Prinsip Induksi Matematika

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2015-2016

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

November 2015

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 1), Edisi 7, 2012, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 4), Edisi 4, 2010, oleh S. S. Epp.
3. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

1. Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
2. Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
3. Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)
4. Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
5. Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat
6. Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \ldots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \ldots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Untuk mempermudah, kita akan menotasikan $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}_0$ dan $\{1, 2, 3, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}$.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \ldots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Untuk mempermudah, kita akan menotasikan $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}_0$ dan $\{1, 2, 3, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}$.

Beberapa teorema yang berkaitan dengan $\mathbb{N}_0$ atau $\mathbb{N}$ dapat dibuktikan dengan bukti langsung secara mudah, seperti:

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $n^2 + 1 \geq 2n$.

Motivasi

- Dari kuliah sebelumnya, kita sudah mengetahui berbagai jenis metode pembuktian matematis seperti: bukti langsung, bukti tak langsung dengan kontraposisi, maupun bukti tak langsung dengan kontradiksi.
- Dalam bahasan ini, kita akan mengkaji suatu metode pembuktian yang berkaitan dengan himpunan bilangan cacah $\{0, 1, 2, \ldots\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Untuk mempermudah, kita akan menotasikan $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}_0$ dan $\{1, 2, 3, \ldots\}$ dengan $\mathbb{N}$.

Beberapa teorema yang berkaitan dengan $\mathbb{N}_0$ atau $\mathbb{N}$ dapat dibuktikan dengan bukti langsung secara mudah, seperti:

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $n^2 + 1 \geq 2n$.

Teorema lain "agak sulit" (atau bahkan agak mustahil) dibuktikan secara langsung, seperti:

Teorema

Jika n adalah bilangan bulat tak negatif, maka $2^{n-1} \leq n!$.

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

- $\forall n P(n)$

Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk

- $\forall n P(n)$
- $\forall n (n \geq a \rightarrow P(n))$, untuk suatu $a \in \mathbb{N}_0$

n merupakan variabel pada $\mathbb{N}_0$ atau $\mathbb{N}$.

Catatan

Induksi matematika hanya dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan matematis yang berkaitan dengan $\mathbb{N}_0$ atau $\mathbb{N}$, atau pernyataan matematis atas himpunan dengan struktur yang "serupa" dengan salah satu himpunan tersebut.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

1. Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada $\mathbb{N}_0$. Langkah pembuktian ini disebut dengan tahap basis/ langkah basis.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

1. Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada $\mathbb{N}_0$. Langkah pembuktian ini disebut dengan tahap basis/ langkah basis.
2. Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat $k \geq 0$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar. Langkah pembuktian ini disebut dengan tahap induktif/ langkah induktif.

Arti dan Analogi Induksi Matematika (Biasa)

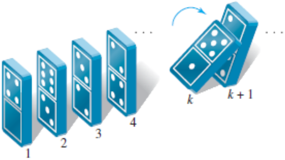
- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Matematika (Biasa)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, maka

1. Buktikan bahwa $P(0)$ benar, karena 0 adalah elemen terkecil pada $\mathbb{N}_0$. Langkah pembuktian ini disebut dengan tahap basis/ langkah basis.
2. Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat $k \geq 0$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar. Langkah pembuktian ini disebut dengan tahap induktif/ langkah induktif.

Induksi matematika bekerja seperti "efek domino".



Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k \left(P(k) \rightarrow P(k+1)\right)$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k\,(P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(2)$ benar.

Cara Kerja Induksi Matematika

- Perhatikan bahwa dua langkah pembuktian pada prinsip induksi matematika sudah cukup untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar.
- Jika tahap induktif dapat dibuktikan, maka kita memiliki implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ yang bernilai benar untuk k berapapun. Ini setara dengan formula logika predikat $\forall k\,(P(k) \rightarrow P(k+1))$, dengan domain untuk k adalah $\mathbb{N}_0$.
- Akibatnya jika $P(0)$ benar, dengan fakta $P(0) \rightarrow P(1)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(1)$ benar.
- Selanjutnya karena $P(1)$ benar, dengan fakta $P(1) \rightarrow P(2)$ benar dan modus ponens, kita memiliki $P(2)$ benar.
- Dan seterusnya, sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk sembarang n.
- Pada implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$, $P(k)$ disebut sebagai <u>hipotesis induksi</u>.
- Langkah basis pada induksi matematika <u>tidak harus</u> mulai dari 0.

Bahasan

Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)

Teorema (Teorema 1)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k+k+1=$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + k) + k + 1 \quad = \quad \frac{k(k+1)}{2}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (1+2+3+\cdots+k)+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \quad \text{(dari hipotesis induksi)} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{(dari hipotesis induksi)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2k+2}{2} = \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+k)+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \text{ (dari hipotesis induksi)}\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}\\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 1)

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ adalah pernyataan $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$, yaitu pernyataan $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+k)+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \quad \text{(dari hipotesis induksi)}\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
Langkah induktif:

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1=1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa
$P(k+1):$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa
$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) =$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.
<u>Langkah basis</u>: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1=1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
<u>Langkah induktif</u>: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa
$P(k+1): 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ juga benar.
Perhatikan bahwa

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \quad =$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1=1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa

$P(k+1): 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1 = 1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa
$P(k+1) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k+1)^2$ juga benar.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 2)

Jika n adalah bilangan asli, maka $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan $P(n)$ menyatakan $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, dengan $n\in\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $P(1)$ menyatakan $1=1^2$. Jelas bahwa $P(1)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $k\in\mathbb{N}$ dan $P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ benar. Akan ditunjukkan bahwa
$P(k+1): 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ juga benar.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1) \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.
Berdasarkan prinsip induksi matematika $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ untuk sembarang $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis:

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif:

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$:

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$2k + 3 \quad =$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n+1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n+1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3)+1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k+1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : 2k+3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2k+3 &= (2k+1)+2 \\ &< \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\ &< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &\leq \end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1) : 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\
&< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\
&\leq 2^k + 2^k \text{ (karena jelas bahwa } 2 \leq 2^k \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}) \\
&=
\end{aligned}$$

Teorema (Teorema 3)

Untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$ berlaku $2n + 1 < 2^n$.

Bukti (Bukti Teorema 3)

Misalkan $P(n) : 2n + 1 < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(3) : 2(3) + 1 < 2^3$, karena $7 < 8$ benar, maka $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k) : 2k + 1 < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : 2k + 3 < 2^{k+1}$ juga benar.

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
2k + 3 &= (2k + 1) + 2 \\
&< 2^k + 2 \text{ (dari hipotesis induksi)} \\
&\leq 2^k + 2^k \text{ (karena jelas bahwa } 2 \leq 2^k \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}) \\
&= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika $2n + 1 < 2^n$ untuk sembarang bilangan asli $n \geq 3$. $\square$

Bahasan

1. Pengantar: Motivasi, Arti, dan Analogi
2. Contoh Pembuktian dengan Induksi Matematika (Biasa)
3. Soal-soal Latihan Induksi Matematika (Biasa)
4. Induksi Kuat: Motivasi dan Arti
5. Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat
6. Soal-soal Latihan Induksi Kuat

Latihan 1: Induksi Matematika (Biasa)

Latihan

1. Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $n^2 < 2^n$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda. (Petunjuk: Anda mungkin memerlukan hasil pada Teorema 3, yaitu: $2n + 1 < 2^n$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$).
2. Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $2^n < n!$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda.
3. Diberikan bilangan real $x > 0$. Untuk bilangan asli n berapa sajakah pertidaksamaan $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ berlaku? Jelaskan jawaban Anda.
4. Untuk bilangan asli n berapa sajakah $n^3 - n$ habis dibagi 3? Jelasakan jawaban Anda.

Bahasan

Induksi Kuat: Motivasi

Tidak selamanya prinsip induksi matematika (biasa) dapat digunakan secara mudah untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang berbentuk $\forall n P(n)$.

Teorema

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti (?)

Misalkan

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) : a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif:

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) : a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: asumsikan $P(k) : a_k < 2^k$ benar.

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) : a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: asumsikan $P(k) : a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \end{aligned}$$

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) : a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: asumsikan $P(k) : a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \end{aligned}$$

Selanjutnya ???

Bukti (?)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $P(1) : a_1 < 2^1$. Karena $a_1 = 1$, maka jelas bahwa $P(1)$ benar.

Langkah induktif: asumsikan $P(k) : a_k < 2^k$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + a_{k-1} + a_{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \end{aligned}$$

Selanjutnya ???

- Kita tidak dapat menyelesaikan bukti teorema di atas hanya dengan induksi matematika biasa, karena kita tidak memiliki informasi apapun mengenai a_{k-1} dan a_{k-2}.
- Induksi kuat (*strong induction*) merupakan salah satu bentuk induksi matematika yang dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang serupa dengan teorema di atas.

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

1. Tahap basis/ langkah basis: buktikan bahwa $P(k)$ benar untuk beberapa k yang diperlukan (bisa lebih dari satu). Jelas bahwa harus dibuktikan bahwa $P(0)$ benar karena 0 adalah elemen terkecil pada $\mathbb{N}_0$.

Induksi Kuat: Arti

- Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi kuat?
- Misalkan terdapat suatu pernyataan yang berbentuk: $\forall n P(n)$, dengan n variabel atas $\mathbb{N}_0$.

Prinsip Induksi Kuat (*Strong Induction*)

Untuk membuktikan bahwa $\forall n P(n)$ benar, dilakukan:

1. Tahap basis/ langkah basis: buktikan bahwa $P(k)$ benar untuk beberapa k yang diperlukan (bisa lebih dari satu). Jelas bahwa harus dibuktikan bahwa $P(0)$ benar karena 0 adalah elemen terkecil pada $\mathbb{N}_0$.
2. Tahap induktif/ langkah induktif: buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat i dengan $0 \leq i \leq k$, jika $P(i)$ benar maka $P(k+1)$ juga benar. Dengan perkataan lain, buktikan bahwa implikasi berikut benar

$$(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1).$$

- Sebagaimana induksi matematika biasa, langkah basis pada induksi kuat tidak harus mulai dari 0.

Bahasan

Contoh Pembuktian dengan Induksi Kuat

Teorema (Teorema 4)

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, untuk $n \geq 4$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$,

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.
Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\
&< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\
&= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k =
\end{aligned}
$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\ &= \end{aligned}$$

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\
&< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\
&= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 4)

Misalkan $P(n) : a_n < 2^n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1 < 2^1$, $a_2 = 2 < 2^2$, $a_3 = 3 < 2^3$, jadi $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1} < 2^{k+1}$ juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= 2^k + \frac{2^k}{2} + \frac{2^k}{4} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^k < \frac{8}{4} \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Berdasarkan prinsip induksi kuat $a_n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema (Teorema 5)

Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$, untuk setiap $n \geq 3$. Barisan a_n memenuhi sifat bahwa a_n selalu bernilai ganjil untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis:

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.
Langkah induktif:

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, $\ldots$, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ benilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n\text{)} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.
Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, $\ldots$, a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ benilai ganjil juga benar.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n\text{)} \\ &= (2p+1) + 2(2q+1)\text{, untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= \end{aligned}$$

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, ..., a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ benilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n\text{)} \\
&= (2p+1) + 2(2q+1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\
&\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\
&= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 3 \\
&=
\end{aligned}$$

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, ..., a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ benilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n\text{)} \\
&= (2p+1) + 2(2q+1)\text{, untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\
&\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\
&= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 3 \\
&= 2(p + 2q + 1) + 1.
\end{aligned}$$

Ini berarti a_{k+1} juga bernilai ganjil. Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar.

Bukti

Misalkan $P(n) : a_n$ bernilai ganjil, dengan $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah basis: tinjau bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, dan $a_3 = 7$, jadi a_1, a_2, dan a_3 bernilai ganjil. Akibatnya $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ benar, yaitu a_1, a_2, ..., a_k bernilai ganjil. Akan dibuktikan bahwa $P(k+1) : a_{k+1}$ benilai ganjil juga benar. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} + 2a_k \text{ (definisi barisan } a_n) \\ &= (2p+1) + 2(2q+1), \text{ untuk suatu } p, q \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{karena } a_{k-1} \text{ dan } a_k \text{ bernilai ganjil berdasarkan hipotesis induksi} \\ &= 2p + 1 + 4q + 2 = 2p + 4q + 3 \\ &= 2(p + 2q + 1) + 1. \end{aligned}$$

Ini berarti a_{k+1} juga bernilai ganjil. Dengan demikian $P(k+1)$ juga benar. Berdasarkan prinsip induksi kuat a_n bernilai ganjil untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 = 23 \cdot 1$, perhatikan bahwa 23 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 41$, kita memiliki $41 =$

Teorema (Teorema 6)

Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai:

1. hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima, atau
2. hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

Ilustrasi untuk Teorema 6:

- Jika $n = 18$, kita memiliki $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 2 dan 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 81$, kita memiliki $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, perhatikan bahwa 3 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 39$, kita memiliki $39 = 3 \cdot 13$, perhatikan bahwa 3 dan 13 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 23$, kita memiliki $23 = 23 \cdot 1$, perhatikan bahwa 23 adalah bilangan prima.
- Jika $n = 41$, kita memiliki $41 = 41 \cdot 1$, perhatikan bahwa 41 adalah bilangan prima.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.
Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.
Langkah induktif:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1:

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka $k+1 = (k+1) \cdot 1$.

Bukti (Bukti Teorema 6)

Misalkan $P(n) : n$ adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1. Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Langkah basis: perhatikan bahwa $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, dengan 2 dan 3 adalah bilangan prima. Jadi $P(2), P(3), P(4)$ benar.

Langkah induktif: misalkan $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ benar, akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Tinjau dua kasus berikut:

- Kasus 1: Jika $k+1$ bilangan prima, maka $k+1 = (k+1) \cdot 1$. Jadi $k+1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

- Kasus 2:

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$.

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
    - a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
  - a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
  - b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
  - a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
  - b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

  Akibatnya $k+1$ juga merupakan hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima.

Dari kedua kasus di atas, dapat disimpukan bahwa $P(k+1)$ benar.

- Kasus 2: Jika $k+1$ bukan bilangan prima, maka haruslah terdapat bilangan bulat a dan b yang memenuhi $k+1 = a \cdot b$ dan $2 \leq a \leq b < n+1$. Dari hipotesis induksi, kita memiliki $P(a)$ dan $P(b)$ benar, dengan perkataan lain:
  - a adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1,
  - b adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau hasil kali sebuah bilangan prima dan 1.

  Akibatnya $k+1$ juga merupakan hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima.

Dari kedua kasus di atas, dapat disimpukan bahwa $P(k+1)$ benar. Dengan prinsip induksi kuat, kita telah membuktikan bahwa $P(n)$: n adalah hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan prima atau n adalah hasil kali sebuah bilangan prima dan 1 adalah benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. $\square$

Bahasan

Latihan 2: Induksi Kuat

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut:

1. Misalkan a_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2}$, untuk $n \geq 2$. Barisan a_n memenuhi sifat $a_n = 5^n - 1$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.
2. Misalkan b_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$, untuk $n \geq 3$. Barisan b_n memenuhi sifat $1 \leq b_n \leq 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
3. Periksa kebenaran pernyataan ini: setiap barang yang harganya tidak kurang dari 12 sen dapat dibayar menggunakan uang pecahan 4 sen dan 5 sen saja, tanpa kembalian.

Selesaikan permasalahan berikut:

4. Ada sebuah negeri yang menggunakan mata uang galleon. Uang sejumlah berapa saja yang dapat dibentuk hanya dari pecahan 2 galleon dan 5 galleon saja (selain 2 galleon dan 5 galleon itu sendiri)