# 第四章 线性方程组的古典迭代解法

## —Jacobi, G-S, SOR 迭代法

杜磊
dulei@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院
创新园大厦 B1207

2019 年 10 月 15 日

# 内容提要

1 单步线性定常迭代法

2 收敛性理论

3 收敛速度

4 超松弛迭代法

# 迭代法

构造迭代向量序列 $\{x_k\}$, 使其收敛到方程组 $Ax = b$ 的精确解 $x_*$.

1. 如何构造迭代序列?
2. 构造的迭代序列是否收敛？在什么条件下收敛？
3. 如果收敛, 收敛速度如何？
4. 还需讨论近似解的误差估计和迭代过程出现的中断等问题.

# 问题

线性方程组的一般形式为:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

# 矩阵分裂

将系数矩阵 $A$ 拆分成多个矩阵，比如有以下分裂方式 $(A = D - L - U)$:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{44}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{11} & & & & \\
 & a_{22} & & & \\
 & & a_{33} & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$$
-
\begin{bmatrix}
0 & & & & \\
-a_{21} & 0 & & & \\
-a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
-a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\
 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\
 & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & 0 & -a_{n-1,n} \\
 & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

Jacobi 迭代法按下列方式构造迭代向量序列:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

对应分量形式为:

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big) / a_{ii},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Jacobi 迭代格式也可改写为:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= D^{-1}\Big((D-A)x^{(k)} + b\Big) \\ &= x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}. \end{aligned}$$

# Jacobi 迭代算法

**Algorithm 1** Jacobi 迭代算法

```
设定初始向量 $x^{(0)}$;
while 未收敛 do
    for $i = 1 : n$ do
        $x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$;
    end for
end while
```

# Gauss-Seidel 迭代法

迭代法按下列方式构造迭代向量序列:

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b,\ k=0,1,2,\ldots$$

对应分量形式为:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii},\ k=0,1,2,\ldots.$$

# Gauss-Seidel 迭代算法

**Algorithm 2** Gauss-Seidel 迭代算法

```
设定初始向量 x^(0);
while 未收敛 do
    for i = 1 : n do
        x_i^(k+1) = ( b_i − Σ_{j=1}^{i−1} a_ij x_j^(k+1) − Σ_{j=i+1}^{n} a_ij x_j^(k) ) / a_ii;
    end for
end while
```

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii};$$

# 单步线性定常迭代法

称形如:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g \tag{1}$$

的迭代算法称为单步线性定常迭代法, 其中 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 叫做迭代矩阵, $g \in \mathbb{R}^n$ 叫做常数项, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ 叫做初始向量.

如果对任意的初始向量由 (1) 产生的向量序列 $\{x^{(k)}\}$(称为迭代序列) 都有极限, 则称该迭代法是收敛的; 否则, 称它是不收敛的或发散的.

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(*)}$, 则由式 (1) 可得

$$x^{(*)} = Mx^{(*)} + g.$$

若此方程组与 $Ax = b$ 等价, 即存在非奇异矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$$G(I - M) = A, \quad Gg = b.$$

当上式成立时, 称迭代法 (1) 与线性方程组 $Ax = b$ 是相容的.

# 收敛的充分必要条件

设 $x^{(*)}$ 是 $Ax=b$ 的解, $x_k$ 是由迭代法 $x^{(k)}=Mx^{(k-1)}+g$ 产生. 定义

$$y^{(k)}=x^{(k)}-x^{(*)},$$

并称之为 $x^{(k)}$ 的误差向量.

对于误差向量有如下关系:

$$y^{(k+1)}=My^{(k)},\ k=0,1,\cdots.$$

进一步可得:

$$y^{(k)}=M^k y^{(0)}.$$

# 收敛的充分必要条件

## 引理

迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} M^k = 0.$$

# 收敛的充分必要条件

## 引理

迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} M^k = 0.$$

## 定理

解方程组 $Ax = b$ 的单步线性定常迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 收敛的充分必要条件是其迭代矩阵 $M$ 的谱半径小于 $1$, 即

$$\rho(M) < 1.$$

# 收敛的充分必要条件

**例**

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

计算得:

- $\rho(M_1^{\mathrm{J}}) = 1.233 \times 10^{-5}$, $\rho(M_1^{\mathrm{G-S}}) = 2$;
- $\rho(M_2^{\mathrm{J}}) = 1.18$, $\rho(M_2^{\mathrm{G-S}}) = 0.5$.

# 收敛的充分条件及误差估计

## 定理

若迭代矩阵 $M$ 的范数 $\|M\| = q < 1$, 则迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 所产生的近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 $x^{(*)}$ 的误差有如下估计式:

$$\left\| x^{(k)} - x^{(*)} \right\| \leq \frac{q^k}{1-q} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|.$$

# 收敛的充分条件及误差估计

**定理**

若迭代矩阵 $M$ 的范数 $\|M\| = q < 1$, 则迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 所产生的近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 $x^{(*)}$ 的误差有如下估计式:

$$\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\| \leq \frac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

**定理**

若迭代矩阵 $M$ 的范数 $\|M\| = q < 1$, 则迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$ 所产生的近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 $x^{(*)}$ 的误差有如下估计式:

$$\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

# Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法的收敛性

## 定理

设 $B=[b_{ij}]$ 和 $L_1$ 分别是 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法的迭代矩阵. 若 $\|B\|_\infty<1$, 则 $\|L_1\|_\infty<1$, 而且由 G-S 迭代法产生的近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 $x^{(*)}$ 的误差有如下的估计式:

$$\left\|x^{(k)}-x^{(*)}\right\|_\infty \leq \frac{\mu^k}{1-\mu}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty,$$

其中

$$\mu=\max_i\left(\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|/(1-\sum_{j=1}^{i-1}|b_{ij}|)\right)\leq\|B\|_\infty<1.$$

# Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法的收敛性

## 定理

设 $B=[b_{ij}]$ 和 $L_1$ 分别是 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法的迭代矩阵. 若 $\|B\|_1<1$, 则 $\rho(L_1)<1$, 而且由 G-S 迭代法产生的近似解 $x^{(k)}$ 与准确解 $x^{(*)}$ 的误差有如下的估计式:

$$\left\|x^{(k)}-x^{(*)}\right\|_1 \leq \frac{\tilde{\mu}^k}{(1-\tilde{\mu})(1-s)}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_1,$$

其中

$$s=\max_j \sum_{i=j+1}^{n}|b_{ij}|,\ \ \tilde{\mu}=\max_j\left(\sum_{i=1}^{j-1}|b_{ij}|/(1-\sum_{i=j+1}^{n}|b_{ij}|)\right)\leq\|B\|_1<1.$$

# Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法的收敛性

**定理**

若线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A$ 对称, 而且其对角元 $a_{ii} > 0\,(i = 1, \cdots, n)$, 则 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是 $A$ 和 $2D - A$ 都正定.

# Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法的收敛性

**定理**

若线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A$ 对称，而且其对角元 $a_{ii} > 0\,(i = 1, \cdots, n)$，则 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是 $A$ 和 $2D - A$ 都正定.

**定理**

若线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A$ 对称正定的，则 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

# Jacobi 迭代法与 G-S 迭代法的收敛性

**定理**

若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 $A$ 对称，而且其对角元 $a_{ii}>0\,(i=1,\cdots,n)$，则 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是 $A$ 和 $2D-A$ 都正定.

**定理**

若线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 $A$ 对称正定的，则 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

**定义**

设矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 若对所有的 $i\ (1\le i\le n)$ 都有

$$|a_{ii}|\ge\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|, \tag{2}$$

并且 (2) 式中至少对一个 $i$ 有严格不等号成立，则称 $A$ 是弱对角占优的；如果 (2) 式对所有 $i$ 都有严格不等号成立，则称 $A$ 是严格对角占优的.

# 可约, 不可约矩阵

## 定义

设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 如果存在 $n$ 阶排列方阵 $P$, 使得

$$PAP^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11}$ 是 $n$ 阶方阵, $A_{22}$ 是 $n-r$ 阶方阵, 则称 $A$ 是可约的 (或可分的); 反之, 如果不存在这样的排列矩阵, 则称 $A$ 是不可约的 (或不可分的).

## 可约, 不可约矩阵

### 定义

设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 如果存在 $n$ 阶排列方阵 $P$, 使得

$$PAP^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11}$ 是 $n$ 阶方阵, $A_{22}$ 是 $n-r$ 阶方阵, 则称 $A$ 是可约的 (或可分的); 反之, 如果不存在这样的排列矩阵, 则称 $A$ 是不可约的 (或不可分的).

### 定义

设 $A$ 为 $n\,(n \geq 2)$ 阶方阵, $\mathcal{W} = \{1, 2, \ldots, n\}$. 如果存在 $\mathcal{W}$ 的两个非空的子集 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{W}, \ \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \varnothing,$$

使得

$$a_{ij} = 0 \ \ (i \in \mathcal{S}, \, j \in \mathcal{T}),$$

则称 $A$ 是可约的; 否则, 则称 $A$ 是不可约的.

# 对角占优矩阵性质

## 定理

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的，则 $A$ 非奇异.

# 对角占优矩阵性质

## 定理

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的，则 $A$ 非奇异.

## 推论

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的对称矩阵，且对角元为正，则 $A$ 正定.

# 对角占优矩阵性质

**定理**

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的，则 $A$ 非奇异.

**推论**

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的对称矩阵，且对角元为正，则 $A$ 正定.

**定理**

若 $A$ 是严格对角占优或不可约对角占优的，则 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法都收敛.

# 收敛速度

考虑单步线性定常迭代法 $x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g$.

## 定义 (平均收敛速度)

定义

$$R_k(M) = \frac{-\ln \left\| M^k \right\|}{k},$$

并称其为 $k$ 次迭代的平均收敛速度.

## 定义 (渐近收敛速度)

定义

$$R_\infty(M) = \lim_{k\to\infty} R_k(M) = \lim_{k\to\infty} \frac{-\ln \left\| M^k \right\|}{k},$$

并称其为渐近收敛速度.

# 收敛速度

## 定理

设单步线性定常迭代矩阵为 $M$, 则有

$$R_\infty(M) = -\ln\rho(M).$$

# 模型问题

考虑单位正方形区域上的 Poisson 方程第一边值问题:

$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), & 0 < x, y < 1, \\
u|_\Gamma = \phi,
\end{cases}
$$

其中 $\Gamma$ 为单位正方形区域的边界.

# 松弛迭代法

已知 Gauss-Seidel 迭代法迭代格式为:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b.$$

令 $\Delta x = x^{(k+1)} - x^{(k)}$, 则有

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x.$$

松弛迭代法的迭代格式为:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega\Delta x \\ &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega(D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b), \end{aligned}$$

因为 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在, 上式可改写为

$$x^{(k+1)} = L_\omega x^{(k)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b,$$

其中迭代矩阵

$$L_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U].$$

迭代法迭代格式为: 对应分量形式为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\Big(\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} + g_i\Big),$$

其中 $\omega$ 叫做松弛因子. $\omega > 1$ 时, 相应的迭代法叫做超松弛迭代法 (SOR 迭代法); $\omega < 1$ 时, 相应的迭代法叫做低松弛迭代法; $\omega = 1$ 时, 就是 G-S 迭代法.

# 收敛性分析

**定理**

SOR 迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(L_\omega) < 1$.

**定理**

SOR 迭代法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$.

**定理**

若系数矩阵 $A$ 是严格对角占优的或不可约对角占优的，且松弛因子 $\omega \in (0, 1)$，则 SOR 迭代法收敛.

**定理**

若系数矩阵 $A$ 是实对称的正定矩阵，则当 $0 < \omega < 2$ 时，SOR 迭代法收敛.

# 最佳松弛因子

# Richardson 法

$A = M - N$, 其中 $M = I/\omega$, $N = I/\omega - A$.
Richardson 迭代格式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中参数 $\omega > 0$.

# SSOR 迭代算法

已知 SOR 迭代格式为

$$x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b,$$

若将 $L$ 和 $U$ 相交换，可得到迭代格式

$$x^{(k+1)} = (D-\omega U)^{-1}[(1-\omega)D+\omega L]x^{(k)} + \omega(D-\omega U)^{-1}b.$$

将上述迭代结合，得到下面两步迭代格式

$$\begin{cases} x^{(k+\frac{1}{2})} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b \\ x^{(k+1)} = (D-\omega U)^{-1}[(1-\omega)D+\omega L]x^{(k+\frac{1}{2})} + \omega(D-\omega U)^{-1}b \end{cases}$$

# AOR 迭代算法

矩阵分裂为 $M=\frac{1}{\omega}(D-\gamma L)$, $N=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)D+(\omega-\gamma)L+\omega U]$, 对应的迭代矩阵 $G_{\mathrm{AOR}}=(D-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-\gamma)L+\omega U]$.

- $\gamma=\omega$, AOR 即为 SOR 迭代;
- $\gamma=\omega=1$, 为 G-S 迭代;
- $\gamma=0,\omega=1$, 为 Jacobi 迭代.

# 交替方向法

设 $A = M + N$, 则交替方向法的迭代格式为

$$\begin{cases} (\alpha I + M)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - N)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + N)x^{(k+1)} = (\alpha I - M)x^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{cases}$$

# HSS 迭代算法

设 $A = H + S$, 其中 $H = \frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}, S = \frac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$, HSS 迭代格式为

$$\begin{cases} (\alpha I + H)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} = (\alpha I - H)x^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{cases}$$

# 相关文献


D.M. Young
Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type
*Trans. Amer. Math. Soc.,76(1954), 92-111.*

Y. Saad & H. A. van Der Vost
Iterative solution of linear systems in the 20th century
*J. Comput. Appl. Math., 123:1-2(2000), 1-33.*