INF1132 Session Automne 2022
Devoir 1

Professeurs : Srečko Brlek, kelrB okčerS

Nom: YAYA NIARE

Code permanent: NIAY84110301

1	2	3	4	5	**Total**
/ 50	/ 30	/ 40	/ 40	/ 40	/ 200

Directives

1. Le devoir doit être rédigé **individuellement** et remis **avant le 20 octobre 2022 avant midi**.
2. **Aucun retard** n'est permis, car la solution sera mise en ligne après l'heure limite de remise.
3. Votre document doit être **rédigé en LaTeX** , à partir du modèle fourni incluant la page de couverture.
4. Vous devez remplir cette page comme page couverture pour vous identifier lors de la remise de votre devoir sinon votre travail **ne sera pas corrigé**.
5. Vous devez remettre sur Moodle **un fichier compressé (.zip) contenant le pdf de votre devoir ET le code LaTeX ayant servi à le générer.**
6. Pour que votre devoir soit corrigé, l'archive doit obligatoirement être nommée :
VOTRECODEPERMANENT_INF1132_DEVOIR1.zip.
7. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses.
8. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées.

Question 1 sur la logique propositionnelle (**50** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit l'opérateur logique $\diamondsuit$ tel que p $\diamondsuit$ q est faux dans tous les cas sauf quand la proposition p est fausse et la proposition q est vraie.

a) Donner la table de vérité de l'opérateur logique $\diamondsuit$ ci-dessous.

RÉPONSE:
Je donne la table de vérité de l'opérateur logique $\diamondsuit$ ci-dessous.

p	q	p $\diamondsuit$ q
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

b) Est-ce que l'opérateur $\diamondsuit$ est un opérateur logique commutatif ? Expliquer.

REPONSE: Cette opérateur est un opérateur logique commutatif car elle n'est vraie que quand p est fausse et q est vraie alors même si on fait une commutation entre p et q on obtiendra les mêmes valeurs de verité. $p \diamondsuit q$ équivaut à $q \diamondsuit p$

c) En utilisant la table de vérité, prouver que $p \diamondsuit q \iff \neg p \wedge q$.

RÉPONSE: En utilisant la table de vérité, je prouve que $p \diamondsuit q \iff \neg p \wedge q$.

p	q	p $\diamondsuit$ q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

D'après la table de vérité on remarque que p $\diamondsuit$ q et $\neg p \wedge q$
ont exactement les mêmes valeurs de vérité, donc ils sont équivalents.

Partie B

On suppose que les 4 propositions suivantes sont **toutes vraies** :

1. $A \to B$
2. $C \to D$
3. $A \vee C$
4. $\neg D$

Quelle(s) valeur(s) de vérité peuvent prendre les propositions A, B, C et D ? Justifier.

RÉPONSE: Je trouve les valeurs de vérité que peuvent prendre les propositions A, B, C et D puis je justifie:

$A \to B$: A peut prendre vrai si B prend vrai, A peut prendre faux si B prend vrai et A peut prendre faux si B prend faux. Dans tous ces différents cas la proposition $A \to B$ est vraie, car $A \to B$ signifie que A est equivaut à B, et cette proposition n'est fausse que quand A est vraie et que B est fausse.

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$C \to D$: C peut prendre vrai si D prend vrai, C peut prendre faux si D prend vrai et C peut prendre faux si D prend faux. Dans tous ces différents cas la proposition $C \to D$ est vraie, car $C \to D$ signifie que C est equivaut à D, et cette proposition n'est fausse que quand C est vraie et que D est fausse.

C	D	$C \to D$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$A \vee C$: A peut prendre vrai si C prend vrai, A peut prendre vrai si C prend faux et A peut prendre faux si C prend vrai. Dans tous ces différents cas la proposition $A \vee C$ est vraie, car la proposition $A \vee C$ (A ou B) n'est fausse que quand A est fausse et C est fausse.

A	C	$A \vee C$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\neg D$: D ne peut prendre que faux car $\neg D$ est la négation de la proposition D.

D	$\neg D$
V	F
F	V

Table de vérité des 4 propositions:

A	B	C	D	$A \to B$	$C \to D$	$A \vee C$	$\neg D$
V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	F	V

Les 4 propositions sont vraies si A est vraie, B est vraie, C est fausse et D est fausse.

A	B	C	D	$A \to B$	$C \to D$	$A \vee C$	$\neg D$
V	V	F	F	V	V	V	V

Question 2 sur la logique des prédicats (**30** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère les énoncés suivants :

- $P(x)$: "L'étudiant x sait programmer en langage Python",
- $Q(x, y)$: "L'étudiant x est dans le groupe-cours y",

où l'univers du discours de x est l'ensemble des étudiants en informatique à l'UQAM et l'univers du discours de y est l'ensemble des groupes-cours du département d'informatique de l'UQAM.

1. Écrivez chacune des phrases suivantes sous forme d'énoncés quantifiés.

   (a) Certains étudiants savent programmer en Python.

RÉPONSE: $\exists x\ P(x)$

   (b) Les étudiants ne savent pas tous programmer en Python.

RÉPONSE: $\forall x$ ¬P(x)

   (c) Chaque groupe-cours contient au moins un étudiant.

RÉPONSE: $\forall y\ \exists x\ Q(x, y)$

   (d) Dans chaque groupe-cours, il y a un étudiant qui sait programmer en Python.

RÉPONSE: $\forall y\ \exists x,\ Q(x, y) \to P(x)$

   (e) Il y a un étudiant qui n'est dans aucun groupe-cours.

RÉPONSE: $\exists x\ \neg\forall y\ Q(x, y)$

(f) Il y a au moins un groupe-cours dans lequel aucun étudiant ne sait programmer en Python.

RÉPONSE: $\exists y\ \neg \forall x,\ Q(x,y) \rightarrow P(x)$

2. Exprimez chacun des énoncés quantifiés suivants en langage courant.

(i) $\forall x, \forall y, Q(x,y)$

RÉPONSE: L'ensemble des étudiants sont dans l'ensemble dans l'ensemble des groupe-cours.

(ii) $\forall x, \exists y, P(x) \rightarrow Q(x,y)$

RÉPONSE: Si tous les étudiants savent programmer en python, alors ils sont dans au moins un groupe-cours.

(iii) $\exists x, \forall y, P(x) \wedge \neg Q(x,y)$

RÉPONSE: Il existe un étudiant qui sait programmer en python et qui n'est dans aucun groupe-cours.

(iv) $\exists y, \forall x, Q(x,y) \rightarrow P(x)$

RÉPONSE: Il existe un groupe-cours dans lequel tous les étudiants savent programmer en python.

Partie B

Dites si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse lorsqu'on suppose que l'univers du discours est (i) $\mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{N}$ ou (iii) $\{0, 1, 2, 4\}$.

a) $\forall x \, \exists y \, (y^2 = x)$

> RÉPONSE: (i) Dans $\mathbb{R}$ la proposition est fausse, car si x est un nombre negatif, il existe aucun y qui multiplié par lui même donne un nombre negatif et aussi la racine carré des nombres negatifs n'existe pas.
> (ii) Dans $\mathbb{N}$ la proposition est fausse, car il existe des entiers naturels dont leur racine carré n'est pas un entier naturel.
> (iii) Dans $\{0, 1, 2, 4\}$. la proposition est fausse, car la racine carré de 2 ne se trouve pas dans cet ensemble.

b) $\neg\forall x \, \exists y \, (y > x)$

> RÉPONSE: (i),(ii),(iii): est une proposition fausse dans les 3 cas car pour tous x il existe un nomnbre y tel que y>x.

c) $\forall x \, \neg\exists y \, (y > x)$

> RÉPONSE:(i),(ii),(iii): est une proposition fausse dans les 3 cas car pour tous x il existe un nomnbre y tel que y>x.

d) $\exists x \, \exists y \, \exists z \, ((y \neq z) \wedge (y^2 = x) \wedge (z^2 = x))$

> RÉPONSE: (i) Dans $\mathbb{R}$ cette proposition est vraie, car le carré d'un entier naturel est le même que le carré de sont opposés. $(-2^2 = 2^2 = 4)$.
> (ii) Dans $\mathbb{N}$ cette proposition est fausse, car tous les entiers naturels ont un carré different.
> (iii) Dans $\{0, 1, 2, 4\}$. cette proposition est fausse, car tous les nombres de cet ensemble ont un carré different.

e) $\forall x \, (x \neq 1 \longrightarrow \exists y \, (2y = x))$

RÉPONSE: (i) Dans $\mathbb{R}$ cette proposition est vraie, car un réel divisé par 2 donnera toujours un réel.
(ii) Dans $\mathbb{N}$ cette proposition est fausse, car les entiers naturels impairs divisés par 2 ne donnent jamais un entier naturel.
(iii) Dans $\{0, 1, 2, 4\}$. cette proposition est vraie, car pour x privé de 1 l'expression 2y=x donne toujours une valeur de l'intervalle.

Question 3 sur les ensembles (40 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient A, B, C, D des ensembles. Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. $((B \cap A) \setminus C) \cup \left(\overline{B \oplus C} \setminus A\right) = ((A \cap B) \oplus (B \cap C)) \cup \left(\overline{A} \setminus (B \cup C)\right)$
   (Conseil: utilisez une table d'appartenance)

RÉPONSE:

A	B	C	$((B \cap A) \setminus C)$	$\left(\overline{B \oplus C} \setminus A\right)$	$((B \cap A) \setminus C) \cup \left(\overline{B \oplus C} \setminus A\right)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

A	B	C	$((A \cap B) \oplus (B \cap C))$	$\left(\overline{A} \setminus (B \cup C)\right)$	$((A \cap B) \oplus (B \cap C)) \cup \left(\overline{A} \setminus (B \cup C)\right)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1

Alors d'après la table de vérité $((B \cap A) \setminus C) \cup \left(\overline{B \oplus C} \setminus A\right) = ((A \cap B) \oplus (B \cap C)) \cup \left(\overline{A} \setminus (B \cup C)\right)$ est une proposition fausse

2. Si $A \subseteq B$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE: est une proposition fausse car si A à une intersection avec C et que A est inclus dans B alors C a forcement une intersection avec B.

3. Si $A \subseteq B$ et $B \cap C = \emptyset$, alors $A \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE: est une proposition vraie car A est inclus dans B et B n'a pas d'intersection avec C, alors il est impossible que A ait une intersection avec C.

4. Si $A \subseteq B$ et $C \cap \overline{B} \neq \emptyset$, alors $C \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

RÉPONSE: est une proposition vraie car A est inclus dans B alors $\overline{B}$ est inclus dans $\overline{A}$ donc si $\overline{B}$ a une intersection avec C par consequent $\overline{A}$ a aussi une intersection avec C.

5. Si $B \subseteq A$, $C \subseteq D$, et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE: est une proposition vraie car B est inclus dans A, C est inclus dans D et D et A n'ont pas d'intersection alors il est impossible que B et C aient une intersection.

6. Si $A \subseteq B$, $D \subseteq C$, et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE: est une proposition fausse car A est inclus dans B, D est inclus dans C, vu que A et D n'ont pas d'intersection cela ne definit en rien que B et C n'aient pas d'intersection car A et D ne sont que respectivement une partie de B et C.

7. $A \cup B = A \iff A \cap B = B$.

RÉPONSE: cette proposition est vraie car $A \cup B = A$ signifie que l'ensemble des éléments appartenant à A et B sont les éléments de A, donc B est inclus dans A et $\iff A \cap B = B$ signifie que l'ensemble des éléments que A et B ont en commun sont les éléments de B donc B est inclus dans A. En conclusion $A \cup B = A \iff A \cap B = B$. est vraie car elle signifie juste que B est inclus dans A.

Table de vérité:

A	B	$A \cup B$	$\iff A \cap B$	$A \cup B = A$	$\iff A \cap B = B.$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

$A \cup B = A \iff A \cap B = B.$
1
1
1
1

8. $A \oplus B = \emptyset \iff A = B$.

RÉPONSE: est une proposition vraie car $A \oplus B$ represente la différence symétrique entre A et B c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant seulement à A ou Seulement à B,donc si $A \oplus B = \emptyset$ alors cela signifie que A et B sont confondus (A = B).

Partie B

Soient A, B et C trois sous-ensembles de l'ensemble universel U qui satisfont les 8 conditions suivantes :

(a) $|\mathscr{P}(A \cap B \cap C)| = 128$

(b) $|B \cap C| = 17$

(c) $|A \cap C| = 12$

(d) $|A \cap B| = 14$

(e) $|A| = |B| - 1$

(f) $|B \oplus C| = 25$

(g) $|A \times B| = 756$

(h) $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\mathscr{P}(\{\varnothing\})|$

Déterminez les cardinalités des ensembles A, B, C et U en justifiant soigneusement votre raisonnement.

RÉPONSE: Je determine les cardinalités des ensembles A, B, C et U en justifiant mon raisonnement:

$|\mathscr{P}(A \cap B \cap C)| = 128$ on sais que :

$|\mathscr{P}(A)| = 2$ à la puissance $|A|$
cela signifie que :

$|\mathscr{P}(A \cap B \cap C)| = 2$ à la puissance $|\mathscr{P}(A \cap B \cap C)|$ or $128 = 2^7$,
donc—(A$\cap B \cap C)| = 7$.
7 correspond à l'intersection des 3 ensembles, c'est-à-dire les éléments qui appartiennent aux ensembles A, B et C à la fois.

$|B \cap C| = 17$:
17 correspond aux élément qui appartiennent aux ensembles B et C à la fois.
Vu que B et C ont déjà 7 éléments en commun, alors l'intersection de B et C seulement sans A est égale : 17 - 7 = 10

$|A \cap C| = 12$:
12 correspond aux élément qui appartiennent aux ensembles A et C à la fois.
Vu que A et C ont déjà 7 éléments en commun, alors l'intersection de A et C seulement sans B est égale : 12 - 7 = 5

$|A \cap B| = 14$:
14 correspond aux élément qui appartiennent aux ensembles A et B à la fois.
Vu que A et B ont déjà 7 éléments en commun, alors l'intersection de A et B seulement sans C est égale : 14 - 7 = 7

$|A| = |B| - 1$:
Cette expression signifie que l'ensemble A a un élément de moins que l'ensemble B.

$|B \oplus C| = 25$:
Cette expression signifie que l'union des ensembles B et C sans leur intersection est de 25 éléments.

$|A \times B| = 756$: Cette expression signifie que le produit cartésien des éléments de l'ensemble A par les éléments de l'ensemble B donne 756.

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\mathscr{P}(\{\varnothing\})|$;
Cette expression signifie que $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$ est égale à 2 à la puissance l'ensemble vide qui est égal à 2^0 donc $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$ est égal à 1. Par conséquent il y'a qu'un seul élément qui n'appartenant ni à l'ensemble A, ni à l'ensemble B, ni à l'ensemble C.

En utilisant le diagramme de venn j'ai dessiné les intersections $|(A \cap B \cap C)| = 7$, $|B \cap C| = 10$, $|A \cap C| = 5$ et $|A \cap B| = 7$
Puis j'ai cherchés deux entiers A et B de tel que leur produit donne 756, j'ai trouvez 27 et 28.
Vu que A a un élément de moins de que B alors $|A| = 27$ et $|B| = 27$ Ensuite j'ai soustrait les intersections de B dans 28 afin de trouvez le nombre d'élément seulement dans B, 28-(10+7+7) = 4. Donc il n'y a que 4 éléments dans B sans ses intersections. Je fais de même pour A 27-(7+7+5)=8, alors A n'a que 8 éléments sans ses intersections. Pour trouver les éléments de l'ensemble C, j'ai utilisé cette expression

$|B \oplus C| = 25$:
qui représente les éléments de B et C sans leur intersection. Alors j'ai ôté les éléments seulements dans B, l'intersection de B avec A et l'intersection de C avec A dans 25, 25-(4+7+5)=9. Dans ils y'a 9 éléments seulements dans C

Par fini j'ai trouvé $|A| = 27$, $|B| = 28$ et $|C| = 31$ par fini l'univers U est égal à la somme de A, B, C et les éléments qui n'appartiennent pas à A, B et C. $|U| = 87$. Ces réponses vérifient toutes les conditions.

Question 4 sur le dénombrement (**40** points)

A l'UQAM les chiffres en date de l'automne 2021 indiquent qu'il y avait :

- 36 960 étudiants dont 28 060 au 1er cycle, 6769 au 2e cycle et 2131 au 3e cycle; parmi ceux-là 4387 étaient des étudiants internationaux provenant de 95 pays;
- 2124 chargé(e)s de cours;
- 1143 professeur(e)s.
- 335 programmes d'études dont: 180 de premier cycle, 125 de deuxième cycle et 30 de troisième cycle

Déterminez pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. Justifiez votre réponse.

a) Il y a au moins deux étudiants qui sont dans le même programmme et qui sont nés le même jour.

b) Il y a deux étudiants internationaux qui sont dans le même programme d'études

c) Chaque professeur a au moins 2 étudiants internationaux dans un cours

d) Il y a deux professeurs qui ont la même date d'anniversaire

e) Deux chargés de cours sont nés le même jour

f) Il y a au moins deux étudiants de troisième cycle ayant la même date de naissance

g) il y a au plus deux étudiants de maitrise ayant la même date de naissance

RÉPONSE:
a) Cet énoncé est vrai, car il est vrai qu'il ait au moins 2 étudiants qui sont dans le même programme parce que il y'a 36960 étudiants et 335 programmes. Si ont choisis 336 étudiants on peut déjà affirmer qu'il y'a deux étudiants qui sont dans le même programme en disant que parmis 335 étudiants il est possible que 2 soient dans le même programme ou qu'ils soient tous dans des programmes différents alors le 336ème étudiants sera forcément le deuxième étudiant d'un programme. Vu qu'il y'a 100 fois plus d'etudiants que de programme ont peut affirmer qu'il y'a deux étudiants nés le même jour dans un même programme car ont est sûr que dans un programme il y'aura plus de 8 étudiants or, il y'a 7 jours différents, et s'il y'a 7 étudiants ou moins dans un programme il est possible qu'ils soient tous nés à des jours différents. Il y aura certitude que si dans un programme il y'a au moins huit étudiants.

b) Cet énoncé est vrai, car il y'a 4387 étudiants internationaux et 335 programmes, si on prend 336 étudiants parmis les 4387 on peut déjà affirmer avec certitude que 2 étudiants internationaux sont dans le même programme parce qu'il est obligé que parmis les 336 étudiants, 2 étudiants soient dans le même programme ou 335 soient dans des programmes différents alors le 336ème étudiant sera le deuxiéme étudiant d'un programme.

c) Cet énoncé est faux, car il y'a 1143 professeurs et 4387 étudiants internationaux, on ne peut pas affirmer avec certitude que chaque prof ait au moins 2 étudiants internationaux parce qu'il est possible qu'un ou plusieurs professeurs aient aucun ou un seul étudiant alors que d'autres professeur ont au moins deux étudiants.

d) Cet énoncé est vrai, car il y'a 1143 professeurs et 366 dates d'anniversaires parmis les 1143 professeurs, il est possible qu'avant d'atteindre 336 professeurs, 2 aient la même date d'anniversaire ou que 336 proffeseurs aient tous des dates d'anniversaires différentes, alors le 337ème professeur aura une même date d'anniversaire qu'un des 336 professeurs.

e) Cet énoncé est vrai, car il y'a 2124 chargés de cours et 7 jours, il est possible que parmis 7 chargés de cours 2 soient nés le même jour ou qu'ils soient tous nés le même jour alors le 8 ème aura le jour de naissance qu'un des 7 chargés de cours avant lui.

f) Cet énoncé est faux, car il y'a 2131 étudiants du 3e cycle et il existe un nombre incalculable de date de naissance, il est donc impossible d'affirmer avec certitude que deux étudiants du 3e cycle ont la même date de naissance.

g) Cet énoncé est faux, car on a aucune idée du nombre d'étudiant en maitrise pour avoir une ffirmation ceraine.

QUESTION 5 SUR LES FONCTIONS(**40** POINTS)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Considérez les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 2n-2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ g(n) = (n+1, n-1)$$

$$h : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z},\ h(n,m) = \left\lceil \frac{n-m}{n+m} \right\rceil$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ u(x) = 2\lfloor x \rfloor + 1$$

$$v : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ v(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ w(x) = x^3 + 2x - 1$$

a) Complétez le tableau suivant (mettre un **x** si la fonction possède la propriété considérée ou aucune).

	injective	surjective	bijective	aucune
f	x			
g	x	x	x	
h	x			
u		x		
v	x	x	x	
w	x	x	x	

INJECTIVITE
Pour determiner qu'une fonction est injective, il faut prouver que n $\neq menpartantde$f(n) $\neq f(m)$:

f(n) $\neq f(m)$
2n + 1 $\neq 2m+1$
2n $\neq 2m$
n $\neq m$
donc f(n) est injective si n est pair

f(n) $\neq f(m)$

2n - 2 $\neq 2m-2$

2n $\neq 2m$

n $\neq m$

donc f(n) est injective si n est impair

f(n) est une fonction injective.

SURJECTIVITE

f(n) est une fonction surjective si pour tous y il y'a au moins un antécédent. f(n) = 0; 2n + 1 =0

n=-(1/2);

or -(1/2) n'appartient pas à N

Donc f(n) n'est pas surjective si n est pair

f(n) = 0; 2n - 2 =0

n=1; 1 appartient à N

Donc f(n) est surjective si n est impair. En conclusion f(n) n'est pas une fonction surjective.

BIJECTIVITE)

Une fonction est bijective si elle est injective et surjective.

Par consequent f(n) n'est pas une fonction bijective.

b) Déterminez toutes les compositions **possibles** de deux fonctions choisies parmi f, g, h, u, v et w. À chaque fois que c'est possible, donnez les fonctions composées.

RÉPONSE:
Je donne la fonction composé $v \circ f$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 2n-2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$v : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ v(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$v \circ f$: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
n → f(v(n))

$$v \circ f\ :\ \mathbb{N} \to F,\ f(v(n)) = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ -\dfrac{2n-2+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$v \circ f\ :\ \mathbb{N} \to F,\ f(v(n)) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ -n+1-\dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

Je donne la fonction composée v°w:

$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ w(x) = x^3 + 2x - 1$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ u(x) = 2\lfloor x \rfloor + 1$

$u \circ w$: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ x $\to w(u(x))$

$u \circ w\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ w(u(x)) = (2x+1)^3 + 2(2x+1) - 1$

$u \circ w\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ w(u(x)) = (8x)^3 + (12x)^2 + 6x + 1 + 4x + 2 - 1$

$u \circ w\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ w(u(x)) = (8x)^3 + (12x)^2 + 10x + 2$

c) La fonction v est-elle inversible ? Si oui, déterminez v^{-1}.
Que pouvez-vous en conclure sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$?

RÉPONSE: Oui la fonction v est inversible.
Si n est pair :
$v(n) = y$
$\frac{n}{2} = y$
$n = 2y$
Si n est impair :
$v(n) = y$
$-\frac{n+2}{2} = y$
$n = -2y - 1$

$v^-1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $v^-1(n) = \begin{cases} 2y & \text{si } n \text{ est pair;} \\ -2y - 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
Par conclusion on peut dire que $\mathbb{Z}$ est devenu l'ensemble de depart et N l'ensemble d'arrivé.

Partie B

Le but de cet exercice est de construire des fonctions permettant d'encoder des messages. Les messages sont écrits à l'aide des "caractères" A, B, ..., Z (c'est-à-dire les lettres majuscules), du point et de l'espace (indispensable pour séparer les mots). Pour coder un message, on peut affecter la valeur i (pour $1 \leq i \leq 26$) à la $i^{\text{ième}}$ lettre de l'alphabet, la valeur 27 au point et la valeur 28 à l'espace. Comme il serait trop facile à l'ennemi de décoder un message codé de cette manière, il a été décidé de le transformer. Dans ce qui suit n dénote la "valeur" du caractère telle que définie ci-dessus. Soit $f(n)$ et $g(n)$ les deux fonctions suivantes:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{pour } 1 \leq n \leq 27 \\ 1 & \text{pour } n = 28 \end{cases}$$

$$g(n) = (5n) \bmod 29 \quad \text{pour } 1 \leq n \leq 28.$$

Notez que le domaine et le codomaine de f et de g sont l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 28. L'opérateur "mod" représente le reste de la division. Par exemple, $g(25) = 75 \bmod 29 = 18$.

(a) Prouvez que f et g sont des fonctions injectives.

RÉPONSE: Pour prouver que f est une fonction injective, il faut montree de n $\neq$ m en partant de f(n) $\neq$ f(m):

$f(n) \neq f(m)$
$n + 1 \neq m + 1$
$n \neq m$ pour $1 \leq n \leq 27$
$1 \neq 1$ pour $n = 28$
Alors la fonction f(n) est une fonction injective.

g(n) est une fonction injective si $g(n) \neq g(m)$:

$g(n) \neq g(m)$
(5n) mod 29 $\neq$(5m) mod 29
5n $\neq 5m$
$n \neq m$

Alors la fonction g(n) est une fonction injective.

(b) Déduire de (a) que f et g sont bijectives.

RÉPONSE: On remarque que quelque soit la valeur de n dans l'intervalle 1 à 28, on aura toujours une valeur de f et g dans le même intervalle. Pour toute valeur de f ou g dans l'inervalle 1 à 28, il existe une pré-image n dans la même intervalle, par conséquent f et g sont surjectives.
Or toute fonction injective et surjective est forcément bijective, donc f et g sont bijectives.

(c) Prouvez que si f et g sont des fonctions bijectives, alors$f \circ g$ est une fonction bijective.

RÉPONSE: Je prouve que f et g sont bijectives, alors f o g aussi :

$$g(f(n)) = \begin{cases} \text{5f(n) mod 29} & \text{pour } 1 \leq n \leq 27 \\ \text{5 mod 29} & \text{pour } n = 28 \end{cases}$$

$$g(f(n)) = \begin{cases} \text{5n + 5 mod 29} & \text{pour } 1 \leq n \leq 27 \\ \text{5 mod 29} & \text{pour } n = 28 \end{cases}$$

$f \circ g$ est une fonction similaire à g(n), donc on remarque que la variable reste un multiple de 5 car elle est multipliée par 5, donc $f \circ g$ est une fonction bijective car elle a les mêmes caractérisques que f et g.

(d) Écrivez la suite de nombres qui représente la phrase

“‘‘LE CIEL EST BLEU.”

lorsqu'on utilise

(i) la fonction de codage $g \circ f$

RÉPONSE:
J'ecrive la suite de nombres qui represente la phrase “LE CIEL EST BLEU.” lorsqu'on utilise le codage $f \circ g$:

$$fog : f(g(n)) = \begin{cases} \text{(5n mod 29) + 1} & \text{pour } 1 \leq n \leq 27 \\ 1 & \text{pour } n = 28 \end{cases}$$

L : f(g(12)) = (5*12 mod 29) + 1
L : f(g(12)) = (60 mod 29) + 1
L : f(g(12)) = 3

E : f(g(5)) = (5*5 mod 29) + 1
E : f(g(5)) = (25 mod 29) + 1
E : f(g(5)) = 26

Même procédé pour le calcul des autres sauf pour n=28, car pour n=28 g o f = 1.
La suite de nombre obtenue : $3, 26, 1, 16, 17, 26, 3, 1, 26, 9, 14, 1, 11, 3, 26, 19, 28$

(ii) la fonction de codage $g \circ g$.

RÉPONSE: $g \circ g$: g(g(n)) = 5(5n mod 29) mod 29
L : g(g(12)) = 5(5*12 mod 29) mod 29
L : g(g(12)) = 5(60 mod 29) mod 29
L : g(g(12)) = 5*2 mod 29
L : g(g(12)) = 10
E : g(g(5)) = 5(5*5 mod 29) mod 29
E : g(g(5)) = 5(25 mod 29) mod 29
E : g(g(5)) = 5*25 mod 29
E : g(g(5)) = 9 Même procédé pour le calcul des autres.
La suite de nombre obtenue : $10, 9, 4, 17, 22, 9, 10, 4, 9, 11, 7, 4, 21, 10, 9, 3, 19$

(e) Pouvez-vous décrire $g \circ g$ de façon concise sans utiliser g?

RÉPONSE: La description que je peux donner à $g \circ g$ est de dire que, $g \circ g$ est le resultat du reste de la division par 29 du resultat de la fonction $(g \circ f)$ - 1, sauf dans le cas ou n=28 car dans ce cas $g \circ g$ est egale $(g \circ f)$ + 3.

(f) Quelle est la phrase codée par "`UOY .HHH`" avec la fonction $g \circ g$

RÉPONSE: La suite de nombre obtenue:
$3, 27, 16, 4, 19, 26$ La phrase codée : "YOU HHH."