TRANSFORMASI LINIER

Desti Riminarsih

Produk Transformasi

Pandang 2 buah transformasi linier :

$$T \quad : \quad V^n \rightarrow W^r$$
$$S \quad : \quad W^r \rightarrow U^m$$

dengan matriks transformasi berturut-turut A dan B.
(dimensi $V^n = n$, dimensi $W^r = r$, dimensi $U^m = m$)

Setiap vektor $v \in V^n$ oleh transformasi T dipetakan menjadi $w = Av$, kemudian hasilnya $w \in W^r$ oleh transformasi S dipetakan menjadi $u = Bw = B(Av) = (BA)v$.

Produk Transformasi

$$\begin{tikzcd} v \arrow[rrrr, bend right, "ST"'] & \in V^n \arrow[r, "T"] & w \in W^r \arrow[r, "T"] & & u \in U^m \end{tikzcd}$$

$v \to u$ dapat dipandang sebagai suatu transformasi baru ST, dengan matriks transformasi BA.

ST disebut produk transformasi dari S dan T.

Contoh

Contoh (7.14) :

$T : R^3 \rightarrow R^3$ dengan $T[x_1, x_2, x_3] = [2x_2+x_3,\ 3x_1+x_2+x_3,\ x_2]$ dan

$R : R^3 \rightarrow R^3$ dengan $S[x_1, x_2, x_3] = [2x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_1+x_2+2x_3]$

Maka produk transformasi ST mempunyai rumus :

$(ST)[x_1, x_2, x_3] = S(T[x_1, x_2, x_3] = S[2x_1+x_3,\ 3x_1+x_2+x_3,\ x_2] =$

$[2(2x_2+x_3)+1(3x_1+x_2+x_3)+1(x_2),\ 1(2x_2+x_3)+1(x_2),\ 2(2x_2+x_3)+1(3x_1+x_2+x_3)+2(x_2)]$

$= [3x_1+6x_2+3x_3,\ 3x_2+x_3,\ 3x_1+7x_2+3x_3]$

Lanjutan Contoh

- Produk Transformasi dapat diperoleh dari perkalian matriks-matriks transformasi.
- Untuk soal di atas, diperoleh matriks transformasi untuk hasil produk transformasi adalah sebagai berikut:

$$S[x_1, x_2, x_3] = [2x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_1+x_2+2x_3] \Rightarrow [S]^e_e = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T[x_1, x_2, x_3] = [2x_2+x_3,\ 3x_1+x_2+x_3,\ x_2] \Rightarrow [T]^e_e = A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[ST]^e_e = [S]^e_e[T]^e_e = BA.$$

$$(ST)[x_1, x_2, x_3] = [3x_1+6x_2+3x_3,\ 3x_2+x_3,\ 3x_1+7x_2+3x_3] \Rightarrow [ST]^e_e = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Hasil Transformasi

- Peta dari vektor $\boldsymbol{v} = [1,0,2]$ dari produk transformasi ST adalah
- $\mathbf{ST}[1,0,2] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} 3.1 + 6.0 + 3.2 \\ 0.1 + 3.0 + 1.2 \\ 3.1 + 7.0 + 3.2 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

Transformasi one-one dan onto

Pandang $T : V^n \rightarrow V^n$ suatu transformasi linier pada v^n, ruang vektor berdimensi n. A matriks transformasi dari T.

Maka $v \in V^n$ dipetakan menjadi $w = Av \in V^n$. Kalau rank(A) = n maka jawab persamaan $w = Av$ adalah tunggal (unik); berarti setiap w merupakan peta dari hanya satu v, dengan perkataan lain: tidak ada vektor $\in V^n$ mempunyai peta yang sama, sehingga transformasi T adalah one-one dan onto.

Produk Transformasi

Pandang sekarang $S : V^n \to V^n$ dengan matriks transformasi B sedemikian sehingga untuk v dan w di atas berlaku v = Bw. Kalau kita lihat produk transformasi ST (dengan matriks transformasi BA) maka (BA)v = B(Av) = Bw = v = Iv, I matriks identitas.

$$v \in V^n \to w \in V^n$$

Juga produk transformasi TS (dengan matriks transformasi AB) memenuhi (AB)w = A(BW) = Av = w = Iw. *Karena berlaku untuk setiap vektor* $\in V^n$ *maka* $BA = AB = I$.

Transformasi identitas

DEFINISI :

Transformasi linier $V^n \rightarrow V^n$ dengan matriks transformasinya matriks identitas I, disebut transformasi identitas, berlaku $Iv = v$, untuk setiap $v \in V^n$.

Transformasi Invers

DEFINISI :

Bila A dan B matriks-matriks transformasi dari trasformasi-transformasi linier T dan S, dimana berlaku BA = AB = I, maka dikatakan: S adalah transformasi invers dari T dan sebaliknya; ditulis $S = T^{-1}$ atau $T = S^{-1}$, dan matriks $B = A^{-1}$ atau $A = B^{-1}$.

Suatu transformasi $V^n \rightarrow V^n$, hanya mempunyai invers bila matriks transformasinya mempunyai invers (bila matriks nonsingular, determinannya $\neq 0$).

Contoh:

Vektor $w = [3, 1, 0]$ adalah peta dari v oleh transformasi T dengan matriks transformasi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari v, dapat kita cari dahulu transformasi invers T^{-1} dengan matriks transformasi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh lanjutan

$$\text{Jadi } v = a^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$