

Metode Pembuktian Matematis

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2015-2016

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

November 2015

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

- 1 *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 1), Edisi 7, 2012, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
- 2 *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 4), Edisi 4, 2010, oleh S. S. Epp.
- 3 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
- 4 *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke [<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id](mailto:pleasedontspam@telkomuniversity.ac.id).

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Istilah Umum: Teorema, Lema, Proposisi, dan Bukti

Teorema, Lema, dan Proposisi

Teorema (*Theorem*)

Pernyataan (matematis) yang **penting dan (sangat) berguna** biasanya dinamakan sebagai **teorema**. Teorema bisa juga dikatakan sebagai suatu hasil atau fakta matematis.

Lema (*Lemma*)

Lema (“teorema kecil”) merupakan suatu pernyataan yang umumnya digunakan untuk **membuktikan suatu teorema** (lema jarang berdiri sendiri). Lema digunakan sebagai suatu “jembatan” untuk membuktikan suatu teorema yang buktinya cukup rumit atau panjang.

Proposisi (*Proposition*)

Proposisi merupakan suatu pernyataan yang tidak sepenting teorema. Biasanya proposisi juga digunakan untuk membuktikan suatu teorema yang buktinya cukup rumit dan panjang.

Bukti Matematis

Bukti (*proof*): argumen absah yang menunjukkan kebenaran dari suatu teorema, lema, atau proposisi. Bukti diperoleh melalui aturan-aturan inferensi dari premis-premis yang ada. Suatu bukti biasanya diakhiri dengan salah satu simbol berikut: \square , \blacksquare , atau **Q.E.D.**

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2 .
(4)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2 .
(4)	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2 .
(4)	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2 .
(4)	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)	$2b = b$	Substitusi a dengan b pada (5), karena $a = b$ pada (1).
(7)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

“Teorema”

$$1 = 2$$

“Bukti”

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a .
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2 .
(4)	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)	$2b = b$	Substitusi a dengan b pada (5), karena $a = b$ pada (1).
(7)	$2 = 1$	Membagi kedua ruas dari (6) dengan b . □

Alasan 2: agar kita dapat menjamin bahwa argumen yang kita berikan berlaku secara umum.

Teorema

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

“Bukti”

Alasan 2: agar kita dapat menjamin bahwa argumen yang kita berikan berlaku secara umum.

Teorema

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

“Bukti”

Ambil sembarang dua bilangan ganjil, misalkan kedua bilangan ganjil tersebut adalah a dan b . Misalkan $a = 1$ dan $b = 3$. Jelas bahwa a dan b keduanya ganjil. Kita memiliki $a + b = 1 + 3 = 4$, sehingga $a + b$ adalah bilangan genap. Jadi dari penjelasan yang diberikan terlihat bahwa jumlah sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap. □

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4:

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

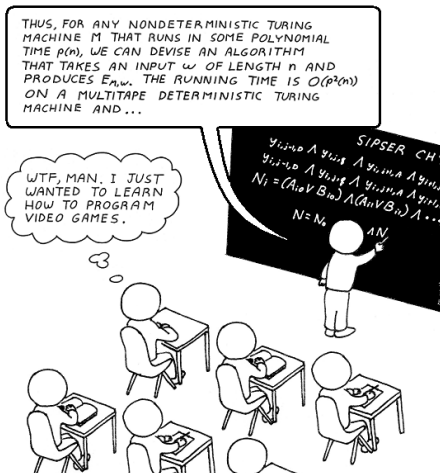
- pembuktian kebenaran suatu algoritma (*algorithm correctness*) – akan dipelajari dalam kuliah Desain dan Analisis Algoritma (mata kuliah wajib S1 Teknik Informatika)

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

- pembuktian kebenaran suatu algoritma (*algorithm correctness*) – akan dipelajari dalam kuliah Desain dan Analisis Algoritma (mata kuliah wajib S1 Teknik Informatika)
- pemberian fakta yang tak terbantahkan pada suatu sistem – digunakan dalam beberapa mata kuliah pilihan seperti pada Kriptografi dan Metode Formal.

Mathematical proving in computer science...



Sumber: ABSTRUSE GOOSE.

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 **Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti**
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, **kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit** (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam **bukti** dari teorema tersebut, **instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit**.

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, **kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit** (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam **bukti** dari teorema tersebut, **instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit.**

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Jika $x > y$, dengan x dan y adalah bilangan real yang lebih dari 1, maka $x^2 > y^2$.

Sebenarnya berarti:

Teorema

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, **kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit** (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam **bukti** dari teorema tersebut, **instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit**.

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Jika $x > y$, dengan x dan y adalah bilangan real yang lebih dari 1, maka $x^2 > y^2$.

Sebenarnya berarti:

Teorema

Untuk setiap bilangan real x dan y yang lebih dari 1, jika $x > y$, maka $x^2 > y^2$.

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)**
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$ ”, atau dapat ditulis $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$ ”, atau dapat ditulis $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- ambil sembarang $c \in D$,

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$ ”, atau dapat ditulis $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- ambil sembarang $c \in D$,
- asumsikan $P(c)$ **benar**, kemudian konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... $Q(c)$ **benar**.

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap.

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki
 $-2 = 2(-1)$, $-4 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki
 $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 = 2(1008)$. Kemudian bilangan -3 , -7 , 1 , dan 2015 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 = 2(1008)$. Kemudian bilangan -3 , -7 , 1 , dan 2015 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 = 2(1008)$. Kemudian bilangan -3 , -7 , 1 , dan 2015 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 = 2(1008)$. Kemudian bilangan -3 , -7 , 1 , dan 2015 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 = 2(0) + 1$, dan $2015 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **genap** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan **ganjil** bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2 , -4 , 0 , dan 2016 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2016 = 2(1008)$. Kemudian bilangan -3 , -7 , 1 , dan 2015 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 = 2(0) + 1$, dan $2015 = 2(1007) + 1$.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **kuadrat sempurna** bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 =$

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **kuadrat sempurna** bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$,
 $9 =$

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **kuadrat sempurna** bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan 49

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **kuadrat sempurna** bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan $49 = 7^2$.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan **kuadrat sempurna** bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan $49 = 7^2$. Bilangan 7, 8, dan 11 bukan bilangan kuadrat sempurna, karena tidak terdapat bilangan bulat a , b , dan c sehingga $7 = a^2$, $8 = b^2$, dan $11 = c^2$.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat n .
- 2 Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .
- 3 Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$.
- 4 Jadi n ganjil. □

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat m dan n .

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat m dan n .
- 2 Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c .

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat m dan n .
- 2 Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c .
- 3 Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc .

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

- 1 Ambil sembarang bilangan bulat m dan n .
- 2 Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c .
- 3 Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc .
- 4 Jadi mn juga kuadrat sempurna. □

Penulisan Bukti yang Rapi, Baik, dan Benar

Bukti matematis biasanya tidak ditulis per nomor langkah seperti pada contoh-contoh bukti yang telah diberikan sebelumnya. **Bukti matematis biasanya ditulis dalam bentuk narasi yang terdiri dari beberapa kalimat dalam satu atau lebih paragraf.** Kalimat diawali dengan huruf kapital dan diakhiri dengan tanda titik (.), kecuali bila awal kalimat merupakan simbol/ notasi matematika.

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Ambil sembarang bilangan bulat n . Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$. Jadi n ganjil. □

Bukti (Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.)

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Ambil sembarang bilangan bulat n . Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$. Jadi n ganjil. □

Bukti (Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.)

Ambil sembarang bilangan bulat m dan n . Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c . Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc . Jadi mn juga kuadrat sempurna. □

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b .

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c .

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c . Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c . Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c . Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$. Akibatnya $a + c = 2k + 2\ell - 2b = 2(k + \ell - b)$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b . Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c . Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$. Akibatnya $a + c = 2k + 2\ell - 2b = 2(k + \ell - b)$. Jadi $a + c$ adalah bilangan genap. \square

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irrasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional,

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat. Karena b dan d keduanya tak nol, maka $bd \neq 0$.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan **rasional** apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan **irasional**.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat. Karena b dan d keduanya tak nol, maka $bd \neq 0$. Jadi $q + r$ adalah bilangan rasional. □

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi**
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k + 1}$.

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k + 1}$. **Selanjutnya???**

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k + 1}$. **Selanjutnya???**

Metode pembuktian dengan bukti langsung tidak dapat digunakan untuk membuktikan teorema di atas.

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \rightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \rightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \rightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \rightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \rightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \rightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara

- pertama asumsikan $\neg q$ benar;

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “jika p maka q ”, atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \rightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \rightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \rightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara

- pertama asumsikan $\neg q$ benar;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... $\neg p$ benar.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: **jika n genap, maka n^2 genap**.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: **jika n genap, maka n^2 genap**. Misalkan n genap,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: **jika n genap, maka n^2 genap**. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k .

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: **jika n genap, maka n^2 genap**. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: **jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil**. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku **n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya**, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: **jika n genap, maka n^2 genap**. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Jadi n^2 genap. □

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap,

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k .

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. \square

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. □

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ dan $b > \sqrt{n}$, maka $ab > (\sqrt{n})^2 = n$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a , b , dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k . Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. □

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ dan $b > \sqrt{n}$, maka $ab > (\sqrt{n})^2 = n$. Jadi $ab \neq n$. □

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)**
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bagaimana cara membuktikan teorema di atas?

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bagaimana cara membuktikan teorema di atas? Pernyataan di atas tidak dapat dibuktikan dengan bukti langsung maupun bukti tak langsung dengan dengan kontraposisi.

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
- 3 diperoleh **pernyataan r** dan **pernyataan $\neg r$**

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
- 3 diperoleh **pernyataan r** dan **pernyataan $\neg r$**
- 4 akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan **kontradiksi**

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
- 3 diperoleh **pernyataan r** dan **pernyataan $\neg r$**
- 4 akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan **kontradiksi**
- 5 dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**.

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
- 3 diperoleh **pernyataan** r dan **pernyataan** $\neg r$
- 4 akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan **kontradiksi**
- 5 dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**.

Karena $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**, dan $(r \wedge \neg r)$ **selalu salah**, maka haruslah

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

- 1 pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
- 2 konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
- 3 diperoleh **pernyataan** r dan **pernyataan** $\neg r$
- 4 akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan **kontradiksi**
- 5 dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**.

Karena $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**, dan $(r \wedge \neg r)$ **selalu salah**, maka haruslah $\neg p$ **salah**. Karena $\neg p$ **salah**, haruslah p **benar**.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M . Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M . Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n . Pandang bilangan $N = M + 1$,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M . Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n . Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat dan $N > M$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

- 1 Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M .
- 2 Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .
- 3 Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
- 4 Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M . Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n . Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat dan $N > M$. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar. □

Latihan 4

Teorema (Teorema 4.1)

Di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

Teorema (Teorema 4.2)

Tidak ada bilangan bulat yang genap dan ganjil sekaligus.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu,

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. □

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. □

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus,

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. □

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. □

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$. Akibatnya diperoleh $2(k - \ell) = 1$, atau $k - \ell = \frac{1}{2}$.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Phatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. □

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$. Akibatnya diperoleh $2(k - \ell) = 1$, atau $k - \ell = \frac{1}{2}$. Hal ini tidak mungkin terjadi karena selisih dari dua bilangan bulat harus berupa bilangan bulat. □

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M .

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M . Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n .

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M . Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n . Pandang bilangan bulat $N =$

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M . Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n . Pandang bilangan bulat $N = M - 2 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$, N juga merupakan bilangan ganjil dan $N < M$.

Latihan 5

Teorema

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Teorema (Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M . Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n . Pandang bilangan bulat $N = M - 2 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$, N juga merupakan bilangan ganjil dan $N < M$. Ini berarti N adalah bilangan ganjil yang lebih kecil dari M , dan hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa M adalah bilangan ganjil terkecil. □

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

Anda mengenal istilah \gcd sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. \gcd merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

Anda mengenal istilah \gcd sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. \gcd merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

Anda mengenal istilah \gcd sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. \gcd merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

Anda mengenal istilah \gcd sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. \gcd merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) = 3$, dan $\gcd(3, 0) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat.

Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b , dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b .

Catatan

Anda mengenal istilah \gcd sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. \gcd merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) = 3$, dan $\gcd(3, 0) = 3$.

Lema (Lema 6)

Apabila r adalah bilangan rasional, maka r dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a, b) = 1$.

Sebagai contoh, $\frac{8}{18}$ dapat dinyatakan sebagai

Lema (Lema 6)

Apabila r adalah bilangan rasional, maka r dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a, b) = 1$.

Sebagai contoh, $\frac{8}{18}$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{4}{9}$, tinjau bahwa $\gcd(4, 9) = 1$. Bentuk bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a, b) = 1$ selanjutnya dikatakan sebagai bentuk sederhana dari bilangan rasional tersebut.

Lema (Lema 7)

Misalkan n adalah bilangan bulat, jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti

Latihan.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional,

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c .

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d .

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d . Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) = 2$,

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d . Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) = 2$, hal ini bertentangan dengan asumsi sebelumnya bahwa $\gcd(a, b) = 1$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c . Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d . Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) = 2$, hal ini bertentangan dengan asumsi sebelumnya bahwa $\gcd(a, b) = 1$. Dengan demikian haruslah $\sqrt{2}$ bilangan irasional. \square

Challenging Problems

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut. Misalkan ${}^a\log b$ menyatakan bilangan real sehingga $a^{a\log b} = b$.

- 1 ${}^2\log 3$ irasional.
- 2 $\sqrt[3]{2}$ irasional.
- 3 Jika a adalah bilangan genap dan b adalah bilangan ganjil, maka ${}^a\log b$ bukan bilangan rasional.

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen**
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

(\Rightarrow) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

(\Rightarrow) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

(\Rightarrow) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.

(\Leftarrow) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

(\Rightarrow) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.

(\Leftarrow) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil. Pernyataan ini setara dengan kontraposisinya, yaitu jika n genap, maka $5n + 6$ genap.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: “ p jika dan hanya jika q ”, atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

(\Rightarrow) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k . Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.

(\Leftarrow) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil. Pernyataan ini setara dengan kontraposisinya, yaitu jika n genap, maka $5n + 6$ genap. Andaikan n genap, maka $n = 2\ell$, untuk suatu bilangan bulat ℓ . Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2\ell) + 6 = 2(5\ell + 3)$. Jadi $5n + 6$ genap. □

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan**
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
- 2 Pernyataan salah, pilih $x =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
- 2 Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
- 2 Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y = 0$, dan $z =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- 1 Jika x adalah bilangan real, maka $x^2 \geq 1$.
- 2 Misalkan x , y , dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

- 1 Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
- 2 Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 2$, maka $xy = 0$, $yz = 0$, tetapi $xz = 2$.

Bahasan

- 1 Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
- 2 Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
- 3 Bukti Langsung (Direct Proof)
- 4 Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi
- 5 Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
- 6 Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
- 7 (Contoh) Penyangkal Pernyataan
- 8 Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis**

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 =$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} =$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} =$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} =$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$. □

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$$1 = -1$$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$. □

Kesalahan ada pada penggunaan fakta bahwa $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$, penggunaan sifat $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **hanya diperbolehkan ketika setidaknya satu dari a atau b positif**. Kesalahan dalam manipulasi fakta-fakta matematis seperti ini disebut **kekeliruan matematis** (*mathematical fallacy*).

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ , kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ , kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ , kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Akan tetapi, “bukti” di atas salah, karena pernyataan “andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ ” muncul di dalamnya.

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ , kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Akan tetapi, “bukti” di atas salah, karena pernyataan “andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ ” muncul di dalamnya. Tidak ada argumen dalam bukti yang dapat menunjukkan bahwa n memang benar-benar dapat ditulis dalam bentuk 2ℓ untuk suatu bilangan bulat ℓ . Justru hal inilah yang ingin ditunjukkan.

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k . Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ , kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Akan tetapi, “bukti” di atas salah, karena pernyataan “andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ ” muncul di dalamnya. Tidak ada argumen dalam bukti yang dapat menunjukkan bahwa n memang benar-benar dapat ditulis dalam bentuk 2ℓ untuk suatu bilangan bulat ℓ . Justru hal inilah yang ingin ditunjukkan. Kesalahan seperti ini, yaitu memberikan bukti dengan memakai fakta yang ingin dibuktikan, disebut **argumentasi sirkular** (*circular reasoning*).