1 1. Основы линейной алгебры

1.1 Введение в базовую линейную алгебру

Линейная алгебра

Итак, приступим к изучению линейной алгебры. Начнём с векторов. Нам подойдёт такое определение: вектор — это набор из нескольких чисел, записанных в столбик и заключённых в круглые или квадратные скобки. Рассмотрим пример: v=e1,e2v=e1,e2 и так далее enen.

$$v = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Размерностью вектора будет называться количество элементов в данном наборе. Для вектора v это будет число nn. Размерность вектора — это натуральное число.

$$n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

На элементы вектора таких строгих ограничений мы не накладываем, и они могут быть натуральными, целыми, рациональными, вещественными или и вовсе комплексными числами.

Векторы

1. Умножение на константу

2. Сложение векторов

3. Вычитание векторов

4. Взятие длины вектора

5. Скалярное произведение

6. Векторное произведение

Итак, мы узнали что такое векторы. Давайте рассмотрим, что с ними можно делать. Пусть у нас есть два вектора — aa и bb. Один из них состоит из элементов x1...xnx1...xn, другой — состоит из элементов y1...yny1...yn.

$$a = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ну, во-первых, любой вектор всегда можно умножить на константу. Пусть у нас есть какая-то константа cc. Тогда произведение вектора a и константы c будет просто равно новому вектору, в котором каждый элемент вектора a просто домножим на эту константу.

$$a \cdot c = \begin{bmatrix} x_1 \cdot c \\ \vdots \\ x_n \cdot c \end{bmatrix} \tag{3}$$

Далее. Сложение векторов. Если размерности двух векторов совпадают, то мы можем рассмотреть их сумму. Сумма векторов aa и bb будет равна вектору, в котором каждый элемент равен сумме соответствующих элементов слагаемых. То есть в нашем случае это x1+y1,x2+y2x1+y1,x2+y2 и так далее xn+ynxn+yn.

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Аналогично, для разности: разность векторов abab будет равна поэлементным разностям... вектору, составленному из поэлементных разностей. Итак, это будет x1y1x1y1 и так далее xnynxnyn.

$$a - b = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Далее. Мы можем вычислить длину любого вектора. Это сделать достаточно просто. Длиной вектора называется число, равное корню из суммы квадратов его элементов. Обозначается это следующим образом:

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{6}$$

Длина вектора a равна соответственно корню из x12+x22+x12+x22+ и так далее +xn2+xn2. Теперь рассмотрим скалярное произведение. Скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений соответствующих элементов, то есть элементов с соответствующими индексами. Я не упомянул об этом раньше: индексом элемента называется просто его номер. То есть у x1x1 индекс равен единице, например, а у xnxn он равен nn. Так вот, скалярное произведение векторов aa и bb — это сумма произведений элементов с соответствующими индексами. То есть x1y1+x2y2x1y1+x2y2 и так далее xnynxnyn.

$$a \cdot b = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n \tag{7}$$

Что удивительно, что скалярное произведение в то же время равно произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними.

$$a \cdot b = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha \tag{8}$$

Помимо скалярного произведения, результатом которого является число или скаляр существует также и векторное произведение, результатом которого является вектор. Обозначается оно как a×ba×b.

$$a \times b \tag{9}$$

В нашем курсе мы им не будем пользоваться, поэтому и сейчас не станем останавливаться подробнее. Просто имейте ввиду, что такая запись обозначает векторное произведение и ни в коем случае не путайте его со скалярным.