计算几何的数学基础

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

1-3 多项式插值法

插值问题

给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中两两不同点构成的点集$\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$与实数集$\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$,

插值问题

给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中两两不同点构成的点集$\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$与实数集$\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$，设$\Phi_n$为定义在$D$上的$n$维函数空间.

插值问题

给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中两两不同点构成的点集$\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$与实数集$\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$，设$\Phi_n$为定义在$D$上的$n$维函数空间.

插值问题：寻找函数$\varphi(x) \in \Phi_n$，使其满足插值条件

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.1}$$

插值问题

给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中两两不同点构成的点集$\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$与实数集$\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$，设$\Phi_n$为定义在$D$上的$n$维函数空间.

插值问题：寻找函数$\varphi(x) \in \Phi_n$，使其满足插值条件

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.1}$$

如果满足如上插值条件的$\varphi(x)$存在，则称其为插值函数，点集$\{x_i\}_{i=1}^n$称为插值节点组(或插值结点组)，D称为插值区域.

插值问题

给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中两两不同点构成的点集$\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$与实数集$\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$，设$\Phi_n$为定义在$D$上的$n$维函数空间.

插值问题：寻找函数$\varphi(x) \in \Phi_n$，使其满足插值条件

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.1}$$

如果满足如上插值条件的$\varphi(x)$存在，则称其为插值函数，点集$\{x_i\}_{i=1}^n$称为插值节点组(或插值结点组)，D称为插值区域.

如果插值数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$来自于某个定义在D上的d元实值函数$y = f(x)$，即满足$y_i = f(x_i)(i = 1, \cdots, n)$，则$f(x)$称为被插函数，$f(x) - \varphi(x)$为误差余项或插值余项.

插值问题

解决插值问题的**核心**是**插值条件所决定的线性方程组的求解**。

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要，不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

1. **根据数据点集的实际情况与特征选择适当的插值函数空间;**

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

1. **根据数据点集的实际情况与特征选择适当的插值函数空间;**
2. **判断插值问题解(即插值函数)的存在性与唯一性;**

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

1. **根据数据点集的实际情况与特征选择适当的插值函数空间;**
2. **判断插值问题解(即插值函数)的存在性与唯一性;**
3. **构造或求解插值函数;**

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

1. **根据数据点集的实际情况与特征选择适当的插值函数空间;**
2. **判断插值问题解(即插值函数)的存在性与唯一性;**
3. **构造或求解插值函数;**
4. **分析插值余项;**

插值问题

解决插值问题的核心是插值条件所决定的线性方程组的求解。

插值函数空间Φ_n的选择至关重要, 不同插值函数空间决定的插值函数的存在与唯一性可能不同，得到的插值函数$\varphi(x)$也具有不同的性质特征。

插值问题一般分为如下几个部分：

1. **根据数据点集的实际情况与特征选择适当的插值函数空间;**
2. **判断插值问题解(即插值函数)的存在性与唯一性;**
3. **构造或求解插值函数;**
4. 分析**插值余项;**
5. 应用插值函数进行**数值计算.**

插值适定节点组

一般来说, 对$D \subset \mathbb{R}^d$上任给的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$, 插值条件决定的线性方程组的系数矩阵$\det(A) \neq 0$并不是一定成立的.

插值适定节点组

一般来说，对$D \subset \mathbb{R}^d$上任给的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$，插值条件决定的线性方程组的系数矩阵$\det(A) \neq 0$并不是一定成立的.

使得$\det(A) \neq 0$的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$称为函数空间Φ_n上的插值适定节点组.

插值适定节点组

一般来说，对$D \subset \mathbb{R}^d$上任给的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$，插值条件决定的线性方程组的系数矩阵$\det(A) \neq 0$并不是一定成立的.

使得$\det(A) \neq 0$的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$称为函数空间Φ_n上的插值适定节点组.

当$d = 1$时，$\det(A) \neq 0$成立的条件是$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$满足Haar条件。

插值适定节点组

一般来说，对$D \subset \mathbb{R}^d$上任给的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$，插值条件决定的线性方程组的系数矩阵$\det(A) \neq 0$并不是一定成立的.

使得$\det(A) \neq 0$的插值节点组$\{x_i\}_{i=1}^n$称为函数空间Φ_n上的插值适定节点组.

当$d = 1$时，$\det(A) \neq 0$成立的条件是$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$满足Haar条件。

当$d = 1$时，插值函数空间Φ_n选为多项式空间时，一定满足Haar条件。此时，任给的插值节点组一定是插值适定节点组，插值条件的解一定存在并且唯一。

一元多项式插值问题

设给定$[a,b]$区间上的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$满足

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b.$$

定义$[a,b]$上的实值函数$y=f(x)$满足$y_i = f(x_i), i=0,1,\cdots,n.$

一元多项式插值问题

设给定$[a,b]$区间上的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$满足

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

定义$[a,b]$上的实值函数$y=f(x)$满足$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n.$

一元多项式插值问题是：

一元多项式插值问题

设给定$[a,b]$区间上的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$满足

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

定义$[a,b]$上的实值函数$y=f(x)$满足$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n.$

一元多项式插值问题是： **寻求多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$，使其满足插值条件**

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n. \tag{1.2}$$

一元多项式插值问题

设给定$[a,b]$区间上的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$满足

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

定义$[a,b]$上的实值函数$y=f(x)$满足$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$.

一元多项式插值问题是：寻求多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$，使其满足插值条件

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n. \tag{1.2}$$

定理

满足插值条件(1.2)的n次多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$存在且唯一.

一元多项式插值问题

设给定$[a,b]$区间上的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$满足

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

定义$[a,b]$上的实值函数$y=f(x)$满足$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n.$

一元多项式插值问题是： 寻求多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$，使其满足插值条件

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n. \tag{1.2}$$

定理

满足插值条件(1.2)的n次多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$存在且唯一.

几何解释： 对平面上事先给定的$n+1$个点$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$，其中$x_i \ne x_j (i \ne j)$，有且仅有一条n次多项式曲线通过这些点.

插值多项式的存在唯一性

证明：

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$.

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。 进而满足插值条件(1.2)的n次多项式存在且唯一。

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。 进而满足插值条件(1.2)的n次多项式存在且唯一。

缺点： 求解方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$时，虽然其系数矩阵$A$非奇异，但可能呈现病态，求解可能产生数值不稳定现象.

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。 进而满足插值条件(1.2)的n次多项式存在且唯一。

缺点： 求解方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$时，虽然其系数矩阵$A$非奇异，但可能呈现病态，求解可能产生数值不稳定现象. 而产生此现象的根本原因是在(1.3)中我们采用幂函数基来表示插值多项式$p(x)$.

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。 进而满足插值条件(1.2)的n次多项式存在且唯一。

缺点： 求解方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$时，虽然其系数矩阵$A$非奇异，但可能呈现病态，求解可能产生数值不稳定现象. 而产生此现象的根本原因是在(1.3)中我们采用幂函数基来表示插值多项式$p(x)$.

解决方法： **使用其它基函数表示$p(x)$，使得插值条件决定的方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$容易求解。**

插值多项式的存在唯一性

证明： 设n次多项式$p(x)$表示为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \tag{1.3}$$

满足插值条件(1.2)确定了一个关于$p(x)$系数的线性方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$. $\det(A^T)$是一个关于$\{x_i\}_{i=0}^n$的Vandermonde行列式，不为零，从而方程组解唯一。 进而满足插值条件(1.2)的n次多项式存在且唯一。

缺点： 求解方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$时，虽然其系数矩阵$A$非奇异，但可能呈现病态，求解可能产生数值不稳定现象. 而产生此现象的根本原因是在(1.3)中我们采用幂函数基来表示插值多项式$p(x)$.

解决方法： **使用其它基函数表示$p(x)$，使得插值条件决定的方程组$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$容易求解。显然，当$A$为单位阵时最容易求解！**

1-3 多项式插值法

基函数的构造

对$i \in \{0,1,\cdots,n\}$, 设多项式$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$满足如下插值条件

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \quad j = 0,\cdots n, \\ 1, & j = i, \end{cases} \tag{2.1}$$

基函数的构造

对$i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 设多项式$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$满足如下插值条件

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \quad j = 0, \cdots n, \\ 1, & j = i, \end{cases} \tag{2.1}$$

由插值条件$l_i(x_j) = 0 (i \neq j)$，存在常数c，使得$l_i(x)$可以表示为

$$l_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

基函数的构造

对$i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 设多项式$l_i(x) \in \mathbb{P}_n$满足如下插值条件

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \quad j = 0, \cdots n, \\ 1, & j = i, \end{cases} \tag{2.1}$$

由插值条件$l_i(x_j) = 0 (i \neq j)$，存在常数c，使得$l_i(x)$可以表示为

$$l_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

而常数c可由插值条件$l_i(x_i) = 1$确定为

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

基函数的构造

则满足条件(2.1)的唯一n次多项式为

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad (2.2)$$

基函数的构造

则满足条件(2.1)的唯一n次多项式为

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \tag{2.2}$$

记$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$, 则$l_i(x)$又可表示:

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

基函数的构造

则满足条件(2.1)的唯一n次多项式为

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad (2.2)$$

记$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$，则$l_i(x)$又可表示：

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

可以证明，多项式组$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$是线性无关的，因此构成$\mathbb{P}_n$的一组基.

Lagrange插值公式

利用基函数$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$表示插值多项式，插值条件所决定的线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$的系数矩阵为单位阵。

Lagrange插值公式

利用基函数$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$表示插值多项式，插值条件所决定的线性方程组$A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$的系数矩阵为单位阵。

从而满足插值条件(1.2)的多项式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x). \tag{2.3}$$

Lagrange插值公式

利用基函数$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$表示插值多项式，插值条件所决定的线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$的系数矩阵为单位阵。

从而满足插值条件(1.2)的多项式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x). \tag{2.3}$$

称(2.3)式为Lagrange插值公式，$L_n(x)$称为n次Lagrange插值多项式，$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$称为$n$次Lagrange插值基函数.

实例

例

设插值节点为

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4,$$

函数$y = f(x)$满足

$$y_0 = f(x_0) = 1, y_1 = f(x_1) = 2, y_2 = f(x_2) = 3, y_3 = f(x_3) = -1.$$

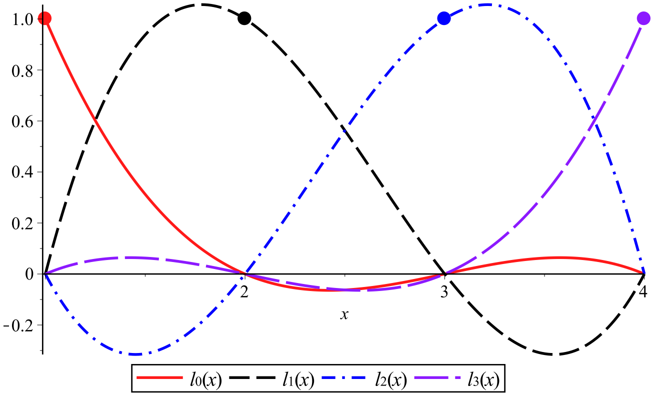
求$f(x)$的三次Lagrange插值多项式.

实例(续)

解： 利用公式，求得Lagrange插值基函数为

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,\\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{19}{2}x-6,\\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,\\
l_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{11}{6}x-1.
\end{aligned}
$$

实例(续)



实例(续)

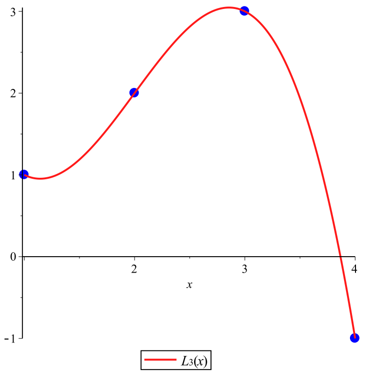
利用插值公式，满足插值条件的三次Lagrange插值多项式为

$$L_3(x) = l_0(x) + 2l_1(x) + 3l_2(x) - l_4(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 5.$$

实例(续)

利用插值公式, 满足插值条件的三次Lagrange插值多项式为

$$L_3(x) = l_0(x) + 2l_1(x) + 3l_2(x) - l_4(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{49}{6}x + 5.$$



实例

例

利用上例中的相同插值节点，设$f(x)=e^x$，则(保留小数点后五位有效数字)

$$
\begin{aligned}
y_0 = f(x_0) = 2.71828, \quad y_1 = f(x_1) = 7.38906, \\
y_2 = f(x_2) = 20.08554, \quad y_3 = f(x_3) = 54.59815.
\end{aligned}
$$

求$f(x)$的三次Lagrange插值多项式.

实例

例

利用上例中的相同插值节点，设$f(x)=e^x$, 则(保留小数点后五位有效数字)

$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = 2.71828, \quad y_1 = f(x_1) = 7.38906,\\
y_2 &= f(x_2) = 20.08554, \quad y_3 = f(x_3) = 54.59815.
\end{aligned}
$$

求$f(x)$的三次*Lagrange*插值多项式.

解： 插值节点相同，因此Lagrange插值基函数也相同。

实例

例

利用上例中的相同插值节点，设$f(x)=e^x$, 则(保留小数点后五位有效数字)

$$
\begin{aligned}
y_0 = f(x_0) = 2.71828, \quad y_1 = f(x_1) = 7.38906, \\
y_2 = f(x_2) = 20.08554, \quad y_3 = f(x_3) = 54.59815.
\end{aligned}
$$

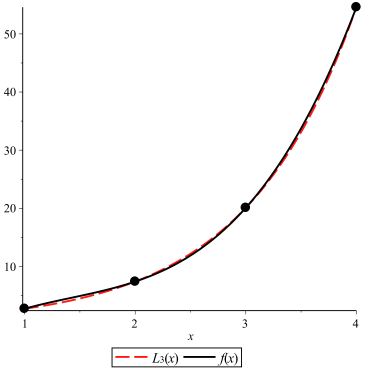
求$f(x)$的三次*Lagrange*插值多项式.

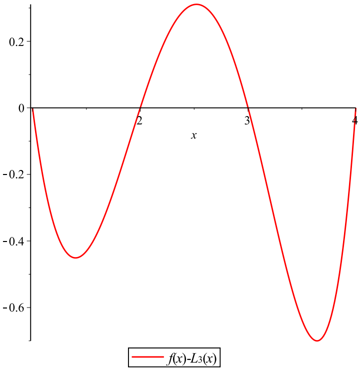
解：插值节点相同，因此Lagrange插值基函数也相同。

从而满足插值条件的三次Lagrange插值多项式为

$$L_3(x) = 2.298405x^3 - 9.77758x^2 + 17.914685x - 7.71723.$$

实例(续)





1-3 多项式插值法

Newton插值公式的目的

虽然Lagrange插值公式具有结构简单、便于构造的优点，但是它有一个比较明显的缺点.

Newton插值公式的目的

虽然Lagrange插值公式具有结构简单、便于构造的优点，但是它有一个比较明显的缺点.

为了提高精度或数据补充的需要，有时需要增加插值条件.

Newton插值公式的目的

虽然Lagrange插值公式具有结构简单、便于构造的优点，但是它有一个比较明显的缺点.

为了提高精度或数据补充的需要，有时需要增加插值条件. 增加插值条件后，原有的Lagrange插值基函数由于构造方式原因都要重新计算，这在计算中是不方便的

Newton插值公式的目的

虽然Lagrange插值公式具有结构简单、便于构造的优点，但是它有一个比较明显的缺点.

为了提高精度或数据补充的需要，有时需要增加插值条件. 增加插值条件后，原有的Lagrange插值基函数由于构造方式原因都要重新计算，这在计算中是不方便的

我们希望能够提出一种多项式插值公式，在克服Lagrange插值缺点的基础上，还保持容易构造的优点，而Newton插值法恰好满足这一要求.

Newton插值基函数

虽要克服Lagrange插值缺点，还保持容易构造的优点，那么就需要重新选择多项式空间的基函数.

Newton插值基函数

虽要克服Lagrange插值缺点, 还保持容易构造的优点，那么就需要重新选择多项式空间的基函数.

对给定的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$，显然多项式组

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

同样构成$\mathbb{P}_n$的一组基.

Newton插值基函数

虽要克服Lagrange插值缺点, 还保持容易构造的优点，那么就需要重新选择多项式空间的基函数.

对给定的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$，显然多项式组

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

同样构成$\mathbb{P}_n$的一组基.

并且，如果增加一个节点x_{n+1}，只需在如上多项式组中再增加一项$(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$就构成$\mathbb{P}_{n+1}$的一组基.

Newton插值基函数

虽要克服Lagrange插值缺点，还保持容易构造的优点，那么就需要重新选择多项式空间的基函数.

对给定的插值节点$\{x_i\}_{i=0}^n$，显然多项式组

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

同样构成$\mathbb{P}_n$的一组基.

并且，如果增加一个节点x_{n+1}，只需在如上多项式组中再增加一项$(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$就构成$\mathbb{P}_{n+1}$的一组基．这就是Newton插值多项式选择此组函数来表示的原因.

Newton插值公式

可以递推推出插值公式为

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\
& f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Newton插值公式

可以递推推出插值公式为

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\
& f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

$N_n(x)$称为Newton插值多项式, 其系数可由下式确定

$$
f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^{k} (x_i - x_j)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{3.1}
$$

Newton插值公式

可以递推推出插值公式为

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\
& f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

$N_n(x)$称为Newton插值多项式, 其系数可由下式确定

$$
f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{3.1}
$$

这些系数符号虽然看起来并不复杂，但是计算方法却不便记忆。为此我们引进差商的概念来定义它们, Newton插值公式也称为差商型插值公式.

差商的定义

定义

设函数$y = f(x)$在给定互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的函数值$y_i = f(x_i)(i = 1, \cdots, n)$,

差商的定义

定义

设函数$y=f(x)$在给定互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的函数值$y_i=f(x_i)(i=1,\cdots,n)$, 称

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}, \quad i \neq j,$$

为$f(x)$关于节点x_i, x_j的一阶差商(或均差).

差商的定义

定义

设函数$y=f(x)$在给定互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的函数值$y_i=f(x_i)(i=1,\cdots,n)$，称

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i},\quad i\neq j,$$

为$f(x)$关于节点x_i,x_j的一阶差商(或均差). 称一阶差商的一阶差商

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_j,x_k)-f(x_i,x_j)}{x_k-x_i},$$

为$f(x)$关于节点x_i,x_j,x_k的二阶差商，其中i,j,k互不相同.

差商的定义(续)

定义

一般地，称$f(x)$的$n-1$阶差商的一阶差商

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})}{x_n-x_0}$$

为$f(x)$关于节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$的n阶差商.

差商的定义(续)

定义

一般地，称$f(x)$的$n-1$阶差商的一阶差商

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

为$f(x)$关于节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$的n阶差商.

函数值$f(x_i)$也可以看做$f(x)$在x_i点处的零阶差商.

差商的计算

常利用形式如下的差商表来计算差商（高阶差商可以适当扩充差商表）：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

差商的计算

常利用形式如下的差商表来计算差商（高阶差商可以适当扩充差商表）：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

从而确定Newton插值公式中的各项系数。

差商的性质

1. **差商是函数值的线性组合.**

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega_{n+1}'(x_i)},$$

其中$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

差商的性质

1. **差商是函数值的线性组合.**

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)},$$

其中$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

2. **差商具有对称性.** $f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是$x_0, x_1, \cdots, x_n$的对称函数, 亦即当任意调换$x_0, x_1, \cdots, x_n$的位置时, 差商的值不变. 例如

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0) = f(x_n, x_0, \cdots, x_{n-1}).$$

差商的性质(续)

3. **差商是线性泛函.** 对函数$f(x), g(x)$与任意实数α, β,
设$F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, 则

$$F(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \alpha f(x_0, x_1, \cdots, x_n) + \beta g(x_0, x_1, \cdots, x_n).$$

差商的性质(续)

3. **差商是线性泛函.** 对函数$f(x), g(x)$与任意实数α, β, 设$F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, 则

$$F(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \alpha f(x_0, x_1, \cdots, x_n) + \beta g(x_0, x_1, \cdots, x_n).$$

4. **多项式的差商.** 若$f(x) = x^m$, m为自然数, 则

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{当} n > m, \\ 1, & \text{当} n = m, \\ \text{诸} x_i \text{的} m-n \text{次的齐次函数}, & \text{当} n < m. \end{cases}$$

差商的性质(续)

5. 差商可以表示成两个行列式之商:

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

插值条件的增加

对Newton插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\
& f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),
\end{aligned}
$$

插值条件的增加

对Newton插值多项式

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

当需要增加一个插值节点x_{n+1}与函数值$y_{n+1} = f(x_{n+1})$时，

插值条件的增加

对Newton插值多项式

$$\begin{aligned} N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\ & f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

当需要增加一个插值节点x_{n+1}与函数值$y_{n+1} = f(x_{n+1})$时，只需在如上插值多项式的后面再增加如下新项即可

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

插值条件的增加

对Newton插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = \quad & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\
& f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),
\end{aligned}
$$

当需要增加一个插值节点x_{n+1}与函数值$y_{n+1} = f(x_{n+1})$时，只需在如上插值多项式的后面再增加如下新项即可

$$
f(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n).
$$

再由差商的对称性，新增节点x_{n+1}不满足$x_n < x_{n+1}$结论同样成立.

实例

例

已知列表函数：

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
$f(x_i)$	3	1	5	2

求满足插值条件的*Newton*插值多项式.

实例

例

已知列表函数：

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
$f(x_i)$	3	1	5	2

求满足插值条件的*Newton*插值多项式.

解： 根据已知条件构造差商表：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	3	-1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{10}$
3	1	4	$-\frac{11}{6}$	
4	5	$-\frac{3}{2}$		
6	2			

实例(续)

将表中的差商值

$$f(x_0) = 3, \quad f(x_0, x_1) = -1,$$
$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{5}{3}, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{10},$$

代入公式,

实例(续)

将表中的差商值

$$
\begin{aligned}
&f(x_0) = 3, \quad f(x_0, x_1) = -1, \\
&f(x_0, x_1, x_2) = \frac{5}{3}, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{10},
\end{aligned}
$$

代入公式, 便可得到满足插值条件的Newton插值多项式为

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= 3 - (x-1) + \frac{5}{3}(x-1)(x-3) - \frac{7}{10}(x-1)(x-3)(x-4) \\
&= \frac{87}{5} - \frac{629}{30}x + \frac{109}{15}x^2 - \frac{7}{10}x^3.
\end{aligned}
$$

1-3 多项式插值法

什么是插值余项

设$p_n(x)$是在点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处关于被插函数$f(x)$的n次插值多项式，

什么是插值余项

设$p_n(x)$是在点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处关于被插函数$f(x)$的n次插值多项式，显然在插值节点上满足

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

我们也希望知道, 当$x \neq x_k(k = 0, 1, \cdots, n)$时，（潜在的）被插函数$f(x)$与插值多项式$p_n(x)$之间的误差(偏差)估计式.

什么是插值余项

设$p_n(x)$是在点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处关于被插函数$f(x)$的n次插值多项式，显然在插值节点上满足

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

我们也希望知道，当$x \neq x_k (k = 0, 1, \cdots, n)$时，（潜在的）被插函数$f(x)$与插值多项式$p_n(x)$之间的误差(偏差)估计式.

对被插函数$f(x)$与插值函数$p_n(x)$，称

$$R_n(f; x) = f(x) - p_n(x)$$

为插值余项(或插值误差).

微分型插值余项

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^{n}$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x) \in C^{n+1}[a,b]$且满足$y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$.

微分型插值余项

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x)\in C^{n+1}[a,b]$且满足$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

的n次插值多项式，则对任意$x\in[a,b]$，存在与x有关的$\xi\in(a,b)$，使得插值余项满足

微分型插值余项

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^{n}$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x) \in C^{n+1}[a,b]$且满足$y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

的n次插值多项式，则对任意$x \in [a,b]$，存在与x有关的$\xi \in (a,b)$，使得插值余项满足

$$R_n(f;x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{4.1}$$

其中$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

插值余项的降低

插值余项公式给出了插值多项式逼近被插函数的程度，我们希望在不改变插值多项式次数（即插值节点个数不变）的基础上，逼近程度（插值误差）尽可能的好。

插值余项的降低

插值余项公式给出了插值多项式逼近被插函数的程度，我们希望在不改变插值多项式次数（即插值节点个数不变）的基础上，逼近程度（插值误差）尽可能的好。

虽然一般情况下插值余项公式中的ξ并不确定，

插值余项的降低

插值余项公式给出了插值多项式逼近被插函数的程度，我们希望在不改变插值多项式次数（即插值节点个数不变）的基础上，逼近程度（插值误差）尽可能的好。

虽然一般情况下插值余项公式中的ξ并不确定，但是如果已知$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上有上界M_{n+1}，亦即

$$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

插值余项的降低

插值余项公式给出了插值多项式逼近被插函数的程度，我们希望在不改变插值多项式次数（即插值节点个数不变）的基础上，逼近程度（插值误差）尽可能的好。

虽然一般情况下插值余项公式中的ξ并不确定，但是如果已知$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上有上界M_{n+1}，亦即

$$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

从而插值余项满足误差界

$$\max_{a\le x\le b} |R_n(f;x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a\le x\le b} |\omega_{n+1}(x)|. \tag{4.2}$$

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的,

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的，降低误差只能考虑降低

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |\omega_{n+1}(x)|,$$

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的，降低误差只能考虑降低

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |\omega_{n+1}(x)|,$$

由于$\omega_{n+1}(x)$为首项系数为1的$n+1$次多项式，从而与最小零偏差多项式建立联系.

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的，降低误差只能考虑降低

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\omega_{n+1}(x)|,$$

由于$\omega_{n+1}(x)$为首项系数为1的$n+1$次多项式，从而与最小零偏差多项式建立联系.

不妨假设$a = -1, b = 1$，对函数$f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$，

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的，降低误差只能考虑降低

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\omega_{n+1}(x)|,$$

由于$\omega_{n+1}(x)$为首项系数为1的$n+1$次多项式，从而与最小零偏差多项式建立联系.

不妨假设$a=-1, b=1$，对函数$f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$，如果插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n \in [-1,1]$取为$T_{n+1}(x)$的零点，即

$$x_k = \cos\frac{2(n-k)+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

插值余项的降低

由于$M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$是由被插函数$f(x)$的性质决定的，降低误差只能考虑降低

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\omega_{n+1}(x)|,$$

由于$\omega_{n+1}(x)$为首项系数为1的$n+1$次多项式，从而与最小零偏差多项式建立联系.

不妨假设$a=-1, b=1$，对函数$f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$， 如果插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n \in [-1,1]$取为$T_{n+1}(x)$的零点，即

$$x_k = \cos\frac{2(n-k)+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

那么

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

插值余项的降低

这说明

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_{n+1}(x)| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n}.$$

定理

插值余项的降低

这说明

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_{n+1}(x)| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n}.$$

定理

设插值节点组$\{x_i\}_{i=0}^n$取为$n+1$次Chebyshev多项式$T_{n+1}(x)$的零点，被插函数$f(x)\in C^{n+1}[-1,1]$，$p_n(x)$为关于$f(x)$的n次插值多项式，

插值余项的降低

这说明

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_{n+1}(x)| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{2^n}.$$

定理

设插值节点组$\{x_i\}_{i=0}^n$取为$n+1$次Chebyshev多项式$T_{n+1}(x)$的零点，被插函数$f(x)\in C^{n+1}[-1,1]$，$p_n(x)$为关于$f(x)$的n次插值多项式，则插值余项满足

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty. \tag{4.3}$$

实例

例

设$f(x)=\sin x$，利用*10*次*Chebyshev*多项式$T_{10}(x)$的零点对$f(x)$进行*Lagrange*插值，构造插值多项式$L_9(x)$，并估计插值误差$\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)-L_9(x)|$.

实例

例

设$f(x)=\sin x$，利用*10*次*Chebyshev*多项式$T_{10}(x)$的零点对$f(x)$进行*Lagrange*插值，构造插值多项式$L_9(x)$，并估计插值误差$\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-L_9(x)|$.

解： $T_{10}(x)$的10个零点分别为

$$x_k=\cos\frac{2(9-k)+1}{20}\pi,\quad k=0,1,\cdots,9,$$

实例

例

设$f(x)=\sin x$，利用*10次Chebyshev*多项式$T_{10}(x)$的零点对$f(x)$进行*Lagrange*插值，构造插值多项式$L_9(x)$，并估计插值误差$\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)-L_9(x)|$.

解： $T_{10}(x)$的10个零点分别为

$$x_k=\cos\frac{2(9-k)+1}{20}\pi,\quad k=0,1,\cdots,9,$$

从而利用Lagrange插值公式，构造出$f(x)$的9次插值多项式$L_9(x)$为

$$\begin{aligned}L_9(x) = {} & 0.0001515274788\,x^9+0.0000000742657\,x^8-0.004673834386\,x^7\\ & -0.000000151740\,x^6+0.07968970489\,x^5+0.00000009625\,x^4\\ & -0.6459637091\,x^3-0.0000000192\,x^2+1.570796318\,x+0.0000000002,\end{aligned}$$

实例(续)

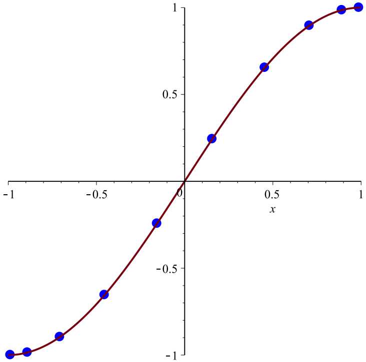
插值误差估计满足

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - L_9(x)| \le \frac{1}{2^9 10!} \max_{-1\le x\le 1} |f^{(10)}(x)| \le 5.382288 \times 10^{-10}.$$

实例(续)

插值误差估计满足

$$\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-L_9(x)|\le \frac{1}{2^9 10!}\max_{-1\le x\le 1}|f^{(10)}(x)|\le 5.382288\times 10^{-10}.$$



实例

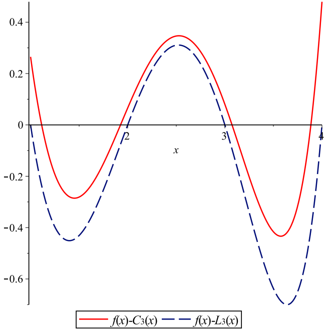
例

对$f(x)=e^x$，分别利用插值节点为$\{1,2,3,4\}$与三次*Chebyshev*多项式零点构造$f(x)$在*[1,4]*上的三次*Lagrange*插值多项式$L_3(x)$与$C_3(x)$.

实例

例

对$f(x)=e^x$，分别利用插值节点为$\{1,2,3,4\}$与三次Chebyshev多项式零点构造$f(x)$在[1,4]上的三次Lagrange插值多项式$L_3(x)$与$C_3(x)$.



Runge现象

例（Runge现象）

考虑*Runge函数*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

Runge现象

例（Runge现象）

考虑*Runge函数*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

插值节点取为等距节点

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, i = 0, 1 \cdots, n.$$

Runge现象

例 (Runge现象)

考虑Runge函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,1],$$

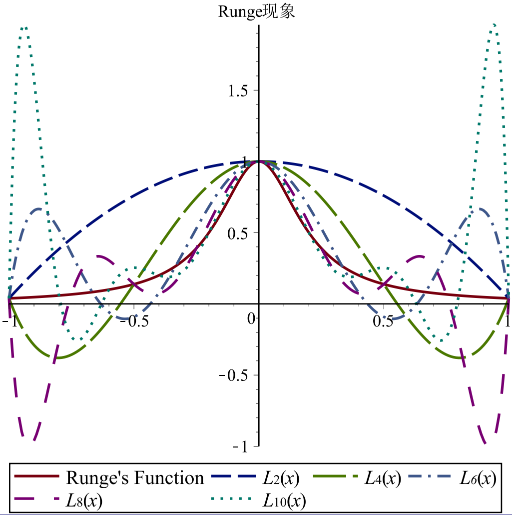
插值节点取为等距节点

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, i = 0, 1 \cdots, n.$$

则$f(x)$的n次Lagrange插值多项式$L_n(x)$为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+25x_i^2} l_i(x).$$

Runge现象(续)


Runge现象
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1
Runge's Function
$L_2(x)$
$L_4(x)$
$L_6(x)$
$L_8(x)$
$L_{10}(x)$

Runge现象(续)

对$n = 2, 4, 6, 8, 10$时，插值多项式随着n的增大，在区间两端插值多项式震荡较为剧烈，使得$L_n(x)$对$f(x)$的逼近效果越来越差.

Runge现象(续)

对$n = 2, 4, 6, 8, 10$时，插值多项式随着n的增大，在区间两端插值多项式震荡较为剧烈，使得$L_n(x)$对$f(x)$的逼近效果越来越差.

这个现象称之为Runge现象.

Runge现象(续)

对$n = 2, 4, 6, 8, 10$时, 插值多项式随着n的增大, 在区间两端插值多项式震荡较为剧烈, 使得$L_n(x)$对$f(x)$的逼近效果越来越差.

这个现象称之为Runge现象.

Runge现象指出:**当$n \to \infty$时(即节点不断加密时), $L_n(x)$越来越逼近$f(x)$不一定总是成立的**.

Runge现象(续)

对$n=2,4,6,8,10$时，插值多项式随着n的增大，在区间两端插值多项式震荡较为剧烈，使得$L_n(x)$对$f(x)$的逼近效果越来越差.

这个现象称之为Runge现象.

Runge现象指出:当$n\to\infty$**时(即节点不断加密时)，**$L_n(x)$**越来越逼近**$f(x)$**不一定总是成立的**.

产生Runge现象的原因：一是Runge函数的高阶导数$\max_{-1\le x\le 1}|f^{(n+1)}(x)|$在$[-1,1]$上随着$n$的增大而以非常快的速度增大，二是使用等距插值节点所引起的插值多项式原因.

Runge现象的解决方法

现象告诉我们，利用高次多项式插值效果并不一定理想，而解决Runge现象可以采用如下多种方式处理：

Runge现象的解决方法

现象告诉我们, 利用高次多项式插值效果并不一定理想, 而解决Runge现象可以采用如下多种方式处理:

1. 放弃插值要求, 利用Bernstein多项式序列来一致逼近原函数, 但是收敛速度较慢.

Runge现象的解决方法

现象告诉我们, 利用高次多项式插值效果并不一定理想, 而解决Runge现象可以采用如下多种方式处理：

1. 放弃插值要求, 利用Bernstein多项式序列来一致逼近原函数, 但是收敛速度较慢.
2. 放弃插值要求, 利用最小二乘法, 采用合适的函数来拟合插值数据点.

Runge现象的解决方法

现象告诉我们，利用高次多项式插值效果并不一定理想，而解决Runge现象可以采用如下多种方式处理：

1. 放弃插值要求，利用Bernstein多项式序列来一致逼近原函数，但是收敛速度较慢.
2. 放弃插值要求，利用最小二乘法，采用合适的函数来拟合插值数据点.
3. 保持插值要求，改变插值节点，利用Chebyshev零点作为节点进行插值.

Runge现象的解决方法

现象告诉我们, 利用高次多项式插值效果并不一定理想, 而解决Runge现象可以采用如下多种方式处理:

1. 放弃插值要求, 利用Bernstein多项式序列来一致逼近原函数, 但是收敛速度较慢.
2. 放弃插值要求, 利用最小二乘法, 采用合适的函数来拟合插值数据点.
3. 保持插值要求, 改变插值节点, 利用Chebyshev零点作为节点进行插值.
4. 保持插值要求, 保持插值节点, 采用分段连续多项式(即样条函数)进行插值.

差商型余项公式

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x)$为定义在$[a,b]$的函数且满足$y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$.

差商型余项公式

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x)$为定义在$[a,b]$的函数且满足$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

的n次插值多项式，

差商型余项公式

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x)$为定义在$[a,b]$的函数且满足$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

的n次插值多项式，则对任意$x\in[a,b]$，插值余项满足

$$R_n(f;x)=f(x)-p_n(x)=f(x,x_0,x_1,\cdots,x_n)\omega_{n+1}(x), \tag{4.4}$$

其中$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

差商型余项公式

定理

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组, $f(x)$为定义在$[a,b]$的函数且满足$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

的n次插值多项式, 则对任意$x\in[a,b]$, 插值余项满足

$$R_n(f;x)=f(x)-p_n(x)=f(x,x_0,x_1,\cdots,x_n)\omega_{n+1}(x),\quad (4.4)$$

其中$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

公式(4.4)称为差商型的余项公式。

推论

推论

设$\{x_i\}_{i=0}^n$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x) \in C^{n+1}[a,b]$且满足$y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件$p_n(x_i) = y_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$的$n$次插值多项式，则微分型插值与差商型余项公式相等.

推论

推论

设$\{x_i\}_{i=0}^{n}$为区间$[a,b]$上的插值节点组，$f(x)\in C^{n+1}[a,b]$且满足$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 若$p_n(x)$为满足插值条件$p_n(x_i)=y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$的$n$次插值多项式，则微分型插值与差商型余项公式相等.

推论

设$x_0,x_1,\cdots,x_k$为互异点，
且$a=\min\{x_0,\cdots,x_k\}, b=\max\{x_0,\cdots,x_k\}$. 若$f(x)\in C^k[a,b]$，则存在点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_k)=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}. \tag{4.5}$$

1-3 多项式插值法

Hermite插值问题

设$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_s \leq b$为给定插值节点.

Hermite插值问题

设$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_s \leq b$为给定插值节点.

对节点x_i，给定m_i个实数$y_i^{(k)}(k = 0, \cdots, m_i - 1)$。
设$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n + 1$.

Hermite插值问题

设$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_s \le b$为给定插值节点.

对节点x_i，给定m_i个实数$y_i^{(k)} (k = 0, \cdots, m_i - 1)$。
设$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n + 1$.

Hermite插值问题为： **寻找一个n次多项式$H_n(x) \in \mathbb{P}_n$，满足插值条件**

$$H_n^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \cdots, m_i - 1, \quad i = 1, \cdots, s. \tag{5.1}$$

Hermite插值问题

设$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_s \le b$为给定插值节点.

对节点x_i，给定m_i个实数$y_i^{(k)}(k = 0, \cdots, m_i - 1)$。
设$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n + 1$.

Hermite插值问题为： **寻找一个n次多项式$H_n(x) \in \mathbb{P}_n$，满足插值条件**

$$H_n^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \cdots, m_i - 1, \quad i = 1, \cdots, s. \tag{5.1}$$

满足插值条件的多项式$H_n(x)$称为n次Hermite插值多项式, x_i称为m_i重插值节点.

Hermite插值问题解的存在唯一性

定理

满足插值条件(5.1)的n次*Hermite*插值多项式存在且唯一.

Hermite插值问题解的存在唯一性

定理

满足插值条件(5.1)的n次*Hermite插值多项式存在且唯一*. 其可表示为

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_i-1} y_i^{(k)} L_{ik}(x). \tag{5.2}$$

Hermite插值问题解的存在唯一性

定理

满足插值条件(5.1)的n次*Hermite插值多项式存在且唯一*. 其可表示为

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_i-1} y_i^{(k)} L_{ik}(x). \tag{5.2}$$

其中$L_{ik}(x)$满足

$$L_{ik}^{(q)}(x_p) = 0, \quad i \neq p, \quad q = 0, \cdots, m_p - 1 \tag{5.3}$$

与

$$L_{ik}^{(q)}(x_i) = \begin{cases} 0, & q \neq k \\ 1, & q = k \end{cases}, \quad q = 0, \cdots, m_i - 1. \tag{5.4}$$

Hermite插值的误差余项

如果插值条件中的实数来自于$[a, b]$的一个已知光滑函数$f(x)$，即$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)(k = 0, \cdots, m_i - 1)$，则称$H_n(x)$为函数$f(x)$的$n$次Hermite插值多项式.

Hermite插值的误差余项

如果插值条件中的实数来自于$[a,b]$的一个已知光滑函数$f(x)$，即$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)(k=0,\cdots,m_i-1)$，则称$H_n(x)$为函数$f(x)$的$n$次Hermite插值多项式.

定理

设$f(x) \in C^{n+1}[a,b]$，$H_n(x)$为函数$f(x)$的n次*Hermite*插值多项式，则误差余项满足

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{5.5}$$

其中$a < \xi < b$，且

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_s)^{m_s}.$$

两点三次Hermite插值

当$s=2$且$m_1=m_2=2$时，此时为对两个节点x_1,x_2进行3次Hermite插值，称为两点三次Hermite插值。

两点三次Hermite插值

当$s=2$且$m_1=m_2=2$时，此时为对两个节点x_1,x_2进行3次Hermite插值，称为两点三次Hermite插值。
两点三次Hermite插值公式为

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = \quad & y_1\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 + y_1^{'}(x-x_1)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 \\
& + y_2\left(1-2\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2 + y_2^{'}(x-x_2)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)
\end{aligned}
$$

两点三次Hermite插值

当$s=2$且$m_1=m_2=2$时，此时为对两个节点x_1,x_2进行3次Hermite插值，称为两点三次Hermite插值。

两点三次Hermite插值公式为

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = \quad & y_1\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2+y_1^{'}(x-x_1)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 \\
& +y_2\left(1-2\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2+y_2^{'}(x-x_2)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2
\end{aligned}
$$

可以构造满足分段三次且一阶导数连续函数(此时即为样条函数)，从而降低了Runge现象产生的可能.

两点三次Hermite插值的误差余项

定理

设$f(x) \in C^4[a, b]$, $H_3(x)$为函数$f(x)$关于x_1, x_2的两点三次*Hermite*插值多项式,

两点三次Hermite插值的误差余项

定理

设$f(x) \in C^4[a,b]$, $H_3(x)$为函数$f(x)$关于x_1, x_2的两点三次*Hermite*插值多项式, 则误差余项满足

$$\|f^{(k)} - H_3^{(k)}\|_\infty \le c_k \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{5.6}$$

两点三次Hermite插值的误差余项

定理

设$f(x) \in C^4[a,b]$, $H_3(x)$为函数$f(x)$关于x_1, x_2的两点三次Hermite插值多项式, 则误差余项满足

$$\|f^{(k)} - H_3^{(k)}\|_\infty \leq c_k \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{5.6}$$

其中$h = x_2 - x_1$, 系数c_k分别为

$$c_0 = \frac{1}{384}, c_1 = \frac{\sqrt{3}}{216}, c_2 = \frac{1}{12}, c_3 = \frac{1}{2},$$

并且上述c_k的估计是最佳的.

1-3 多项式插值法

多元多项式插值问题

设d元k次实多项式集合为$\mathbb{P}_k^{(d)}$, 其维数为$n=\binom{d+k}{d}$. 在给定闭区域$D\subset\mathbb{R}^d$中取n个互异点构成的点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n\subset D$.

多元多项式插值问题

设d元k次实多项式集合为$\mathbb{P}_k^{(d)}$，其维数为$n=\binom{d+k}{d}$. 在给定闭区域$D\subset\mathbb{R}^d$中取n个互异点构成的点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n\subset D$.

d元k多项式插值问题为：对实数集$\{y_i\}_{i=1}^n$，寻找d元k多项式$\varphi(\boldsymbol{x})\in\mathbb{P}_k^{(d)}$，使其满足插值条件

$$\varphi(\boldsymbol{x}_i)=y_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{6.1}$$

多元多项式插值问题

设d元k次实多项式集合为$\mathbb{P}_k^{(d)}$, 其维数为$n = \binom{d+k}{d}$. 在给定闭区域$D \subset \mathbb{R}^d$中取n个互异点构成的点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset D$.

d元k多项式插值问题为：对实数集$\{y_i\}_{i=1}^n$，寻找d元k多项式$\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{P}_k^{(d)}$，使其满足插值条件

$$\varphi(\boldsymbol{x}_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{6.1}$$

满足如上插值条件的$\varphi(\boldsymbol{x})$存在, 则称其为插值多项式, 点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$称为插值节点组(或插值结点组), D称为插值区域. 如果存在d元实值函数$y = f(\boldsymbol{x})$使得$y_i = f(\boldsymbol{x}_i)(i = 1, \cdots, n)$, 则$f(\boldsymbol{x})$称为被插函数, $f(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x})$为误差余项或插值余项.

多元多项式插值问题

当$d>1$时，称为多元多项式插值问题。它不一定总是唯一可解的，它的唯一可解性与插值节点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$和多项式空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的选择都有关系.

多元多项式插值问题

当$d > 1$时，称为多元多项式插值问题。它不一定总是唯一可解的，它的唯一可解性与插值节点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$和多项式空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的选择都有关系.

一般来说，关于多元函数插值问题的研究一般从两个不同方向来考虑：

多元多项式插值问题

当$d > 1$时，称为多元多项式插值问题。它不一定总是唯一可解的，它的唯一可解性与插值节点集$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$和多项式空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的选择都有关系.

一般来说，关于多元函数插值问题的研究一般从两个不同方向来考虑：

1. 给定函数空间，在插值区域D上，寻找使得插值问题解总存在且唯一的插值节点组；
2. 给定插值区域上的插值节点组，寻找(或构造)合适的函数空间，使得插值问题的解总存在且唯一.

插值适定节点组

定义

若对任意给定的实数集$\{y_i\}_{i=1}^n$, 插值问题的解总存在且唯一, 则称该插值问题是适定的插值问题, 称插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ 称为空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

插值适定节点组

定义

若对任意给定的实数集$\{y_i\}_{i=1}^n$，插值问题的解总存在且唯一，则称该插值问题是适定的插值问题，称插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ 称为空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

定理

当$d=k=2$时，插值问题式的解存在唯一，当且仅当插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^6$不落在同一条非零的二次曲线上，即不存在非零多项式$p(\boldsymbol{x})\in\mathbb{P}_2^{(2)}$，使得

$$p(\boldsymbol{x}_i)=0,\quad i=1,\cdots,6.$$

插值适定节点组

定理

插值问题式(6.1)的解存在唯一，当且仅当插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$不落在同一条非零的$d$元$k$次代数曲线(面)上，即不存在非零多项式$p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{P}_k^{(d)}$，使得

$$p(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

插值适定节点组

定理

插值问题式(6.1)的解存在唯一，当且仅当插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$不落在同一条非零的$d$元$k$次代数曲线(面)上，即不存在非零多项式$p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{P}_k^{(d)}$，使得

$$p(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

此定理另外一种表述是：点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$构成$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组的充要条件是它们不落在同一条非零的d元k次代数曲线(面)上.

插值适定节点组

定理

插值问题式(6.1)的解存在唯一，当且仅当插值节点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$不落在同一条非零的$d$元$k$次代数曲线(面)上，即不存在非零多项式$p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{P}_k^{(d)}$，使得

$$p(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

此定理另外一种表述是：点组$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$构成$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组的充要条件是它们不落在同一条非零的d元k次代数曲线(面)上.

需要说明的是，本定理给出的结论关注更多的是理论上的兴趣，结论与插值条件所决定的线性方程组解的存在唯一性等价。未能真正解决插值适定节点组或插值多项式的构造问题.

GC条件

定义

设$n = \binom{d+k}{d}$，点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}^d$称为满足*GC条件(也称几何特征条件)*,

GC条件

定义

设$n = \binom{d+k}{d}$, 点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}^d$称为满足GC条件(也称几何特征条件), 如果对每个$\boldsymbol{x}_i \in X$, 都可以找到k个互异的d维超平面$P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{ik}$, 使得

GC条件

定义

设$n = \binom{d+k}{d}$, 点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$称为满足GC条件(也称几何特征条件), 如果对每个$\boldsymbol{x}_i \in X$, 都可以找到k个互异的d维超平面$P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{ik}$, 使得

$$\boldsymbol{x}_i \notin \bigcup_{j=1}^{k} P_{ij}, \tag{6.2}$$

且

$$X \setminus \{\boldsymbol{x}_i\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} P_{ij}. \tag{6.3}$$

由GC条件构造插值适定节点组

定理

设$n=\binom{d+k}{d}$, 若点集$X=\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$满足GC条件,
则$\mathbb{P}_k^{(d)}$以X为插值节点组的插值问题的解存在且唯一,
即X为$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

由GC条件构造插值适定节点组

定理

设$n = \binom{d+k}{d}$, 若点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$满足*GC*条件, 则$\mathbb{P}_k^{(d)}$以$X$为插值节点组的插值问题的解存在且唯一, 即$X$为$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

此定理给出了一类判定点集为插值适定节点组的方法, 但对于任意给定的点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$, 判断$X$是否满足GC条件是一个很困难的问题.

由GC条件构造插值适定节点组

定理

设$n = \binom{d+k}{d}$, 若点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$满足*GC*条件,
则$\mathbb{P}_k^{(d)}$以X为插值节点组的插值问题的解存在且唯一,
即X为$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

此定理给出了一类判定点集为插值适定节点组的方法, 但对于任意给定的点集$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d$, 判断$X$是否满足GC条件是一个很困难的问题.

不过, 我们仍可以利用定理的结论, 在几何上给出插值适定节点组的构造方法.

自然格点

定义

设$H_1, H_2, \cdots, H_{d+k}$是$\mathbb{R}^d$中$d+k$个不同的超平面，其中任意$d$个超平面交于一点，且这些交点两两不同，由此产生的$n = \binom{d+k}{d}$个点称为自然格点.

自然格点

定义

设$H_1, H_2, \cdots, H_{d+k}$是$\mathbb{R}^d$中$d+k$个不同的超平面, 其中任意$d$个超平面交于一点, 且这些交点两两不同, 由此产生的$n = \binom{d+k}{d}$个点称为自然格点.

定理

自然格点满足GC条件, 从而构成$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

实例

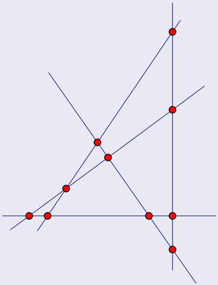
例

设$d = 2, k = 3$, 此时$n = \binom{2+3}{2} = 10.$

实例

例

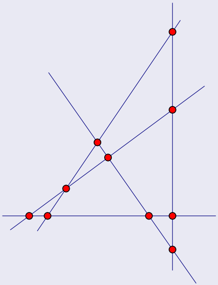
设$d=2,k=3$，此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 图中给出了$d+k=5$条直线，它们满足两两交于一点，且这些交点互异，因此这10个点构成了一组自然格点.



实例

例

设$d=2, k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 图中给出了$d+k=5$条直线, 它们满足两两交于一点, 且这些交点互异, 因此这10个点构成了一组自然格点. 这组自然格点满足*GC*条件, 因此构成$\mathbb{P}_3^{(2)}$的一组插值适定节点组.



重心坐标

设$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\} \subset \mathbb{R}^d$构成一个$d$维单纯形，设为$T$.

重心坐标

设$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\} \subset \mathbb{R}^d$构成一个$d$维单纯形，设为$T$.

那么对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$，可以被唯一地表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \tag{6.4}$$

其中$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$.

重心坐标

设$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\} \subset \mathbb{R}^d$构成一个$d$维单纯形，设为$T$.

那么对任意$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$，可以被唯一地表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \tag{6.4}$$

其中$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$.

设

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

表示$\boldsymbol{x}$相对于单纯形T的重心坐标，且

设$\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{x}) = \lambda_i (i = 0, 1, \cdots, d)$.

基本格点

定义

设$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\} \subset \mathbb{R}^d$处于一般位置, k为正整数, 则点集

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{c_i}{k}, 0 \leqslant c_i \leqslant k, c_i \in \mathbb{Z}_+, i = 0, 1, \cdots, d, \sum_{i=0}^{d} c_i = \tag{6.5}$$

称为基本格点.

基本格点

定义

设$\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\} \subset \mathbb{R}^d$处于一般位置, k为正整数, 则点集

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \middle| \boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{c_i}{k}, 0 \leqslant c_i \leqslant k, c_i \in \mathbb{Z}_+, i = 0, 1, \cdots, d, \sum_{i=0}^{d} c_i = \tag{6.5}$$

称为基本格点.

定理

基本格点满足GC条件, 从而构成$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

实例

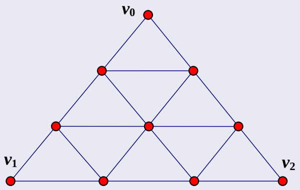
例

设$d=2, k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10.$

实例

例

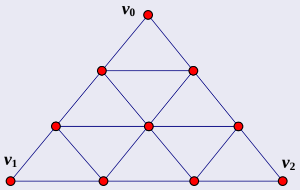
设$d=2, k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 下图给出了三点$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$构成的三角形$T$, 这10个点构成了一组基本格点.



实例

例

设$d=2, k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 下图给出了三点$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$构成的三角形$T$, 这10个点构成了一组基本格点. 这组基本格点满足GC条件, 因此构成$\mathbb{P}_3^{(2)}$的一组插值适定节点组.



递增序列构造插值适定节点组

插值节点组满足GC条件仅是保证其为插值适定节点组(即插值存在唯一)的充分条件. 事实上, 如果对GC条件进行适定放宽, 也有可能保证插值的存在唯一性.

递增序列构造插值适定节点组

插值节点组满足GC条件仅是保证其为插值适定节点组(即插值存在唯一)的充分条件. 事实上, 如果对GC条件进行适定放宽, 也有可能保证插值的存在唯一性.

定理

设$\left\{u_j^{(i)}\right\}_{j=0}^{k}$, $i=1,2,\cdots,d$, 是给定的d个关于j单调递增的实数序列. 则点集

$$X=\left\{\left(u_{\alpha_1}^{(1)},u_{\alpha_2}^{(2)},\cdots,u_{\alpha_d}^{(d)}\right)\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^d,|\boldsymbol{\alpha}|=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\leqslant k\right\} \tag{6.6}$$

是多项式空间$\mathbb{P}_k^{(d)}$的插值适定节点组.

实例

例

设$d = 2, k = 3$, 此时$n = \binom{2+3}{2} = 10$.

实例

例

设$d=2,k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 设

$$u_0^{(1)}=0,u_1^{(1)}=2,u_2^{(1)}=3,u_3^{(1)}=4,$$
$$u_0^{(2)}=0,u_1^{(2)}=1,u_2^{(2)}=2,u_3^{(2)}=3.$$

实例

例

设$d=2,k=3$, 此时$n=\binom{2+3}{2}=10$. 设

$$
\begin{aligned}
u_0^{(1)}=0, u_1^{(1)}=2, u_2^{(1)}=3, u_3^{(1)}=4,\\
u_0^{(2)}=0, u_1^{(2)}=1, u_2^{(2)}=2, u_3^{(2)}=3.
\end{aligned}
$$

从而X点集为

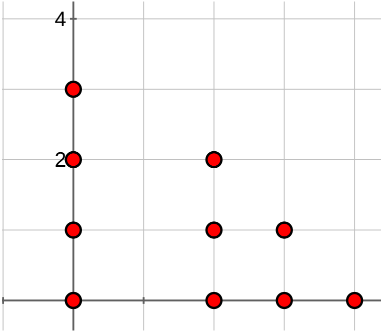
$$
\begin{aligned}
X &= \left\{\left(u_{\alpha_1}^{(1)}, u_{\alpha_2}^{(2)}\right) | \alpha_1+\alpha_2 \leqslant 3, \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, i=1,2\right\}\\
&= \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(2,0),(2,1),(2,2),\\
&\quad (3,0),(3,1),(4,0)\}.
\end{aligned}
$$

实例(续)

这10个点显然不满足GC条件，例如点$\left(u_0^{(1)}, u_1^{(2)}\right) = (0,1)$，找不到三条直线不包含它而包含其余其他的点，但$X$仍然构成$\mathbb{P}_3^{(2)}$的一组插值适定节点组.

实例(续)

这10个点显然不满足GC条件，例如点$\left(u_0^{(1)}, u_1^{(2)}\right) = (0, 1)$，找不到三条直线不包含它而包含其余其他的点，但$X$仍然构成$\mathbb{P}_3^{(2)}$的一组插值适定节点组.



二元多项式插值的添加代数曲线法

定理

设$n=\binom{k+2}{k}$，已知$X=\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组，

二元多项式插值的添加代数曲线法

定理

设$n = \binom{k+2}{k}$，已知$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组，且它们都不落在某条$l(l = 1或2)$次不可约代数曲线$p(x, y)$上，

二元多项式插值的添加代数曲线法

定理

设$n = \binom{k+2}{k}$，已知$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组，且它们都不落在某条$l(l = 1或2)$次不可约代数曲线$p(x, y)$上，则在该曲线上任取$(k+3)l - 1$个不同的点与$X$一起构成$\mathbb{P}_{k+l}^{(2)}$的一个插值适定节点组.

二元多项式插值的添加代数曲线法

定理

设$n = \binom{k+2}{k}$，已知$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组，且它们都不落在某条$l(l = 1$或$2)$次不可约代数曲线$p(x, y)$上，则在该曲线上任取$(k+3)l-1$个不同的点与$X$一起构成$\mathbb{P}_{k+l}^{(2)}$的一个插值适定节点组.

当$l = 1$时，称为添加直线法.

二元多项式插值的添加代数曲线法

定理

设$n = \binom{k+2}{k}$, 已知$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{n}$是$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组, 且它们都不落在某条$l (l = 1$或$2)$次不可约代数曲线$p(x, y)$上, 则在该曲线上任取$(k + 3)l - 1$个不同的点与$X$一起构成$\mathbb{P}_{k+l}^{(2)}$的一个插值适定节点组.

当$l = 1$时，称为添加直线法.

当$l = 2$时，称为添加二次曲线法.

添加直线法

第0步 任意取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

添加直线法

第0步 任意取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$，则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

第1步 任作直线$p_1(x, y) = 0$不过$\boldsymbol{x}_1$，且在此直线上任取两个不同的点，设为$Y = \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$，则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_1^{(2)}$的插值适定节点组;

添加直线法

第0步 任意取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$，则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

第1步 任作直线$p_1(x, y) = 0$不过$\boldsymbol{x}_1$，且在此直线上任取两个不同的点，设为$Y = \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$，则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_1^{(2)}$的插值适定节点组;

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$

添加直线法

第0步 任意取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

第1步 任作直线$p_1(x,y) = 0$不过$\boldsymbol{x}_1$, 且在此直线上任取两个不同的点, 设为$Y = \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$, 则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_1^{(2)}$的插值适定节点组;

. . . .

第k步 作不过X中任何一点的直线$p_k(x,y) = 0$, 且在此直线上任取$k+1$个互不相同的点组成点集Y, 则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_k^{(2)}$的插值适定节点组.

添加二次曲线法

第0步 任取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

添加二次曲线法

第0步 任取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

第1步 任作一条不经过$\boldsymbol{x}_1$的二次不可约代数曲线$p_1(x, y) = 0$(可以取椭圆、双曲线、抛物线等), 在这条曲线上任取5个不同的点组成点集Y, 则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_2^{(2)}$的插值适定节点组;

添加二次曲线法

第0步 任取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

第1步 任作一条不经过$\boldsymbol{x}_1$的二次不可约代数曲线$p_1(x, y) = 0$(可以取椭圆、双曲线、抛物线等), 在这条曲线上任取5个不同的点组成点集Y, 则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_2^{(2)}$的插值适定节点组;

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

添加二次曲线法

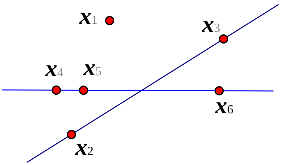
第0步 任取$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, 则$X = \{\boldsymbol{x}_1\}$为$\mathbb{P}_0^{(2)}$的插值适定节点组;

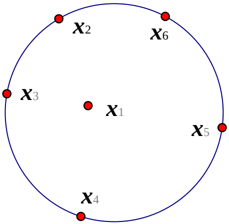
第1步 任作一条不经过$\boldsymbol{x}_1$的二次不可约代数曲线$p_1(x,y) = 0$(可以取椭圆、双曲线、抛物线等), 在这条曲线上任取5个不同的点组成点集Y, 则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_2^{(2)}$的插值适定节点组;

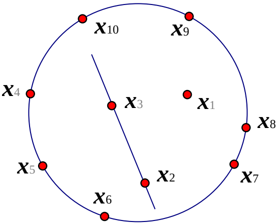
$\cdots\cdots\cdots\cdots$

第k步 任作一条不经过X的二次不可约代数曲线$p_k(x,y) = 0$, 在这条曲线上任取$4k+1$个不同的点组成点集Y,
则$X = X \cup Y$为$\mathbb{P}_{2k}^{(2)}$的插值适定节点组.

实例







二元张量积多项式空间插值适定节点组

给定非负整数m, n, 定义

$$\mathbb{P}_{m,n}^{(2)} = \mathbb{P}_m \otimes \mathbb{P}_n = span\{x^i y^j, i = 0, 1, \cdots, m; j = 0, 1, \cdots, n\}$$

为二元(m, n)次多项式空间, 其维数为$(m + 1)(n + 1)$.

二元张量积多项式空间插值适定节点组

给定非负整数m, n, 定义

$$\mathbb{P}_{m,n}^{(2)} = \mathbb{P}_m \otimes \mathbb{P}_n = span\{x^i y^j, i = 0, 1, \cdots, m; j = 0, 1, \cdots, n\}$$

为二元(m, n)次多项式空间, 其维数为$(m+1)(n+1)$.

定理

设$X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{(m+1)(n+1)} \subseteq \mathbb{R}^2$是$\mathbb{P}_{m,n}^{(2)}$的插值适定节点组. 若$X$中的点都落不在某条直线$x = a$上, 则在该直线上任取$n+1$个不同的点与$X$一起构成$\mathbb{P}_{m+1,n}^{(2)}$的一个插值适定节点组. 同样地, 若$X$中的点都落不在某条直线$y = b$上, 则在该直线上任取$m+1$个不同的点与$X$一起构成$\mathbb{P}_{m,n+1}^{(2)}$的一个插值适定节点组.