

NURBS曲线曲面

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

第五章 NURBS曲线曲面

1 有理Bézier曲线

第五章 NURBS曲线曲面

1 有理Bézier曲线

2 有理Bézier曲面

第五章 NURBS曲线曲面

1 有理Bézier曲线

2 有理Bézier曲面

3 NURBS曲线

第五章 NURBS曲线曲面

1 有理Bézier曲线

2 有理Bézier曲面

3 NURBS曲线

4 NURBS曲面

Bézier和B样条表述的缺点

例

对单位圆上的一段圆弧, 它在极坐标下可表示为参数形式

$$(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Bézier和B样条表述的缺点

例

对单位圆上的一段圆弧, 它在极坐标下可表示为参数形式

$$(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

经过参数变换 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ 后, 可以把上面的参数表示转换为

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in [a, b]. \quad (0.1)$$

Bézier和B样条表述的缺点

例

对单位圆上的一段圆弧, 它在极坐标下可表示为参数形式

$$(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

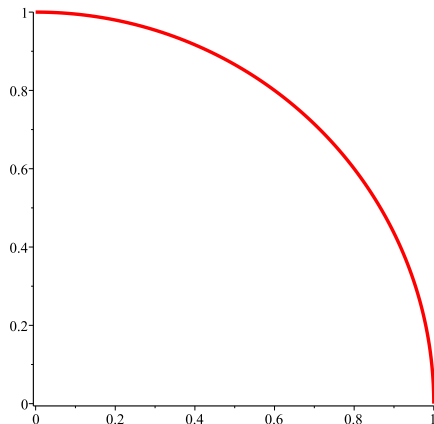
经过参数变换 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ 后, 可以把上面的参数表示转换为

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in [a, b]. \quad (0.1)$$

这说明, 虽然圆弧曲线不能采用多项式表示, 但可以采用有理多项式来精确表示.

Bézier和B样条表述的缺点

下图给出当 $t \in [0, 1]$ 时表示的 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧.



解决方法

Bézier和B样条曲线曲面本质上还是**多项式(或分段/片多项式)曲线曲面**, 因此在表示一些“基本”的几何图形时还是有所不足.

解决方法

Bézier和B样条曲线曲面本质上还是多项式(或分段/片多项式)曲线曲面, 因此在表示一些“基本”的几何图形时还是有所不足.

在飞机外形设计与机械零件加工中, 二次曲线曲面是最基本的几何工具, 但是Bézier曲线曲面和B样条曲线曲面都不能表示除抛物线或抛物面外的其它二次曲线曲面, 只能给出近似表示, 这在几何设计中是非常不便的.

解决方法

Bézier和B样条曲线曲面本质上还是多项式(或分段/片多项式)曲线曲面, 因此在表示一些“基本”的几何图形时还是有所不足.

在飞机外形设计与机械零件加工中, 二次曲线曲面是最基本的几何工具, 但是Bézier曲线曲面和B样条曲线曲面都不能表示除抛物线或抛物面外的其它二次曲线曲面, 只能给出近似表示, 这在几何设计中是非常不便的.

由于Bézier和B样条曲线曲面分别是基于Bernstein基函数与B样条基函数构造的, 而这两类基函数本质上是多项式或分段/片多项式基函数.

解决方法

Bézier和B样条曲线曲面本质上还是**多项式(或分段/片多项式)曲线曲面**, 因此在表示一些“基本”的几何图形时还是有所不足.

在飞机外形设计与机械零件加工中, **二次曲线曲面是最基本的几何工具**, 但是Bézier曲线曲面和B样条曲线曲面都不能表示除抛物线或抛物面外的其它二次曲线曲面, 只能给出近似表示, 这在几何设计中是非常不便的.

由于Bézier和B样条曲线曲面分别是基于Bernstein基函数与B样条基函数构造的, 而这两类基函数本质上是多项式或分段/片多项式基函数.

在保留原优良性质的基础上, 我们**推广这两类基函数到有理形式**, 从而构造“有理”形式的曲线曲面, 这就是**有理Bézier曲线曲面和NURBS曲线曲面**.

第五章 NURBS曲线曲面

- 1 有理Bézier曲线
- 2 有理Bézier曲面
- 3 NURBS曲线
- 4 NURBS曲面

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留**Bernstein**基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为**Bernstein**基函数.

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留**Bernstein**基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为**Bernstein**基函数.

设每一个 n 次的Bernstein基函数 $B_i^n(t)$ 对应一个“权因子 $\omega_i \geq 0$ ”, 令 $B_i^n(t)$ 乘以 ω_i ,

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留Bernstein基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为Bernstein基函数.

设每一个 n 次的Bernstein基函数 $B_i^n(t)$ 对应一个“权因子 $\omega_i \geq 0$ ”, 令 $B_i^n(t)$ 乘以 ω_i , 再用它们的“和”作为统一的分母进行“平均”, 从而得到一组多项式

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留Bernstein基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为Bernstein基函数.

设每一个 n 次的Bernstein基函数 $B_i^n(t)$ 对应一个“权因子 $\omega_i \geq 0$ ”, 令 $B_i^n(t)$ 乘以 ω_i , 再用它们的“和”作为统一的分母进行“平均”, 从而得到一组多项式

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留**Bernstein**基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为**Bernstein**基函数.

设每一个 n 次的Bernstein基函数 $B_i^n(t)$ 对应一个“权因子 $\omega_i \geq 0$ ”, 令 $B_i^n(t)$ 乘以 ω_i , 再用它们的“和”作为统一的分母进行“平均”, 从而得到一组多项式

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

称 $\{R_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为 n 次有理Bernstein基函数.

有理Bernstein基函数

基函数的构造应该满足如下要求:

- (1) 尽可能多地保留**Bernstein**基函数的性质;
- (2) 在特殊情况下, 可以退化为**Bernstein**基函数.

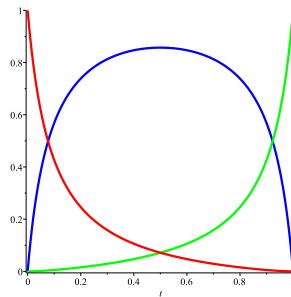
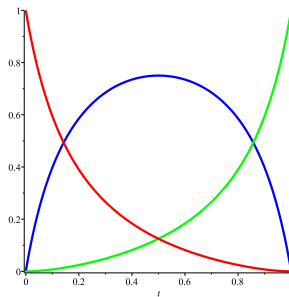
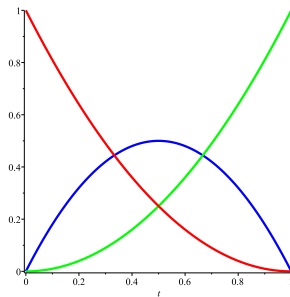
设每一个 n 次的Bernstein基函数 $B_i^n(t)$ 对应一个“权因子 $\omega_i \geq 0$ ”, 令 $B_i^n(t)$ 乘以 ω_i , 再用它们的“和”作为统一的分母进行“平均”, 从而得到一组多项式

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

称 $\{R_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为 n 次**有理Bernstein基函数**. 为了防止分母为零, 一般设 $\omega_0 > 0, \omega_n > 0, \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, n-1$.

实例：二次有理Bernstein基函数

当 $\omega_0 = \omega_2 = 1$, 而 $\omega_1 = 1, 3, 6$ 时, 基函数的图形



有理Bernstein基函数的性质

(1) 非负性: $R_i^n(t) \geq 0, t \in [0, 1]$.

有理Bernstein基函数的性质

- (1) 非负性: $R_i^n(t) \geq 0, t \in [0, 1]$.
- (2) 单位分解性: $\sum_{i=0}^n R_i^n(t) \equiv 1$.

有理Bernstein基函数的性质

- (1) 非负性: $R_i^n(t) \geq 0, t \in [0, 1]$.
- (2) 单位分解性: $\sum_{i=0}^n R_i^n(t) \equiv 1$.
- (3) 端点性质: 在端点 $t = 0$ 和 $t = 1$, 分别只有一个有理Bernstein基函数取值为1, 其余为0, 即

$$R_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \quad R_i^n(1) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n, \end{cases}$$

有理Bernstein基函数的性质

- (1) 非负性: $R_i^n(t) \geq 0, t \in [0, 1]$.
- (2) 单位分解性: $\sum_{i=0}^n R_i^n(t) \equiv 1$.
- (3) 端点性质: 在端点 $t = 0$ 和 $t = 1$, 分别只有一个有理Bernstein基函数取值为1, 其余为0, 即

$$R_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases} \quad R_i^n(1) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n, \end{cases}$$

- (4) 退化性质: 当所有的权因子都相等, 即对 $i = 0, 1, \dots, n$, 有 $\omega_i = \omega > 0$ 时, 有理Bernstein基函数退化为Bernstein 基函数.

有理Bézier曲线的定义

定义

称有理多项式参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_i^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

有理Bézier曲线的定义

定义

称有理多项式参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_i^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

为一条 n 次有理Bézier曲线,

有理Bézier曲线的定义

定义

称有理多项式参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_i^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

为一条 n 次有理Bézier曲线, 其中 $R_i^n(t)$ 为 n 次有理Bernstein基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, ω_i 称为权因子, $i = 0, 1, \dots, n$.

有理Bézier曲线的定义

定义

称有理多项式参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_i^n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.2)$$

为一条 n 次有理Bézier曲线, 其中 $R_i^n(t)$ 为 n 次有理Bernstein基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, ω_i 称为权因子, $i = 0, 1, \dots, n$. 依次用直线段连接相邻两个控制顶点所得的 n 边折线多边形称为控制多边形(或Bézier多边形).

实例：二次有理Bézier曲线表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧

例

给定控制顶点

$$\mathbf{P}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{P}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{P}_2 = (0, 1),$$

与权因子 $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2,$

实例：二次有理Bézier曲线表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧

例

给定控制顶点

$$\mathbf{P}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{P}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{P}_2 = (0, 1),$$

与权因子 $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$, 构造一条二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}_i R_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

实例：二次有理Bézier曲线表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧

例

给定控制顶点

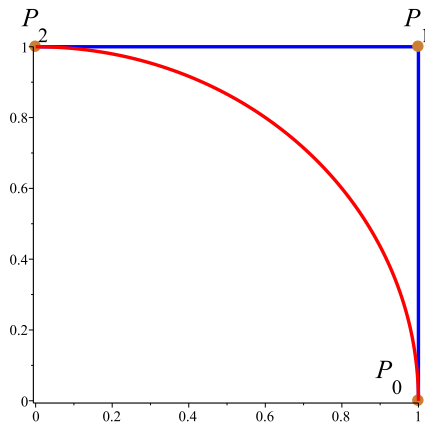
$$\mathbf{P}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{P}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{P}_2 = (0, 1),$$

与权因子 $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$, 构造一条二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}_i R_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

可以验证, 化简后曲线 $\mathbf{R}(t)$ 即为 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧的参数表示形式.

实例：二次有理Bézier曲线表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆弧



中心投影变换

利用射影几何知识, 当 $\omega \neq 0$ 时, 四维欧式空间齐次坐标到三维欧式空间仿射坐标的中心投影变换为

$$\mathcal{H}[(X, Y, Z, \omega)] = (x, y, z) = \left(\frac{X}{\omega}, \frac{Y}{\omega}, \frac{Z}{\omega} \right),$$

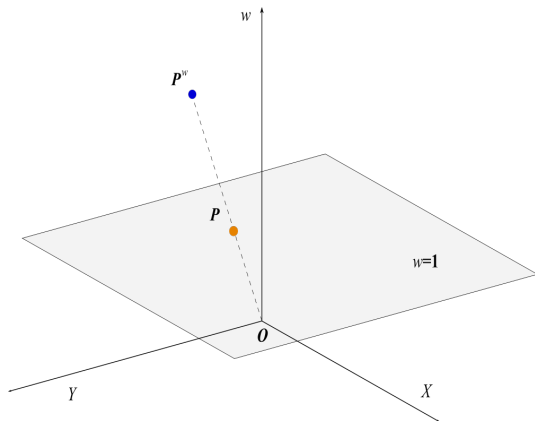
中心投影变换

利用射影几何知识, 当 $\omega \neq 0$ 时, 四维欧式空间齐次坐标到三维欧式空间仿射坐标的中心投影变换为

$$\mathcal{H}[(X, Y, Z, \omega)] = (x, y, z) = \left(\frac{X}{\omega}, \frac{Y}{\omega}, \frac{Z}{\omega} \right),$$

三维空间中的点 $\mathbf{P} = (x, y, z)$ 称为四维空间中的点 $\mathbf{P}^\omega = (X, Y, Z, \omega)$ 的透视像, 它是 \mathbf{P}^ω 在超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影, 其投影中心为四维空间的坐标原点.

实例：三维空间的齐次坐标到二维空间的中心投影



有理Bézier曲线的齐次坐标表示

对控制顶点 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 与其相关权因子 ω_i , 定义四维齐次坐标形式的控制顶点

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i) = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

有理Bézier曲线的齐次坐标表示

对控制顶点 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 与其相关权因子 ω_i , 定义四维齐次坐标形式的控制顶点

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i) = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

利用控制顶点 $\mathbf{P}_i^\omega (i = 0, 1, \dots, n)$, 定义一条四维空间中的 n 次Bézier曲线

$$\mathbf{R}^\omega(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \omega(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

有理Bézier曲线的齐次坐标表示

对控制顶点 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 与其相关权因子 ω_i , 定义四维齐次坐标形式的控制顶点

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i) = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

利用控制顶点 $\mathbf{P}_i^\omega (i = 0, 1, \dots, n)$, 定义一条四维空间中的 n 次Bézier曲线

$$\mathbf{R}^\omega(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \omega(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

再将此曲线经中心投影变换投影到超平面 $\omega = 1$ 上, 得到

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(t)] = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{X(t)}{\omega(t)}, \frac{Y(t)}{\omega(t)}, \frac{Z(t)}{\omega(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)},$$

有理Bézier曲线的齐次坐标表示

对控制顶点 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 与其相关权因子 ω_i , 定义四维齐次坐标形式的控制顶点

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i) = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

利用控制顶点 $\mathbf{P}_i^\omega (i = 0, 1, \dots, n)$, 定义一条四维空间中的 n 次Bézier曲线

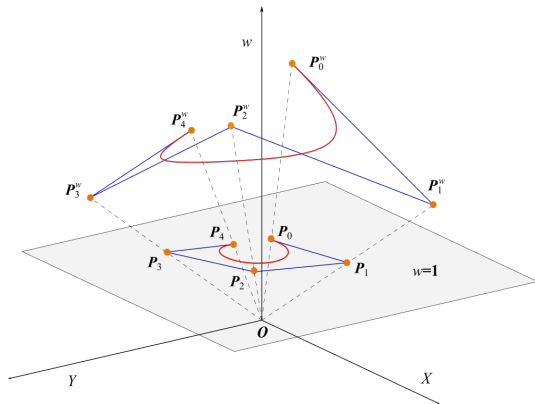
$$\mathbf{R}^\omega(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \omega(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

再将此曲线经中心投影变换投影到超平面 $\omega = 1$ 上, 得到

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(t)] = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{X(t)}{\omega(t)}, \frac{Y(t)}{\omega(t)}, \frac{Z(t)}{\omega(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)},$$

而这就是 n 次有理Bézier曲线。

实例：二维有理Bézier曲线的中心投影构造



有理Bézier曲线的性质

(1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (3) 凸包性质: 有理Bézier曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (3) 凸包性质: 有理Bézier曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (4) 退化性质: 当所有权因子都相同且不为零时, 有理Bézier曲线退化为Bézier曲线.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (3) 凸包性质: 有理Bézier曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (4) 退化性质: 当所有权因子都相同且不为零时, 有理Bézier曲线退化为Bézier曲线.
- (5) 对称性质: 由齐次坐标表示的 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 具有对称性, 因此中心投影得到的有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 也具有对称性.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (3) 凸包性质: 有理Bézier曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (4) 退化性质: 当所有权因子都相同且不为零时, 有理Bézier曲线退化为Bézier曲线.
- (5) 对称性质: 由齐次坐标表示的 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 具有对称性, 因此中心投影得到的有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 也具有对称性.
- (6) 平面有理Bézier曲线的变差缩减性: 平面有理Bézier曲线与所在平面内任一直线的交点个数不超过其控制多边形与该直线的交点个数.

有理Bézier曲线的性质

- (1) 端点插值性质: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_n$.
- (2) 几何不变性与仿射不变性: 由有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (3) 凸包性质: 有理Bézier曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (4) 退化性质: 当所有权因子都相同且不为零时, 有理Bézier曲线退化为Bézier曲线.
- (5) 对称性质: 由齐次坐标表示的 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 具有对称性, 因此中心投影得到的有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 也具有对称性.
- (6) 平面有理Bézier曲线的变差缩减性: 平面有理Bézier曲线与所在平面内任一直线的交点个数不超过其控制多边形与该直线的交点个数.
- (7) 平面有理Bézier曲线的保凸性: 当控制多边形是凸的, 由它决定的有理Bézier曲线也是凸的.

有理Bézier曲线的性质

(8) 升阶性质:

对 n 次有理Bézier曲线, 希望将其次数形式上升高一次, 表示为 $n + 1$ 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* \mathbf{P}_i^* B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* B_i^{n+1}(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

有理Bézier曲线的性质

(8) 升阶性质:

对 n 次有理Bézier曲线, 希望将其次数形式上升高一次, 表示为 $n+1$ 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* \mathbf{P}_i^* B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* B_i^{n+1}(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

首先将曲线 $\mathbf{R}(t)$ 表示为齐次坐标形式 $\mathbf{R}^\omega(t)$, 然后对 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 进行升阶, 即

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{Q}_i^\omega B_i^{n+1}(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

有理Bézier曲线的性质

(8)续 对其进行中心投影变换, 并结合Bézier曲线的升阶公式, 就可以得到有理Bézier曲线的升阶公式:

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{H} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{Q}_i^\omega B_i^{n+1}(t) \right] = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* \mathbf{P}_i^* B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* B_i^{n+1}(t)}, \quad t \in [0, 1]$$

有理Bézier曲线的性质

(8)续 对其进行中心投影变换, 并结合Bézier曲线的升阶公式, 就可以得到有理Bézier曲线的升阶公式:

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{H} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{Q}_i^\omega B_i^{n+1}(t) \right] = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* \mathbf{P}_i^* B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* B_i^{n+1}(t)}, \quad t \in [0, 1]$$

对 $i = 0, 1, \dots, n+1$,

$$\omega_i^* = \frac{i}{n+1} \omega_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \omega_i,$$
$$\mathbf{P}_i^* = \frac{\frac{i}{n+1} \omega_{i-1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \omega_i \mathbf{P}_i}{\omega_i^*},$$

有理Bézier曲线的性质

(8)续 对其进行中心投影变换, 并结合Bézier曲线的升阶公式, 就可以得到有理Bézier曲线的升阶公式:

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{H} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{Q}_i^\omega B_i^{n+1}(t) \right] = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* \mathbf{P}_i^* B_i^{n+1}(t)}{\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i^* B_i^{n+1}(t)}, \quad t \in [0, 1]$$

对 $i = 0, 1, \dots, n+1$,

$$\omega_i^* = \frac{i}{n+1} \omega_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \omega_i,$$

$$\mathbf{P}_i^* = \frac{\frac{i}{n+1} \omega_{i-1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \omega_i \mathbf{P}_i}{\omega_i^*},$$

当如上升阶过程一直进行下去, 得到的控制多边形序列收敛到有理Bézier曲线.

有理Bézier曲线的性质

(9) 导矢性质: 设

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad \omega(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t),$$

有理Bézier曲线的性质

(9) 导矢性质: 设

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad \omega(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t),$$

有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{P}(t)}{\omega(t)}$, 即 $\mathbf{R}(t)\omega(t) = \mathbf{P}(t)$.

有理Bézier曲线的性质

(9) 导矢性质: 设

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad \omega(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t),$$

有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{P}(t)}{\omega(t)}$, 即 $\mathbf{R}(t)\omega(t) = \mathbf{P}(t)$.

对其两边关于 t 求导, 可得

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{\mathbf{P}'(t) - \omega'(t)\mathbf{R}(t)}{\omega(t)},$$
$$\mathbf{R}''(t) = \frac{\mathbf{P}''(t) - \omega''(t)\mathbf{R}(t) - 2\omega'(t)\mathbf{R}'(t)}{\omega(t)}.$$

有理Bézier曲线的性质

(9)续 当 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时, 曲线在端点处的一阶与二阶导矢为

$$\mathbf{R}'(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{R}'(1) = n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}),$$

$$\mathbf{R}''(0) = n(n-1) \frac{\omega_2}{\omega_0} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \left[\frac{n(n-1)\omega_2}{\omega_0} - \frac{2n^2\omega_1^2}{\omega_0^2} + \frac{2n\omega_1}{\omega_0} \right] (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0),$$

$$\mathbf{R}''(1) = n(n-1) \frac{\omega_{n-2}}{\omega_n} (\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-1}) - \left[\frac{n(n-1)\omega_{n-2}}{\omega_n} - \frac{2n^2\omega_{n-1}^2}{\omega_n^2} + \frac{2n\omega_{n-1}}{\omega_n} \right] (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}).$$

有理Bézier曲线的性质

(9)续 当 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时, 曲线在端点处的一阶与二阶导矢为

$$\mathbf{R}'(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{R}'(1) = n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}),$$

$$\mathbf{R}''(0) = n(n-1) \frac{\omega_2}{\omega_0} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \left[\frac{n(n-1)\omega_2}{\omega_0} - \frac{2n^2\omega_1^2}{\omega_0^2} + \frac{2n\omega_1}{\omega_0} \right] (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0),$$

$$\mathbf{R}''(1) = n(n-1) \frac{\omega_{n-2}}{\omega_n} (\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-1}) - \left[\frac{n(n-1)\omega_{n-2}}{\omega_n} - \frac{2n^2\omega_{n-1}^2}{\omega_n^2} + \frac{2n\omega_{n-1}}{\omega_n} \right] (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}).$$

有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 在端点处的一阶导矢仅与前两个或后两个控制顶点及其相关的权因子有关, 二阶导矢仅与前三个或后三个控制顶点及其相关的权因子有关, 高阶导矢类似.

有理Bézier曲线的性质

(10) 参数连续性: 设 n 次与 m 次有理Bézier曲线段定义为

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(\hat{t}) = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i \hat{\mathbf{P}}_i B_i^m(\hat{t})}{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i B_i^m(\hat{t})}, \quad \hat{t} \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

有理Bézier曲线的性质

(10) 参数连续性: 设 n 次与 m 次有理Bézier曲线段定义为

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(\hat{t}) = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i \hat{\mathbf{P}}_i B_i^m(\hat{t})}{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i B_i^m(\hat{t})}, \quad \hat{t} \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

曲线 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的参数连续性条件为:

有理Bézier曲线的性质

(10) 参数连续性: 设 n 次与 m 次有理Bézier曲线段定义为

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(\hat{t}) = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i \hat{\mathbf{P}}_i B_i^m(\hat{t})}{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i B_i^m(\hat{t})}, \quad \hat{t} \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

曲线 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的参数连续性条件为:

(a) C^0 连续: $\mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{P}}_0$.

有理Bézier曲线的性质

(b) C^1 连续: C^0 连续且 $\mathbf{R}'(1) = \hat{\mathbf{R}}'(0)$, 即

$$n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_0} (\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_0).$$

有理Bézier曲线的性质

(b) C^1 连续: C^0 连续且 $\mathbf{R}'(1) = \hat{\mathbf{R}}'(0)$, 即

$$n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_0} (\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_0).$$

(c) C^2 连续: C^1 连续且 $\mathbf{R}''(1) = \hat{\mathbf{R}}''(0)$, 即

$$\begin{aligned} & n(n-1) \frac{\omega_{n-2}}{\omega_n} (\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-1}) - \left[\frac{n(n-1)\omega_{n-2}}{\omega_n} - \frac{2n^2\omega_{n-1}^2}{\omega_n^2} + \frac{2n\omega_{n-1}}{\omega_n} \right] (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) \\ &= m(m-1) \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_0} (\hat{\mathbf{P}}_2 - \hat{\mathbf{P}}_1) + \left[\frac{m(m-1)\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_0} - \frac{2m^2\hat{\omega}_1^2}{\hat{\omega}_0^2} + \frac{2m\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_0} \right] (\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_0). \end{aligned}$$

有理Bézier曲线的性质

(11) **几何连续性:** 对(1.5)与(1.6)所定义的 n 次与 m 次有理Bézier曲线段, 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的几何连续性条件为:

有理Bézier曲线的性质

(11) **几何连续性:** 对(1.5)与(1.6)所定义的 n 次与 m 次有理Bézier曲线段, 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的几何连续性条件为:

(a) G^0 连续: 与 C^0 连续条件相同, 即

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_n. \quad (1.7)$$

有理Bézier曲线的性质

(11) **几何连续性:** 对(1.5)与(1.6)所定义的 n 次与 m 次有理Bézier曲线段, 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的几何连续性条件为:

(a) G^0 连续: 与 C^0 连续条件相同, 即

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_n. \quad (1.7)$$

(b) G^1 连续: G^0 连续且存在正数 $\alpha > 0$, 使得

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_0 = \alpha \nabla \mathbf{P}_n, \quad (1.8)$$

有理Bézier曲线的性质

(11) **几何连续性:** 对(1.5)与(1.6)所定义的 n 次与 m 次有理Bézier曲线段, 在 $t = 1$ 和 $\hat{t} = 0$ 处常用的几何连续性条件为:

(a) G^0 连续: 与 C^0 连续条件相同, 即

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_n. \quad (1.7)$$

(b) G^1 连续: G^0 连续且存在正数 $\alpha > 0$, 使得

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_0 = \alpha \nabla \mathbf{P}_n, \quad (1.8)$$

即三个控制顶点 $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{P}}_0, \hat{\mathbf{P}}_1$ 共线, 且 $\mathbf{P}_{n-1}, \hat{\mathbf{P}}_1$ 在点 $\mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{P}}_0$ 的两侧.

有理Bézier曲线的性质

(c) G^2 连续: G^1 连续, 且在连接点处具有相同的曲率矢.

有理Bézier曲线的性质

(c) G^2 连续: G^1 连续, 且在连接点处具有相同的曲率矢.

$\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在连接点处的副法向量同向等价于 $\mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n(= \hat{\mathbf{P}}_0), \hat{\mathbf{P}}_1, \hat{\mathbf{P}}_2$ 五个顶点共面, 且 $\mathbf{P}_{n-2}, \hat{\mathbf{P}}_2$ 在另三个控制顶点所在的公切线的同侧, 即

有理Bézier曲线的性质

(c) G^2 连续: G^1 连续, 且在连接点处具有相同的曲率矢.

$\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在连接点处的副法向量同向等价于 $\mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n(=\hat{\mathbf{P}}_0), \hat{\mathbf{P}}_1, \hat{\mathbf{P}}_2$ 五个顶点共面, 且 $\mathbf{P}_{n-2}, \hat{\mathbf{P}}_2$ 在另三个控制顶点所在的公切线的同侧, 即

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_1 = -\beta \nabla \mathbf{P}_{n-1} + \eta \nabla \mathbf{P}_n, \quad (1.9)$$

其中 $\beta > 0$, η 是任意实数.

有理Bézier曲线的性质

(c) G^2 连续: G^1 连续, 且在连接点处具有相同的曲率矢.

$\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在连接点处的副法向量同向等价于 $\mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n(=\hat{\mathbf{P}}_0), \hat{\mathbf{P}}_1, \hat{\mathbf{P}}_2$ 五个顶点共面, 且 $\mathbf{P}_{n-2}, \hat{\mathbf{P}}_2$ 在另三个控制顶点所在的公切线的同侧, 即

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_1 = -\beta \nabla \mathbf{P}_{n-1} + \eta \nabla \mathbf{P}_n, \quad (1.9)$$

其中 $\beta > 0$, η 是任意实数.

由 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在公共点处具有相同的曲率值, 可得

$$\beta = \frac{m(n-1)\omega_{n-2}\omega_n\hat{\omega}_1^2}{n(m-1)\omega_{n-1}^2\hat{\omega}_0\hat{\omega}_2}\alpha^2. \quad (1.10)$$

有理Bézier曲线的性质

(c) G^2 连续: G^1 连续, 且在连接点处具有相同的曲率矢.

$\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在连接点处的副法向量同向等价于 $\mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n(=\hat{\mathbf{P}}_0), \hat{\mathbf{P}}_1, \hat{\mathbf{P}}_2$ 五个顶点共面, 且 $\mathbf{P}_{n-2}, \hat{\mathbf{P}}_2$ 在另三个控制顶点所在的公切线的同侧, 即

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_1 = -\beta \nabla \mathbf{P}_{n-1} + \eta \nabla \mathbf{P}_n, \quad (1.9)$$

其中 $\beta > 0$, η 是任意实数.

由 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在公共点处具有相同的曲率值, 可得

$$\beta = \frac{m(n-1)\omega_{n-2}\omega_n\hat{\omega}_1^2}{n(m-1)\omega_{n-1}^2\hat{\omega}_0\hat{\omega}_2}\alpha^2. \quad (1.10)$$

$\mathbf{R}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ 在公共点处 G^2 连续的条件为(1.7), (1.8), (1.9)和(1.10)同时成立.

有理Bézier曲线的性质

(12) **de Casteljau算法**: 对 n 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

有理Bézier曲线的性质

(12) **de Casteljau算法**: 对 n 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

其齐次坐标表示为

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

有理Bézier曲线的性质

(12) **de Casteljau算法**: 对 n 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

其齐次坐标表示为

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

给定的 $t \in [0, 1]$, 计算点 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 的de Casteljau算法为:

有理Bézier曲线的性质

(12) **de Casteljau算法**: 对 n 次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

其齐次坐标表示为

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

给定的 $t \in [0, 1]$, 计算点 $\mathbf{R}^\omega(t)$ 的de Casteljau算法为:

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}_i^{\omega,1}(t) B_i^{n-1}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^{n-k} \mathbf{P}_i^{\omega,k}(t) B_i^{n-k}(t) = \cdots = \mathbf{P}_0^{\omega,n}(t),$$

有理Bézier曲线的性质

(12续) 点 $\mathbf{R}_0^{\omega,n}(t)$ 即为所求的 $\mathbf{R}^{\omega}(t)$,

有理Bézier曲线的性质

(12续) 点 $\mathbf{R}_0^{\omega,n}(t)$ 即为所求的 $\mathbf{R}^{\omega}(t)$, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{P}_i^{\omega,0}(t) \equiv \mathbf{P}_i^{\omega,0} = \mathbf{P}_i^{\omega}, & i = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}_i^{\omega,k}(t) = (1-t)\mathbf{P}_i^{\omega,k-1}(t) + t\mathbf{P}_{i+1}^{\omega,k-1}(t), & k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-k. \end{cases} \quad (1.11)$$

有理Bézier曲线的性质

(12续) 点 $\mathbf{R}_0^{\omega,n}(t)$ 即为所求的 $\mathbf{R}^{\omega}(t)$, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{P}_i^{\omega,0}(t) \equiv \mathbf{P}_i^{\omega,0} = \mathbf{P}_i^{\omega}, & i = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}_i^{\omega,k}(t) = (1-t)\mathbf{P}_i^{\omega,k-1}(t) + t\mathbf{P}_{i+1}^{\omega,k-1}(t), & k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-k. \end{cases} \quad (1.11)$$

点 $\mathbf{R}^{\omega}(t) = \mathbf{R}_0^{\omega,n}(t)$ 的中心投影 $\mathcal{H}[\mathbf{R}^{\omega}(t)]$, 就是我们要计算的有理Bézier曲线上的点 $\mathbf{R}(t)$.

有理Bézier曲线的性质

(12续) 将上述迭代计算过程每一步都进行中心投影变换, 从而给出有理Bézier曲线的de Casteljau算法:

有理Bézier曲线的性质

(12续) 将上述迭代计算过程每一步都进行中心投影变换, 从而给出有理Bézier曲线的de Casteljau算法:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) \mathbf{P}_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)} = \dots = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) \mathbf{P}_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)}{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)} = \dots = \mathbf{P}_0^{(n)}(t),$$

有理Bézier曲线的性质

(12续) 将上述迭代计算过程每一步都进行中心投影变换, 从而给出有理Bézier曲线的de Casteljau算法:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) \mathbf{P}_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)} = \dots = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) \mathbf{P}_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)}{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)} = \dots = \mathbf{P}_0^{(n)}(t),$$

点 $\mathbf{P}_0^n(t)$ 即为所求的 $\mathbf{R}(t)$, 其中

有理Bézier曲线的性质

(12续) 将上述迭代计算过程每一步都进行中心投影变换, 从而给出有理Bézier曲线的de Casteljau算法:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) \mathbf{P}_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)}(t) B_i^{n-1}(t)} = \dots = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) \mathbf{P}_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)}{\sum_{i=0}^{n-k} \omega_i^{(k)}(t) B_i^{n-k}(t)} = \dots = \mathbf{P}_0^{(n)}(t),$$

点 $\mathbf{P}_0^n(t)$ 即为所求的 $\mathbf{R}(t)$, 其中

$$\begin{cases} \omega_i^{(0)}(t) \equiv \omega_i^{(0)} = \omega_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \omega_i^{(k)}(t) = (1-t)\omega_i^{(k-1)}(t) + t\omega_{i+1}^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-k, \\ \mathbf{P}_i^{(0)}(t) \equiv \mathbf{P}_i^{(0)} = \mathbf{P}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}_i^{(k)}(t) = \frac{(1-t)\omega_i^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_i^{(k-1)}(t) + t\omega_{i+1}^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_{i+1}^{(k-1)}(t)}{\omega_i^{(k)}(t)}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-k. \end{cases}$$

有理Bézier曲线的性质

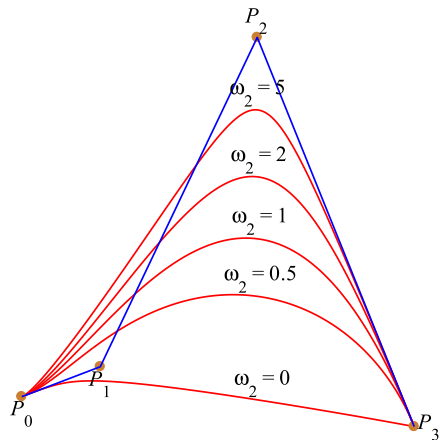
(13) 单个权因子的极限性质: 当 $\omega_0 \neq 0, \omega_n \neq 0$, 对任意 $t \in [0, 1]$, 当 ω_i 趋于无穷时,

有理Bézier曲线的性质

(13) 单个权因子的极限性质: 当 $\omega_0 \neq 0, \omega_n \neq 0$, 对任意 $t \in [0, 1]$, 当 ω_i 趋于无穷时, 曲线的极限满足

$$\lim_{\omega_i \rightarrow +\infty} \mathbf{R}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_0, & t = 0, \\ \mathbf{P}_i, & t \in (0, 1), \\ \mathbf{P}_n, & t = 1. \end{cases}$$

有理Bézier曲线的性质



有理Bézier曲线的性质

(14) 权因子的交比性质: 设有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 的控制顶点 \mathbf{P}_i 对应的权因子为 ω_i .

有理Bézier曲线的性质

- (14) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 的控制顶点 \mathbf{P}_i 对应的权因子为 ω_i . 对任一参数值 $t_0 \in [0, 1]$, 记点 $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}(t_0)$. 控制顶点和其它权因子不改变的情况下, 当 $\omega_i = 0$ 时设曲线上对应参数 t_0 的点为 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{R}(t_0)$, 当 $\omega_i = 1$ 时设曲线上对应参数 t_0 的点为 $\mathbf{M}_i = \mathbf{R}(t_0)$.

有理Bézier曲线的性质

- (14) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲线 $\mathbf{R}(t)$ 的控制顶点 \mathbf{P}_i 对应的权因子为 ω_i . 对任一参数值 $t_0 \in [0, 1]$, 记点 $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}(t_0)$. 控制顶点和其它权因子不改变的情况下, 当 $\omega_i = 0$ 时设曲线上对应参数 t_0 的点为 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{R}(t_0)$, 当 $\omega_i = 1$ 时设曲线上对应参数 t_0 的点为 $\mathbf{M}_i = \mathbf{R}(t_0)$.

则有

$$\omega_i = \frac{|\mathbf{M}_i \mathbf{P}_i|}{|\mathbf{Q}_i \mathbf{M}_i|} : \frac{|\mathbf{S}_i \mathbf{P}_i|}{|\mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i|}.$$

有理Bézier曲线的性质

(14) 二次有理Bézier曲线的形状不变因子: 对于二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 \omega_j \mathbf{P}_j B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

有理Bézier曲线的性质

(14) 二次有理Bézier曲线的形状不变因子: 对于二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 \omega_j \mathbf{P}_j B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

设

$$k = \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1^2}.$$

有理Bézier曲线的性质

(14) 二次有理Bézier曲线的形状不变因子: 对于二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 \omega_j \mathbf{P}_j B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

设

$$k = \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1^2}.$$

当控制顶点保持相同, 选取不同的权因子, 只要 k 相等, 则所定义的二次有理Bézier曲线是相同的.

有理Bézier曲线的性质

(14) 二次有理Bézier曲线的形状不变因子: 对于二次有理Bézier曲线

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 \omega_j \mathbf{P}_j B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^2 \omega_j B_j^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

设

$$k = \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1^2}.$$

当控制顶点保持相同, 选取不同的权因子, 只要 k 相等, 则所定义的二次有理Bézier曲线是相同的.

不同的权因子使得曲线对应不同的参数化, k 称为二次有理Bézier曲线的形状不变因子.

有理Bézier曲线的性质

(14续) 二次有理Bézier曲线的形状进行如下分类:

$$k \begin{cases} = 0, & \mathbf{R}(t) \text{ 表示两条直线段 } \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \text{ 和 } \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \\ \in (0, 1), & \mathbf{R}(t) \text{ 表示双曲线,} \\ = 1, & \mathbf{R}(t) \text{ 表示抛物线,} \\ \in (1, +\infty), & \mathbf{R}(t) \text{ 表示椭圆,} \\ = +\infty, & \mathbf{R}(t) \text{ 表示直线段 } \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2. \end{cases}$$

第五章 NURBS曲线曲面

- 1 有理Bézier曲线
- 2 有理Bézier曲面
- 3 NURBS曲线
- 4 NURBS曲面

$m \times n$ 次有理Bernstein基函数

称有理多项式函数

$$R_{i,j}^{m,n}(u,v) = \frac{\omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数,

$m \times n$ 次有理Bernstein基函数

称有理多项式函数

$$R_{i,j}^{m,n}(u,v) = \frac{\omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 其中 $B_i^m(u), B_j^n(v)$ 分别为 m 与 n 次Bernstein基函数, $\omega_{i,j} \geq 0$ 称为权因子.

$m \times n$ 次有理Bernstein基函数

称有理多项式函数

$$R_{i,j}^{m,n}(u,v) = \frac{\omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 其中 $B_i^m(u), B_j^n(v)$ 分别为 m 与 n 次Bernstein基函数, $\omega_{i,j} \geq 0$ 称为权因子.

为了防止分母为零, 一般设 $\omega_{0,0} > 0, \omega_{m,0} > 0, \omega_{0,n} > 0, \omega_{m,n} > 0$.

$m \times n$ 次有理Bernstein基函数

称有理多项式函数

$$R_{i,j}^{m,n}(u,v) = \frac{\omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 其中 $B_i^m(u), B_j^n(v)$ 分别为 m 与 n 次Bernstein基函数, $\omega_{i,j} \geq 0$ 称为权因子.

为了防止分母为零, 一般设 $\omega_{0,0} > 0, \omega_{m,0} > 0, \omega_{0,n} > 0, \omega_{m,n} > 0$.

显然, 当所有权因子都相等且不为零时, $R_{i,j}^{m,n}(u,v)$ 退化为张量积型Bernstein基函数 $B_i^m(u)B_j^n(v)$.

$m \times n$ 次有理Bézier曲面

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{m,n}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.1)$$

为一 $m \times n$ 次有理 *Bézier* 曲面,

$m \times n$ 次有理Bézier曲面

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{m,n}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.1)$$

为一 $m \times n$ 次有理Bézier曲面, 其中 $R_{i,j}^{m,n}(u, v)$ 为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, $\omega_{i,j} \geq 0$ 为权因子, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$.

$m \times n$ 次有理Bézier曲面

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{m,n}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.1)$$

为一 $m \times n$ 次有理Bézier曲面, 其中 $R_{i,j}^{m,n}(u, v)$ 为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, $\omega_{i,j} \geq 0$ 为权因子, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$. 依次用直线段连接同行同列相邻两个控制顶点所得的 $m \times n$ 边折线网格称为控制网格(或Bézier网).

$m \times n$ 次有理Bézier曲面的中心投影表示

控制顶点的齐次坐标表示为 $\mathbf{P}_{i,j}^\omega = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$,

$m \times n$ 次有理Bézier曲面的中心投影表示

控制顶点的齐次坐标表示为 $\mathbf{P}_{i,j}^\omega = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$,
则 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面

$$\mathbf{R}^\omega(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^\omega B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.2)$$

为有理Bézier曲面(2.1)的齐次坐标表示形式,

$m \times n$ 次有理Bézier曲面的中心投影表示

控制顶点的齐次坐标表示为 $\mathbf{P}_{i,j}^\omega = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$,
则 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面

$$\mathbf{R}^\omega(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^\omega B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.2)$$

为有理Bézier曲面(2.1)的齐次坐标表示形式, 满足

$$\mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(u, v)] = \mathbf{R}(u, v).$$

$m \times n$ 次有理Bézier曲面的中心投影表示

控制顶点的齐次坐标表示为 $\mathbf{P}_{i,j}^\omega = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$, 则 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面

$$\mathbf{R}^\omega(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^\omega B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.2)$$

为有理Bézier曲面(2.1)的齐次坐标表示形式, 满足

$$\mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(u, v)] = \mathbf{R}(u, v).$$

虽然 $R_{i,j}^{m,n}(u, v)$ 称为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 但其并不是关于 u, v 的基函数的乘积, 因此曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 并不是张量积曲面.

$m \times n$ 次有理Bézier曲面的中心投影表示

控制顶点的齐次坐标表示为 $\mathbf{P}_{i,j}^\omega = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$, 则 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面

$$\mathbf{R}^\omega(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^\omega B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (2.2)$$

为有理Bézier曲面(2.1)的齐次坐标表示形式, 满足

$$\mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(u, v)] = \mathbf{R}(u, v).$$

虽然 $R_{i,j}^{m,n}(u, v)$ 称为 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数, 但其并不是关于 u, v 的基函数的乘积, 因此曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 并不是张量积曲面. 由于齐次坐标形式 $\mathbf{R}^\omega(u, v)$ 为张量积曲面, 因此 $\mathbf{R}(u, v)$ 的很多性质与算法可以借助 $\mathbf{R}^\omega(u, v)$ 来进行研究.

有理Bézier曲面的性质

(1) 几何不变性与仿射不变性: 由 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数的单位分解性即知.

有理Bézier曲面的性质

- (1) 几何不变性与仿射不变性: 由 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (2) 凸包性质: $m \times n$ 次有理Bézier曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.

有理Bézier曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (2) **凸包性质:** $m \times n$ 次有理Bézier曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, $m \times n$ 次有理Bézier曲面退化为 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面.

有理Bézier曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $m \times n$ 次有理Bernstein基函数的单位分解性即知.
- (2) **凸包性质:** $m \times n$ 次有理Bézier曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, $m \times n$ 次有理Bézier曲面退化为 $m \times n$ 次张量积型Bézier曲面.
- (4) **边界性质:** 有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的四条边界曲线是由控制网格的边界多边形所决定的四条有理Bézier曲线, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(u, 0) &= \frac{\sum_{i=0}^m \omega_{i,0} \mathbf{P}_{i,0} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m \omega_{i,0} B_i^m(u)}, & \mathbf{R}(u, 1) &= \frac{\sum_{i=0}^m \omega_{i,n} \mathbf{P}_{i,n} B_i^m(u)}{\sum_{i=0}^m \omega_{i,n} B_i^m(u)}, & u &\in [0, 1], \\ \mathbf{R}(0, v) &= \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{0,j} \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_{0,j} B_j^n(v)}, & \mathbf{R}(1, v) &= \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{m,j} \mathbf{P}_{m,j} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_{m,j} B_j^n(v)}, & v &\in [0, 1].\end{aligned}$$

有理Bézier曲面的性质

- (5) **角点性质**: 当控制网格的角控制顶点对应的权因子 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 插值于这四个角控制顶点,

有理Bézier曲面的性质

- (5) **角点性质**: 当控制网格的角控制顶点对应的权因子 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 插值于这四个角控制顶点,

$$\mathbf{R}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}, \quad \mathbf{R}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,n}, \quad \mathbf{R}(1, 0) = \mathbf{P}_{m,0}, \quad \mathbf{R}(1, 1) = \mathbf{P}_{m,n}.$$

有理Bézier曲面的性质

- (5) **角点性质**: 当控制网格的角控制顶点对应的权因子 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 插值于这四个角控制顶点,

$$\mathbf{R}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}, \quad \mathbf{R}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,n}, \quad \mathbf{R}(1, 0) = \mathbf{P}_{m,0}, \quad \mathbf{R}(1, 1) = \mathbf{P}_{m,n}.$$

$\mathbf{R}(u, v)$ 在角点 $(0, 0)$ 处的切矢为

$$\mathbf{R}_u(0, 0) = m \frac{\omega_{1,0}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}), \quad \mathbf{R}_v(0, 0) = n \frac{\omega_{0,1}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

$$\mathbf{R}_{uv}(0, 0) = mn \left[\frac{\omega_{1,1}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,0}) - \frac{\omega_{1,0}\omega_{0,1}}{\omega_{0,0}^2} (\mathbf{P}_{1,0} + \mathbf{P}_{0,1} - 2\mathbf{P}_{0,0}) \right].$$

有理Bézier曲面的性质

- (5) **角点性质**: 当控制网格的角控制顶点对应的权因子 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 插值于这四个角控制顶点,

$$\mathbf{R}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}, \quad \mathbf{R}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,n}, \quad \mathbf{R}(1, 0) = \mathbf{P}_{m,0}, \quad \mathbf{R}(1, 1) = \mathbf{P}_{m,n}.$$

$\mathbf{R}(u, v)$ 在角点 $(0, 0)$ 处的切矢为

$$\mathbf{R}_u(0, 0) = m \frac{\omega_{1,0}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}), \quad \mathbf{R}_v(0, 0) = n \frac{\omega_{0,1}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

$$\mathbf{R}_{uv}(0, 0) = mn \left[\frac{\omega_{1,1}}{\omega_{0,0}} (\mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,0}) - \frac{\omega_{1,0}\omega_{0,1}}{\omega_{0,0}^2} (\mathbf{P}_{1,0} + \mathbf{P}_{0,1} - 2\mathbf{P}_{0,0}) \right].$$

几何上, 曲面在 $\mathbf{P}(0, 0)$ 点处的切平面是 $\mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{0,1}$ 三点所决定的平面. 对称地, 曲面在其它三个角点处的结论类似.

有理Bézier曲面的性质

(6) 升阶性质: 借助齐次坐标形式的升阶公式, 有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的升阶公式为

有理Bézier曲面的性质

(6) 升阶性质: 借助齐次坐标形式的升阶公式, 有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的升阶公式为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{i,j}^* \mathbf{P}_{i,j}^* B_i^{m+1}(u) B_j^{n+1}(v)}{\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{i,j}^* B_i^{m+1}(u) B_j^{n+1}(v)},\end{aligned}$$

有理Bézier曲面的性质

(6) 升阶性质: 借助齐次坐标形式的升阶公式, 有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的升阶公式为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{i,j}^* \mathbf{P}_{i,j}^* B_i^{m+1}(u) B_j^{n+1}(v)}{\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{i,j}^* B_i^{m+1}(u) B_j^{n+1}(v)},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}^* &= \alpha_i \beta_j \omega_{i-1,j-1} + \alpha_i (1 - \beta_j) \omega_{i-1,j} + (1 - \alpha_i) \beta_j \omega_{i,j-1} + (1 - \alpha_i) (1 - \beta_j) \omega_{i,j}, \\ \mathbf{P}_{i,j}^* &= \frac{1}{\omega_{i,j}^*} [\alpha_i \beta_j \omega_{i-1,j-1} \mathbf{P}_{i-1,j-1} + \alpha_i (1 - \beta_j) \omega_{i-1,j} \mathbf{P}_{i-1,j} \\ &\quad + (1 - \alpha_i) \beta_j \omega_{i,j-1} \mathbf{P}_{i,j-1} + (1 - \alpha_i) (1 - \beta_j) \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}], \\ \alpha_i &= \frac{i}{m+1}, \quad \beta_j = \frac{j}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m+1; j = 0, 1, \dots, n+1.\end{aligned}$$

有理Bézier曲面的性质

- (7) **de Casteljau算法**: 借助齐次坐标形式的de Casteljau算法,
对 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 计算有理Bézier曲面上一点 $\mathbf{R}(u, v)$ 的de Casteljau算法为

有理Bézier曲面的性质

(7) **de Casteljau算法:** 借助齐次坐标形式的de Casteljau算法,
对 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 计算有理Bézier曲面上一点 $\mathbf{R}(u, v)$ 的de Casteljau算法为

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{i,j}^{(0,0)}(u, v) = \omega_{i,j}^{(0,0)} = \omega_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ \omega_{i,j}^{(r,s)}(u, v) = (1-u)(1-v)\omega_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + (1-u)v\omega_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \\ \quad + u(1-v)\omega_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + uv\omega_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v), \\ \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \quad i = 0, 1, \dots, m-r; \quad j = 0, 1, \dots, n-s. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_{i,j}^{(0,0)}(u, v) = \mathbf{P}_{i,j}^{(0,0)} = \mathbf{P}_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}_{i,j}^{(r,s)}(u, v) = \frac{1}{\omega_{i,j}^{(r,s)}(u, v)} \left[(1-u)(1-v)\omega_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + (1-u)v\omega_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \right. \\ \quad \left. + u(1-v)\omega_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + uv\omega_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \right], \\ \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \quad i = 0, 1, \dots, m-r; \quad j = 0, 1, \dots, n-s. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

有理Bézier曲面的性质

(7) **de Casteljau算法:** 借助齐次坐标形式的de Casteljau算法,
对 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 计算有理Bézier曲面上一点 $\mathbf{R}(u, v)$ 的de Casteljau算法为

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{i,j}^{(0,0)}(u, v) = \omega_{i,j}^{(0,0)} = \omega_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ \omega_{i,j}^{(r,s)}(u, v) = (1-u)(1-v)\omega_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + (1-u)v\omega_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \\ \quad + u(1-v)\omega_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + uv\omega_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v), \\ \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \quad i = 0, 1, \dots, m-r; \quad j = 0, 1, \dots, n-s. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_{i,j}^{(0,0)}(u, v) = \mathbf{P}_{i,j}^{(0,0)} = \mathbf{P}_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{P}_{i,j}^{(r,s)}(u, v) = \frac{1}{\omega_{i,j}^{(r,s)}(u, v)} \left[(1-u)(1-v)\omega_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + (1-u)v\omega_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \right. \\ \quad \left. + u(1-v)\omega_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i+1,j}^{(r-1,s-1)}(u, v) + uv\omega_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v)\mathbf{P}_{i+1,j+1}^{(r-1,s-1)}(u, v) \right], \\ \quad r = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \quad i = 0, 1, \dots, m-r; \quad j = 0, 1, \dots, n-s. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

点 $\mathbf{P}_{0,0}^{m,n}(u, v)$ 即为所求曲面上的点 $\mathbf{P}(u, v)$.

有理Bézier曲面的性质

(8) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 对应的权因子为 $\omega_{i,j}$,

有理Bézier曲面的性质

- (8) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 对应的权因子为 $\omega_{i,j}$, 对任一参数值 $(u_0, v_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 设点 $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$.

有理Bézier曲面的性质

- (8) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 对应的权因子为 $\omega_{i,j}$, 对任一参数值 $(u_0, v_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 设点 $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$. 在控制顶点和其它权因子不改变的情况下, 当 $\omega_{i,j} = 0$ 时设曲面上对应参数 (u_0, v_0) 的点为 $\mathbf{Q}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$,

有理Bézier曲面的性质

- (8) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 对应的权因子为 $\omega_{i,j}$, 对任一参数值 $(u_0, v_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 设点 $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$. 在控制顶点和其它权因子不改变的情况下, 当 $\omega_{i,j} = 0$ 时设曲面上对应参数 (u_0, v_0) 的点为 $\mathbf{Q}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$, 当 $\omega_{i,j} = 1$ 时设曲面上对应参数 (u_0, v_0) 的点为 $\mathbf{M}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$.

有理Bézier曲面的性质

- (8) **权因子的交比性质**: 设有理Bézier曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 对应的权因子为 $\omega_{i,j}$, 对任一参数值 $(u_0, v_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 设点 $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$. 在控制顶点和其它权因子不改变的情况下, 当 $\omega_{i,j} = 0$ 时设曲面上对应参数 (u_0, v_0) 的点为 $\mathbf{Q}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$, 当 $\omega_{i,j} = 1$ 时设曲面上对应参数 (u_0, v_0) 的点为 $\mathbf{M}_{i,j} = \mathbf{R}(u_0, v_0)$.

则有

$$\omega_{i,j} = \frac{|\mathbf{M}_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}|}{|\mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{M}_{i,j}|} : \frac{|\mathbf{S}_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}|}{|\mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{S}_{i,j}|}.$$

有理Bézier曲面的性质

(9) 单个权因子的极限性质: 当 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时,

有理Bézier曲面的性质

- (9) 单个权因子的极限性质: 当 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 对任意 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 当 $\omega_{i,j}$ 趋于无穷时, 有理Bézier曲面的极限满足

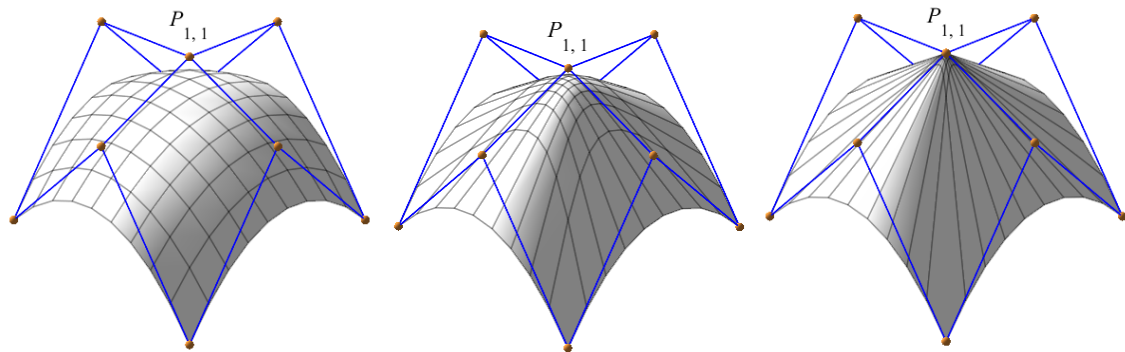
有理Bézier曲面的性质

- (9) **单个权因子的极限性质:** 当 $\omega_{0,0}, \omega_{0,n}, \omega_{m,0}, \omega_{m,n}$ 均不为零时, 对任意 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 当 $\omega_{i,j}$ 趋于无穷时, 有理Bézier曲面的极限满足

$$\lim_{\omega_{i,j} \rightarrow +\infty} \mathbf{R}(u, v) = \begin{cases} \mathbf{P}_{0,0}, & (u, v) = (0, 0), \\ \mathbf{P}_{0,n}, & (u, v) = (0, 1), \\ \mathbf{P}_{m,0}, & (u, v) = (1, 0), \\ \mathbf{P}_{m,n}, & (u, v) = (1, 1), \\ \mathbf{P}_{i,j}, & (u, v) \in (0, 1) \times (0, 1). \end{cases}$$

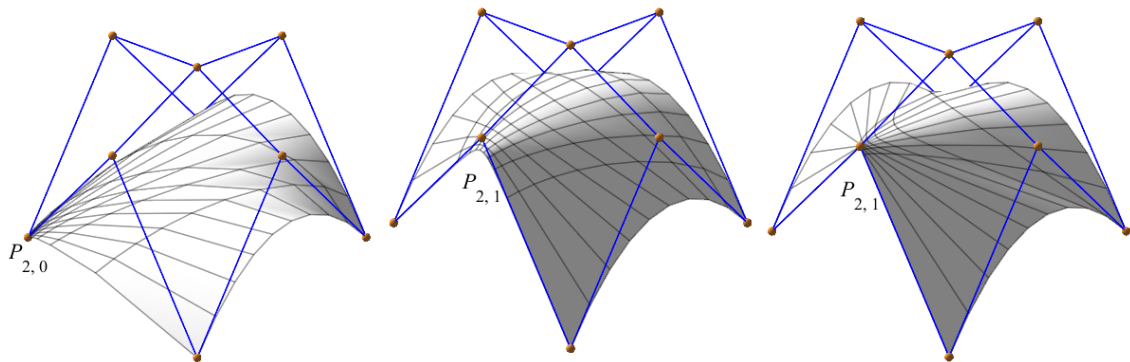
实例：单个权因子的极限性质

双二次有理Bézier曲面的单个权因子变化： $\omega_{1,1} = 1, 10, 100$



实例：单个权因子的极限性质

双二次有理Bézier曲面的单个权因子变化： $\omega_{2,0} = 100, \omega_{2,1} = 10, 100$



第五章 NURBS曲线曲面

- 1 有理Bézier曲线
- 2 有理Bézier曲面
- 3 **NURBS曲线**
- 4 NURBS曲面

有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(t)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次B样条基函数,

有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$ 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次B样条基函数, 称

$$R_{i,p}(t) = \frac{\omega_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

为 p 次有理B样条基函数,

有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次B样条基函数, 称

$$R_{i,p}(t) = \frac{\omega_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

为 p 次**有理B样条基函数**, 其中 $\omega_i \geq 0$ 称为**权因子**. 为了防止分母为零, 设 $\omega_0 > 0, \omega_n > 0$.

有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$ 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次B样条基函数, 称

$$R_{i,p}(t) = \frac{\omega_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

为 p 次**有理B样条基函数**, 其中 $\omega_i \geq 0$ 称为**权因子**. 为了防止分母为零, 设 $\omega_0 > 0, \omega_n > 0$.

当所有权因子都相等且不为零时, $R_{i,p}(t)$ 就退化为B样条基函数 $N_{i,p}(t)$.

NURBS曲线

定义

称参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_{i,p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad t \in [t_p, t_{n+1}], \quad (3.1)$$

为一条 p 次 **NURBS曲线** (*Non-Uniform Rational B-Spline*),

NURBS曲线

定义

称参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_{i,p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad t \in [t_p, t_{n+1}], \quad (3.1)$$

为一条 p 次 **NURBS曲线** (*Non-Uniform Rational B-Spline*), 其中 $R_{i,p}(t)$ 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次有理 **B样条基函数**, 空间向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ 称为 **控制顶点**, $\omega_i \geq 0$ 称为 **权因子**, $i = 0, 1, \dots, n$.

NURBS曲线

定义

称参数曲线段

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_{i,p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(t)}, \quad t \in [t_p, t_{n+1}], \quad (3.1)$$

为一条 p 次 **NURBS曲线** (*Non-Uniform Rational B-Spline*), 其中 $R_{i,p}(t)$ 为定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p+1}\}$$

上的 p 次有理B样条基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, $\omega_i \geq 0$ 称为权因子, $i = 0, 1, \dots, n$. 依次用直线段连接相邻两个控制顶点所得的 n 边折线多边形称为控制多边形.

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

则建立在节点向量 \mathbf{U} 上的 p 次B样条曲线

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{n+1}], \quad (3.2)$$

为NURBS曲线的齐次坐标表示形式,

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_i^\omega = (\omega_i \mathbf{P}_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

则建立在节点向量 \mathbf{U} 上的 p 次B样条曲线

$$\mathbf{R}^\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^\omega N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{n+1}], \quad (3.2)$$

为NURBS曲线的齐次坐标表示形式, 满足

$$\mathcal{H}[\mathbf{R}^\omega(t)] = \mathbf{R}(t).$$

NURBS曲线的性质

(1) 几何不变性与仿射不变性: 由有理B样条基函数的单位分解性即知.

NURBS曲线的性质

- (1) 几何不变性与仿射不变性: 由有理B样条基函数的单位分解性即知.
- (2) 凸包性质: NURBS曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.

NURBS曲线的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由有理B样条基函数的单位分解性即知.
- (2) **凸包性质:** NURBS曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲线退化为B样条曲线.

NURBS曲线的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性**: 由有理B样条基函数的单位分解性即知.
- (2) **凸包性质**: NURBS曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质**: 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲线退化为B样条曲线.
- (4) **分段有理多项式参数曲线性质**: 当 $t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$ 时, NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}),$$

NURBS曲线的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性**: 由有理B样条基函数的单位分解性即知.
- (2) **凸包性质**: NURBS曲线落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质**: 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲线退化为B样条曲线.
- (4) **分段有理多项式参数曲线性质**: 当 $t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$ 时, NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}),$$

这表明NURBS曲线是一条**分段 p 次有理多项式参数曲线**.

NURBS曲线的性质

(5) **强凸包性质**: 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上, NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

NURBS曲线的性质

(5) **强凸包性质**: 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上, NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

由于基函数 $\{R_{j,p}(t)\}_{j=i-p}^i$ 具有单位分解性与非负性, 从而此段曲线上的每一点 $\mathbf{R}(t)$ 都是这 $p+1$ 个控制顶点 $\{\mathbf{P}_j\}_{j=i-p}^i$ 的凸组合, 从而落在它们所构成的凸包中, 这就是NURBS曲线所谓的**强凸包性**.

NURBS曲线的性质

(5) **强凸包性质**: 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上, NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

由于基函数 $\{R_{j,p}(t)\}_{j=i-p}^i$ 具有单位分解性与非负性, 从而此段曲线上的每一点 $\mathbf{R}(t)$ 都是这 $p+1$ 个控制顶点 $\{\mathbf{P}_j\}_{j=i-p}^i$ 的凸组合, 从而落在它们所构成的凸包中, 这就是NURBS曲线所谓的**强凸包性**.

(6) **局部调整性质**: 由于 p 次有理B样条基函数 $R_{i,p}(t)$ 的局部支集同样为 $[t_i, t_{i+p+1})$, 因此控制顶点 \mathbf{P}_i 只对区域 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 上定义的NURBS曲线有贡献.

NURBS曲线的性质

(5) **强凸包性质**: 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上, NURBS曲线可表示为

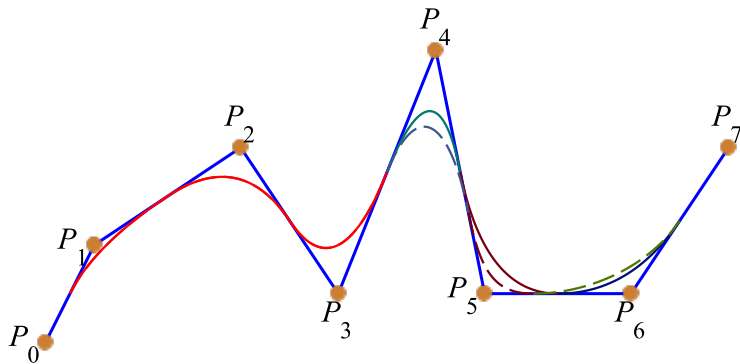
$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=i-p}^i \mathbf{P}_j R_{j,p}(t) = \frac{\sum_{j=i-p}^i \omega_j \mathbf{P}_j N_{j,p}(t)}{\sum_{j=i-p}^i \omega_j N_{j,p}(t)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

由于基函数 $\{R_{j,p}(t)\}_{j=i-p}^i$ 具有单位分解性与非负性, 从而此段曲线上的每一点 $\mathbf{R}(t)$ 都是这 $p+1$ 个控制顶点 $\{\mathbf{P}_j\}_{j=i-p}^i$ 的凸组合, 从而落在它们所构成的凸包中, 这就是NURBS曲线所谓的**强凸包性**.

(6) **局部调整性质**: 由于 p 次有理B样条基函数 $R_{i,p}(t)$ 的局部支集同样为 $[t_i, t_{i+p+1})$, 因此控制顶点 \mathbf{P}_i 只对区域 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 上定义的NURBS曲线有贡献. 换句话说, 调整控制顶点 \mathbf{P}_i 及其相应的权因子 ω_i , 只影响NURBS曲线在 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 上相应的曲线段, 而不影响其余部分曲线.

实例：局部调整性质

调节二次NURBS曲线的权因子 ω_5 , 只对与 \mathbf{P}_5 相关的连续三段曲线产生影响.



NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (a) **NURBS曲线的连续阶性质:** 曲线在参数域的 r 重节点处是 C^{p-r} 阶连续的. 若参数域上的节点都是单节点, 则曲线是整体 C^{p-1} 阶连续的.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (a) **NURBS曲线的连续阶性质:** 曲线在参数域的 r 重节点处是 C^{p-r} 阶连续的. 若参数域上的节点都是单节点, 则曲线是整体 C^{p-1} 阶连续的.
- (b) **NURBS曲线的插值性质:** 当节点向量 \mathbf{U} 中的某个内节点 t_j 为 p 重时, 设 $\omega_{j-1} \neq 0$, 则只有以

$$\{t_{j-1}, \underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p \uparrow}, t_{j+1}\}$$

为支集的 p 次有理B样条基函数 $R_{j-1,p}(t)$ 在 t_j 取值为1, 其余所有基函数在此点取值全为0.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (a) **NURBS曲线的连续阶性质:** 曲线在参数域的 r 重节点处是 C^{p-r} 阶连续的. 若参数域上的节点都是单节点, 则曲线是整体 C^{p-1} 阶连续的.
- (b) **NURBS曲线的插值性质:** 当节点向量 \mathbf{U} 中的某个内节点 t_j 为 p 重时, 设 $\omega_{j-1} \neq 0$, 则只有以

$$\{t_{j-1}, \underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p \uparrow}, t_{j+1}\}$$

为支集的 p 次有理B样条基函数 $R_{j-1,p}(t)$ 在 t_j 取值为1, 其余所有基函数在此点取值全为0. 因此NURBS曲线插值于控制顶点 \mathbf{P}_{j-1} , 且满足 $\mathbf{R}(t_j) = \mathbf{P}_{j-1}$.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (a) **NURBS曲线的连续阶性质:** 曲线在参数域的 r 重节点处是 C^{p-r} 阶连续的. 若参数域上的节点都是单节点, 则曲线是整体 C^{p-1} 阶连续的.
- (b) **NURBS曲线的插值性质:** 当节点向量 \mathbf{U} 中的某个内节点 t_j 为 p 重时, 设 $\omega_{j-1} \neq 0$, 则只有以

$$\{t_{j-1}, \underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p \uparrow}, t_{j+1}\}$$

为支集的 p 次有理B样条基函数 $R_{j-1,p}(t)$ 在 t_j 取值为1, 其余所有基函数在此点取值全为0. 因此NURBS曲线插值于控制顶点 \mathbf{P}_{j-1} , 且满足 $\mathbf{R}(t_j) = \mathbf{P}_{j-1}$.

当节点向量中的端点节点 t_0 或 t_{n+1} 为 $p+1$ 重时, 利用重节点时有理B样条基函数的插值性质(要求相应权因子不为零), NURBS曲线插值于首控制顶点 \mathbf{P}_0 或末控制顶点 \mathbf{P}_n .

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (a) **NURBS曲线的连续阶性质:** 曲线在参数域的 r 重节点处是 C^{p-r} 阶连续的. 若参数域上的节点都是单节点, 则曲线是整体 C^{p-1} 阶连续的.
- (b) **NURBS曲线的插值性质:** 当节点向量 \mathbf{U} 中的某个内节点 t_j 为 p 重时, 设 $\omega_{j-1} \neq 0$, 则只有以

$$\{t_{j-1}, \underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p \uparrow}, t_{j+1}\}$$

为支集的 p 次有理B样条基函数 $R_{j-1,p}(t)$ 在 t_j 取值为1, 其余所有基函数在此点取值全为0. 因此**NURBS曲线插值于控制顶点 \mathbf{P}_{j-1}** , 且满足 $\mathbf{R}(t_j) = \mathbf{P}_{j-1}$.

当节点向量中的端点节点 t_0 或 t_{n+1} 为 $p+1$ 重时, 利用重节点时有理B样条基函数的插值性质(要求相应权因子不为零), NURBS曲线插值于首控制顶点 \mathbf{P}_0 或末控制顶点 \mathbf{P}_n . **当 t_0 与 t_{n+1} 都为 $p+1$ 重时**, 且 ω_0, ω_n 都不为零时, **NURBS曲线插值于首末两个控制顶点**, 具有**端点插值性**.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (c) **NURBS曲线的退化性质:** 当节点向量的两个连续内部节点 t_j, t_{j+1} 都是 p 重(或者一个内部节点为 p 重与其相邻的边界节点为 $p+1$ 重)时,

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (c) **NURBS曲线的退化性质**: 当节点向量的两个连续内部节点 t_j, t_{j+1} 都是 p 重(或者一个内部节点为 p 重与其相邻的边界节点为 $p+1$ 重)时, p 次NURBS曲线在区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的曲线段经参数变换 $u = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}$ 化为 p 次有理Bézier曲线.

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

- (c) **NURBS曲线的退化性质**: 当节点向量的两个连续内部节点 t_j, t_{j+1} 都是 p 重(或者一个内部节点为 p 重与其相邻的边界节点为 $p+1$ 重)时, p 次NURBS曲线在区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的曲线段经参数变换 $u = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}$ 化为 p 次有理Bézier曲线.
特别地, 当 $n = p$ 时, 且

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1 \text{重}}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1 \text{重}},$$

NURBS曲线的性质

(7) 重节点性质.

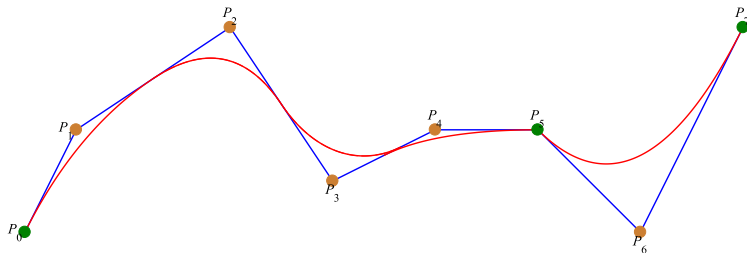
- (c) **NURBS曲线的退化性质**: 当节点向量的两个连续内部节点 t_j, t_{j+1} 都是 p 重(或者一个内部节点为 p 重与其相邻的边界节点为 $p+1$ 重)时, p 次NURBS曲线在区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的曲线段经参数变换 $u = \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}$ 化为 p 次有理Bézier曲线. 特别地, 当 $n = p$ 时, 且

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1\text{重}}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1\text{重}},$$

此时 p 次有理B样条基函数退化为 p 次有理Bernstein基函数, 则 p 次NURBS曲线退化为相应控制顶点与权因子所定义的 p 次有理Bézier曲线.

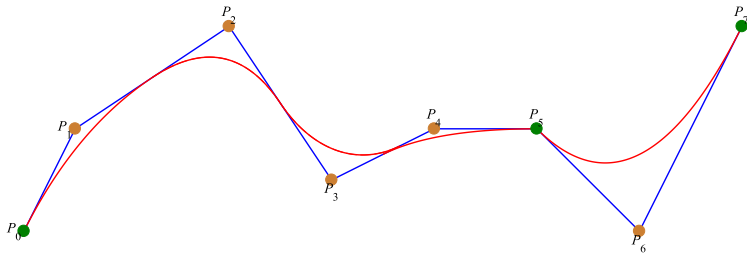
实例：NURBS曲线的连续阶与插值性质

设节点向量 $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ，定义二次NURBS曲线。



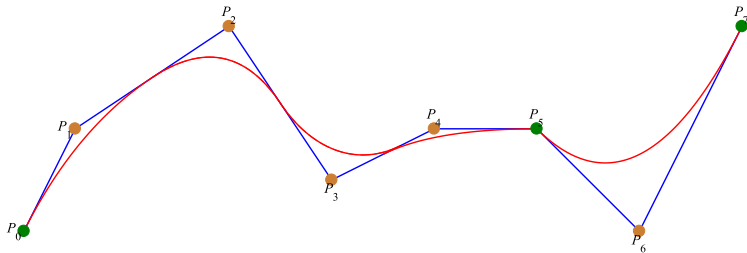
实例：NURBS曲线的连续阶与插值性质

设节点向量 $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ，定义二次NURBS曲线. 由于两个端点节点均为三重，内部节点4为二重，所以当权因子 $\omega_0, \omega_5, \omega_7$ 都不为零时，



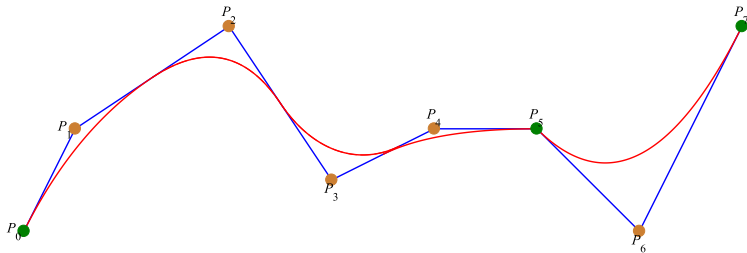
实例：NURBS曲线的连续阶与插值性质

设节点向量 $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ，定义二次NURBS曲线. 由于两个端点节点均为三重，内部节点4为二重，所以当权因子 $\omega_0, \omega_5, \omega_7$ 都不为零时，曲线插值于控制顶点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_5$ 和 \mathbf{P}_7 ，



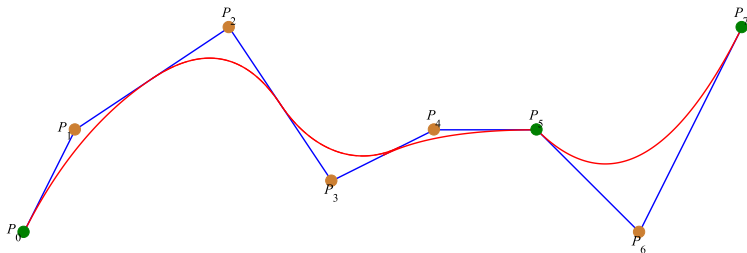
实例：NURBS曲线的连续阶与插值性质

设节点向量 $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ，定义二次NURBS曲线. 由于两个端点节点均为三重，内部节点4为二重，所以当权因子 $\omega_0, \omega_5, \omega_7$ 都不为零时，曲线插值于控制顶点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_5$ 和 \mathbf{P}_7 ，在 $t = 4$ 时为 C^0 连续，



实例：NURBS曲线的连续阶与插值性质

设节点向量 $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ，定义二次NURBS曲线. 由于两个端点节点均为三重，内部节点4为二重，所以当权因子 $\omega_0, \omega_5, \omega_7$ 都不为零时，曲线插值于控制顶点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_5$ 和 \mathbf{P}_7 ，在 $t = 4$ 时为 C^0 连续，且在参数段 $[4, 5]$ 上退化为一条二次有理Bézier曲线.



NURBS曲线的性质

(8) **de Boor算法**. 借助齐次坐标形式的**de Boor算法**, 对 $t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$, 计算 p 次NURBS曲线上一点 $\mathbf{R}(t)$ 的**de Boor算法**为

NURBS曲线的性质

(8) **de Boor算法**. 借助齐次坐标形式的**de Boor算法**, 对 $t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$, 计算 p 次NURBS曲线上一点 $\mathbf{R}(t)$ 的**de Boor算法**为

$$\begin{cases} \omega_j^{(0)}(t) = \omega_j^{(0)} = \omega_j, & j = i - p, i - p + 1, \dots, i, \\ \omega_j^{(k)}(t) = (1 - \alpha_j^{(k)})\omega_{j-1}^{(k-1)}(t) + \alpha_j^{(k)}\omega_j^{(k-1)}(t), \\ \alpha_j^{(k)} = \frac{t - t_j}{t_{j+p+1-k} - t_j}, & k = 1, 2, \dots, p; j = i - p + r, i - p + r + 1, \dots, i. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_j^{(0)}(t) = \mathbf{P}_j^{(0)} = \mathbf{P}_j, & j = i - p, i - p + 1, \dots, i, \\ \mathbf{P}_j^{(k)}(t) = \frac{1}{\omega_j^{(k)}(t)} \left[(1 - \alpha_j^{(k)})\omega_{j-1}^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_{j-1}^{(k-1)}(t) + \alpha_j^{(k)}\omega_j^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_j^{(k-1)}(t) \right], \\ k = 1, 2, \dots, p; j = i - p + r, i - p + r + 1, \dots, i. \end{cases} \quad (3.4)$$

NURBS曲线的性质

(8) **de Boor算法**. 借助齐次坐标形式的**de Boor算法**, 对 $t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$, 计算 p 次NURBS曲线上一点 $\mathbf{R}(t)$ 的**de Boor算法**为

$$\begin{cases} \omega_j^{(0)}(t) = \omega_j^{(0)} = \omega_j, & j = i - p, i - p + 1, \dots, i, \\ \omega_j^{(k)}(t) = (1 - \alpha_j^{(k)})\omega_{j-1}^{(k-1)}(t) + \alpha_j^{(k)}\omega_j^{(k-1)}(t), \\ \alpha_j^{(k)} = \frac{t - t_j}{t_{j+p+1-k} - t_j}, & k = 1, 2, \dots, p; j = i - p + r, i - p + r + 1, \dots, i. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_j^{(0)}(t) = \mathbf{P}_j^{(0)} = \mathbf{P}_j, & j = i - p, i - p + 1, \dots, i, \\ \mathbf{P}_j^{(k)}(t) = \frac{1}{\omega_j^{(k)}(t)} \left[(1 - \alpha_j^{(k)})\omega_{j-1}^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_{j-1}^{(k-1)}(t) + \alpha_j^{(k)}\omega_j^{(k-1)}(t)\mathbf{P}_j^{(k-1)}(t) \right], \\ k = 1, 2, \dots, p; j = i - p + r, i - p + r + 1, \dots, i. \end{cases} \quad (3.4)$$

$\mathbf{P}_i^{(p)}(t)$ 即为所求的点 $\mathbf{R}(t)$.

NURBS曲线的性质

- (9) **节点插入算法**. 在NURBS曲线定义域内的某个区间内插入一个新节点 $t^* \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$,

NURBS曲线的性质

(9) **节点插入算法**. 在NURBS曲线定义域内的某个区间内插入一个新节点 $t^* \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$, 得到新的节点向量为

$$\mathbf{U}^1 = \{t_0, t_1, \dots, t_i, t^*, t_{i+1}, \dots, t_{n+p+1}\} = \{t_0^1, t_1^1, \dots, t_i^1, t_{i+1}^1, \dots, t_{n+p+2}^1\}.$$

NURBS曲线的性质

- (9) **节点插入算法.** 在NURBS曲线定义域内的某个区间内插入一个新节点 $t^* \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_p, t_{n+1}]$, 得到新的节点向量为

$$\mathbf{U}^1 = \{t_0, t_1, \dots, t_i, t^*, t_{i+1}, \dots, t_{n+p+1}\} = \{t_0^1, t_1^1, \dots, t_i^1, t_{i+1}^1, \dots, t_{n+p+2}^1\}.$$

则NURBS曲线可表示为

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} \omega_j^{(1)} \mathbf{P}_j^{(1)} N_{j,p}^1(t)}{\sum_{j=0}^{n+1} \omega_j^{(1)} N_{j,p}^1(t)},$$

其中 $N_{j,p}^1(t)$ 为定义在 \mathbf{U}^1 上的 p 次B样条基函数。

NURBS曲线的性质

控制顶点 $\mathbf{P}_j^{(1)}$ 与权因子 $\omega_j^{(1)}$ 采用如下算法进行计算

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_j^{(1)} = \omega_j, & j = 0, 1, \dots, i-p, \\ \omega_j^{(1)} = (1 - \alpha_j)\omega_{j-1} + \alpha_j\omega_j, & j = i-p+1, i-p+2, \dots, i, \\ \alpha_j = \frac{t^* - t_j}{t_{j+p} - t_j}, & \\ \omega_j^{(1)} = \omega_{j-1}, & j = i+1, i+2, \dots, n+1. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{P}_j^{(1)} = \mathbf{P}_j, & j = 0, 1, \dots, i-p, \\ \mathbf{P}_j^{(1)} = \frac{1}{\omega_j^{(1)}} [(1 - \alpha_j)\omega_{j-1}\mathbf{P}_{j-1} + \alpha_j\omega_j\mathbf{P}_j], & j = i-p+1, i-p+2, \dots, i, \\ \mathbf{P}_j^{(1)} = \mathbf{P}_{j-1}, & j = i+1, i+2, \dots, n+1. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

NURBS曲线的性质

控制顶点 $\mathbf{P}_j^{(1)}$ 与权因子 $\omega_j^{(1)}$ 采用如下算法进行计算

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_j^{(1)} = \omega_j, & j = 0, 1, \dots, i-p, \\ \omega_j^{(1)} = (1 - \alpha_j)\omega_{j-1} + \alpha_j\omega_j, & j = i-p+1, i-p+2, \dots, i, \\ \alpha_j = \frac{t^* - t_j}{t_{j+p} - t_j}, & \\ \omega_j^{(1)} = \omega_{j-1}, & j = i+1, i+2, \dots, n+1. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{P}_j^{(1)} = \mathbf{P}_j, & j = 0, 1, \dots, i-p, \\ \mathbf{P}_j^{(1)} = \frac{1}{\omega_j^{(1)}} [(1 - \alpha_j)\omega_{j-1}\mathbf{P}_{j-1} + \alpha_j\omega_j\mathbf{P}_j], & j = i-p+1, i-p+2, \dots, i, \\ \mathbf{P}_j^{(1)} = \mathbf{P}_{j-1}, & j = i+1, i+2, \dots, n+1. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

如果重复 k 次插入同一个节点 $t^* \in [t_i, t_{i+1})$, 可以将如上算法推广.

NURBS曲线的性质

(10) 单个权因子的极限性质. 在控制顶点 \mathbf{P}_i 的影响范围 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 内,

NURBS曲线的性质

- (10) 单个权因子的极限性质. 在控制顶点 \mathbf{P}_i 的影响范围 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 内, 若其对应的权因子 ω_i 趋于无穷,

NURBS曲线的性质

- (10) 单个权因子的极限性质. 在控制顶点 \mathbf{P}_i 的影响范围 $[t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}]$ 内, 若其对应的权因子 ω_i 趋于无穷, 则

$$\lim_{\omega_i \rightarrow +\infty} \mathbf{R}(t) = \mathbf{P}_i, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+p+1}) \cap [t_p, t_{n+1}].$$

第五章 NURBS曲线曲面

- 1 有理Bézier曲线
- 2 有理Bézier曲面
- 3 **NURBS曲线**
- 4 **NURBS曲面**

$p \times q$ 次有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(u)(i = 0, 1, \cdots, m), N_{j,q}(v)(j = 0, 1, \cdots, n)$ 为分别定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{m+p+1}\},$$

$$\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \cdots, v_{n+q+1}\},$$

上的 p 次与 q 次B样条基函数.

$p \times q$ 次有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(u)(i = 0, 1, \dots, m), N_{j,q}(v)(j = 0, 1, \dots, n)$ 为分别定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p+1}\},$$

$$\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q+1}\},$$

上的 p 次与 q 次B样条基函数. 称分片有理多项式函数

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $p \times q$ 次有理B样条基函数.

$p \times q$ 次有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(u)(i = 0, 1, \dots, m), N_{j,q}(v)(j = 0, 1, \dots, n)$ 为分别定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p+1}\},$$

$$\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q+1}\},$$

上的 p 次与 q 次B样条基函数. 称分片有理多项式函数

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $p \times q$ 次有理B样条基函数. $\omega_{i,j} \geq 0$ 称为权因子. 为了防止分母为零, 一般设 $\omega_{0,0} > 0, \omega_{m,0} > 0, \omega_{0,n} > 0, \omega_{m,n} > 0$.

$p \times q$ 次有理B样条基函数

设 $N_{i,p}(u)(i = 0, 1, \dots, m), N_{j,q}(v)(j = 0, 1, \dots, n)$ 为分别定义在节点向量

$$\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p+1}\},$$

$$\mathbf{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q+1}\},$$

上的 p 次与 q 次B样条基函数. 称分片有理多项式函数

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

为 $p \times q$ 次有理B样条基函数. $\omega_{i,j} \geq 0$ 称为权因子. 为了防止分母为零, 一般设 $\omega_{0,0} > 0, \omega_{m,0} > 0, \omega_{0,n} > 0, \omega_{m,n} > 0$.

显然, 当所有权因子都相等且不为零时, $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 就退化为张量积型B样条基函数 $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$.

NURBS曲面的定义

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad (4.1)$$

为 $p \times q$ 次NURBS曲面,

NURBS曲面的定义

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad (4.1)$$

为 $p \times q$ 次NURBS曲面, 其中参数域为 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 为 $p \times q$ 次有理B样条基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, $\omega_{i,j} \geq 0$ 为权因子, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$.

NURBS曲面的定义

定义

称有理多项式参数曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j} R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}, \quad (4.1)$$

为 $p \times q$ 次NURBS曲面, 其中参数域为 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 为 $p \times q$ 次有理B样条基函数, 空间向量 $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 称为控制顶点, $\omega_{i,j} \geq 0$ 为权因子, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$. 依次用直线段连接同行同列相邻两个控制顶点所得的 $m \times n$ 边折线网格称为控制网格.

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_{i,j}^{\omega} = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j}), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_{i,j}^{\omega} = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j}), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

则 $p \times q$ 次张量积型B样条曲面

$$\mathbf{R}^{\omega}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^{\omega} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v), \quad (u, v) \in [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}], \quad (4.2)$$

为NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的齐次坐标表示形式,

中心投影变换

定义控制顶点的齐次坐标表示

$$\mathbf{P}_{i,j}^{\omega} = (\omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}, \omega_{i,j}), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

则 $p \times q$ 次张量积型B样条曲面

$$\mathbf{R}^{\omega}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{i,j}^{\omega} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v), \quad (u, v) \in [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}], \quad (4.2)$$

为NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 的齐次坐标表示形式, 满足

$$\mathcal{H}[\mathbf{R}^{\omega}(u, v)] = \mathbf{R}(u, v).$$

NURBS曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $p \times q$ 次有理B样条基函数在参数域 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上具有单位分解性可得.

NURBS曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $p \times q$ 次有理B样条基函数在参数域 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上具有单位分解性可得.
- (2) **凸包性质:** NURBS曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.

NURBS曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $p \times q$ 次有理B样条基函数在参数域 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上具有单位分解性可得.
- (2) **凸包性质:** NURBS曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲面退化为张量积型B样条曲面.

NURBS曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $p \times q$ 次有理B样条基函数在参数域 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上具有单位分解性可得.
- (2) **凸包性质:** NURBS曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲面退化为张量积型B样条曲面.
- (4) **分段有理多项式参数曲面性质:** NURBS曲面在参数域的每个胞腔 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上是关于参数 u, v 的 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v) = \frac{\sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \omega_{k,l} \mathbf{P}_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)}{\sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \omega_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)}.$$

NURBS曲面的性质

- (1) **几何不变性与仿射不变性:** 由 $p \times q$ 次有理B样条基函数在参数域 $[u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上具有单位分解性可得.
- (2) **凸包性质:** NURBS曲面落在其所有控制顶点构成的凸包内.
- (3) **退化性质:** 当所有权因子都相同且不为零时, NURBS曲面退化为张量积型B样条曲面.
- (4) **分段有理多项式参数曲面性质:** NURBS曲面在参数域的每个胞腔 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上是关于参数 u, v 的 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v) = \frac{\sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \omega_{k,l} \mathbf{P}_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)}{\sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \omega_{k,l} N_{k,p}(u) N_{l,q}(v)}.$$

这表明NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 为分片 $p \times q$ 次有理多项式参数曲面.

NURBS曲面的性质

- (5) **强凸包性质**: 由于在区间 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上, NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 表示为 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v).$$

NURBS曲面的性质

- (5) **强凸包性质**: 由于在区间 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上, NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 表示为 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v).$$

基函数 $R_{k,l}^{p,q}(u, v) (k = i - p, \dots, i, l = j - q, \dots, j)$ 在 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上具有单位分解性与非负性,

NURBS曲面的性质

- (5) **强凸包性质:** 由于在区间 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上, NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 表示为 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v).$$

基函数 $R_{k,l}^{p,q}(u, v)$ ($k = i - p, \dots, i, l = j - q, \dots, j$) 在 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上具有**单位分解性**与**非负性**, 从而此片曲面上的每一点 $\mathbf{R}(u, v)$ 都是这 $(p+1) \times (q+1)$ 个控制顶点 $\mathbf{P}_{k,l}$ ($k = i - p, \dots, i, l = j - q, \dots, j$) 的凸组合,

NURBS曲面的性质

- (5) **强凸包性质**: 由于在区间 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上, NURBS曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 表示为 $p \times q$ 次有理多项式曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \mathbf{P}_{k,l} R_{k,l}^{p,q}(u, v).$$

基函数 $R_{k,l}^{p,q}(u, v)$ ($k = i - p, \dots, i, l = j - q, \dots, j$) 在 $[u_i, u_{i+1}) \times [v_j, v_{j+1})$ 上具有**单位分解性与非负性**, 从而此片曲面上的每一点 $\mathbf{R}(u, v)$ 都是这 $(p+1) \times (q+1)$ 个控制顶点 $\mathbf{P}_{k,l}$ ($k = i - p, \dots, i, l = j - q, \dots, j$) 的凸组合, 从而落在它们所构成的凸包中, 这就是NURBS曲面的**强凸包性**.

NURBS曲面的性质

(6) **局部调整性质**: 由于 $p \times q$ 次B样条基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u,v)$ 的局部支集为 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$,

NURBS曲面的性质

- (6) **局部调整性质**: 由于 $p \times q$ 次B样条基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 的局部支集为 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$, 因此控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 及其相应的权因子 $\omega_{i,j}$ 只对区域 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上定义的NURBS曲面有贡献.

NURBS曲面的性质

- (6) **局部调整性质**: 由于 $p \times q$ 次B样条基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 的局部支集为 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$, 因此控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 及其相应的权因子 $\omega_{i,j}$ 只对区域 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上定义的NURBS曲面有贡献. 换句话说, 调整控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 或权因子 $\omega_{i,j}$, 只影响NURBS曲面在 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上相应的曲面片, 而不影响其余部分曲面.

NURBS曲面的性质

- (6) **局部调整性质**: 由于 $p \times q$ 次B样条基函数 $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ 的局部支集为 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$, 因此控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 及其相应的权因子 $\omega_{i,j}$ 只对区域 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上定义的NURBS曲面有贡献. 换句话说, 调整控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 或权因子 $\omega_{i,j}$, 只影响NURBS曲面在 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 上相应的曲面片, 而不影响其余部分曲面.
- (7) **边界性质**: NURBS曲面的四条边界线是四条NURBS曲线, 它们的控制顶点和权因子分别由相关的部分控制顶点和权因子线性组合而成.

实例：双三次NURBS曲面的边界性质

例

利用节点向量

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

控制顶点为与权因子定义一片双三次NURBS曲面,

实例：双三次NURBS曲面的边界性质

例

利用节点向量

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

控制顶点为与权因子定义一片双三次NURBS曲面, 其边界NURBS曲线是由控制网格中相应的控制顶点及其权因子的线性组合所确定.

实例：双三次NURBS曲面的边界性质

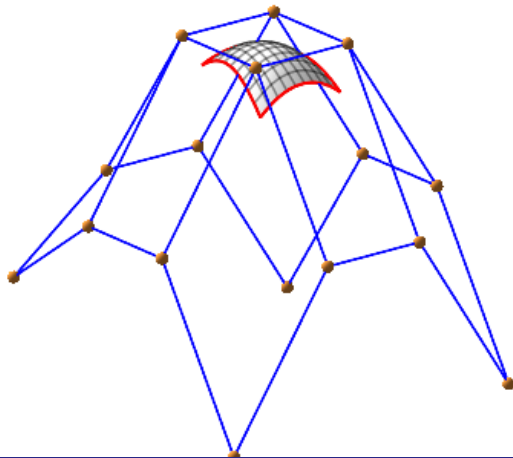
例

利用节点向量

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

控制顶点为与权因子定义一片双三次NURBS曲面, 其边界NURBS曲线是由控制网格中相应的控制顶点及其权因子的线性组合所确定. 由于曲面的参数域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 因此此NURBS曲面本质上是一片有理多项式参数曲面.

实例：双三次NURBS曲面的边界性质



NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

- (a) **NURBS**曲面的连续阶性质. 当 u 方向的节点 u_k 为 p_k 重, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u, v^*)$ 在 $u = u_k$ 处连续阶为 $p - p_k$.

NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

- (a) **NURBS曲面的连续阶性质.** 当 u 方向的节点 u_k 为 p_k 重, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u, v^*)$ 在 $u = u_k$ 处连续阶为 $p - p_k$. 当 v 方向的某节点 v_l 的重数为 q_l 时, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u^*, v)$ 在 $v = v_l$ 处的连续阶为 $q - q_l$.

NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

- (a) **NURBS曲面的连续阶性质.** 当 u 方向的节点 u_k 为 p_k 重, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u, v^*)$ 在 $u = u_k$ 处连续阶为 $p - p_k$. 当 v 方向的某节点 v_l 的重数为 q_l 时, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u^*, v)$ 在 $v = v_l$ 处的连续阶为 $q - q_l$.
- (b) **NURBS曲面的插值性质.** 当节点向量 \mathbf{U} 中的内节点 u_i 为 p 重(或当 u_i 为边界节点时为 $p + 1$ 重), 且节点向量 \mathbf{V} 中的内节点 v_j 为 q 重时,

NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

- (a) **NURBS曲面的连续阶性质.** 当 u 方向的节点 u_k 为 p_k 重, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u, v^*)$ 在 $u = u_k$ 处连续阶为 $p - p_k$. 当 v 方向的某节点 v_l 的重数为 q_l 时, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u^*, v)$ 在 $v = v_l$ 处的连续阶为 $q - q_l$.
- (b) **NURBS曲面的插值性质.** 当节点向量 \mathbf{U} 中的内节点 u_i 为 p 重(或当 u_i 为边界节点时为 $p + 1$ 重), 且节点向量 \mathbf{V} 中的内节点 v_j 为 q 重时, 设 $\omega_{i-1, j-1} \neq 0$, 只有 $p \times q$ 次有理B样条基函数 $R_{i-1, j-1}^{p, q}(u, v)$ 在 (u_i, v_j) 取值为1, 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0.

NURBS曲面的性质

(8) 重节点性质:

- (a) **NURBS曲面的连续阶性质.** 当 u 方向的节点 u_k 为 p_k 重, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u, v^*)$ 在 $u = u_k$ 处连续阶为 $p - p_k$. 当 v 方向的某节点 v_l 的重数为 q_l 时, NURBS曲面的等参线 $\mathbf{R}(u^*, v)$ 在 $v = v_l$ 处的连续阶为 $q - q_l$.
- (b) **NURBS曲面的插值性质.** 当节点向量 \mathbf{U} 中的内节点 u_i 为 p 重(或当 u_i 为边界节点时为 $p + 1$ 重), 且节点向量 \mathbf{V} 中的内节点 v_j 为 q 重时, 设 $\omega_{i-1, j-1} \neq 0$, 只有 $p \times q$ 次有理B样条基函数 $R_{i-1, j-1}^{p, q}(u, v)$ 在 (u_i, v_j) 取值为1, 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0. 这说明NURBS曲面插值于该基函数对应的控制顶点 $\mathbf{P}_{i-1, j-1}$, 且满足 $\mathbf{R}(u_i, v_j) = \mathbf{P}_{i-1, j-1}$.

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p + 1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q + 1$ 时,

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p + 1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q + 1$ 时, 只有一个定义在相应节点向量上的 $p \times q$ 次有理B样条基函数在 (u_i, v_j) 取值为1(设此基函数对应的权因子不为零), 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0.

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p + 1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q + 1$ 时, 只有一个定义在相应节点向量上的 $p \times q$ 次有理B样条基函数在 (u_i, v_j) 取值为1(设此基函数对应的权因子不为零), 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0. 这说明, NURBS曲面插值于此基函数对应的控制顶点, 它也是控制网格的角点.

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p + 1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q + 1$ 时, 只有一个定义在相应节点向量上的 $p \times q$ 次有理B样条基函数在 (u_i, v_j) 取值为1(设此基函数对应的权因子不为零), 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0. 这说明, NURBS曲面插值于此基函数对应的控制顶点, 它也是控制网格的角点.

当节点向量 \mathbf{U}, \mathbf{V} 的每一个端点节点都分别为 $p + 1, q + 1$ 重时,

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p + 1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q + 1$ 时, 只有一个定义在相应节点向量上的 $p \times q$ 次有理B样条基函数在 (u_i, v_j) 取值为1(设此基函数对应的权因子不为零), 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0. 这说明, NURBS曲面插值于此基函数对应的控制顶点, 它也是控制网格的角点.

当节点向量 \mathbf{U}, \mathbf{V} 的每一个端点节点都分别为 $p + 1, q + 1$ 重时, NURBS曲面具有角点插值性, 插值于它控制网格的四个角点

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u_0, v_0) &= \mathbf{P}_{0,0}, & \mathbf{P}(u_0, v_{n+1}) &= \mathbf{P}_{0,n}, \\ \mathbf{P}(u_{m+1}, v_0) &= \mathbf{P}_{m,0}, & \mathbf{P}(u_{m+1}, v_{n+1}) &= \mathbf{P}_{m,n}, \end{aligned}$$

NURBS曲面的性质

(b)续 **NURBS曲面的插值性质**. 当节点向量 \mathbf{U} 中的端点节点 u_i 的重数为 $p+1$, 而且节点向量 \mathbf{V} 中的端点节点 v_j 的重数为 $q+1$ 时, 只有一个定义在相应节点向量上的 $p \times q$ 次有理B样条基函数在 (u_i, v_j) 取值为1(设此基函数对应的权因子不为零), 其余所有基函数在 (u_i, v_j) 取值都为0. 这说明, **NURBS曲面插值于此基函数对应的控制顶点**, 它也是控制网格的角点.

当节点向量 \mathbf{U}, \mathbf{V} 的每一个端点节点都分别为 $p+1, q+1$ 重时, NURBS曲面具有**角点插值性**, 插值于它控制网格的四个角点

$$\mathbf{R}(u_0, v_0) = \mathbf{P}_{0,0}, \quad \mathbf{P}(u_0, v_{n+1}) = \mathbf{P}_{0,n},$$

$$\mathbf{P}(u_{m+1}, v_0) = \mathbf{P}_{m,0}, \quad \mathbf{P}(u_{m+1}, v_{n+1}) = \mathbf{P}_{m,n},$$

特别地, 当 \mathbf{U}, \mathbf{V} 都为准均匀节点向量时, NURBS曲面插值于它控制网格的四个角点, 且其四条边界曲线恰是由控制网格四边上的控制顶点与其权因子所定义的准均匀 p 次或 q 次NURBS曲线.

NURBS曲面的性质

(c) **NURBS曲面的退化性质**. 由节点向量

$$\mathbf{U} = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1\text{重}}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1\text{重}}, \quad \mathbf{V} = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{q+1\text{重}}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{q+1\text{重}}$$

定义的 $p \times q$ 次NURBS曲面退化为 $p \times q$ 次有理Bézier曲面.

NURBS曲面的性质

(c) **NURBS曲面的退化性质**. 由节点向量

$$\mathbf{U} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1\text{重}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1\text{重}}\}, \quad \mathbf{V} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1\text{重}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1\text{重}}\}$$

定义的 $p \times q$ 次**NURBS曲面**退化为 $p \times q$ 次**有理Bézier曲面**.

当内部节点出现(如下重节点为端点节点时其重数要求为 $p+1$ 或 $q+1$)

$$\{u_{i-1}, \underbrace{u_i, \dots, u_i}_{p\text{重}}, \underbrace{u_{i+1}, \dots, u_{i+1}}_{p\text{重}}, u_{i+2}\}, \quad \{v_{j-1}, \underbrace{v_j, \dots, v_j}_{q\text{重}}, \underbrace{v_{j+1}, \dots, v_{j+1}}_{q\text{重}}, v_{j+2}\}$$

时,

NURBS曲面的性质

(c) **NURBS曲面的退化性质**. 由节点向量

$$\mathbf{U} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1\text{重}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1\text{重}}\}, \quad \mathbf{V} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1\text{重}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1\text{重}}\}$$

定义的 $p \times q$ 次**NURBS曲面**退化为 $p \times q$ 次有理**Bézier曲面**.

当内部节点出现(如下重节点为端点节点时其重数要求为 $p+1$ 或 $q+1$)

$$\{u_{i-1}, \underbrace{u_i, \dots, u_i}_{p\text{重}}, \underbrace{u_{i+1}, \dots, u_{i+1}}_{p\text{重}}, u_{i+2}\}, \quad \{v_{j-1}, \underbrace{v_j, \dots, v_j}_{q\text{重}}, \underbrace{v_{j+1}, \dots, v_{j+1}}_{q\text{重}}, v_{j+2}\}$$

时, 定义在胞腔 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ 上的 $p \times q$ 次**NURBS曲面**(经参数变换后)退化为 $p \times q$ 次有理**Bézier曲面**.

NURBS曲面的性质

- (9) **de Boor算法**: 对 $p \times q$ 次NURBS曲面, 借助其齐次坐标形式的de Boor算法, 对参数 $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, 计算曲面上一点 $\mathbf{P}(u, v)$ 的de Boor算法, 在此不做赘述.

NURBS曲面的性质

- (9) **de Boor算法**: 对 $p \times q$ 次NURBS曲面, 借助其齐次坐标形式的**de Boor算法**, 对参数 $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, 计算曲面上一点 $\mathbf{P}(u, v)$ 的**de Boor算法**, 在此不做赘述.
- (10) **节点插入算法**. 参考**B样条曲面与NURBS曲线**的节点插入算法, **NURBS曲面**的节点插入算法可类似推出, 在此不做赘述.

NURBS曲面的性质

- (9) **de Boor算法**: 对 $p \times q$ 次NURBS曲面, 借助其齐次坐标形式的de Boor算法, 对参数 $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, 计算曲面上一点 $\mathbf{P}(u, v)$ 的de Boor算法, 在此不做赘述.
- (10) **节点插入算法**. 参考B样条曲面与NURBS曲线的节点插入算法, NURBS曲面的节点插入算法可类似推出, 在此不做赘述.
- (11) **单个权因子的极限性质**. 在控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 的影响范围 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 内, 其对应的权因子 $\omega_{i,j}$ 趋于无穷,

NURBS曲面的性质

- (9) **de Boor算法**: 对 $p \times q$ 次NURBS曲面, 借助其齐次坐标形式的de Boor算法, 对参数 $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1}) \subset [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$, 计算曲面上一点 $\mathbf{P}(u, v)$ 的de Boor算法, 在此不做赘述.
- (10) **节点插入算法**. 参考B样条曲面与NURBS曲线的节点插入算法, NURBS曲面的节点插入算法可类似推出, 在此不做赘述.
- (11) **单个权因子的极限性质**. 在控制顶点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 的影响范围 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1}) \cap [u_p, u_{m+1}] \times [v_q, v_{n+1}]$ 内, 其对应的权因子 $\omega_{i,j}$ 趋于无穷, 则

$$\lim_{\omega_{i,j} \rightarrow +\infty} \mathbf{R}(u, v) = \mathbf{P}_{i,j}.$$