaines de B de longueur 4 :
0101
0011
1010
1100
Si $\mathcal{B}$ est de longueur n=6, alors le nombre de chaîne est de 8.
Les chaines de B de longueur 6 :
001011
001101
010101

010011
101010
101100
110100
110010
Si $\mathcal{B}$ est de longueur n=8, alors le nombre de chaîne est de 16.
Les chaines de B de longueur 8 :
00101011
00101101
00110011
00110101
01001011
01001101
01010011
01010101
10101010
10101100
10110010
10110100
11001010
11001100
11010010
11010100
Si $\mathcal{B}$ est de longueur n=10, alors le nombre de chaîne est de 32.
Les chaines de B de longueur 10 :
0101010101
0101010011
0101001101
0101001011
0100110101
0100110011
0100101101
0100101011
0011010101
0011010011
0011001101
0011001011
0010110101
0010110011
0010101101
0010101011
1101010100

1101010010
1101001100
1101001010
1100110100
1100110010
1100101100
1100101010
1011010100
1011010010
1011001100
1011001010
1010110100
1010110010
1010101100
1010101010

(**3** pts) **3)** Montrer que toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ ont un nombre égal de 0 et de 1.

RÉPONSE : Les chaînes de $\mathcal{B}$ sont des chaînes binaires. On obtient les nombres binaires à partir du reste de la division euclidiènne d'un nombre par 2, or il n'y a que deux restes possibles après une division par 2, (0 ou 1). Alors on peut conclure que toutes les chaînes binaires sont composées que de 0 et de 1, étant donné que $\mathcal{B}$ est une chaine binaire alors elle est compte que des 0 et des 1.

(**3** pts) **4)** Montrer que toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ sont de longueur paire

RÉPONSE : $\mathcal{B}$ est une chaîne binaire qui repond aux règles suivants :
$1b0 \in \mathcal{B}$, $0b1 \in \mathcal{B}$ et $bb \in \mathcal{B}$
b est une séquence binaire qui peut-être une chaîne vide ou peut prendre plusieurs chaînes de longueur 2 (01 ou 10).
Vu cette configuration est peut importe le nombre de b ajouté, on obtiendra une chaine de longueur paire car le produit de tout entier par 2 sera pair.
Donc toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ sont de longueur paire.

Partie B (10 points) Algorithmes récursifs

Pour calculer le plus grand commun diviseur de deux entiers positifs on peut utiliser l'algorithme suivant :

---

fonction Pgcd(a,b : Entiers)
  si (a mod $b = 0$) **alors**
    retourner (b)
  sinon
    retourner Pgcd(b, a mod b)
  fin si
fin fonction

(**5** pts) **1)** Faites la trace d'exécution de cet algorithme sur l'appel

$$\text{Pgcd}(420, 567)$$

RÉPONSE :

$NbreAppel$	$Pgcd$
1	$(567, 420)$
2	$(420, 147)$
3	$(147, 126)$
4	$(126, 21) = 21$

(**5** pts) **2)** Déterminez le nombre d'appels effectués en fonction de n dans le cas des appels suivants :

$$\text{Pgcd}(F_{n-1}, F_n) \quad \text{et} \quad \text{Pgcd}(F_n, F_{n-1}),$$

où F_n est la suite définie par $F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$. Pour vous donner une idée, essayez de calculer Pgcd$(34, 55)$ et Pgcd$(55, 34)$.

RÉPONSE :
Je determine le nombre d'appels effectués en fonction de n :
je calcule d'abord Pgcd$(34, 55)$

$NbreAppel$	$Pgcd$
1	$(34, 55)$
2	$(55, 34)$
3	$(34, 21)$
4	$(21, 13)$
5	$(13, 8)$
6	$(8, 5)$
7	$(5, 3)$

8	$(3,2)$
9	$(2,1) = 1$

je calcule d'abord Pgcd$(55, 34)$

$NbreAppel$	$Pgcd$
1	$(55, 34)$
2	$(34, 21)$
3	$(21, 13)$
4	$(13, 8)$
5	$(8, 5)$
6	$(5, 3)$
7	$(3, 2)$
8	$(2, 1) = 1$

Conclusion : On peut en-conclure que :
Pour trouver le Pgcd(F_{n-1}, F_n) on fait $n-1$ appels.
Pour trouver le Pgcd(F_n, F_{n-1}) on fait $n-2$ appels.

QUESTION 4 SUR LES RELATIONS (**20** POINTS)

Les parties A et B sont indépendantes.

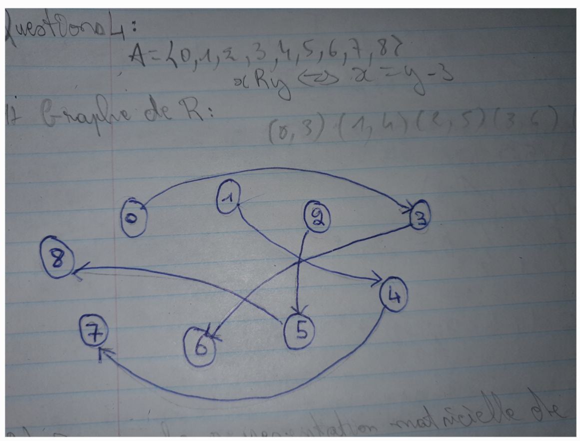
Partie A (12 points)

Soit R la relation sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ définie par

$$xRy \iff x = y - 3 \quad \text{(on note aussi } (x, y) \in R\text{)}.$$

(**2** pts) **1.** Dessiner le graphe de R.

RÉPONSE :



(**2** pts) **2.** Donner la représentation matricielle de R.

RÉPONSE : $M_R=$ $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

(**2** pts) **3.** La relation R est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? Justifiez vos réponses.

RÉPONSE :
La relation R n'est pas réflexive car x n'est pas en relation avec lui même.
La relation R n'est pas symétrique car $(x, y) \in R$ mais (y, x) n'appatient pas à R
La relation R est antisymétrique car $(x, y) \in R$ mais (y, x) n'appatient pas à R

(**2** pts) **4.** Soit T la fermeture transitive de R. Dessiner le graphe ou donner la matrice de T.

RÉPONSE : T la fermeture transitive de R :

$M_T=$ $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

(**2** pts) **5.** Soit S la fermeture symétrique de R. Dessiner le graphe ou donner la matrice de S.

RÉPONSE : S la fermeture symétrique de R :

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(**2** pts) **6.** Soit U la fermeture symétrique de T. Dessiner le graphe ou donner la matrice de U. U est-elle transitive ?

RÉPONSE : U la fermeture symétrique de T :

$$M_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette relation n'est pas transitive car dans certains cas $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ mais (x, x) n'appartient pas à R.
Exemple : 1 est en relation avec 7 (1,7) et 7 est en relation avec 1 (7,1) mais 1 n'est pas en relation avec 1 (1,1).

Partie B (8 points)

Soit P la relation sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ définie par

$$xPy \Longleftrightarrow x = y - 3,$$

et W la plus petite relation d'équivalence contenant P.

(**4** pts) **1.** Décrire les classes de W.

RÉPONSE : Je decris les classes de W :
Classe 0 : 0 est en relation avec 3, 3 est en reltion avec 6, 6 est en relation avec 9, ... , on constate que tous ces nombres cités sont des multiples de 3. W étant une relation d'équivalence alors en faisant la fermeture refléxive, transitive et symétrique, alors l'ensemble des multiples de 3 deviennent une classe de W.
On peut noter la relation W par : $xWy \Longleftrightarrow x \equiv y \mod 3$
Classe 1 : 1 est en relation avec 4, 4 est en reltion avec 7, 7 est en relation avec 10, ... on constate que tous ces nombres cités sont des multiples de 3 augmentés de 1. W étant une relation d'équivalence alors en faisant la fermeture refléxive, transitive et symétrique, alors l'ensemble des multiples de 3 plus 1 deviennent une classe de W.
On peut noter la relation W par : $xWy \Longleftrightarrow x \equiv y \mod 3$
Classe 2 : 2 est en relation avec 5, 5 est en reltion avec 8, 8 est en relation avec 11, ... on constate que tous ces nombres cités sont des multiples de 3 diminués de 1. W étant une relation d'équivalence alors en faisant la fermeture refléxive, transitive et symétrique, alors l'ensemble des multiples de 3 moins 1 deviennent une classe de W.
On peut noter la relation W par : $xWy \Longleftrightarrow x \equiv y \mod 3$

(**4** pts) **2.** Donner un représentant pour chaque classe.

RÉPONSE :
Représentant de la classe 0 : [0] ;
Représentant de la classe 1 : [1] ;
Représentant de la classe 2 : [2] ;

(**4** pts) **3.** (Bonus) Généraliser : pour toute relation Q_n définie par $xQ_ny \Longleftrightarrow x = y - n$, décrire les classes de la plus petite relation d'équivalence qui contient Q_n.

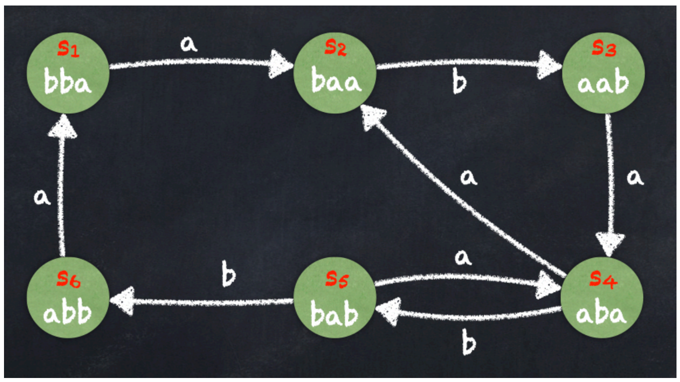
RÉPONSE :
En général, on peut dire que toute relation Q_n definie par $xQ_ny \Longleftrightarrow x = y - n$, ont $n-1$ classes de la plus petite relation d'équivalence qui contient Q_n. La classe d'équivalent 0 represente l'ensemble des multiples de n, ensuite la classe d'equivalence 1 represente l'ensemble des multiples de n plus 2, ainsi de suite jusqu'a la classe d'equivalence $n - 1$ qui represenera l'ensemble des multiples de n moins 1.

Question 5 sur les graphes (**20** points)

A tout mot $w = w_0, w_1, \ldots, w_n - 1$ sur un alphabet fini A on associe le *graphe des mots* de longueur k, noté $G_k = (S_k, E_k)$ construit récursivement de la manière suivante :

1. $S_k = \{w[0..(k-1)]\}; E_k = \{\}$;
2. Pour $i = 0, 1, 2, n-k-1$, et
   - $E_k = E_k \cup \{w[i..(i+k)]\}$;
   - $S_k = S_k \cup \{w[(i+1)..(i+k)]\}$.

Par exemple, considérons le mot $w = bbaababaababba$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Son graphe $G_3(w)$ est le graphe orienté G suivant :



où le premier sommet s_1 est étiqueté par $w[0..2] = bba$, le deuxième s_2 est étiqueté par $w[1..3] = baa$ et l' arc e_1 allant de s_1 à s_2, est étiqueté par $w[0..3] = bba.a$. Cependant nous n'avons mis que la lettre a (par économie), car le début bba est déjà écrit dans le sommet s_1.

(**2** pts) 1) Donner sa représentation sous forme de liste d'adjacence.

RÉPONSE :
$s_1 \rightarrow s_2$
$s_2 \rightarrow s_3$
$s_3 \rightarrow s_4$
$s_4 \rightarrow s_2 + s_5$
$s_5 \rightarrow s_4 + s_6$
$s_6 \rightarrow s_1$

(**5** pts) 2) Donner sa représentation sous forme de matrice :
a) d'adjacence étiquetée L_G, et non-étiquetée M_G ;
b) d'incidence.

a) la matrice d'adjacence étiquetée et non-étiquetée sont

$$L_G = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) La matrice d'incidence est donnée par :
A partir des dennées de l'enoncé, j'ai trouvé la correspondance de e_1, e_2, ... :
$e_1 \Longleftrightarrow s_1 \Longrightarrow s_2$
$e_2 \Longleftrightarrow s_2 \Longrightarrow s_3$
$e_3 \Longleftrightarrow s_3 \Longrightarrow s_4$
$e_4 \Longleftrightarrow s_4 \Longrightarrow s_5$
$e_5 \Longleftrightarrow s_5 \Longrightarrow s_4$
$e_6 \Longleftrightarrow s_4 \Longrightarrow s_2$
$e_7 \Longleftrightarrow s_5 \Longrightarrow s_6$
$e_8 \Longleftrightarrow s_6 \Longrightarrow s_1$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
s_1	1	0	0	0	0	0	0	-1
s_2	-1	1	0	0	0	-1	0	0
s_3	0	-1	1	0	0	0	0	0
s_4	0	0	-1	1	-1	1	0	0
s_5	0	0	0	-1	1	0	1	0
s_6	0	0	0	0	0	0	-1	1

(**4** pts) 3) Donner pour chaque sommet, les degrés intérieur et extérieur.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
d^+	1	1	1	2	2	1
d^-	1	2	1	2	1	1

(**4** pts) 4) Quel est le nombre de chemins distincts de longueur 4 dans G ?

RÉPONSE :Le nombre de chemins distincts de longueur 4 dans G sont :

$$(Nb_G)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(Nb_G)^4 = 21$
Donc on a 21 chemins distincts de longueur 4 dans G.

(**5** pts) 5) Quelle est la longueur des chemins les plus courts entre toute paire de sommets distincts ?

RÉPONSE :
Pour trouver la longueur des chemins les plus courts entre toute paire de sommets distincts, il s'agit de trouver les chemins de longueur 1 qui est donnés par la puissance 1 de la matrice d'adjacence, puis celles de longueur 2 qui est donné par la puissance 2 de a matrice d'adjacence, ainsi de suite jusqu'au plus grand nombre de chemin dans notre cas c'est à dire 5.
Ensuite on éliminera de $(M_G)^2$ tous les chemins qui sont dans $(M_G)^1$, puis on éliminera de $(M_G)^3$ tous les chemins qui sont dans $(M_G)^1$ et $(M_G)^2$, ainsi de suite jusqu'à obtenir dans chaque matrice des chemins différentes.
Dès lors le nombre de chemin de $(M_G)^1$ sera les chemins les plus courts entre les deux sommets concernés. Chemins de longueur 1 :

$$(M_G)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y'a 8 chemins qui sont les plus courts entre deux chemins distincts et qui sont de longueur 1
Chemins de longueur 2, Avant et après élimination des éléments de $(M_G)^1$:

$$(M_G)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (M_G)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y'a 11 chemins qui sont les plus courts entre deux chemins distincts et qui sont de longueur 2

Chemins de longueur 3, Avant et après élimination des éléments de $(M_G)^1$ et $(M_G)^2$:

$$(M_G)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (M_G)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y'a 7 chemins qui sont les plus courts entre deux chemins distincts et qui sont de longueur 3
Chemins de longueur 4, Avant et après élimination des éléments de $(M_G)^1$, $(M_G)^2$ et $(M_G)^3$:

$$(M_G)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (M_G)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y'a 4 chemins qui sont les plus courts entre deux chemins distincts et qui sont de longueur 4
Chemins de longueur 5, Avant et après élimination des éléments de $(M_G)^1$, $(M_G)^2$, $(M_G)^3$ et $(M_G)^4$:

$$(M_G)^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (M_G)^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y'a 3 chemins qui sont les plus courts entre deux chemins distincts et qui sont de longueur 5