单位分解定理：设M是满足第二可数公理的m维光滑流形，则对于M的任意一个开覆盖Σ，必有Σ的一个局部有限的加细$\Sigma'=\{U_\alpha|\alpha\in I\}$，以及一族函数$f_\alpha\in C^\infty(M)$，满足左侧条件

(1) $\forall\alpha\in I$, $0\le f_\alpha\le 1$;

(2) $\forall\alpha\in I$, $\mathrm{supp} f_\alpha\subseteq U_\alpha$;

(3) $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha=1$.

注：$\mathrm{supp} f_\alpha=\overline{\{p\in M|f_\alpha(p)\neq 0\}}$

满足定理中条件的光滑函数族$\{f_\alpha\}$称为从属于Σ的一个单位分解

1. 证明：R^{n+1}中单位球面$S^n(1)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}|\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}$是光滑流形

证明：令$N=(0,\cdots,0,1)\in R^{n+1}$，$S=(0,\cdots,0,-1)\in R^{n+1}$，记$U=S^n(1)\setminus\{N\}$，$V=S^n(1)\setminus\{S\}$，则$\{U,V\}$构成$S^n(1)$的一个开覆盖，取坐标卡$(U,\varphi)$，$(V,\psi)$，对于$S^n(1)$上的任一点$x=(x^1,\cdots,x^{n+1})$，连接$x$与$N(S)$点，与超平面$x^{n+1}=0$的交点记为$\varphi(x)(\psi(x))$。

下证两坐标卡C^∞-相容。由$\varphi(x)$，$\psi(x)$的定义，有

$\varphi(x)=\left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right)$，$\psi(x)=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right)$。由于$x\in S^n(1)$，故$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1$

注意到，$|\varphi(x)|\cdot|\psi(x)|=\frac{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}{1-(x^{n+1})^2}=1$。故

$\psi\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^n)=\left(\frac{x^1}{\sum_{i=1}^n(x^i)^2},\cdots,\frac{x^n}{\sum_{i=1}^n(x^i)^2}\right)$；$\varphi\circ\psi^{-1}(x^1,\cdots,x^n)=\left(\frac{x^1}{\sum_{i=1}^n(x^i)^2},\cdots,\frac{x^n}{\sum_{i=1}^n(x^i)^2}\right)$

故$\psi\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\psi^{-1}$都有C^∞光滑性，故$S^n(1)$是光滑流形。

2. 证明淹没是开映射。

淹没：设M，N分别为m维，n维光滑流形，$m>n$，若光滑映射$f:M\to N$在点$p\in M$处的秩等于N的维数，则称映射f在p点为淹没。

证明：由映射秩定理（定理1.3），存在M包含点p的局部坐标系$(U,\varphi;x^i)$和N包含点$f(p)$的局部坐标系$(V,\psi;y^j)$，使得$f(U)\subseteq V$，$\varphi(p)=(0,\cdots,0)\in R^m$，$\psi(f(p))=(0,\cdots,0)\in R^n$，且$(y^1,\cdots,y^n)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n)$

即典型淹没，记$\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$。因此，对于$\varphi(U)$中的开集$A$，$\hat{f}(A)$是$A$在$M$的$n$维子空间上的投影，故仍是开集。因此$\hat{f}$是开映射，从而淹没是开映射

3. 定理2.8. 设$\dim V=n$. (1)若$r>n$，则$\Lambda^r(V)=\{0\}$；(2)若$n\ge r>0$，则$\dim\Lambda^r(V)=\binom{n}{r}$

证明：(1) $\Lambda^r(V)$的基可以表示为$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$，其中$i_k=1,\cdots,n$。由于$r>n$，故必存在$s,t$，使$i_s=i_t$。由外积的反对称性知，$e_{i_s}\wedge e_{i_t}=0$，故$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0$，即$\Lambda^r(V)=\{0\}$

(2) 只需证明：$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ $(1\le i_1<\cdots<i_r\le n)$线性无关，则可构成$\Lambda^r(V)$的基