计算几何的数学基础

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

第二章 曲线曲面的基本理论

第二章 曲线曲面的基本理论

向量函数

定义

若对应区间$t \in [a,b]$中的每个值t，都有一个确定的向量$\mathbf{p}(t)$与其对应，则称$\mathbf{p}(t)$为t的**向量函数**，记为

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a,b],$$

其中$x(t), y(t), z(t)$为3个数量函数.

向量函数

定义

若对应区间$t \in [a,b]$中的每个值t, 都有一个确定的向量$\mathbf{p}(t)$与其对应, 则称$\mathbf{p}(t)$为t的**向量函数**, 记为

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a,b],$$

其中$x(t), y(t), z(t)$为3个数量函数.

此时当t在$[a,b]$变化时,函数$\mathbf{p}(t)$在空间中描出一条由

$$\mathbf{p}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b]$$

确定的曲线, 称为$\mathbf{p}(t)$的**向量曲线**.

向量函数

若$x(t), y(t), z(t)$都为关于t的连续函数，则称$\mathbf{p}(t)$为连续向量函数．若$x(t), y(t), z(t)$关于t都有k阶的连续导数，则称$\mathbf{p}(t)$为C^k**阶向量函数**．

向量函数

若$x(t), y(t), z(t)$都为关于t的连续函数，则称$\mathbf{p}(t)$为连续向量函数. 若$x(t), y(t), z(t)$关于t都有k阶的连续导数，则称$\mathbf{p}(t)$为C^k**阶向量函数**.

如果极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{p}(t_0)}{\Delta t}, \quad t_0 \in [a, b]$$

存在,

向量函数

若$x(t),y(t),z(t)$都为关于t的连续函数，则称$\mathbf{p}(t)$为连续向量函数. 若$x(t),y(t),z(t)$关于t都有k阶的连续导数，则称$\mathbf{p}(t)$为C^k**阶向量函数**.

如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{p}(t_0+\Delta t)-\mathbf{p}(t_0)}{\Delta t},\quad t_0\in[a,b]$$

存在，则称$\mathbf{p}(t)$在t_0可微，并称此极限为$\mathbf{p}(t)$在t_0的导向量或导矢，记为

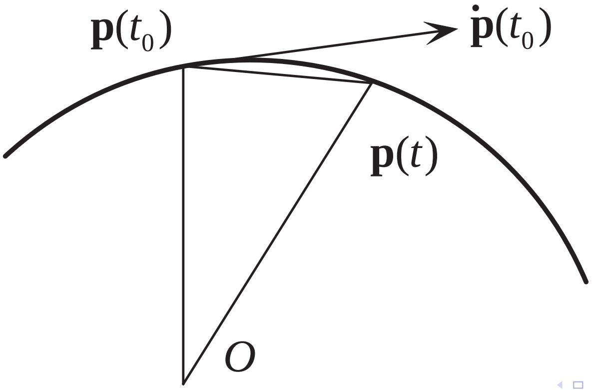
$$\dot{\mathbf{p}}(t_0)=\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{p}(t_0+\Delta t)-\mathbf{p}(t_0)}{\Delta t}.$$

向量函数

其几何意义为: $\dot{\mathbf{p}}(t_0)$为$\mathbf{p}(t)$曲线在$\mathbf{p}(t_0)$点处的**切线向量**.

向量函数

其几何意义为: $\dot{\mathbf{p}}(t_0)$为$\mathbf{p}(t)$曲线在$\mathbf{p}(t_0)$点处的**切线向量**.



向量函数

当向量函数为多变量的函数时, 类似于多元数量函数的偏导数的定义, 可以得到向量函数偏导数的概念.

向量函数

当向量函数为多变量的函数时，类似于多元数量函数的偏导数的定义，可以得到向量函数偏导数的概念.

例如对向量函数

$$\mathbf{p}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

向量函数

当向量函数为多变量的函数时，类似于多元数量函数的偏导数的定义，可以得到向量函数偏导数的概念.

例如对向量函数

$$\mathbf{p}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

可知

$$\mathbf{p}_u=\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial u}=(x_u,y_u,z_u),\quad \mathbf{p}_v=\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial v}=(x_v,y_v,z_v),$$

向量函数

其中

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad y_u = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad z_u = \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad y_v = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

向量函数

其中

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad y_u = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad z_u = \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad y_v = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

对于复合函数

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), u = u(s,t), v = v(s,t),$$

成立如下链式法则

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p}_u \frac{\partial u}{\partial s} + \mathbf{p}_v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \mathbf{p}_t = \mathbf{p}_u \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{p}_v \frac{\partial v}{\partial t}.$$

第二章 曲线曲面的基本理论

曲线的参数表示

若空间中的一条曲线可以表示为参数t的向量函数

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

则称为为**曲线的参数表示**,

曲线的参数表示

若空间中的一条曲线可以表示为参数t的向量函数

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

则称为为**曲线的参数表示**, 区间$[a, b]$称为**参数域**.

曲线的参数表示

若空间中的一条曲线可以表示为参数t的向量函数

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

则称为为**曲线的参数表示**, 区间$[a, b]$称为**参数域**.

实际应用中, 参数曲线一般表示为如下形式

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i f_i(t), \quad t \in [a, b], \tag{2.1}$$

其中$\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$称为**控制顶点**, 实值函数$f_i(t)$称为**基函数(或混合函数)**.

曲线的参数表示

若空间中的一条曲线可以表示为参数t的向量函数

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

则称为为**曲线的参数表示**, 区间$[a, b]$称为**参数域**.

实际应用中, 参数曲线一般表示为如下形式

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i f_i(t), \quad t \in [a, b], \tag{2.1}$$

其中$\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$称为**控制顶点**, 实值函数$f_i(t)$称为**基函数(或混合函数)**.

给定了一个具体的曲线表示方程, 称之为给定了一个曲线的参数化. 显然, 同一条曲线的参数化可能是不同的.

正则点与正则曲线

如果

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)) \neq \mathbf{0},$$

正则点与正则曲线

如果

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)) \neq \mathbf{0},$$

称曲线$\mathbf{p}(t)$在$t = t_0$是正则的,点$\mathbf{p}(t_0)$称为曲线的**正则点**, 否则称为曲线的**奇点**.

正则点与正则曲线

如果

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)) \neq \mathbf{0},$$

称曲线$\mathbf{p}(t)$在$t = t_0$是正则的,点$\mathbf{p}(t_0)$称为曲线的**正则点**, 否则称为曲线的**奇点**.

点$\mathbf{p}(t_0)$ 为正则点的充要条件为$\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)$不同时为零.

正则点与正则曲线

如果

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)) \neq \mathbf{0},$$

称曲线$\mathbf{p}(t)$在$t = t_0$是正则的,点$\mathbf{p}(t_0)$称为曲线的**正则点**, 否则称为曲线的**奇点**.

点$\mathbf{p}(t_0)$ 为正则点的充要条件为$\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)$不同时为零.

若曲线$\mathbf{p}(t)$的所有点都是正则点, 就称曲线$\mathbf{p}(t)$为**正则曲线**.

实例

值得注意的是: 同一条曲线上的一个点,在某些参数化下为正则点,但是在另外的参数化下可能不是正则点.

实例

值得注意的是: 同一条曲线上的一个点,在某些参数化下为正则点,但是在另外的参数化下可能不是正则点.

例

直线

$$\mathbf{p}_1(t) = (t, t)$$

为正则曲线,没有奇点. 而直线

$$\mathbf{p}_2(t) = (10t^3 - 15t^2 + 6t, 10t^3 - 15t^2 + 6t)$$

表示为同一条直线,但是它在$t = (5 - \sqrt{5})/10, (5 + \sqrt{5})/10$时有两个奇点.

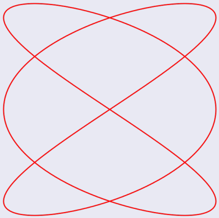
实例

例 (Lissajous curve)

参数曲线

$$\mathbf{p}_1(t) = (A\sin(3t + \frac{\pi}{2}), B\sin(2t))$$

称为*Lissajous曲线(利萨如曲线)*.

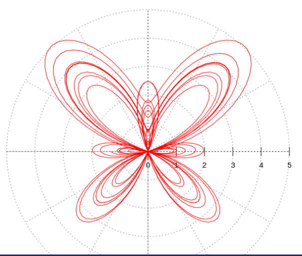


实例

例 (Butterfly curve)

如下参数曲线给出蝴蝶形状

$$r = e^{\sin\theta} - 2\cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{2\theta - \pi}{24}\right), \quad \theta \in [-8\pi, 8\pi].$$



曲面的参数表示

用两个变量u, v的向量函数

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \tag{2.2}$$

描述的曲面称为**曲面的参数表示**.

曲面的参数表示

用两个变量u, v的向量函数

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \tag{2.2}$$

描述的曲面称为**曲面的参数表示**. 区域D称为**参数域**, , 最常用的参数域取为uv平面上的一个矩形区域$D = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$.

曲面的参数表示

用两个变量u, v的向量函数

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D \tag{2.2}$$

描述的曲面称为**曲面的参数表示**. 区域D称为**参数域**, ，最常用的参数域取为uv平面上的一个矩形区域$D = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$.

给定了一个具体的曲面表示方程, 称之为给定了一个曲面的参数化. 显然, 同一曲面的参数化可能是不同的.

曲面的参数表示

用两个变量u,v的向量函数

$$\mathbf{p}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in D \tag{2.2}$$

描述的曲面称为**曲面的参数表示**. 区域D称为**参数域**, , 最常用的参数域取为uv平面上的一个矩形区域$D=[u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$.

给定了一个具体的曲面表示方程, 称之为给定了一个曲面的参数化. 显然, 同一曲面的参数化可能是不同的.

如果固定一个参数,例如$v=v_0$, 那么$\mathbf{p}(u,v_0)$为单参数u的向量函数, 它表示曲面上的一条曲线, 称为**等参线**或u曲线.

曲面的参数表示

用两个变量u, v的向量函数

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D \tag{2.2}$$

描述的曲面称为**曲面的参数表示**. 区域D称为**参数域**, , 最常用的参数域取为uv平面上的一个矩形区域$D = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$.

给定了一个具体的曲面表示方程, 称之为给定了一个曲面的参数化. 显然, 同一曲面的参数化可能是不同的.

如果固定一个参数,例如$v = v_0$, 那么$\mathbf{p}(u, v_0)$为单参数u的向量函数, 它表示曲面上的一条曲线, 称为**等参线**或u曲线.

曲面$\mathbf{p}(u,v)$上存在两簇等参线, 即一簇u**线**与一簇v**线**.

曲面的参数表示

在实际应用中，参数曲面常常表示为如下形式

$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{i\in I} \mathbf{b}_i f_i(u,v), \quad (u,v) \in D, \tag{2.3}$$

曲面的参数表示

在实际应用中, 参数曲面常常表示为如下形式

$$\mathbf{p}(u,v)=\sum_{i\in I}\mathbf{b}_i f_i(u,v), \quad (u,v)\in D, \tag{2.3}$$

其中$\mathbf{b}_i\in\mathbb{R}^3$称为**控制顶点**, 实值函数$f_i(u,v)$ 称为**基函数(或混合函数)**, I为某个指标集.

曲面的参数表示

在实际应用中, 参数曲面常常表示为如下形式

$$\mathbf{p}(u,v)=\sum_{i\in I}\mathbf{b}_i f_i(u,v),\quad (u,v)\in D, \tag{2.3}$$

其中$\mathbf{b}_i\in\mathbb{R}^3$称为**控制顶点**, 实值函数$f_i(u,v)$ 称为**基函数(或混合函数)**, I为某个指标集.

一般来说, 基函数需具有非负性、线性无关性、单位分解性等. 控制顶点控制着曲线的形状, 基函数在曲面构造中同样起到了最为重要的作用.

正则点与奇点

曲面上的点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$沿u线与v线方向的切向量分别为

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u, v_0)}{\partial u}\right|_{u=u_0},$$

$$\mathbf{p}_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u_0, v)}{\partial v}\right|_{v=v_0}.$$

正则点与奇点

曲面上的点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$沿u线与v线方向的切向量分别为

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u, v_0)}{\partial u}\right|_{u=u_0},$$

$$\mathbf{p}_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u_0, v)}{\partial v}\right|_{v=v_0}.$$

如果切向量$\mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)$不平行，即

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0},$$

正则点与奇点

曲面上的点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$沿u线与v线方向的切向量分别为

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u, v_0)}{\partial u}\right|_{u=u_0},$$

$$\mathbf{p}_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{p}(u_0, v)}{\partial v}\right|_{v=v_0}.$$

如果切向量$\mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)$不平行，即

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0},$$

则称点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$为曲面的正则点，否则称为奇点.

正则点与奇点

曲面上任意过点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$的曲线$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$,
在$\mathbf{p}(u_0, v_0)(u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0))$上的切向量为

$$\mathbf{s} = \left.\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{p}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

正则点与奇点

曲面上任意过点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$的曲线$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$,
在$\mathbf{p}(u_0, v_0)(u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0))$上的切向量为

$$\mathbf{s} = \left.\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{p}_u(u_0, v_0)\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

可以看出，曲线$\mathbf{p}(t)$在点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$处的切向量由$\mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)$ 的线性组合而成，因此其切线位于这两个向量所张成的平面内.

正则点与奇点

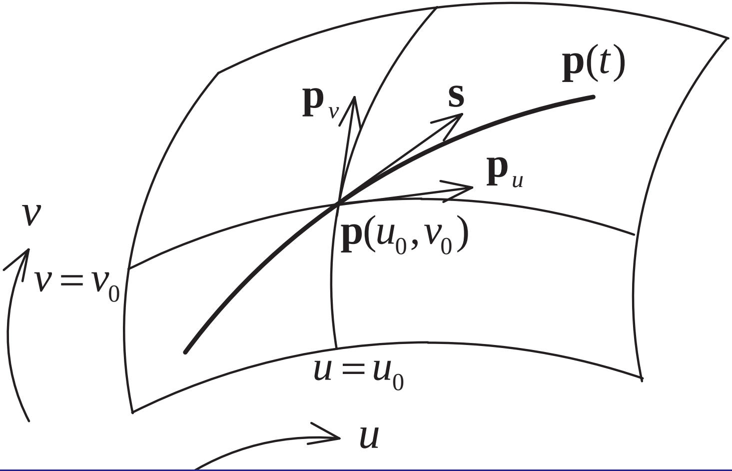
曲面上任意过点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$的曲线$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$,
在$\mathbf{p}(u_0, v_0)(u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0))$上的切向量为

$$\mathbf{s} = \left.\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{p}_u(u_0, v_0) \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} + \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

可以看出，曲线$\mathbf{p}(t)$在点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$处的切向量由$\mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)$ 的线性组合而成，因此其切线位于这两个向量所张成的平面内.

这个平面称为曲面在**点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$的切平面**.

切向量与曲面上的曲线


$\mathbf{p}(t)$
$\mathbf{s}$
$\mathbf{p}_v$
$\mathbf{p}_u$
$\mathbf{p}(u_0, v_0)$
v
$v = v_0$
$u = u_0$
u

法向量与等距曲面

称过点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$且垂直于该点切平面的非零向量为**法向量**.

法向量与等距曲面

称过点$\mathbf{p}(u_0,v_0)$且垂直于该点切平面的非零向量为**法向量**.

单位法向量为

$$\mathbf{e}(u_0,v_0)=\frac{\mathbf{p}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{p}_v(u_0,v_0)}{|\mathbf{p}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{p}_v(u_0,v_0)|}.$$

法向量与等距曲面

称过点$\mathbf{p}(u_0, v_0)$且垂直于该点切平面的非零向量为**法向量**.

单位法向量为

$$\mathbf{e}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{p}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}_v(u_0, v_0)}{|\mathbf{p}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{p}_v(u_0, v_0)|}.$$

沿曲面$\mathbf{p}(u, v)$每一点的法向量方向移动的距离为α(可正可负), 得到的曲面称为$\mathbf{p}(u, v)$的**等距曲面(offset曲面)**, 方程为

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p}(u, v) + \alpha \mathbf{e}(u, v).$$

参数表示方法的优点

(1) 易于作图. 只需对不同的参数值求其坐标即可;
(2) 易于规定曲线曲面的范围;
(3) 易于表示空间曲线;
(4) 易于推广到高维情形. 如从2维曲线到3维曲线只需在向量函数中增加一个分量$z(t)$即可;
(5) 易于进行仿射变换与投影变换;
(6) 易于计算. 例如计算曲线曲面上的点的切向量、曲率等;
(7) 易于进行曲线曲面的分段描述.

第二章　曲线曲面的基本理论

显式代数表示

曲线曲面的显式代数表示实质上就是**多项式曲线曲面**.

显式代数表示

曲线曲面的显式代数表示实质上就是**多项式曲线曲面**.

在直角坐标系下, 显式表示的代数曲线曲面分别为

$$y = f(x), \quad z = g(x, y),$$

其中$f(x), g(x, y)$为多项式.

显式代数表示

曲线曲面的显式代数表示实质上就是**多项式曲线曲面**.

在直角坐标系下，显式表示的代数曲线曲面分别为

$$y = f(x), \quad z = g(x, y),$$

其中$f(x), g(x, y)$为多项式.

显式代数曲线曲面表达式非常简单，但是由于它们均为单值函数，因此不能表示复杂的图形. 如圆、球等就不能用显式代数的形式表示.

隐式代数表示

在直角坐标系下, **隐式代数曲线曲面**就是多项式的零点集合, 即

$$f(x,y)=0, \quad g(x,y,z)=0,$$

其中$f(x,y), g(x,y,z)$为多项式.

隐式代数表示

在直角坐标系下, **隐式代数曲线曲面**就是多项式的零点集合, 即

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y, z) = 0,$$

其中$f(x, y), g(x, y, z)$为多项式.

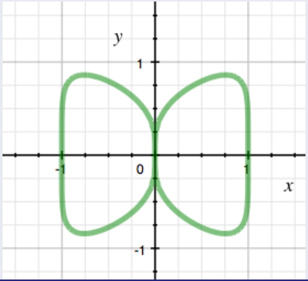
曲线曲面的参数表示转换为隐式表示称之为**隐式化**, 参数曲线曲面是一定可以隐式化的. 隐式表示转换为参数表示称之为**参数化**, 而隐式代数曲线曲面并不一定都可以进行参数化.

实例

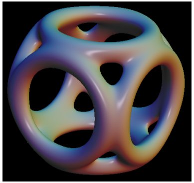
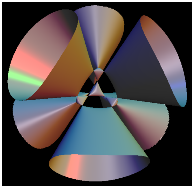
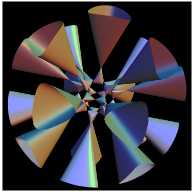
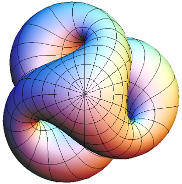
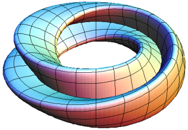
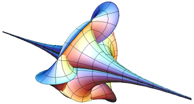
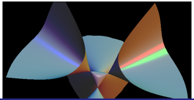
例 (Butterfly curve)

如下6次方程给出蝴蝶曲线的隐式形式

$$x^6 + y^6 = x^2.$$



实例


隐式表示方法的优点

相比其它表示方法，曲线曲面的隐式表示具有其自身的优点,主要罗列如下:

(1) 易于计算点与曲线曲面间的关系.例如直接将点代入表达式就可确定其是否在曲线曲面上;
(2) 具有几何运算（求和、求差、求交、偏移）的封闭性;
(3) 能表达复杂的曲线曲面;
(4) 具有更多的自由度,能提供更多的形状控制手段;
(5) 曲线曲面拟合不需要对数据点进行参数化.

第二章 曲线曲面的基本理论

弧长参数化

给定空间中一条曲线$\mathbf{p}(t)$, 取其上任意一点（一般取为起始点）$\mathbf{p_0}(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$作为计算弧长的起点. 应用弧长积分公式, 可以计算曲线上任意一点到$\mathbf{p_0}$之间的弧长s.

弧长参数化

给定空间中一条曲线$\mathbf{p}(t)$, 取其上任意一点（一般取为起始点）$\mathbf{p_0}(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$作为计算弧长的起点. 应用弧长积分公式, 可以计算曲线上任意一点到$\mathbf{p_0}$之间的弧长s.

由此, 曲线上的点与$\mathbf{p_0}$间的弧长是一一对应的. 因此曲线$\mathbf{p}(t)$可以表示为以弧长为参数的参数曲线。

弧长参数化

给定空间中一条曲线$\mathbf{p}(t)$, 取其上任意一点（一般取为起始点）$\mathbf{p_0}(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$作为计算弧长的起点. 应用弧长积分公式, 可以计算曲线上任意一点到$\mathbf{p_0}$之间的弧长s.

由此, 曲线上的点与$\mathbf{p_0}$间的弧长是一一对应的. 因此曲线$\mathbf{p}(t)$可以表示为以弧长为参数的参数曲线。

这种表示方法称为曲线的**弧长参数化**. 弧长称为自然参数, 曲线的方程称为**自然参数方程**.

弧长参数化

设曲线参数表示为

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \tag{3.1}$$

弧长参数化

设曲线参数表示为

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \tag{3.1}$$

那么曲线弧长的微分与积分公式为

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\dot{\mathbf{p}})^2, \tag{3.2}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{p}}| dt, \tag{3.3}$$

其中$s(t)$为参数t_0与t对应两点之间的弧长.

弧长参数化

对公式(3.3)两边求导可得

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{p}}| > 0.$$

弧长参数化

对公式(3.3)两边求导可得

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{p}}| > 0.$$

可知,弧长是关于参数t的单调递增函数, 故其反函数$r(s)$必然存在.

弧长参数化

对公式(3.3)两边求导可得

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{p}}| > 0.$$

可知,弧长是关于参数t的单调递增函数,故其反函数$r(s)$必然存在.

将其代如方程(3.1),对其重新参数化便可得到曲线的弧长参数化方程

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(r(s)) = (x(s), y(s), z(s)).$$

弧长参数化

对公式(3.3)两边求导可得

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{p}}| > 0.$$

可知,弧长是关于参数t的单调递增函数, 故其反函数$r(s)$必然存在.

将其代如方程(3.1), 对其重新参数化便可得到曲线的弧长参数化方程

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(r(s)) = (x(s), y(s), z(s)).$$

为了区别弧长参数化与一般参数化的区别, 以$'$代表对弧长参数的求导, 而$\cdot$代表对参数t的求导.

弧长参数化

由于

$$\mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{p}}\frac{dt}{ds}, \tag{3.4}$$

弧长参数化

由于

$$\mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{p}}\frac{dt}{ds}, \tag{3.4}$$

结合(3.2)式，可知

$$\mathbf{p}' = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{p}}^2}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{|\dot{\mathbf{p}}|}. \tag{3.5}$$

弧长参数化

由于

$$\mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{p}}\frac{dt}{ds}, \tag{3.4}$$

结合(3.2)式, 可知

$$\mathbf{p}' = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{p}}^2}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{|\dot{\mathbf{p}}|}. \tag{3.5}$$

因此$\mathbf{p}'$与$\dot{\mathbf{p}}$方向相同, $\mathbf{p}'$为单位向量, 称为**单位切向量**. 并且$\dot{s}$为切向量的长度.

多项式型弧长参数化

对于常用的单段或分段参数多项式曲线，一般情况下却不能采用自身弧长作为参数. 下面以3次曲线为例进行说明.

多项式型弧长参数化

对于常用的单段或分段参数多项式曲线，一般情况下却不能采用自身弧长作为参数. 下面以3次曲线为例进行说明.

设取弧长s为参数的3次参数多项式曲线方程为

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 s + \mathbf{a}_2 s^2 + \mathbf{a}_3 s^3.$$

多项式型弧长参数化

对于常用的单段或分段参数多项式曲线，一般情况下却不能采用自身弧长作为参数. 下面以3次曲线为例进行说明.

设取弧长s为参数的3次参数多项式曲线方程为

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 s + \mathbf{a}_2 s^2 + \mathbf{a}_3 s^3.$$

$\mathbf{p}(s)$关于弧长参数的导数为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 s + 3\mathbf{a}_3 s^2,$$

$$\mathbf{p}'' = 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3 s.$$

多项式型弧长参数化

由于弧长参数化时，曲线的切向量为单位向量，因此$|\mathbf{p}'|=1$, 故有$(\mathbf{p}')^2=1$.

多项式型弧长参数化

由于弧长参数化时，曲线的切向量为单位向量，因此$|\mathbf{p}'| = 1$, 故有$(\mathbf{p}')^2 = 1$. 对其两边关于弧长参数求导可得

$$2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'' = 0.$$

多项式型弧长参数化

由于弧长参数化时，曲线的切向量为单位向量，因此$|\mathbf{p}'|=1$，故有$(\mathbf{p}')^2=1$. 对其两边关于弧长参数求导可得

$$2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}''=0.$$

因此

$$\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}''=2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+(4\mathbf{a}_2^2+6\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3)s+18\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3s^2+18\mathbf{a}_3^2s^3=0.$$

多项式型弧长参数化

由于弧长参数化时，曲线的切向量为单位向量，因此$|\mathbf{p}^{'}|=1$, 故有$(\mathbf{p}^{'})^2=1$. 对其两边关于弧长参数求导可得

$$2\mathbf{p}^{'}\cdot\mathbf{p}^{''}=0.$$

因此

$$\mathbf{p}^{'}\cdot\mathbf{p}^{''}=2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+(4\mathbf{a}_2^2+6\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3)s+18\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3s^2+18\mathbf{a}_3^2s^3=0.$$

比较系数可得$\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$.

多项式型弧长参数化

由于弧长参数化时，曲线的切向量为单位向量，因此$|\mathbf{p}'|=1$, 故有$(\mathbf{p}')^2=1$. 对其两边关于弧长参数求导可得

$$2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}''=0.$$

因此

$$\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}''=2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2+(4\mathbf{a}_2^2+6\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3)s+18\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3s^2+18\mathbf{a}_3^2s^3=0.$$

比较系数可得$\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$.由此可知3次多项式曲线取自身弧长为参数时只能是$\mathbf{p}(s)=\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1s$, 即只能表示直线而不能表示3次曲线.

第二章 曲线曲面的基本理论

单位切向量

给定空间弧长参数化的曲线$\mathbf{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. 设

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \tag{3.6}$$

则$\mathbf{t}$为曲线$\mathbf{p}(s)$在弧长s处的**单位切向量**.

单位切向量

给定空间弧长参数化的曲线$\mathbf{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. 设

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \tag{3.6}$$

则$\mathbf{t}$为曲线$\mathbf{p}(s)$在弧长s处的**单位切向量**.

对$\mathbf{t}^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ 两端对s求导, 可得

$$2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0.$$

单位切向量

给定空间弧长参数化的曲线$\mathbf{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. 设

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \tag{3.6}$$

则$\mathbf{t}$为曲线$\mathbf{p}(s)$在弧长s处的**单位切向量**.

对$\mathbf{t}^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ 两端对s求导, 可得

$$2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0.$$

由此可知$\mathbf{t}$与$\mathbf{t}'$互相垂直. 现将与$\mathbf{t}'$同向的单位向量记为

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}. \tag{3.7}$$

单位主法线向量与曲率

$\mathbf{n}$称为曲线的**单位主法线向量**, 平行于$\mathbf{n}$的直线称为主法线.

单位主法线向量与曲率

$\mathbf{n}$称为曲线的**单位主法线向量**, 平行于$\mathbf{n}$的直线称为主法线.

设$k(s) = |\mathbf{t}'|$, 称为曲线的**曲率**。

单位主法线向量与曲率

$\mathbf{n}$称为曲线的**单位主法线向量**, 平行于$\mathbf{n}$的直线称为主法线.

设$k(s) = |\mathbf{t}^{'}|$, 称为曲线的**曲率**。 向量

$$\mathbf{t}^{'} = k(s)\mathbf{n} \tag{3.8}$$

称为**曲率向量**。

单位主法线向量与曲率

$\mathbf{n}$称为曲线的**单位主法线向量**, 平行于$\mathbf{n}$的直线称为主法线.

设$k(s)=|\mathbf{t}'|$, 称为曲线的**曲率**。 向量

$$\mathbf{t}' = k(s)\mathbf{n} \tag{3.8}$$

称为**曲率向量**。

曲线的曲率是单位切向量关于弧长的扭转速率, 也就是曲线在该点附近切线方向改变的程度, 它反映了曲线的弯曲程度. 如果曲线在某点处的曲率愈大, 表示曲线在该点附近切线方向改变的愈快, 因此曲线在该点的弯曲程度愈大.

曲率半径与单位副主法线向量

曲率随点的移动而变化。对弧长参数化，它的计算公式为

$$k = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{p}''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}. \tag{3.9}$$

曲率半径与单位副主法线向量

曲率随点的移动而变化。对弧长参数化，它的计算公式为

$$k = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{p}''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}. \tag{3.9}$$

称$\rho = \frac{1}{k}$为**曲率半径**.

曲率半径与单位副主法线向量

曲率随点的移动而变化。对弧长参数化，它的计算公式为

$$k = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{p}''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}. \tag{3.9}$$

称$\rho = \frac{1}{k}$为**曲率半径**.

向量

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{3.10}$$

为与$\mathbf{t}, \mathbf{n}$垂直的单位向量，称为**单位副法线向量**, 将平行于$\mathbf{b}$的法线称为曲线的**副法线**.

Frenet标架

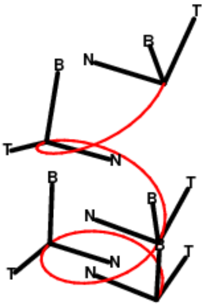
$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$这3个单位向量，就像$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$一样，组成一个右手坐标系，亦称**Frenet标架**或**运动标架**.

Frenet标架

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$这3个单位向量，就像$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$一样，组成一个右手坐标系，亦称**Frenet标架**或**运动标架**. 该标架随曲线上的点的移动而改变,给出了曲线上点所决定的3个基本方向.

Frenet标架

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$这3个单位向量，就像$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$一样，组成一个右手坐标系，亦称**Frenet标架**或**运动标架**. 该标架随曲线上的点的移动而改变,给出了曲线上点所决定的3个基本方向.



三类平面与密切圆

过曲线上给定的点,分别由$\mathbf{t}$和$\mathbf{n}$、$\mathbf{n}$和$\mathbf{b}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{t}$所张成的平面分别称为**密切平面**、**法平面**和**从切面**(有时也称化直平面)。

三类平面与密切圆

过曲线上给定的点,分别由$\mathbf{t}$和$\mathbf{n}$、$\mathbf{n}$和$\mathbf{b}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{t}$所张成的平面分别称为**密切平面**、**法平面**和**从切面**(有时也称化直平面)。

设曲线上对应参数为$s-\Delta s, s, s+\Delta s$的3个点为$\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$. 曲线在$\mathbf{P}$点的**密切圆**是通过这3个点所做的圆当$\Delta s \to 0$的极限情形.

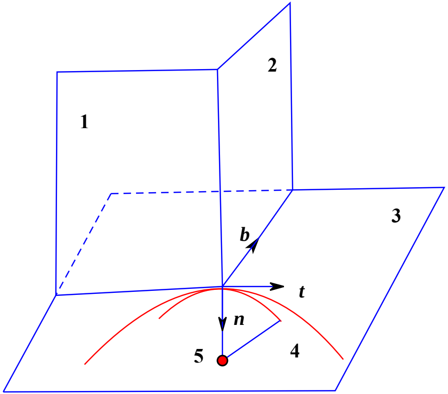
三类平面与密切圆

过曲线上给定的点,分别由$\mathbf{t}$和$\mathbf{n}$、$\mathbf{n}$和$\mathbf{b}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{t}$所张成的平面分别称为**密切平面**、**法平面**和**从切面**(有时也称化直平面)。

设曲线上对应参数为$s-\Delta s, s, s+\Delta s$的3个点为$\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$. 曲线在$\mathbf{P}$点的**密切圆**是通过这3个点所做的圆当$\Delta s \to 0$的极限情形.

密切圆的半径等于该点的曲率半径,密切圆的圆心称为**曲率中心**.

三类平面与密切圆



1. 密切平面; 2. 法平面; 3. 从切面; 4. 密切圆; 5. 曲率中心

Frenet-Serret方程

三个推导出的方程

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{n}' = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \tag{3.13}$$

称为曲线的**Frenet-Serret方程**, 它们是空间曲线理论中最基本的一组公式.

Frenet-Serret方程

三个推导出的方程

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \tag{3.11}$$
$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \tag{3.12}$$
$$\mathbf{n}' = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \tag{3.13}$$

称为曲线的**Frenet-Serret方程**, 它们是空间曲线理论中最基本的一组公式.

矩阵形式加以表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

挠率

τ称为曲线的**挠率**，表示曲线的副法向量关于弧长的变化率.

挠率

τ称为曲线的**挠率**，表示曲线的副法向量关于弧长的变化率.

挠率在几何上刻画了曲线的密切平面的变化程度，反映了曲线离开密切平面的快慢，即曲线的扭曲程度.

挠率

τ称为曲线的**挠率**，表示曲线的副法向量关于弧长的变化率.

挠率在几何上刻画了曲线的密切平面的变化程度，反映了曲线离开密切平面的快慢，即曲线的扭曲程度.

对于平面曲线来说，由于密切平面就是曲线所在平面，其不发生改变，因此其挠率为0.

一般参数曲线的曲率与挠率公式

对于一般参数化曲线$\mathbf{p}(t)$, 曲率与挠率公式为:

一般参数曲线的曲率与挠率公式

对于一般参数化曲线$\mathbf{p}(t)$，曲率与挠率公式为：

$$k = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|}{|\dot{\mathbf{p}}^3|}. \tag{3.15}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \dddot{\mathbf{p}})}{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}})^2}. \tag{3.16}$$

一般参数曲线的曲率与挠率公式

对于一般参数化曲线$\mathbf{p}(t)$，曲率与挠率公式为：

$$k = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|}{|\dot{\mathbf{p}}^3|}. \tag{3.15}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \dddot{\mathbf{p}})}{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}})^2}. \tag{3.16}$$

可知,一条曲线$\mathbf{p}(t)$为平面曲线(即曲线挠率为0)的充要条件为

$$(\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \dddot{\mathbf{p}}) = 0.$$

第二章 曲线曲面的基本理论

参数连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$的每个分量在$t = t_0$处C^k连续,

参数连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$的每个分量在$t=t_0$处C^k连续, 即

$$\lim_{t\to t_0^+}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t)=\lim_{t\to t_0^-}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t),\quad i=0,1,\cdots,k, \tag{3.17}$$

参数连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$的每个分量在$t=t_0$处C^k连续，即

$$\lim_{t\to t_0^+}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t)=\lim_{t\to t_0^-}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t),\quad i=0,1,\cdots,k, \tag{3.17}$$

则称$\mathbf{p}(t)$在$t=t_0$处为k**阶参数连续**$(C^k$连续$)$，其中$\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t)$表示向量函数的$i$阶导数.

参数连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$的每个分量在$t=t_0$处C^k连续，即

$$\lim_{t\to t_0^+}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t)=\lim_{t\to t_0^-}\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t),\quad i=0,1,\cdots,k, \tag{3.17}$$

则称$\mathbf{p}(t)$在$t=t_0$处为k阶参数连续(C^k连续)，其中$\overset{(i)}{\mathbf{p}}(t)$表示向量函数的$i$阶导数. 如果对所有的$t\in[a,b]$，曲线$\mathbf{p}(t)$均$C^k$连续，则称它为关于参数$t$的$C^k$连续曲线.

几何连续性

构造参数连续的组合曲线，即满足一定参数连续的曲线段．而每一段曲线通常是按照局部参数定义的C^k连续曲线，因此要让它们组成一条参数连续的组合曲线则需要找到一个合适的整体参数，使得组合曲线关于整体参数是连续的，但是满足要求的整体参数往往不易找到．

几何连续性

构造参数连续的组合曲线，即满足一定参数连续的曲线段. 而每一段曲线通常是按照局部参数定义的C^k连续曲线，因此要让它们组成一条参数连续的组合曲线则需要找到一个合适的整体参数，使得组合曲线关于整体参数是连续的，但是满足要求的整体参数往往不易找到.

另一方面，参数连续性要求两段曲线在公共点处具有完全相同的导数值，这在曲线造型实际应用中往往要求过高. 应该寻找与更为靠近实际的拼接条件，降低连续性要求，为曲线提供更多的形状控制自由度.

几何连续性

构造参数连续的组合曲线, 即满足一定参数连续的曲线段. 而每一段曲线通常是按照局部参数定义的C^k连续曲线, 因此要让它们组成一条参数连续的组合曲线则需要找到一个合适的整体参数, 使得组合曲线关于整体参数是连续的, 但是满足要求的整体参数往往不易找到.

另一方面，参数连续性要求两段曲线在公共点处具有完全相同的导数值，这在曲线造型实际应用中往往要求过高. 应该寻找与更为靠近实际的拼接条件，降低连续性要求，为曲线提供更多的形状控制自由度.

几何连续性不仅是与参数化无关的连续性条件，对连续性要求适当降低且能满足实际需要. 关于几何连续的定义也不是唯一的, 其实质就是局部再参数化的存在性.

几何连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$在弧长参数化下曲线是C^k的，或者曲线存在一个局部正则的C^k参数表示，则称曲线$\mathbf{p}(t)$是k阶几何连续(即G^k或GC^k连续)的.

几何连续性

定义

如果参数曲线$\mathbf{p}(t)$在弧长参数化下曲线是C^k 的，或者曲线存在一个局部正则的C^k参数表示，则称曲线$\mathbf{p}(t)$是k阶几何连续(即G^k或GC^k连续)的.

上面定义虽然给出了曲线几何连续性的判定准则，但是一般情况下，这两条准则很难验证. 下面我们介绍更加容易理解与判断的一种几何连续性定义.

几何连续性

假设两条参数曲线

$$\mathbf{p}_1(u), \quad u \in [u_0, u_1],$$
$$\mathbf{p}_2(t), \quad t \in [t_0, b]$$

的拼接点为$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1(u_1) = \mathbf{p}_2(t_0)$.

几何连续性

假设两条参数曲线

$$\mathbf{p}_1(u), \quad u \in [u_0, u_1],$$
$$\mathbf{p}_2(t), \quad t \in [t_0, b]$$

的拼接点为$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1(u_1) = \mathbf{p}_2(t_0)$. $\mathbf{p}_1(u), \mathbf{p}_2(t)$分别称为点$\mathbf{p}$的左、右端曲线.

几何连续性

假设两条参数曲线

$$\mathbf{p}_1(u), \quad u \in [u_0, u_1],$$
$$\mathbf{p}_2(t), \quad t \in [t_0, b]$$

的拼接点为$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1(u_1) = \mathbf{p}_2(t_0)$. $\mathbf{p}_1(u), \mathbf{p}_2(t)$分别称为点$\mathbf{p}$的左、右端曲线.

将左端曲线取参数变换

$$u = u(t), \quad u_0 = u(a), \quad u_1 = u(t_0), \quad t \in [a, t_0],$$

几何连续性

假设两条参数曲线

$$\mathbf{p}_1(u), \quad u \in [u_0, u_1],$$
$$\mathbf{p}_2(t), \quad t \in [t_0, b]$$

的拼接点为$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1(u_1) = \mathbf{p}_2(t_0)$. $\mathbf{p}_1(u), \mathbf{p}_2(t)$分别称为点$\mathbf{p}$的左、右端曲线.

将左端曲线取参数变换

$$u = u(t), \quad u_0 = u(a), \quad u_1 = u(t_0), \quad t \in [a, t_0],$$

则左端曲线重新参数化为

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_1(u(t)), \quad t \in [a, t_0].$$

几何连续性

令$\overset{(j)}{\mathbf{p}}_+$表示右端曲线$\mathbf{p}_2(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数, $\overset{(j)}{\mathbf{p}}_-$表示左端曲线$\mathbf{p}_1(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数.

几何连续性

令$\overset{(j)}{\mathbf{p}}_+$表示右端曲线$\mathbf{p}_2(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数, $\overset{(j)}{\mathbf{p}}_-$表示左端曲线$\mathbf{p}_1(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数.

(1) $\mathbf{p}$处G^0连续的条件为:

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_-, \tag{3.18}$$

即只要两端曲线连接即可, 这与C^0连续一致.

几何连续性

令$\overset{(j)}{\mathbf{p}}_+$表示右端曲线$\mathbf{p}_2(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数, $\overset{(j)}{\mathbf{p}}_-$表示左端曲线$\mathbf{p}_1(t)$在$t=t_0$时的$j$阶导数.

(1) $\mathbf{p}$处G^0连续的条件为:

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_-, \tag{3.18}$$

即只要两端曲线连接即可, 这与C^0连续一致.

(2) $\mathbf{p}$处G^1连续的条件为: 在$\mathbf{p}$处G^0连续, 并且

$$\dot{\mathbf{p}}_+ = \frac{du}{dt}\dot{\mathbf{p}}_-, \tag{3.19}$$

其中$\frac{du}{dt} > 0$, 即两端曲线在$\mathbf{p}$点处具有公共的单位切向量.

几何连续性

(3) 对(3.19)两端关于t求导,则$\mathbf{p}$处G^2连续的条件为: 在$\mathbf{p}$处G^1连续, 并且

$$\ddot{\mathbf{p}}_+ = \frac{d^2u}{dt^2}\dot{\mathbf{p}}_- + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \ddot{\mathbf{p}}_-. \tag{3.20}$$

这表明两端曲线在$\mathbf{p}$点处的曲率值与单位主法向量相同，即曲率向量连续.

几何连续性

(3) 对(3.19)两端关于t求导,则$\mathbf{p}$处G^2连续的条件为: 在$\mathbf{p}$处G^1连续, 并且

$$\ddot{\mathbf{p}}_+ = \frac{d^2u}{dt^2}\dot{\mathbf{p}}_- + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \ddot{\mathbf{p}}_-. \tag{3.20}$$

这表明两端曲线在$\mathbf{p}$点处的曲率值与单位主法向量相同，即曲率向量连续.

(4) 对(3.19)两端利用链式法则关于t一直求导下去，可得

$$\dddot{\mathbf{p}}_+ = \frac{d^3u}{dt^3}\dot{\mathbf{p}}_- + 3\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}\ddot{\mathbf{p}}_- + \left(\frac{d^u}{dt}\right)^3 \dddot{\mathbf{p}}_-. \tag{3.21}$$

$\cdots$

几何连续的β约束

令$\beta_j = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, 2, \cdots,$ 则如上过程可表示成矩阵形式

几何连续的β约束

令$\beta_j = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, 2, \cdots,$ 则如上过程可表示成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_+ \\ \dot{\mathbf{p}}_+ \\ \ddot{\mathbf{p}}_+ \\ \dddot{\mathbf{p}}_+ \\ \vdots \\ \overset{(k)}{\mathbf{p}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \beta_1 & & & & \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & & & \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \beta_k & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_- \\ \dot{\mathbf{p}}_- \\ \ddot{\mathbf{p}}_- \\ \dddot{\mathbf{p}}_- \\ \vdots \\ \overset{(k)}{\mathbf{p}}_- \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

其中$\beta_1 > 0$.

几何连续的β约束

令$\beta_j = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, 2, \cdots$, 则如上过程可表示成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_+ \\ \dot{\mathbf{p}}_+ \\ \ddot{\mathbf{p}}_+ \\ \dddot{\mathbf{p}}_+ \\ \vdots \\ \overset{(k)}{\mathbf{p}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \beta_1 & & & & \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & & & \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \beta_k & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_- \\ \dot{\mathbf{p}}_- \\ \ddot{\mathbf{p}}_- \\ \dddot{\mathbf{p}}_- \\ \vdots \\ \overset{(k)}{\mathbf{p}}_- \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

其中$\beta_1 > 0$. 称为几何连续的β约束.

基于β约束的几何连续性定义

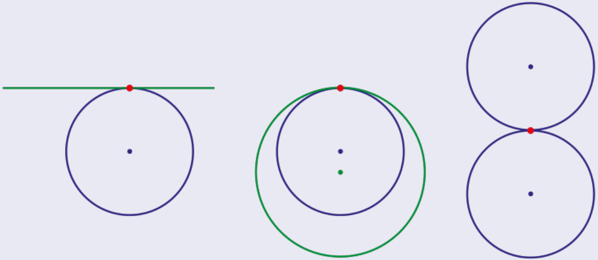
定理

参数曲线段在正则连接点$\mathbf{p}$处G^k几何连续的充要条件是: 存在实数$\beta_j(j=1,\cdots,k), \beta_1>0$, 使得两曲线段在点$\mathbf{p}$处两侧满足(3.22)的$\beta$约束.

实例

例（G^1连续）

直线、圆之间的G^1连续。



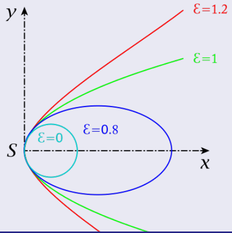
实例

例（G^2连续）

圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）间的G^2连续。

$$(1-\epsilon^2)x^2 - 2px + y^2 = 0, \quad p > 0, \epsilon \geq 0.$$

$\epsilon = 0$:圆, $\epsilon = 0.8$:椭圆, $\epsilon = 1$:抛物线, $\epsilon = 1.2$:双曲线.



第二章 曲线曲面的基本理论

曲面上的曲线

设$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u, v)$上的一条曲线,

曲面上的曲线

设$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u, v)$上的一条曲线，该曲线的切向量为

$$\mathbf{p}_u \dot{u} + \mathbf{p}_v \dot{v} = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{A}, \tag{4.1}$$

曲面上的曲线

设$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u, v)$上的一条曲线，该曲线的切向量为

$$\mathbf{p}_u \dot{u} + \mathbf{p}_v \dot{v} = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{A}, \tag{4.1}$$

其中等式右端

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

曲面的基本公式

由Fernet标架以及弧长参数的求导关系，可以推得

$$\dot{s}^2 = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \mathbf{F} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.2}$$

$$\dot{s}^2 k\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.3}$$

曲面的基本公式

由Fernet标架以及弧长参数的求导关系，可以推得

$$\dot{s}^2 = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \mathbf{F} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.2}$$

$$\dot{s}^2 k \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.3}$$

其中s为曲线的弧长，且

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u^2 & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v^2 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uu} & \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uv} \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{vu} & \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{vv} \end{pmatrix}.$$

曲面的基本公式

由Fernet标架以及弧长参数的求导关系，可以推得

$$\dot{s}^2 = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \mathbf{F} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{F} \dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.2}$$

$$\dot{s}^2 k \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.3}$$

其中s为曲线的弧长，且

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u^2 & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v^2 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uu} & \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{uv} \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{vu} & \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{vv} \end{pmatrix}.$$

公式(4.2)称为**曲面的第一基本公式**，公式(4.3)称之为**曲面的第二基本公式**.

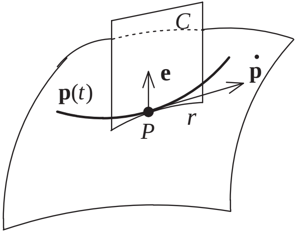
第二章 曲线曲面的基本理论

法曲率

设$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u, v)$上的一条曲线,

法曲率

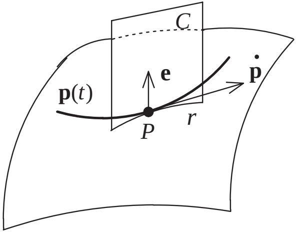
设$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u, v)$上的一条曲线，过曲线$\mathbf{p}(t)$上的点$P$，做空间平面$C$,使之包含$\mathbf{p}(t)$在$P$点的切向量$\dot{\mathbf{p}}$以及曲面$\mathbf{p}(u, v)$在$P$点的法向量$\mathbf{e}$. 设平面$C$与曲面$\mathbf{p}(u, v)$的交线为$r$.



法曲率

设$\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}(u(t),v(t))$为曲面$\mathbf{p}(u,v)$上的一条曲线，过曲线$\mathbf{p}(t)$上的点$P$，做空间平面$C$,使之包含$\mathbf{p}(t)$在$P$点的切向量$\dot{\mathbf{p}}$以及曲面$\mathbf{p}(u,v)$在$P$点的法向量$\mathbf{e}$. 设平面$C$与曲面$\mathbf{p}(u,v)$的交线为$r$.

称曲线r在点P的曲率为曲面$\mathbf{p}(u,v)$在P关于方向$\dot{\mathbf{p}}$的**法曲率**,记为k_n.显然,它与$\dot{\mathbf{p}}$ 的方向有关但与大小无关,它是曲线$\mathbf{p}(t)$的曲率向量$k\mathbf{n}$在$\mathbf{e}$上的投影.



主方向与主曲率

由方程(4.3)可知

$$\dot{s}^2 k_n = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.4}$$

即

$$k_n = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T}. \tag{4.5}$$

主方向与主曲率

由方程(4.3)可知

$$\dot{s}^2 k_n = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.4}$$

即

$$k_n = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T}. \tag{4.5}$$

曲面上一点沿不同的方向可能有不同的法曲率, 称使得k_n取极值的方向为法曲率的**主方向**, 主方向是互相垂直的.

主方向与主曲率

由方程(4.3)可知

$$\dot{s}^2 k_n = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.4}$$

即

$$k_n = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T}. \tag{4.5}$$

曲面上一点沿不同的方向可能有不同的法曲率，称使得k_n取极值的方向为法曲率的主方向，主方向是互相垂直的.

设k_n的最小、最大值为$k_{n_{\min}}, k_{n_{\max}}$，称之为主曲率.

主方向与主曲率

由方程(4.3)可知

$$\dot{s}^2 k_n = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T, \tag{4.4}$$

即

$$k_n = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}^T}{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^T}. \tag{4.5}$$

曲面上一点沿不同的方向可能有不同的法曲率, 称使得k_n取极值的方向为法曲率的**主方向**, 主方向是互相垂直的.

设k_n的最小、最大值为$k_{n_{\min}}, k_{n_{\max}}$, 称之为**主曲率**.

曲面上的曲线如果切线方向总是在一个主方向, 则称这样的曲线为**曲率线**. 对应两个主曲率,曲面上有两簇成正交的曲率线.

主曲率的计算

令

$$\xi=\dot{u},\quad \eta=\dot{v},\quad L=\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uu},\quad M=\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uv}=\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vu},$$
$$N=\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vv},\quad E=\mathbf{p}_u^2,\quad F=\mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_v,\quad G=\mathbf{p}_v^2.$$

主曲率的计算

令

$$\xi = \dot{u}, \quad \eta = \dot{v}, \quad L = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uu}, \quad M = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uv} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vu},$$
$$N = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vv}, \quad E = \mathbf{p}_u^2, \quad F = \mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_v, \quad G = \mathbf{p}_v^2.$$

方程(4.5)可改写为

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 - k_n(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = 0. \tag{4.6}$$

主曲率的计算

令

$$\xi = \dot{u}, \quad \eta = \dot{v}, \quad L = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uu}, \quad M = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{uv} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vu},$$
$$N = \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_{vv}, \quad E = \mathbf{p}_u^2, \quad F = \mathbf{p}_u\cdot\mathbf{p}_v, \quad G = \mathbf{p}_v^2.$$

方程(4.5)可改写为

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 - k_n(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = 0. \tag{4.6}$$

为了计算法曲率的极值, 对上式两端关于ξ, η取偏导数, 并令$\frac{\partial k_n}{\partial \xi} = \frac{\partial k_n}{\partial \eta} = 0$, 则有

$$\begin{cases} (L - k_nE)\xi + (M - k_nF)\eta = 0, \\ (M - k_nF)\xi + (N - k_nG)\eta = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

主曲率、高斯曲率与平均曲率

消去ξ,η,得到方程

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN+GL-2FM)k_n+LN-M^2=0. \tag{4.8}$$

主曲率、高斯曲率与平均曲率

消去ξ,η,得到方程

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN+GL-2FM)k_n+LN-M^2=0. \tag{4.8}$$

方程(4.8)总有两个实根，即为主曲率$k_{n_{\min}},k_{n_{\max}}$。

主曲率、高斯曲率与平均曲率

消去ξ,η,得到方程

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN+GL-2FM)k_n+LN-M^2=0. \tag{4.8}$$

方程(4.8)总有两个实根，即为主曲率$k_{n_{\min}}, k_{n_{\max}}$。
由根与系数的关系,可知

$$K=k_{n_{\min}}\cdot k_{n_{\max}}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \tag{4.9}$$

$$H=\frac{k_{n_{\min}}+k_{n_{\max}}}{2}=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}. \tag{4.10}$$

主曲率、高斯曲率与平均曲率

消去ξ,η,得到方程

$$(EG-F^2)k_n^2-(EN+GL-2FM)k_n+LN-M^2=0. \tag{4.8}$$

方程(4.8)总有两个实根，即为主曲率$k_{n_{\min}},k_{n_{\max}}$。
由根与系数的关系,可知

$$K=k_{n_{\min}}\cdot k_{n_{\max}}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \tag{4.9}$$

$$H=\frac{k_{n_{\min}}+k_{n_{\max}}}{2}=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}. \tag{4.10}$$

称K为**Gauss曲率**(或总曲率,全曲率), H为**平均曲率**(或中曲率). 每点平均曲率为零的曲面称为**极小曲面**。

第二章 曲线曲面的基本理论

参数连续性

定义

如果参数曲面$\mathbf{p}(u,v)$, $\mathbf{q}(s,r)$沿公共边界$\mathbf{p}(t)=\mathbf{q}(t)$ 上处处满足

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}\mathbf{p}(t)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial r^j}\mathbf{q}(t), \quad i+j=0,1,\cdots,k,$$

则称它们在公共边界上具有k阶参数连续性(即C^k连续).

参数连续性

定义

如果参数曲面$\mathbf{p}(u,v),(u,v)\in[u_0,u_1]\times[v_0,v_1]$与$\mathbf{q}(u,v),(u,v)\in[u_0,u_1]\times[v_1,v_2]$ 在公共边界$\mathbf{p}(u,v_1)=\mathbf{q}(u,v_1)$ 上满足

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i\partial v^j}\mathbf{p}(u,v_1-)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i\partial v^j}\mathbf{q}(u,v_1+),\quad i+j=0,1,\cdots,k,$$

则称它们在公共边界上具有k阶参数连续性(即C^k连续).

几何连续性

如上两个定义在某种情况下式等价的. 与曲线的参数连续性类似, 曲面的参数连续也同样与参数的选取有关, 而曲面的参数化同样是不唯一的. 而且参数曲面不存在像参数曲线那样的弧长参数化, 使得曲面的参数连续性判定与构造更为困难. 因此同参数曲线一样, 也需要寻找一种更为宽容、与参数化无关的、能更好度量曲面拼接光滑性的连续性定义.

几何连续性

如上两个定义在某种情况下式等价的. 与曲线的参数连续性类似, 曲面的参数连续也同样与参数的选取有关, 而曲面的参数化同样是不唯一的. 而且参数曲面不存在像参数曲线那样的弧长参数化, 使得曲面的参数连续性判定与构造更为困难. 因此同参数曲线一样, 也需要寻找一种更为宽容、与参数化无关的、能更好度量曲面拼接光滑性的连续性定义.

定义

如果两个参数曲面之一可以重新参数化, 使得它们沿公共边界为C^k连续的, 则称它们在公共边界上具有k**阶几何连续性**(即G^k连续).

低阶几何连续性

定义

对两个参数曲面,

(1) 如果它们有公共的连续边界, 则称它们在公共边界上具有**0阶几何连续**(即G^0连续);

低阶几何连续性

定义

对两个参数曲面,

(1) 如果它们有公共的连续边界, 则称它们在公共边界上具有**0阶几何连续**(即G^0连续);

(2) 如果它们在公共边界上G^0连续, 并且它们在公共边界线上处处具有相同的切平面(或相同的曲面法线), 则称它们沿公共边界具有**1阶几何连续性**(即G^1连续);

低阶几何连续性

定义

对两个参数曲面,

(1) 如果它们有公共的连续边界, 则称它们在公共边界上具有**0阶几何连续**(即G^0连续);

(2) 如果它们在公共边界上G^0连续, 并且它们在公共边界线上处处具有相同的切平面(或相同的曲面法线), 则称它们沿公共边界具有**1阶几何连续性**(即G^1连续);

(3) 如果它们在公共边界上G^1连续, 并且具有公共的主曲率, 及在两个主曲率相等时具有公共的主方向, 则称它们沿公共边界具有**2阶几何连续性**(即G^2连续).

第二章 曲线曲面的基本理论

直纹面

直纹面是直线段在空间中沿某一定曲线运动所形成的轨迹.

直纹面

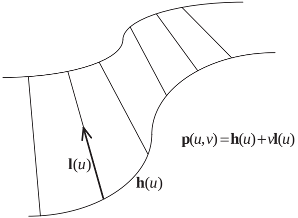
直纹面是直线段在空间中沿某一定曲线运动所形成的轨迹. 定曲线称为**准线**,直线段称为**母线**.

直纹面

直纹面是直线段在空间中沿某一定曲线运动所形成的轨迹. 定曲线称为**准线**,直线段称为**母线**.

设准线为$\mathbf{h}(u)$, 母线的方向向量为$\mathbf{l}(u)$, 则直纹面的方程为

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}(u)+v\mathbf{l}(u),\quad u\in[u_0,u_1],v\in[v_0,v_1]. \tag{4.11}$$



(a)

直纹面的分类

(1) 如果(4.11)中$\mathbf{h}(u)$为常值$\mathbf{h}$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}+v\mathbf{l}(u) \tag{4.12}$$

表示的曲面为**锥面**.;

直纹面的分类

(1) 如果(4.11)中$\mathbf{h}(u)$为常值$\mathbf{h}$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}+v\mathbf{l}(u) \tag{4.12}$$

表示的曲面为**锥面**.;

(2) 如果(4.11)中$\mathbf{l}(u)$为常值$\mathbf{l}$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}(u)+v\mathbf{l} \tag{4.13}$$

表示的曲面为**柱面**;

直纹面的分类

(1) 如果(4.11)中$\mathbf{h}(u)$为常值$\mathbf{h}$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}+v\mathbf{l}(u) \tag{4.12}$$

表示的曲面为**锥面**.;

(2) 如果(4.11)中$\mathbf{l}(u)$为常值$\mathbf{l}$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}(u)+v\mathbf{l} \tag{4.13}$$

表示的曲面为**柱面**;

(3) 如果(4.11)中$\mathbf{l}(u)=\dot{\mathbf{h}}(u)$, 那么直纹面

$$\mathbf{p}(u,v)=\mathbf{h}(u)+v\dot{\mathbf{h}}(u)$$

表示的曲面为**切线面**, 此时$\mathbf{h}(u)$称为**脊线**.

直纹面

在实际应用中,直纹面还可以表示为

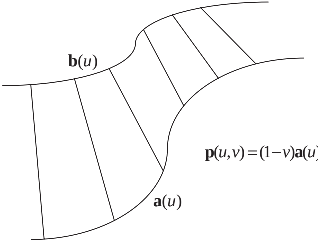
$$\mathbf{p}(u,v)=(1-v)\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u),\quad u\in[u_0,u_1],v\in[0,1]. \tag{4.14}$$

直纹面

在实际应用中,直纹面还可以表示为

$$\mathbf{p}(u,v)=(1-v)\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u),\quad u\in[u_0,u_1],v\in[0,1]. \tag{4.14}$$

曲线$\mathbf{a}(u),\mathbf{b}(u)$为直纹面在$v=0,1$时的两条边界曲线.



(b)

可展曲面

定义

如果直纹面沿着它的每一条母线只有唯一的切平面,则称该直纹面为**可展曲面**.

可展曲面是一类特殊的直纹面，可以无扭曲地展开到平面上。

可展曲面

定义

如果直纹面沿着它的每一条母线只有唯一的切平面,则称该直纹面为**可展曲面**.

可展曲面是一类特殊的直纹面，可以无扭曲地展开到平面上。

定理

曲面上的曲线为曲率线的**充要条件**是沿此曲线的曲面法线构成可展曲面。

可展曲面

定理

曲面为可展曲面的**充要条件**为：

(1) 对*(4.11)*，$(\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}) = 0$，即$\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}$对任意$u \in [u_0, u_1]$皆共面.

(2) 对*(4.14)*，$(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b} - \mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}}) = 0$，即$\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b} - \mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}}$对任意$u \in [u_0, u_1]$皆共面.

(3) 曲面上所有点的*Gauss*曲率均为零.

(4) 曲面沿每条母线法向量平行*(*即切平面只依赖一个参数*)*.

(5) 曲面法向量是单参数的*(*即为单参数平面簇的包络面*)*

(6) 曲面为柱面、锥面或切线面.