黎曼几何初步

Introduction to Riemannian Geometry

刘西民 编

2015 年 9 月

内容简介

本书主要内容包括: 微分流形与可微映射, 微分流形上的微分, 微分流形上的积分, 联络, 曲率, 子流形等. 本书深入浅出地阐述了黎曼几何的基本概念和技巧, 强调对基本知识和基本理论的理解和掌握. 本书作为黎曼几何的入门教材, 在内容处理上力求语言简洁, 条理清楚, 层次分明, 通俗易懂, 使学生通过本教材的学习, 理解和掌握黎曼几何的基本思想和基本方法. 为巩固所学知识, 每章配备了一些难易不同的习题供读者选做.

本书可供理工科大学, 师范院校数学专业高年级学生选修课教材以及研究生黎曼几何的入门教材, 也可供数学工作者参考.

前　言

自从 Riemann 在 1854 年提出黎曼几何的概念以来, 经过 Christoffel, Bianchi 以及 Ricci 等人的完善和拓广, 成为 Einstein 创立广义相对论的数学工具. 特别是 Cartan 建立了外微分方法和活动标架法后, 黎曼几何得到了巨大的发展. 近半个多世纪来, 黎曼几何经历了从局部理论到大范围整体理论的发展过程, 现已成为内容十分丰富的一门学科. 如今黎曼几何已成为数学中十分重要的基本理论, 它对许多数学分支如拓扑学, 微分方程, 多复变函数论等以及现代物理学都有着重要应用和比较深刻的影响. 由此可见无论在理论基础还是在实际应用中, 黎曼几何都显示出它的重要性和巨大价值.

当今我国数学界，加强几何学的教学已经形成一种共识，为了使数学专业的学生以及从事数学研究和教学的工作人员具有较高的数学素养, 了解黎曼几何的基本内容和基本方法是非常必要的. 通过学习黎曼几何, 可以使学生掌握黎曼几何的基本概念和流形上分析的基本技巧, 学会张量分析和外微分的计算, 了解黎曼度量与黎曼联络的重要意义, 特别是了解黎曼流形上曲率的重要作用, 从而认识黎曼流形的结构. 为今后进一步深造或实际应用打下基础.

本书是黎曼几何的一本入门教材. 从微分流形的基本概念出发, 介绍了黎曼流形研究中的各种基本概念和技巧. 以联络的讨论为重点介绍了各种形式的曲率张量, 同时还简单介绍了子流形理论. 本书可供理工科大学, 师范院校数学系高年级学生选修课教材以及研究生黎曼几何的入门教材, 也可供数学工作者参考.

本书是编者在大连理工大学应用数学系为高年纪学生多年开设黎曼几何选修课的基础上编写而成. 本书的编写得到了科学出版社的关心和帮助, 在此谨表示衷心的感谢. 由于编者的水平所限, 书中缺点、谬误在所难免, 恳请专家, 同行和广大读者批评指正.

编者

2015 年 9 月

目录

第一章　微分流形

§1.1　微分流形的基本概念

1.1.1 **欧氏空间的映射**

流形的概念的基础是欧氏空间及其映射, 特别隐函数定理是构造子流形的重要工具.

用 $\mathbb{R}$ 表示实数域. 设

$$\mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \cdots, x^m) | x^j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m\},$$

实数 x^j 称为点 $x \in \mathbb{R}^m$ 的第 j 个坐标. $\mathbb{R}^m$ 上有典型的拓扑结构. 对 $x, y \in \mathbb{R}^m$, 令

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2}. \tag{1.1}$$

易验证, $d(x,y)$ 满足下面三个条件

(1) $d(x,y) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) 对任意的 $x, y, z \in \mathbb{R}^m$, 有 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

所以 $d(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的度量, 使 $\mathbb{R}^m$ 成为度量空间. 作为度量空间, $\mathbb{R}^m$ 有自然的拓扑结构: 以开球 $B(x,r) = \{y | y \in \mathbb{R}^m, d(x,y) < r\} (x \in \mathbb{R}^m, r > 0)$ 的并集为开集. 以 (1.1) 为度量的 m 维向量空间 $\mathbb{R}^m$ 称为 m 维欧氏空间.

设 f 是定义在开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的实函数, 如果 f 的所有直到 r 阶的偏导数都存在且连续, 则称 f 是 r 次可微的, 或称 f 是 C^r 的, 这里 r 是任意正整数. 如果 f 有任意阶的连续偏导数, 则称 f 是光滑的, 或称 f 是 C^∞ 的. 如果 f 在 U 的每一点的一个邻域内能表示成收敛的幂级数, 则称 f 是解析的, 记 f 是 C^ω 的.

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集, f 是 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射, $f: U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$, 其中 $x = (x^1, \cdots, x^m)$, $y = (y^1, \cdots, y^n)$. 用 $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 表示到第 i 个坐标的投影, 则 f 可以表示为

$$y = f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x)), \ x \in U,$$

其中 $f^i = \pi_i \circ f$, 称为 f 的第 i 个分量函数.

定义 1.1 如果 f 的每一个分量函数在点 $x \in U$(或在 U 上) 是可微的 (C^r, C^∞, C^w), 则称映射 f 在点 x(或在 U 上) 是可微的 (C^r, C^∞, C^w). 一个 C^∞ 映射也称为光滑映射.

如果 f 在 U 上可微, 则矩阵

$$\frac{\partial(f^1, \cdots, f^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{bmatrix}$$

在 U 的每一点有定义, 此矩阵的每一个元素均为 U 上的函数. 上述矩阵称为 f 的 Jacobi 矩阵, 记作 Df.

定义 1.2 设 U 和 V 都为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集. 如果映射 $f: U \to V$ 满足下列条件:

(1) f 为同胚;

(2) f 和 f^{-1} 都是 $C^r(r\geq 1)$ 映射,

则称 f 为 C^r 微分同胚, 并称 U 和 V 是 C^r 微分同胚的. 特别地, 当 $r=\infty$ 时, 称 f 为光滑同胚或微分同胚.

下面给出欧氏空间映射的一个基本定理, 其证明留给读者作为练习.

定理 1.1(反函数定理) 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, $f:U\to\mathbb{R}^m$ 是 $C^r(r\geq 1)$ 映射. 若对于点 $p\in U$, $Df(p)$ 是非奇异, 则存在 p 的一个开邻域 $W\subset U$, 使得 $f:W\to f(W)=V$ 为 C^r 微分同胚, 且若 $x\in W$, $y=f(x)$, 则 f^{-1} 在 y 的微分为

$$Df^{-1}(y)=(Df(x))^{-1},$$

其中 $(Df(x))^{-1}$ 表示 $Df(x)$ 的逆矩阵.

下面给出欧氏空间映射的隐函数定理.

定理 1.2(隐函数定理) 设 U 和 V 分别为 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 并设 $f:U\times V\to\mathbb{R}^n$ 是 $C^r(r\geq 1)$ 映射. 若对于 $x_0\in U, y_0\in V$, 映射 $y\mapsto f(x_0,y)$ 在 y_0 的微分 $D_2f(x_0,y_0)$ 非奇异, 则存在 x_0 的邻域 $U_0\subset U$ 以及唯一确定的 C^r 映射 $g:U_0\to\mathbb{R}^n$, 使得 $g(x_0)=y_0$, 且对任意的 $x\in U_0$, 有

$$f(x,g(x))=f(x_0,y_0).$$

证明 考虑映射 $F:U\times V\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$, $(x,y)\mapsto(x,f(x,y))$. 则

$$DF(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} I & 0\\ D_1f(x_0,y_0) & D_2f(x_0,y_0)\end{pmatrix},$$

其中 $D_1f(x_0,y_0)$ 是映射 $x\mapsto f(x,y_0)$ 在 x_0 的微分. 因为 $D_2f(x_0,y_0)$ 非奇异, 故 $DF(x_0,y_0)$ 非奇异. 由反函数定理, 映射 F 在 (x_0,y_0) 的充分小邻域 $U_0\times V_0$ 中存在唯一的逆映射 Φ. 记 $\Phi(x,w)=(x,h(x,w))$, 其中 h 是一 C^r 映射. 定义 $g(x)=h(x,f(x_0,y_0))$, 显然 g 是一 C^r 映射, 并且有

$$(x,f(x,g(x))=F(x,g(x))=F(x,h(x,f(x_0,y_0))=F\circ\Phi(x,f(x_0,y_0))=(x,f(x_0,y_0)),$$

故 g 即为所求. □

1.1.2 **微分流形的定义**

微分流形是 20 世纪最有代表性的概念, 流形的概念是欧氏空间的推广. 粗略地说, 流形在每一点的附近都和欧氏空间的一个开集同胚, 流形是一块块欧氏空间粘接而成的.

定义 1.3 设 M 为 Hausdorff 空间, 如果对于每一点 $p\in M$, 都存在 p 的开邻域 U, 它同胚于 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的一个开集, 则称 M 为一个 m 维拓扑流形.

设 $\varphi_U:U\to\varphi_U(U)\subset\mathbb{R}^m$ 是上面定义中的一个同胚映射. $\pi_i:\varphi_U(U)\to\mathbb{R}$ 表示到第 i 个坐标的投影. 对每一点 $q\in U$, 定义它的第 i 个坐标为 $x^i(q)=\pi_i(\varphi_U(q)), i=1,\cdots,m$. 则 $x^i=\pi_i\circ\varphi_U$ 是 U 上的实值函数, 称为第 i 个坐标函数. (U,φ_U) 称为 M 的一个坐标卡, 或坐标邻域. 此时,$(U,\varphi_U;x^i)$ 也称为点 $p\in U$ 的一个局部坐标系.

定义 1.4 设 M 是一个 m 维拓扑流形,(U,φ) 与 (V,ψ) 是 M 的两个坐标卡. 如果 $U\cap V=\emptyset$, 或者当 $U\cap V\neq\emptyset$ 时, 映射 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$ 都是 C^r 映射, 则称坐标卡 (U,φ) 与 (V,ψ) 是 C^r 相容的. $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 称为过渡函数.

定义 1.5 设 M 是一个 m 维拓扑流形, $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in I\}$ 是 M 的若干坐标卡构成的集合,I 为指标集, 如果 $\mathcal{A}$ 满足下面三个条件, 则称 $\mathcal{A}$ 为拓扑流形 M 的一个 C^r 微分结构

(1) $\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 X 的一个开覆盖;

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in I,(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^r 相容的;

(3) $\mathcal{A}$ 是极大的, 即对于 M 的任意一个坐标卡 (U,φ), 如果它和 $\mathcal{A}$ 中的每一个成员都是 C^r 相容的, 则它一定属于 $\mathcal{A}$.

定义 1.6 设 M 是 m 维拓扑流形, $\mathcal{A}$ 是 M 的一个 C^r 微分结构, 则称 $(M,\mathcal{A})$ 是一个 m 维 C^r 微分流形. 此时,$\mathcal{A}$ 中的坐标卡称为 C^r 微分流形的容许坐标卡. 特别地, C^∞ 微分结构称为光滑结构, C^∞ 微分流形称为光滑流形.

通常称 C^r 微分流形 M 的一个坐标卡开覆盖 $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i)|i\in I,\ \bigcup_{i\in I}U_i=M\}$ 为 M 的一个 C^r 坐标图册.

对于 M 的任意两个 C^r 相容的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 与 $(V,\psi;y^i)$, 若 $U\cap V\neq\emptyset$, 则称映射 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 为从 $(U,\varphi;x^i)$ 到 $(V,\psi;y^i)$ 的局部坐标变换. 它可以表示为

$$y^i=(\psi\circ\varphi^{-1})^i=y^i(x^1,\cdots,x^m),\ \ 1\le i\le m.$$

由此得到的 m 阶方阵

$$J_{x,y}=(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$$

称为局部坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵, 相应的行列式称为 Jacobi 行列式, 并记

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}=\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}).$$

由于局部坐标变换是可逆的, 易见 Jacobi 矩阵是非奇异的.

为了提供微分流形有某种分析和几何结构, 一般在微分流形的定义中, 对拓扑空间 M 附加具有可数基的要求.

下面给出一些常见的微分流形的例子.

例 1.1 $\mathbb{R}^m$ 是一个 m 维光滑流形.

例 1.2 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面 $S^m=\{(x^1,\cdots,x^{m+1})\in\mathbb{R}^{m+1}|\sum_{i=1}^{m+1}(x^i)^2=1\}$.

取 S^m 的拓扑为它在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的相对拓扑, 则 S^m 是一个具有可数基的 Hausdorff 空间. 记

$$\overline{U}_i^+=\{(x^1,\cdots,x^{m+1})|x^i>0\},$$

$$\overline{U}_i^-=\{(x^1,\cdots,x^{m+1})|x^i<0\},\ \ i=1,\cdots,m+1.$$

它们都是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的开集. 则相对开集 $U_i^\pm=\overline{U}_i^\pm\cap S^m\ (i=1,\cdots,m+1)$ 构成 S^m 的开覆盖.

如下定义 $\varphi_i^\pm:U_i^\pm\to\mathbb{R}^m$

$$\varphi_i^\pm(x_1,\cdots,x^{m+1})=(x_1,\cdots,\hat{x^i},\cdots,x^{m+1}),$$

其中 ˆ 表示去掉该坐标. 易见这些映射分别是 $U_i^\pm$ 到 $\mathbb{R}^m$ 中的开集

$$W_i=\{(x_1,\cdots,\hat{x^i},\cdots,x^{m+1})\in\mathbb{R}^m|(x^1)^2+\cdots+(\hat{x^i})^2+\cdots+(x^{m+1})^2<1\}$$

的同胚. 因此 S^m 是 m 维拓扑流形.

考虑 $\varphi_2^-\circ(\varphi_1^+)^{-1}:\varphi_1^+(U_2^-\cap U_1^+)\to\varphi_2^-(U_2^-\cap U_1^+)$.

$$\varphi_2^-\circ(\varphi_1^+)^{-1}(x^2,\cdots,x^{m+1})=\varphi_2^-([1-\sum_{i=2}^{m+1}(x^i)^2]^{\frac{1}{2}},x^2,\cdots,x^{m+1})=([1-\sum_{i=2}^{m+1}(x^i)^2]^{\frac{1}{2}},x^3,\cdots,x^{m+1}).$$

若用 $(u^1,\cdots,u^m)$ 记 U_1^+ 上点的坐标, 用 $(v^1,\cdots,v^m)$ 记 U_2^- 上点的坐标. 则 $\varphi_2^-\circ(\varphi_1^+)^{-1}$ 的坐标表达式为

$$v^1=[1-\sum_{i=1}^m(u^i)^2]^{\frac{1}{2}},\ \ v^l=u^l,l=2,\cdots,m.$$

显然, $v^i(i=1,\cdots,m)$ 是 $u^j(j=1,\cdots,m)$ 的光滑函数. 从而坐标卡 (U_1^+,φ_1^+) 和 (U_2^-,φ_2^-) 是 C^∞ 相容的. 同理可证, 坐标卡 $(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)$ 是 C^∞ 相容的, S^m 是 m 维光滑流形.

例 1.3 $\mathbb{R}^m$ 到自身的所有可逆线性变换关于复合运算构成一个群 $GL(m,\mathbb{R})$, 称为 m 阶一般线性群. $GL(m,\mathbb{R})$ 可等同所有 $m\times m$ 阶非退化实矩阵构成的乘法群, 群运算是矩阵的乘法. 由于每一个 $m\times m$ 阶实矩阵可看作 $\mathbb{R}^{m^2}$ 中的一个点, 即 $GL(m,\mathbb{R})$ 可以表示为

$$GL(m,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{m^2}|\det A\neq 0\}.$$

故 $GL(m,\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 中的开子集, 有自然诱导的微分结构, 所以 $GL(m,\mathbb{R})$ 是一个 m^2 维光滑流形.

例 1.4 **乘积流形** 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^r 微分流形. 它们的微分结构分别为 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in I\}$ 和 $\{(V_\beta,\psi_\beta)|\beta\in J\}$. 作拓扑积 $M\times N$, 显然 $\{U_\alpha\times V_\beta|\alpha\in I,\beta\in J\}$ 是拓扑空间 $M\times N$ 的开覆盖. 定义映射 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{m+n}$ 如下

$$(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q)),$$

其中 $(p,q)\in U_\alpha\times V_\beta\subset M\times N$. 则 $(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)$ 是 $M\times N$ 的坐标卡. 容易证明, 这些坐标卡都是 C^r 相容的, 因而给出了 $M\times N$ 上的 C^r 微分结构, $M\times N$ 为 $m+n$ 维 C^r 流形, 称为 M 和 N 的乘积流形.

例 1.5 **开子流形** 设 U 是 C^r 流形 M 的开子集. M 的微分结构为 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in I\}$. 令 $V_\alpha=U_\alpha\cap U$, $\psi_\alpha=\varphi_\alpha|_{V_\alpha}$, 则 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)|\alpha\in I\}$ 是 U 上的 C^r 微分结构, 从而 U 为 C^r 流形, 称为 M 的开子流形.

例 1.6 m **维实射影空间** $\mathbb{R}P^m$

用 $\mathbb{R}P^m$ 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中过原点的直线的集合. 下面在 $\mathbb{R}P^m$ 上引入微分结构, 使之成为一个 m 维光滑流形.

为此, 首先在 $X=\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下:

对任意 $x=(x^1,\cdots,x^{m+1}),y=(y^1,\cdots,y^{m+1})\in X$, $x\sim y$ 当且仅当存在非零实数 λ, 使得 $y=\lambda x$. 易见 $\mathbb{R}P^m$ 可以等同 X 关于等价关系 $\sim$ 的商空间, 即

$$\mathbb{R}P^m=X/\sim.$$

用 $[x]$ 表示点 $x=(x^1,\cdots,x^{m+1})\in X$ 所在的等价类, 则有

$$\mathbb{R}P^m=\{[x]|x=(x^1,\cdots,x^{m+1})\in X\}.$$

商映射记作 π, $\mathbb{R}P^m$ 上的拓扑为商拓扑, 即 $U\subset\mathbb{R}P^m$ 为开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 通常把 x 的坐标 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 称为 $\mathbb{R}P^m$ 中点 $[x]$ 的奇次坐标. 显然, 一个点的奇次坐标不是唯一的, 并且当 $x^\alpha\neq 0$ 时, 总有

$$[(x^1,\cdots,x^{m+1})]=[(x^1/x^\alpha,\cdots,x^{\alpha-1}/x^\alpha,1,x^{\alpha+1}/x^\alpha,\cdots,x^{m+1}/x^\alpha)].$$

如下定义 $\mathbb{R}P^m$ 的 $m+1$ 个开子集

$$V_\alpha=\{[(x^1,\cdots,x^{m+1})]\in\mathbb{R}P^m|x^\alpha\neq 0\},\ \ \alpha=1,\cdots,m+1.$$

并定义映射

$$\varphi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^m,\ \ \alpha = 1, \cdots, m+1$$

为

$$(\xi^1, \cdots, \xi^m) = \varphi_\alpha([(x^1, \cdots, x^{m+1})]) = (x^1/x^\alpha, \cdots, x^{\alpha-1}/x^\alpha, x^{\alpha+1}/x^\alpha, \cdots, x^{m+1}/x^\alpha),$$

其中 $[(x^1, \cdots, x^{m+1})] \in V_\alpha$. 易见 φ_α 是完全确定的, 并且是从 V_α 到 $\mathbb{R}^m$ 的同胚. 所以 $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 $\mathbb{R}P^m$ 的一个坐标卡, 相应的局部坐标 $(\eta^1, \cdots, \eta^m)$ 通常称为 $\mathbb{R}P^m$ 的非奇次坐标, 当 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ 时 (不妨设 $\alpha > \beta$), 局部坐标变换

$$(\eta^1, \cdots, \eta^m) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\xi^1, \cdots, \xi^m),\ \ \xi^\beta \neq 0$$

为

$$\eta^1 = \xi^1/\xi^\beta,\ \ \cdots,\ \ \eta^{\beta-1} = \xi^{\beta-1}/\xi^\beta,\ \ \eta^\beta = \xi^{\beta+1}/\xi^\beta, \cdots,$$

$$\eta^{\alpha-2} = \xi^{\alpha-1}/\xi^\beta,\ \ \eta^{\alpha-1} = 1/\xi^\beta,\ \ \eta^\alpha = \xi^\alpha/\xi^\beta, \cdots, \eta^m = \xi^m/\xi^\beta.$$

它们都是 $(\xi^1, \cdots, \xi^m)$ 的光滑函数, 因而

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

是光滑映射. 从而 $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha = 1, \cdots, m+1\}$ 是 $\mathbb{R}P^m$ 上的一个光滑结构, 使得 $\mathbb{R}P^m$ 为一个 m 维光滑流形, 称之为 m 维实射影空间.

§1.2 流形的映射

定义 1.7 设 M 是 m 维 C^r 流形, $W \subset M$ 是开集. $f : W \to \mathbb{R}$ 是实函数. 如果对于点 $p \in W$, 存在包含 p 的坐标卡 (U, φ), $U \cap W \neq \emptyset$, 使得函数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \mathbb{R}$$

在 $\varphi(p)$ 点是 $C^s(s \leq r)$ 的, 则称 $f : W \to \mathbb{R}$ 在 p 点是 C^s 的. 如果对每一点 $p \in W$, f 都是 C^s 的, 称 f 在 W 上是 C^s 函数. W 上全体 C^s 函数用 $C^s(W)$ 表示. 特别地, $C^s(M)$ 表示 M 上全体 C^s 函数的集合.

显然 $f : W \to \mathbb{R}$ 在点 p 是 C^s 这一性质与坐标卡的选取无关. 事实上, 设 (V, ψ) 是包含 p 的另一个坐标卡, 则

$$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ \varphi^{-1}.$$

因为 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中两个开集的 C^r 微分同胚, 故 $f \circ \varphi^{-1}$ 和 $f \circ \psi^{-1}$ 都是 C^s 的.

定义 1.8 设 M 和 N 分别为 m 和 n 维 C^r 流形. 如果映射 $f : M \to N$ 对于点 $p \in M$, 存在 M 中包含 p 的坐标卡 (U, φ) 和 N 中包含 $q = f(p)$ 的坐标卡 (V, ψ), 使得映射

$$\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

在 $\varphi(p)$ 点是 $C^s(s \leq r)$ 的, 则称 $f : M \to N$ 在点 p 是 C^s 的. 如果 $f : M \to N$ 在 M 的每一点都是 C^s 的, 则称 f 为 C^s 映射.

定义 1.9 若 $f : M \to N$ 为双射, 且 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 为同胚. 若 f 为同胚, 且 f 和 f^{-1} 都是光滑映射, 则称 f 为微分同胚或光滑同胚. 此时也称流形 M 和 N 是微分同胚的. 设 $f : M \to N$ 是光滑映射, 如果对每一点 $p \in M$, 都有 p 的一个开邻域 U, 使得 $f(U)$ 是 N 中的开子集, 并且 $f|_U : U \to f(U)$ 是微分同胚, 则称 f 是 M 到 N 的局部微分同胚.

设 $\hat{f}$ 的坐标表示为

$$(y^1,\cdots,y^n)=(f^1(x),\cdots,f^n(x)),\ \ x=(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi(U),$$

其中

$$f^i(x)=\pi_i\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)),\ \ i=1,\cdots,n.$$

当 $f:M\to N$ 为 C^s 映射时, $f^1,\cdots,f^n$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 上的开集 $\varphi(U)$ 上的 C^s 函数.

下面定义光滑映射秩的概念.

定义 1.10 设 M 和 N 分别为 m 和 n 维 C^r 流形. 映射 $f:M\to N$ 在点 $p\in M$ 是 $C^s(s\leq r)$ 的. (U,φ) 和 (V,ψ) 分别是包含 p 和 $f(p)$ 的坐标卡, 映射 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 在 $\varphi(p)$ 的秩称为 f 在 p 点的秩, 记作 rank_pf.

利用局部坐标, 可知 f 在 p 点的秩是映射 $\hat{f}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$$

在点 $\varphi(p)$ 的秩.

关于光滑映射的秩, 有下面的定理, 证明留给读者作为练习.

定理 1.3 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维光滑流形. $f:M\to N$ 是光滑映射, $p\in M$. 如果 f 在点 p 的一个开邻域上的秩是 r, 则存在 M 包含点 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 和 N 包含点 $f(p)$ 的局部坐标系 $(V,\psi;y^j)$ 使得

$$f(U)\subset V,\ \ \varphi(p)=(0,\cdots,0),\ \ \psi(f(p))=(0,\cdots,0),$$

且

$$(y^1,\cdots,y^n)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0).$$

下面介绍一些特殊类型的微分映射, 即所谓的浸入、嵌入和淹没.

定义 1.11 M 和 N 都是光滑流形, $f:M\to N$ 是光滑映射. 如果 f 在点 $p\in M$ 的秩等于 M 的维数, 则称映射 f 在 p 点为浸入. 如果 f 在 M 的每一点都是浸入, 则称 f 为浸入.

例 1.7 对于正整数 $m,\ n,\ m<n$, 有包含映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $f(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$. 则 f 是浸入, 称为典型浸入.

例 1.8 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $f(t)=(2\cos(t-\frac{\pi}{2}),\sin 2(t-\frac{\pi}{2}))$, 容易验证映射 f 为浸入.

由浸入和映射秩的定义, 根据定理 1.3 易知, 如果 $f:M^m\to N^n$ 在点 $p\in M$ 是浸入, 则 f 在 p 点的某一邻域上是浸入, 且存在 M 中包含 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 和 N 中包含 $q=f(p)$ 的局部坐标系 $(V,\psi;y^j)$, 使得 $f(U)\subset V$, $\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^m$, $\psi(q)=0\in\mathbb{R}^n$, 且 f 的局部表示 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 具有如下形式

$$\hat{f}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0).$$

定义 1.12 设 M 和 N 都是光滑流形, 如果映射 $f:M\to N$ 是浸入, 则称 $f(M)$ 为 N 的浸入子流形.

定义 1.13 设 $f:M\to N$ 是单浸入, 如果对于 $f(M)\subset N$ 的子空间拓扑, $f:M\to f(M)$ 是同胚, 则称 f 为嵌入, $f(M)$ 为 N 的嵌入子流形.

浸入在局部上是单一的, 但不能保证在大范围上是单一的. 浸入子流形和嵌入子流形的区别在于像集 $f(M)$ 是否有自交点.

命题 1.1 设 $f: M \to N$ 是单浸入, 若 M 是紧致的, 则 f 为嵌入.

证明 $f(M)$ 作为 N 的拓扑子空间是 Hausdorff 空间, 而 $f: M \to f(M) \subset N$ 是紧致空间到 Hausdorff 空间 $f(M)$ 的一一的连续映射. 故 $f: M \to f(M)$ 为同胚, 即 f 为嵌入. □

下面给出一类与包含它的光滑流形之间有比较简单关系的子流形.

定义 1.14 设 $N' \subset N$ 是 n 维光滑流形 N 的子集, 它具有子空间的拓扑, 若对某个自然数 $m (m \leq n)$, 如果对每个点 $p \in N'$, 都有 N 包含点 p 的局部坐标系 $(U, \varphi; y^j)$, 使得

(i) $\varphi(p)$ 是 R^n 的原点 0;

(ii) $\varphi(U \cap N') = \{(y^1, \cdots, y^n) \in \varphi(U) | y^{m+1}, \cdots, y^n = 0\}$,

则称 N' 是 N 的 m 维正则子流形. 具有上述性质 (i) 和 (ii) 的局部坐标系 $(U, \varphi; y^j)$ 称为 N 的包含点 $p \in N'$ 的子流形图. $n - m$ 称为 N' 在 N 中的余维数.

易见光滑流形的开子流形是正则子流形.

下面定理给出了正则子流形与嵌入的关系, 证明略.

定理 1.4 设 $f: M \to N$ 是单浸入, 则 $f(M)$ 为 N 的正则子流形当且仅当 f 为嵌入.

利用微分流形的局部欧氏性质, 可以将经典的欧氏空间上的反函数定理推广到流形上去, 证明留给读者作为练习.

定理 1.5(流形上的反函数定理) 设 M 和 N 都为 m 维光滑流形, $f: M \to N$ 是光滑映射, $p \in M$. 如果 f 在点 p 的微分 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是同构, 则存在点 p 在 M 中的一个开邻域, 使得 $f|_U: U \to f(U)$ 是微分同胚.

下面把经典的隐函数定理推广到流形上去. 为此需要如下定义.

定义 1.15 设 M, N 分别为是 m 维和 n 维光滑流形, $f: N \to M$ 是光滑映射. 点 $p \in N$ 称为临界点, 如果 $\mathrm{rank}_p f < m$; 点 $p \in N$ 称为正则点, 如果 $\mathrm{rank}_p f = m$.

f 的全体临界点的集合记为 $C(f)$. 如果 $q \in M$ 使得 $f^{-1}(q) \cap C(f) \neq \emptyset$, 那么我们称 q 为 f 的临界值; 如果 $q \in M$ 使得 $f^{-1}(q) \cap C(f) = \emptyset$, 那么我们称 q 为 f 的正则值.

注 1.1 f 的全体临界值的集合为 $f(C(f))$. f 的全体正则值的集合为 $M \setminus f(C(f))$, 而不是 $f(M \setminus C(f))$. 这是因为在正则值的定义中包括 $f^{-1}(\{q\}) = \emptyset$ 的情形.

定理 1.6(流形上的隐函数定理) 设 M, N 分别为 m 维和 n 维光滑流形, $n > m$, $f: N \to M$ 是光滑映射. 如果点 $q \in f(N)$ 是一个正则值, 那么点 q 的原像 $f^{-1}(\{q\})$ 是 N 的一个 $n - m$ 维子流形.

证明 设 (V_q, ϕ_q) 是 M 的一个坐标卡, 使得 $q \in V_q$, $\phi_q(q) = 0$. 对于点 $p \in f^{-1}(\{q\})$, 选取 N 的一个坐标卡 (U_p, ψ_p), 使得 $p \in U_p$, $\psi_p(p) = 0$ 且 $f(U_p) \subset V_q$. 映射

$$\hat{f} = \phi_q \circ f \circ \psi_p^{-1}|_{\psi_p(U_p)} : \psi_p(U_p) \to \mathbb{R}^m$$

在点 0 的微分为

$$\hat{f}_{*0} = (\phi_q)_{*q} \circ f_{*p} \circ (\psi_p^{-1})_{*0} : T_0\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^m.$$

因为 (U_p, ψ_p) 和 (V_q, ϕ_q) 是坐标卡, 故微分 $(\psi_p^{-1})_{*0}$ 和 $(\phi_q)_{*q}$ 都是线性同构. 又由于 f_{*p} 是满射, 所以 $\hat{f}_{*0}$ 也是满射.

由隐函数定理 1.2 知, $\psi_p(f^{-1}(\{q\}) \bigcap U_p))$ 是 $\psi_p(U_p)$ 的一个 $n - m$ 维子流形, 因此 $f^{-1}(\{q\}) \bigcap U_p$ 是 U_p 的一个 $n - m$ 维子流形. 这对每一点 $p \in f^{-1}(\{q\})$ 都成立, 从而 $f^{-1}(\{q\})$ 是 N 的一个 $n - m$ 维子流形. □

定义 1.16 设 M, N 分别为 m 维和 n 维光滑流形, $m > n$. 如果光滑映射 $f: M^m \to N^n$ 在点 $p \in M$ 的秩等于 N 的维数, 则称映射 f 在 p 点为淹没. 如果 f 在 M 的每一点都是淹没, 则称 f 为淹没.

例 1.9 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是开子集, $g:U\to\mathbb{R}^k(k<m)$ 定义为

$$f(x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^k),$$

则 f 是淹没, 称为典型淹没.

例 1.10 设 $f:\mathbb{R}^m-\{0\}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x^1,\cdots,x^m)=\sum_{i=1}^m(x^i)^2$, 映射 f 在 $\mathbb{R}^m-\{0\}$ 的所有点处秩为 1, 所以映射 f 为淹没.

由淹没和映射秩的定义, 根据定理 1.3 易知, 如果 $f:M^m\to N^n$ 在点 $p\in M$ 是淹没, 则 f 在 p 点的某一邻域上是淹没, 且存在 M 中包含 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 和 N 中包含 $q=f(p)$ 的局部坐标系 $(V,\psi;y^j)$, 使得 $f(U)\subset V$, $\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^m$, $\psi(q)=0\in\mathbb{R}^n$, 且 f 的局部表示 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 具有如下形式

$$\hat{f}(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n).$$

§1.3 切空间与切映射

设 $\mathbb{R}^m$ 是具有标准微分结构的 m 维实向量空间, $I=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ 为开区间. 对任意点 $p\in\mathbb{R}^m$, 令 $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$ 为一条 C^1 曲线, 使得 $\gamma(0)=p$, 则 γ 在 p 点处的切向量

$$\gamma'(0)=\lim_{t\to0}\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}$$

是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个元素.

反过来, 对于 $\mathbb{R}^m$ 中任意一个元素 v, 很容易找到一条曲线 $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$. 其中一个显然的例子就是曲线 $\gamma:t\mapsto p+t\cdot v$. 这说明点 $p\in\mathbb{R}^m$ 处的切空间, 即所有切向量组成的空间可以等同于 $\mathbb{R}^m$ 本身.

另一方面, $\mathbb{R}^m$ 中点 p 处的向量 $v=(v_1,\cdots,v_m)$ 可看作是一种算子, 它作用于定义在点 p 的邻域上的可微函数.

设点 $p\in\mathbb{R}^m$, 记 $C(p)$ 为局部定义在点 p 的所有实值可微函数的集合. 如果 $v=(v_1,\cdots,v_m)\in\mathbb{R}^m$, $f\in C(p)$, 则么 v 作用于 f 得实数

$$\partial_vf=v_1\frac{\partial f}{\partial x^1}|_p+\cdots+v_m\frac{\partial f}{\partial x^m}|_p,$$

即 f 沿方向 v 的方向导数. 易验证方向导数 ∂ 具有如下性质:

$$\begin{aligned}\partial_v(\lambda f+\mu g)&=\lambda\partial_vf+\mu\partial_vg,\\ \partial_v(f\cdot g)&=g(p)\partial_vf+f(p)\partial_vg,\\ \partial_{\lambda v+\mu w}f&=\lambda\partial_vf+\mu\partial_wf,\end{aligned}$$

其中 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$; $v,\ w\in\mathbb{R}^m$; $f,\ g\in C(p)$.

下面我们利用这些性质来定义微分流形上的切向量, 为简单起见, 就光滑流形来讨论.

设 M 为 m 维光滑流形, $p\in M$. 流形 M 上过点 p 的一条可微曲线是如下一个可微映射

$$\gamma:I\to M,$$

它满足条件 $\gamma(0)=p$, 其中 $I=(-1,1)$. 记 $\mathcal{U}_p$ 为所有过点 p 的可微曲线构成的集合；记 $\mathcal{F}_p$ 为所有在 p 点的一个邻域有定义的连续可微实函数构成的集合. 对于 $\gamma\in\mathcal{U}_p$, $f\in\mathcal{F}_p$, 定义

$$<f,\gamma>_p=\frac{d}{dt}f\circ\gamma(t)|_{t=0}.$$

定义 1.17 在 $\mathcal{U}_p$ 上定义如下相切关系 $\sim$

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow < f, \gamma_1 >_p = < f, \gamma_2 >_p,$$

对任意 $f \in \mathcal{F}_p$.

易证明相切关系 $\sim$ 是 $\mathcal{U}_p$ 上的等价关系, $\mathcal{U}_p$ 按照相切关系分成等价类, 每一个等价类 $[\gamma]$ 称为光滑流形 M 在 p 点的一个切向量. 所有这样的切向量的集合 $T_pM = \mathcal{U}_p/\sim$ 称为光滑流形 M 在 p 点的切空间.

对于切向量 $[\gamma] \in T_pM$, 可以定义 $< f, [\gamma] > = < f, \gamma >_p$.

取光滑流形 M 在 p 点邻近的局部坐标 (U, φ), 考虑其坐标分量函数 $x^j = \pi_j \circ \varphi,\ \ j = 1, \cdots, m$, 这里 $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是到第 j 个因子空间的投影. 由于

$$\begin{aligned}
< f, \gamma >_p &= \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t))|_{t=0} \\
&= \sum_j \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \frac{d}{dt} x^j \circ \gamma(t)|_{t=0} \\
&= \sum_j (\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j})_{\varphi(p)} < x^j, \gamma >_p .
\end{aligned}$$

因此, 判别 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{U}_p$ 是否相切, 只需用 p 点邻近的任一个局部坐标 (U, φ) 的坐标分量 $x^1, \cdots, x^m$ 作为检验函数, 验证是否有

$$< x^j, \gamma_1 >_p = < x^j, \gamma_2 >_p,\ \ j = 1, \cdots, m.$$

定义 1.18 设 $[\gamma] \in T_pM$, (U, φ) 是 M 在点 p 邻近的局部坐标, $x^1, \cdots, x^m$ 是其坐标分量函数. 把 $\xi^j = < x^j, [\gamma] >$, $j = 1, \cdots, m$ 称为切向量 $[\gamma]$ 的坐标分量.

选定 M 在点 p 邻近的一个局部坐标 (U, φ), 根据上面的讨论, 每个切向量 $[\gamma]$ 对应着一个 m 维向量 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$. 反过来对每一个 m 维向量 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$, 恰好有一个切向量 $[\gamma]$, 其坐标分量是 $\xi^1, \cdots, \xi^m$. 事实上, 选取足够小的 $\varepsilon > 0$, 该切向量可以由过 p 点的曲线 $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi),\ \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 给出.

从而选定 M 在点 p 邻近的一个局部坐标 (U, φ) 后, 就可以建立切空间 T_pM 与 $\mathbb{R}^m$ 之间的一一对应:

$$\varphi_* : T_pM \to \mathbb{R}^m,\ \ \varphi_*([\gamma]) = \xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m).$$

设 (V, ψ) 是 M 在点 p 邻近的另一个局部坐标, 其坐标分量为 $y^j = \pi_j \circ \psi,\ \ j = 1, \cdots, m$. 设切向量 $[\gamma]$ 对应于 (V, ψ) 的坐标分量为 $\eta^1, \cdots, \eta^m$. 由于 $\psi \circ \gamma(t) = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t))$, 所以切向量 $[\gamma]$ 在不同坐标分量之间有如下变换法则:

$$\frac{dy^j}{dt} = \sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt},$$

即 $\eta^j = \sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \xi^k$. 此变换中的系数矩阵 $[\frac{\partial y^j}{\partial x^k}]_{m \times m}$ 就是映射 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵. 把这个矩阵所表示的线性变换记为 $(\psi \circ \varphi^{-1})_*$, 即 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 的微分. 从而有 $\psi_* = (\psi \circ \varphi^{-1})_* \circ \varphi_*$, 由此可得 $\psi_*^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1})_* = \varphi_*^{-1}$.

由于 $\mathbb{R}^m$ 有自然的线性结构, 借助于一一对应 $\varphi_* : T_pM \to \mathbb{R}^m$ 可以很自然地定义切空间 T_pM 上的线性结构. 也就是我们可以定义

$$[\beta] + [\gamma] := \varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta]) + \varphi_*([\gamma])),$$

$$c[\gamma] := \varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

如果 (V,ψ) 是 M 在点 p 邻近的另一个局部坐标, 则有

$$\begin{aligned}\psi_*^{-1}(\psi_*([\beta]) + \psi_*([\gamma])) &= \psi_*^{-1}((\psi\circ\varphi^{-1})_*(\varphi_*([\beta]) + \varphi_*([\gamma]))) \\ &= (\psi_*^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})_*)(\varphi_*([\beta]) + \varphi_*([\gamma])) \\ &= \varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta]) + \varphi_*([\gamma])).\end{aligned}$$

类似可以证明

$$\psi_*^{-1}(c\psi_*([\gamma])) = \varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

这就说明如上方式所定义的 T_pM 上的线性运算与局部坐标的选取无关. 这样切空间 T_pM 就成为线性空间, 并且映射 $\varphi_* : T_pM \to \mathbb{R}^m$ 是线性同构: $\varphi_*([\beta]+[\gamma]) = \varphi_*([\beta]) + \varphi_*([\gamma])$, $\varphi_*(c[\gamma]) = c\varphi_*([\gamma])$.

对 $\mathbb{R}^m$ 的标准基底 $e_j = (\delta_j^1, \delta_j^2, \cdots, \delta_j^m)$, $j = 1, \cdots, m$, 其中

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.2}$$

同构 $\varphi_*^{-1} : \mathbb{R}^m \to T_pM$ 将标准基底映为 T_pM 的一组基底, 记之为 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, 即 $\frac{\partial}{\partial x^j} = \varphi_*^{-1}(e_j)$, $j = 1, \cdots, m$. 对切向量 $[\gamma] \in T_pM$, 同构 φ_* 把它映为 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量 ξ, 其分量为 $\xi^j = < x^j, [\gamma] >$, $j = 1, \cdots, m$. 则有 $\varphi_*([\gamma]) = \sum_j \xi^j e_j$, $[\gamma] = \varphi_*^{-1}(\sum_j \xi^j e_j) = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

这样我们就有下面的命题.

命题 1.2 设 M 为 m 维光滑流形, $p \in M$. 选定 M 在点 p 的一个局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ 就成为切空间 T_pM 的一组基底. 切向量 $[\gamma] \in T_pM$ 对这组基底的系数恰好为 $\xi^j = < x^j, [\gamma] >$, $j = 1, \cdots, m$.

我们称基底 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ 为切空间 T_pM 的自然基底.

定义 1.19 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^r 流形, $f : M \to N$ 是 $C^s(s \leq r)$ 映射, $p \in M$, $q = f(p) \in N$. 设 $(U, \phi; x^i)$ 和 $(V, \varphi; y^j)$ 分别是 M 中包含点 p 和 N 中包含点 q 的局部坐标系, 使得 $f(U) \subset V$. f 在 p 点的切映射 $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ 定义为

$$f_{*p}([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

任意选取 M 在 p 点邻近的局部坐标系 $(U, \phi; x^i)$ 和 N 在 $f(p)$ 点邻近的局部坐标系 $(V, \varphi; y^j)$, 记 $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, 对于 $[\gamma] \in T_pM$, 设 $[\gamma] = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $f_{*p}([\gamma]) = [f \circ \gamma] = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, 则有

$$\begin{aligned}\eta^j &= < y^j, [f\circ\gamma] > \\ &= \frac{d}{dt}(y^j \circ f \circ \gamma(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(y^j \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \gamma(t))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i} \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma(t))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i} < x^i, [\gamma] > \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i} \xi^i.\end{aligned}$$

这说明切映射 f_{*p} 是一个线性映射, 它是由 Jacobi 矩阵 $[\frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}]_{n\times m}$ 决定的线性映射.

命题 1.3 设 $f: M \to N$ 和 $g: N \to S$ 是流形之间的光滑映射, 则对于任一点 $p \in M$, 有

(i) 映射 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是线性映射;

(ii) 如果 $id: M \to M$ 是恒等映射, 则 $id_{*p} = id_{T_pM}$;

(iii) $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$.

证明 由定义很容易证明, 这里略. □

(iii) 通常称为链法则.

推论 1.1 设 $f: M \to N$ 为微分同胚, 其逆映射为 $g = f^{-1}: N \to M$. 则在任意点 $p \in M$ 处的切映射 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是同构, 且 $(f_{*p})^{-1} = g_{*f(p)}$.

证明 由

$$g_{*f(p)} \circ f_{*p} = (g \circ f)_{*p} = (id_M)_{*p} = id_{T_pM}$$

和

$$f_{*p} \circ g_{*f(p)} = (f \circ g)_{*f(p)} = (id_N)_{*f(p)} = id_{T_{f(p)}N}$$

立即可得. □

例 1.11 设 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \to S^m$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中 m 维单位球面上的一条曲线, 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. 并且曲线 γ 满足 $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$, 则对 $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$ 求微分可得

$$\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

这说明对每个切向量 $v \in T_pS^m$, 有 $\langle v, p \rangle = 0$, 因此 v 和 p 正交.

另一方面, 如果 $v \neq 0$, 使得 $\langle v, p \rangle = 0$, 则 $\gamma: \mathbb{R} \to S^m$

$$\gamma: t \mapsto \cos(t|v|) \cdot p + \sin(t|v|) \cdot v/|v|$$

是 S^m 的一条曲线, 它满足 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. 以上说明球面 S^m 在点 p 处的切空间 T_pS^m 由下式给出

$$T_pS^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | \langle v, p \rangle = 0\}.$$

如果 $\gamma_M: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ 是 M 中的一条曲线, 使得 $\gamma_M(0) = p$, 则可微映射 $\phi: M \to N$ 映曲线 γ_M 为 N 中的一条曲线

$$\gamma_N = \phi \circ \gamma_M: (-\epsilon, \epsilon) \to N,$$

它满足 $\gamma_N(0) = \phi(p)$. 利用上面关于切空间的解释可知, ϕ 在 p 点的切映射 $\phi_{*p}: T_pM \to T_{\phi(p)}N$ 映 p 点处的切向量 $\gamma'_M(0)$ 为在 $\phi(p)$ 点处的切向量 $\gamma'_N(0)$, 即

$$\varphi_{*p}(\gamma'_M(0)) = \gamma'_N(0).$$

定义 1.20 切空间 T_pM 的对偶空间称为光滑流形 M 在 p 点的余切空间, 记为 T_p^*M. T_p^*M 中的的元素, 即线性函数 $\alpha: T_pM \to \mathbb{R}$ 称为 M 在 p 点的余切向量.

为简单起见, 以后记 M 在点 p 处的切向量为 X_p, Y_p 等.

设 $(U, \phi; x^i)$ 是 M 中包含点 p 的局部坐标系, $f \in C^r(U)$. 下面给出余切向量 $df_p \in T_p^*M$ 的另一种定义方式.

对任意 $X_p \in T_pM$, 定义

$$df_p(X_p) =< X_p, df_p >= X_p f. \tag{1.3}$$

df_p 称为 f 在点 p 的微分.

取 $X_p = (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$, $f = x^j$, 由 (1.3) 得

$$< (\frac{\partial}{\partial x^i})_p, dx_p^j >= (\frac{\partial}{\partial x^i} x^j)_p = \delta_i^j. \tag{1.4}$$

故 $\{dx^i | i = 1, \cdots, m\}$ 是 T_p^*M 的一组基, 它是 $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \cdots, m\}$ 的对偶基底. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{dx^i\}$ 分别称为 M 在点 p 的切空间和余切空间的自然基底.

由 (1.3) 和 (1.4) 可得

$$df_p = (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p dx_p^i.$$

可见这里定义的流形上光滑函数在一点的微分正是初等微积分中微分概念的推广.

在不同的局部坐标系中, 自然基的变换公式如下.

命题 1.4 设 $(U, \phi; x^i)$ 和 $(V, \varphi; \tilde{x}^i)$ 为 M 的包含点 p 的两个局部坐标系, 则有

$$(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i})_p = (\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i})_{\varphi(p)} (\frac{\partial}{\partial x^j})_p; \quad (d\tilde{x}^i)_p = (\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j})_{\phi(p)} (dx^j)_p. \tag{1.5}$$

证明 对任意的 $f \in C^r(U \cap V)$, 有

$$\begin{aligned} (\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i})_p &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} (\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i})_{\varphi(p)} = (\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i})_{\varphi(p)} (\frac{\partial f}{\partial x^j})_p, \end{aligned}$$

从而可得 (1.5) 的第一式. 利用此式和 (1.4) 易得 (1.5) 的第二式. □

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^r 流形, $f : M \to N$ 是 $C^k(s \le r)$ 映射, $p \in M$. 切映射 $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ 的对偶映射 $f_{f(p)}^* : T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$ 称为映射 f 在 p 点的余切映射.

由对偶映射的定义, 余切映射 $f_{f(p)}^* : T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$ 也是线性映射, 且对任意 $\omega \in T_{f(p)}^*N$, $f_{f(p)}^*(\omega)$ 为

$$f_{f(p)}^*(\omega)(X_p) = \omega(f_{*p}(X_p)),$$

其中 $X_p \in T_pM$.

§1.4　单位分解定理

单位分解是将流形的局部性质和整体性质联系起来的一个有力工具, 本节证明微分流形上单位分解的存在性.

设 M 为一个拓扑空间, $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$, $\{V_\beta | \beta \in J\}$ 是 M 的两个开覆盖, 若对于每一个 $\beta \in J$, 都存在 $\alpha \in I$, 使得 $V_\beta \subset U_\alpha$, 则称覆盖 $\{V_\beta | \beta \in J\}$ 是覆盖 $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ 的一个加细.

设 M 为一个拓扑空间, $\Sigma = \{W_\alpha\}$ 是 M 的一个子集族, 如果对于 M 的任意一点 $p \in M$, 都存在 p 的一个邻域 $U \subset M$, 使得 U 只与 Σ 中有限多个成员有非空的交, 则称子集族 Σ 是局部有限的.

定理 1.7 设 M 是具有可数基的 m 维光滑流形, $\{W_\alpha\}$ 为 M 的任意开覆盖, 则存在由可数个坐标卡构成的 $\{W_\alpha\}$ 的局部有限加细 $\{(U_j, \varphi_j) | j = 1, 2, \cdots\}$, 使得 $\varphi_j(U_j) = B_1^m(0) = \{x \in \mathbb{R}^m | \ |x| < 1\}$, 且 $\{V_j = \varphi_j^{-1}(B_{\frac{1}{2}}^m(0)) | j = 1, 2, \cdots\}$ 也是 M 的开覆盖.

证明 根据流形的定义, M 是局部欧氏的, 所以 M 局部紧致. 又因为 M 具有可数基, 因此存在 M 的一个可数开覆盖 $\{P_j\}$, 使得其中每一个 P_j 的闭包 $\overline{P}_j$ 是紧致的. 利用 $\{P_j\}$, 按照如下方式构造 M

上的一列紧致集 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_0 = \emptyset, K_1 = \overline{P}_1$, 且若 $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i$ 已经有定义, 而 r 是使得 $K_i \subset \bigcup_{j=1}^r P_j$ 的第一个整数, 则定义

$$K_{i+1} = \overline{\bigcup_{j=1}^{r} P_j}. \tag{1.6}$$

用 $\mathrm{int}K_{i+1}$ 表示 K_{i+1} 的内部, 则 $K_i \subset \mathrm{int}K_{i+1}$, 且 $\bigcup_{i=1}^\infty K_i = M$. 此外, K_i 为闭集, $\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1}$ 为开集, $K_{i+1} - \mathrm{int}K_i$ 为紧致闭集. 并且 $(K_{i+1} - \mathrm{int}K_i) \subset (\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1})$, $M \subset \bigcup_{i=0}^\infty (K_{i+1} - \mathrm{int}K_i)$.

对固定的 i, 考虑开集 $(\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1}) \cap W_\alpha$. 对其内任一点 p, 取位于其内的一个坐标卡 $(U_{p,\alpha}, \varphi_{p,\alpha})$, 使得 $\varphi_{p,\alpha}(p) = 0$, $\varphi_{p,\alpha}(U_{p,\alpha}) = B_1^m(0)$. 再设 $V_{p,\alpha} = \varphi_{p,\alpha}^{-1}(B_{\frac{1}{2}}^m(0))$, 则

$$V_{p,\alpha} \subset U_{p,\alpha} \subset (\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1}) \cap W_\alpha.$$

让 p, α 变化, 因为 $K_{i+1} - \mathrm{int}K_i$ 紧致, 故可取有限个 $V_1^{(i)}, \cdots, V_{i_r}^{(i)}$ 覆盖 $K_{i+1} - \mathrm{int}K_i$. 显然 $\{V_l^{(i)} | 1 \leq l \leq i_r, 1 \leq i < +\infty\}$ 为 M 的可数开覆盖. 易验证 $\{(U_l^{(i)}, \varphi_l^{(i)})\}$ 和 $\{V_l^{(i)}\}$ 即满足定理要求. 事实上, 由上面作法, 知 $\{U_l^{(i)}\}$ 是 $\{W_\alpha\}$ 的加细. 另外, 对任一点 $p \in M$, 存在 M 的一个包含 p 的邻域 A 及一个指标 j_0, 使得 $p \in A \subset \mathrm{int}K_{j_0-1}$. 当 $i \geq j_0$ 时, 由 $U_l^{(i)}$ 的定义以及

$$A \cap U_l^{(i)} \subset A \cap (\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1}) \subset \mathrm{int}K_{j_0-1} \cap (\mathrm{int}K_{i+2} - K_{i-1}) = \emptyset,$$

知 $\{U_l^{(i)}\}$ 是局部有限的. □

定理 1.7 中得到的开覆盖 $\{W_\alpha\}$ 的局部有限加细 $\{U_i, \varphi_i; V_i) | i = 1, 2, \cdots\}$ 称为从属于 $\{W_\alpha\}$ 的正则覆盖.

定义 1.21 设 $f: M \to \mathbb{R}$ 是光滑流形 M 上的实值函数, f 的支集定义为使得 $f(p) \neq 0$ 的点集的闭包, 记作

$$\mathrm{supp}\,(f) = \overline{\{p | p \in M, f(p) \neq 0\}}.$$

定义 1.22 设 I 为自然数集, 若光滑流形 M 上的一族光滑函数 $\{f_i | i \in I\}$ 满足下列性质:

(i) 对于任一点 $p \in M$, $f_i(p) \geq 0$;

(ii) 对于任一点 $p \in M$, $\sum_i f_i(p) = 1$;

(iii) $\{\mathrm{supp}\,(f_i)\}$ 为 M 的局部有限的覆盖,

则称 $\{f_i | i \in I\}$ 为 M 上的单位分解.

下面给出几个有用的引理.

引理 1.1 设 B_1 和 B_2 是 $\mathbb{R}^m$ 中两个开的同心球, $\overline{B}_1 \subset B_2$, 则存在光滑函数 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 使得

(1) $0 \leq f \leq 1$;

(2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_1, \\ 0, & x \notin B_2. \end{cases}$

证明 不妨设 B_1 和 B_2 以原点为球心, 半径分别为 a 和 b, $0 < a < b$. 令

$$g(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}}, & t \in (a^2, b^2), \\ 0, & t \notin (a^2, b^2). \end{cases}$$

则 g 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数. 再令

$$F(t) = \frac{\int_t^{+\infty} g(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds},$$

F 仍是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数, 且 $0 \le F \le 1$. 当 $t \le a^2$ 时, $F(t) = 1$; 当 $t \ge b^2$ 时, $F(t) = 0$. 定义 $f(x^1, \cdots, x^m) = F((x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2)$, 则 f 符合引理的要求. □

引理 1.2 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^m$ 中两个开集, $\overline{V}$ 紧致, 且 $\overline{V} \subset U$, 则存在光滑函数 $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 使得

(1) $0 \le h \le 1$;

(2) $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$

证明 由于 $\overline{V}$ 紧致, 且 $\overline{V} \subset U$, 所以存在有限多组同心球 $\{B_i^{(1)}, B_i^{(2)}\}_{1 \le i \le s}$, 使得

$$\overline{B}_i^{(1)} \subset B_i^{(2)} \subset U,$$

且 $\{B_i^{(1)}\}_{1 \le i \le s}$ 构成 $\overline{V}$ 的开覆盖. 由引理 1.1, 对每一个 i, 存在光滑函数 $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 使得 $0 \le f_i \le 1$, 且

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_i^{(1)}, \\ 0, & x \notin B_i^{(2)}. \end{cases}$$

令 $h = 1 - \prod_{i=1}^{s}(1 - f_i)$, 则 h 符合引理的要求. □

引理 1.3 设 (U, ϕ) 是 m 维光滑流形 M 的任意一个坐标卡, V 是 M 的一个非空开集, 使得 $\overline{V}$ 紧致, 且 $\overline{V} \subset U$, 则在 M 上存在光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 使得

(1) $0 \le f \le 1$;

(2) $f(p) = \begin{cases} 1, & p \in V, \\ 0, & p \notin U. \end{cases}$

证明 由于 $\overline{V}$ 紧致, 并且 $\overline{V} \subset U$, 利用 M 的局部紧致性知, 存在开子集 U_1, 使得

$$\overline{V} \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

由于 $\phi(V)$ 和 $\phi(U_1)$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 由引理 1.2, 存在 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑函数 h, 使得 $0 \le h \le 1$, 且

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \phi(V), \\ 0, & x \notin \phi(U_1). \end{cases}$$

定义

$$f(p) = \begin{cases} h \circ \phi(p), & p \in V, \\ 0, & p \notin U, \end{cases}$$

则 f 是 M 上的光滑函数, 且满足引理的要求. □

引理 1.3 中的函数 f 通常称为 M 上的截断函数. 事实上, 引理 1.3 有下面更一般的结论, 证明留给读者作为练习.

引理 1.4 设 U 和 V 是光滑流形 M 的任意两个非空开集, 使得 $\overline{V}$ 紧致, 且 $\overline{V} \subset U$, 则存在 M 上的光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 使得

(1) $0 \le f \le 1$;

(2) $f(p) = \begin{cases} 1, & p \in V, \\ 0, & p \notin U. \end{cases}$

定理 1.8 (单位分解定理) 设 M 为具有可数基的 m 维光滑流形, $\{(U_i, \varphi_i; V_i)\}$ 为 M 的正则覆盖, 则存在单位分解 $\{f_i\}$, 使得在 V_i 上 $f_i > 0$, 且 $\operatorname{supp}(f_i) \subset \varphi_i^{-1}(\overline{B_{3/4}^m(0)})$.

证明 由引理 1.1, 对每一个 i, 存在 $\mathbb{R}^m$ 上的一个非负光滑函数 h_i, 它在 $B_{1/2}^m(0)$ 上恒等于 1, 而在 $B_{3/4}^m(0)$ 外恒等于 0. 设 $g_i = h_i \circ \varphi_i$, g_i 为光滑函数, 它在 V_i 上恒为 1, 在 $\varphi_i^{-1}(B_{3/4}^m(0))$ 外恒为 0, 即

$\text{supp}\,(g_i) \subset \varphi_i^{-1}(\overline{B^m_{3/4}(0)})$. 又因为 $\{V_i|i=1,2,\cdots\}$ 是 M 的局部有限覆盖, 故由

$$f_i = g_i / \sum_i g_i$$

给定的函数族 $\{f_i\}$ 是 M 上符合定理要求的单位分解. □

注 1.2 由定理 1.8 即知, 上述每一个函数 f_i 都具有紧致支集, 而且 M 得每一个开覆盖 $\{(U_\alpha|\alpha \in I\}$ 都有从属于它的单位分解.

练习 1

1. 设 $(U,\phi;x^i)$, $(V,\varphi;y^i)$ 和 $(W,\psi;z^i)$ 是 m 维光滑流形 M 上的三个局部坐标系, 且 $U\cap V\cap W \neq \emptyset$. 证明: 在 $\phi(U\cap V\cap W)$ 上有下列的链式法则成立:

$$(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}) = (\frac{\partial z^i}{\partial y^k})(\frac{\partial y^k}{\partial x^j}).$$

2. 设 $\mathbb{C}^{m+1} = \{(z^1,\cdots,z^{m+1})|z^i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le m+1\}$ 中, 在 $X = \mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下:

对任意 $z = (z^1,\cdots,z^{m+1}), w = (w^1,\cdots,w^{m+1}) \in X$, $z \sim w$ 当且仅当存在非零复数 λ, 使得 $w = \lambda z$. 用 $[z]$ 表示元素 $z = (z^1,\cdots,z^{m+1}) \in X$ 所在的等价类. 令

$$\mathbb{C}P^m = X/\sim = \{[z]|\ z = (z^1,\cdots,z^{m+1}) \in X\}.$$

$\mathbb{C}P^m$ 称为 m 维复射影空间. 由 $z \mapsto [z]$ 定义的映射 $\pi : X \to \mathbb{C}P^m$ 称为自然投影. 试在 $\mathbb{C}P^m$ 上定义拓扑和微分结构, 使之成为一个 $2m$ 维光滑流形.

3. 证明: 一维复射影空间 $\mathbb{C}P^1$ 微分同胚于二维球面 S^2.

4. 设 M_1, M_2 是光滑流形, $M = M_1 \times M_2$, $(p,q) \in M$. 设 $\pi_i : M \to M_i (i=1,2)$ 是自然投影. 定义映射 $\alpha_i : M_i \to M (i=1,2)$, 使得

$$\alpha_1(x) = (x,q),\ \ x \in M_1; \quad \alpha_2(y) = (p,y),\ \ y \in M_2.$$

显然有 $\pi_i \circ \alpha_i = \text{id}_{M_i} : M_i \to M_i,\ \ i=1,2$, 且 $T_{(p,q)}M = (\alpha_1)_{*p}(T_pM_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(T_qM_2)$. 证明 α_1 和 α_2 都是嵌入.

5. 设 $f : M \to N$ 是单浸入, 且任意紧致集的原像是紧致集, 证明 f 是嵌入.

6. 设 $f : S \to M$, $g : M \to N$ 是光滑流形 S, M, N 之间的光滑映射, $p \in S$, 证明:

(1) $(g\circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p} : T_pS \to T_{g\circ f(p)}N$;

(2) $(g\circ f)^*_p = f^*_p \circ g^*_{f(p)} : T^*_{g\circ f(p)}N \to T^*_pS$.

7. 设 $f : M \to N$ 是淹没, 证明 f 是开映射.

8. 证明: 如果 $f : M \to N$ 是光滑的单一满映射, 并且 df 的核处处为 0, 则 f 是一个微分同胚.

9. 设 $m < n$, $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是投影, 即 $\pi(x^1,\cdots,x^n) = (x^1,\cdots,x^m)$. 又设 $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射. 证明: 如果 $\pi\circ\varphi : M \to \mathbb{R}^m$ 是浸入, 则 $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ 也是浸入.

第二章　微分流形上的微分

§2.1　张量积与张量

2.1.1 向量空间与对偶空间

设 F 是一个数域, 它通常指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. F 上的一个向量空间 V 是具有下面两种运算的一个集合:

(1) 加法: $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$, 且 V 关于加法构成一个交换群, 其单位元记为 0.

(2) 数量乘法: $F \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$, 使得对任意的 $a_1, a_2 \in F$, $v, w \in V$ 有

(i) $a(v + w) = av + aw$, $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$;

(ii) $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$;

(iii) $1v = v$, $0v = 0$,

这里 1 为数域 F 的乘法单位元, 第一个 0 是数零, 第二个 0 是 V 作为交换群的单位元. 向量空间 V 的元素称为向量.

向量空间 V 的一组基是 V 的一个线性无关的向量组 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, 使得 V 中任何一个元素 v 都可以由它们线性表示, 即

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

数组 $a_1, \cdots, a_n \in F$ 称为向量 v 关于基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 的分量. V 的一组基中所含向量的个数称为向量空间 V 的维数.

设 V 是数域 F 上的一个 n 维向量空间, $f : V \to F$ 是 V 上的 F- 值函数. 如果对任意的 $v_1, v_2 \in V$ 以及 $a_1, a_2 \in F$ 有

$$f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2),$$

则称 f 是 V 上的 F- 值线性函数. 显然, 如果 f, g 是 V 上的 F- 值线性函数, $a \in F$, 则 $f + g$, af 也是 V 上的 F- 值线性函数. 从而 V 上的所有 F- 值线性函数构成数域 F 上的向量空间, 记作 V^*, 称为 V 的对偶空间, 并且 V^* 也是 F 上的 n 维向量空间. 事实上, 设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的一组基, 且

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V, \quad f \in V^*,$$

则

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).$$

即线性函数 f 由它在基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 上的值 $f(v_i)$ 完全确定. 从而可定义线性函数 $v^{*i} \in V^*$, $1 \le i \le n$, 使得

$$v^{*i}(v_j) = \delta^i_j, \quad 1 \le j \le n,$$

这里

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j \end{cases} \tag{2.1}$$

称为 Kronecker delta.

由定义知 $v^{*i}(v)=a_i$, 从而

$$f(v)=\sum_{i=1}^{n}a_if(v_i)=\sum_{i=1}^{n}f_iv^{*i}(v),$$

即

$$f=\sum_{i=1}^{n}f_iv^{*i},$$

其中 $f_i=f(v_i)$. 由此可见 V^* 的任意一个元素都可以由 $\{v^{*1},\cdots,v^{*n}\}$ 线性表示. 易验证这种表示是唯一的, 因此 $\{v^{*1},\cdots,v^{*n}\}$ 是 V^* 的一组基, 称为 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的对偶基. 所以 V^* 是 F 上的 n 维向量空间.

若用 V^{**} 表示 V^* 的对偶空间, 则有

定理 2.1 V 是 V^* 的对偶空间, 即 $V=V^{**}$.

证明 定义

$$<v,v^*>=v^*(v),\ \ v\in V,v^*\in V^*. \tag{2.2}$$

则对任意的 $v^*,w^*\in V^*$, $a\in F$, 有

$$<v,v^*+w^*>=(v^*+w^*)(v)=v^*(v)+w^*(v)=<v,v^*>+<v,w^*>,$$

$$<v,aw^*>=(aw^*)(v)=aw^*(v)=a<v,w^*>,$$

这说明 $<,>$ 是定义在 $V\times V^*$ 上的 F- 值函数, 并且对每一个变量都是线性的. 在 (2.2) 中固定向量 $v\in V$, 则 $<v,\cdot>$ 是 V^* 上的 F- 值线性函数.

反过来, V^* 上的任何一个 F- 值线性函数都可以这样表示. 设 φ 是 V^* 上任一个 F- 值线性函数, 令 $v=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^{*i})v_i$, 则对任意的 $v^*\in V^*$ 有

$$<v,v^*>=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^{*i})<v_i,v^*>=\sum_{i=1}^{n}v^*(v_i)\varphi(v^{*i})=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^*(v_i)v^{*i})=\varphi(v^*).$$

因此 V 可以看成 V^* 上的 F- 值线性函数构成的向量空间, 即 V 是 V^* 的对偶空间, $V=V^{**}$. □

上面定理说明,V^* 和 V 的对偶关系是相互的.

定义 2.1 向量空间 V 上的一个内积定义为满足下列条件的一个映射 $<,>: V\times V\to\mathbb{R}$

(1) $<v,w>=<w,v>$;

(2) $<av,w>=a<v,w>$;

(3) $<v_1+v_2,w>=<v_1,w>+<v_2,w>$;

(4) $<v,v>\geq 0$, 等号成立当且仅当 $v=0$,

其中 $v,v_1,v_2,w\in V$, $a\in\mathbb{R}$.

利用内积可以在向量空间 V 中引入范数. $v\in V$ 的范数, 或者 v 的长度定义为

$$|v|=\sqrt{<v,v>}.$$

$|v|=1$ 的向量称为单位向量. 关于内积有 Schwarz 不等式

$$<v,w>\leq|v|\cdot|w|,$$

以及三角不等式

$$|v+w|\leq|v|+|w|.$$

定义 2.2 向量空间 V 和 V 上的一个内积一起称为欧氏向量空间, 简记为 $(V,<,>)$.

在欧氏向量空间 $(V,<,>)$ 中, 可以引入角度这一几何概念. 对于任意两个非零向量 $v,w\in V$, 由下式唯一确定一个角度 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$

$$\cos\theta=\frac{<v,w>}{|v|\cdot|w|}.$$

如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 即 $<v,w>=0$, 则称向量 v 和 w 是正交的. 若 $\dim V=n$, $(V,<,>)$ 的 n 个两两正交的单位向量称为 V 的一组正交规范基, 通常简称为 V 的一组幺正标架.

定理 2.2 在欧氏向量空间 $(V,<,>)$ 中, 总存在幺正标架.

证明 设 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的任意一组基, 定义

$$e_1=\frac{v_1}{|v_1|},$$

再归纳定义

$$e_k=\frac{v_k-\sum_{i=1}^{k-1}<e_i,v_k>e_i}{|v_k-\sum_{i=1}^{k-1}<e_i,v_k>e_i|}.$$

易验证 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $(V,<,>)$ 的一组正交规范基, 这个构造正交规范基的过程称为 Schmidt 正交化. □

显然对于 $(V,<,>)$ 的一组幺正标架 $e_1,\cdots,e_n$, 有

$$<e_i,e_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

2.1.2 张量积与张量

设 V,W,Z 都是数域 F 上的有限维向量空间.

定义 2.3 映射 $f:V\to Z$ 称为线性的, 如果对于任意的 $v_1,v_2\in V$, $a_1,a_2\in F$ 有

$$f(a_1v_1+a_2v_2)=a_1f(v_1)+a_2f(v_2).$$

映射 $f:V\times W\to Z$ 称为双线性的, 如果 f 对于每一个变量都是线性的, 即对于任意的 $v,v_1,v_2\in V$, $w,w_1,w_2\in W$ 以及 $a_1,a_2\in F$ 有

$$f(a_1v_1+a_2v_2,w)=a_1f(v_1,w)+a_2f(v_2,w),$$

$$f(v,a_1w_1+a_2w_2)=a_1f(v,w_1)+a_2f(v,w_2).$$

完全类似可定义 r 重线性映射

$$f:V_1\times\cdots\times V_r\to Z,$$

其中 $V_1,\cdots,V_r$ 都是 F 上的向量空间. 从 $V_1\times\cdots\times V_r$ 到 Z 的所有 r 重线性映射的集合记为 $\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$.

设 $f,g\in\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$, $a\in F$, 对于任意的 $v_i\in V_i$, $1\leq i\leq r$, 令

$$(f+g)(v_1,\cdots,v_r)=f(v_1,\cdots,v_r)+g(v_1,\cdots,v_r),$$

$$(af)(v_1,\cdots,v_r)=af(v_1,\cdots,v_r),$$

则 $f+g,af\in\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$. 故 $\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$ 关于上面两种运算成为数域 F 上的向量空间.

下面引入向量空间的张量积概念, 目的是把 $V\times W$ 上的双线性映射转化为线性映射. 确切地说: 对于给定的给定数域 F 上的两个向量空间 V 和 W, 要构造只依赖于 V 和 W 的向量空间 Y 以及双线

性映射 $h: V\times W\to Y$, 对于任意的双线性映射 $f: V\times W\to Z$, 都存在唯一的线性映射 $g: Y\to Z$, 满足

$$f = g\circ h: V\times W\to Z.$$

要构造的向量空间 Y 就是 V 和 W 的张量积, 记做 $Y=V\otimes W$.

为了更清楚地了解张量积的概念, 首先看对偶空间 V^* 和 W^* 的张量积. 设 $v^*\in V^*$, $w^*\in W^*$, v^* 和 w^* 的张量积 $v^*\otimes w^*$ 定义为

$$v^*\otimes w^*(v,w) = v^*(v)\cdot w^*(w) =< v, v^* >< w, w^* >,$$

其中 $v\in V, w\in W$, 从而 $v^*\otimes w^*$ 是 $V\times W$ 上的双线性函数. 故运算 $\otimes$ 是从 $V^*\times W^*$ 到 $\mathcal{L}(V,W;F)$ 的双线性映射.

向量空间 V^* 和 W^* 的张量积 $V^*\otimes W^*$ 是指形如 $v^*\otimes w^*(v^*\in V^*, w^*\in W^*)$ 的元素所生成的向量空间. 在 V^* 和 W^* 中分别取基 $\{v^{*i}|\ 1\le i\le n\}$ 和 $\{w^{*j}|\ 1\le j\le m\}$, 因为 $\otimes$ 是双线性映射, 所以

$$v^*\otimes w^* = \sum_{i,j} v^*(v_i)w^*(w_j)v^{*i}\otimes w^{*j},$$

这里 $\{v_i\}$ 和 $\{w_j\}$ 分别是 $\{v^{*i}\}$ 和 $\{w^{*i}\}$ 的对偶基, 因此 $V^*\otimes W^*$ 中的元素都可以表示成 $v^{*i}\otimes w^{*j}$ 的线性组合. 容易证明 $v^{*i}\otimes w^{*j}$ 是线性无关的, 所以构成张量积 $V^*\otimes W^*$ 的基, 从而 $V^*\otimes W^*$ 是 $n\times m$ 维向量空间. 另一方面, 容易证明任意一个 F- 值双线性函数 $f: V\times W\to F$ 都可以表示成 $v^{*i}\otimes w^{*j}$ 的线性组合, 因此

$$V^*\otimes W^* = \mathcal{L}(V,W;F).$$

向量空间 V 和 W 分别是 V^* 和 W^* 的对偶空间, 完全类似可以定义张量积 $V\otimes W$, 且有

$$V\otimes W = \mathcal{L}(V^*,W^*;F).$$

若命 $< v\otimes w, v^*\otimes w^* >=< v, v^* >< w, w^* >$, 可见 $V\otimes W$ 和 $V^*\otimes W^*$ 是互为对偶的. 因此

$$V^*\otimes W^* = (V\otimes W)^*.$$

下面证明如上定义的张量积就可以把 $V\times W$ 上的双线性映射转化为线性映射.

定理 2.3 设 $h: V\times W\to V\otimes W$ 是张量积 $\otimes$ 给出的双线性映射, 即对 $v\in V$, $w\in W$ 有

$$h(v,w) = v\otimes w.$$

则对任意的双线性映射 $f: V\times W\to Z$, 存在唯一的线性映射 $g: V\otimes W\to Z$, 使得

$$f = g\circ h: V\times W\to Z.$$

证明 设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 和 $\{w_1,\cdots,w_m\}$ 分别为 V 和 W 的基. 定义线性映射 $g: V\otimes W\to Z$, 使得它在基上的作用为

$$g(v_i\otimes w_j) = f(v_i,w_j),\ \ 1\le i\le n,\ \ 1\le j\le m.$$

则对任意

$$v=\sum_{i=1}^n a_iv_i\in V,\ \ w=\sum_{j=1}^m b_jw_j\in W,$$

有

$$g(v\otimes w)=\sum_{i,j}a_ib_jg(v_i\otimes w_j)=\sum_{i,j}a_ib_jf(v_i,w_j)=f(v,w),$$

所以 $f=g\circ h$. 并且显然 g 是唯一确定的. □

推论 2.1 向量空间 $\mathcal{L}(V,W;Z)$ 和 $\mathcal{L}(V\otimes W;Z)$ 是同构的.

证明 定义映射

$$\varphi:\mathcal{L}(V\otimes W;Z)\to\mathcal{L}(V,W;Z),$$

为 $\varphi(g)=g\circ h,\ \ g\in\mathcal{L}(V\otimes W;Z)$, 其中 h 如上面定理中所定义. 由定理 2.3 知 φ 是双射, 显然 φ 是线性的, 因此 φ 是同构. □

定理 2.4 张量积运算 $\otimes$ 适合结合律. 即对任意的 $\phi\in V^*$, $\varphi\in W^*$, $\psi\in Z^*$ 有

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi=\phi\otimes(\varphi\otimes\psi).$$

证明 对任意 $v\in V$, $w\in W$, $z\in Z$, 有

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi(v,w,z)=(\phi\otimes\varphi)(v,w)\psi(z)=\phi(v)\varphi(w)\psi(z).$$

同理可得

$$\phi\otimes(\varphi\otimes\psi)(v,w,z)=\phi(v)\varphi(w)\psi(z).$$

所以

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi=\phi\otimes(\varphi\otimes\psi).$$

□

双线性映射的张量积运算可以推广到任意的 r 重线性映射, 也就是可类似定义张量积 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_r$, 即有 r 重线性映射

$$h:V_1\times\cdots\times V_r\to V_1\otimes\cdots\otimes V_r,$$

使得对任意 r 重线性映射 $f\in\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$, 都存在唯一的线性映射 $g\in\mathcal{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_r;Z)$, 使得 $f=g\circ h$. 此时 $\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_r)=\prod_{i=1}^r\dim V_i$.

定义 2.4 设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间, V^* 为其对偶空间. 张量积

$$V_s^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s}$$

中的元素称为 (r,s) 型张量, 其中 r 是张量的反变阶数, s 是其协变阶数. 一阶反变张量即为反变向量, F 中的元素看作 (0,0) 型张量. 根据上面的讨论, 有 $\dim V_s^r=n^{r+s}$, 且

$$V_s^r=\mathcal{L}(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{r},\underbrace{V,\cdots,V}_{s};F).$$

设 $\{v_i\}$ 是 V 的一组基, $\{\omega^i\}$ 是其对偶基, 则空间 V_s^r 的基为

$$v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_r}\otimes\omega^{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{k_s},\ \ 1\le i_1,\cdots,i_r,k_1,\cdots,k_s\le n.$$

因此任意 (r,s) 型张量 x 可以唯一地表示为

$$x=\sum_{i_1,\cdots,i_r;k_1,\cdots,k_s}x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r}v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_r}\otimes\omega^{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{k_s},$$

其中 $x^{i_1\cdots i_r}_{k_1\cdots k_s}$ 为张量 x 在如上基下的分量.

在处理张量时候, 通常采用 Einstein 的和式约定: 在一个单项表达式中如果出现重复的上, 下指标, 表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和, 而略去和号不写.

(r,s) 型张量的空间 V^r_s 是向量空间, 所以同类型的张量可以相加, 张量也可以进行数乘. 下面定义张量的乘法和缩并这两种重要的运算.

定义 2.5 设 x 是 (r_1,s_1) 型张量, y 是 (r_2,s_2) 型张量, 则它们的张量积 $x\otimes y$ 是如下定义的 (r_1+r_2,s_1+s_2) 型张量:

$$x\otimes y(\theta^1,\cdots,\theta^{r_1+r_2},v_1,\cdots,v_{s_1+s_2})=x(\theta^1,\cdots,\theta^{r_1},v_1,\cdots,v_{s_1})y(\theta^{r_1+1},\cdots,\theta^{r_1+r_2},v_{s_1+1},\cdots,v_{s_1+s_2}),$$

$x\otimes y$ 称为张量 x 和 y 的乘法运算, 显然张量的乘法运算满足结合律和分配律.

定义 2.6 取两个指标 λ,μ, $1\le\lambda\le r$, $1\le\mu\le s$. 对于任意一个 (r,s) 型张量

$$x=v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\theta^s\in V^r_s,$$

令

$$C^\mu_\lambda(x)=<v_\lambda,\theta^\mu>v_1\otimes\cdots\otimes\hat{v}_\lambda\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^\mu\otimes\cdots\otimes\theta^s,$$

其中记号 ˆ 表示去掉该因子, 则 $C^\mu_\lambda(x)\in V^{r-1}_{s-1}$. 将映射 $x\mapsto C^\mu_\lambda(x)$ 作线性扩张就得到线性映射 $C^\mu_\lambda: V^r_s\leftarrow V^{r-1}_{s-1}$, 称之为缩并.

设

$$T^r(V)=V^r_0=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r},$$

考虑直和 $T(V)=\sum_{r\ge0}T^r(V)$, $T(V)$ 中元素 x 可以表示成形式和

$$x=\sum_{r\ge0}x^r,\ \ x^r\in T^r(V),$$

和式中除去有限项外其余各项都为零. 这样 $T(V)$ 为一个无限维向量空间. 张量的乘法可以通过分配律扩张成 $T(V)$ 上的乘法, 使得 $T(V)$ 成为一个代数, 称为向量空间 V 的张量代数. 类似可以定义 V^* 的张量代数 $T(V^*)$.

下面讨论两类特殊的张量, 对称张量和反对称张量.

用 $\varphi(r)$ 表示自然数 $\{1,\cdots,r\}$ 的置换群. $\sigma\in\varphi(r)$ 可如下决定向量空间 $T^r(V)$ 的一个自同态. 设 $x\in T^r(V)$, 定义

$$\sigma x(\theta^1,\cdots,\theta^r)=x(\theta^{\sigma(1)},\cdots,\theta^{\sigma(r)}),$$

其中 $\theta^i\in V^*$. 易证, 若 $x=v_1\otimes\cdots\otimes v_r$, 则

$$\sigma x=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(r)},$$

这里 σ^{-1} 表示 σ 的逆元素.

定义 2.7 设 $x\in T^r(V)$. 若对任意的 $\sigma\in\varphi(r)$, 都有 $\sigma x=x$, 则称 x 是对称的 r 阶反变张量. 若对任意的 $\sigma\in\varphi(r)$, 都有 $\sigma x=(\mathrm{sgn}\sigma)x$, 则称 x 是反对称的 r 阶反变张量, 其中 $\mathrm{sgn}\sigma$ 表示置换 σ 的符号, 即

$$\mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}1, & \sigma\text{是偶置换},\\ -1, & \sigma\text{是奇置换}.\end{cases}$$

定理 2.5 设 $x \in T^r(V)$, 则 x 是对称张量当且仅当它的分量关于各指标是对称的; x 是反对称张量当且仅当它的分量关于各指标是反对称的.

证明 设 V 的基底为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, 则当 x 是对称张量时, 对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$ 有

$$x^{i_1\cdots i_r} = x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = \sigma x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = x(v^{*i_{\sigma(1)}}, \cdots, v^{*i_{\sigma(r)}}) = x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}.$$

反之亦然. 若 x 是反对称张量时, 对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$ 有

$$x^{i_1\cdots i_r} = x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = (\mathrm{sgn}\sigma) x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}.$$

反之亦然. □

记 $P^r(V)$ 为全体对称的 r 阶反变张量的集合, $\Lambda^r(V)$ 为全体反对称的 r 阶反变张量的集合. 显然 $P^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V)$ 都是 $T^r(V)$ 的线性子空间.

定义 2.8 对任意的 $x \in T^r(V)$, 令

$$S_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} \sigma x,$$

$$A_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma x,$$

则 $S_r, A_r : T^r(V) \to T^r(V)$ 都是 $T^r(V)$ 的自同态, 分别称为 r 阶反变张量的对称化算子和反对称化算子.

定理 2.6 $P^r(V) = S_r(T^r(V)), \quad \Lambda^r(V) = A_r(T^r(V)).$

证明 首先对对称化算子证明. 设 $x \in T^r(V)$, 则对任意的 $\tau \in \varphi(r)$, 有

$$\tau(S_r(x)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} \tau(\sigma(x)) = S_r(x),$$

所以 $S_r(T^r(V)) \subset P^r(V)$.

另一方面, 易验证对称张量在对称化算子作用下不变, 因此 $P^r(V) = S_r(T^r(V))$.

下面证明 $\Lambda^r(V) = A_r(T^r(V))$. 设 $x \in T^r(V)$, 则对任意的 $\tau \in \varphi(r)$, 有

$$\begin{aligned}
\tau(A_r(x)) &= \tau(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma x) \\
&= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\sigma)(\tau\sigma)x \\
&= (\mathrm{sgn}\tau)\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\tau)(\mathrm{sgn}\sigma)(\tau\sigma)x \\
&= (\mathrm{sgn}\tau)\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}(\tau\sigma))(\tau\sigma)x \\
&= (\mathrm{sgn}\tau)A_r(x).
\end{aligned}$$

因此 $A_r(T^r(V)) \subset \Lambda^r(V)$.

反过来, 设 $x \in \Lambda^r(V)$, 则对任意的 $\tau \in \varphi(r)$, 有 $\tau(x) = \mathrm{sgn}(\tau)x$, 故

$$A_r(x) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma x = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)} (\mathrm{sgn}\sigma\,\mathrm{sgn}\sigma)x = x,$$

即 $x \in A_r(T^r(V))$. 从而 $\Lambda^r(V) \subset A_r(T^r(V))$. □

上面关于对称张量和反对称张量的讨论完全适用于协变张量. 全体对称的 r 阶协变张量的集合记为 $P^r(V^*)$, 全体反对称的 r 阶协变张量的集合记作 $\Lambda^r(V^*)$.

§2.2 外代数

由于 Cartan 系统地发展了外微分方法, 使得反对称张量在流形理论的研究中占有非常重要的作用. 为此, 我们对反对称张量作进一步的讨论. 反对称的 r 阶反变张量也叫外 r 次向量, 空间 $\Lambda^r(V)$ 称为外 r 次向量空间. 为方便起见, 约定 $\Lambda^1(V) = V$, $\Lambda^0(V) = F$.

下面引入反对称反变张量的外积运算.

定义 2.9 设 ξ 是外 k 次向量, η 是外 l 次向量, 令

$$\xi \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}(\xi \otimes \eta),$$

其中 A_{k+l} 是反对称化算子, 则 $\xi \wedge \eta$ 是外 $k+l$ 次向量, 称为外向量 ξ 和 η 的外积.

定理 2.7 外积是双线性的, 且满足下列运算规律

(1) (分配律) $(a\xi_1 + b\xi_2) \wedge \eta = a\xi_1 \wedge \eta + b\xi_2 \wedge \eta, \quad \xi \wedge (a\eta_1 + b\eta_2) = a\xi \wedge \eta_1 + b\xi \wedge \eta_2;$

(2) (反交换律) $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi;$

(3) (结合律) $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

其中 $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$, $\zeta \in \Lambda^h(V)$, $a, b \in F$.

证明 因为张量积和反对称化算子都是线性的, 故外积是双线性的.

(1) 显然成立.

(2) 因为 $\xi \wedge \eta$ 是反对称张量, 故对任意的 $\tau \in \varphi(k+l)$ 有

$$\tau(\xi \wedge \eta) = (\operatorname{sgn} \tau) \xi \wedge \eta.$$

现取

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & l \end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{kl}$, 故对任意的 $v^{*1}, \cdots, v^{*k+l} \in V^*$ 有

$$\begin{aligned}
& \xi \wedge \eta(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l}) \\
= \ & (-1)^{kl} \xi \wedge \eta(v^{*\tau(1)}, \cdots, v^{*\tau(k+l)}) \\
= \ & \frac{(-1)^{kl}}{k!l!} \sum_{\sigma \in \varphi(k+l)} (\operatorname{sgn}\sigma) \xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k)}) \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l)}) \\
= \ & \frac{(-1)^{kl}}{k!l!} \sum_{\sigma \in \varphi(k+l)} (\operatorname{sgn}\sigma) \eta(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(l)}) \xi(v^{*\sigma(l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(l+k)}) \\
= \ & (-1)^{kl} \eta \wedge \xi(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l}).
\end{aligned}$$

从而 (2) 得证.

(3) 对任意 $v^{*1}, \cdots, v^{*k+l+h} \in V^*$, 由定义得

$$
\begin{aligned}
& (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta(v^{*1}, \cdots, v^{*k+l+h}) \\
= \; & \frac{1}{(k+l)!h!} \sum_{\sigma \in \varphi(k+l+h)} (\mathrm{sgn}\sigma)(\xi \wedge \eta)(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l)}) \zeta(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)}) \\
= \; & \frac{1}{(k+l)!h!} \sum_{\sigma \in \varphi(k+l+h)} (\mathrm{sgn}\sigma) \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in \tilde{\varphi}(k+l)} (\mathrm{sgn}\tau) \xi(v^{*\tau\sigma(1)}, \cdots, v^{*\tau\sigma(k)}) \\
& \eta(v^{*\tau\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\tau\sigma(k+l)}) \zeta(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)}),
\end{aligned}
$$

其中 $\tilde{\varphi}(k+l)$ 表示元素 $\sigma(1), \cdots, \sigma(k+l)$ 的置换群. 因此对于每一个固定的 $\tau \in \tilde{\varphi}(k+l)$, 有

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \varphi(k+l+h)} (\mathrm{sgn}\sigma)(\mathrm{sgn}\tau) \xi(v^{*\tau\sigma(1)}, \cdots, v^{*\tau\sigma(k)}) \eta(v^{*\tau\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\tau\sigma(k+l)}) \\
& \zeta(v^{*\tau\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\tau\sigma(k+l+h)}) \\
= \; & \sum_{\sigma \in \varphi(k+l+h)} (\mathrm{sgn}\sigma) \xi(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(k)}) \eta(v^{*\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l)}) \zeta(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)}) \\
= \; & (k+l+h)! A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta)(v^{*1}, \cdots, v^{*(k+l+h)}).
\end{aligned}
$$

因此

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \frac{(k+l+h)!}{k!l!h!} A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta).$$

同理可得

$$\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = \frac{(k+l+h)!}{k!l!h!} A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta).$$

从而 $\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta$. □

推论 2.2 设 $\xi \in \Lambda^1(V) = V$, 则 $\xi \wedge \xi = 0$.

推论 2.3 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = r! A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}), \tag{2.3}$$

其中 $1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n$.

下面考虑空间 $\Lambda^r(V)$ 的维数及基.

定理 2.8 设 $\mathrm{dim} V = n$.

(i) 若 $r > n$, 则 $\Lambda^r(V) = \{0\}$.

(ii) 若 $n \geq r > 0$, 则

$$\mathrm{dim}\Lambda^r(V) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

证明 由外积的反交换律知, (2.3) 的左侧仅当 $i_1, \cdots, i_r$ 全不相同时才不为零, 利用反对称化算子的线性性质, 可知 (i) 成立.

设 $n \geq r > 0$. 首先证明 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$ 是线性无关的向量组. 若不然, 设

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0,$$

且 $a_{i_1 \cdots i_r} (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$ 中至少有一个不为零. 不妨设 $a_{1 \cdots r} \neq 0$, 用 $e_{r+1} \wedge \cdots \wedge e_n$ 外乘上式得

$$a_{1 \cdots r} e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \wedge e_{r+1} \wedge \cdots \wedge e_n = 0.$$

从而

$$0=a_{1\cdots r}e_1\wedge\cdots\wedge e_n(\omega^1,\cdots,\omega^n)=a_{1\cdots r},$$

其中 $\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$ 是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的对偶基, 这显然与假设矛盾. 从而 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(1\le i_1<\cdots<i_r\le n)$ 为 $\Lambda^r(V)$ 的一组基. 其所含向量的个数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!},$$

所以有

$$\dim\Lambda^r(V)=\binom{n}{r}.$$

□

定义 2.10 记 $\Lambda(V)=\sum_{r=0}^{n}\Lambda^r(V)$, 则 $\Lambda(V)$ 为 2^n 维向量空间. 对

$$\xi=\sum_{r=0}^{n}\xi^r,\quad \eta=\sum_{s=0}^{n}\eta^s,$$

其中 $\xi^r\in\Lambda^r(V),\eta^s\in\Lambda^s(V)$, 令 ξ 和 η 的外积为

$$\xi\wedge\eta=\sum_{r,s=0}^{n}\xi^r\wedge\eta^s.$$

则 $\Lambda(V)$ 对于外积成为一个代数, 称为向量空间 V 的外代数或 Grassmann 代数.

向量空间 $\Lambda(V)$ 的基底是 $\{1,e_i(1\le i\le n),e_{i_1}\wedge e_{i_2}(1\le i_1<i_2\le n),\cdots,e_1\wedge\cdots\wedge e_n\}$. 类似地, 可定义对偶空间 V^* 的外代数

$$\Lambda(V^*)=\sum_{0\le r\le n}\Lambda^r(V^*).$$

空间 $\Lambda^r(V^*)$ 的元素称为向量空间 V 上的 r 次外形式, 它是 V 上的反对称 r 重线性函数.

设 $f:V\to W$ 是从向量空间 V 到 W 的线性映射, 则它诱导出外形式空间 $\Lambda^r(W^*)$ 到 $\Lambda^r(V^*)$ 的线性映射 f^*. 即对 $\phi\in\Lambda^r(W^*)$, 以及任意的 $v_1,\cdots,v_r\in V$, 令

$$f^*\phi(v_1,\cdots,v_r)=\phi(f(v_1),\cdots,f(v_r)).$$

易见 f^* 是线性的. 下面证明 f^* 和外积运算是可交换的, 从而 f^* 是外代数 $\Lambda(W^*)$ 到 $\Lambda(V^*)$ 的同态.

定理 2.9 $f:V\to W$ 是线性映射, 则 f^* 和外积运算可交换. 即对任意的 $\phi\in\Lambda^r(W^*)$, $\psi\in\Lambda^s(W^*)$ 有

$$f^*(\phi\wedge\psi)=f^*\phi\wedge f^*\psi.$$

证明 对任意 $v_1,\cdots,v_{r+s}\in V$, 有

$$\begin{aligned}
&f^*(\phi\wedge\psi)(v_1,\cdots,v_{r+s})\\
=\;&\phi\wedge\psi(f(v_1),\cdots,f(v_{r+s}))\\
=\;&\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\varphi(r+s)}(\mathrm{sgn}\sigma)\phi(f(v_{\sigma(1)}),\cdots,f(v_{\sigma(r)}))\cdot\psi(f(v_{\sigma(r+1)}),\cdots,f(v_{\sigma(r+s)}))\\
=\;&\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\varphi(r+s)}(\mathrm{sgn}\sigma)f^*\phi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})\cdot f^*\psi(v_{\sigma(r+1)},\cdots,v_{\sigma(r+s)})\\
=\;&f^*\phi\wedge f^*\psi(v_1,\cdots,v_{r+s}).
\end{aligned}$$

所以 $f^*(\phi\wedge\psi)=f^*(\phi)\wedge f^*(\psi)$. □

下面再给出有关外积的几个有用的结果.

定理 2.10 向量 $v_1,\cdots,v_r\in V$ 线性相关的充分必要条件是

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r=0.$$

证明 若 $v_1,\cdots,v_r$ 线性相关, 不妨设 v_r 可以表示成 $v_1,\cdots,v_{r-1}$ 的线性组合

$$v_r=a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1},$$

则

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge v_r=v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge(a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1})=0.$$

若 $v_1,\cdots,v_r\in V$ 线性无关, 则可将它们扩充为 V 的一组基 $\{v_1,\cdots,v_{r-1},v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$. 由于

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n\neq 0,$$

故

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\neq 0.$$

□

定理 2.11 (Cartan 引理) 设 $v_1,\cdots,v_r;w_1,\cdots,w_r$ 是 V 中两组向量, $r\leq n=\dim V$, 满足

$$\sum_{\alpha=1}^{r}v_\alpha\wedge w_\alpha=0. \tag{2.4}$$

如果 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 则 w_α 可表示成它们的线性组合

$$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta,\quad 1\leq\alpha\leq r,$$

且 $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$.

证明 因为 $v_1,\cdots,v_r\in V$ 线性无关, 则可将它们扩充为 V 的一组基 $\{v_1,\cdots,v_{r-1},v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$. 则可设

$$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta+\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_i.$$

把上式代入 (2.4) 得

$$\begin{aligned}0&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\alpha\wedge v_\beta+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i\\&=\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq r}(a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha})v_\alpha\wedge v_\beta+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i.\end{aligned}$$

因 $\{v_i\wedge v_j,1\leq i<j\leq n\}$ 是 $\Lambda^2(V)$ 的一组基, 故

$$a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=0,\ \ a_{\alpha i}=0.$$

即

$$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta,\quad 1\leq\alpha\leq r,$$

且 $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. □

定理 2.12 设 $v_1, \cdots, v_r$ 是 V 中 r 个线性无关的向量, w 是 V 上的外 p 次向量. 则存在 $\phi_1, \cdots, \phi_r \in \Lambda^{p-1}(V)$, 使得 w 能表示成

$$w = v_1 \wedge \phi_1 + \cdots + v_r \wedge \phi_r \tag{2.5}$$

的充分必要条件是

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w = 0. \tag{2.6}$$

证明 当 $p + r > n$ 时, 定理自然成立.

下面假设 $p + r \leq n$. 定理的必要性显然. 现在证明充分性. 因为 $v_1, \cdots, v_r$ 线性无关, 故可把 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ 扩充为 V 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$, 则 w 可以表示成

$$w = v_1 \wedge \phi_1 + v_2 \wedge \phi_2 + \cdots + v_r \wedge \phi_r + \sum_{r+1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n} \xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p},$$

其中 $\phi_1, \cdots, \phi_r \in \Lambda^{p-1}(V)$, 代入 (2.6) 得

$$\sum_{r+1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n} \xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p} = 0.$$

而 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_p}$ 是 $\Lambda^{p+r}(V)$ 的基的一部分, 从而

$$\xi^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = 0 \ \ (r + 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq n),$$

即

$$w = v_1 \wedge \phi_1 + \cdots + v_r \wedge \phi_r.$$

□

定理 2.13 设 $v_\alpha, w_\alpha; v'_\alpha, w'_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq k)$ 是 V 中两组向量, 如果 $\{v_\alpha, w_\alpha | 1 \leq \alpha \leq k\}$ 线性无关, 且

$$\sum_{\alpha=1}^{k} v_\alpha \wedge w_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} v'_\alpha \wedge w'_\alpha, \tag{2.7}$$

则 v'_α, w'_α 都是 v_α, w_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ 的线性组合, 且它们也是线性无关的.

证明 将 (2.7) 自乘 k 次可得

$$k!(v_1 \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_k) = k!(v'_1 \wedge w'_1 \wedge \cdots \wedge v'_k \wedge w'_k). \tag{2.8}$$

因为 v_α, w_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ 线性无关, 故上式左边不为零. 由定理 2.10 知 v'_α, w'_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ 也线性无关.

由 (2.8) 知

$$v_1 \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_k \wedge v'_\alpha = 0,$$

即 $\{v_1, w_1, \cdots, v_k, w_k, v'_\alpha\}$ 线性相关, 所以 v'_α 能表示成 v_α, w_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ 的线性组合. 类似知 w'_α 也能表示成 v_α, w_α $(1 \leq \alpha \leq k)$ 的线性组合. □

§2.3 切丛与向量场

本节主要介绍 m 维光滑流形 M 的切丛 TM. 直观上, TM 是把 M 中每点 p 处的切空间 T_pM 粘在一起. M 上的微分结构诱导出 TM 的微分结构, 使之成为一个 $2m$ 维微分流形. 切丛 TM 是 M 上向量丛的一个重要例子.

定义 2.11 设 E 和 M 是两个拓扑流形,$\pi : E \to M$ 是一个连续满射, 若

(1) 对任意 $p \in M$, 纤维 $E_p = \pi^{-1}(p)$ 是 n 维向量空间.

(2) 对 M 中的每点 p, 都存在丛卡 $(\pi^{-1}(U), \psi)$, 其中 $\pi^{-1}(U)$ 是点 p 的一个开邻域 U 的原像, $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ 是同胚, 使得对所有 $q \in U$, $\psi_q = \psi\,|_{E_q}: E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$ 是向量空间的一个同构. 则称 (E, M, π) 是 M 上的一个 n 维拓扑向量丛, 简称 n 维向量丛.

M 上的 n 维拓扑向量丛 (E, M, π) 称为平凡的, 如果存在整体丛卡 $\psi : E \to M \times \mathbb{R}^n$. 一个连续映射 $\sigma : M \to E$ 称为向量丛 (E, M, π) 的截面, 若对任意 $p \in M$, 有 $\pi \circ \sigma(p) = p$.

对每个正整数 n 及拓扑流形 M, 都有 n 维向量丛 $(M \times \mathbb{R}^n, M, \pi)$, 其中 $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to M$, $(x, v) \mapsto x$ 是投影. 恒同映射是整体丛卡, 故这个向量丛是平凡的.

定义 2.12 设 (E, M, π) 是 M 上 n 维拓扑向量丛, 令 $\mathcal{B} = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha) | \alpha \in I\}$, 若它满足

(1) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$;

(2) 对每对 (α, β), 都存在函数 $A_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$, 使得对应的连续映射

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

由 $(p, v) \mapsto (p, (A_{\alpha,\beta}(p))(v))$ 给出. 则称 $\mathcal{B}$ 为 (E, M, π) 的一个丛图册. $\{A_{\alpha,\beta} | \alpha, \beta \in I\}$ 中的元素称为丛图册 $\mathcal{B}$ 的过渡函数.

定义 2.13 设 E 和 M 是两个光滑流形,$\pi : E \to M$ 是光滑映射, 使得 (E, M, π) 是 n 维拓扑向量丛. 若过渡函数都是光滑的, 则称丛图册 $\mathcal{B}$ 是光滑的. 若拓扑向量丛上有一个极大光滑丛图册, 则称该向量丛为光滑向量丛, 其光滑截面称为光滑向量场. (E, M, π) 的所有光滑向量场构成的集合记作 $\Gamma(E)$.

定义 2.14 设 (E, M, π) 是 M 上的光滑向量丛, 对任意的 $v, w \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$, 定义 $\Gamma(E)$ 上的运算 $+$ 和 $\cdot$ 如下

(1) $(v + w)_p = v_p + w_p$,

(2) $(f \cdot v)_p = f(p) \cdot v_p$.

如果 U 是 M 的一个开子集, 若 U 上的向量场 $v_1, \cdots, v_n : U \to E$ 使得对每点 $p \in U$, $\{(v_1)_p, \cdots, (v_n)_p\}$ 是向量空间 E_p 的一组基, 则称 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 E 的一个局部标架.

例 2.1(切丛) 设 M 是 m 维光滑流形, $\mathcal{A}$ 是 M 的极大坐标图册. 令 $TM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_pM\}$, $\pi : TM \to M, (p, v) \mapsto p$ 是投影. 对任意 $p \in M$, 纤维 $\pi^{-1}(\{p\})$ 是 M 在点 p 处的 m 维切空间 T_pM. 称 (TM, M, π) 为 M 的切丛.

下面证明 (TM, M, π) 是一个光滑向量丛.

对 $\mathcal{A}$ 中的局部坐标系 $(U, \phi; x^i)$, $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, 定义 $\phi^* : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 如下

$$\phi^* : (p, \sum_{k=1}^m v_k (\frac{\partial}{\partial x_k})_p) \mapsto (\phi(p), (v_1, \cdots, v_m)).$$

由于

$$\{(\phi^*)^{-1}(W) \subset TM | (U, \phi) \in \mathcal{A}, W \subset \phi(U) \times \mathbb{R}^m\}$$

是 TM 上的一个拓扑基, 其中 W 是 $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$ 中的开集. 在此拓扑下, $(\pi^{-1}(U), \phi^*)$ 是 $2m$ 维拓扑流形 TM 的一个坐标卡.

现设 $(U,\phi;x^i)$ 和 $(V,\varphi;y^j)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的任意两个局部坐标系, $p\in U\cap V$, 则过渡函数

$$(\varphi^*)\circ(\phi^*)^{-1}:\phi^*(\pi^{-1}(U\cap V))\to\varphi^*(\pi^{-1}(U\cap V))$$

为

$$(a,b)\mapsto(\varphi\circ\phi^{-1}(a),\sum_{k=1}^m\frac{\partial y^1}{\partial x^k}(\phi^{-1}(a))b_k,\cdots,\sum_{k=1}^m\frac{\partial y^m}{\partial x^k}(\phi^{-1}(a))b_k).$$

因 $\varphi\circ\phi^{-1}$ 是光滑的, 故 $(\varphi^*)\circ(\phi^*)^{-1}$ 也是光滑的, 从而

$$\mathcal{A}^*=\{(\pi^{-1}(U),\phi^*)|(U,\phi)\in\mathcal{A}\}$$

是 TM 的一个光滑坐标图册, 因此 $(TM,\mathcal{A}^*)$ 是 $2m$ 维光滑流形. 显然投影 $\pi:TM\to M$ 是光滑的.

对每一点 $p\in M$, π 的纤维 $\pi^{-1}(p)$ 是 M 在 p 点的切空间 T_pM, 因此是 m 维向量空间. 对 $\mathcal{A}$ 中的坐标卡 (U,ϕ), $\phi:U\to\mathbb{R}^m$, 定义 $\bar{\phi}:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^m$ 为

$$\bar{\phi}:(p,\sum_{k=1}^m v_k(\frac{\partial}{\partial x^k})_p)\mapsto(p,(v_1,\cdots,v_m)).$$

它在切空间 T_pM 上的限制 $\bar{\phi}_p=\bar{\phi}|_{T_pM}:T_pM\to\{p\}\times\mathbb{R}^m$ 由下式给出

$$\bar{\phi}_p:\sum_{k=1}^m v_k(\frac{\partial}{\partial x^k})_p\mapsto(v_1,\cdots,v_m),$$

所以它是向量空间的一个同构. 这说明 $\bar{\phi}:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^m$ 是丛卡. 可见

$$\mathcal{B}=\{(\pi^{-1}(U),\bar{\phi})|(U,\phi)\in\mathcal{A}\}$$

是丛图册, 使得 (TM,M,π) 为一个 m 维拓扑向量丛. 从 $\mathcal{B}$ 出发很容易定义极大丛图册 $\hat{\mathcal{B}}$, 使得它是一个光滑向量丛.

M 上所有光滑切向量场 $X:M\to TM$ 的集合记作 $\Gamma(TM)$. 显然 $\Gamma(TM)$ 关于加法和乘法是封闭的, 因而是一个向量空间. 而且可以进一步定义光滑函数与光滑切向量场的乘法如下: 对于任意的 $f\in C^\infty(M)$, $X\in\Gamma(TM)$, $p\in M$, M 上的切向量场 fX 定义为

$$(fX)(p)=f(p)\cdot X(p).$$

在任意的容许局部坐标系 $(U,\phi;x^i)$ 下, 如果 $X|_U=\sum_{i=1}^m X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则有

$$(fX)|_U=\sum_{i=1}^m(f|_U\cdot X^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

可见 $fX\in\Gamma(TM)$. 所以 $\Gamma(TM)$ 实际上是一个 $C^\infty(M)$ 模, 即 $C^\infty(M)$ 上的向量空间.

下面引入光滑流形 M 上的切向量场集合 $\Gamma(TM)$ 上的李括号或 Poisson 括号.

定义 2.15 设 M 为光滑流形, 对任意 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 定义 $[X,Y]:C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ 为

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f)),$$

称 $[X,Y]$ 为 X,Y 的李括号或 Poisson 括号.

给定局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$, 设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $X^i,Y^i\in C^\infty(M)$, 则有

$$[X,Y]f(x)=\sum_{i,j}(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial f}{\partial x^i}(x),\quad x\in\varphi(U).$$

可见 $[X,Y]$ 仍然是 M 上的光滑向量场.

光滑向量场的李括号具有下面的性质.

定理 2.14 设 M 为光滑流形, 则对任意 $X,Y\in\Gamma(TM)$, $f,g\in C^\infty(M)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 有
(1) $[X,Y](\lambda\cdot f+\mu\cdot g)=\lambda\cdot[X,Y](f)+\mu\cdot[X,Y](g)$,
(2) $[X,Y](f\cdot g)=[X,Y](f)\cdot g+f\cdot[X,Y](g)$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}
& [X,Y](\lambda\cdot f+\mu\cdot g)\\
= & X(Y(\lambda\cdot f+\mu\cdot g))-Y(X(\lambda\cdot f+\mu\cdot g))\\
= & \lambda X(Y(f))+\mu X(Y(g))-\lambda Y(X(f))-\mu Y(X(g))\\
= & \lambda[X,Y](f)+\mu[X,Y](g).
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
[X,Y](f\cdot g) &= X(Y(f\cdot g))-Y(X(f\cdot g))\\
&= X(f\cdot Y(g)+g\cdot Y(f))-Y(f\cdot X(g)+g\cdot X(f))\\
&= X(f)\cdot Y(g)+fX(Y(g))+X(g)Y(f)+gX(Y(f))\\
&\quad -Y(f)X(g)-fY(X(g))-Y(g)X(f)-gY(X(f))\\
&= f(X(Y(g))-Y(X(g)))+g(X(Y(f))-Y(X(f)))\\
&= f[X,Y](g)+g[X,Y](f).
\end{aligned}$$

□

定理 2.15 设 M 是光滑流形,$[,]$ 是李括号, 则

$$[X,f\cdot Y]=X(f)\cdot Y+f\cdot[X,Y],$$

$$[f\cdot X,Y]=f\cdot[X,Y]-Y(f)\cdot X.$$

其中 $X,Y\in\Gamma(TM)$, $f\in C^\infty(M)$.

证明 对任意 $g\in C^\infty(M)$, 有

$$\begin{aligned}
[X,f\cdot Y](g) &= X(f\cdot Y(g))-f\cdot Y(X(g))\\
&= X(f)\cdot Y(g)+f\cdot X(Y(g))-f\cdot Y(X(g))\\
&= (X(f)\cdot Y+f\cdot[X,Y])(g).
\end{aligned}$$

这就证明了第一个等式, 第二个等式类似可证. □

定义 2.16 如果在向量空间 V 上有一个乘法运算 $[,]:V\times V\to V$ 满足下面条件
(i) $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$,
(ii) $[X,Y]=-[Y,X]$,

(iii) $[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0$,
其中 $X,Y,Z\in V,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 则称 $(V,[,])$ 是一个李代数. 通常称等式 (iii) 为 Jacobi 恒等式.

定理 2.16 设 M 是光滑流形,M 上的光滑切向量构成的向量空间 $\Gamma(TM)$ 加上李括号 $[,]:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ 是一个李代数.

证明 (i) 和 (ii) 是显然的. 为证明 (iii), 只需将下式

$$[X,[Y,Z]]f=X(Y(Zf))-X(Z(Yf))-Y(Z(Xf))+Z(Y(Xf))$$

中 X,Y,Z 循环轮换, 然后把得到的三个式子相加即可. □

李群是抽象微分流形的重要代表, 它既有群结构, 又有微分结构. 下面给出李群的定义.

定义 2.17 设 G 是一个群, 并且是 m 维光滑流形. 如果 G 的乘法运算 $\varphi:G\times G\to G,\ \ \varphi(g_1,g_2)=g_1g_2$ 以及求逆运算 $\tau:G\to G,\ \ \tau(g)=g^{-1}$ 都是光滑映射, 则称 G 是一个 m 维李群.

定义 2.18 设 G 是一个李群, 对于任意 $g\in G$, 定义 G 到自身的映射 L_g,R_g 如下:

$$L_g(x)=gx,\ \ R_g(x)=xg,\ \ \forall x\in G.$$

L_g 和 R_g 的逆映射分别是 $L_{g^{-1}}$ 和 $R_{g^{-1}}$, 即 L_g,R_g 都是 G 到自身的微分同胚, 分别称为 G 的左移动和右移动.

例 2.2 $\mathbb{R}^m$ 关于向量加法成为一个 m 维李群.

例 2.3 一般线性群 $GL(m,\mathbb{R})$ 和 $GL(m,\mathbb{C})$ 都是李群.

$GL(m,\mathbb{R})$ 是 $m\times m$ 阶非退化实矩阵构成的集合, 群运算是矩阵的乘法. 因为 $GL(m,\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集, 有自然诱导的光滑结构, 容易验证矩阵的乘法运算和求逆运算都是光滑映射, 所以 $GL(m,\mathbb{R})$ 是 m^2 维李群. 类似 $GL(m,\mathbb{C})$ 是 $2m^2$ 维李群.

定义 2.19 设 G 是李群, $X\in\Gamma(TG)$, $L_p:G\to G$ 是左移动, 若对任意 $p\in G$, 有 $(L_p)_*(X)=X\circ L_p$, 称 X 是左不变向量场. 类似可以定义右不变向量场.

定理 2.17 设 G 是李群, 若 X,Y 是 G 上的左 (右) 不变向量场, 则 $[X,Y]$ 也是 G 上的左 (右) 不变向量场.

证明 对任意 $p\in G$, 设 X,Y 是 G 上的任意两个左不变向量场, 则

$$(L_p)_*([X,Y])=[(L_p)_*(X),(L_p)_*(Y)]=[X,Y],$$

这就证明了两个左不变向量场 X,Y 的李括号 $[X,Y]$ 是左不变的. 对右不变向量场类似可以证明. □

例 2.4 $\mathbb{H}\cong\mathbb{C}^2$ 中的 3 维球面 S^3 有一个如下定义的群结构 $\cdot$

$$(z,w)\cdot(\alpha,\beta)=(z\alpha-w\bar{\beta},z\beta+w\bar{\alpha}).$$

这使得 $(S^3,\cdot)$ 是一个李群, 单位元是 $e=(1,0)$. 记 $v_1=(i,0),v_2=(0,1),v_3=(0,i)$, 定义曲线 $\gamma_k:\mathbb{R}\to S^3(k=1,2,3)$ 为

$$\gamma_k:t\mapsto\cos t\cdot(1,0)+\sin t\cdot v_k.$$

则 $\gamma_k(0)=e,\gamma_k'(0)=v_k$. 所以 v_1,v_2,v_3 是切空间 T_eS^3 中的元素. 由于它们是线性无关的, 所以它们是 T_eS^3 的生成元. 利用 S^3 上的群结构可以拓展 T_eS^3 中的切向量得到 S^3 上的向量场.

对 $p\in S^3$, 令 $L_p:S^3\to S^3,q\mapsto p\cdot q$ 是左移动. 定义向量场 $X_1,X_2,X_3\in\Gamma(TS^3)$ 为

$$(X_k)_p=(L_p)_{*e}(v_k)=\frac{d}{dt}(L_p(\gamma_k(t)))|_{t=0}.$$

易验证在点 $p=(z,w)\in S^3$ 处, $X_k(k=1,2,3)$ 的值分别为

$$(X_1)_p=(z,w)\cdot(i,0)=(iz,-iw),$$

$$(X_2)_p=(z,w)\cdot(0,1)=(-w,z),$$

$$(X_3)_p=(z,w)\cdot(0,i)=(iw,iz).$$

§2.4 张量丛与外微分

设 M 是 m 维光滑流形, $p\in M$, T_pM 和 T_p^*M 分别记 M 在 p 点的切空间和余切空间. 因此在 M 的每一点 p 有 (r,s) 型张量空间

$$T_s^r(p)=\underbrace{T_pM\otimes\cdots\otimes T_pM}_{r}\otimes\underbrace{T_p^*M\otimes\cdots\otimes T_p^*M}_{s},$$

这是 m^{r+s} 维的向量空间. 令

$$T_s^r(M)=\bigcup_{p\in M}T_s^r(p).$$

类似于上节的讨论, 可以在 $T_s^r(M)$ 上引入光滑结构, 使它成为一个 m^{r+s} 维光滑流形. 这样得到的光滑流形局部上微分同胚于积流形. 自然地我们有投影

$$\pi:T_s^rM\to M,$$

它把 $T_s^r(p)$ 中的元素映到点 p, 它是光滑的满映射. $T_s^r(M)$ 称为流形 M 上的 (r,s) 型张量丛, π 称为丛投影, $T_s^r(p)$ 称为丛 $T_s^r(M)$ 在 p 点的纤维.

M 上的 $(r,0)$ 型和 $(0,r)$ 型张量场分别称为 r 阶反变张量场和 r 阶协变张量场.

如果令 $r=1$, $s=0$, 就得到流形 M 上的切丛 TM; 令 $r=0$, $s=1$, 就得到流形 M 上的余切丛 T^*M. 根据张量丛的作法, 可以类似构造 M 上的外向量丛和外形式丛, 分别记作 $\Lambda^r(M)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_pM)$ 和 $\Lambda^r(M^*)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_p^*M)$.

设 $f:M\to T_s^r(M)$ 是光滑映射, 如果

$$\pi\circ f=\mathrm{id}:M\to M,$$

即对任意的 $p\in M$, $f(p)\in T_s^r(p)$, 则称 f 是张量丛 $T_s^r(M)$ 的一个光滑截面, 或者称为 M 上的一个 (r,s) 型张量场. 切丛的截面就是 M 上的的切向量场, 余切丛的截面称为 M 上的一次微分式. 外形式丛 $\Lambda^r(M^*)$ 的光滑截面叫做 M 上的光滑 r 次外微分式. ‘

设 M 为 m 维光滑流形, M 上的 r 次外形式丛

$$\Lambda^r(M^*)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_p^*M)$$

是 M 上的向量丛. 用 $A^r(M)$ 记 r 次外形式丛 $\Lambda^r(M^*)$ 的光滑截面构成的空间, 即

$$A^r(M)=\Gamma(\Lambda^r(M^*)).$$

同理, 外形式丛 $\Lambda(M^*)=\bigcup_{p\in M}\Lambda(T_p^*M)$ 也是 M 上的向量丛, 其截面空间 $A(M)$ 的元素称为 M 上的外微分式. 显然 $A(M)$ 可以写成直和

$$A(M)=\sum_{r=0}^{m}A^r(M),$$

即每一个外微分式 ω 可以表示成

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^m,$$

其中 ω^i 是 i 次外微分式. 外形式的外积运算可以推广到外微分式空间 $A(M)$. 设 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$, 对任意的 $p \in M$, 令

$$\omega_1 \wedge \omega_2(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p),$$

右端是两个外形式的外积. 显然 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in A(M)$. 空间 $A(M)$ 关于加法, 乘法和外积构成一个代数, 而且是一个分次代数. 外积给出了映射

$$\wedge : A^r(M) \times A^s(M) \to A^{r+s}(M),$$

其中当 $r+s>m$ 时, 规定 $A^{r+s}(M)$ 为零.

外微分式空间 $A(M)$ 之所以在流形理论中十分重要, 其原因是 $A(M)$ 中有下面的外微分运算 d.

定理 2.18 设 M 是 m 维光滑流形, 则存在唯一的映射 $d: A(M) \to A(M)$, 使得 $d(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$, 并且满足下面条件:

(1) 对任意的 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$, $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

(2) 若 ω_1 是 r 次外微分式, 则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2;$$

(3) 若 f 是 M 上的光滑函数, 即 $f \in A^0(M)$, 则 df 恰好是 f 的微分;

(4) 若 $f \in A^0(M)$, 则 $d(df) = 0$.

如上所确定的映射 d 称为外微分算子.

证明 首先证明如果 d 存在, 则 d 是局部算子. 即设 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$, 且 ω_1 和 ω_2 在 M 的开集 U 上相等, 则 $d\omega_1$ 和 $d\omega_2$ 限制在 U 上也相等. 为此利用条件 (1), 只需证明: 如果 $\omega|_U = 0$, 则 $d\omega|_U = 0$. 任取一点 $p \in U$, 利用流形的局部紧致性, 有包含 p 的开邻域 W, W 的闭包 $\bar{W}$ 紧致, 使得 $p \in W \subset \bar{W} \subset U$. 由引理 1.4, 在 M 上存在光滑函数 h, 使得

$$h(q) = \begin{cases} 1, & q \in W \\ 0, & q \notin U. \end{cases}$$

这样 $h\omega \in A(M)$, 且 $h\omega \equiv 0$. 因此

$$dh \wedge \omega + hd\omega = 0,$$

$$d\omega|_W = 0.$$

由于 p 在 U 中的任意性, 所以 $d\omega$ 限制在 U 上为零.

设 ω 是定义在开集 U 上的外微分式, 利用引理 1.4, 对任意一点 $p \in U$, 有包含 p 的坐标邻域 $U_1 \subset U$, 及定义在 M 上的外微分式 $\widetilde{\omega}$, 使得

$$\widetilde{\omega}|_{U_1} = \omega|_{U_1}.$$

定义

$$d\omega|_{U_1} = d\widetilde{\omega}|_{U_1}.$$

由于外微分算子 d 的局部性, 上面的定义与 $\widetilde{\omega}$ 的选择无关, 因此 $d\omega$ 有确定的意义.

现在在局部坐标系内证明外微分 d 的唯一性. 根据条件 (1), 只需对单项式证明即可. 设在局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$ 中, ω 表示为

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r,$$

其中 f 是 U 上的光滑函数. 设 d_1, d_2 是两个微分算子, 根据条件 (1)-(4), 有

$$d_1\omega = df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r = d_2\omega,$$

其中 df 是函数 f 的微分. 由 ω 的任意性, 可得 $d_1 = d_2$.

再证存在性. 先在每个局部坐标邻域 U 内考虑. 设

$$\omega|_U = a_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

定义

$$d(\omega|_U) = da_{i_1\cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \tag{2.9}$$

显然 $d(\omega|_U)$ 是 U 上的 $r+1$ 次外微分式, 并且满足条件 (1) 和 (3).

要证明条件 (2) 成立, 只需取两个单项式

$$\alpha_1 = a dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

$$\alpha_2 = b dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}.$$

根据 (2.9) 式, 得

$$\begin{aligned}
d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= d((a dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) \wedge (b dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s})) \\
&= d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s} \\
&= (b da + a db) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s} \\
&= (da \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) \wedge (b dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) \\
&\quad + (-1)^r (a dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) \wedge (db \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) \\
&= d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^r \alpha_1 \wedge d\alpha_2.
\end{aligned}$$

所以条件 (2) 成立.

最后证明条件 (4) 成立. 设 f 是 M 上的光滑函数, 则限制在 U 上有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

因为 f 是光滑的, 它的高阶偏导数与次序无关, 故有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

所以

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i = 0.$$

再证明上述定义的 d 在整个 M 上都有定义.

若 W 是另一个坐标邻域, 由于外微分算子的局部性以及在局部坐标邻域内的唯一性, 有

$$d(\omega|_U)|_{U\cap W} = d(\omega|_{U\cap W}) = d(\omega|_W)|_{U\cap W},$$

所以由 (2.9) 式定义的外微分算子 d 在 $U \cap W$ 上是一致的, 即 d 是流形 M 上大范围定义的算子, 这就证明了满足定理条件的算子 d 的存在性. □

定理 2.19 (Poincaré 引理) $d^2 = 0$, 即对任意的外微分式 ω, 有 $d(d\omega) = 0$.

证明 因为 d 是线性算子, 所以只需取 ω 为单项式即可. 由于外微分 d 是局部算子, 故只需在一个局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$ 中讨论. 设

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r, \ \ f \in C^\infty(M),$$

则

$$d\omega = df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r,$$

再外微分一次, 利用定理 2.18 中的条件 (2) 和 (4) 可得

$$d(d\omega) = d(df) \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r - df \wedge d(dx^1) \wedge \cdots \wedge dx^r + \cdots = 0.$$

□

下面给出 Poincaré 引理在古典向量分析中的应用.

设 (x, y, z) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡尔坐标系.

(1) 若 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, 则

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

其系数构成的向量场 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ 是 f 的梯度场 $\operatorname{grad} f$.

(2) 设 $\omega = Adx + Bdy + Cdz$, 其中 A, B, C 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, 则

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\ &= (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})dx \wedge dy, \end{aligned}$$

若记向量场 $X = (A, B, C)$, 则 $d\omega$ 的系数构成的向量场

$$(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})$$

恰是向量场 X 的旋度 $\operatorname{curl} X$.

(3) 设 $\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$, 则

$$d\omega = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz = \mathrm{div} dx \wedge dy \wedge dz,$$

其中 $X = (A, B, C)$, $\operatorname{div} X$ 表示向量场 X 的散度.

由 Poincaré 引理, 立即得到古典场论的两个基本公式: $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{curl} X) = 0$.

定理 2.20 设 ω 是光滑流形 M 上的一次微分式, X 和 Y 是 M 上的光滑切向量场, 则:

$$d\omega(X, Y) = X < Y, \omega > -Y < X, \omega > - < [X, Y], \omega > . \tag{2.10}$$

证明 因为 (2.10) 式两边对于 ω 都是线性的, 故只需对单项式证明即可. 设

$$\omega = g df,$$

其中 f, g 是 M 上的光滑函数. 则

$$d\omega = dg \wedge df.$$

根据切向量和余切向量的对偶性质, (2.10) 式的左边为

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= dg \wedge df(X,Y) \\ &= (dg \otimes df - df \otimes dg)(X,Y) \\ &= < X, dg >< Y, df > - < Y, dg >< X, df > \\ &= Xg \cdot Yf - Xf \cdot Yg. \end{aligned}$$

另一方面

$$< X, \omega >=< X, gdf >= g \cdot Xf,$$

故

$$Y < X, \omega >= Yg \cdot Xf + g \cdot Y(Xf).$$

同理可得

$$X < Y, \omega >= Xg \cdot Yf + g \cdot X(Yf).$$

所以 (2.10) 式右边为

$$\begin{aligned} & X < Y, \omega > -Y < X, \omega > - < [X,Y], \omega > \\ = {} & Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf + g(X(Yf) - Y(Xf)) - g < [X,Y], df > \\ = {} & Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf. \end{aligned}$$

故 (2.10) 成立. □

类似地可证明下面的等式 (证明留给读者作为练习).

定理 2.21 设 $\omega \in A^r(M)$, $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 是 M 上任意 $(r+1)$ 个光滑切向量场, 则

$$\begin{aligned} dw(X_1, \cdots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(< X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_{r+1}, \omega >) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} < [X_i, X_j] \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_{r+1}, \omega > . \end{aligned}$$

练习 2

1. 设 $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$, $\dim V = m(\ge r)$. 证明: $\theta^1, \cdots, \theta^r$ 线性无关的充要条件是

$$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r \ne 0.$$

2. 设 $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$, $v_1, \cdots, v_r \in V$. 证明:

$$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r(v_1, \cdots, v_r) = \det(< \theta^i, v_j >), i, j = 1, \cdots, r,$$

其中 $< \theta^i, v_j >= \theta^i(v_j)$.

3. 设 $\phi \in \Lambda^r(V^*)$, $v \in V$, 定义 $i(v)\phi \in \Lambda^{r-1}(V^*)$ 如下: 对于任意的 $v_1, \cdots, v_{r-1} \in V$,

$$i(v)\phi(v_1, \cdots, v_{r-1}) = \phi(v, v_1, \cdots, v_{r-1}).$$

证明:

(1) $i(v) : \Lambda^r(V^*) \to \Lambda^{r-1}(V^*)$, $\phi \mapsto i(v)\phi$ 为线性映射;

(2) 若 $\varphi \in \Lambda^r(V^*)$, $\psi \in \Lambda^s(V^*)$, 则有

$$i(v)(\varphi \wedge \psi) = i(v)\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge i(v)\psi.$$

4. 证明: 任一个二阶协变张量都可以写成一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量之和.

5. 设 $(M, \mathcal{A})$ 是 m 维光滑流形, $(U, \phi; x^i)$, $(V, \varphi; y^j) \in \mathcal{A}$, 且 $U \cap V \neq \emptyset$. 设

$$f = \varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

是过渡函数, 证明: TM 在 $U \cap V$ 上的局部标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \cdots, m\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial y^j} | j = 1, \cdots, m\}$ 满足下式

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (f^j \circ \phi)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

6. 设 $\{\frac{\partial}{\partial x^k} | k = 1, \cdots, m\}$ 是 $T\mathbb{R}^m$ 上的标准标架场, $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ 是两个向量场, 且

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k \frac{\partial}{\partial x^k}, \ \ Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

其中 $X_k, Y_k \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, 计算李括号 $[X, Y]$.

7. 设 $f : M \to N$ 为光滑同胚. 对于任意的 $X \in \Gamma(TM)$, 定义映射 $f_*X : C^\infty(N) \to C^\infty(N)$ 如下

$$(f_*X)(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}, \ \ \forall g \in C^\infty(N).$$

证明:

(1) f_*X 是 N 上的光滑切向量场, 且对任意的 $p \in M$, 有

$$f_{*p}(X(p)) = (f_*X)(f(p);$$

(2) 对任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $f_*([X, Y]) = [f_*X, f_*Y]$.

8. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义如下三个光滑切向量场:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \ \ Y = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \ \ Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

求 $[X, Y]$, $[Y, Z]$ 和 $[Z, X]$.

9. 设 M 是光滑流形, $X \in \Gamma(TM)$. 对任意的 $\psi \in A^r(M)$, 定义映射

$$i(X)\psi : \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{r-1} \to C^\infty(M)$$

为

$$(i(X)\psi)(X_1, \cdots, X_{r-1}) = \psi(X, X_1, \cdots, X_{r-1}),$$

其中 $X_1, \cdots, X_{r-1} \in \Gamma(TM)$. 证明:

(1) 对任意 $\psi \in A^r(M)$, $i(X)\psi \in A^{r-1}(M)$;

(2) 映射 $i(X): A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 是 $C^\infty(M)$- 线性的;

(3) $i(X)(\psi \wedge \phi) = (i(X)\psi) \wedge \phi + (-1)^r \psi \wedge (i(X)\phi)$, 其中 $\psi \in A^r(M), \phi \in A^s(M)$. $i(X)\psi$ 称为 X 与 ψ 的内乘.

10. 设 $\omega^1, \cdots, \omega^s$ 是光滑流形 M 上的一次形式, 证明

$$d(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^s) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i-1} \omega^1 \wedge \cdots \wedge d\omega^i \wedge \cdots \wedge \omega^s.$$

11. 设 $\omega = xydx + zdy - ydz$, $\eta = xdx - yz^2dy - 2xdz$, 求:

(1) $d\omega$;

(2) $d\eta$;

(3) $d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$;

(4) $f^*\omega$ 和 $f^*(d\omega)$, 其中 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 定义为 $f(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$.

第三章 微分流形上的积分

§3.1 流形的定向

3.1.1 **向量空间的定向**

直线 $\mathbb{R}$ 上一个非零向量给定了直线的一个方向, 这就是给直线定向. 显然直线有两个方向. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上一对有序的线性无关向量给出平面的一个旋转指向, 这就是给平面定向. 易见平面也有两个方向. 现在考虑一般的 m 维向量空间的定向.

设 V 是 m 维向量空间, $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 是向量空间 V 的两组基, 并设

$$v_i = a_i^j e_j, \quad 1 \le i, j \le m.$$

如果基的变换矩阵的行列式 $J = \det(a_i^j) > 0$, 则称这两组有序基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 具有相同的定向. 记之为

$$\{e_1, \cdots, e_m\} \sim \{v_1, \cdots, v_m\}.$$

显然这是一个等价关系, V 上的各组基向量恰有两个等价类. 一个定向向量空间就是一个向量空间连同基向量组的一个等价类.

以有序基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 为代表的等价类给定 V 的一个定向, 记之为 $\mu = [e_1, \cdots, e_m]$, 与之相反的定向记为 $-\mu = -[e_1, \cdots, e_m]$. 并且显然有 $[e_2, e_1, \cdots, e_m] = -\mu$. 事实上, 对调任意两个基向量的位置, 空间改变方向.

为了便于应用, 我们使用另外的表达. 设 V^* 是向量空间 V 的对偶空间, 则 $\Lambda^m(V^*)$ 是实 1 维的, 它同构于 $\mathbb{R}$. 任取一个非零 $\Omega \in \Lambda^m(V^*)$, 令 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 是向量空间 V 的两组基, 则有

$$\Omega(v_1, \cdots, v_m) = \det(a_i^j)\Omega(e_1, \cdots, e_m).$$

从而对于一个非零的 $\Omega(v_1, \cdots, v_m)$, $\Omega \in \Lambda^m(V^*)$, 它作用在 V 的两组基向量上具有相同符号的充分必要条件是这两组基向量具有相同的定向. 这样, 选定一个非零 $\Omega \in \Lambda^m(V^*)$ 就决定向量空间的一个定向. 两个 m 次形式 Ω_1 和 Ω_2 决定相同的定向, 当且仅当 $\Omega_1 = \lambda\Omega_2$, $\lambda > 0$, 且 $\Omega_i \neq 0 (i = 1, 2)$.

3.1.2 **流形的定向**

首先利用局部坐标变换的 Jacobi 行列式, 给出可定向流形和定向流形的概念.

定义 3.1 设 M 是一个微分流形, 如果在 M 上存在一族容许局部坐标系 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$, 满足下面两个条件:

(1) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$;

(2) 对任意两个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x^i)$ 和 $(U_\beta, \varphi_\beta; y^i)$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, 或者当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有

$$\frac{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)}{\partial(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^m)} > 0, \tag{3.1}$$

则称 M 是可定向微分流形.

满足条件 (3.1) 的两个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x^i)$ 和 $(U_\beta, \varphi_\beta; y^i)$ 称为定向相符的.

定义 3.2 设 M 是可定向的 m 维微分流形, 如果 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha; x_\alpha^i) | \alpha \in I\}$ 是使定义 3.1 中条件 (1) 和 (2) 成立的一族局部坐标系, 并且满足

(3) $\mathscr{U}$ 是极大的, 即对任意的容许局部坐标系 $(U;x^i)$, 如果对于任意的 $\alpha\in I$, $(U;x^i)$ 和 $(U_\alpha;x^i_\alpha)$ 都是定向相符的, 便有 $(U;x^i)\in\mathscr{U}$, 则称 $\mathscr{U}$ 是 M 的一个定向. 具有指定定向的微分流形称为定向微分流形.

注意到条件 (3.1) 说明 $\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\}$ 是切空间的同向基, 即

$$[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}]=[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}],$$

其中

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial y^m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial y^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial y^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^m}\end{pmatrix}.$$

事实上, 通过外微分式可给出如下的等价定义.

定义 3.3 m 维光滑流形 M 称为可定向的, 如果在 M 上存在一个连续的, 处处不为零的 m 次外微分式. 如果在 M 上给定了这样一个外微分式, 则称 M 是定向的. 如果给出 M 定向的两个外微分式彼此差一个处处为正的函数因子, 则称它们规定了 M 的同一个定向.

连通的可定向流形恰好有两个不同的定向. 因为如果 ω 和 ω' 给出 M 定向的两个 m 次外微分式, 则存在 M 上的连续函数 f, 使得 $\omega'=f\omega$,, 其中 f 处处不为零. 由于 M 是连通流形, f 在 M 上必须保持同一个符号, 因此 ω' 给出的定向与 ω 一致, 或者与 $-\omega$ 一致.

我们把 m 维光滑流形 M 上的一个非零的光滑 m 次外微分式称为 M 的体积形式或体积元素, 可见每一个可定向光滑流形容许有一个体积形式.

设 m 维光滑流形 M 由体积形式 ω 定向, $(U,\varphi;x^i)$ 是 M 的任意一个局部坐标系, 则 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 与 $\omega|_U$ 相差一个处处不为零的因子. 如果 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 与 $\omega|_U$ 相差一个正因子, 则称 $(U,\varphi;x^i)$ 是与 M 定向相符的局部坐标系. 显然, 可定向光滑流形上总可取定向相符的坐标覆盖, 并且对于任意两个相交的坐标邻域, 坐标变换的 Jacobi 行列式处处为正.

定义 3.4 设 M 和 N 都是维数为 m 的定向光滑流形, 分别由体积形式 ω 和 τ 定向. 设 $f:M\to N$ 是一个光滑同胚, 并且对 M 上的任一点 p, 有

$$f^*(\tau)(p)=\lambda(p)\omega(p),$$

其中光滑函数 $\lambda:M\to\mathbb{R}$ 处处为正. 则称 f 保持 M 与 N 的定向.

等价地, f 称为保定向的, 如果对每一点 $p\in M$, f_{*p} 将切空间 T_pM 的正向基映成 $T_{f(p)}N$ 的正向基. 特别地, 若 $M=N$, 称 f 保持 M 的定向.

3.1.3 带边区域与边界的定向

先引入记号

$$\mathbb{R}^m_+=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m|x^m\geq 0\},$$

$$\partial\mathbb{R}^m_+=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m|x^m=0\}\equiv\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\}.$$

定义 3.5 设 M 是 m 维光滑流形, 带边区域 D 为流形 M 的一个子集, 其中的点分为两类: (1) 内点, 即在 M 中有该点的一个邻域包含在 D 内; (2) 边界点, 其定义为: 设 $p\in D$ 是边界点, 则 p 有一个局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$, 使得 $x^i(p)=0$, 并且

$$\varphi(U\cap D)=\varphi(U)\cap\mathbb{R}^m_+.$$

具有上述性质的局部坐标系 $(U,\varphi;x^i)$ 称为边界点 p 的适应坐标系.

带边区域 D 的边界点的集合称为 D 的边界, 记作 ∂D. 若光滑流形 M 本身是一个带边区域, 称 M 为带边流形.

定理 3.1 带边区域 D 的边界 ∂D 是光滑流形 M 的嵌入闭子流形. 如果 M 是可定向的, 则 ∂D 也是可定向的.

证明 带边区域 D 的边界 ∂D 显然是 M 的闭子集, 设 $(U,\varphi;x^i)$ 是点 $p\in\partial D$ 的适应坐标系, 则

$$\varphi(U\cap\partial D)=\varphi(U)\cap\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m|x^m=0\},$$

因此 ∂D 是 M 的一个 $m-1$ 维正则子流形, 从而 ∂D 是 M 的嵌入闭子流形.

假定 M 是定向流形, 对于任意一点 $p\in\partial D$, 选取与 M 的定向相符的适应坐标系 $(U,\varphi;x^i)$, 则 $\varphi(U\cap D)=\varphi(U)\cap\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m|x^m\geq 0\}$.

设 $(V,\psi;y^j)$ 是点 $p\in\partial D$ 的另一个与 M 的定向相符的适应坐标系, 若 $U\cap V\neq\emptyset$, 则在 $\varphi(U\cap V)$ 上, 令

$$\psi\varphi^{-1}:(x^1,\cdots,x^m)\to(y^1,\cdots,y^m),$$

因为

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0. \tag{3.2}$$

我们有

$$[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}]=[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}].$$

由于 $\varphi(U\cap V\cap\partial D)\subset\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\}$, $\psi(U\cap V\cap\partial D)\subset\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\}$. 因此 $y^m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\equiv 0$, 由此知 $\frac{\partial y^m}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0$, $i=1,\cdots,m-1$.

由于对任意的 $q\in U\cap V\cap\partial D$, 有

$$D(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(q)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} & * \\ 0 & \frac{\partial y^m}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{\varphi(q)},$$

其中 $\alpha,\beta=1,\cdots,m-1$.

现设 $\varphi(q)=(a^1,\cdots,a^{m-1},0)$, 令

$$f(t)=y^m(a^1,\cdots,a^{m-1},t),\ \ t\geq 0,$$

则 $f(t)\geq 0$, 并且 $(\frac{\partial y^m}{\partial x^m})_{\varphi(q)}=f'(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\geq 0$. 但由于 $\det(D(\psi\circ\varphi^{-1}))>0$, 故必须 $(\frac{\partial y^m}{\partial x^m})_{\varphi(q)}>0$ 且 $\det(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta})_{\varphi(q)}>0$.

注意到 $(x^1,\cdots,x^{m-1})$ 和 $(y^1,\cdots,y^{m-1})$ 正是 ∂D 上的点在不同坐标系下的局部坐标, 而 $\{U\cap\partial D,\varphi|_{U\cap\partial D}\}$ 为 ∂D 的坐标图册. 故 M 的定向诱导 ∂D 的一个定向, 即 ∂D 是可定向的. □

当光滑流形 M 带边时, 我们用 ∂M 记 M 的边界. 当用 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 给出 M 在边界点的一个局部坐标邻域 $(U,\varphi;x^i)$ 的定向时, 以后用

$$(-1)^m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1} \tag{3.3}$$

表示在 $U\cap\partial M$ 上的诱导定向.

§3.2 外微分式的积分

下面定义外微分式在流形 M 上的积分. 设 M 是 m 维定向光滑流形, φ 是 M 上的 m 次外微分式, 且有紧致的支集 $\operatorname{supp}\varphi$. 任取 M 的一个定向相符的坐标卡构成的覆盖 $\Sigma=\{W_i\}$, 设 $\{g_\alpha\}$ 是从属于 Σ 的单位分解, 则

$$\varphi=(\sum_\alpha g_\alpha)\cdot\varphi=\sum_\alpha(g_\alpha\cdot\varphi). \tag{3.4}$$

显然, 支集 $\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\varphi)\subset\operatorname{supp}g_\alpha$ 包含在某个坐标邻域 $W_i\in\Sigma$ 内, 故可定义

$$\int_M g_\alpha\cdot\varphi=\int_{W_i}g_\alpha\cdot\varphi, \tag{3.5}$$

右端理解为普通的黎曼积分, 即若 $g_\alpha\circ\varphi$ 关于 W_i 的坐标系 $x^1,\cdots,x^m$ 可表示为

$$f(x^1,\cdots,x^m)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

则 (3.5) 式右端的积分为

$$\int_{W_i}f(x^1,\cdots,x^m)dx^1\cdots dx^m.$$

要说明 (3.5) 式有意义, 只需证明右端与 W_i 的选择无关. 不妨设 $\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\varphi)$ 同时包含在坐标邻域 W_i 和 W_j 内, 与它们的定向相符的局部坐标分别为 x^i 和 y^i, 则坐标变换的 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0.$$

设 $g_\alpha\cdot\varphi$ 在 W_i 和 W_j 内的表达式分别为

$$g_\alpha\cdot\varphi=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=f'dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m,$$

则 $f=f'\cdot J$, 且 $\operatorname{supp}f=\operatorname{supp}f'=\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\varphi)\subset W_i\cap W_j$. 根据黎曼积分的变量替换公式, 有

$$\int_{W_i\cap W_j}f'dy^1\cdots dy^m=\int_{W_i\cap W_j}f'J\,dx^1\cdots dx^m=\int_{W_i\cap W_j}fdx^1\cdots dx^m.$$

即

$$\int_{W_i}g_\alpha\cdot\varphi=\int_{W_j}g_\alpha\cdot\varphi.$$

因为 φ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi$ 是紧致的, 根据单位分解的定义, $\operatorname{supp}\varphi$ 只于有限多个支集 $\operatorname{supp}g_\alpha$ 相交, 因此 (3.4) 的右端是有限多项的和. 令

$$\int_M\varphi=\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot\varphi. \tag{3.6}$$

则对于每一个从属于 Σ 的单位分解 $\{g_\alpha\}$, (3.6) 的右边是完全确定的.

最后证明 (3.6) 与单位分解 $\{g_\alpha\}$ 的选取无关. 假设 $\{h_\beta\}$ 是从属于 Σ 的另一个单位分解, 则

$$\sum_\beta\int_M h_\beta\cdot\varphi=\sum_\beta\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot h_\beta\cdot\varphi=\sum_\alpha\int_M\sum_\beta h_\beta\cdot g_\alpha\cdot\varphi=\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot\varphi.$$

定义 3.6 设 M 是 m 维定向的光滑流形, φ 是 M 上有紧致支集的 m 次微分式. 由 (3.6) 式所定义的数 $\int_M\varphi$ 称为外微分式 φ 在 M 上的积分.

若 $\operatorname{supp}\varphi$ 恰好落在一个坐标邻域 U 内, 且 U 的定向相符的局部坐标是 x^i, 则 φ 可以表示为

$$\varphi = f(x^1, \cdots, x^m) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

此时 $\int_M$ 恰好是普通的黎曼积分

$$\int_M \varphi = \int_U f dx^1 \cdots dx^m.$$

可见流形上的积分是通常黎曼积分的推广.

若 φ 是 $r < m$ 次微分式, 且有紧致支集 $\operatorname{supp}\varphi$, 则可定义 φ 在 M 的 r 维子流形上的积分. 设 $h: N \to M$ 是 M 的 r 维嵌入子流形, 则 $h^*\varphi$ 是 r 维光滑流形 N 上的 r 次外微分式, 且有紧致支集, 故积分 $\int_N h^*\varphi$ 是有定义的. 把 φ 在子流形 $h(N)$ 上的积分定义为

$$\int_{h(N)} \varphi = \int_N h^*\varphi.$$

一个区域上的积分和它的边界上的积分之间的关系, 是微积分学的一个基本问题, 首先看几个例子.

例 3.1 设 $I = [a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个闭区间, f 是 I 上的连续可微函数, 则有微积分基本公式

$$\int_I df = f(b) - f(a).$$

例 3.2 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域, 其定向与 $\mathbb{R}^2$ 的一致. ∂D 记 D 的定向边界, 其定向由 D 所诱导, 即 ∂D 的定向与指向 D 内部的法向量构成与 $\mathbb{R}^2$ 的定向一致的标架. 设 P, Q 是 D 上的连续可微函数, 则有 Green 公式

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

若记 $\omega = P dx + Q dy$, 则 $d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$, 则上式可以写为 $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.

例 3.3 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界区域, 其定向与 $\mathbb{R}^3$ 的一致, 以外法线方向为正向诱导出边界 ∂D 的定向. 设 P, Q, R 分别是 D 上的连续可微函数, 则有 Gauss 公式

$$\int_{\partial D} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

若记 $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, 则上式可写为

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

例 3.4 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一块定向曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 为定向闭曲线, 而且 $\partial\Sigma$ 的正向与 Σ 的正向法向量符合右手法则. 设 P, Q, R 是在包含 Σ 在内的一个区域上的连续可微函数, 则有 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

若记 $\omega = P dx + Q dy + R dz$, 则上式可以写成 $\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega$.

下面要介绍的 Stokes 公式是上面公式在流形上的推广.

定理 3.2(Stokes 公式) 设 M 是 m 维定向光滑流形, ω 是 M 上具有紧致支集的 $m-1$ 次外微分式, 则

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega, \tag{3.7}$$

若 $\partial M=\emptyset$, 则规定左边的积分为零.

证明 设 $\{U_i\}$ 是 M 的定向相符的坐标覆盖, $\{g_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解, 则

$$\omega=\sum_\alpha g_\alpha\omega. \tag{3.8}$$

因为支集 $\mathrm{supp}\,\omega$ 紧致, 所以 (3.8) 右边是有限项的和. 故

$$\int_M d\omega=\sum_\alpha\int_M d(g_\alpha\cdot\omega),\ \ \int_{\partial M}\omega=\sum_\alpha\int_{\partial M}g_\alpha\cdot\omega, \tag{3.9}$$

这说明只需对每一个 α, 证明 $\int_M d(g_\alpha\cdot\omega)=\int_{\partial M}g_\alpha\cdot\omega$ 即可. 因此不妨假设 $\mathrm{supp}\,\omega$ 包含在 M 的一个定向相符的局部坐标系 $(U,\phi;x^i)$ 内. 设 ω 的表达式为

$$\omega=\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}f_j dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中 f_j 是 U 上的光滑函数, 则

$$d\omega=(\sum_{j=1}^m\frac{\partial f_j}{\partial x^j})dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

下面分两种情形证明.

1: 若 $U\cap\partial M=\emptyset$, 则 (3.7) 式左端为零. 此时 U 包含在 M 的内部. 则

$$\int_M d\omega=\sum_{j=1}^m\int_U\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^m.$$

考虑 $\mathbb{R}^m$ 中的如下一个正方体

$$C=\{x\in\mathbb{R}^m|\ \ |x^i|\le K,1\le i\le m\},$$

使得 U 包含在 C 内. 将函数 f_j 连续延拓到 C 上, 并令它在 U 外取值为零. 由于

$$\int_{-K}^{+K}\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^j=f_j(x^1,\cdots,x^{j-1},K,x^{j+1},\cdots,x^m)-f_j(x^1,\cdots,x^{j-1},-K,x^{j+1},\cdots,x^m)=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_U\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^m &= \int_C\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^m\\ &= \int_{|x^i|\le K;\,i\ne j}(\int_{-K}^{+K}\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^j)dx^1\cdots dx^{j-1}dx^{j+1}\cdots dx^m=0.\end{aligned}$$

2: 若 $U\cap\partial M\ne\emptyset$, 不妨设 U 是与 M 的定向相符的适用坐标系, 即有

$$U\cap M=\{q|q\in U,x^m(q)\ge 0\},$$

且

$$U\cap\partial M=\{q|q\in U,x^m(q)=0\}.$$

在 $\mathbb{R}^m$ 中取如下一个方体

$$C=\{x\in\mathbb{R}^m|\ \ |x^i|\le K,1\le i\le m-1;0\le x^m\le K\}.$$

当 K 充分大时, $U\cap M$ 落在 C 的内部与边界 $x^m=0$ 的并集内. 对 f_j 做类似于情形 1 的连续延拓, 则 (3.7) 式左边为

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\omega &= \int_{U\cap\partial M}\omega=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{U\cap\partial M}f_j dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{j-1}\wedge dx^{j+1}\wedge\cdots\wedge dx^m\\ &= (-1)^{m-1}\int_{U\cap\partial M}f_m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}\\ &= -\int_{|x^i|\le K;\,1\le i\le m-1}f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\cdots dx^{m-1},\end{aligned}$$

其中第三个等号是因为在 $U\cap\partial M$ 上, $dx^m=0$.

(3.7) 式的右边为

$$\int_M d\omega=\int_{U\cap M}d\omega=\sum_{j=1}^{m}\int_{U\cap M}\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots dx^m. \tag{3.10}$$

对于 $1\le j\le m-1$, 有

$$\int_{U\cap M}\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\int_{|x^i|\le K;i\ne j,m;0\le x^m\le K}(\int_{-K}^{+K}\frac{\partial f_j}{\partial x^j}dx^j)dx^1\cdots dx^{j-1}dx^{j+1}\cdots dx^m=0.$$

所以 (3.10) 中只含如下一项

$$\begin{aligned}&\int_{U\cap M}\frac{\partial f_m}{\partial x^m}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\ =&\int_{|x^i|\le K;i\ne m}(f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},K)-f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0))dx^1\cdots dx^{m-1}\\ =&-\int_{|x^j|\le K;i\ne m}f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0))dx^1\cdots dx^{m-1}.\end{aligned}$$

所以 (3.7) 式成立, 定理得证. □

§3.3　映射度与积分表示

3.3.1 **映射度及其性质**

这一节我们在定向流形上研究光滑映射的正则点，引入映射度的概念，并给出其积分表示.

为了引入映射度的概念，先给出一个引理.

引理 3.1 设 $f:M\to N$ 为光滑映射, M 为紧致光滑流形, N 为光滑流形，且 dim$M$=dim$N$. $q\in N$ 为 f 的一个正则值，其原像 $f^{-1}(q)$ 非空. 则有

(1) $f^{-1}(q)$ 为有限点集, 设为 $f^{-1}(q)=\{p_1,\cdots,p_k\}$;

(2) 存在点 q 的开邻域 $V\subset N$，使得 $f^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^k U_i$，其中 $U_i\subset M$ 为 p_i 的互不相交的开邻域, 且 $f|_{U_i}:U_i\to V$ 为 C^∞ 微分同胚.

证明 设 q 为 $f:M\to N$ 的一个正则值，则其原像 $f^{-1}(q)$ 为 M 的零维正则子流形，即为一些孤立点的集合. 又 M 紧致，故 M 的闭子集 $f^{-1}(q)$ 亦紧致，故 $f^{-1}(q)$ 为有限点集，记之为 $f^{-1}(q)=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$.

另一方面, 因为秩 $\mathrm{rank}_{p_i}f=\mathrm{dim}M=\mathrm{dim}N$，由反函数定理，存在 p_i 在 M 中的开邻域 $W_i\subset M$ 和点 q 在 N 中的开邻域 $V_i\subset N$, 使得 $f|_{W_i}:W_i\to V_i$ 为 C^∞ 微分同胚, $i=1,\cdots,k$. 如有必要, 适当缩小各个 W_i 可使得 W_i 两两不交. 易见 $f(M-\bigcup_{i=1}^k W_i)$ 是 N 的紧致子集且不含点 q, 所以

$$V=\bigcap_{i=1}^k V_i-f(M-\bigcup_{i=1}^k W_i)$$

是点 q 在 N 中的开邻域. 令 $U_i=W_i\cap f^{-1}(V)$, $i=1,2,\cdots,k$, 则 $f|_{U_i}:U_i\to V$ 为 C^∞ 微分同胚, 且 $f^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^{k}U_i$. □

下面我们定义 f 在其正则点 p 处的度数，并由此引入 f 关于正则值 q 的 Brouwer 度.

设 $p\in M$ 是光滑映射 $f:M^n\to N^n$ 的一个正则点，M 是紧致光滑的定向流形，N 是连通光滑的定向流形，则切映射 $f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}N$ 为定向向量空间之间的线性同构，根据同构保持定向或反转定向，我们定义 f_{*p} 的符号，以及 f 在 p 点处的度数 $\deg_p\mathrm{f}$ 和正则点的类型如下：

同构 f_{*p}	f_{*p} 的符号	$\deg_p f$	类型
保持定向	$+1$	$+1$	正型
反转定向	-1	-1	负型

进而，对于 f 的正则值 $q\in N$，定义

$$\deg(f,q)=\sum_{p\in f^{-1}(q)}\deg_p f,$$

称之为 f 关于正则值 q 的 Brouwer 度.

由引理 3.1，正则点 q 的原像 $f^{-1}(q)$ 为有限个孤立正则点的集合 $f^{-1}(q)=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$，上式右端为有限和, 从而 $\deg(f,q)$ 是一个整数. 若正则点 q 的原像 $f^{-1}(q)$ 为空集，则规定 $\deg(f,q)=0$.

f 关于正则值 q 的 Brouwer 度的几何意义为：若点 q 的原像 $f^{-1}(q)$ 包含 s 个正型点和 r 个负型点，则 $\deg(f,q)=s-r$，即点数的代数和. 进一步, 由引理 3.1(2) 可知，$\deg(f,q)$ 反映了在映射 f 的作用下覆盖点 q 的开邻域 V 的次数的代数和.

$\deg(f,q)$ 具有下面的性质.

引理 3.2 映射 f 关于正则值 q 的 Brouwer 度 $\deg(f,q)$ 是定义在 N 的稠密开子集 $N-f(C_f)$ 上的局部常值函数，其中 C_f 表示 f 的所有临界点的集合.

证明 映射 f 的全体正则点集 $M-C_f$ 显然是 M 的开子集. 临界点集 C_f 是紧致空间 M 的闭子集，也紧致. 在映射 f 的作用下，像 $f(C_f)$ 为 N 中的紧致子集，也是闭子集. 从而 f 的全体正则点集 $N-f(C_f)$ 为 N 的开子集，所以 $N-f(C_f)$ 在 N 中处处稠密. 即 $N-f(C_f)$ 为 N 中的稠密开子集.

再由引理 3.1(2)，在正则值 q 的开邻域 V 内任取点 q'，必有 $\deg(f,q)=\deg(f,q')$，因此 $\deg(f,q)$ 作为正则值 q 的函数是局部常值函数. □

$\deg(f,g)$ 不仅是局部常值的，更确切的说，它不依赖于正则值 q 的选取.

命题 3.1 Brouwer 度 $\deg(f,q)$ 与正则值 q 的选取无关.

证明 事实上，如果 q' 与 q 充分接近，由引理 3.2，结论显然成立. □

下面给出映射 f 的 Brouwer 度或映射度的定义.

定义 3.7 设 M 为 n 维紧致定向流形, N 为 n 维连通定向流形， $f:M\to N$ 为光滑映射，由命题 3.1 知, 整数 $\deg(f,q)$ 不依赖于正则值 q 的选取，把整数 $\deg(f,q)$ 称为映射 f 的 Brouwer 度或映射度，记为 $\deg(f)$.

Brouwer 映射度具有以下性质.

命题 3.2 设 M，N，P 是具有相同维数的定向光滑流形，且 M 和 N 紧致，N 和 P 连通. 则

(1) 若 $f:M\to N$ 和 $g:N\to P$ 为光滑映射，则 $\deg(g\circ f)=\deg(g)\cdot\deg(f)$；

(2) 若 $id:M\to M$ 为恒同映射，则 $\deg(id)=1$，即恒同映射的映射度为 1；

(3) 若 $f:M\to N$ 为微分同胚，则 $\deg(f)=\pm1$；

(4) 若 $f,g:M\to N$ 为 C^∞ 映射，且 f 同伦于 g，则 $\deg(f)=\deg(g)$，即映射度是同伦不变量.

证明留作练习.

下面给出两个关于映射度的例子.

例 3.5 考虑 n 维单位球面 S^n ($n \geq 1$) 上的恒同映射和对径映射. 显然, S^n 上的恒同映射的 Brouwer 度为 1. 我们定义 S^n 上的反射 $r_i : S^n \to S^n$ 为

$$r_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}), i = 1, \cdots, n+1,$$

它是一个反转定向的微分同胚，故其映射度 $\deg(r_i) = -1$. S^n 上的对径映射 $r : S^n \to S^n$ 定义为 $r(x) = -x$ ，它可以看成是 $n+1$ 个反射的复合，即 $r = r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n+1}$，其映射度为

$$\deg(r) = \deg(r_1)\deg(r_2)\cdots\deg(r_{n+1}) = (-1)^{n+1}.$$

当 n 为偶数时，$\deg(r) = -1$，故 S^n 上的对径映射和恒同映射不同伦.

例 3.6 S^n 上存在非零光滑切向量场的充分必要条件是 n 为奇数.

证明 $\Rightarrow$ 若 S^n 上存在一个非零光滑切向量场 X, 定义映射 $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ 如下

$$(x, \theta) \mapsto x \cos \pi\theta + \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \sin \pi\theta,$$

易见，$F(x,0) = x = id_{S^n}(x)$，$F(x,1) = -x = r(x)$. 因此 F 是连接恒同映射 id_{S^n} 与对径映射 r 之间的同伦, 由映射度的同伦不变性可知

$$1 = \deg(id_{S^n}) = \deg(r) = (-1)^{n+1},$$

故 n 必为奇数.

$\Leftarrow$ 设 $n = 2m-1$，令

$$X(x_1, \cdots, x_{2m}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \cdots, x_{2m}, -x_{2m-1}),$$

由于 $\langle X(x), x\rangle = 0$, 故 $X(x)$ 为点 $x \in S^n$ 处的切向量. 显然 X 为 S^n 上的光滑单位切向量场. □

3.3.2 **映射度的积分表示**

下面介绍映射度的积分表示.

引理 3.3 设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上光滑 n 次外微分形式，且有紧致支集 $\mathrm{supp}\omega \subset U$，其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集. 不妨假设 U 是中心在原点的开立方体 $C_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < c, i = 1, 2, \cdots, n\}$. 若 $\int_{C^n} \omega = 0$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧致支集的 $n-1$ 次外微分形式 τ，使得 $\mathrm{supp}\tau \subset C_n$，且 $\omega = d\tau$.

注 3.1 由于 ω 是 n 次外微分形式，必有 $d\omega = 0$. 由 Poincaré引理，存在 $\mathbb{R}^n$ 上 $n-1$ 次外微分形式 τ 使得 $\omega = d\tau$. 但不知道是否有 $\mathrm{supp}\tau \subset C_n$? 另外, 条件 $\int_{C^n} \omega = 0$ 是必要的, 这是因为: 如果 τ 使得 $\omega = d\tau$, 且 $\mathrm{supp}\tau \subset C_n$, 则 $\mathrm{supp}\ \tau \cap \partial\overline{C_n} = \emptyset$. 而 $\mathrm{supp}\ \omega \subset C_n$, 故 $\int_{C_n} \omega = \int_{\overline{C_n}} \omega$. 利用 Stokes 公式, 这一积分等于

$$\int_{\overline{C_n}} d\tau = \int_{\partial\overline{C_n}} \tau = 0.$$

证明 对维数 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时，$C_1 = (-c, c)$, 对 $\mathbb{R}^1$ 上的 1 形式 ω，支集 $\mathrm{supp}\ \omega \subset C_1 = (-c, c)$, 设 $\omega = f(x)dx$，其中 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. f 的支集是含于 C_1 的闭集，设 $\mathrm{supp}\ f \subset [a,b] \subset C_1$. 令

$$g(x) = \int_{-c}^{x} f(t)dt,$$

当 $x \leq a$ 时，$g(x) = 0$；当 $x \geq b$ 时，$g(x) = \int_{-c}^{x} f(t)dt = \int_{-c}^{b} f(t)dt = \int_{-c}^{c} f(t)dt = 0$. 从而 $g(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^1$ 有定义，且 $\mathrm{supp}\ g \subset [a,b] \subset C_1$. 又 $g'(x) = f(x)$，因此 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$，$\omega = dg$.

假设 $n=k-1$ 时结论成立，下面考虑 $n=k$ 时的情形.

记 $\mathbb{R}^k$ 上有紧致支集的 k 形式 ω 写为

$$\omega=f(x',x_k)dx'\wedge dx_k,$$

其中 $x'=(x_1,\cdots,x_{k-1})$，$dx'=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{k-1}$，$f\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ 且支集 $\mathrm{supp}f\subset C_k$. 定义

$$g(x')=\int_{-c}^{c}f(x',x_k)dx_k,\ \ \rho=g(x')dx'.$$

易见 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^{k-1})$，其支集 $\mathrm{supp}g\subset C_{k-1}$，故 ρ 是 $\mathbb{R}^{k-1}$ 上有紧致支集的 $k-1$ 次微分形式，且 $\mathrm{supp}\rho\subset C_{k-1}$. 又 ρ 满足

$$\int_{C_{k-1}}\rho=\int_{C_{k-1}}g(x')dx'=\int_{C_{k-1}}dx'\int_{-c}^{c}f(x',x_k)dx_k=\int_{C_k}\omega=0.$$

由归纳假设，当 $n=k-1$ 时，存在 $\mathbb{R}^{k-1}$ 上有紧致支集的 $k-2$ 次外微分形式 γ，使得 $\rho=d\gamma$ 且 $\mathrm{supp}\gamma\subset C_{k-1}$. 记

$$\gamma=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\tilde{h}_i(x')dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{k-1},$$

则有

$$g(x')dx'=\rho=d\gamma=(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\tilde{h}_i}{\partial x_i}(x'))dx'.$$

选取 $\lambda\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$，使得支集 $\mathrm{supp}\lambda\subset(-c,c)$ 且 $\int_{-c}^{c}\lambda(t)dt=1$. 令

$$h_k(x',x_k)=\int_{-c}^{x_k}(f(x',t)-g(x')\lambda(t))dt,$$

易验证 $h_k\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ 且具有紧致支集 $\mathrm{supp}h_k\subset C_k$. 由于

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x',x_k)=f(x',x_k)-g(x')\lambda(x_k),$$

因而有

$$\begin{aligned}f(x',x_k)&=g(x')\lambda(x_k)+\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x',x_k)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial\tilde{h}_i}{\partial x_i}(x')\cdot\lambda(x_k)+\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x',x_k).\end{aligned}$$

若记 $h_i(x',x_k)=\tilde{h}_i(x')\lambda(x_k)$, $i=1,\cdots,k-1$, 则上式可表示为 $f(x',x_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x',x_k)$, 从而有

$$\omega=f(x',x_k)dx'\wedge dx_k=(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x',x_k))dx'\wedge dx_k.$$

令

$$\tau=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}h_i(x_1,\cdots,x_k)dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge dx_k,$$

则 τ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的 $k-1$ 次外微分形式，其紧致支集 $\mathrm{supp}\tau$ 包含于 C_k, 并且 $d\tau=\omega$. 引理得证. $\Box$

命题 3.3 设 M 和 N 为 n 维定向光滑流形，且 M 紧致，N 连通. 并设 (U,φ) 是 N 中以点 q 为中心的局部立方坐标卡 (此时 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的开立方体并且 $\varphi(q)=0$), ω 是 N 上具有紧致支集的 n 次微分形式，且 $\mathrm{supp}\omega\subset U$. 若

$$\int_N \omega = 0,$$

则对任意 C^∞ 映射 $f:M\to N$, 都有

$$\int_M f^\star\omega = 0.$$

证明 由引理 3.3 可知, 存在 U 上的 $n-1$ 次外微分形式 τ, 使得 $\omega=d\tau$, 且具有紧致支集 $\mathrm{supp}\tau\subset U$, 从而 $\mathrm{supp}(f^\star\omega)\subset f^{-1}(U)$, $\mathrm{supp}(f^\star\tau)\subset f^{-1}(U)$, 并且

$$\int_M f^\star\omega = \int_{f^{-1}(U)} f^\star\omega = \int_{f^{-1}(U)} f^\star d\tau = \int_{f^{-1}(U)} d(f^\star\tau) = \int_M d(f^\star\tau) = \int_{\partial M} f^\star\tau = 0.$$

□

推论 3.1 设 $M,N,(U,\varphi)$ 和 f 如命题 3.3 中所述，又设 ω_1 和 ω_2 为 N 上具有紧致支集的 n 次微分形式，且它们的支集都包含于 U 中. 若

$$\int_N \omega_1 = \int_N \omega_2,$$

则

$$\int_M f^\star\omega_1 = \int_M f^\star\omega_2.$$

□

定理 3.3 设 M 和 N 是两个 n 维定向光滑流形，M 紧致，N 连通. 并设 (U,φ) 是 N 中以点 q 为中心的局部立方坐标卡，ω 是 N 上具有紧致支集的 n 次外微分形式, 且 $\mathrm{supp}\omega\subset U$. 假设 $f:M\to N$ 为光滑映射，则有

$$\int_M f^\star\omega = \deg(f)\int_N \omega.$$

证明 由引理 3.2 知，f 的正则值集是 N 中的稠密开子集, 因此在 U 中任取 f 的一个正则值 q, 由引理 3.1, 如果原像 $f^{-1}(q)$ 非空，则 $f^{-1}(q)$ 为有限点集, 记之为 $f^{-1}(q)=\{p_1,\cdots,p_k\}$，且存在点 q 在 N 中的开邻域 $V\subset U$ 和 p_i 在 M 中的两两不相交的开邻域 U_i, $i=1,\cdots,k$, 使得 $f|_{U_i}:U_i\to V$ 为 C^∞ 微分同胚并且 $f^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^k U_i$.

选取 N 上的一个具有紧支集的 n 次外微分形式 ω', 要求 ω' 的紧致支集 $\mathrm{supp}\omega'$ 包含在 V 中，并且满足条件

$$\int_N \omega' = \int_N \omega.$$

显然 $\mathrm{supp} f^\star\omega'\subset f^{-1}(V)$. 由推论 3.1, 可得

$$\int_M f^*\omega = \int_M f^*\omega' = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (f|_{U_i})^*\omega'. \tag{3.11}$$

注意到 $f|_{U_i}$ 是从 M 的开子集 U_i 到 N 的连通开子集 V 上的微分同胚, 故 $f|_{U_i}$ 保持或反转由 M 和 N 的定向所诱导的 U_i 和 V 的定向, 而这完全取决于 f_{*p_i}，从而只依赖于点 p_i. 若 f_{*p_i} 保持定向，记 $\deg_{p_i}f=1$; 若 f_{*p_i} 反转定向，记 $\deg_{p_i}f=-1$，则有

$$\int_{U_i}(f|_{U_i})^*\omega' = (\deg_{p_i}f)\int_V \omega' = (\deg_{p_i}f)\int_N \omega' = (\deg_{p_i}f)\int_N \omega,$$

其中 $i=1,\cdots,k$. 于是 (3.11) 式可以写为

$$\int_M f^*\omega=\sum_{i=1}^k(\deg_{p_i}f)\int_N\omega=(\deg f)\int_N\omega.$$

如果 $f^{-1}(q)=\emptyset$, 则存在点 q 在 N 中的开邻域 V, 使得 $f^{-1}(V)=\emptyset$. 对于支集在 V 中且使得 $\int_N\omega\neq 0$ 的微分形式 ω, 有 $\int_M f^*\omega=\int_M 0=0$, 而此时 $\deg(f)=0$, 从而结论仍成立. 定理得证. □

利用单位分解, 定理 3.3 可以推广为下面的形式.

定理 3.4 设 M 为 n 维紧致定向流形, N 为 n 维连通定向流形, ω 是 N 上具有紧致支集的 n 次外微分形式. 则对任意光滑映射 $f:M\to N$, 有

$$\int_M f^*\omega=\deg(f)\int_N\omega.$$

证明留作练习.

注 3.2 引入映射度的主要目的是研究具有相同维数的定向流形 M 和 N 之间的映射同伦类, 特别是研究 N 为球面 S^n 的情形. 著名的 Hopf 定理指出：n 维紧致连通的定向流形到 n 维球面 S^n 的两个光滑映射同伦的充分必要条件是它们具有相同的映射度.

练习 3

1. 证明光滑流形的可定向性质在微分同胚下是不变的.

2. 设 M 为 $\mathbb{R}^m$ 中可定向带边 2 维曲面, 其边界为 ∂M. $\omega=\sum_{i=1}^m p_i dx^i$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑 1 次形式, 把 ω 限制在 M 上, 试写出相应的 Stokes 定理.

3. 设 ω 是 m 维单位球面 S^m 上的光滑 $m-1$ 次形式, 证明 $\int_{S^m}d\omega=0$.

4. 证明两个光滑流形 M 和 N 的乘积 $M\times N$ 是可定向的, 当且仅当 M 和 N 是可定向的.

5. 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是淹没, 证明流形 $f^{-1}(0)$ 是可定向的.

6. 记 $\bar{M}$ 为和 M 定向相反的光滑流形, 证明: $\int_{\bar{M}}\omega=-\int_M\omega$.

7. 设 $f:S^1\to S^1$ 定义为 $f(e^{i\theta})=e^{ik\theta}$, 其中 k 为整数, 求 $\deg(f)$.

8. 设 $f:S^n\to S^n$ 为光滑映射, 且 $\deg(f)\neq(-1)^{n+1}$, 证明 f 至少有一个不动点.

9. 设 $f:S^n\to S^n$ 为光滑映射, 且 $\deg(f)$ 为奇数, 证明 f 必将某一对对径点变为一对对径点, 即存在 $x_0\in S^n$ 使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$.

10. 证明命题 3.2 和定理 3.4.

第四章 联络

联络是微分流形上重要的几何概念. 要对流形上的向量场进行微分, 需要在向量丛上引进联络的结构. 仿射联络就是加在微分流形上, 能使我们对张量场进行微分的结构.

§4.1 黎曼度量

这节主要介绍微分流形上的黎曼度量, 它是张量场的一个重要特例. 度量提供了切空间的内积, 且可以测量流形上曲线的长度. 度量在流形上定义了一个距离函数使之成为一个度量空间.

定义 4.1 设 M 是 m 维光滑流形, M 上的一个黎曼度量 g 是 M 上的一个光滑的二阶协变张量场使得对每一点 $p \in M$, $g(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个对称, 正定的二阶协变张量. (M, g) 称为 m 维黎曼流形.

黎曼流形的研究称为黎曼几何. (M, g) 的仅依赖于度量 g 的几何性质称为内蕴或度量性质.

例如向量空间 $\mathbb{R}^m$ 的标准内积由

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i$$

给出, 它定义了 $\mathbb{R}^m$ 上的一个黎曼度量. 黎曼流形 $(\mathbb{R}^m, \langle,\rangle_{\mathbb{R}^m})$ 称为 m 维欧氏空间.

设 $\gamma : I = [a, b] \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 中一条光滑曲线, 曲线 γ 的长度 $L(\gamma)$ 定义为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt.$$

下面我们将证明每个微分流形 M 都可以赋予一个黎曼度量 g.

定理 4.1 设 M 是一个满足第二可数公理的 m 维光滑流形, 则在 M 上必存在黎曼度量.

证明 由于在流形的每一个局部坐标邻域上都可以给定一个黎曼度量. 非常自然的想法就是利用单位分解定理, 把这些局部定义的黎曼度量拼接成为流形 M 上的一个黎曼度量.

由于 M 满足第二可数公理, 可取 M 的一个局部有限的坐标覆盖 $\{U_\alpha; x^i_\alpha | \alpha \in I\}$, 其中 I 是自然数集. 由单位分解定理, 存在 M 上的光滑函数族 $\{f_\alpha\}$, 使得对任意的 $\alpha \in I$, 有

$$\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha, \ \ 0 \le f_\alpha \le 1, \ \ \sum_{\alpha \in I} f_\alpha = 1.$$

对于每一个 $\alpha \in I$, 在 U_α 上定义黎曼度量

$$g^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} dx^i_\alpha \otimes dx^i_\alpha.$$

利用 $g^{(\alpha)}$, 在 M 上如下定义二阶协变张量场 g_α. 对任意 $p \in M$, 令

$$g_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(p) \cdot g^{(\alpha)}(p), & p \in U_\alpha, \\ 0, & p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

由于 $f_\alpha \cdot g^{(\alpha)}$ 在 U_α 上光滑, 且 $\operatorname{Supp} g_\alpha \subset \operatorname{Supp} f_\alpha \subset U_\alpha$, 易见 g_α 是大范围定义在 M 上的光滑张量场. 令

$$g = \sum_\alpha g_\alpha. \tag{4.1}$$

根据覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in I\}$ 的局部有限性, (4.1) 右端在每一点 $p\in M$ 的某个邻域上是有限多项之和. 所以 g 是大范围定义在 M 上的光滑, 对称二阶协变张量场.

下面证明 g 正定. 对任意一点 $p\in M$, 由于

$$0\le f_\alpha\le 1,\ \sum_{\alpha\in I}f_\alpha=1,$$

必有 $\beta\in I$, 使得 $f_\beta(p)>0$. 则对任意的 $v\in T_pM$, 有

$$(g(p))(v,v)=\sum_\alpha f_\alpha(p)\cdot g^\alpha(v,v)\ge f_\beta(p)\sum_{i=1}^m(dx^i_\beta(v))^2\ge 0.$$

当 $(g(p))(v,v)=0$ 时, 因为 $f_\beta(p)>0$, 所以

$$dx^i_\beta(v)=0,\ \ 1\le i\le m,$$

即 $v=0$. 因此 g 是正定的. 从而 g 是 M 上的一个黎曼度量. □

设 $(U,\varphi;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 黎曼度量 g 在该坐标系下的分量为

$$g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=<\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}>.$$

利用 Schmidt 正交化可以得到 U 上的一组单位正交标架场 $\{e_i\}$. 对任意 $p\in M$, 设 $\{\omega^i(p)\}$ 是 $\{e_i(p)\}$ 在 T_p^*M 中的对偶基, 则 $\{\omega^i\}$ 是定义在 U 上的余切标架场, 称之为与 $\{e_i\}$ 对偶的单位正交余切标架场. 则由恒同映射 $\mathrm{id}:T_pM\to T_pM$ 给出的 (1,1) 型张量场 id 可以表示为

$$\mathrm{id}=dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}=\omega^i\otimes e_i.$$

如果用 dp 表示光滑流形 M 在点 p 处的任意一个切向量场, 则 $dp=\omega^i(dp)\cdot e_i$, 简记为 $dp=\omega^ie_i$. 从而 M 上的黎曼度量 g 可以写为

$$g=<dp,dp>=\sum_{i=1}^m(\omega^i)^2.$$

下面介绍一些常见的黎曼流形的例子. 在实际应用中往往通过已知黎曼流形的黎曼度量诱导出所讨论的流形上的黎曼度量.

命题 4.1 设 M, N 分别为 m 维和 n 维光滑流形, $f:M\to N$ 是光滑映射.

(1) 如果 φ 是 N 上的一个光滑的 $r(\ge 1)$ 阶协变张量场, 则对任意的 $p\in M$, $v_1,\cdots,v_r\in T_pM$, 在 M 上有如下定义的光滑 r 阶协变张量场 $f^*\varphi$:

$$((f^*\varphi)(p))(v_1,\cdots,v_r)=(\varphi(p))(f_{*p}(v_1),\cdots,f_{*p}(v_r)).$$

特别地, 如果 φ 是对称的, 则 $f^*\varphi$ 是对称的; 如果 φ 是反对称的, 则 $f^*\varphi$ 是反对称的.

(2) 如果 f 是浸入, h 是 N 上的一个黎曼度量, 则 $g=f^*h$ 是 M 上的黎曼度量. 此时, 称 g 为黎曼度量 h 通过 f 在 M 上的诱导度量.

证明 (1) 显然 $f^*\varphi$ 是 M 上的张量场, 只需证明它是光滑的. 不失一般性, 设 $r=2$. 对任意 $p\in M$, 取 p 在 M 中的容许坐标系 $(U;x^i)$ 以及 $f(p)$ 在 N 中的容许局部坐标系 $(V;y^\alpha)$, 使得 $f(U)\subset V$. 令

$$\varphi|_V=\sum_{\alpha,\beta=1}^n\varphi_{\alpha\beta}dy^\alpha\otimes dy^\beta,\ \ f^\alpha=y^\alpha\circ f,\ \ 1\le\alpha\le n,$$

其中 $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\alpha}),1\le\alpha,\beta\le n$.

则 $f^*\varphi$ 有如下的局部表示

$$\begin{aligned}(f^*\varphi)_U &= \sum_{i,j=1}^m (f^*\varphi)(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})dx^i\otimes dx^j\\ &= \sum_{i,j}\varphi(f_*(\frac{\partial}{\partial x^i}),f_*(\frac{\partial}{\partial x^j}))dx^i\otimes dx^j\\ &= \sum_{i,j}\varphi(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta})\circ f dx^i\otimes dx^j\\ &= \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\varphi(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\beta})\circ f dx^i\otimes dx^j\\ &= \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}(\varphi_{\alpha\beta}\circ f)dx^i\otimes dx^j.\end{aligned}$$

由 f 和 φ 的光滑性, 可知 $f^*\varphi$ 是光滑的.

(2) 根据 (1), 只需证明二阶协变张量场 $g=f^*h$ 是正定的即可. 对任意 $p\in M$, $u\in T_pM$, 由 h 的正定性得

$$(g(p))(u,u)=h(f_*(u),f_*(u))\ge 0,$$

其中等号成立当且仅当 $f_*(u)=0$. 由于 f 是浸入, $f_*(u)=0$ 等价于 $u=0$. 从而 g 正定. □

例 4.1 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超曲面.

设 $f:M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是 m 维光滑流形 M 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的浸入, 通常把 (f,M) 称为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的浸入超曲面. $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的标准黎曼度量记为 h, 则由命题 4.1, $g=f^*h$ 是 M 上的一个黎曼度量. 所以, (M,g) 是黎曼流形. 若设 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的笛卡尔坐标系, 则

$$h=\sum_{\alpha=1}^{m+1}(dx^\alpha)^2.$$

如果映射 $f:M\to\mathbb{R}^{m+1}$ 在 M 的局部坐标系 $(U;u^i)$ 下有局部表达式

$$x^\alpha=f^\alpha(u^1,\cdots,u^m),\ \ 1\le\alpha\le m+1,$$

则

$$g|_U=\sum_{\alpha,i,j}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^j}du^idu^j.$$

例 4.2 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面 S^m.

$$S^m=\{(x^1,\cdots,x^{m+1})\in\mathbb{R}^{m+1}|\sum_{\alpha=1}^{m+1}(x^\alpha)^2=1\}.$$

则包含映射 $i:S^m\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是一个嵌入映射, 自然是浸入. 所以 S^m 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的浸入超曲面. 根据例 4.1, $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的标准度量 h 在 S^m 上的限制 $g=i^*h$ 是 S^m 上的黎曼度量. 所以 (S^m,g) 为黎曼流形.

例 4.3 双曲空间 $H^n(-1)$.

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上如下定义 Lorentz 度量 $h=<\cdot,\cdot>_1$

$$h(x,y)=<x,y>_1=\sum_{i=1}^n x^iy^i-x^{n+1}y^{n+1},\ \ x,y\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

h 可以看作是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个非退化, 对称的二阶协变张量场. 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的双叶双曲面的上半叶

$$H^n = \{x = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | < x, x >_1 = -1, x^{n+1} > 0\},$$

则 H^n 与 $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球

$$B^n(1) = \{(\eta^1, \cdots, \eta^n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n (\eta^i)^2 < 1\}$$

微分同胚.

事实上, 如果定义映射 $\varphi : H^n \to B^n(1)$, 使得对任意的 $(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in H^n$,

$$(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \varphi(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}).$$

显然 φ 是光滑映射. 直接验证可知, φ 有光滑的逆映射 φ^{-1}, 使得对任意的 $(\eta^1, \cdots, \eta^n) \in B^n(1)$ 有

$$\begin{aligned} & (x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) = \varphi^{-1}(\eta^1, \cdots, \eta^n) \\ = \quad & (\frac{2\eta^1}{1-\sum_j(\eta^j)^2}, \cdots, \frac{2\eta^n}{1-\sum_j(\eta^j)^2}, \frac{1+\sum_j(\eta^j)^2}{1-\sum_j(\eta^j)^2}). \end{aligned}$$

因此 φ 是从 H^n 到 $B^n(1)$ 的微分同胚.

另一方面, 假设 $i : H^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是包含映射, 令 $\psi = i \circ \varphi^{-1}$, 则 $\psi : B^n(1) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑嵌入. 根据命题 4.1, $g = \psi^* h$ 是 $B^n(1)$ 上的一个光滑对称的二阶协变张量场. 它的局部坐标表示为 $g = \sum_{i,j} g_{ij} d\eta^i d\eta^j$, 其中的分量

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \eta^i}\frac{\partial x^k}{\partial \eta^j} - \frac{\partial x^{n+1}}{\partial \eta^i}\frac{\partial x^{n+1}}{\partial \eta^j} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1-\sum_k(\eta^k)^2)^2}. \end{aligned}$$

由此可知, $g = \psi^* h$ 是处处正定的, 因而是 $B^n(1)$ 上的一个黎曼度量. 由于 φ 是光滑同胚, $(H^n, \varphi; \eta^i)$ 可以看作 H^n 的一个整体坐标系. 易知, $i^* h = \varphi^* g$ 是 H^n 上的黎曼度量, 并且 g_{ij} 是黎曼度量 $i^* h$ 关于坐标系 $(H^n; \eta^i)$ 的分量. 因此, 作为黎曼流形, $(H^n; i^* h)$ 与 $(B^n(1), g)$ 具有完全相同的结构, 它们是同一空间的两个具体模型. 通常把黎曼流形 $(B^n(1), g)$ 和 $(H^n, i^* h)$ 都称为 n 维双曲空间, 并用 $H^n(-1)$ 来表示.

例 4.4 黎曼流形的乘积.

设 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 是两个黎曼流形, 令 $M = M_1 \times M_2$. 则对于任意的 $(p, q) \in M$, 定义 $\alpha_i : M_i \to M (i = 1, 2)$ 为

$$\alpha_1(x) = (x, q), \ \ \alpha_2(y) = (p, y),$$

其中 $x \in M_1, \ y \in M_2$. 则易验证 α_1 和 α_2 都是嵌入, 且

$$T_{(p,q)} M = (\alpha_1)_{*p}(T_p M_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(T_q M_2).$$

在 M 上引入黎曼度量 g, 使得对任意的 $(p, q) \in M$,

$$g(X, Y) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2),$$

其中 $X_1, Y_1 \in T_pM_1,\quad X_2, Y_2 \in T_qM_2$ 满足

$$X = (\alpha_1)_{*p}(X_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(X_2),\ \ Y = (\alpha_1)_{*p}(Y_1) \oplus (\alpha_2)_{*q}(Y_2).$$

易验证 g 是 M 上的一个黎曼度量, 称为度量 g_1 和 g_2 的乘积度量; 相应的黎曼流形 (M, g) 称为黎曼流形 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 的黎曼直积.

特别地, 单位圆周 S^1 是嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的一维黎曼流形, 从而 m 个单位圆周的的积

$$T^m = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{m}$$

关于乘积度量是一个 m 维黎曼流形, 称为 m 维平坦环面.

下面将看到黎曼流形 (M, g) 有自然的度量空间 (M, d) 的结构.

定理 4.2 设 (M, g) 为 m 维黎曼流形, 对任意两点 $p, q \in M$, 令 C_{pq} 是满足 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ 的所有光滑曲线 $\gamma : [0, 1] \to M$ 构成的集合, 定义函数 $d : M \times M \to \mathbb{R}$ 为

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) | \gamma \in C_{pq}\}.$$

则 (M, d) 是度量空间. 即对任意的 $p, q, r \in M$ 有

(i) $d(p, q) \geq 0,\ \ d(p, q) = 0$ 当且仅当 $p = q$;

(ii) $d(p, q) = d(q, p)$;

(iii) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

并且 M 上由度量 d 诱导的拓扑与 M 作为流形的拓扑是等价的.

证明 首先证明 d 是 M 上的一个度量. 由 d 的定义, 它是对称, 非负的. 因为 p 到 r 和 r 到 q 两条曲线相连接得到 p 到 q 的一条曲线, 而后者的长度为前两条曲线长度之和, 因此 $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$. 下面证明如果 $d(p, q) = 0$, 则 $p = q$.

设 $p \in M$, 在 M 中取包含点 p 的局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$, 使得 $\varphi(p) = (0, \cdots, 0)$, 且对一个固定的 $a_0 > 0, \bar{B}_{a_0}(0) \subset \varphi(U)$, 其中 $\bar{B}_{a_0}(0)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中以原点为中心, a_0 为半径的开球的闭包. 黎曼度量 g 的分量 $g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})(x)$ 都是光滑函数, 且 (g_{ij}) 对 $\varphi(U)$ 中每一点都是对称的正定矩阵. 进一步记 $D_r = \{x \in \mathbb{R}^m |\ |x| \leq r \leq a_0\}$, $S^{m-1} = \{\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^m) \in \mathbb{R}^m | \sum_i (\alpha^i)^2 = 1\}$. 则如下定义的函数

$$f : D_r \times S^{m-1} \to \mathbb{R},\ \ (x, \alpha) \mapsto (g_{ij}(x)\alpha^i\alpha^j)^{\frac{1}{2}}$$

在紧致集 $D_r \times S^{m-1}$ 上有最大值 M_r 和最小值 m_r. 用 M_0 和 m_0 表示对应于 $r = a_0$ 的最大值和最小值. 则

$$0 < m_0 \leq m_r \leq (g_{ij}(x)\alpha^i\alpha^j)^{\frac{1}{2}} \leq M_r \leq M_0,\ \ x \in D_r.$$

从而对任意的 $\beta = (\beta^1, \cdots, \beta^m) \in \mathbb{R}^m$, 有

$$0 < m_0|\beta| \leq m_r|\beta| \leq (g_{ij}(x)\beta^i\beta^j)^{\frac{1}{2}} \leq M_r|\beta| \leq M_0|\beta|,\ \ x \in D_r,$$

其中 $|\beta| = (\sum_i (\beta^i)^2)^{\frac{1}{2}}$.

设 $C : [0, b] \to \varphi^{-1}(\bar{B}_r(0)) \subset U$ 为分段光滑曲线. $p = C(0), q = C(b)$. 它的长度为 $L = \int_0^b (g_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t))^{\frac{1}{2}} dt$. 由于 $|\varphi(q)|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中连接 $\varphi(p) = (0, \cdots, 0)$ 和 $\varphi(q)$ 两点的线段的长度, 而 $\int_0^b (\sum_i (\dot{x}^i)^2)^{\frac{1}{2}} dt$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中连接这两点的曲线 $\varphi \circ C(t)(0 \leq t \leq b)$ 的长度, 故由上面的不等式得

$$\begin{aligned} 0 \quad < \quad & m_0|\varphi(q)| \leq m_r|\varphi(q)| \leq m_r \int_0^b (\sum_i (\dot{x}^i)^2)^{\frac{1}{2}} dt \leq L \\ & \leq M_r \int_0^b (\sum_i (\dot{x}^i)^2)^{\frac{1}{2}} dt \leq M_0 \int_0^b (\sum_i (\dot{x}^i)^2)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

现在来证明如果 $d(p,q)=0$, 则 $p=q$. 即证明若 $p\neq q$, 则 $d(p,q)>0$. 设 q 是 M 中异于 p 的任一个点, 不妨设 $C(b)=q$. 对于 q, 存在某个 $r_0<a_0$, 使得 $q\notin\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$. 再设 $q'=C(b')$ 为从 p 点开始的曲线 C 与 $\overline{\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))}$ 的边界的第一个交点, 即 $C([0,b'))\subset\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$, $C(b')\notin\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$. 故 q' 是曲线 C 上使 $|\varphi(q')|=r_0$ 的第一个点, 以 L' 表示曲线段 $C(t)(0\leq t\leq b')$ 的长度, 则由 (4.2) 知 $m_0r_0\leq L'\leq L$. 由此知 $d(p,q)\geq m_0r_0>0$, 即若 $p\neq q$, 有 $d(p,q)>0$.

最后证明由 d 给出的度量拓扑与 M 上流形拓扑是等价的. 只需证明对点 $p\in M$ 的每个邻域 $V_r=\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$ 包含度量拓扑下的一个 ε- 球 $S_\varepsilon(p)=\{q\in M|d(p,q)<\varepsilon\}$, 且反之也成立. 设 $r_0\leq a_0$, 选取 ε_0, 使得 $\frac{\varepsilon_0}{m_0}<r_0$, 则有 $S_{\varepsilon_0}(p)\subset V_{r_0}$. 因为若 $q\notin V_{r_0}$, 则根据上面所述有 $d(p,q)\geq m_0r_0>\varepsilon_0$. 故 $q\notin S_{\varepsilon_0}(p)$. 反之, 对于度量拓扑下的 ε_0 球形邻域 $S_{\varepsilon_0}(p)$, 选取 $r_0<\min(a_0,\frac{\varepsilon_0}{M_0})$, 对任一点 $q\in V_{r_0}(p)$, $\varphi(q)=(\beta^1,\cdots,\beta^m)$. 令 $C:[0,1]\to V_{r_0}$ 是 p 到 q 的一条曲线, 它的局部坐标为 $x^i=\beta^it(i=1,\cdots,m)$, $0\leq t\leq 1$. 故其长度为

$$L=\int_0^1(g_{ij}(\beta^kt)\beta^i\beta^j)^{\frac{1}{2}}dt\leq M_0(\sum_i(\beta^i)^2)^{\frac{1}{2}}\leq M_0r_0<\varepsilon_0.$$

从而有 $d(p,q)<\varepsilon_0$, 即 $q\in S_{\varepsilon_0}(p)$, $V_{r_0}\subset S_{\varepsilon_0}(p)$. $\square$

定义 4.2 设 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是黎曼流形之间的光滑映射, 如果 $g=f^*h$, 即对任意点 $p\in M$, 以及任意的 $v,w\in T_pM$, 有

$$h(f_{*p}(v),f_{*p}(w))=g(v,w),$$

则称 f 是从黎曼流形 (M,g) 到 (N,h) 的一个等距映射.

所以等距映射就是处处保持黎曼度量不变的映射. 不难看出, 等距映射必为浸入. 因此, 常常把等距映射称为等距浸入, 此时, 称映射 $f:(M,g)\to(N,h)$ 为 (N,h) 的黎曼 (浸入) 子流形.

定义 4.3 如果 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是从黎曼流形 M 到 N 的局部光滑同胚, 且 $g=f^*h$, 则称 f 是局部等距. 如果 $f:(M,g)\to(N,h)$ 是从黎曼流形 M 到 N 的光滑同胚, 且 $g=f^*h$, 则称 f 是等距. 此时, 称黎曼流形 (M,g) 与 (N,h) 是互相等距的. 黎曼流形 (M,g) 到自身的一个等距称为 (M,g) 的一个等距变换.

定义 4.4 设 G 是李群, h 是 G 上的黎曼度量. 若对每个 $g\in G$, 左平移 $L_g:G\to G$ 是等距, 则称 h 是 G 上的左不变黎曼度量. 类似可定义右不变黎曼度量.

§4.2　向量丛上的联络

光滑结构使我们能够在微分流形上定义光滑函数, 进而建立相应的微积分理论, 并使之成为有效的研究工具. 特别地, 对于光滑流形上的任意光滑函数 f, 其微分 df 是有意义的. 根据定义, 在 M 的任一点 p, $df(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个线性函数, 使得对任意 $v\in T_pM$ 有

$$(df(p))(v)=v(f).$$

直观上, 微分 df 仍然是函数 f 在无限接近的两点的函数值之差. 若设光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 满足 $\gamma(0)=p$ $\gamma'(0)=v$, 则有

$$(df(p))(v)=v(f)=\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\gamma(t))-f(p)}{t}.$$

从而当 $|t|$ 充分小时

$$f(\gamma(t))-f(p)=t\cdot(df(p))(v)+O(t^2),$$

其中 $O(t^2)$ 是 t 的二阶无穷小量.

假如 X 是光滑流形 M 上的一个光滑切向量场, 一个自然的问题是: 对切向量场 X 能否进行微分? 如何求其微分? 如果 M 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 那么沿光滑曲线 $\gamma(t)$ 定义的切向量场 $X(t)$ 可以表示为 n 个分量函数

$$X(t) = (X^1(t), \cdots, X^n(t)),$$

它的导数 $\frac{dX(t)}{dt}$ 为

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{X(t+\triangle t)-X(t)}{\triangle t} = (\frac{dX^1(t)}{dt}, \cdots, \frac{dX^n(t)}{dt}).$$

然而, 对于一般的光滑流形 M, 由于 $X(t+\triangle t)$ 和 $X(t)$ 分别属于两个不同点处的切空间 $T_{\gamma(t+\triangle t)}M$ 和 $T_{\gamma(t)}M$, 它们不能相减, 故上式没有意义. 因此若要引入切向量场 X 的某种微分, 需要有一种确定的方式在 $T_{\gamma(t+\triangle t)}M$ 和 $T_{\gamma(t)}M$ 之间建立同构, 这相当于除了光滑结构外在 M 上再附加一种结构, 这就是我们将要讨论的联络的概念. 对于黎曼流形来说, 这种称为联络的附加结构是由其黎曼度量诱导且唯一确定的.

这节我们介绍一般光滑向量丛上的联络. 下节将重点介绍黎曼流形 (M, g) 上的联络, 它恰好是黎曼流形 M 的切丛 (TM, M, π) 上的联络. 向量丛上的联络提供了对向量丛的光滑截面求微分的手段. 因此向量丛上的联络已成为现代微分几何中最重要的基本概念, 有着十分广泛的应用.

设 E 是 m 维光滑流形 M 上的一个 n 维向量丛, $\Gamma(E)$ 是 E 的全体光滑截面的集合. $\Gamma(E)$ 是向量空间, 也是 $C^\infty(M)$- 模.

定义 4.5 向量丛 E 上的联络是一个满足下列条件的映射

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*(M)\otimes E),$$

(1) 对任意的 $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ 有

$$\nabla(s_1+s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2;$$

(2) 对任意 $s \in \Gamma(E)$ 以及任意的 $f \in C^\infty(M)$, 有 $\nabla(fs) = df\otimes s + f\nabla s$.

若 X 是 M 上的光滑向量场, $s \in \Gamma(E)$, 令 $\nabla_X s = <X, \nabla s>$, 其中记号 $<,>$ 表示 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 之间的配合, 则 $\nabla_X s$ 是 E 的截面, 称之为 s 沿 X 的协变导数. ∇s 称为光滑截面 s 的协变微分.

由协变导数的定义知, ∇ 可看作一个二元映射 $\nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(E) \to \Gamma(E),\ (X, s) \mapsto \nabla_X s$, 且满足下面的条件:

(1) $\nabla_{X+Y}s = \nabla_X s + \nabla_Y s$;

(2) $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$;

(3) $\nabla_X(s_1+s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$;

(4) $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$.

其中 $X, Y \in \Gamma(TM),\ s, s_1, s_2 \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(M)$.

局部上, 联络由一组一次微分式给出. 设 U 是 M 上的一个坐标卡, 局部坐标为 $x^i, 1\le i\le m$. 取 E 在 U 上的 n 个光滑截面 $s_\alpha (1\le\alpha\le n)$, 使它们处处线性无关. 这样的 n 个截面称为 E 在 U 上的一个局部标架场. 显然在每一点 $p \in U$, $\{dx^i\otimes s_\alpha, 1\le i\le m, 1\le\alpha\le n\}$ 构成张量空间 $T_p^*M\otimes E_p$ 的一组基.

因为 ∇s_α 是从 $T^*(M)\otimes E$ 在 U 上的截面, 故可设

$$\nabla s_\alpha = \sum_{1\le i\le m; 1\le\beta\le n}\Gamma_{\alpha i}^\beta dx^i\otimes s_\beta, \tag{4.3}$$

其中 $\Gamma_{\alpha i}^{\beta}$ 是 U 上的光滑函数. 若记 $\omega_{\alpha}^{\beta}=\sum_{1\le i\le m}\Gamma_{\alpha i}^{\beta}dx^i$, 则 (4.3) 为

$$\nabla s_{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{n}\omega_{\alpha}^{\beta}\otimes s_{\beta}. \tag{4.4}$$

这 n^2 个一次微分式 $\{\omega_{\alpha}^{\beta}\}$ 称为联络 ∇ 关于局部标架场 $\{s_{\alpha}\}$ 的联络形式.

下面引进矩阵记号以简化计算. 令

$$S=\begin{pmatrix} s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix},$$

$$\omega=\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n\end{pmatrix}.$$

则 (4.4) 可以表示为

$$\nabla S=\omega\otimes S.$$

矩阵 ω 称为联络矩阵, 它依赖于局部标架场的选取.

如果

$$S'=\begin{pmatrix} s_1'\\ \vdots\\ s_n'\end{pmatrix},$$

是 U 上的另一个局部标架场, 则可设 $S'=A\cdot S$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ a_n^1 & \cdots & a_n^n\end{pmatrix},$$

其中 a_i^j 是 U 上的光滑函数, 且 $\det A\neq 0$.

设联络 ∇ 关于局部标架场 S' 的联络矩阵为 ω', 则由联络的定义可得

$$\nabla S'=dA\otimes S+A\cdot\nabla S=(dA+A\cdot\omega)\otimes S=(dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1})\otimes S', \tag{4.5}$$

所以

$$\omega'=dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1}, \tag{4.6}$$

这就是联络矩阵在局部标架场改变时的变换公式.

反过来, 我们有下面的命题.

命题 4.2 设 $\{U,W,Z,\cdots\}$ 是 M 上的一个坐标覆盖, 在每一个 U 上取定 E 的一个局部标架场 S_U, 并且指定一个由一次微分式构成的 $n\times n$ 阶矩阵 ω_U, 使得它们在坐标邻域相交时满足变换公式 (4.6), 即当 $U\cap W\neq\emptyset$ 时, 若设

$$S_W=A_{WU}\cdot S_U, \tag{4.7}$$

其中 A_{WU} 是 $U\cap W$ 上的光滑函数组成的 $n\times n$ 阶矩阵. 则在 $U\cap W$ 上有

$$\omega_W=dA_{WU}\cdot A_{WU}^{-1}+A_{WU}\cdot\omega_U\cdot A_{WU}^{-1}. \tag{4.8}$$

则在 E 存在一个联络 ∇, 它在坐标覆盖的每一个元素 U 上的联络矩阵为 ω_U.

证明 设 s 是 E 的任一个截面, 在 U 上表示为 $s = a_U \cdot S_U$, 其中 $a_U = (a_U^1, \cdots, a_U^n)$, a_U^i 是 U 上的光滑函数. 令 ∇s 在 U 上的表达式为

$$\nabla s|_U = (da_U + a_U \cdot \omega_U) \otimes S_U. \tag{4.9}$$

只需证明, 如果 $U \cap W \neq \emptyset$, 则在 $U \cap W$ 上有

$$(da_U + a_U \cdot \omega_U) \otimes S_U = (da_W + a_W \cdot \omega_W) \otimes S_W,$$

因此 (4.9) 所定义的 ∇s 是 M 上的截面.

由 (4.7), 在 $U \cap W$ 上有

$$a_U = a_W \cdot A_{WU}, \;\; da_U = da_W \cdot A_{WU} + a_W \cdot dA_{WU}.$$

利用 (4.8), 在 $U \cap W$ 上有

$$\begin{aligned}(da_U + a_U \cdot \omega_U) \otimes S_U &= (da_W \cdot A_{WU} + a_W \cdot dA_{WU} + a_W \cdot A_{WU} \cdot \omega_U) \otimes (A_{WU}^{-1} \cdot S_W) \\ &= (da_W + a_W \cdot dA_{WU} \cdot A_{WU}^{-1} + a_W \cdot \omega_W - a_W \cdot dA_{WU} \cdot A_{WU}^{-1}) \otimes S_W \\ &= (da_W + a_W \cdot \omega_W) \otimes S_W.\end{aligned}$$

易验证, 由 (4.9) 定义的映射 $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*(M) \otimes E)$ 满足定义 4.5 的条件, 故 ∇ 是 E 上的联络, 且 ∇ 在 U 上的联络矩阵是 ω_U. □

定理 4.3 光滑流形上的任一个向量丛上都存在联络.

证明 取 M 的一个坐标覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. 根据向量丛在局部上是平凡的, 可假设在每一个 U_α 上都有局部标架场 S_α. 根据联络的局部构造, 只需在每一个 U_α 上构造一个 $n \times n$ 阶矩阵 ω_α, 使得它们在局部标架场改变时满足变换公式 (4.6) 即可.

由定理 2.8, 不妨假设 $\{U_\alpha\}$ 局部有限, $\{g_\alpha\}$ 是对应的单位分解, 使得支集 $\operatorname{supp} g_\alpha \subset U_\alpha$. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 存在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的光滑函数组成的 $n \times n$ 阶矩阵 $A_{\alpha\beta}$ 使得

$$S_\alpha = A_{\alpha\beta} \cdot S_\beta, \;\; \det A_{\alpha\beta} \neq 0.$$

对每一个 $\alpha \in \mathcal{A}$, 任取 U_α 上的一次微分式构成的 $n \times n$ 阶矩阵 φ_α. 令

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} g_\beta \cdot (dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}), \tag{4.10}$$

则 ω_α 是 U_α 上的一次微分式构成的矩阵. 下面只需证明, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时有变换公式

$$\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{4.11}$$

事实上, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ 时, 在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上有 $A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}$. 因此在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 上有

$$A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_{\gamma; U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset} g_\gamma \cdot A_{\alpha\beta} \cdot (dA_{\beta\gamma} \cdot A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\beta\gamma}^{-1}) \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} = \omega_\alpha - dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1},$$

即 $\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}$, 定理得证. □

特别地, 在 (4.10) 中令 $\varphi_\beta = 0$, 则得 E 的一个联络 ∇, 它在 U_α 上的联络矩阵为

$$\omega_\alpha = \sum_\beta g_\beta \cdot (dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}).$$

根据联络矩阵的变换公式 (4.6), 联络矩阵为零不具有不变性. 但是, 对于任意一个联络总可以找到一个局部标架场, 使其联络矩阵在一点为零. 这一点在涉及联络的计算时是非常有用的.

定理 4.4 设 ∇ 是向量丛 E 上的一个联络, $p \in M$, 则在 p 的一个坐标邻域上存在局部标架场 S, 使得对应的联络矩阵 ω 在 p 点为零.

证明 取点 p 的局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$, 使得 $\varphi(p) = 0$. 设 S' 是 U 上的局部标架场, 对应的联络矩阵为 $\omega' = (w'^{\beta}_{\alpha})$, 其中

$$w'^{\beta}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\beta}_{\alpha i} dx^i,$$

$\Gamma'^{\beta}_{\alpha i}$ 是 U 上的光滑函数. 令

$$a^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^{\beta}_{\alpha i}(p) \cdot x^i,$$

则矩阵 $A = (a^{\beta}_{\alpha})$ 在点 p 处是单位矩阵. 故存在 p 的一个邻域 $V \subset U$, 使得 A 在 V 上非退化, 所以 $S = A \cdot S'$ 是 V 上的局部标架场. 由于 $dA(p) = -\omega'(p)$, 则由 (4.6) 得

$$\omega(p) = (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega' \cdot A^{-1})(p) = -\omega'(p) + \omega'(p) = 0,$$

即 S 为所求的局部标架场. □

对 (4.6) 求外微分, 可得

$$d\omega' \cdot A - \omega' \wedge dA = dA \wedge \omega + A \cdot d\omega. \tag{4.12}$$

由 (4.6) 知 $dA = \omega' \cdot A - A \cdot \omega$, 代入 (4.12) 可得

$$(d\omega' - \omega' \wedge \omega') \cdot A = A \cdot (d\omega - \omega \wedge \omega). \tag{4.13}$$

定义 4.6 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 称为联络 ∇ 在 U 上的曲率方阵.

由 (4.13) 知 $\Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1}$, 这是曲率方阵在局部标架场改变时的变换公式.

定理 4.5 曲率方阵满足 Bianchi 恒等式

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.$$

证明 对 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 两边求外微分得

$$\begin{aligned} d\Omega &= -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega = -(\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega \\ &\quad + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) = -\Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega. \end{aligned}$$

□

如果向量丛 E 的截面 s 满足 $\nabla s = 0$, 则称 s 是平行截面. 零截面显然是平行截面. 但是一般说来, 非零的平行截面不一定存在. 若 s 在局部标架场 S 下表示为 $s = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^{\alpha} s_{\alpha}$, 则 $\nabla s = 0$ 等价于

$$d\lambda^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} \lambda^{\beta} \omega^{\alpha}_{\beta} = 0, \;\; 1 \leq \alpha \leq n.$$

要使此方程组有非零解, 通常需要在联络上加一定的条件.

定义 4.7 设 C 是 M 中一条光滑曲线, X 是 C 的光滑切向量场, 若向量丛 E 在 C 上的截面 s 满足方程 $\nabla_X s = 0$, 则称 s 沿曲线 C 是平行的.

在 M 的一个坐标邻域 U 上, 设 C 的方程是

$$x^i = x^i(t),\ 1 \le i \le m,$$

曲线 C 的切向量场为

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

设 S 是 U 上的局部标架场, 则 $s = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^\alpha s_\alpha$ 是沿曲线 C 的平行截面, 当且仅当它满足方程组

$$< X, \nabla s >= \sum_{\alpha=1}^{n}(\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i}\Gamma_{\beta i}^{\alpha}\frac{dx^i}{dt}\lambda^\beta)s_\alpha = 0,$$

即

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i}\Gamma_{\beta i}^{\alpha}\frac{dx^i}{dt}\lambda^\beta = 0,\ 1 \le \alpha \le n.$$

上式是常微分方程组, 对于任意给定的初始值, 它的解是唯一存在的. 由此可见, 在 C 上任一点 p, 任意给定一个向量 $v \in E_p$, 它在 C 上唯一决定一个沿曲线 C 平行的向量场, 称之为向量 v 沿曲线 C 的平行移动. 显然, 沿曲线 C 的平行移动建立了向量丛 E 在曲线 C 的各点的纤维之间的同构.

§4.3 仿射联络

本节介绍黎曼流形 M 的切丛 TM 上的 Levi-Civita 联络. 首先从 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 着手讨论这个问题.

在 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 上有微分算子

$$\partial : \Gamma(T\mathbb{R}^m) \times \Gamma(T\mathbb{R}^m) \to \Gamma(T\mathbb{R}^m),$$

它把 $\mathbb{R}^m$ 上的一对向量场 X, Y 映成 Y 沿 X 方向的方向导数 $\partial_X Y$

$$(\partial_X Y)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{Y(x + tX(x)) - Y(x)}{t}.$$

算子 ∂ 有下面的基本性质：

(1) $\partial_X(\lambda \cdot Y + \mu \cdot Z) = \lambda \cdot \partial_X Y + \mu \cdot \partial_X Z$,

(2) $\partial_X(f \cdot Y) = \partial_X(f) \cdot Y + f \cdot \partial_X Y$,

(3) $\partial_{f\cdot X + g\cdot Y} Z = f \cdot \partial_X Z + g \cdot \partial_Y Z$,

(4) $\partial_X Y - \partial_Y X = [X, Y]$,

(5) $\partial_X(< Y, Z >) =< \partial_X Y, Z > + < Y, \partial_X Z >$,

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$, $<, >$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上标准的欧氏度量.

上面的性质 (4) 和 (5) 说明微分算子 ∂ 和 $\mathbb{R}^m$ 上标准的微分结构和欧氏度量是相容的.

下面将欧氏空间上的微分算子 ∂ 推广到黎曼流形 (M, g) 上的 Levi-Civita 联络. 首先定义光滑流形 M 的切丛 TM 上的联络.

定义 4.8 设 M 是 m 维光滑流形, M 的切丛 TM 上的一个仿射联络 ∇ 是满足下列条件的映射 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$

(1) $\nabla_{Y+fZ} X = \nabla_Y X + f\nabla_Z X$,

(2) $\nabla_Y(X + \lambda Z) = \nabla_Y X + \lambda\nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_Y(fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X$.
其中 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$. 有时 ∇ 也称为 M 上的一个联络.

给定一个联络的光滑流形 (M, ∇) 称为一个仿射联络空间. 在仿射联络空间中, 可以对光滑切向量场求协变微分和协变导数. 例如, 对任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 光滑切向量场 $\nabla_Y X$ 称为切向量场 X 沿 Y 的协变导数.

下面求协变导数的局部表达式.

设 $(U; x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 令

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

其中 Γ^k_{ji} 是 U 上的光滑函数, 称为联络 ∇ 在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下的联络系数.

若 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 则由联络的定义得

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \nabla_{Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}} (X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= Y^j (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}) \\
&= Y^j (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{kj}) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

这就是联络 ∇ 在 $(U; x^i)$ 下的局部坐标表达式.

联络系数 Γ^k_{ji} 的坐标变换公式如下: 设 $(\bar{U}; \bar{x}^i)$ 是 M 的另一个局部坐标系, 对应的联络系数为 $\bar{\Gamma}^r_{qp}$, 即

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^q} = \bar{\Gamma}^r_{qp} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r}.$$

由于在 $U \cap \bar{U}$ 上

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p},$$

则由 (4.14) 得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \bar{\Gamma}^r_{qp}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r}.$$

另一方面

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^k_{ji} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r}.$$

从而

$$\Gamma^k_{ji} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} = \bar{\Gamma}^r_{qp} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^j \partial x^i}. \qquad (4.15)$$

上式就是联络系数 Γ^k_{ji} 的坐标变换公式.

定义 4.9 设 (M, ∇) 是一个 m 维仿射联络空间, 对任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 令

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

其中 $[,]$ 是 $\Gamma(TM)$ 上的李括号, 易验证这样定义的 T 是 M 上的一个光滑的 (1,2) 型张量场, 称之为联络 ∇ 的挠率张量. ∇ 称为无挠联络如果挠率张量 T 为零, 即 $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

定理 4.6 设 (M, ∇) 是一个 m 维仿射联络空间, $\{e_i\}$ 是定义在坐标邻域 $U \subset M$ 上的局部标架场, $\{\omega^i\}$ 是其对偶余切标架场. 如果 $\{\omega^i_j\}$ 是 ∇ 关于 $\{e_i\}$ 的联络形式, 则

$$d\omega^i - \omega^j \wedge \omega^i_j = \frac{1}{2} T^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

其中 T^i_{jk} 是 ∇ 的挠率张量 T 的分量, 即 $T^i_{jk}=\omega^i(T(e_j,e_k))$.

证明 由定理 3.7, 可得

$$\begin{aligned}(d\omega^i-\omega^l\wedge\omega^i_l)(e_j,e_k) &= e_j(\omega^i(e_k))-e_k(\omega^i(e_j))-\omega^i([e_j,e_k])\\ &\quad -\omega^l(e_j)\omega^i_l(e_k)+\omega^l(e_k)\omega^i_l(e_j)\\ &= -\omega^i_j(e_k)+\omega^i_k(e_j)-\omega^i([e_j,e_k])\\ &= -\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}-\omega^i([e_j,e_k])\\ &= \omega^i(\nabla_{e_j}e_k-\nabla_{e_k}e_j-[e_j,e_k])\\ &= \omega^i(T(e_j,e_k))=T^i_{jk},\end{aligned}$$

从而有 $d\omega^i-\omega^j\wedge\omega^i_j=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$. $\square$

2 次外微分式 $\Omega^i=d\omega^i-\omega^j\wedge\omega^i_j$ 称为联络 ∇ 在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的挠率形式. 这样在 M 上的任意一个局部标架场 $\{e_i\}$ 下, 挠率张量 T 可以表示为 $T=\Omega^i\otimes e_i$. 由此可见, 联络的无挠性等价于 $\Omega^i=0,\ 1\le i\le m$, 即 $d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j$.

定义 4.10 设 (M,g) 是一个黎曼流形, ∇ 是 M 上的一个联络. 如果 $\nabla g\equiv 0$, 即对任意的 $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, 有

$$X(g(Y,Z))=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla_XZ),$$

则称联络 ∇ 与黎曼度量 g 是相容的.

设 (M,g) 为一个黎曼流形, ∇ 是切丛 (TM,M,π) 上的一个与黎曼度量 g 相容的无挠联络. 则下列方程成立

$$g(\nabla_XY,Z)=X(g(Y,Z))-g(Y,\nabla_XZ),$$

$$g(\nabla_XY,Z)=g([X,Y],Z)+g(\nabla_YX,Z)=g([X,Y],Z)+Y(g(X,Z))-g(X,\nabla_YZ),$$

$$\begin{aligned}0 &= -Z(g(X,Y))+g(\nabla_ZX,Y)+g(X,\nabla_ZY)\\ &= -Z(g(X,Y))+g(\nabla_XZ+[Z,X],Y)+g(X,\nabla_YZ-[Y,Z]).\end{aligned}$$

将上面三个等式相加, 可得

$$2g(\nabla_XY,Z)=\{X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))+g(Z,[X,Y])+g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z])\}.$$

如果 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是切丛的局部正交标架场, 则有 $\nabla_XY=\sum_{k=1}^m g(\nabla_XY,e_i)e_i$. 由此可见黎曼流形的切丛上至多存在一个与黎曼度量 g 相容的无挠联络.

定义 4.11 设 (M,g) 为黎曼流形, 则通过下式子定义的映射 $\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$

$$g(\nabla_XY,Z)=\frac{1}{2}\{X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))+g(Z,[X,Y])+g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z])\},\quad(4.16)$$

称为 M 上的黎曼联络, 或 Levi-Civita 联络.

需要指出的是 Levi-Civita 联络是只依赖于流形的微分结构和黎曼度量的内在量.

定理 4.7 设 (M,g) 是一个黎曼流形, 则 Levi-Civita 联络 ∇ 是 M 的切丛 TM 上的联络.

证明 对任意 $X,Y_1,Y_2,Z\in\Gamma(TM)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 根据李括号的定义, 并利用 g 是一个张量场易得

$$g(\nabla_X(\lambda\cdot Y_1+\mu\cdot Y_2),Z)=\lambda\cdot g(\nabla_XY_1,Z)+\mu\cdot g(\nabla_XY_2,Z),$$

$$g(\nabla_{Y_1+Y_2}X,Z)=g(\nabla_{Y_1}X,Z)+g(\nabla_{Y_2}X,Z).$$

进一步, 对任意的 $f\in C^\infty(M)$, 有

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X fY,Z) &= \frac{1}{2}\{X(f\cdot g(Y,Z))+f\cdot Y(g(Z,X))-Z(f\cdot g(X,Y))\\
&\quad +g(Z,[X,f\cdot Y])+f\cdot g(Y,[Z,X])-g(X,[f\cdot Y,Z])\}\\
&= \frac{1}{2}\{X(f)\cdot g(Y,Z)+f\cdot X(g(Y,Z))+f\cdot Y(g(Z,X))\\
&\quad -Z(f)\cdot g(X,Y)-f\cdot Z(g(X,Y))+g(Z,X(f)\cdot Y+f\cdot[X,Y])\\
&\quad +f\cdot g(Y,[Z,X])-g(X,-Z(f)\cdot Y+f\cdot[Y,Z])\}\\
&= X(f)\cdot g(Y,Z)+f\cdot g(\nabla_X Y,Z)\\
&= g(X(f)\cdot Y+f\cdot\nabla_X Y,Z)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{f\cdot X}Y,Z) &= \frac{1}{2}\{f\cdot X(g(Y,Z))+Y(f\cdot g(Z,X))-Z(f\cdot g(X,Y))+g(Z,[f\cdot X,Y])\\
&\quad +g(Y,[Z,f\cdot X])-f\cdot g(X,[Y,Z])\}\\
&= \frac{1}{2}\{f\cdot X(g(Y,Z))+Y(f)\cdot g(Z,X)+f\cdot Y(g(Z,X))\\
&\quad -Z(f)\cdot g(X,Y)-f\cdot Z(g(X,Y))+g(Z,-Y(f)\cdot X)\\
&\quad +g(Z,f\cdot[X,Y])+g(Y,Z(f)\cdot X)+f\cdot g(Y,[Z,X])-f\cdot g(X,[Y,Z])\}\\
&= f\cdot g(\nabla_X Y,Z).
\end{aligned}$$

这就证明了 ∇ 是切丛 (TM,M,π) 上的联络. $\square$

下面给出黎曼几何的基本定理.

定理 4.8 设 (M,g) 是一个黎曼流形, 则 Levi-Civita 联络 ∇ 是切丛 (TM,M,π) 上唯一的与黎曼度量 g 相容的无挠联络.

证明 利用 (4.16) 可得

$$g(\nabla_X Y,Z)-g(\nabla_Y X,Z)=\frac{1}{2}\{g(Z,[X,Y])-g(Z,[Y,X])\}=g(Z,[X,Y]).$$

这证明了 Levi-Civita 联络 ∇ 是无挠的.

再由 (4.16) 得

$$g(\nabla_X Y,Z)+g(\nabla_X Z,Y)=\frac{1}{2}\{X(g(Y,Z))+X(g(Z,Y))\}=X(g(Y,Z)).$$

这就证明了 Levi-Civita 联络 ∇ 与黎曼度量 g 是相容的. $\square$

设 (M,g) 为一个黎曼流形, 具有 Levi-Civita 联络 ∇. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 设

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

联络系数 Γ_{ji}^k 称为黎曼度量 g 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的 Christoffel 符号. 下面求 Christoffel 符号 Γ_{ji}^k.

因为

$$\begin{aligned}
T(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}-[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&= (\Gamma_{ji}^k-\Gamma_{ij}^k)\frac{\partial}{\partial x^k},
\end{aligned}$$

由 ∇ 的无挠性可得, $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$, 即 Christoffel 符号 Γ_{ji}^k 关于下指标 j, i 是对称的.

若设

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}),$$

则 $\nabla g = g_{ij,k} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$, 其中

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l. \tag{4.17}$$

利用 ∇ 与度量 g 的相容性及 (4.17) 可得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma_{ik}^l + g_{il}\Gamma_{jk}^l.$$

若记 $g^{kl} = (g^{-1})_{kl}$, 则有

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}). \tag{4.18}$$

§4.4 黎曼流形上的微分算子

设 (M, g) 是 m 维定向黎曼流形, 本节借助于 Levi-Civita 联络 ∇ 在 M 上引进若干微分算子, 这些算子在数学的许多学科分支中起着非常重要的作用.

设 $X \in \Gamma(TM)$, 则 ∇X 是 M 上的 (1,1) 型光滑张量场. 将 ∇X 进行缩并, 便得到 M 上的光滑函数, 称它为光滑切向量场 X 的散度, 记作 $\mathrm{div}X$, 即 $\mathrm{div}X = C_1^1(\nabla X)$.

定义 4.12 线性映射 $\mathrm{div} : \Gamma(T(M)) \to C^\infty(M)$, $X \mapsto \mathrm{div}X$, 称为黎曼流形 (M, g) 上的散度算子.

下面求散度算子 div 的局部表达式. 给定 M 上的一个局部坐标系 $(U; x^i)$, 在 U 上, 设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\nabla X = X^i_{,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j,$$

其中 Γ_{kj}^i 是 g_{ij} 的 Christoffel 符号. 从而

$$\mathrm{div}X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \Gamma_{ki}^i.$$

由此可见, 散度算子 div 是作用在切向量场 X 的分量上的一阶线性微分算子.

利用 Christoffel 符号的表达式 (4.18) 可得

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k},$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 故

$$\mathrm{div}\, X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i). \tag{4.19}$$

设 $f \in C^\infty(M)$, 则 $df \in A^1(M) = T_1^0(M)$. 利用黎曼度量 g, df 对应着 M 上的一个光滑切向量场, 记为 $\mathrm{grad}\, f$, 使得对任意的 $X \in \Gamma(TM)$ 有

$$g(\mathrm{grad}\, f, X) = df(X) = X(f). \tag{4.20}$$

切向量场 $\mathrm{grad}\, f$ 称为光滑函数 f 在黎曼度量 g 下的梯度.

定义 4.13 由 $f \mapsto \mathrm{grad}\, f$ 确定的映射 $\mathrm{grad} : C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$ 是作用在光滑函数上的一阶线性微分算子, 称之为黎曼流形 (M, g) 上的梯度算子.

在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下, 记 $f_i = f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, 则有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f_i dx^i.$$

在坐标邻域 U 上, 设 $\operatorname{grad} f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则由 (4.20) 可得

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = df(\frac{\partial}{\partial x^i}) = g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^i}) = f^j g(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = f^j g_{ij}.$$

所以 $f^j = f_i g^{ij}$, 从而

$$\operatorname{grad} f = f_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.21}$$

定义 4.14 梯度算子 grad 和散度算子 div 复合所得到的线性映射

$$\triangle = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

称为黎曼流形 (M, g) 上的 Beltrami-Laplace 算子.

显然, $\triangle$ 是作用在光滑函数上的二阶线性微分算子, 它是黎曼流形上一个非常重要的微分算子. 从下面的例子可以看到, 它是欧氏空间中的 Laplace 算子在黎曼流形上的推广.

利用 (4.19) 和 (4.21), 可得 $\triangle$ 在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下的局部表达式为

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}).$$

例 4.5 求欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上关于标准欧氏度量 g 的 Beltrami-Laplace 算子.

解 用 (x, y) 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的笛卡尔直角坐标系, 则对 $\mathbb{R}^2$ 上的标准欧氏度量 g 有

$$g_{11} = g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = 1, \;\; g_{12} = g_{21} = g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0, \;\; g_{22} = g(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1, \;\; G = \det(g_{ij}) = 1.$$

从而

$$g^{11} = g^{22} = 1, \;\; g^{12} = g^{21} = 0.$$

则对任意的 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\begin{aligned} \triangle f &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{G} g^{11} \frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{G} g^{12} \frac{\partial f}{\partial y}) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{G} g^{21} \frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{G} g^{22} \frac{\partial f}{\partial y}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

即 $\mathbb{R}^2$ 上的 Beltrami-Laplace 算子 $\triangle$ 在直角坐标系下的表达式为

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

它可以推广到任意的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上. 即欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上关于标准欧氏度量 g 的 Beltrami-Laplace 算子为

$$\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i},$$

这正是通常的 Laplace 算子.

设 $f \in C^{\infty}(M)$, 则

$$df \in A^1(M) = T_1^0(M).$$

对 df 求协变微分可得到一个二阶协变张量场, 记为 Hess(f), 即

$$\text{Hess}(f) = \nabla(df) \in T_2^0(M).$$

定义 4.15 线性映射 $\text{Hess}: C^{\infty}(M) \to T_2^0(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的 Hessian 算子.

命题 4.3 对任意 $f \in C^{\infty}(M)$, Hess(f) 是光滑流形 M 上对称的二阶协变张量场.

证明 对任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 利用 Levi-Civita 联络 ∇ 的无挠性, 可得

$$\begin{aligned}
(\text{Hess(f)})(X,Y) &= (\nabla(df))(X,Y) = (\nabla_Y(df))(X) \\
&= Y(df(X)) - (df)(\nabla_Y X) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) \\
&= (YX - \nabla_Y X)(f) = (XY - \nabla_X Y)(f) = (\text{Hess(f)})(Y,X),
\end{aligned}$$

即 $(\text{Hess(f)})(X,Y) = (\text{Hess(f)})(Y,X)$, 从而命题得证. □

在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下, Hess(f) 的分量为

$$\text{Hess}(f)_{ij} = \text{Hess}(f)(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = f_{i,j}.$$

命题 4.4 对于任意的 $f \in C^{\infty}(M)$, $\triangle f = g^{ij} f_{i,j}$.

证明 在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \ \ g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}),$$

则

$$\nabla g = g_{ij,k} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

其中 $g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l$. 利用 Levi-Civita 联络 ∇ 与黎曼度量 g 的相容性, 可得 $g_{ij,k} = 0$. 类似可得 $g^{ij}_{,k} = 0$. 所以

$$g^{ij} f_{i,j} = (g^{ij} f_i)_{,j} = f^j_{,j} = \triangle f.$$

□

$g^{ij} f_{i,j} = g^{ij}\text{Hess}(f)_{ij}$ 称为 Hess(f) 关于黎曼度量 g 的迹, 记为 tr(Hess(f)). 从而

$$\triangle f = \text{tr}(\text{Hess}(f)).$$

现在讨论黎曼流形上的散度定理及其推论. 定向黎曼流形 (M, g) 上的体积元素 dv_M 是大范围定义在 M 上的 m 次外微分式, 它的局部坐标表达式为

$$dv_M|_U = \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

其中 $(U; x^i)$ 是 M 的任意一个与其定向相符的局部坐标系, $G = \det(g_{ij})$.

下面的定理是散度定理在闭流形情形下的一个特例.

定理 4.9 设 (M, g) 是定向 m 维闭黎曼流形, 则对任意的 $X \in \Gamma(TM)$, 有如下的积分公式

$$\int_M \text{div} X dv_M = 0.$$

证明 对于 M 的与其定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$, 设

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

由 $\mathrm{div}(X)$ 的局部表达式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X) dv_M &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \sum_{i=1}^m d((-1)^{i+1}\sqrt{G} X^i) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m. \end{aligned} \tag{4.22}$$

令

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1}\sqrt{G} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m. \tag{4.23}$$

易验证, ω 的表达式 (4.23) 与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关, 所以是大范围定义在 M 上的 $m-1$ 次外微分式. 结合 (4.22) 可得

$$\mathrm{div}(X) dv_M = d\omega.$$

从而由 Stokes 定理得

$$\int_M \mathrm{div}(X) dv_M = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0.$$

定理得证. □

对于紧致带边的黎曼流形我们有如下的结果.

定理 4.10(散度定理) 设 (M,g) 是 m 维紧致带边定向黎曼流形, $\mathbf{n}$ 是 ∂M 上指向 M 内部的单位法向量场, 则对任意的 $X \in \Gamma(TM)$, 有如下的积分公式成立

$$\int_M \mathrm{div} X dv_M = -\int_{\partial M} g(\mathbf{n}, X) dv_{\partial M},$$

其中 ∂M 具有诱导定向, $dv_{\partial M}$ 为 ∂M 的体积元素.

证明 取 M 的与其定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$, 使得 $U \cap \partial M \neq \emptyset$, $x^m \geq 0$, 且

$$U \cap \partial M = \{p \in U | x^m(p) = 0\}.$$

则在 $U \cap \partial M$ 上, $\{(-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ 给出 ∂M 上与诱导定向相符的局部坐标系. 因此, ∂M 的体积元 $dv_{\partial M}$ 在 $U \cap \partial M$ 上可以表示为

$$dv_{\partial M} = (-1)^m \sqrt{\widetilde{G}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}, \tag{4.24}$$

其中 $\widetilde{G} = \det(g_{\alpha\beta}), 1 \leq \alpha, \beta \leq m-1$.

由 ω 的局部表达式 (4.23) 可得

$$\omega|_{U \cap \partial M} = (-1)^m \sqrt{G} X^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}. \tag{4.25}$$

∂M 上指向 M 内部的单位法向量场 $\mathbf{n}$ 可以表示为

$$\mathbf{n} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \;\; a^m > 0.$$

从而

$$\{(-1)\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\}$$

是 $U \cap \partial M$ 上与 ∂M 的诱导定向相符的自然标架场, 由假设得

$$g(\mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = a^i g_{i\alpha} = 0,\ \ 1 \le \alpha \le m-1,\ \ g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = a^m a^i g_{im} = 1. \tag{4.26}$$

则

$$0 = a^i g_{i\alpha} g^{\alpha j} = a^i (delta_i^j - g_{im} g^{mj}) = a^j - \frac{1}{a^m} g^{mj},$$

即 $a^m a^j = g^{mj}$. 令 $j = m$, 得 $a^m = \sqrt{g^{mm}}$, 从而

$$a^j = \frac{g^{mj}}{\sqrt{g^{mm}}}.$$

将上式代入 (4.26) 得

$$g_{m\alpha} = -\frac{a^\beta}{a^m} g_{\beta\alpha} = -\frac{g^{\beta m}}{g^{mm}} g_{\beta\alpha}.$$

所以

$$\begin{aligned}
G &= \det \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1\,m-1} & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{m-1\,1} & \cdots & g_{m-1\,m-1} & g_{m-1\,m} \\ g_{m1} & \cdots & g_{m\,m-1} & g_{mm} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & * \\ 0 & g_{mm} + \frac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} g_{\gamma m} \end{pmatrix} \\
&= \widetilde{G}(g_{mm} + \frac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} g_{\gamma m}) = \widetilde{G} \frac{1}{g^{mm}} = \frac{\widetilde{G}}{(a^m)^2},
\end{aligned}$$

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{\widetilde{G}}}{a^m}. \tag{4.27}$$

另一方面, 由 (4.26) 可得

$$g(\mathbf{n}, X) = g(\mathbf{n}, X^m \frac{\partial}{\partial x^m}) = X^m a^i g_{im} = \frac{X^m}{a^m}.$$

结合 (4.24), (4.25) 和 (4.27) 得

$$\omega|_{U \cap \partial M} = (-1)^{m+1} \sqrt{\widetilde{G}} \frac{X^m}{a^m} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} = -g(\mathbf{n}, X) dv_{\partial M}.$$

则由 Stokes 定理得

$$\int_M \operatorname{div} X dv_M = \int_{\partial M} \omega = -\int_{\partial M} g(\mathbf{n}, X) dv_{\partial M}.$$

□

作为散度定理的一个应用, 有下面的结论.

定理 4.11 设 (M, g) 是紧致定向的 m 维带边黎曼流形, $\mathbf{n}$ 为 ∂M 的指向 M 内部的单位法向量场. 则对于任意的 $f, h \in C^\infty(M)$, 有如下的积分公式成立

$$\int_M (h \triangle f - f \triangle h) dv_M = \int_{\partial M} (f\mathbf{n}(h) - h\mathbf{n}(f)) dv_{\partial M}, \tag{4.28}$$

其中 ∂M 具有诱导定向. (4.28) 称为 Green 公式.

证明 对于任意的 $f, h \in C^\infty(M)$, 令 $X = h\mathrm{grad}\, f$, 则有

$$\mathrm{div}(X) = g(\mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f) + h\triangle f,$$

$$g(\mathbf{n}, X) = g(\mathbf{n}, h \cdot \mathrm{grad}\, f) = hdf(\mathbf{n}) = h\mathbf{n}(f).$$

由定理 4.7 得

$$\int_M g(\mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f)dv_M + \int_M h\triangle f dv_M = -\int_{\partial M} h\mathbf{n}(f)dv_{\partial M}.$$

同理可得

$$\int_M g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h)dv_M + \int_M f\triangle h dv_M = -\int_{\partial M} f\mathbf{n}(h)dv_{\partial M}.$$

把上面两式相减可得 (4.28). □

特别地, 在 Green 公式中令 $h \equiv 1$, 则有下面的推论.

推论 4.1 假设同定理 4.8, 则对任意的 $f \in C^\infty(M)$, 有如下的积分公式成立

$$\int_M \triangle f dv_M = -\int_{\partial M} \mathbf{n}(f))dv_{\partial M}. \tag{4.29}$$

特别地, 当 $\partial M = \emptyset$ 时有

$$\int_M \triangle f dv_M = 0. \tag{4.30}$$

§4.5 测地线

测地线是欧氏空间中直线段在黎曼流形中的推广. 本节简单介绍黎曼流形上的测地线, 它作为非线性常微分方程组的解, 我们将看到测地线可作为能量函数的临界点, 同时也是端点间的最短道路.

定义 4.16 设 M 是一个光滑流形,(TM, M, π) 是 M 的切丛. 沿曲线 $\gamma : I = [a, b] \to M$ 的一个向量场 X 是一条曲线 $X : I \to TM$ 使得 $\pi \circ X = \gamma$.

记 $\Gamma_\gamma(TM)$ 为沿曲线 γ 的所有光滑向量场的集合. 对于任意的 $X, Y \in \Gamma_\gamma(TM)$, $f \in C^\infty(I)$, 定义运算 $\cdot$ 和 $+$ 如下

(1) $(f \cdot X)(t) = f(t) \cdot X(t)$,

(2) $(X + Y)(t) = X(t) + Y(t)$.

这样 $\Gamma_\gamma(TM)$ 为 $C^\infty(I)$ 上的模, 特别地, 它是 M 上的常函数的实向量空间.

给定 M 上的一条光滑曲线 $\gamma : I \to M$, 光滑向量场 $X : I \to TM$, $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ 称为沿曲线 γ 的切向量场.

下面的结果给出了向量场沿给定曲线的微分规则以及与 Levi-Civita 联络的关系.

定理 4.12 设 (M, g) 为 m 维光滑黎曼流形, $\gamma : I \to M$ 是 M 中的一条曲线. 则存在唯一的算子

$$\frac{D}{dt} : \Gamma_\gamma(TM) \to \Gamma_\gamma(TM)$$

使得对所有的 $\lambda, \mu, \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(I)$ 有

(1) $D(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y)/dt = \lambda \cdot (DX/dt) + \mu \cdot (DY/dt)$,

(2) $D(f \cdot Y)/dt = df/dt \cdot Y + f \cdot (DY/dt)$,

(3) 对每个 $t_0 \in I$, 存在 I 的开子区间 J_0, 使得 $t_0 \in J_0$, 且若 $X \in \Gamma(TM)$ 是一个向量场, 使得对任意 $t \in J_0$, $X_{\gamma(t)} = Y(t)$, 则有

$$(\frac{DY}{dt})(t_0) = (\nabla_{\gamma'} X)_{\gamma(t_0)}.$$

证明 首先证明唯一性. 假设这样的算子存在. 则对于任一点 $t_0 \in I$, 选取 M 的局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$ 以及开子区间 $J_0 \subset I$, 使得 $t_0 \in J_0$, $\gamma(J_0) \subset U$. 记 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TU)$, 则存在函数 $\alpha_k \in C^\infty(J_0)$, 使得沿 γ 的向量场 Y 可写为

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(t)(X_k)_{\gamma(t)}.$$

条件 (2) 说明

$$(\frac{DY}{dt})(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(t)(\frac{DX_k}{dt})_{\gamma(t)} + \sum_{k=1}^{m} \alpha'_k(t)(X_k)_{\gamma(t)}. \tag{4.31}$$

令 $\varphi \circ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_m(t))$, 则 $\gamma'(t) = \sum_{k=1}^m \gamma'_k(t)(X_k)_{\gamma(t)}$.

由条件 (3) 可得

$$(\frac{DX_j}{dt})_{\gamma(t)} = (\nabla_{\gamma'} X_j)_{\gamma(t)} = \sum_{k=1}^{m} \gamma'_k(t)(\nabla_{X_k} X_j)_{\gamma(t)}. \tag{4.32}$$

从而由 (4.31) 和 (4.32) 得

$$(\frac{DY}{dt})(t) = \sum_{k=1}^{m} \{\alpha'_k(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\gamma'_i(t)\alpha_j(t)\}(X_k)_{\gamma(t)}. \tag{4.33}$$

这就证明了算子 D/dt 是唯一确定的.

容易看到, 如果利用等式 (4.33) 定义一个算子 D/dt, 那么它满足定理 4.12 的所有条件, 这就证明了算子 D/dt 的存在性. □

Levi-Civita 联络可用来定义黎曼流形上的平行向量场和测地线作为常微分方程的解.

定义 4.17 设 (M, g) 为黎曼流形,$\gamma : I \to M$ 为一条 C^1 曲线. 向量场 X 称为沿曲线 γ 平行, 如果 $\nabla_{\gamma'} X = 0$. 一条 C^2 曲线 $\gamma : I \to M$ 称为一条测地线, 如果向量场 γ' 沿 γ 平行, 即 $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.

下面的结果说明如果给定点 $p \in M$ 处的初值, 我们可以得到沿经过 p 点的任意曲线的大范围定义的平行向量场.

定理 4.13 设 (M, g) 为 m 维黎曼流形,$I = (a, b)$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 上的开区间. 令 $\gamma : I \to M$ 是一条光滑曲线,$t_0 \in I$, $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, 则存在唯一的沿 γ 的平行向量场 Y, 使得 $X_0 = Y(t_0)$.

证明 不失一般性, 设曲线 γ 的像在坐标卡 $(U; x^i)$ 中. 记 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则在区间 I 上, 切向量场 γ' 在局部坐标下可以表示为

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(t)(X_i)_{\gamma(t)},$$

其中 $\rho_i \in C^\infty(I)$.

类似地, 令 Y 为一个沿 γ 的向量场, 它表示为

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j(t)(X_j)_{\gamma(t)}.$$

则

$$\begin{aligned}(\nabla_{\gamma'} Y)(t) &= \sum_{j=1}^{m} \{\sigma'_j(X_j)_{\gamma(t)} + \sigma_j(t)(\nabla_{\gamma'} X_j)_{\gamma(t)}\} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \{\sigma'_k(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_j(t)\rho_i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\}(X_k)_{\gamma(t)}.\end{aligned}$$

这说明向量场 Y 平行, 即 $\nabla_{\gamma'}Y \equiv 0$ 当且仅当

$$\sigma_k'(t) + \sum_{ij=1}^{m} \sigma_j(t)\rho_i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0,\ \ k = 1, \cdots, m.$$

由常微分方程理论知, 对于每个初值 $\sigma(t_0) = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, 使得 $X_0 = \sum_{k=1}^m v_k(X_k)_{\gamma(t_0)}$, 上面的常微分方程组存在唯一解 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$. 这就给出了唯一的沿 γ 的平行向量场 Y, $Y(t) = \sum_{k=1}^m \sigma_k(k)(X_k)_{\gamma(t)}$. □

引理 4.1 设 (M, g) 为黎曼流形,$\gamma : I \to M$ 为一条光滑曲线,X, Y 为沿 γ 的平行向量场, 则函数 $g(X, Y) : I \to R$, $t \mapsto g_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)})$ 是常函数.

证明 利用 Levi-Civita 联络与黎曼度量的相容性, 可得

$$\frac{d}{dt}(g(X, Y)) = g(\nabla_{\gamma'}X, Y) + g(X, \nabla_{\gamma'}Y) = 0.$$

这就证明了函数 $g(X, Y)$ 沿 γ 是常数. □

下面关于平行向量场的结果是黎曼几何的一个非常有用的工具.

定理 4.14 设 (M, g) 为 m 维黎曼流形,$p \in M$, $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 为切空间 T_pM 的一组正交基. 设 $\gamma : I \to M$ 是一条光滑曲线, 使得 $\gamma(0) = p$, 且 $X_1, \cdots, X_m$ 为沿 γ 的平行向量场, 使得 $X_k(0) = v_k$,$k = 1, 2, \cdots, m$. 则对任意 $t \in I$, $\{X_1(t), \cdots, X_m(t)\}$ 是切空间 $T_{\gamma(t)}M$ 的正交基.

证明 由引理 4.1, 定理立即可得. □

测地线方程通常是一个非线性常微分方程, 因此我们有下面的局部存在定理.

定理 4.15 设 (M, g) 为 m 维黎曼流形, $p \in M$, $v \in T_pM$, 则存在一个开区间 $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ 和唯一的测地线 $\gamma : I \to M$ 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

证明 设 (U, x) 是 M 上的一个坐标卡, 使得 $p \in U$. 记 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. 对开区间 J 和一条 C^2 曲线 $\gamma : J \to U$, 记 $\gamma_i = x^i \circ \gamma : J \to R$. 曲线 $x \circ \gamma : J \to \mathbb{R}^m$ 为 C^2 曲线, 则有

$$(dx)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i'(t)e_i,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 $T_{x(p)}\mathbb{R}^m$ 的标准正交基, 从而有

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i'(t)(X_i)_{\gamma(t)}.$$

对上式进行微分得

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}\gamma' &= \sum_{j=1}^{m} \nabla_{\gamma'}(\gamma_j'(t)(X_j)_{\gamma(t)}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \{\gamma_j''(t)(X_j)_{\gamma(t)} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_j'(t)\gamma_i'(t)(\nabla_{X_i}X_j)_{\gamma(t)}\} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \{\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t)\}(X_k)_{\gamma(t)}.
\end{aligned}$$

所以曲线 γ 是测地线当且仅当

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0,\ \ k = 1, \cdots, m.$$

由常微分方程理论知, 对于初值 $q_0 = x(p)$ 和 $w_0 = (dx)_p(v)$, 存在开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 以及唯一的解 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 满足初值条件 $(\gamma_1(0), \cdots, \gamma_m(0)) = q_0$, $(\gamma_1'(0), \cdots, \gamma_m'(0)) = w_0$. □

设 $\gamma : I \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 中一条测地线, 如果对任意的 $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$, 则称 γ 为正则测地线.

推论 4.2 设 $\gamma : I \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 中一条正则测地线, 如果有参数变换

$$t = t(u), \ \ \tilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u)), \ \ u \in \tilde{I},$$

使得 $\tilde{\gamma}(t) : \tilde{I} \to M$ 仍然是 (M, g) 中的测地线, 则有 $t(u) = au + b$, 其中 a, b 为常数, 且 $a \neq 0$.

证明 因为 $\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(t(u)) \cdot t'(u)$, 所以

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\gamma}'(u)} \tilde{\gamma}'(u) &= \nabla_{\tilde{\gamma}'(u)} (\gamma'(t(u)) \cdot t'(u)) \\ &= \gamma'(t(u)) \cdot t''(u) + (t'(u))^2 \nabla_{\gamma'(t(u))} \gamma'(t(u)) \\ &= \gamma'(t(u)) \cdot t''(u). \end{aligned}$$

若 $\tilde{\gamma}(u)$ 仍然是 (M, g) 中的测地线, 则 $\nabla_{\tilde{\gamma}'(u)} \tilde{\gamma}'(u) = 0$. 因为 $\gamma'(t) \neq 0$, 故 $t''(u) \equiv 0$, 从而 $t(u) = au + b, \ \ a \neq 0$. □

设 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是黎曼流形 (M, g) 中一条测地线, 满足条件 $\gamma(0) = p, \ \ \gamma'(0) = v$, 记该测地线为 $\gamma(t; p, v)$.

推论 4.3 设测地线 $\gamma(t; p, v)$ 在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有定义, 则对任意的正数 λ, 测地线 $\gamma(t; p, \lambda v)$ 在区间 $(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ 上有定义, 并且对任意的 $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ 有

$$\gamma(t; p, \lambda v) = \gamma(\lambda t; p, v).$$

证明 对测地线 $\gamma(t) = \gamma(t; p, v)$ 作参数变换

$$t = \lambda u, \ \ u \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda),$$

并记 $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\lambda u; p, v)$. 则由推论 4.2 知, $\tilde{\gamma}$ 是定义在 $(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ 上的测地线, 且 $\tilde{\gamma}'(u) = \lambda \gamma'(\lambda u; p, v)$. 所以

$$\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p, \ \ \tilde{\gamma}'(0) = \lambda \tilde{\gamma}'(0) = \lambda v.$$

这说明 $\tilde{\gamma}(u)$ 是经过点 p, 以 λv 为切向量的测地线, 则由唯一性得

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\lambda u; p, v) = \gamma(u; p, \lambda v), \ \ u \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda).$$

□

定理 4.16 设 $\gamma(t)$ 是黎曼流形 (M, g) 中的一条正则测地线, 则其切向量 $\gamma'(t)$ 的长度为常数, 并且存在常数 a, b, $a > 0$, 使得 $s = at + b$ 为曲线 γ 的弧长参数.

证明 利用 Levi-Civita 联络与黎曼度量 g 的相容性, 得

$$\frac{d}{dt} < \gamma'(t), \gamma'(t) >= \gamma'(t)(< \gamma'(t), \gamma'(t) >) = 2 < \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t) >= 0.$$

所以存在常数 $a > 0$, 使得

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| = a.$$

从而有常数 b, 使得 $s = at + b$. □

定义 4.18 设 $\gamma(t)$ 是黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线, 如果其切向量 $\gamma'(t)$ 是单位向量, 即 $|\gamma'(t)|\equiv 1$, 则称它为正规测地线.

黎曼流形 (M,g) 上的 Levi-Civita 联络 ∇ 是一个完全由度量 g 决定的内在量. 所以, 对于给定的曲线 $\gamma: I\to M$, $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$ 也完全由度量 g 决定的. 这说明测地线在局部等距下的像还是测地线.

设 $E^m=(\mathbb{R}^m,<,>_{\mathbb{R}^m})$ 为欧氏空间. 对于平凡坐标卡 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 度量由 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 给出. 则对所有的 $i,j,k=1,\cdots,m$, 有 $\Gamma_{ij}^k=0$. 这说明 $\gamma: I\to\mathbb{R}^m$ 是测地线当且仅当 $\gamma''(t)=0$, 即 $\gamma(t)=t\cdot a+b$, 其中 a,b 为 $\mathbb{R}^m$ 中的点. 这说明 E^m 中的测地线是直线.

定义 4.19 黎曼流形 (M,g) 中的一条测地线 $\gamma: I\to(M,g)$ 称为是极大的, 如果它不能扩张成为严格包含 I 的区间 J 上的测地线. 流形 (M,g) 成为完备的, 如果对每个点 $(p,v)\in TM$, 存在定义在整条实直线 $\mathbb{R}$ 上的测地线 $\gamma:\mathbb{R}\to M$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(t)=v$.

定义 4.20 设 (M,g) 为黎曼流形,$\gamma: I\to M$ 为 M 中的一条 C^r 曲线. γ 的变分是一个 C^r 映射 $\Phi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times I\to M$, 使得对每个 $s\in I$, 有 $\Phi_0(s)=\Phi(0,s)=\gamma(s)$. 若区间是紧致的, 即 $I=[a,b]$, 变分 Φ 称为是恰当的, 如果对于所有的 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 有 $\Phi_t(a)=\gamma(a)$, $\Phi_t(b)=\gamma(b)$.

定义 4.21 设 (M,g) 为黎曼流形, $\gamma: I\to M$ 是 M 上的一条 C^2 曲线. 对于每个紧致区间 $[a,b]\subset I$, 定义能量函数 $E_{[a,b]}$ 为

$$E_{[a,b]}(\gamma)=\frac{1}{2}\int_a^b g(\gamma'(t),\gamma'(t))dt.$$

一条 C^2 曲线 $\gamma: I\to M$ 称为能量函数的临界点, 如果 $\gamma|_{[a,b]}$ 的每个恰当变分 Φ 满足

$$\frac{d}{dt}(E_{[a,b]}(\Phi_t))|_{t=0}=0.$$

下面证明测地线可以用能量函数的临界点来刻画.

定理 4.17 一条 C^2 曲线 γ 是能量函数的临界点的充分必要条件是它为测地线.

证明 对于 C^2 映射 $\Phi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times I\to M$, $(t,s)\mapsto\Phi(t,s)$, 定义沿 Φ 的向量场 $X=d\Phi(\partial/\partial s)$, $Y=d\Phi(\partial/\partial t)$. 由于 $[\partial/\partial s,\partial/\partial t]=0$, 故

$$\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]=[d\Phi(\partial/\partial s),d\Phi(\partial/\partial t)]=d\Phi([\partial/\partial s,\partial/\partial t])=0,$$

这说明向量场 X 和 Y 是可交换的.

设 Φ 是 $\gamma|_{[a,b]}$ 的一个恰当变分, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E_{[a,b]}(\Phi_t))&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_a^b g(X,X)ds)=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d}{dt}(g(X,X))ds=\int_a^b g(\nabla_YX,X)ds\\&=\int_a^b g(\nabla_XY,X)ds=\int_a^b(\frac{d}{dt}(g(Y,X))-g(Y,\nabla_XX))ds=[g(Y,X)]_a^b-\int_a^b g(Y,\nabla_XX)ds.\end{aligned}$$

由于变分是恰当的, 故 $Y(a)=Y(b)=0$. 又因为 $X(0,s)=\partial\Phi/\partial s(0,s)=\gamma'(s)$, 所以

$$\frac{d}{dt}(E_{[a,b]}(\Phi_t))|_{t=0}=-\int_a^b g(Y(0,s),(\nabla_{\gamma'}\gamma')(s))ds.$$

最后一个积分对 γ 的每一个恰当变分 Φ 为零当且仅当 $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$. $\square$

设 (M,g) 为一个 m 维黎曼流形, $p\in M$, $S_p^{m-1}=\{v\in T_pM|g_p(v,v)=1\}$ 是 M 在 p 点的切空间 T_pM 中的单位球面. 则每个点 $w\in T_pM-\{0\}$ 可以写为 $w=r_w\cdot v_w$, 其中 $r_w=|w|$, $v_w=w/|w|\in S_p^{m-1}$. 对 $v\in S_p^{m-1}$, 令 $\gamma_v:(-\alpha_v,\beta_v)\to M$ 为一条极大测地线, 使得 $\alpha_v,\beta_v\in\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$, $\gamma_v(0)=p$, $\gamma_v'(0)=v$. 易验证 $\epsilon_p=\inf\{\alpha_v,\beta_v|v\in S_p^{m-1}\}$ 为正数, 故开球 $B_{\epsilon_p}^m(0)=\{v\in T_pM|g_p(v,v)<\epsilon_p^2\}$ 是非空的.

p 点处的指数映射 $\exp_p : B^m_{\epsilon_p}(0) \to M$ 定义为

$$\exp_p : w \mapsto \begin{cases} p & w = 0, \\ \gamma_{v_w}(\gamma_w) & w \neq 0. \end{cases}$$

注意到对 $v \in S^{m-1}_p$, 线段 $\lambda_v : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \to T_pM$, $t \mapsto t \cdot v$ 被指数映射映到测地线 γ_v, 即局部地有 $\gamma_v = \exp_p \circ \lambda_v$. 易见映射 $\exp_p$ 是光滑的, 则由定义知微分 $d(\exp_p)_0 : T_pM \to T_pM$ 是切空间 T_pM 上的恒等映射. 由反函数定理知, 存在 $r_p \in \mathbb{R}^+$ 使得, 如果记 $U_p = B^m_{r_p}(0)$, $V_p = \exp_p(U_p)$, 则 $\exp_p|_{U_p} : U_p \to V_p$ 是一个微分同胚.

下面的结果说明局部上测地线是它的端点间的最短道路.

定理 4.18 设 (M, g) 是黎曼流形,$p \in M$, $\gamma : [0, \epsilon] \to M$ 是一条测地线,$\gamma(0) = p$. 则存在 $\alpha \in (0, \epsilon)$, 使得对每个 $q \in \gamma([0, \alpha])$, γ 是从 p 到 q 的最短道路.

证明 设 $p \in M$, $U = B^m_r(0) \subset T_pM$, $V = \exp_p(U)$, 使得在 p 点的指数映射的限制 $\phi = \exp_p|_U : U \to V$ 是一个微分同胚. 在 V 上有度量 g, 通过 ϕ 将 g 拉回得到 U 上的度量 $\tilde{g} = \phi^* g$. 这使得 $\phi : (U, \tilde{g}) \to (V, g)$ 为一个等距. 由指数映射的构造知,$(U, \tilde{g})$ 上过点 $0 = \phi^{-1}(p)$ 的测地线恰好就是直线 $\lambda_v : t \mapsto t \cdot v$, 其中 $v \in T_pM$. 现设 $q \in B^m_r - \{0\}$, 曲线 $\lambda_q : [0, 1] \to B^m_r(0)$ 由 $t \mapsto t \cdot q$ 给出. 再令 $\sigma : [0, 1] \to B^m_r(0)$ 是满足 $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = q$ 的任意曲线. 沿 σ 由 $\hat{\sigma} : t \mapsto (\sigma(t), \sigma(t))$ 和 $\check{\sigma} : t \mapsto (\sigma(t), \frac{\tilde{g}_{\sigma(t)}(\sigma'(t), \hat{\sigma}(t))}{\tilde{g}_{\sigma(t)}(\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}(t))} \cdot \sigma(t))$ 分别定义两个向量场 $\hat{\sigma}$ 和 $\check{\sigma}$. 易验证

$$|\check{\sigma}(t)| = \frac{|\tilde{g}_{\sigma(t)}(\sigma'(t), \hat{\sigma}(t))|}{|\hat{\sigma}|},$$

$$\frac{d}{dt}|\hat{\sigma}(t)| = \frac{d}{dt}\sqrt{\tilde{g}_{\sigma(t)}(\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}(t))} = \frac{\tilde{g}_\sigma(\sigma', \hat{\sigma})}{|\hat{\sigma}|}.$$

由上面两个等式, 可得 $|\check{\sigma}(t)| = \frac{d}{dt}|\hat{\sigma}(t)|$. 这说明

$$L(\sigma) = \int_0^1 |\sigma'|dt \geq \int_0^1 |\check{\sigma}|dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}|\hat{\sigma}(t)|dt = |\hat{\sigma}(1)| - |\hat{\sigma}(0)| = |q| = L(\lambda_q).$$

这就证明了 γ 是连结 p, q 的最短道路. □

练习 4

1. 设 $f : (M, g) \to (N, h)$ 是从黎曼流形 (M, g) 到 (N, h) 的等距映射. 如果在每一点 $p \in M$, 切映射 $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ 是线性同构, 证明 $f : (M, g) \to (N, h)$ 为局部等距.

2. 设 M 是一个光滑流形,∇ 是切丛 (TM, M, π) 上的一个联络. 证明 ∇ 的挠率 $T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ 是一个 (1,2) 型的张量场.

3. 设 (M, g) 是 m 维定向黎曼流形, $(U; x^i)$ 是 M 的与其定向相符的局部坐标系. 令

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}), \ \ G = \det(g_{ij}),$$

证明: m 次外微分式 $dv_m = \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ 与局部坐标系的选取无关, 即为大范围定义在 M 上的 m 次外微分式.

4. 设 S^m 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面, $A: S^m \to S^m$ 是对径映射, 即对任意的 $p \in S^m$, $A(p) = -p$. 证明: A 是等距.

5. 设 (M, ∇) 是仿射联络空间, $\{e_i\}$ 是 M 上的局部切标架场, $\{\omega^i\}$ 是其对偶余切标架场, 即 $\omega^i(e_j) = delta^i_j$. 证明: 如果 ∇ 是无挠联络, 则对 M 上任意 r 次外微分式 θ, 有

$$d\theta = \sum_i \omega^i \wedge \nabla_{e_i} \theta.$$

6. $\mathbb{R}^3$ 的直角坐标系 (x, y, z) 与球坐标系 (r, ϕ, θ) 之间有如下变换公式:

$$x = r \cos\phi \cos\theta, \ \ y = r \cos\phi \sin\theta, \ \ z = r \sin\phi.$$

试求 Beltrami-Laplace 算子 $\triangle$ 在球坐标系下的表达式.

7. 设 $\{e_i\}$ 是黎曼流形 M 上的单位正交局部标架场.

(1) 证明: 对任意的 $f \in C^\infty(M)$, $\operatorname{grad} f = \sum_i e_i(f) e_i$;

(2) 证明: 对任意的 $X \in \Gamma(TM)$, $\operatorname{div} X = \sum_i < \nabla_{e_i} X, e_i >$.

7. 设 (M, ∇) 是仿射联络空间, $\{e_i\}$ 是 M 上的局部切标架场, $\{\omega^i\}$ 是其对偶余切标架场, 即 $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$. 证明: 如果 ∇ 是无挠联络, 则对 M 上任意 r 次外微分式 θ, 有

$$d\theta = \sum_i \omega^i \wedge \nabla_{e_i} \theta.$$

8. 设 M 是定向黎曼流形, $p, q \in M$, γ 是 M 中连接 p 和 q 的一条光滑曲线段. 证明: 沿 γ 的平行移动 $P_\gamma : T_pM \to T_qM$ 是保持定向的等距线性同构.

9. 设 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 都为黎曼流形, 证明:

(1) 若 $\psi : M \to \bar{M}$ 为等距同胚, 则 ψ 将 M 中的测地线映为 $\bar{M}$ 中的测地线.

(2) $\psi_1, \psi_2 : M \to M$ 都为等距变换, (M, g) 是完备, 连通的, 且存在一点 $p \in M$, 使得 $\psi_1(p) = \psi_2(p)$, $\psi_{1*_p} = \psi_{2*_p}$, 则 $\psi_1 = \psi_2$.

第五章 曲率

曲率的概念是和微积分的发明同时出现的. 在经典微分几何中, 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中光滑曲线的曲率用来刻画曲线的弯曲程度; 在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面论中, 通常用法曲率来刻画曲面在一点附近偏离切平面的程度. 本章将讨论一般的仿射联络空间, 特别是黎曼流形的曲率张量及其性质.

§5.1 曲率张量

曲率张量是黎曼几何中最重要的概念, 它是引入各种曲率的基础, 本节从仿射联络空间的曲率算子出发, 介绍黎曼流形上曲率张量的概念.

定义 5.1 设 (M,∇) 是一个 m 维仿射联络空间. 对张量场 $A:\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{r}\to C^\infty(M)$ 和 $B:\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{r}\to\Gamma(TM)$, 定义其协变导数 $\nabla A:\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{r+1}\to C^\infty(M)$ 和 $\nabla B:\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{r+1}\to\Gamma(TM)$ 分别为

$$\begin{aligned}&\nabla A:(X,X_1,\cdots,X_r)\mapsto(\nabla_XA)(X_1,\cdots,X_r)\\ =\ & X(A(X_1,\cdots,X_r))-\sum_{i=1}^{r}A(X_1,\cdots,X_{i-1},\nabla_XX_i,X_{i+1},\cdots,X_r),\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\nabla B:(X,X_1,\cdots,X_r)\mapsto(\nabla_XB)(X_1,\cdots,X_r)\\ =\ & \nabla_X(B(X_1,\cdots,X_r))-\sum_{i=1}^{r}B(X_1,\cdots,X_{i-1},\nabla_XX_i,X_{i+1},\cdots,X_r).\end{aligned}$$

对 $(0,r)$ 型或 $(1,r)$ 型张量场 E, 如果 E 满足 $\nabla E\equiv 0$, 则称 E 是平行张量场.

例 5.1 设 (M,g) 为黎曼流形, 则黎曼度量 g 是一个 $(0,2)$ 型的平行张量场.

任意给定一个向量场 $Z\in\Gamma(TM)$, 通过 $\hat{Z}:X\to\nabla_XZ$ 可给出一个光滑张量场 $\hat{Z}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$.

对于两个向量场 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 可定义二阶协变导数 $\nabla^2_{X,Y}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ 为

$$\nabla^2_{X,Y}:Z\to(\nabla_X\hat{Z})(Y).$$

从上述定义可得

$$\nabla^2_{X,Y}Z=\nabla_X(\hat{Z}(Y))-\hat{Z}(\nabla_XY)=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_{\nabla_XY}Z.$$

定义 5.2 设 (M,∇) 是 m 维仿射联络空间. 对任意的 $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, 定义 $R(X,Y):\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ 为

$$R(X,Y)Z=\nabla^2_{X,Y}Z-\nabla^2_{Y,X}Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,$$

称 $R(X,Y)$ 为仿射联络空间 (M,∇) 关于光滑切向量场 X,Y 的曲率算子. R 是一个 $(1,3)$ 型的光滑张量场, 称为仿射联络空间 (M,∇) 的曲率张量.

曲率张量 R 仅依赖于 ∇ 本身. 下面的定理给出了曲率张量的基本性质.

定理 5.1 设 (M,∇) 为仿射联络空间, 则对任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 曲率算子 $R(X,Y)$ 具有下面的性质

(1) $R(X,Y)=-R(Y,X)$;

(2) $R(fX,Y)=R(X,fY)=fR(X,Y)$;

(3) $R(X,Y)(fZ)=fR(X,Y)Z$;

(4) 当 ∇ 的挠率 $T\equiv 0$ 时

$$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0,$$

其中 $f\in C^\infty(M),\ Z\in\Gamma(TM)$.

证明 (1) 显然成立.

(2) 对任意 $Z\in\Gamma(TM)$, 有

$$\begin{aligned}
R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_{fX}Z-\nabla_{[fX,Y]}Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y(f\nabla_X Z)-\nabla_{f[X,Y]-Y(f)X}Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z-Y(f)\nabla_X Z-f\nabla_Y\nabla_X Z-f\nabla_{[X,Y]}Z+Y(f)\nabla_X Z\\
&= fR(X,Y)Z,
\end{aligned}$$

即 $R(fX,Y)=fR(X,Y)$.

再由 (1) 得

$$R(X,fY)=-R(fY,X)=-fR(Y,X)=fR(X,Y).$$

(3) 直接计算可得

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X\nabla_Y(fZ)-\nabla_Y\nabla_X(fZ)-\nabla_{[X,Y]}(fZ)\\
&= \nabla_X(Y(f)Z+f\nabla_Y Z)-\nabla_Y(X(f)Z+f\nabla_X Z)-([X,Y](f))Z-f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= X(Y(f))Z+Y(f)\nabla_X Z+X(f)\nabla_Y Z+f\nabla_X\nabla_Y Z-Y(X(f))Z\\
&\quad -X(f)\nabla_Y Z-Y(f)\nabla_X Z-f\nabla_Y\nabla_X Z-([X,Y](f))Z-f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= fR(X,Y)Z.
\end{aligned}$$

所以 (3) 成立.

(4) 挠率 $T\equiv 0$, 即对任意 $X,Y\in\Gamma(TM)$, 有 $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$. 则

$$\begin{aligned}
& R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X\\
=\ & \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y\\
& -\nabla_{[Z,X]}Y+\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[Y,Z]}X\\
=\ & \nabla_X(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y)-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Y(\nabla_Z X-\nabla_X Z)\\
& -\nabla_{[Z,X]}Y+\nabla_Z(\nabla_X Y-\nabla_Y X)-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ & \nabla_X[Y,Z]-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Y[Z,X]-\nabla_{[Z,X]}Y+\nabla_Z[X,Y])-\nabla_{[X,Y]}Z\\
=\ & [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.
\end{aligned}$$

即 (4) 成立. □

作为张量场, R 在每一点 $p\in M$ 给出一个 (1,3) 型的张量

$$R_p: T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM,$$

使得 $(u,v,w)\mapsto R(u,v)w,\ \ u,v,w\in T_pM$, R_p 称为 (M,∇) 在 p 点的曲率张量.

下面利用 ∇ 在局部坐标下的联络系数计算曲率张量 R 的分量.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系, 则存在 U 上的光滑函数

$$\Gamma^k_{ji}\in C^\infty(U),\ \ 1\le i,j,k\le m$$

使得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

则

$$\begin{aligned}R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]}\frac{\partial}{\partial x^k}\\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l})-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l})\\ &= \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l}+\Gamma^l_{kj}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l}-\Gamma^l_{ki}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\\ &= (\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^l}+\Gamma^l_{kj}\Gamma^h_{li}\frac{\partial}{\partial x^h}-\Gamma^l_{ki}\Gamma^h_{lj}\frac{\partial}{\partial x^h}\\ &= (\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj})\frac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

若令

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}=R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l},\tag{5.1}$$

则有

$$R^l_{kij}=\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}.\tag{5.2}$$

从而 (1,3) 型张量场 R 局部上可以表示为

$$R=R^l_{kij}dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes dx^i\otimes dx^j.$$

对于黎曼流形 (M,g), 它有唯一确定的 Levi-Civita 联络 ∇, 它的曲率张量称为黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量.

设 (M,g) 是黎曼流形. 对任意 $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$, 令

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=g(R(Z,W)X,Y),\tag{5.3}$$

则得到一个四重线性映射

$$\mathcal{R}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^\infty(M),$$

它是 M 上的四阶协变张量场, 称之为黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量场.

定理 5.2 设 (M,g) 为一个光滑的黎曼流形. 则对任意 $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$, 黎曼曲率张量场

$$\mathcal{R}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^\infty(M)$$

具有下面的性质

(i) 反对称性:

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=-\mathcal{R}(Y,X,Z,W),$$

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=-\mathcal{R}(X,Y,W,Z);$$

(ii) 第一 Bianchi 恒等式:

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)+\mathcal{R}(Z,Y,W,X)+\mathcal{R}(W,Y,X,Z)=0;$$

(iii) 对称性:

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=\mathcal{R}(Z,W,X,Y).$$

证明 (i) 的第二式和 (ii) 分别在定理 5.1 中证明. 下面证明 (i) 的第一式和 (iii).

因为 ∇ 是黎曼流形 (M,g) 的 Levi-Civita 联络, 直接计算有

$$\begin{aligned}g(\nabla_Z\nabla_W X,Y) &= Z(g(\nabla_W X,Y))-g(\nabla_W X,\nabla_Z Y)\\ &= Z(W(g(X,Y)))-Z(g(X,\nabla_W Y))\\ &\quad -W(g(X,\nabla_Z Y))+g(X,\nabla_W\nabla_Z Y)).\end{aligned}\tag{5.4}$$

同理可得

$$\begin{aligned}g(\nabla_W\nabla_Z X,Y) &= W(Z(g(X,Y)))-W(g(X,\nabla_Z Y))\\ &\quad -Z(g(X,\nabla_W Y))+g(X,\nabla_Z\nabla_W Y)).\end{aligned}\tag{5.5}$$

另外有

$$g(\nabla_{[Z,W]}X,Y)=[Z,W](g(X,Y))-g(X,\nabla_{[Z,W]}Y).\tag{5.6}$$

把 (5.4), (5.5) 和 (5.6) 代入黎曼曲率张量的定义式得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y,Z,W) &= g(\nabla_Z\nabla_W X-\nabla_W\nabla_Z X-\nabla_{[Z,W]}X,Y)\\ &= Z(W(g(X,Y)))-W(Z(g(X,Y)))+g(X,\nabla_W\nabla_Z Y-\nabla_Z\nabla_W Y)\\ &\quad -[Z,W](g(X,Y))+g(X,\nabla_{[Z,W]}Y)\\ &= g(X,\nabla_W\nabla_Z Y-\nabla_Z\nabla_W Y+\nabla_{[Z,W]}Y)\\ &= -g(X,R(Z,W)Y)=-g(R(Z,W)Y,X)=-\mathcal{R}(Y,X,Z,W).\end{aligned}$$

这就证明了 (i) 的第一式.

下面证明 (iii).

由 (ii) 得

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)+\mathcal{R}(Z,Y,W,X)+\mathcal{R}(W,Y,X,Z)=0,$$

$$\mathcal{R}(Y,Z,W,X)+\mathcal{R}(W,Z,X,Y)+\mathcal{R}(X,Z,Y,W)=0.$$

上面两式相加并利用反对称性得

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)+\mathcal{R}(W,Y,X,Z)+\mathcal{R}(W,Z,X,Y)+\mathcal{R}(X,Z,Y,W)=0,$$

即

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)-\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=-(\mathcal{R}(W,Y,X,Z)-\mathcal{R}(X,Z,W,Y)).$$

完全类似可得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(W,Y,X,Z)-\mathcal{R}(X,Z,W,Y) &= -(\mathcal{R}(Z,Y,W,X)-\mathcal{R}(W,X,Z,Y))\\ &= \mathcal{R}(X,Y,Z,W)-\mathcal{R}(Z,W,X,Y).\end{aligned}$$

比较上面两式得

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)-\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=-(\mathcal{R}(X,Y,Z,W)-\mathcal{R}(Z,W,X,Y)),$$

从而

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=\mathcal{R}(Z,W,X,Y).$$

□

对于任意的点 $p\in M$, 黎曼曲率张量场 $\mathcal{R}$ 在 p 点给出一个四重线性函数

$$\mathcal{R}_p: T_pM\times T_pM\times T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}.$$

则由定理 5.2, 我们有

推论 5.1 设 (M,g) 为一个光滑的黎曼流形. 则对任意 $u,v,z,w\in T_pM$, $\mathcal{R}_p$ 具有下面的性质:

(i) 反对称性:

$$\mathcal{R}_p(u,v,z,w)=-\mathcal{R}_p(v,u,z,w),$$

$$\mathcal{R}_p(u,v,z,w)=-\mathcal{R}_p(u,v,w,z);$$

(ii) 第一 Bianchi 恒等式:

$$\mathcal{R}_p(u,v,z,w)+\mathcal{R}_p(z,v,w,u)+\mathcal{R}_p(w,v,u,z)=0;$$

(iii) 对称性:

$$\mathcal{R}_p(u,v,z,w)=\mathcal{R}_p(z,w,u,v).$$

下面求黎曼曲率张量在局部坐标系下的分量. 设 $(U;x^i)$ 是 (M,g) 的一个局部坐标系, 令

$$g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}),$$

g 的 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}).$$

由此得

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}).$$

由于

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}=R_{kij}^h\frac{\partial}{\partial x^k},$$

若令

$$\mathcal{R}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l})=R_{ijkl},$$

则由黎曼曲率张量的定义得

$$R_{ijkl}=g(R(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l})\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=R_{ikl}^h g_{hj}.$$

定理 5.3 设 (M,g) 为 m 维黎曼流形,$(U;x^i)$ 为 M 上的一个局部坐标系. 对 $i,j,k,l=1,...,m$, 记 $X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $R_{ijkl}=\mathcal{R}(X_i,X_j,X_k,X_l)$. 则

$$R_{ijkl}=(\frac{\partial\Gamma_{jk}^s}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^s}{\partial x^j}+\Gamma_{jk}^r\Gamma_{ir}^s-\Gamma_{ik}^r\Gamma_{jr}^s)g_{sl}.$$

证明 利用 $[X_i, X_j] = 0$ 可得

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k \\ &= \nabla_{X_i}(\Gamma^s_{jk}X_s) - \nabla_{X_j}(\Gamma^s_{ik}X_s) \\ &= \frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial x^i}X_s + \Gamma^s_{jk}\Gamma^r_{is}X_r - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^j}X_s - \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{js}X_r \\ &= (\frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr})X_s. \end{aligned}$$

从而定理得证. □

下面在局部标架场下讨论曲率张量.

设 (M, ∇) 是仿射联络空间, $\{e_i\}$ 是定义在 M 的开子集 U 上的局部切标架场, $\{\omega^i\}$ 是对偶余切标架场. 令

$$\nabla_{e_j}e_i = \Gamma^k_{ij}e_k,\ \ \omega^j_i = \Gamma^j_{ik}\omega^k,$$

则 $\nabla e_i = \omega^j_i e_j$.

定理 5.4 设 R^j_{ikl} 是联络 ∇ 的曲率张量 R 在局部切标架场 $\{e_i\}$ 下的分量, 即

$$R(e_k, e_l)e_i = R^j_{ikl}e_j,$$

则有

$$d\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k + \frac{1}{2}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{5.7}$$

证明 对任意的 e_k, e_l 有

$$\begin{aligned} (d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h)(e_k, e_l) &= e_k(\omega^j_i(e_l)) - e_l(\omega^j_i(e_k)) - \omega^j_i([e_k, e_l]) \\ &\quad -\omega^h_i(e_k)\omega^j_h(e_l) + \omega^h_i(e_l)\omega^j_h(e_k) \\ &= e_k(\Gamma^j_{il}) - e_l(\Gamma^j_{ik}) - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}. \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} R(e_k, e_l)e_i &= \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_i - \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_i - \nabla_{[e_k, e_l]}e_i \\ &= \nabla_{e_k}(\Gamma^j_{il}e_j) - \nabla_{e_l}(\Gamma^j_{ik}e_j) - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih}e_j \\ &= (e_k(\Gamma^j_{il}) - e_l(\Gamma^j_{ik}) + \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma^j_{ih})e_j \\ &= (d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h)(e_k, e_l)e_j. \end{aligned}$$

比较上面两式得

$$(d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h)(e_k, e_l) = R^j_{ikl},$$

即

$$d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h = \frac{1}{2}R^j_{ikl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

□

二次外微分式 $\Omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^h_i \wedge \omega^j_h$ 称为仿射联络空间 (M, ∇) 在局部切标架场 $\{e_i\}$ 下的曲率形式. 从而曲率张量可以用曲率形式表示为

$$R = \omega^i \otimes e_j \otimes \Omega^j_i. \tag{5.8}$$

前面引入了联络 ∇ 的挠率形式 Ω^i, 结合曲率形式 Ω_i^j, 我们有下面两个外微分公式

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \Omega^i, \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_j^i. \end{cases} \tag{5.9}$$

(5.9) 称为仿射联络空间 (M,∇) 的结构方程.

定理 5.5设 $\{e_i\}$ 为仿射联络空间 (M,∇) 的一个局部切标架场, $\{\omega^i\}$ 是对偶余切标架场, 则 ∇ 的联络形式 ω_i^j, 挠率形式 Ω^i 和曲率形式 Ω_i^j 满足下面关系

$$d\Omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i - \Omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{5.10}$$

$$d\Omega_i^j = \omega_i^k \wedge \Omega_k^j - \Omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{5.11}$$

证明 对等式 $\Omega^i = d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i$ 求外微分并利用结构方程 (5.9) 可得

$$\begin{aligned} d\Omega^i &= -d\omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge d\omega_j^i \\ &= -(\Omega^j + \omega^k \wedge \omega_k^j) \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge (\Omega_j^i + \omega_j^k \wedge \omega_k^i) \\ &= \omega^j \wedge \Omega_j^i - \Omega^j \wedge \omega_j^i. \end{aligned}$$

这就是 (5.10).

类似对等式 $\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ 求外微分可得 (5.11). □

若 (M,g) 是黎曼流形, 则它的 Levi-Civita 联络在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的联络形式 ω_j^i 满足条件

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ \ dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik},$$

其中 $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. 令 $\omega_i = \omega^j g_{ji}$, $\omega_{ij} = \omega_i^k g_{kj}$, 则上式可化为

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,\ \ dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji}.$$

记 $\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj}$, 则有下面的定理.

定理 5.6 设 (M,g) 是黎曼流形, 则曲率形式 Ω_{ij} 满足下列各式

(1) $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l$;

(2) $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$;

(3) $\omega^i \wedge \Omega_{ij} = 0$;

(4) $d\Omega_{ij} = \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \wedge \omega_j^k = \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} - \omega_j^k \wedge \Omega_{ki}$.

证明 (1) 由定理 5.4 得

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l,$$

从而有

$$\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj} = \frac{1}{2} R_{ipq}^k g_{kj} \omega^p \wedge \omega^q = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega^k \wedge \omega^l.$$

(2) 利用 (1) 和 R_{ijkl} 关于 i,j 的反对称性得

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = \frac{1}{2}(R_{ijkl} + R_{jikl})\omega^k \wedge \omega^l = 0.$$

(3) 和 (4) 是定理 5.5 的直接推论. □

§5.2 截面曲率

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$. 对于任意的 $u,v\in T_pM$, 令

$$|u\wedge v|^2=<u,u><v,v>-<u,v>^2\ .$$

显然 u,v 共线当且仅当 $|u\wedge v|^2=0$.

设 $u,v\in T_pM$ 是两个不共线的切向量, 把 u,v 在 T_pM 中张成的二维子空间称为黎曼流形 M 在 p 点的二维截面, 记作 $[u,v]$.

设 $\tilde{u},\tilde{v}$ 是 $[u,v]$ 中任意两个不共线的切向量, 使得

$$\tilde{u}=a_{11}u+a_{12}v,\ \ \tilde{v}=a_{21}u+a_{22}v,\ \ \det(a_{ij})\neq 0.$$

则有

$$|\tilde{u}\wedge\tilde{v}|=(\det(a_{ij}))^2|u\wedge v|.$$

由黎曼曲率张量的对称性和反对称性易得

$$\mathcal{R}(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{u},\tilde{v})=(\det(a_{ij}))^2\mathcal{R}(u,v,u,v).$$

从而由

$$K(u,v)=-\frac{\mathcal{R}(u,v,u,v)}{|u\wedge v|^2}\tag{5.12}$$

定义的量 $K(u,v)$ 与二维截面 $[u,v]$ 的基的选取无关, 是一个只依赖于二维截面 $[u,v]$ 的数量.

定义 5.3 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$. 对于任意的 $u,v\in T_pM$, 如果 $|u\wedge v|^2\neq 0$, 则由 (5.12) 定义的数量 $K(u,v)$ 称为 (M,g) 在 p 点沿二维截面 $[u,v]$ 的截面曲率.

定理 5.7 设 p 是黎曼流形 (M,g) 上的任一点. 如果 M 在 p 点沿所有的二维截面的截面曲率为常数 K_0, 则对任意 $u,v,w,z\in T_pM$, 有

$$\mathcal{R}(u,v,w,z)=-K_0(<u,w><v,z>-<u,z><v,w>).\tag{5.13}$$

反之, 如果存在常数 K_0 使得 (5.13) 成立, 则 M 在 p 点沿所有的二维截面的截面曲率都为常数 K_0.

证明 对任意 $u,v,w,z\in T_pM$, 令

$$\tilde{\mathcal{R}}(u,v,w,z)=<u,w><v,z>-<u,z><v,w>,$$

易见 $\tilde{\mathcal{R}}$ 是 T_pM 上的一个四阶协变张量. 由假设对任意不共线的 $u,v\in T_pM$ 有

$$\frac{\mathcal{R}(u,v,u,v)}{\tilde{\mathcal{R}}(u,v,u,v)}=-K_0,$$

即

$$\mathcal{R}(u,v,u,v)=-K_0\tilde{\mathcal{R}}(u,v,u,v).$$

令 $R_0(u,v,w,z)=\mathcal{R}(u,v,w,z)+K_0\tilde{\mathcal{R}}(u,v,w,z)$, 只需证明对任意的 $u,v,w,z\in T_pM$, $R_0(u,v,w,z)=0$ 即可.

对任意的 $u,v,z\in T_pM$, 利用 R_0 的多重线性性质和对称性得

$$\begin{aligned}0&=R_0(u,v+z,u,v+z)\\&=R_0(u,v,u,v)+R_0(u,v,u,z)+R_0(u,z,u,v)+R_0(u,z,u,z)\\&=R_0(u,v,u,z)+R_0(u,z,u,v)=2R_0(u,v,u,z),\end{aligned}$$

所以 $R_0(u,v,u,z)=0$.

对任意的 $u,v,w,z\in T_pM$, 展开 $R_0(u+v,w,u+v,z)=0$ 得

$$\begin{aligned}0 &= R_0(u+v,w,u+v,z)\\ &= R_0(u,w,u,z)+R_0(u,w,v,z)+R_0(v,w,u,z)+R_0(v,w,v,z)\\ &= R_0(u,w,v,z)+R_0(v,w,u,z)\\ &= R_0(u,w,v,z)-R_0(v,w,z,u).\end{aligned}$$

因此, $R_0(u,w,v,z)$ 在 u,v,z 的轮换下保持不变, 即

$$R_0(u,w,v,z)=R_0(v,w,z,u)=R_0(z,w,u,v).$$

由第一 Bianchi 恒等式, 对任意的 $u,v,w,z\in T_pM$ 有

$$0=R_0(u,v,w,z)+R_0(w,v,z,u)+R_0(z,v,u,w)=3R_0(u,v,w,z).$$

故 $R_0\equiv 0$. 定理的另一部分显然成立. □

定义 5.4 设 (M,g) 是黎曼流形. 如果 M 在任意点 p 沿所有的二维截面的截面曲率都等于常数 c, 则称 (M,g) 为具有常截面曲率 c 的黎曼流形, 简称为常曲率空间. 特别地若 $c=0$, 称黎曼流形 (M,g) 是平坦的.

例 5.2 对 m 维向量空间 $\mathbb{R}^m$, 它具有标准的欧氏度量 g,$\{\frac{\partial}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\}$ 为切丛 $T\mathbb{R}^m$ 的整体标架场. 则有 $g_{ij}=\delta_{ij}$, 故 $\Gamma_{ij}^k\equiv 0$, 这说明 $R\equiv 0$, $\mathbb{R}^m$ 为平坦的.

例 5.3 单位球面 S^m 有常截面曲率 1, 而双曲空间 $H^m(-1)$ 有常截面曲率 -1.

下面的结论是定理 5.7 的直接推论.

推论 5.2 设 (M,g) 是截面曲率为 c 的 m 维常曲率空间, 则在任意一个局部标架场 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 下, 有

$$R_{ijkl}=g(R(e_k,e_l)e_i,e_j)=-c(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}),\ 1\le i,j,k,l\le m, \tag{5.14}$$

其中 $g_{ij}=<e_i,e_j>$. 反之, 如果存在常数 c 使得 (5.14) 成立, 则 M 是以 c 为截面曲率的常曲率空间.

推论 5.3 设 (M,g) 是截面曲率为 c 的 m 维常曲率空间, 则在任意一个局部标架场 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 下, 有

$$\Omega_{ij}=-c\omega_i\wedge\omega_j, \tag{5.15}$$

反之也成立.

证明 由定理 5.6 和推论 5.2 得

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l=-\frac{c}{2}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\omega^k\wedge\omega^l=-c\omega_i\wedge\omega_j.$$

推论得证. □

§5.3 Ricci 曲率和数量曲率

本节利用黎曼曲率张量定义另外两个重要的曲率, 即 Ricci 曲率和数量曲率, 它们也是黎曼几何中非常重要的概念.

设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$. 对于任意 $u,v,w\in T_pM$, 利用黎曼曲率张量 R 定义线性变换 $A_{u,v}:T_pM\to T_pM$ 如下

$$A_{u,v}(w)=R(w,u)v.$$

显然 $A_{u,v}$ 是 T_pM 上的 (1,1) 型张量, 线性变换 $A_{u,v}$ 的迹就是它作为 $(1,1)$ 型张量的缩并, 记作 $\mathrm{Ric}(u,v)$. 则对 M 上任意的局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶标架场 $\{\omega^i\}$ 有

$$\mathrm{Ric}(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\omega^i(R(e_i,u)v). \tag{5.16}$$

这样定义的 $\mathrm{Ric}(u,v)$ 是 M 上的一个二阶协变张量场

$$\mathrm{Ric}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^\infty(M).$$

定义 5.5 M 上的二阶协变张量场 Ric 称为 M 上的 Ricci 曲率张量.

定理 5.8 Ricci 曲率张量是一个对称的二阶协变张量场.

证明 对 M 上的任意局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶标架场 $\{\omega^i\}$, 有

$$\omega^i=g^{ij}<e_j,\cdot>.$$

则由黎曼曲率张量的对称性得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(u,v) &= \sum_{i,j}g^{ij}<e_j,R(e_i,u)v>=\sum_{i,j}g^{ij}\mathcal{R}(v,e_j,e_i,u)\\ &= \sum_{i,j}g^{ji}\mathcal{R}(u,e_i,e_j,v)=\mathrm{Ric}(v,u).\end{aligned}$$

□

通常把 Ricci 曲率张量的分量记作 R_{ij}, 即 $R_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j)$. 从而有

$$\mathrm{Ric}=R_{ij}\omega^i\otimes\omega^j,$$

其中

$$R_{ij}=g^{kl}R_{iklj}=R^k_{ikj}.$$

定义 5.6 设 $p\in M$, $u\in T_pM$, $u\neq 0$. 令

$$\mathrm{Ric}(u)=\frac{\mathrm{Ric}(u,u)}{g(u,u)}.$$

称 $\mathrm{Ric}(u)$ 为黎曼流形 (M,g) 在 p 点沿切方向 u 的 Ricci 曲率.

根据二次型的一般理论, 在任意一点 $p\in M$, 有 T_pM 的单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, 使得 Ricci 曲率张量可以化为标准型, 即有

$$\mathrm{Ric}=\sum_{i=1}^{m}k_i\omega^i\otimes\omega^i,$$

其中 $\{\omega^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基, $k_i=\mathrm{Ric}(e_i)$. 从而对任意的 $u\in T_pM$ 有

$$\mathrm{Ric}(u)=\sum_i k_i\cos^2\theta_i,$$

其中 $\cos\theta_i=<\frac{u}{|u|},e_i>$. e_i 称为 M 在 p 点的 Ricci 主方向, k_i 称为对应于主方向 e_i 的 Ricci 主曲率.

下面定理给出了 Ricci 曲率和截面曲率之间的关系.

定理 5.9 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$, $u\in T_pM$, $u\neq 0$. 如果 $\{e_i\}$ 是 T_pM 的任意一个单位正交基, 使得 $e_m=\frac{u}{|u|}$, 则

$$\mathrm{Ric}(u)=\sum_{i=1}^{m-1}K(e_i,e_m). \tag{5.17}$$

证明 根据 Ricci 曲率的定义, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(u) &= \mathrm{Ric}(e_m,e_m)=\sum_{i=1}^{m-1}\mathcal{R}(e_m,e_i,e_i,e_m)\\ &= -\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\mathcal{R}(e_i,e_m,e_i,e_m)}{|e_i\wedge e_m|^2}=\sum_{i=1}^{m-1}K(e_i,e_m).\end{aligned}$$

□

定义 5.7 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, 如果存在常数 λ 使得 $\mathrm{Ric}=\lambda g$, 则称 (M,g) 为 Einstein 流形.

显然, (M,g) 是 Einstein 流形当且仅当 M 的 Ricci 曲率是常数.

定理 5.10 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, $p\in M$. 则对于 T_pM 的任意一个单位正交基 $\{e_i\}$, $\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i)$ 是与基 $\{e_i\}$ 的选取无关的量.

证明 根据 Ricci 曲率的定义, 有

$$\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i)=\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i,e_i).$$

如果 $\{e_i'\}$ 是 T_pM 的另一个单位正交基, 则有正交矩阵 (a_{ij}), 使得 $e_i'=\sum_j a_{ij}e_j$. 所以

$$\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i')=\sum_{i,j,k}a_{ij}a_{ik}\mathrm{Ric}(e_j,e_k)=\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i,e_i).$$

□

定义 5.8 设 (M,g) 为 m 维黎曼流形,$p\in M$. 对于 T_pM 的任意一个单位正交基 $\{e_i\}$, 数值

$$S=\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i)$$

称为黎曼流形 (M,g) 在 p 点的数量曲率.

推论 5.4 设 (M,g) 是截面曲率为 c 的 m 维常曲率空间, 则 M 的 Ricci 曲率和数量曲率分别为 $(m-1)c$ 和 $m(m-1)c$.

证明 设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 为 M 的单位正交基, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(e_j,e_j)&=\sum_{i=1}^m g(R(e_j,e_i)e_i,e_j)=\sum_{i=1}^m c(g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_j,e_i)g(e_i,e_j))\\ &= c(\sum_{i=1}^m g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-\sum_{i=1}^m g(e_i,e_j)g(e_i,e_j))=c(\sum_{i=1}^m 1-\sum_{i=1}^m \delta_{ij})=(m-1)c.\end{aligned}$$

要得到数量曲率 S 的公式, 只需要用 m 乘以常 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(e_j,e_j)$ 即可. □

§5.4 曲率与局部几何

本节讨论黎曼流形的局部几何, 特别是讨论黎曼曲率张量如何控制黎曼流形的局部几何结构. 为此, 首先引进黎曼几何中一个非常重要的概念 –Jacobi 场.

令 (M,g) 为一个 m 维黎曼流形, 一个测地线的光滑单参数族, 指的是一个光滑映射

$$\Phi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times I\to M$$

使得对任意 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 曲线 $\gamma_t : I \to M, \ s \mapsto \Phi(t,s)$ 为一测地线. 变量 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 称为 Φ 的族参数.

定理 5.11 设 (M,g) 为黎曼流形, $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ 为测地线单参数族. 则对每一个 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 沿 γ_t 的如下给出的向量场 $J_t : I \to \Gamma(TM)$

$$J_t(s) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,s)$$

满足二阶常微分方程

$$\nabla_{\gamma_t'} \nabla_{\gamma_t'} J_t + R(J_t, \gamma_t')\gamma_t' = 0.$$

证明记 $X(t,s) = \partial\Phi/\partial s$, $J(t,s) = \partial\Phi/\partial t$. 由于 $[\partial/\partial t, \partial/\partial s] = 0$, 故

$$[J, X] = [d\Phi(\partial/\partial t), d\Phi(\partial/\partial s)] = d\Phi([\partial/\partial t, \partial/\partial s]) = 0.$$

又因 Φ 是测地线族, 故有 $\nabla_X X = 0$, 则由曲率张量的定义得

$$\begin{aligned} R(J,X)X &= \nabla_J \nabla_X X - \nabla_X \nabla_J X - \nabla_{[J,X]} X \\ &= -\nabla_X \nabla_J X = -\nabla_X \nabla_X J. \end{aligned}$$

因此, 对每个 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 有

$$\nabla_{\gamma_t'} \nabla_{\gamma_t'} J_t + R(J_t, \gamma_t')\gamma_t' = 0.$$

□

这就引出如下定义.

定义 5.8 设 (M,g) 为黎曼流形, $\gamma : I \to M$ 为一条测地线, $X = \gamma'$. 沿 γ 的一个 C^2 向量场 J 称作 Jacobi 场, 如果沿 γ 有

$$\nabla_X \nabla_X J + R(J,X)X = 0. \tag{5.18}$$

方程 (5.18) 称为 Jacobi 方程. 记沿 γ 的所有 Jacobi 场构成的空间为 $\mathcal{J}_\gamma(TM)$.

下面给出 $m+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中一个测地线单参数族的例子.

例 5.4 设 $\phi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1}$ 为光滑曲线, 使得 $\varphi(\mathbb{R})$ 包含在单位球面 S^m 中. 若定义映射 $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1}$ 为 $\Phi : (t,s) \mapsto \phi(t) + s \cdot \varphi(t)$. 则对每一个 $t \in \mathbb{R}$, 曲线 $\gamma_t : s \mapsto \Phi(t,s)$ 为直线, 因此必然为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的测地线. 对参数 t 求微分可得沿 γ_0 的 Jacobi 场 $J \in \mathcal{J}_{\gamma_0}(T\mathbb{R}^{m+1})$ 为

$$J(s) = \frac{d}{dt}\Phi(t,s)|_{t=0} = \phi'(0) + s \cdot \varphi'(0).$$

黎曼流形上的 Jacobi 方程 (5.18) 关于 J 是线性的. 这表明沿 γ 的 Jacobi 场构成的空间 $\mathcal{J}_\gamma(TM)$ 是向量空间. 我们感兴趣的是, 如何决定这个空间的维数.

定理 5.12 设 $\gamma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 为 m 维黎曼流形 M 中的测地线, $\gamma(0) = p$, 且沿 γ 有 $X = \gamma'$. 则对任意 $v, w \in T_pM$, 存在唯一沿 γ 的 Jacobi 场 J, 使得 $J_p = v$, $(\nabla_X J)_p = w$.

证明 令 $\{X_1, \cdots, X_m\}$ 为沿 γ 平行向量场的正交标架, 如果 J 是沿 γ 的一个向量场, 则

$$J = \sum_{i=1}^m a_i X_i,$$

其中 $a_i = \langle J, X_i \rangle$ 为 I 上的光滑函数. 因为向量场 $X_1, \cdots, X_m$ 平行, 所以

$$\nabla_X J = \sum_{i=1}^m a_i' X_i, \ \ \nabla_X \nabla_X J = \sum_{i=1}^m a_i'' X_i.$$

对黎曼曲率张量 R, 有

$$R(X_i,X)X=\sum_{k=1}^{m}b_i^kX_k,$$

其中 $b_i^k=\langle R(X_i,X)X,X_k\rangle$ 为 I 上的光滑函数, 则

$$R(J,X)X=\sum_{i,k=1}^{m}a_ib_i^kX_k,$$

且 J 为 Jacobi 场当且仅当

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i{}''+\sum_{k=1}^{m}a_kb_k^i)X_i=0.$$

这等价于

$$a_i''+\sum_{k=1}^{m}a_kb_k^i=0,\ \ i=1,2,\cdots,m.$$

根据常微分方程理论, 其解总是存在的, 且唯一地由 $a(0)$ 和 $a'(0)$ 决定. 这表明 J 总是存在的且唯一地依赖于初始条件 $J(0)=v$, $(\nabla_XJ)(0)=w$. □

推论 5.5 设 (M,g) 为 m 维黎曼流形, $\gamma:I\to M$ 为 M 的一条测地线. 则沿 γ 的所有 Jacobi 场构成的向量空间 $\mathcal{J}_\gamma(TM)$ 的维数为 $2m$.

下来决定与给定测地线相切的 Jacobi 场.

定理 5.13 设 (M,g) 为黎曼流形, $\gamma:I\to M$ 为正规测地线, 即 $|\gamma'|=1$, J 为沿 γ 的 Jacobi 场. 令 $J^\top=\langle J,\gamma'\rangle\gamma'$ 为 J 的切部分, $J^\perp=J-J^\top$ 为 J 的法部分. 则 $J^\top$ 与 $J^\perp$ 都是沿 γ 的 Jacobi 场, 且对所有 $s\in I$, 存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $J^\top(s)=(as+b)\gamma'(s)$.

证明 因为

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}J^\top+R(J^\top,\gamma')\gamma' &= \nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}(\langle J,\gamma'\rangle\gamma')+R(\langle J,\gamma'\rangle\gamma',\gamma')\gamma'\\ &= \langle\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}J,\gamma'\rangle\gamma'=-\langle R(J,\gamma')\gamma',\gamma'\rangle\gamma'=0.\end{aligned}$$

故 J 的切部分 $J^\top$ 是 Jacobi 场. 由于 $\mathcal{J}_\gamma(TM)$ 是向量空间, 故 J 的法部分 $J^\perp=J-J^\top$ 也是 Jacobi 场.

将 $\langle J,\gamma'\rangle$ 沿 γ 作两次微分可得

$$\frac{d^2}{ds^2}\langle J,\gamma'\rangle=\langle\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}J,\gamma'\rangle=-\langle R(J,\gamma')\gamma',\gamma'\rangle=0,$$

故存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $\langle J,\gamma'\rangle(s)=as+b$, 即 $J^\top(s)=(as+b)\gamma'(s)$. □

推论 5.6 设 (M,g) 为黎曼流形, $\gamma:I\to M$ 为测地线,J 为沿 γ 的 Jacobi 场. 如果存在 $t_0\in I$, 使得 $g(J(t_0),\gamma'(t_0))=0$, $g((\nabla_{\gamma'}J)(t_0),\gamma'(t_0))=0$, 则对所有 $t\in I$, 有 $g(J(t),\gamma'(t))=0$.

证明 因为函数 $g(J,\gamma')$ 满足二阶常微分方程 $f''=0$ 和初值条件 $f(0)=0$,$f'(0)=0$, 故推论得证. □

下面说明如果黎曼流形 (M,g) 有常截面曲率, 我们可以求解沿任意给定测地线 $\gamma:I\to M$ 的 Jacobi 方程

$$\nabla_X\nabla_XJ+R(J,X)X=0.$$

为此引入下面的记号. 对实数 $k\in\mathbb{R}$, 定义 $\mu_k,\nu_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 分别为

$$\mu_k(s)=\begin{cases}\cosh(\sqrt{|k|}s) & k<0,\\ 1 & k=0,\\ \cos(\sqrt{k}s) & k>0\end{cases} \tag{5.19}$$

和

$$\nu_k(s)=\begin{cases}\sinh(\sqrt{|k|}s)/\sqrt{|k|} & k<0,\\ s & k=0,\\ \sin(\sqrt{k}s)/\sqrt{k} & k>0.\end{cases} \tag{5.20}$$

显然初值问题 $f''+k\cdot f=0$, $f(0)=a$, $f'(0)=b$ 的唯一解是函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 其中 $f(s)=a\mu_k(s)+b\nu_k(s)$.

例 5.5 设 $\mathbb{C}$ 是具有标准欧氏度量 $\langle,\rangle_{\mathbb{R}^2}$ 的复平面, 它有常截面曲率 $k=0$. 关于原点的旋转生成一个测地线单参数族 $\Phi:s\mapsto se^{it}$. 沿测地线 $\gamma_0:s\mapsto s$, 可得 Jacobi 场 $J_0(s)=\partial\Phi_t/\partial t(0,s)=is$, $|J_0(s)|=|s|=|\nu_k(s)|$.

例 5.6 设 S^2 为 3 维欧氏空间 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 中具有诱导度量的单位球面, 它有常截面曲率 $k=1$. 绕 $\mathbb{R}$ 轴旋转生成一个测地线单参数族 $\Phi_t:s\mapsto(\sin(s)e^{it},\cos(s))$. 沿测地线 $\gamma_0:s\mapsto(\sin(s),\cos(s))$, 可得 Jacobi 场 $J_0(s)=\partial\Phi_t/\partial t(0,s)=(i\sin(s),0)$, $|J_0(s)|^2=\sin^2(s)=|\nu_k(s)|^2$.

例 5.7 设 $B_1^2(0)$ 为复平面上的开单位圆盘, 它有常截面曲率 $k=-1$. 绕原点的旋转生成一个测地线单参数族 $\Phi_t:s\mapsto\tanh(s/2)e^{it}$. 沿测地线 $\gamma_0:s\mapsto\tanh(s/2)$, 可得 Jacobi 场 $J_0(s)=i\cdot\tanh(s/2)$, 且

$$|J_0(s)|^2=\frac{4\cdot\tanh^2(s/2)}{(1-\tanh^2(s/2))^2}=\sinh^2(s)=|\nu_k(s)|^2.$$

设 (M,g) 为具有常截面曲率 k 的 m 维黎曼流形, $\gamma:I\to M$ 为测地线, 使得 $|X|=1$, 其中 $X=\gamma'$. 令 $X_1,X_2,\cdots,X_{m-1}$ 为沿 γ 的平行向量场, 使得 $g(X_i,X_j)=\delta_{ij}$, $g(X_i,X)=0$. 则沿 γ 的任意向量场 J 都可以写为

$$J(s)=\sum_{i=1}^{m-1}f_i(s)X_i(s)+f_m(s)X(s).$$

故 J 是一个 Jacobi 场当且仅当

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1}f_i''(s)X_i(s)+f_m''(s)X(s)=\nabla_X\nabla_XJ\\ =\;&-R(J,X)X=-R(J^\perp,X)X=-k(g(X,X)J^\perp-g(J^\perp,X)X)=-kJ^\perp\\ =\;&-k\sum_{i=1}^{m-1}f_i(s)X_i(s).\end{aligned}$$

它等价于下面的常微分方程组

$$f_m''(s)=0,\;\;f_i''(s)+kf_i(s)=0,\;\;i=1,2,...,m-1. \tag{5.21}$$

显然对初值

$$J(s_0)=\sum_{i=1}^{m-1}v_iX_i(s_0)+v_mX(s_0),$$

$$(\nabla_XJ)(s_0)=\sum_{i=1}^{m-1}w_iX_i(s_0)+w_mX(s_0),$$

即

$$f_i(s_0)=v_i,\ \ f_i'(s_0)=w_i,\ \ i=1,2,...,m.$$

(5.21) 在整个 I 上有唯一的解.

下面的例子给出 2 维球面 S^2 上沿一测地线的 Jacobi 场的完全刻画.

例 5.8 设 S^2 为标准 3 维欧氏空间 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 中具有诱导度量的单位球面, 它有常截面曲率 $k=1$. $\gamma:\mathbb{R}\to S^2$ 为测地线, 它由 $\gamma:s\to(e^{is},0)$ 给出. 则 $\gamma'(s)=(ie^{is},0)$, 由定理 5.13 知, 所有与 γ 相切的 Jacobi 场为

$$J^T_{(a,b)}(s)=(as+b)(ie^{is},0),\ \ a,b\in\mathbb{R}.$$

向量场 $X:\mathbb{R}\to TS^2$, $s\mapsto((e^{is},0),(0,1))$, 满足 $\langle X,\gamma'\rangle=0$, $|X|=1$. 因球面 S^2 是 2 维的, γ' 沿 γ 是平行的, 故 X 一定是平行的. 这说明所有与 γ' 正交的 Jacobi 场为

$$J^N_{(a,b)}(s)=(0,a\cos s+b\sin s),\ \ a,b\in\mathbb{R}.$$

在一般情形下, 黎曼流形不是常曲率空间, 但指数映射仍可以用来构造 Jacobi 场.

设 (M,g) 为完备黎曼流形,$p\in M$, $v,w\in T_pM$. 则 $s\mapsto s(v+tw)$ 在切空间 T_pM 上定义了过原点 $0\in T_pM$ 的一个单参数直线族. 考虑指数映射

$$\exp_p|_{B^m_{\varepsilon_p(0)}}:B^m_{\varepsilon_p(0)}\to\exp(B^m_{\varepsilon_p(0)}),$$

它将 T_pM 上过原点的的直线映为 M 上的测地线. 因此只要 $s(v+tw)$ 是 $B^m_{\varepsilon_p(0)}$ 中的元素, 映射 $\Phi_t:s\mapsto\exp_p(s(v+tw))$ 就是一个过 $p\in M$ 的测地线单参数族. 这表明

$$J:s\mapsto(\partial\Phi_t/\partial t)(0,s)$$

是沿测地线 $\gamma:s\mapsto\Phi_0(s)$, $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$ 的 Jacobi 场. 易见 J 满足初值条件 $J(0)=0$, $(\nabla_XJ)(0)=w$.

引理 5.1 设 (M,g) 为黎曼流形, 截面曲率上方一致有界 Δ, 也就是存在 Δ, 使得对任意的 $p\in M$ 以及 T_pM 中的所有二维截面 V, 有截面曲率 $k_p(V)\le\Delta$. 并设 $\gamma:[0,\alpha]\to M$ 为 M 中的测地线, 使得 $|X|=1$, 其中 $X=\gamma'$. 再令 $J:[0,\alpha]\to TM$ 为沿 γ 的 Jacobi 场, 使得在 $(0,\alpha)$ 上, 有 $g(J,X)=0$, $|J|\ne0$. 则

(i) $d^2(|J|)/ds^2+\Delta\cdot|J|\ge0$;

(ii) 如果 $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ 为 C^2 函数使得

(a) $f''+\Delta\cdot f=0$, 且在 $(0,\alpha)$ 上, $f>0$,

(b) $f(0)=|J(0)|$,

(c) $f'(0)=|\nabla_XJ(0)|$.

则在 $(0,\alpha)$ 上, 有 $f(s)\le|J(s)|$;

(iii) 如果 $J(0)=0$, 则对所有 $s\in(0,\alpha)$, 有 $|\nabla_XJ(0)|\cdot\nu_\Delta(s)\le|J(s)|$.

证明 (i) 利用 $|X|=1$ 和 $<X,J>=0$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}(|J|)&=\frac{d^2}{ds^2}\sqrt{\langle J,J\rangle}=\frac{d}{ds}(\frac{\langle\nabla_XJ,J\rangle}{|J|})\\&=\frac{\langle\nabla_X\nabla_XJ,J\rangle}{|J|}+\frac{|\nabla_XJ|^2|J|^2-\langle\nabla_XJ,J\rangle^2}{|J|^3}\\&\ge\frac{\langle\nabla_X\nabla_XJ,J\rangle}{|J|}=-\frac{\langle R(J,X)X,J\rangle}{|J|}\ge-\Delta\cdot|J|.\end{aligned}$$

(ii) 如下定义函数 $h:[0,\alpha)\to\mathbb{R}$

$$h(s)=\begin{cases}\frac{|J(s)|}{f(s)} & s\in(0,\alpha),\\ \lim_{s\to 0}\frac{|J(s)|}{f(s)}=1 & s=0.\end{cases} \tag{5.22}$$

则

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{1}{f^2(s)}(\frac{d}{ds}(|J(s)|)f(s)-|J(s)|f'(s)) \\ &= \frac{1}{f^2(s)}\int_0^s(\frac{d^2}{dt^2}(|J(t)|)f(t)-|J(t)|f''(t))dt \\ &= \frac{1}{f^2(s)}\int_0^s f(t)(\frac{d^2}{dt^2}(|J(t)|)+\Delta\cdot|J(t)|)dt\geq 0. \end{aligned}$$

这说明 $h'(s)\geq 0$. 故对所有 $s\in(0,\alpha)$, 有 $f(s)\leq|J(s)|$.

(iii) 函数 $f(s)=|(\nabla_X J)(0)|\cdot\nu_\Delta(s)$ 满足微分方程 $f''(s)+\Delta f(s)=0$ 和初始条件 $f(0)=|J(0)|=0, f'(0)=|(\nabla_X J)(0)|$, 故由 (ii) 可得

$$|(\nabla_X J)(0)|\cdot\nu_\Delta(s)=f(s)\leq|J(s)|.$$

□

设 (M,g) 为 m 维黎曼流形, 截面曲率上方一致有界 Δ. 令 (M_Δ,g_Δ) 为另一个 m 维完备黎曼流形, 它有常截面曲率 Δ. 令 $p\in M$, $p_\Delta\in M_\Delta$, 并等同 $T_pM\cong\mathbb{R}^m\cong T_{p_\Delta}M_\Delta$.

令 U 为 $\mathbb{R}^m$ 的原点 0 的一个开邻域, 使得指数映射 $\exp_p$ 与 $\exp_{p_\Delta}$ 分别为从 U 到其像 $\exp_p(U)$ 和 $\exp_{p_\Delta}(U)$ 的微分同胚. 令 (r,p,q) 是测地三角形, 即三角形的边为连接两端点的最短道路. 进一步, 令 $c:[a,b]\to M$ 为连接 r 和 q 的边,$v:[a,b]\to T_pM$ 为曲线, 定义为 $c(t)=\exp_p(v(t))$. 记 $c_\Delta(t)=\exp_{p_\Delta}(v(t))$, 其中 $t\in[a,b]$. 则易得 $c(a)=r$, $c(b)=q$. 并记 $r_\Delta=c_\Delta(a)$, $q_\Delta=c_\Delta(b)$.

定理 5.14 在上述条件下, 对距离函数 d 有下面的不等式成立

$$d(q_\Delta,r_\Delta)\leq d(q,r).$$

证明 定义 T_pM 中过 p 点的单参数直线族 $s\mapsto s\cdot v(t)$. 则 $\Phi_t:s\mapsto\exp_p(s\cdot v(t))$ 与 $\Phi_t^\Delta:s\mapsto\exp_{p_\Delta}(s\cdot v(t))$ 分别为过 $p\in M$ 和 $p_\Delta\in M_\Delta$ 的测地线单参数族. 因此 $J_t=\partial\Phi_t/\partial t$ 和 $J_t^\Delta=\partial\Phi_t^\Delta/\partial t$ 为满足初值条件 $J_t(0)=J_t^\Delta(0)=0$, $(\nabla_X J_t)(0)=(\nabla_X J_t^\Delta)(0)=v'(t)$ 的 Jacobi 场. 由引理 5.1 得

$$\begin{aligned} |c'_\Delta(t)| &= |J_t^\Delta(1)| \\ &= |(\nabla_X J_t^\Delta)(0)|\cdot\nu_\Delta(1) \\ &= |(\nabla_X J_t)(0)|\cdot\nu_\Delta(1)\leq|J_t(1)|=|c'(t)|. \end{aligned}$$

因为曲线 c 为连接 r 和 q 的最短道路, 故

$$d(r_\Delta,q_\Delta)\leq L(c_\Delta)\leq L(c)=d(r,q).$$

□

如果黎曼流形 (M,g) 的截面曲率是下方一致有界 δ. 设 (M_δ,g_δ) 为完备黎曼流形, 具有常截面曲率 δ. 令 $p\in M$, $p_\delta\in M_\delta$, 并等同 $T_pM\cong\mathbb{R}^m\cong T_{p_\delta}M_\delta$.

类似于上面的讨论, 对点 $q,r\in M$, $q_\delta,r_\delta\in M_\delta$, 有

$$d(q,r)\leq d(q_\delta,r_\delta).$$

结合上面两个结果, 局部上有

$$d(q_\Delta, r_\Delta) \le d(q, r) \le d(q_\delta, r_\delta).$$

练习 5

1. 设 $\pi : E \to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛, ∇ 是该向量丛上的联络. 定义映射 $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ 如下

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi, \;\; X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(E),$$

证明: 对于任意的 $X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(E)$ 以及 $f \in C^\infty(M)$, 有

(1) $R(X,Y)\xi = -R(Y,X)\xi$;

(2) $R(fX,Y)\xi = R(X,fY)\xi = fR(X,Y)\xi$;

(3) $R(X,Y)(f\xi) = fR(X,Y)\xi$.

R 称为向量丛 E 关于联络 ∇ 的曲率张量.

2. 设 $\gamma : [0,1] \to M$ 是黎曼流形 M 上一条光滑曲线, $X \in \Gamma(TM)$ 且 $X|_{\gamma(0)} = 0$. 令 $X' = \nabla_{\gamma'}X$, 证明:

$$\nabla_{\gamma'(0)}(R(\gamma', X)\gamma') = (R(\gamma', X)\gamma')(0).$$

3. 设 $\varphi : M \to N$ 是黎曼流形之间的局部等距. 证明: φ 保持曲率张量和黎曼曲率张量不变, 即对任意的 $p \in M$, $u, v, w, z \in T_pM$ 有

$$\varphi_{*p}(R^M(u,v)w) = R^N(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v))\varphi_{*p}(w);$$

$$\mathcal{R}^M(u,v,w,z) = \mathcal{R}^N(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v), \varphi_{*p}(w), \varphi_{*p}(z)).$$

4. 设 S^m 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球面, 具有诱导度量.

(1) 证明: 对于任意的 $p, q \in S^m$, 以及任意两个二维子空间 $\pi \subset T_pS^m$, $\pi' \subset T_qS^m$, 存在一个等距 $\varphi : S^m \to S^m$ 使得

$$\varphi(p) = q, \;\; \varphi_*(\pi) = \pi';$$

(2) 利用结论 (1) 证明: S^m 具有常截面曲率.

5. 设 (M, g) 是一个 $m(m \ge 3)$ 维黎曼流形, $\mathcal{R}$ 是 M 的黎曼曲率张量. 证明： 如果对于任意的 $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, 有

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = \frac{1}{m-1}\{\mathrm{Ric}(X,W)g(Y,Z) - \mathrm{Ric}(X,Z)g(Y,W)\},$$

则 M 是常曲率空间.

6. 设 M 是黎曼流形, $p \in M$. 证明: M 在点 p 的数量曲率 $S(p)$ 可以表示为

$$S(p) = \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{S^{m-1}} \mathrm{Ric}_p(v) dv_{S^{m-1}},$$

其中 ω_{m-1} 是切空间 T_pM 中的单位球面 S^{m-1} 的体积.

7. 设 $\mathbb{R}^m$ 具有标准的欧氏度量,$\mathbb{C}^m$ 上的欧氏度量 g 如下定义

$$g(z,w)=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}(z_k\bar{w}_k).$$

T^m 为 $\mathbb{C}^m$ 中的 m 维环面 $\{z\in\mathbb{C}^m||z_1|=\cdots=|z_m|=1\}$, 具有诱导度量 h. 试给出一个等距浸入 $\phi:\mathbb{R}^m\to T^m$, 确定 (T^m,h) 的所有测地线, 并证明 (T^m,h) 是平坦的.

8. 设 $M^2\subset\mathbb{R}^3$ 为浸入曲面, 具有诱导度量. 证明: M^2 上的截面曲率即为 Gauss 曲率.

9. 设 M 为黎曼流形, 证明: 如果对于任意的 $p,q\in M$, 在 M 中从点 p 到 q 的平行移动与连接 p 和 q 的曲线段无关, 则 M 的曲率张量恒为零.

10. 计算球面 $S^n(r)=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}|\sum_i(x^i)^2=r^2\}$ 的截面曲率, Ricci 曲率和数量曲率. $S^n(r)$ 上的黎曼度量由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的欧氏度量诱导.

11. 设 (M,g) 为连通的 m 维 Einstein 流形, $m\geq 3$, 证明:

(1) 若 $m=3$, 则 (M,g) 为常曲率黎曼流形.

(2) 若 (M,g) 的数量曲率 $\rho\neq 0$, 则 (M,g) 上不存在非零的平行向量场.

12. 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线, $J(t)$ 是沿 γ 的任意一个 Jacobi 场. 证明: 如果 J 不恒为零, 则它的零点是孤立的.

13. 设 M 是完备黎曼流形, $f:(M,g)\to(N,h)$ 是局部等距, 证明: 对于任意一条测地线 $\beta:[a,b]\to N$, 以及任意一点 $p\in f^{-1}\{\beta(a)\}$, 在 M 中存在唯一的一条测地线 γ, 使得 $f\circ\gamma=\beta$.

第六章　子流形简介

子流形理论是黎曼几何的重要研究内容. 事实上许多重要的黎曼流形都可以作为比较熟悉的空间如欧氏空间, 球面等的子流形, 而且欧氏空间的微分几何学仍然是研究黎曼几何的主要参照物. 目前子流形的微分几何已经成为内容非常丰富的学科分支, 其中包括当今许多重要的研究课题, 并且已有许多专著介绍它们的现状和进展. 本章的目的是对子流形理论进行简单的介绍, 为有兴趣的读者深入学习子流形的微分几何作必要的准备.

§6.1　子流形的基本公式

设 $(N,\bar g)$ 为 n 维黎曼流形, M 为 m 维光滑流形, $f:M\to N$ 是 M 在 N 中的一个光滑浸入. 则对任意点 $p\in M$, 存在 p 的一个开邻域 $U\subset M$, 使得 $f|_U:U\to M$ 为嵌入, 也就是每一个浸入子流形在局部上都是嵌入子流形. 因此在讨论子流形的局部理论时不妨假定 M 是 N 的一个嵌入子流形, 并且通常把 M 和 $f(M)$ 等同起来, 并常常用包含映射 $i:M\to N$ 来代替 f.

对于每一点 $p\in M$, 切空间 T_pN 关于黎曼度量 $\bar g$ 有正交分解

$$T_pN=T_pM\oplus T_p^{\perp}M, \tag{6.1}$$

其中 T_pM 是 M 在点 p 的切空间, $T_p^{\perp}M$ 是 T_pM 在 T_pN 中的正交补, 称之为子流形 M 在点 p 处的法空间. 这样任意一个切向量 $v\in T_pN$ 都可唯一地分解为

$$v=v^{\top}+v^{\perp},$$

其中 $v^{\top}\in T_pM$ 称为 v 的切分量, $v^{\perp}\in T_p^{\perp}M$ 称为 v 的法分量.

令

$$T^{\perp}M=\bigcup_{p\in M}T_p^{\perp}M,$$

易验证它是 M 上的一个向量丛, 称为子流形 M 的法丛. 显然有

$$i^*TN=TM\oplus T^{\perp}M.$$

子流形的切丛和法丛都具有诱导黎曼结构, 自然地为黎曼向量丛. 特别地, M 关于诱导度量 $g=i^*\bar g$ 是一个 m 维黎曼流形. 此时包含映射 $i:(M,g)\to(N,\bar g)$ 为等距浸入. 为方便起见, 通常用 M 和 N 来分别表示 (M,g) 和 $(N,\bar g)$.

设 $(U;x^i)$ 是 M 上的局部坐标系, $(\bar U;y^A)$ 为 N 上的局部坐标系, 使得 $f(U)\subset\bar U$. 局部上, 浸入 f 可以表示为

$$y^A=f^A(x^1,\cdots,x^m),$$

以后若无特别说明, 约定指标的取值范围如下:

$$1\le A,B,C,\cdots\le n;\ \ 1\le i,j,k,\cdots\le m;\ \ m+1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le n.$$

于是, 等距浸入的条件为

$$g_{ij}=\bar g_{AB}\frac{\partial y^A}{\partial x^i}\frac{\partial y^B}{\partial x^j},$$

其中 $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}),\ \ \bar g_{AB}=\bar g(\frac{\partial}{\partial x^A},\frac{\partial}{\partial x^B})$.

设 X 为 M 上的向量场, $f: M \to N$ 为浸入, 则 f_*X 是 $f(M)$ 上的向量场. 下面把 f_*X 延拓成 N 上的一个向量场 $\bar{X}$. 显然延拓的方式很多, 关键是由延拓得到的 $\bar{X}$, 当限制到 $f(M)$ 上时, 应与 f_*X 一致, 与延拓的方式无关.

局部地, M 上的向量场 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 被 f_* 映为 $f(M)$ 上的向量场

$$f_*X = (X^i \frac{\partial y^A}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial y^A}.$$

设 $\bar{X}$ 为 $f_*(X)$ 在 N 中的局部延拓, 使得

$$\bar{X}(y)|_{y(x)} = f_*X(x).$$

即若

$$\bar{X}(y) = \bar{X}^A \frac{\partial}{\partial y^A},$$

则

$$\bar{X}^A(y(x)) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i} X^i(x). \tag{6.2}$$

设 Y 为 M 上另一个向量场, f_*Y 的局部延拓为 $\bar{Y}$, 即

$$\bar{Y}^A(y(x)) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i} Y^i(x).$$

则我们有

命题 6.1 设 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别为 f_*X 和 f_*Y 的局部延拓, $\bar{\nabla}$ 是黎曼流形 N 上的 Levi-Civita 联络. 则 $[\bar{X}, \bar{Y}]$ 和 $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ 在 $f(M)$ 上的限制与延拓的方式无关, 并且有

$$[\bar{X}, \bar{Y}]|_{f(M)} = [f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y].$$

证明 由 (6.2) 得

$$\begin{aligned}
[\bar{X}, \bar{Y}]^A \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)} &= (\bar{X}^B \frac{\partial \bar{Y}^A}{\partial y^B} - \bar{Y}^B \frac{\partial \bar{X}^A}{\partial y^B}) \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)} \\
&= \{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(X^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j})\} \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)} \\
&= [X, Y]^i \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)}.
\end{aligned}$$

故 $[\bar{X}, \bar{Y}]$ 在 $f(M)$ 上的限制与延拓的方式无关.

又因为

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^A \frac{\partial}{\partial y^A} = \bar{X}^B (\frac{\partial \bar{Y}^A}{\partial y^B} + \bar{\Gamma}^A_{BC} \bar{Y}^C) \frac{\partial}{\partial y^A},$$

则由 (6.2) 得

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}|_{y(x)} &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)} \\
&\quad + X^i Y^j \frac{\partial y^B}{\partial x^i} \frac{\partial y^C}{\partial x^j} \bar{\Gamma}^A_{BC} \frac{\partial}{\partial y^A}|_{y(x)}.
\end{aligned}$$

所以 $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ 在 $f(M)$ 上的限制与延拓的方式无关. □

根据命题 6.1, 可将 f_*X 与 X 等同, 且 $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}|_{f(M)}$ 可以简记为 $\bar{\nabla}_X Y$.

对任意的光滑切向量场 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 利用分解式 (6.1) 可设

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{6.3}$$

其中

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top, \ h(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp. \tag{6.4}$$

(6.3) 称为子流形 M 的 Gauss 公式.

定理 6.1 设 $i : M \to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形, 则由 (6.4) 的第一式定义的映射

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \ (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

是 M 上的诱导度量 g 确定的 Levi-Civita 联络. 并且由 (6.4) 的第二式定义的映射

$$h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$$

具有下面的性质

(1) $h(X + Y, Z) = h(X, Z) + h(Y, Z)$;

(2) 对任意的 $f \in C^\infty(M)$, 有 $h(fX, Y) = fh(X, Y)$;

(3) $h(X, Y) = h(Y, X)$.

证明 对任意的 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, 有

$$\bar{\nabla}_{X+Y} Z = \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_Y Z,$$

则有

$$\nabla_{X+Y} Z = (\bar{\nabla}_{X+Y} Z)^\top = (\bar{\nabla}_X Z)^\top + (\bar{\nabla}_Y Z)^\top = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$$

$$h(X + Y, Z) = (\bar{\nabla}_{X+Y} Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X Z)^\perp + (\bar{\nabla}_Y Z)^\perp = h(X, Z) + h(Y, Z),$$

同理可得

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$h(X, Y + Z) = h(X, Y) + h(X, Z).$$

另外对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\bar{\nabla}_{fX} Y = f\bar{\nabla}_X Y, \ \bar{\nabla}_X (fY) = X(f)Y + f\bar{\nabla}_X Y,$$

所以

$$\nabla_{fX} Y = (\bar{\nabla}_{fX} Y)^\top = f(\bar{\nabla}_X Y)^\top = f\nabla_X Y,$$

$$\nabla_X (fY) = (\bar{\nabla}_X (fY))^\top = X(f)Y + f(\bar{\nabla}_X Y)^\top = X(f)Y + f\nabla_X Y,$$

并且

$$h(fX, Y) = (\bar{\nabla}_{fX} Y)^\perp = f(\bar{\nabla}_X Y)^\perp = fh(X, Y).$$

从而映射 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \ (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ 是 M 上的联络, 且映射 $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$ 具有性质 (1) 和 (2).

利用 Levi-Civita 联络 $\bar{\nabla}$ 的无挠性, 对任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 有

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y] \in \Gamma(TM),$$

从而

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y],$$

$$h(X, Y) - h(Y, X) = (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\perp = 0.$$

因此联络 ∇ 是无挠的, 并且 h 是对称的, 即有性质 (3).

对于任意 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, 利用联络 $\bar{\nabla}$ 和黎曼度量 $\bar{g}$ 的相容性得

$$\begin{aligned} Z < X, Y > &= < \bar{\nabla}_Z X, Y > + < X, \bar{\nabla}_Z Y > \\ &= < (\bar{\nabla}_Z X)^\top, Y > + < X, (\bar{\nabla}_Z Y)^\top > \\ &= < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y > . \end{aligned}$$

这说明联络 ∇ 和诱导度量 g 相容, 从而 ∇ 是黎曼流形 M 上的 Levi-Civita 联络. □

定义 6.1 设 $i : M \to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形, 则由 (6.4) 的第二式定义的对称二阶协变张量场 $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$ 称为子流形 M 的第二基本形式. 特别地, 对任意 $p \in M$, 第二基本形式给出了一个对称双线性映射

$$h : T_p M \times T_p M \to T_p^\perp M.$$

定义 6.2 设 $i : M \to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形. 如果 M 的第二基本形式恒为零, 则称 M 为 N 的全测地子流形.

由 (6.3) 可知, 如果 $i : M \to N$ 是 N 的全测地子流形, 则对于任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 有 $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$. 此时 M 中的测地线必为 N 中的测地线. 反之, 若 $\gamma : [a, b] \to N$ 是 N 中的一条测地线, 且 $\gamma(a) \in M$, $\gamma'(a) \in T_{\gamma(a)} M$, 则 γ 必在 M 中.

设 $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$, 类似于 (6.3), 可记

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi, \tag{6.5}$$

其中

$$A_\xi(X) = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top, \ \ \nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp. \tag{6.6}$$

(6.5) 称为子流形的 Weingarten 公式. Gauss 公式和 Weingarten 公式合起来称为子流形的基本公式.

定理 6.2 设 $i : M \to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形, 则由 (6.6) 的第二式所定义的映射

$$\nabla^\perp : \Gamma(T^\perp M) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M), \ \ (\xi, X) \mapsto \nabla_X^\perp \xi$$

是 M 的法丛 $T^\perp M$ 上的联络, 并且与法丛 $T^\perp M$ 上的黎曼度量是相容的.

证明 对任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Gamma(T^\perp M)$, 有

$$\nabla_{X+Y}^\perp \xi = \nabla_X^\perp \xi + \nabla_Y^\perp \xi, \ \ \nabla_X^\perp(\xi_1 + \xi_2) = \nabla_X^\perp \xi_1 + \nabla_X^\perp \xi_2.$$

又对任意的 $f \in C^\infty(M)$, 有

$$\bar{\nabla}_{fX} \xi = f \bar{\nabla}_X \xi, \ \ \bar{\nabla}_X (f\xi) = X(f)\xi + f \bar{\nabla}_X \xi.$$

所以

$$\nabla_{fX}^\perp \xi = (\bar{\nabla}_{fX} \xi)^\perp = f(\bar{\nabla}_X \xi)^\perp = f \nabla_X^\perp \xi,$$

$$\nabla_X^\perp (f\xi) = X(f)\xi + f(\bar{\nabla}_X \xi)^\perp = X(f)\xi + f \nabla_X^\perp \xi.$$

这说明 $\nabla^{\perp}$ 是法丛 $T^{\perp}M$ 上的联络.

利用联络 $\bar{\nabla}$ 和黎曼度量 $\bar{g}$ 的相容性得

$$X<\xi_1,\xi_2>=<\bar{\nabla}_X\xi_1,\xi_2>+<\xi_1,\bar{\nabla}_X\xi_2>=<\nabla_X\xi_1,\xi_2>+<\xi_1,\nabla_X\xi_2>.$$

这说明联络 $\nabla^{\perp}$ 和法丛上的诱导黎曼度量相容. □

定义 6.3 设 $i:M\to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形, 则由 (6.6) 的第二式定义的联络 $\nabla^{\perp}:\Gamma(T^{\perp}M)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(T^{\perp}M)$ 称为子流形 M 的法丛 $T^{\perp}M$ 上的法联络.

定理 6.3 设 $i:M\to N$ 是 n 维黎曼流形 N 的一个 m 维嵌入子流形, 则对任意的 $\xi\in\Gamma(T^{\perp}M)$, 由 (6.6) 的第一式所定义的映射

$$A_{\xi}:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$$

是 M 上光滑的 (1,1) 型张量场. 若把 A_{ξ} 看作 M 上的光滑线性变换场, 则对任每一点 $p\in M$,

$$A_{\xi}:T_pM\to T_pM$$

是关于诱导度量 g 的自共轭变换, 并且对任意 $v,w\in T_pM$, 有

$$<A_{\xi}(v),w>=<h(v,w),\xi>. \tag{6.7}$$

因此, 对每一点 $p\in M$, 有双线性映射 $A:T_p^{\perp}M\times T_pM\to T_pM$ 使得

$$(\xi,v)\mapsto A(\xi,v)=A_{\xi}v.$$

证明 根据 (6.6), 对于任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$ 和 $\xi\in\Gamma(T^{\perp}M)$, 由于 $<\xi,Y>=0$, 则有

$$\begin{aligned}<A_{\xi}(X),Y> &= <-(\bar{\nabla}_X\xi)^{\top},Y>=-<\bar{\nabla}_X\xi,Y>\\ &= -X<\xi,Y>+<\xi,\bar{\nabla}_XY>\\ &= <(\nabla_XY)^{\perp},\xi>\\ &= <h(X,Y),\xi>,\end{aligned}$$

故 (6.7) 成立.

因为 $h(X,Y)$ 关于 X,Y 具有张量性质, 所以 $A_{\xi}(X)$ 关于 X 也具有张量性质, 即 $A_{\xi}:\Gamma(TX)\to\Gamma(TX)$ 是 $C^{\infty}(M)$- 线性的. (6.7) 结合 $h(X,Y)$ 的对称性说明 $A_{\xi}:T_pM\to T_pM$ 是自共轭变换. 事实上, 对于任意 $X,Y\in T_pM$, 有

$$<A_{\xi}(X),Y>=<h(X,Y),\xi>=<h(Y,X),\xi>=<A_{\xi}(Y),X>=<X,A_{\xi}(Y)>.$$

同时 (6.7) 说明 $A_{\xi}(X)$ 关于 ξ 也具有张量性质. 特别地, 对任意 $f\in C^{\infty}(M)$ 有

$$\begin{aligned}<A_{f\xi}(X),Y> &= <h(X,Y),f\xi>\\ &= f<h(X,Y),\xi>\\ &= f<A_{\xi}(X),Y>\\ &= <fA_{\xi}(X),Y>,\end{aligned}$$

因而 $A_{f\xi}(X)=fA_{\xi}(X)$. 这样在每一点 $p\in M$, $A(\xi,v)=A_{\xi}(v)$ 确定了一个双线性映射 $A:T_p^{\perp}M\times T_pM\to T_pM$. □

定义 6.4 对于 $p \in M$, $\xi \in T_p^{\perp}(M)$, 定理 6.3 中所刻画的线性映射 $A_\xi : T_pM \to T_pM$ 称为子流形 M 在点 p 关于法向量 ξ 的形状算子或 Weingarten 变换.

下面用局部标架表示子流形 M 的切丛和法丛上的诱导联络 ∇, $\nabla^{\perp}$, 以及第二基本形式 h 和形状算子 A_ξ 等.

设 $p \in M$, 则存在点 p 在 M 中的一个开邻域 U, 以及 N 中定义在 U 上的单位正交标架场 $\{e_A\}$, 使得 e_i 是 U 上的切向量场. 显然, $\{e_\alpha\}$ 是法丛 $T^{\perp}M$ 在 U 上的正交标架场. 通常称这样的标架场 $\{e_A\}$ 为子流形 M 在 U 上的一个 Darboux 标架场.

则子流形 M 的 Gauss 公式和 Weingarten 公式分别为

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j + h(e_i, e_j),$$

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_\alpha = -A_{e_\alpha} e_i + \nabla^{\perp}_{e_i} e_\alpha.$$

根据嵌入的定义, 存在 N 中的一个开邻域 $\bar{U}$, 使得 $U = \bar{U} \cap M$, 且标架场 $\{e_A\}$ 可以扩张到 $\bar{U}$ 上的正交标架场 $\{\bar{e}_A\}$. 设 $\{\bar{\omega}^A\}$ 是 $\{\bar{e}^A\}$ 的对偶标架场, 记 $\{\bar{\omega}_A^B\}$ 为 Levi-Civita 联络 $\bar{\nabla}$ 在该标架场下的联络形式, 则对任意 $q \in \bar{U}$, 有

$$dq = \bar{\omega}^A \bar{e}_A,\ d\bar{\omega}^A = \bar{\omega}^B \wedge \bar{\omega}_B^A,\ \bar{\omega}_A^B + \bar{\omega}_B^A = 0. \tag{6.8}$$

由假设 $e_j = \bar{e}_j|_U$, $e_\alpha = \bar{e}_\alpha|_U$, 则

$$\omega^j = i^*(\bar{\omega}^j),\ \omega^\alpha = i^*(\bar{\omega}^\alpha) = 0.$$

故当 q 在 U 上变动时, 有

$$dq = \omega^i e_i,\ \omega^\alpha = 0. \tag{6.9}$$

所以 $\{\omega^i\}$ 恰好是 $\{e^i\}$ 的对偶余切标架场. 这样在子流形 M 上的诱导度量为

$$g = i^*(\bar{g}) =< dq, dq >= \sum_i (\omega^i)^2. \tag{6.10}$$

记 $\omega_A^B = i^*\bar{\omega}_A^B = \bar{\omega}_A^B|_U$, 则由 (6.8) 和 (6.9) 得

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ d\omega^\alpha = \omega^j \wedge \omega_j^\alpha = 0, \tag{6.11}$$

$$\omega_i^j + \omega_i^j = 0,\ \omega_i^\alpha + \omega_\alpha^i = 0,\ \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{6.12}$$

根据联络形式 $\bar{\omega}_A^B$ 的定义, 在 $\bar{U}$ 上有

$$\bar{\nabla}\bar{e}_A = \bar{\omega}_A^B \bar{e}_B, \tag{6.13}$$

上式限制在 U 上可得

$$\bar{\nabla} e_j = \omega_j^k e_k + \omega_j^\alpha e_\alpha,\ \bar{\nabla} e_\alpha = \omega_\alpha^k e_k + \omega_\alpha^\beta e_\beta. \tag{6.14}$$

上式是子流形基本公式的另一种表达形式. 从而有

$$\nabla_{e_i} e_j = \omega_j^k(e_i) e_k,\ h(e_i, e_j) = \omega_j^\alpha(e_i) e_\alpha, \tag{6.15}$$

$$A_{e_\alpha}(e_i) = -\omega_\alpha^k(e_i) e_k,\ \nabla^{\perp}_{e_i} e_\alpha = \omega_\alpha^\beta(e_i) e_\beta. \tag{6.16}$$

这样, ω_i^j 是诱导度量 (6.10) 的 Levi-Civita 联络在切标架场 $\{e_i\}$ 下的联络形式, ω_α^β 是法丛 $T^{\perp}M$ 上的法联络在局部标架场 $\{e_\alpha\}$ 下的联络形式.

由 (6.11) 和 Cartan 引理, 可设

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j,\ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{6.17}$$

则 (6.15) 第二式为

$$h(e_i, e_j) = h_{ij}^\alpha e_\alpha,\ h = h_{ij}^\alpha \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_\alpha. \tag{6.18}$$

(6.16) 的第一式可写为

$$A_{e_\alpha}(e_i) = \sum_k \omega_k^\alpha(e_i) e_k = \sum_k h_{ik}^\alpha e_k,$$

所以

$$A_{e_\alpha} = \sum_{i,k} h_{ik}^\alpha \omega^i \otimes e_k. \tag{6.19}$$

定义 6.5 设

$$h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$$

是子流形 M 的第二基本形式, 称

$$H = \frac{1}{m}\mathrm{tr}h = \frac{1}{m}\sum_i h(e_i, e_i) = \frac{1}{m}\sum_{i,\alpha} h_{ii}^\alpha e_\alpha$$

为子流形 M 的平均曲率向量场.

设 $\xi \in T_p^\perp M$ 是一个单位法向量, 令

$$\xi = \sum_{\alpha=m+1}^n \xi^\alpha e_\alpha,\ H^\xi = < H, \xi > = \frac{1}{m}\sum_{i,\alpha} h_{ii}^\alpha \xi_\alpha, \tag{6.20}$$

则称 H^ξ 为子流形 M 沿 ξ 的平均曲率.

若命

$$H^\alpha = H^{e_\alpha},$$

则有

$$H = H^\alpha e_\alpha,$$

其中

$$H^\alpha = H^{e_\alpha} = \frac{1}{m}\sum_i h_{ii}^\alpha.$$

则平均曲率向量 H 的长度为

$$|H| = \sqrt{\sum_\alpha (H^\alpha)^2},$$

称之为子流形 M 在 N 中的平均曲率.

类似地, h 的模长 $|h|$ 称为 M 的第二基本形式的长度, 即

$$|h|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2. \tag{6.21}$$

定义 6.6 设 $i : M \to N$ 是等距浸入, 若 $H = 0$, 则称 i 为极小浸入, M 称为极小子流形.

显然有下面的命题.

命题 6.2 M 为全测地子流形的充要条件是 $h_{ij}^\alpha = 0$; M 为极小子流形的充要条件是 $\sum_i h_{ii}^\alpha = 0$.

§6.2 子流形的基本方程

设 $i: M \to N$ 是 n 维黎曼流形 $(N, \bar{g})$ 的一个 m 维嵌入子流形. 令 $g = i^*\bar{g}$, 则 (M, g) 为一个 m 维黎曼流形. 对任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$, 有如下的 Gauss 公式和 Weingarten 公式

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi,$$

其中 $\bar{\nabla}$ 是 N 上的 Levi-Civita 联络, ∇ 是 M 上的诱导 Levi-Civita 联络,

$$h: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$$

是子流形 M 的第二基本形式. A_ξ 是形状算子, $\nabla^\perp$ 是法丛 $T^\perp M$ 上的法联络.

本节主要讨论 N 的黎曼曲率张量和子流形 M 的黎曼曲率张量, 第二基本形式以及法联络的曲率之间的关系, 建立子流形的基本方程.

设 $X \in \Gamma(TM)$, 由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X(\nabla_Y Z) + \bar{\nabla}_X(h(Y, Z)) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - A_{h(Y,Z)}(X) + h(X, \nabla_Y Z) + \nabla^\perp_X(h(Y, Z)).\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= R(X, Y)Z + A_{h(X,Z)}(Y) - A_{h(Y,Z)}(X) + \nabla^\perp_X(h(Y, Z)) \\ &\quad -\nabla^\perp_Y(h(X, Z)) + h(X, \nabla_Y Z) + h(Z, \nabla_Y X) - h(Y, \nabla_X Z) - h(Z, \nabla_X Y),\end{aligned}$$

其中 $\bar{R}, R$ 分别为黎曼流形 N 和 M 的曲率算子.

如下定义 $h: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$ 的协变导数

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla^\perp_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z).$$

易验证, 由

$$(\nabla h)(Y, Z, X) = (\nabla_X h)(Y, Z)$$

确定的映射

$$\nabla h: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\perp M)$$

是定义在 M 上的, 取值在 $T^\perp M$ 中的三阶协变张量场, 称为 h 的协变微分. 从而有

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + A_{h(X,Z)}(Y) - A_{h(Y,Z)}(X) \\ &\quad +(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z),\end{aligned} \tag{6.22}$$

比较 (6.22) 两边的切分量和法分量可得

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top - A_{h(X,Z)}(Y) + A_{h(Y,Z)}(X), \tag{6.23}$$

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y, Z) - \nabla_Y h(X, Z). \tag{6.24}$$

分别称 (6.23) 和 (6.24) 为子流形 M 的 Gauss 方程和 Codazzi 方程.

对任意的 $W \in \Gamma(TM)$, Gauss 方程也可以写为

$$< R(X,Y)Z,W >=< \bar{R}(X,Y)Z,W > - < A_{h(X,Z)}(Y),W > + < A_{h(Y,Z)}(X),W >, \tag{6.25}$$

或者

$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y) = \bar{\mathcal{R}}(Z,W,X,Y) - < h(X,Z),h(Y,W) > + < h(Y,Z),h(X,W) > . \tag{6.26}$$

通常 (6.26) 也称为 Gauss 方程, 它与 (6.23) 是等价的.

对 Weingarten 公式关于 $X \in \Gamma(TM)$ 求协变导数可得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\xi &= \bar{\nabla}_X(A_\xi(Y)) + \bar{\nabla}_X(\nabla^\perp_Y\xi)\\ &= -\nabla_X(A_\xi(Y)) - A_{\nabla^\perp_Y\xi}(X) + h(X,\nabla_\xi(Y)) + \nabla^\perp_X(\nabla^\perp_Y\xi).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)\xi &= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\xi - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X\xi - \bar{\nabla}_{[X,Y]}\xi\\ &= -(\nabla_X(A_\xi(Y)) - A_{\nabla^\perp_X\xi}(Y) - A_\xi(\nabla_XY))\\ &\quad +(\nabla_Y(A_\xi(X)) - A_{\nabla^\perp_Y\xi}(X) - A_\xi(\nabla_YX))\\ &\quad +R^\perp(X,Y)\xi - h(X,A_\xi(Y)) + h(Y,A_\xi(X)),\end{aligned} \tag{6.27}$$

这里 $R^\perp(X,Y):\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$ 是法联络 $\nabla^\perp$ 的曲率算子, 即

$$R^\perp(X,Y) = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X - \nabla^\perp_{[X,Y]}.$$

定义张量场 $A:\Gamma(T^\perp M)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ 的协变微分

$$\nabla A:\Gamma(T^\perp M)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$$

为

$$\begin{aligned}(\nabla A)(\xi,Y,X) &= (\nabla_XA)(\xi,Y)\\ &= \nabla_X(A_\xi(Y)) - A_{\nabla^\perp_X\xi}(Y) - A_\xi(\nabla_XY).\end{aligned}$$

易见 ∇A 是一个张量场. 这样 (6.27) 可写为

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)\xi &= -(\nabla_XA)(\xi,Y) + (\nabla_YA)(\xi,X)\\ &\quad +R^\perp(X,Y)\xi - h(X,A_\xi(Y)) + h(Y,A_\xi(X)).\end{aligned}$$

比较上式两边的切分量和法分量可得

$$(\nabla_XA)(\xi,Y) - (\nabla_YA)(\xi,X) = -(\bar{R}(X,Y)\xi)^\top, \tag{6.28}$$

$$R^\perp(X,Y)\xi = (\bar{R}(X,Y)\xi)^\perp + h(X,A_\xi(Y)) - h(Y,A_\xi(X)). \tag{6.29}$$

对于任意 $Z \in \Gamma(TM)$, (6.28) 的右边与 Z 作内积得

$$- < (\bar{R}(X,Y)\xi)^\top, Z >= - < \bar{R}(X,Y)\xi, Z >=< \bar{R}(X,Y)Z,\xi > .$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
<(\nabla_X A)(\xi,Y),Z> &= <\nabla_X(A_\xi(Y)),Z> - <A_{\nabla^\perp_X\xi}(Y),Z> - <A_\xi(\nabla_X Y),Z> \\
&= X(<A_\xi(Y),Z>) - <A_\xi(Y),\nabla_X Z> \\
&\quad - <h(Y,Z),\nabla^\perp_X\xi> - <h(\nabla_X Y,Z),\xi> \\
&= X(<h(Y,Z),\xi>) - <h(Y,\nabla_X Z),\xi> \\
&\quad - <h(\nabla_X Y,Z),\xi> - <h(Y,Z),\nabla^\perp_X\xi> \\
&= <\nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - h(Y,\nabla_X Z) - h(\nabla_X Y,Z),\xi> \\
&= <(\nabla_X h)(Y,Z),\xi>,
\end{aligned}
$$

从而对任意的 $\xi\in\Gamma(T^\perp M)$, 有

$$<(\nabla_X h)(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)-(\bar{R}(X,Y)Z)^\top,\xi>=0,$$

这说明 (6.24) 成立, 上面过程显然可逆, 也就是从 (6.24) 可以推出 (6.28), 故 (6.24) 和 (6.28) 是等价的.

这样从 Weingarten 公式推出的新方程只有 (6.29), 称之为子流形 M 的 Ricci 方程.

对于子流形 M, 上面导出的 Gauss-Codazzi-Ricci 方程反映了 M 上的诱导度量 g, 第二基本形式 h, 以及法丛上的法联络 $\nabla^\perp$ 与黎曼流形 N 的度量 $\bar{g}$ 之间的关系, 这三个方程合起来称为子流形 M 的基本方程.

下面在局部标架场下讨论子流形 M 的基本方程.

设 $p\in M$, $\{e_A\}$ 是定义在 p 点附近的一个 Darboux 标架场, 则有

$$dq=\omega^i e_i,\ \omega^\alpha=0.$$

$$\bar{\nabla}e_i=\omega_i^j e_j+\omega_i^\alpha e_\alpha=\nabla e_i+h_{ij}^\alpha\omega^j e_\alpha,$$
$$\bar{\nabla}e_\alpha=\omega_\alpha^k e_k+\omega_\alpha^\beta e_\beta=-\sum_{j,k}h_{jk}^\alpha\omega^k e_j+\nabla^\perp e_\alpha,$$

其中

$$\nabla e_i=\omega_i^j e_j,\ \nabla^\perp e_\beta=\omega_\beta^\alpha e_\alpha,\ \ h=h_{ij}^\alpha\otimes\omega^j\otimes e_\alpha.$$

由 ∇h 的定义知

$$\nabla h=\omega^i\otimes\omega^j\otimes(dh_{ij}^\alpha-\omega_i^k h_{kj}^\alpha-\omega_j^k h_{ik}^\alpha+\omega_\beta^\alpha h_{ij}^\beta)\otimes e_\alpha.$$

令

$$h_{ijk}^\alpha\omega^k=dh_{ij}^\alpha-\omega_i^k h_{kj}^\alpha-\omega_j^k h_{ik}^\alpha+\omega_\beta^\alpha h_{ij}^\beta. \tag{6.30}$$

由于 $h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha$, 故 $h_{ijk}^\alpha=h_{jik}^\alpha$. 则若记 R_{ijkl} 和 $\bar{R}_{ABCD}$ 分别为 M 和 N 的黎曼曲率张量在 Darboux 标架场 $\{e_A\}$ 下的分量, 则 Gauss-Codazzi-Ricci 方程可以表示为

$$R_{ijkl}=\bar{R}_{ijkl}-\sum_\alpha(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha), \tag{6.31}$$

$$h_{ijk}^\alpha-h_{ikj}^\alpha=\bar{R}_{\alpha ijk}, \tag{6.32}$$

$$R^\perp_{\alpha\beta ij}=\bar{R}_{\alpha\beta ij}-\sum_k(h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta-h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta), \tag{6.33}$$

其中

$$R^\perp_{\alpha\beta ij}=<R^\perp(e_i,e_j)e_\alpha,e_\beta>.$$

子流形的基本方程也可以从黎曼流形 (N,g) 的结构方程得到. 事实上 N 的结构方程为

$$\begin{cases} d\bar{\omega}^A = -\sum_B \bar{\omega}_B^A \wedge \bar{\omega}^B, \ \ \bar{\omega}_B^A + \bar{\omega}_A^B = 0, \\ d\bar{\omega}_B^A = -\sum_C \bar{\omega}_C^A \wedge \bar{\omega}_B^C + \bar{\Omega}_B^A, \end{cases} \tag{6.34}$$

$$\bar{\Omega}_B^A = \frac{1}{2}\bar{R}^A_{BCD}\bar{\omega}^C \wedge \bar{\omega}^D,$$

其中 $\bar{\omega}^A$ 和 $\bar{\Omega}_B^A$ 分别为 N 的联络形式和曲率形式. 令

$$i^*(\bar{\omega}^A) = \omega^A, \ \ i^*(\bar{\omega}_B^A) = \omega_B^A,$$

当限制在 M 上时, 有

$$\omega^\alpha = 0. \tag{6.35}$$

对上式外微分, 并利用结构方程可得

$$\omega^\alpha = \omega_j \wedge \omega_j^\alpha = 0.$$

据 Cartan 引理, 上式表明

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \ \ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{6.36}$$

由 (6.35), (6.36) 以及 N 的结构方程, 可得 M 的结构方程为

$$\begin{cases} d\omega^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j, \ \ \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \\ d\omega_j^i = -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \end{cases} \tag{6.37}$$

其中

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i^j &= d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j \\ &= \Omega_i^j + \sum_\alpha h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

即

$$\Omega_i^j = \bar{\Omega}_i^j - \frac{1}{2}\sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha)\omega^k \wedge \omega^l, \tag{6.38}$$

这就是 M 的 Gauss 方程.

类似可得

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i^\alpha &= d\omega_i^\alpha - \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha - \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \\ &= d(h_{ij}^\alpha \omega^j) - h_{jk}^\alpha \omega_i^j \wedge \omega^k - h_{ik}^\beta \omega^k \wedge \omega_\beta^\alpha \\ &= \sum_j (dh_{ij}^\alpha - h_{ik}^\alpha \omega_j^k - h_{kj}^\alpha \omega_i^k + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^j \\ &= h_{ijk}^\alpha \omega^k \wedge \omega^j = -\frac{1}{2}(h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha)\omega^j \wedge \omega^k, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_\alpha^\beta &= d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^k \wedge \omega_k^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \\ &= \Omega_\alpha^{\perp\beta} + \sum_k h_{ki}^\alpha h_{kj}^\beta \omega^i \wedge \omega^j \\ &= \Omega_\alpha^{\perp\beta} + \frac{1}{2}\sum_k (h_{ki}^\alpha h_{kj}^\beta - h_{kj}^\alpha h_{ki}^\beta)\omega^i \wedge \omega^j, \end{aligned}$$

这分别是 M 的 Codazzi 方程和 Ricci 方程.

最后简单介绍一下常曲率空间的子流形的基本方程.

设 N 是 n 维常曲率空间, 其截面曲率为常数 $\bar{c}$, 则 N 的曲率张量可以表示为

$$\bar{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W)=\bar{c}(<W,X><Z,Y>-<W,Y><Z,X>).$$

在 Darboux 标架场下, 其分量为

$$\bar{R}_{ABCD}=\bar{c}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}).$$

则 m 维子流形 M 的基本方程分别为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y,Z,W) &= \bar{c}(<W,X><Z,Y>-<W,Y><Z,X>)\\ &\quad +<h(W,X),h(Z,Y)>-<h(W,Y),h(Z,X)>,\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z)-(\bar{\nabla}_Y h)(X,Z)=0, \tag{6.40}$$

$$<R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta>=<[A_\xi,A_\eta]X,Y>, \tag{6.41}$$

其中 $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM),\ \ \xi,\eta\in\Gamma(T^{\perp}M)$.

在 Darboux 标架场下, 这些方程的等价形式分别为

$$R_{ijkl}=\bar{c}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{6.42}$$

$$h^\alpha_{ijk}-h^\alpha_{ikj}=0, \tag{6.43}$$

$$R^{\perp}_{\alpha\beta kl}=\sum_j(h^\alpha_{jk}h^\beta_{jl}-h^\alpha_{jl}h^\beta_{jk}). \tag{6.44}$$

由 (6.39) 或者 (6.42) 可得 M 的 Ricci 张量为

$$S(X,Y)=(m-1)\bar{c}<X,Y>+m<H,h(X,Y)>-\sum_i<h(X,e_i),h(Y,e_i)>, \tag{6.45}$$

或者

$$R_{ij}=(m-1)\bar{c}\delta_{ij}+\sum_{\alpha,k}(h^\alpha_{kk}h^\alpha_{ij}-h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jk}). \tag{6.46}$$

由此可得 M 的数量曲率为

$$\rho=m(m-1)\bar{c}+m^2|H|^2-|h|^2. \tag{6.47}$$

利用这些关系式, 可证明如下定理.

定理 6.4 设 N 是常曲率为 $\bar{c}$ 的 n 维黎曼流形, $i:M\to N$ 是等距浸入. 若 M 的第二基本形式长度的平方满足 $|h|^2\le a$, 则 M 的截面曲率 K_M 满足

$$\bar{c}-\frac{1}{2}a\le K_M\le\bar{c}+\frac{1}{2}a. \tag{6.48}$$

证明 对任意 $i\neq j$, 由 (6.42) 得

$$R_{ijij}=\bar{c}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2), \tag{6.49}$$

由于

$$\sum_\alpha (h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2)\le \frac{1}{2}\sum_\alpha\{(h^\alpha_{ii})^2+(h^\alpha_{jj})^2\}\le\frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2,$$

且

$$\sum_\alpha (h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2)\ge -\frac{1}{2}\sum_\alpha\{(h^\alpha_{ii})^2+(h^\alpha_{jj})^2+2(h^\alpha_{ij})^2\}\ge-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2.$$

则由 (6.49) 以及定理假设可得 (6.48). □

§6.3 超曲面

3.1 超曲面的基本公式

余维数为 1 的等距浸入子流形 $i: M\to N$ 称为超曲面, 它是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的推广. 对于超曲面 M^m, 局部选取单位法向量场 ξ, 记

$$h(X,Y)=B(X,Y)\xi, \tag{6.50}$$

其中 B 称为 M 关于 ξ 的第二基本形式. 对 $<\xi,\xi>=1$ 进行微分得

$$<\bar\nabla_X\xi,\xi>=0,$$

即

$$<\nabla^\perp_X\xi,\xi>=0. \tag{6.51}$$

因为 $\nabla^\perp_X\xi$ 是法向量, 故 $\nabla^\perp_X\xi=0$. 从而 M 的 Gauss 公式和 Weingarten 公式为

$$\bar\nabla_XY=\nabla_XY+B(X,Y)\xi \tag{6.52}$$

和

$$\bar\nabla_X\xi=-A(X), \tag{6.53}$$

其中 A 就是 Weingarten 变换, 它满足

$$<A(X),Y>=B(X,Y). \tag{6.54}$$

由 (6.50) 和 (6.54) 可得 M 的 Gauss 方程

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W)=\bar{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W)+B(W,X)B(Z,Y)-B(W,Y)B(Z,X), \tag{6.55}$$

等价地

$$R(X,Y)Z=\bar R(X,Y)Z+B(Y,Z)A(X)-h(X,Z)A(Y). \tag{6.56}$$

由 (6.51) 可得

$$(\bar\nabla_Xh)(Y,Z)=(\nabla_XB(Y,Z))\xi.$$

从而, M 的 Codazzi 方程为

$$\nabla_XB(Y,Z)-\nabla_YB(X,Z)=<\bar R(X,Y)Z,\xi>. \tag{6.57}$$

等价地

$$<\nabla_XA(Y)-\nabla_YA(X),Z>=<\bar R(X,Y)Z,\xi>, \tag{6.58}$$

其中

$$\nabla_X A(Y) = \nabla_X(A(Y)) - A(\nabla_X Y).$$

另外, 由 (6.51) 可知 M 的 Ricci 方程自然成立.

若采用 Darboux 标架场, 取 $e_{m+1} = \xi$ 为超平面的单位法向量场. 则有下面的局部公式

$$\begin{cases} d\omega^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j, \;\; \omega^j_i + \omega^i_j = 0, \\ d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{cases} \tag{6.59}$$

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \tag{6.60}$$

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -R^{\perp}_{ijk}, \tag{6.61}$$

这里 $h_{ij} = h^{m+1}_{ij}$.

3.2 **主方向**

设 M^m 是 N 的超曲面, ξ 是 M 的单位法向量, 则对应的 Weingarten 变换 A 是 M 切空间上的对称双线性变换. 则对任一点 $p \in M$, 设 $\{X_1, \cdots, X_m\}$ 是 T_pM 的一组基, 则 $m \times m$ 阶矩阵 $(B(X_i, X_j))$ 是对称的. 因此存在 T_pM 的单位正交基 $\{e_i\}$, 使得

$$A(e_i) = \lambda_i e_i, \;\; B(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \tag{6.62}$$

其中 $\lambda_i = \lambda_i(p)$ 是线性变换 A 在 p 点的特征值, 即矩阵 $(B(X_i, X_j))_p$ 的特征值, 它与 T_pM 中基的选取无关.

定义 6.7 Weingarten 变换 A 在 p 点的特征值 λ_i 称为 M 在 p 点的主曲率, 对应的特征方向 e_i 称为主方向, λ_i 的重数称为该主曲率的重数.

若用 E_{ij} 表示由主方向 e_i 和 e_j 张成的二维截面, 用 K_p 和 $\bar{K}_p$ 分别表示 M 和 N 在 p 点的截面曲率, 则由 Gauss 方程和 (6.62) 可得

$$K_p(E_{ij}) - \bar{K}_p(E_{ij}) = \lambda_i \lambda_j \;\; (i \neq j). \tag{6.63}$$

上式左边称为二维截面 E_{ij} 的相对曲率. 当 $m = 2$, $N = \mathbb{R}^3$ 时, 就是古典曲面论中 Gauss 曲率的定义.

由 (6.62) 可得

$$\operatorname{tr} B = \sum_i \lambda_i.$$

因此超曲面的平均曲率就是它的主曲率的算术平均.

设 $\lambda_1(p)$ 是 M 在点 p 的 r 重主曲率, 不妨假设

$$\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = \cdots = \lambda_r(p),$$

则 $\lambda_1(p)$ 所对应的特征子空间 $E_r(p) \subset T_pM$ 是 r 维的. $E_r(p)$ 中任何向量都是主方向, 称之为 $\lambda_1(p)$ 的主方向空间. 如果对 M 的任意点 p, λ_1 都是 r 重的, 也就是主曲率 λ_1 的重数在 M 上是常数, 则对应的主方向空间构成 M 上的一个 r 维分布 $\mathcal{D} = \bigcup_{p\in M} E_r(p)$. 即对于任意的点 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U 以及定义在 U 上的 r 个光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_r$, 使得在每一点 $q \in U$, $\{X_1(q), \cdots, X_r(q)\}$ 是 $\mathcal{D}_q$ 的一个基.

如果对于任意的点 $p \in M$, 存在 M 的通过 p 点的子流形 M_1, 使得在每一点 $q \in M_1$, $T_qM_1 = \mathcal{D}_q$, 则称分布 $\mathcal{D}$ 是可积的, 并称 M_1 是分布 $\mathcal{D}$ 的一个积分子流形.

关于 r 维分布 $\mathcal{D}$, 有下面的定理.

定理 6.5 设 N 是常曲率空间, M 是 N 的连通超曲面. 若 M 的主曲率的重数在 M 上为常数, 则每个主曲率所对应的主方向空间构成的分布是可积的.

证明超出本书范围, 在此略去.

定义 6.8 设 M 是 N 的超曲面, 若在点 $p \in M$, M 的 n 个主曲率都相等, 则 p 称为 M 的脐点. 若 M 的每一个点都是脐点, 则称 M 为 N 的全脐点超曲面.

显然全测地超曲面是全脐点超曲面.

超曲面的主曲率概念也可以推广到子流形上. 设 M^m 是 N 的余维数为 p 的子流形, 则在 M^m 每点的法空间中, 可选取 p 个单位正交法向量 $\{\xi_\alpha\}$, $m+1 \le a \le m+p$. 对于每个固定的 α, ξ_α 对应的 Weingarten 变换 A_α 是该点切空间上的对称双线性变换, 类似于定义 6.7, 把 A_α 的特征值 λ_i^α 称为 M 关于 ξ_α 的主曲率, 对应的特征方向称为关于 ξ_α 的主方向.

若 m 个主曲率 λ_i^α 相等, 则称 M 关于 ξ_α 是脐性的. 若 M 关于任意单位法向量都是脐性的, 则称 M 是全脐点子流形. 显然全测地子流形是全脐点子流形.

3.3 **欧氏空间的超曲面**

设 $\mathbb{R}^{m+p}$ 是 $m+p$ 维欧氏空间, x 表示 $\mathbb{R}^{m+p}$ 中点 (关于原点) 的位置向量. 并用 $x: M^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ 表示 m 维黎曼流形 M 到 $\mathbb{R}^{m+p}$ 的等距浸入. 则 $x(p)$ 就是点 $p \in M$ 在 $\mathbb{R}^{m+p}$ 中的位置向量. 在不引起混淆时, 也用 x 表示 M 中点的位置向量.

取 $\mathbb{R}^{m+p}$ 的 Darboux 标架场 $\{e_A\}$, 当限制在 M 上时, $\{e_i\}$ 与 M 相切. 则有 $\mathbb{R}^{m+p}$ 的结构方程

$$\begin{cases} dx = \sum_A \omega^A e_A, \\ de_A = \sum_B \omega_A^B e_B. \end{cases} \tag{6.64}$$

把它们限制在 M 上, 可得

$$\begin{cases} dx = \sum_i \omega^i e_i, \\ de_i = \sum_j \omega_i^j e_j + \sum_{j,\alpha} h_{ij}^\alpha \omega^j e_\alpha, \\ de_\alpha = -\sum_{j,i} h_{ij}^\alpha \omega^j e_i + \sum_\beta \omega_\alpha^\beta e_\beta, \end{cases} \tag{6.65}$$

其中 $1 \le i, j, \cdots \le m; m+1 \le \alpha, \beta \le m+p$.

若 M 的余维数 $p=1$, 也就是 M 为超曲面. 在 M 上定义函数

$$S_M = < x, e_{m+1} >,$$

S_M 称为 M 的支撑函数. 若 M 的 n 个主曲率处处非零, 则称 M 的 Weingarten 变换 A 是非退化的.

定理 6.6 设 $x: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 的紧致连通超曲面, 则 M 为超球面当且仅当支撑函数为常数, 且 Weingarten 变换 A 非退化.

证明 必要性显然, 下面证明充分性.

局部选取 M 的主方向单位正交标架场 $\{e_i\}$, 即

$$B_{ij} = \lambda_i \delta_{ij},$$

其中 λ_i 为 M 的主曲率. 由于 $S_M = < x, e_{m+1} >$ 为常数, 故

$$0 = < dx, e_{m+1} > + < x, de_{m+1} > = < x, de_{m+1} > .$$

利用 (6.65) 的第三式, 上式可化为

$$\sum_i \lambda_i < x, e_i > \omega^i = 0$$

即

$$\lambda_i < x, e_i >= 0.$$

由于 $\lambda_i \neq 0$, 故 $< x, e_i >= 0$, 即位置向量 x 是 M 的法方向. 从而

$$d < x, x >= 2 < dx, x >= 0.$$

也就是位置向量 x 的长度是常数, 所以 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中超球面的一部分, 由于 M 紧致连通, 因此 M 为超球面. □

练习 6

1. 设 N 是黎曼流形, $S \subset M \subset N$ 是子流形. 证明: 如果 M 是 N 的全测地子流形, S 是 M 的全测地子流形, 则 S 也是 N 的全测地子流形.

2. 证明: 如果 M_i 是 N_i 的全测地子流形 $(i = 1, 2)$, 则 $M_1 \times M_2$ 是 $N_1 \times N_2$ 的全测地子流形.

3. 设 M 是 N 的 m 维等距浸入子流形, M 的一个法向量场 ξ 称为在法丛中平行, 若对任意 $X \in \Gamma(TM)$ 有 $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$. 设 ξ 的长度 $|\xi| \neq 0$, 并不妨令 $e_{m+1} = \frac{\xi}{|\xi|}$. 证明: 在单位正交标架下, ξ 在法丛中平行当且仅当 $|\xi|$ 为常数, 且 e_{m+1} 是平行的.

4. 在局部单位正交标架下, 记 H^{α} 为 $m \times m$ 矩阵 (h^{α}_{ij}). 证明: 若法向量场 e_{α} 在法丛中平行, 则

$$H^{\alpha} H^{\beta} = H^{\beta} H^{\alpha}.$$

5. 设 h 是子流形 M 的第二基本形式, 若对任意 $X \in \Gamma(TM)$, $\bar{\nabla}_X h = 0$, 则称 M 具有平行第二基本形式. 证明: M 有平行第二基本形式当且仅当 $h^{\alpha}_{ijk} = 0$.

6. 设 M 是 N 的 m 维等距浸入子流形, 若 M 的平均曲率向量 H 在法丛中平行, 则称 M 具有平行平均曲率向量. 证明: 在局部单位正交标架下, M 具有平行平均曲率向量当且仅当 $\sum_i h^{\alpha}_{iik} = 0$, 对一切 α, k 成立.

7. 设 M 是 N 的全测地超曲面, 证明 M 的单位法向量场关于 N 的 Levi-Civita 联络 $\bar{\nabla}$ 是平行的.

8. 设 N 是黎曼流形, $\phi : N \to N$ 是 N 上的一个等距变换. 如果 $M \subset N$ 是 ϕ 的不动点集合, 证明: M 上有自然诱导的光滑结构, 并且 M 关于诱导度量是 N 的全测地子流形.

9. 利用 Gauss 方程证明: $\mathbb{R}^{m+1}$ 中以 $r > 0$ 为半径的标准球面 $S^m(r)$ 具有常截面曲率 $c = \frac{1}{r^2}$.

10. 设 M 是黎曼流形 N 的浸入子流形, $\nabla^{\perp}$ 是 M 的法联络. 如果对于任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\nabla^{\perp}$ 的曲率算子 $R^{\perp}(X, Y) \equiv 0$, 则称 M 是具有平坦法丛的子流形. 证明: 如果 N 是常曲率空间, 则 M 具有平坦法丛当且仅当对每一点 $p \in M$, 都有 p 点附近的标架场 $\{e_i\}$, 使得对任意的 $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$, Weingarden 变换 A_{ξ} 在 $\{e_i\}$ 下的矩阵在 p 点是对角矩阵.

11. (Liebmann-Süss) 设 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中紧致连通定向超曲面, 证明: M 是超球面当且仅当 M 的支撑函数 S 有固定符号 (正或负), 并且 M 有常平均曲率.

参考文献

[1] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义 (第二版). 北京: 北京大学出版社. 2001.

[2] 白正国, 沈一兵等. 黎曼几何初步. 北京: 高等教育出版社.1992.

[3] Serge Lang. Introduction to Differentiable Manifolds (Second Edition). New York:Springer-Verlag, 2002.

[4] 陈维桓. 微分流形初步. 北京: 高等教育出版社. 2001.

[5] 尤承业. 基础拓扑学讲义. 北京: 北京大学出版社. 1997.

[6] W. M. Boothby. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (Second Edition). New York: Academic Press, Inc. 1986.

[7] 李养成，郭瑞芝，崔登兰. 微分流形基础. 北京: 科学出版社. 2011.

[8] Marcel Berger, Bernard Gostiaux. Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces (Second Edition). New York: Springer-Verlag, 2012.