INF1132 Session Automne 2022
Devoir 2

Professeurs : Srečko Brlek, kelrB okčerS

Nom :

Code permanent :

1	2	3	4	5	**Total**
/ 20	/ 20	/ 20	/ 20	/ 20	/ 100

Directives

1. Le devoir doit être rédigé **individuellement** et remis **avant le 8 décembre 2022 avant midi**.
2. **Aucun retard** n'est permis, car la solution sera mise en ligne après l'heure limite de remise.
3. Votre document doit être **rédigé en LaTeX** , à partir du modèle fourni incluant la page de couverture.
4. Vous devez remplir cette page comme page couverture pour vous identifier lors de la remise de votre devoir sinon votre travail **ne sera pas corrigé**.
5. Vous devez remettre sur Moodle **un fichier compressé (.zip) contenant le pdf de votre devoir ET le code LaTeX ayant servi à le générer.**
6. Pour que votre devoir soit corrigé, l'archive doit obligatoirement être nommée : **VOTRECODEPERMANENT_INF1132_DEVOIR2.zip**.
7. À moins d'avis contraire, vous devez **justifier** chacune de vos réponses.
8. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées.

Question 1 sur les algorithmes et la complexité (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (10 points)

Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ une suite d'entiers naturels. Considérons l'algorithme suivant

```
1:  procedure MYSTERE(T : Tableau d'entiers)
2:      n ← Longueur(T)
3:      i ← 0
4:      tant que i < n − 1 faire
5:          p ← i
6:          pour j ← i + 1, i + 2, ..., n − 1 faire
7:              si T[j] < T[p] alors p ← j
8:              fin si
9:          fin pour
10:         t ← T[p]; T[p] ← T[i]; T[i] ← t
11:         i ← i + 1
12:     fin tant que
13: fin procedure
```

(**5** pts) 1) Faites une trace de l'exécution de l'algorithme `Mystere` dans le cas de la suite

`T = (-3, 0, 10, -11, 0, 13, -9, 17).`

Plus précisément, vous devez donner les valeurs de `i`, `p` et `T[0]`,`T[1]`,`T[2]`,...,`T[7]` après chaque itération de la boucle extérieure **tant que** (à la ligne 10).

i	p	T[0]	T[1]	T[2]	T[3]	T[4]	T[5]	T[6]	T[7]
		-3	0	10	-11	0	13	-9	17
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									

(**2** pts) 2) Que fait cet algorithme ?

RÉPONSE...

(**3** pts) 3) Donnez un estimé avec la notation $\mathcal{O}$ du nombre de comparaisons effectuées par cet algorithme en fonction de n.

RÉPONSE...

(**5** pts) 4) **Question Bonus**. Donnez un exemple de tableau d'entiers pour le **pire cas** et un exemple pour le **meilleur cas** de l'algorithme `Mystere` et donner dans chacun des cas le nombre de comparaisons effectuées

RÉPONSE...

Partie B (10 points)

Soit deux ensembles `A = {-1,0,1,2,3,4,5}` et `B = {a,b,c,d,e,f,g,h}`. On considère la fonction `F: A --> B` donnée comme sous-ensemble $\mathtt{R}_F \subseteq \mathtt{A} \times \mathtt{B}$

$$\begin{aligned} R_F &= \{(x, F(x)) | x \in A\} \\ &= \{(-1, g), (0, a), (1, e), (2, d), (3, d), (4, f), (5, c))\} \end{aligned}$$

(**2** pts) 1) Donner la représentation de `F` par la table T définie par

$$T[x, y] = 1 \text{ si } F(x) = y; \quad T[x, y] = 0 \text{ si } F(x) \neq y.$$

F	a	b	c	d	e	f	g	h
-1								
0								
1								
2								
3								
4								
5								

(**4** pts) 2) Donner un algorithme pour décider si une fonction représentée par un tableau est injective.

```
fonction EST_INJECTIVE(T : Tableau d'entiers) : booléen
    ...
    ...
    ...
    ...
    ...
    ...
fin fonction
```

Donner la complexité (en pire cas et meilleur cas) de cet algorithme en fonction de $|A| = n$ et $|B| = m$ pour une fonction

(i) injective :

(ii) non injective :

Justifiez vos réponses.

(**4** pts) 3) Donner un algorithme pour décider si une fonction représentée par un tableau est surjective

```
fonction EST_SURJECTIVE(T : Tableau d'entiers) : booléen
    ...
    ...
    ...
    ...
    ...
    ...
fin fonction
```

Donner la complexité (en pire cas et meilleur cas) de cet algorithme en fonction de $|A| = n$ et $|B| = m$ pour une fonction

(i) surjective :

(ii) non surjective.

Justifiez vos réponses.

Question 2 sur les entiers et la division (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (8 points)
Dans ce qui suit on utilise la base $\mathbb{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pour écrire les nombres.

(**1** pts) 1. Donner la table d'addition des nombres en base $\mathbb{B}$;

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

(**1** pts) 2. Donner la table de multiplication des nombres en base $\mathbb{B}$;

×	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

(**1** pts) 3. Calculer $x = 123454321 + 4142$;

REPONSE

(**1** pts) 4. Calculer $y = x * 215$;

REPONSE

(**2** pts) 5. Convertir y dans la base $\mathbb{D} = \{0, 1, 2\}$.

REPONSE

(**2** pts) 6. Donner la liste ordonnée des nombres premiers inférieurs ou égaux à 135 (ici 135 désigne un nombre écrit en base $\mathbb{B}$) ;

REPONSE

Partie B (12 points)

Dans cette partie, on utilise la base décimale usuelle. Soit la suite $S_n = 3^n - 4 \mod 13$

(**4** pts) 1. Calculer les 15 premiers termes de la suite.

La suite des 15 premiers termes est ;

$$(-,-,-,-,-,-,-,-,-,-,-,-,-,-,-)$$

(**8** pts) 2. Déterminer la forme des entiers naturels n tels que $3^n - 4 \equiv 10 \mod 13$.
Conseil : formuler une hypothèse en examinant les premiers termes puis utiliser une démonstration par induction pour conclure.

Théorème.

Démonstration

- **Initialisation**.
- **Hérédité**.

Question 3 sur l'induction et la récursivité (**20** points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (10 points) Définitions inductives

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de chaînes binaires, défini récursivement de la manière suivante :

- **Cas de base.** $\varepsilon \in \mathcal{B}$;
- **Règles récursives.** Si la chaîne $b \in \mathcal{B}$, alors,

  R1. $1b0 \in \mathcal{B}$ (règle 1)

  R2. $0b1 \in \mathcal{B}$ (règle 2)

  R3. $bb \in \mathcal{B}$ (règle 3)

(**2** pts) **1)** Parmi les chaînes binaires suivantes, lesquelles sont des éléments de $\mathcal{B}$?
00101011, 000000, 0101, 01010101, 11001100, 0, 0110110, 010101010101

RÉPONSE...

(**2** pts) **2)** Calculer toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ de longueur $n < 11$

RÉPONSE...

(**3** pts) **3)** Montrer que toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ ont un nombre égal de 0 et de 1.

RÉPONSE...

(**3** pts) **4)** Montrer que toutes les chaînes de $\mathcal{B}$ sont de longueur paire

RÉPONSE...

Partie B (10 points) Algorithmes récursifs

Pour calculer le plus grand commun diviseur de deux entiers positifs on peut utiliser l'algorithme suivant :

```
fonction Pgcd(a,b : Entiers)
    si (a mod b = 0) alors
        retourner (b)
    sinon
        retourner Pgcd(b, a mod b)
    fin si
fin fonction
```

(**5** pts) **1)** Faites la trace d'exécution de cet algorithme sur l'appel

$$\mathrm{Pgcd}(420, 567)$$

RÉPONSE...

(**5** pts) **2)** Déterminez le nombre d'appels effectués en fonction de n dans le cas des appels suivants :

$$\mathrm{Pgcd}(F_{n-1}, F_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Pgcd}(F_n, F_{n-1}),$$

où F_n est la suite définie par $F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$. Pour vous donner une idée, essayez de calculer $\mathrm{Pgcd}(34, 55)$ et $\mathrm{Pgcd}(55, 34)$.

RÉPONSE...

Question 4 sur les relations (20 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (12 points)

Soit R la relation sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ définie par

$$xRy \Longleftrightarrow x = y - 3 \quad \text{(on note aussi } (x, y) \in R\text{)}.$$

(**2** pts) **1.** Dessiner le graphe de R.

RÉPONSE...

(**2** pts) **2.** Donner la représentation matricielle de R.

RÉPONSE...

(**2** pts) **3.** La relation R est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? Justifiez vos réponses.

RÉPONSE...

(**2** pts) **4.** Soit T la fermeture transitive de R. Dessiner le graphe ou donner la matrice de T.

RÉPONSE...

(**2** pts) **5.** Soit S la fermeture symétrique de R. Dessiner le graphe ou donner la matrice de S.

RÉPONSE...

(**2** pts) **6.** Soit U la fermeture symétrique de T. Dessiner le graphe ou donner la matrice de U. U est-elle transitive ?

RÉPONSE...

Partie B (8 points)

Soit P la relation sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ définie par

$$xPy \iff x = y - 3,$$

et W la plus petite relation d'équivalence contenant P.

(**4** pts) **1.** Décrire les classes de W.

RÉPONSE...

(**4** pts) **2.** Donner un représentant pour chaque classe.

RÉPONSE...

(**4** pts) **3.** (Bonus) Généraliser : pour toute relation Q_n définie par $xQ_ny \iff x = y - n$, décrire les classes de la plus petite relation d'équivalence qui contient Q_n.

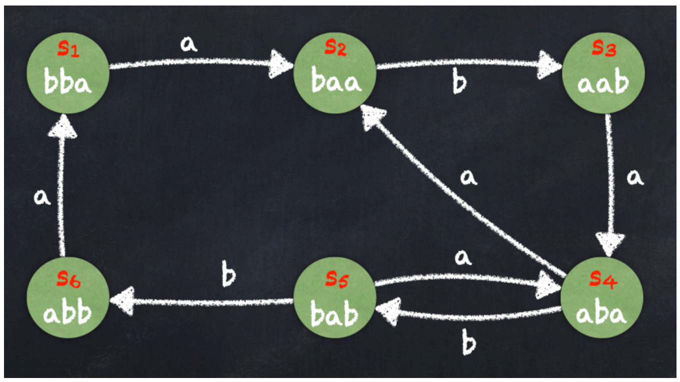
RÉPONSE...

Question 5 sur les graphes (20 points)

A tout mot $w = w_0, w_1, \ldots, w_n - 1$ sur un alphabet fini A on associe le *graphe des mots* de longueur k, noté $G_k = (S_k, E_k)$ construit récursivement de la manière suivante :

1. $S_k = \{w[0..(k-1)]\}; E_k = \{\}$;
2. Pour $i = 0, 1, 2, n-k-1$, et
   - $E_k = E_k \cup \{w[i..(i+k)]\}$;
   - $S_k = S_k \cup \{w[(i+1)..(i+k)]\}$.

Par exemple, considérons le mot $w = bbaababaababba$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Son graphe $G_3(w)$ est le graphe orienté G suivant :



où le premier sommet s_1 est étiqueté par $w[0..2] = bba$, le deuxième s_2 est étiqueté par $w[1..3] = baa$ et l' arc e_1 allant de s_1 à s_2, est étiqueté par $w[0..3] = bba.a$. Cependant nous n'avons mis que la lettre a (par économie), car le début bba est déjà écrit dans le sommet s_1.

(**2** pts) 1) Donner sa représentation sous forme de liste d'adjacence.

RÉPONSE...

(**5** pts) 2) Donner sa représentation sous forme de matrice :

a) d'adjacence étiquetée L_G, et non-étiquetée M_G ;

b) d'incidence.

a) la matrice d'adjacence étiquetée et non-étiquetée sont

$$L_G = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \quad M_G = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

b) La matrice d'incidence est donnée par

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?
s_1	?	?	?	?	?	?	?	?

(**4** pts) 3) Donner pour chaque sommet, les degrés intérieur et extérieur.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
d^+	?	?	?	?	?	?
d^-	?	?	?	?	?	?

(**4** pts) 4) Quel est le nombre de chemins distincts de longueur 4 dans G ?

RÉPONSE...

(**5** pts) 5) Quelle est la longueur des chemins les plus courts entre toute paire de sommets distincts ?

RÉPONSE...