Stokes公式：设M是m维定向光滑流形，ω是M上具有紧致支集的m-1次外微分式，则 $\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega$. 特别地，若 $\partial M=\varphi$，则左侧积分值为0

Newton-Leibniz公式：设 $I=[a,b]$，则 $\int_I df=f(b)-f(a)$

Green公式：$\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

Gauss公式：$\int_{\partial D}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

Stokes公式：$\int_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

15. 什么是黎曼度量？证明：对每一个满足第二可数公理的m维光滑流形M，M上都存在黎曼度量.

黎曼度量：对m维光滑流形M上的每一点p，黎曼度量 $g(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个对称、正定的二阶协变张量.

黎曼度量的存在性：由于M满足第二可数公理，故可取M的一个局部有限的开覆盖 $\{(U_\alpha;x_\alpha^i)|\alpha\in I\}$，由单位分解定理，存在M上的光滑函数族 $\{f_\alpha\}$，s.t. $\forall\alpha\in I$，$\mathrm{supp}f_\alpha\subseteq U_\alpha$，$0\le f_\alpha\le 1$，$\sum_{\alpha\in I}f_\alpha=1$. 在 U_α 上定义黎曼度量 $g^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^m dx_\alpha^i\otimes dx_\alpha^i$. $\forall p\in M$，定义 $g_\alpha(p)=\begin{cases} f_\alpha(p)\cdot g^{(\alpha)}(p) & p\in U_\alpha \\ 0 & p\notin U_\alpha \end{cases}$

令 $g=\sum_\alpha g_\alpha$. 由 g_α 的定义知，g是二阶对称协变张量场. 下证g正定.

由于 $\sum_\alpha f_\alpha=1$. 则 $\forall p\in M$，必存在 $\beta\in I$，s.t. $f_\beta(p)>0$. 则 $\forall v\in T_pM$，

$g(p)(v,v)=\cancel{\sum_\alpha g^\alpha(p)(v,v)}\sum_\alpha f_\alpha(p)\cdot g^\alpha(p)(v,v)\ge f_\beta(p)\cdot g^\beta(p)(v,v)\ge 0$.

当 $g(p)(v,v)=0$ 时，由于 $f_\beta(p)>0$，故 $g^\beta(p)(v,v)=0$，即 $v=0$. 正定性得证.

故g是M上的黎曼度量.

16. 求 R^{n+1} 中单位球 $S^n(1)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}|\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}$ 上黎曼度量的局部坐标表达式.

解. 设 $N=(0,\cdots,0,1)\in R^{n+1}$，$S=(0,\cdots,0,-1)\in R^{n+1}$，令 $U=S^n(1)\setminus\{N\}$，$V=S^n(1)\setminus\{S\}$.