INF1132 Session Automne 2022
Devoir 1

Professeurs : Srečko Brlek, kelrB okčerS

Nom:

Code permanent:

1	2	3	4	5	**Total**
/ 50	/ 30	/ 40	/ 40	/ 40	/ 200

Directives

1. Le devoir doit être rédigé **individuellement** et remis **avant le 20 octobre 2022 avant midi**.
2. **Aucun retard** n'est permis, car la solution sera mise en ligne après l'heure limite de remise.
3. Votre document doit être **rédigé en LaTeX** , à partir du modèle fourni incluant la page de couverture.
4. Vous devez remplir cette page comme page couverture pour vous identifier lors de la remise de votre devoir sinon votre travail **ne sera pas corrigé**.
5. Vous devez remettre sur Moodle **un fichier compressé (.zip) contenant le pdf de votre devoir ET le code LaTeX ayant servi à le générer.**
6. Pour que votre devoir soit corrigé, l'archive doit obligatoirement être nommée : **VOTRECODEPERMANENT_INF1132_DEVOIR1.zip**.
7. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses.
8. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées.

Question 1 sur la logique propositionnelle (**50** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit l'opérateur logique $\diamondsuit$ tel que p $\diamondsuit$ q est faux dans tous les cas sauf quand la proposition p est fausse et la proposition q est vraie.

a) Donner la table de vérité de l'opérateur logique $\diamondsuit$ ci-dessous.

RÉPONSE...

p	q	p $\diamondsuit$ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

b) Est-ce que l'opérateur $\diamondsuit$ est un opérateur logique commutatif ? Expliquer.

RÉPONSE...

c) En utilisant la table de vérité, prouver que $p \diamondsuit q \iff \neg p \wedge q$.

RÉPONSE...

p	q	p $\diamondsuit$ q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Partie B

On suppose que les 4 propositions suivantes sont **toutes vraies** :

1. $A \to B$
2. $C \to D$
3. $A \vee C$
4. $\neg D$

Quelle(s) valeur(s) de vérité peuvent prendre les propositions A, B, C et D ? Justifier.

RÉPONSE...

Question 2 sur la logique des prédicats (30 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère les énoncés suivants :

- $P(x)$: "L'étudiant x sait programmer en langage Python",
- $Q(x, y)$: "L'étudiant x est dans le groupe-cours y",

où l'univers du discours de x est l'ensemble des étudiants en informatique à l'UQAM et l'univers du discours de y est l'ensemble des groupes-cours du département d'informatique de l'UQAM.

1. Écrivez chacune des phrases suivantes sous forme d'énoncés quantifiés.

   (a) Certains étudiants savent programmer en Python.

RÉPONSE...

   (b) Les étudiants ne savent pas tous programmer en Python.

RÉPONSE...

   (c) Chaque groupe-cours contient au moins un étudiant.

RÉPONSE...

   (d) Dans chaque groupe-cours, il y a un étudiant qui sait programmer en Python.

RÉPONSE...

   (e) Il y a un étudiant qui n'est dans aucun groupe-cours.

RÉPONSE...

(f) Il y a au moins un groupe-cours dans lequel aucun étudiant ne sait programmer en Python.

RÉPONSE...

2. Exprimez chacun des énoncés quantifiés suivants en langage courant.

(i) $\forall x, \forall y, Q(x, y)$

RÉPONSE...

(ii) $\forall x, \exists y, P(x) \to Q(x, y)$

RÉPONSE...

(iii) $\exists x, \forall y, P(x) \land \neg Q(x, y)$

RÉPONSE...

(iv) $\exists y, \forall x, Q(x, y) \to P(x)$

RÉPONSE...

Partie B

Dites si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse lorsqu'on suppose que l'univers du discours est (i) $\mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{N}$ ou (iii) $\{0, 1, 2, 4\}$.

a) $\forall x\, \exists y\, (y^2 = x)$

RÉPONSE...

b) $\neg \forall x\, \exists y\, (y > x)$

RÉPONSE...

c) $\forall x\, \neg \exists y\, (y > x)$

RÉPONSE...

d) $\exists x\, \exists y\, \exists z\, ((y \neq z) \wedge (y^2 = x) \wedge (z^2 = x))$

RÉPONSE...

e) $\forall x\, (x \neq 1 \longrightarrow \exists y\, (2y = x))$

RÉPONSE...

Question 3 sur les ensembles (40 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient A, B, C, D des ensembles. Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. $((B \cap A) \setminus C) \cup \left(\overline{B \oplus C} \setminus A\right) = ((A \cap B) \oplus (B \cap C)) \cup \left(\overline{A} \setminus (B \cup C)\right)$
   (Conseil: utilisez une table d'appartenance)

RÉPONSE...

2. Si $A \subseteq B$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE...

3. Si $A \subseteq B$ et $B \cap C = \emptyset$, alors $A \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE...

4. Si $A \subseteq B$ et $C \cap \overline{B} \neq \emptyset$, alors $C \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

RÉPONSE...

5. Si $B \subseteq A$, $C \subseteq D$, et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE...

6. Si $A \subseteq B$, $D \subseteq C$, et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.

RÉPONSE...

7. $A \cup B = A \Longleftrightarrow A \cap B = B$.

RÉPONSE...

8. $A \oplus B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$.

RÉPONSE...

Partie B

Soient A, B et C trois sous-ensembles de l'ensemble universel U qui satisfont les 8 conditions suivantes :

(a) $|\mathscr{P}(A \cap B \cap C)| = 128$

(b) $|B \cap C| = 17$

(c) $|A \cap C| = 12$

(d) $|A \cap B| = 14$

(e) $|A| = |B| - 1$

(f) $|B \oplus C| = 25$

(g) $|A \times B| = 756$

(h) $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\mathscr{P}(\{\varnothing\})|$

Déterminez les cardinalités des ensembles A, B, C et U en justifiant soigneusement votre raisonnement.

RÉPONSE...

Question 4 sur le dénombrement (**40** points)

A l'UQAM les chiffres en date de l'automne 2021 indiquent qu'il y avait :

- 36 960 étudiants dont 28 060 au 1er cycle, 6769 au 2e cycle et 2131 au 3e cycle; parmi ceux-là 4387 étaient des étudiants internationaux provenant de 95 pays;
- 2124 chargé(e)s de cours;
- 1143 professeur(e)s.
- 335 programmes d'études dont: 180 de premier cycle, 125 de deuxième cycle et 30 de troisième cycle

Déterminez pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. Justifiez votre réponse.

a) Il y a au moins deux étudiants qui sont dans le même programmme et qui sont nés le même jour.

b) Il y a deux étudiants internationaux qui sont dans le même programme d'études

c) Chaque professeur a au moins 2 étudiants internationaux dans un cours

d) Il y a deux professeurs qui ont la même date d'anniversaire

e) Deux chargés de cours sont nés le même jour

f) Il y a au moins deux étudiants de troisième cycle ayant la même date de naissance

g) il y a au plus deux étudiants de maitrise ayant la même date de naissance

RÉPONSE...

Question 5 sur les fonctions(**40** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Considérez les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 2n-2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ u(n) = (n+1, n-1)$$

$$h : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z},\ v(n,m) = \left\lceil \frac{n-m}{n+m} \right\rceil$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ h(x) = 2\lfloor x \rfloor + 1$$

$$v : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 2x - 1$$

a) Complétez le tableau suivant (mettre un **x** si la fonction possède la propriété considérée ou aucune).

	injective	surjective	bijective	aucune
f				
g				
h				
u				
v				
w				

b) Déterminez toutes les compositions **possibles** de deux fonctions choisies parmi f, g, h, u, v et w. À chaque fois que c'est possible, donnez les fonctions composées.

RÉPONSE...

c) La fonction v est-elle inversible ? Si oui, déterminez v^{-1}.
Que pouvez-vous en conclure sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$?

RÉPONSE...

Partie B
Le but de cet exercice est de construire des fonctions permettant d'encoder des messages. Les messages sont écrits à l'aide des "caractères" A, B, ..., Z (c'est-à-dire les lettres majuscules), du point et de l'espace (indispensable pour séparer les mots). Pour coder un message, on peut affecter la valeur i (pour $1 \leq i \leq 26$) à la $i^{\text{ième}}$ lettre de l'alphabet, la valeur 27 au point et la valeur 28 à l'espace. Comme il serait trop facile à l'ennemi de décoder un message codé de cette manière, il a été décidé de le transformer. Dans ce qui suit n dénote la "valeur" du caractère telle que définie ci-dessus. Soit $f(n)$ et $g(n)$ les deux fonctions suivantes:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{pour } 1 \leq n \leq 27 \\ 1 & \text{pour } n = 28 \end{cases}$$

$$g(n) = (5n) \bmod 29 \quad \text{pour } 1 \leq n \leq 28.$$

Notez que le domaine et le codomaine de f et de g sont l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 28. L'opérateur "mod" représente le reste de la division. Par exemple, $g(25) = 75 \bmod 29 = 18$.

(a) Prouvez que f et g sont des fonctions injectives.

RÉPONSE...

(b) Déduire de (a) que f et g sont bijectives.

RÉPONSE...

(c) Prouvez que si f et g sont des fonctions bijectives, alors$f \circ g$ est une fonction bijective.

RÉPONSE...

(d) Écrivez la suite de nombres qui représente la phrase

"''`LE CIEL EST BLEU.`"

lorsqu'on utilise

(i) la fonction de codage $g \circ f$

RÉPONSE...

(ii) la fonction de codage $g \circ g$.

RÉPONSE...

(e) Pouvez-vous décrire $g \circ g$ de façon concise sans utiliser g?

RÉPONSE...

(f) Quelle est la phrase codée par "`UOY .HHH`" avec la fonction $g \circ g$

RÉPONSE...