$= Z(W(g(X,Y))) - Z(g(X,\nabla_W Y)) - W(g(X,\nabla_Z Y)) + \underline{g(X,\nabla_W \nabla_Z Y)}$

$-\left(W(Z(g(X,Y))) - W(g(X,\nabla_Z Y)) - Z(g(X,\nabla_W Y)) + \underline{g(X,\nabla_Z \nabla_W Y)}\right)$

$-\left([Z,W](g(X,Y)) - \underline{g(X,\nabla_{[Z,W]} Y)}\right)$

$= g(X, \nabla_W \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_W Y + \nabla_{[Z,W]} Y) = -g(X, R(Z,W)Y) = -g(R(Z,W)Y, X) = -R(Y,X,Z,W)$

（第二个分量固定，其它分量轮换）

(2) $R(X,Y,Z,W) + R(Z,Y,W,X) + R(W,Y,X,Z) = 0$ (由2) (4) 即得)

(3) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

由(2)有 $R(X,Y,Z,W) + \underline{R(Z,Y,W,X)} + R(W,Y,X,Z) = 0$

$\underline{R(Y,Z,W,X)} + R(W,Z,X,Y) + R(X,Z,Y,W) = 0$

相加得 $R(X,Y,Z,W) + R(W,Y,X,Z) + R(W,Z,X,Y) + R(X,Z,Y,W) = 0$

即 $R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y) = -(R(W,Y,X,Z) - R(X,Z,W,Y))$

同理有 $R(W,Y,X,Z) - R(X,Z,W,Y) = -(R(Z,Y,W,X) - R(W,X,Z,Y))$

$R(Z,Y,W,X) - R(W,X,Z,Y) = -(R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y))$

故 $R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y) = -(R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y))$

故 $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

补：流形上的反函数定理：设 M 和 N 都是 m 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射，$p \in M$，若 f 在点 p 的微分 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是同构，则存在点 p 在 M 中的一个开邻域 U，使得 $f|_U: U \to f(U)$ 是微分同胚。

流形上的隐函数定理：设 M, N 分别为 m 维和 n 维光滑流形，$n > m$，$f: N \to M$ 是光滑映射。若点 $q \in f(N)$ 是一个正则值，则点 q 的原像 $f^{-1}(\{q\})$ 是 N 的一个 $n-m$ 维子流形

切丛：设 M 是 m 维光滑流形，$\mathcal{A}$ 是 M 的极大坐标图册，令 $TM = \{(p,v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$，$\pi: TM \to M$，$(p,v) \mapsto p$ 是投影。$\forall p \in M$，纤维 $\pi^{-1}(\{p\})$ 是 M 在点 p 处的切空间 T_pM。称 (TM, M, π) 是 M 的切丛。