泛函作业题

第一章习题

14，证明：Banach 空间上的分别连续的多重线性泛函是共同连续的.

Proof:只需证明结论对两重线性泛函成立，再由归纳法即知结论对多重线性泛函也成立，下面来证它：

设 $f: X\times Y\to C$ 是 Banach 空间 $X\times Y$ 上的分别连续的线性泛函，点列 $\{x_n\}\in X,\{y_n\}\in Y, x_n\to x, y_n\to y$，则有：

$$|f(x_n,y_n)-f(x,y)|\le\left|f(x_n,y_n)-f(x_n,y)\right|+\left|f(x_n,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|f(x_n,y_n-y)\right|+\left|f(x_n-x,y)\right|$$

由 $f(\cdot,y)$ 连续得 $\left|f(x_n-x,y)\right|\to 0(n\to\infty)$，记 $f_n(y)=f(x_n,y),\forall y\in Y$，由 $x_n\to x$ 可得 $f_n(y)\to f(x,y),\forall y\in Y$，从而 $\sup\limits_n\left|f_n(y)\right|<\infty,\forall y\in Y$，则由一致有界原理可得 $\sup\limits_n\left\|f_n\right\|=M<\infty$，因此 $\left|f(x_n,y_n-y)\right|\le M\left\|y_n-y\right\|\to 0$，从而 $\left|f(x_n,y_n)-f(x,y)\right|\to 0$，故 f 是共同连续的.

16，证明：Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X^* 是自反的.

Proof:设 $J: X\to X^{**}$，$J_1: X^*\to X^{***}$ 分别为典型映射，必要性：若 X 自反，则 $J(X)=X^{**}$，任取 $F\in X^{***}$，定义 $x^*: X\to C$，满足，$x^*(x)=F(Jx)=F(x^{**})$，则易知 $x^*\in X^*$，又因为 $\forall x\in X$，$x^*(x)=x^{**}(x^*)=F(x^{**})$，从而有 $F=J_1x^*$，故典型映射 J_1 是满的，从而 X^* 自反.

充分性：设 X^* 自反，用反证法，假设 $J(X)\ne X^{**}$，记 $J(X)=X_0\subseteq X^{**}$ 是其真闭子空间（因为 J 是等距同构，且 X 完备），根据 Hahn-Banach 定理，存在 $x_0^{***}\in X^{***}$，满足 $\|x_0^{***}\|=1$，且 $\forall x^{**}\in X_0=J(X)$，$x_0^{***}(x^{**})=0$，由于 X^* 自反，典型映射 J_1 是满的等距同构映射，故存在 $x_0^*\in X^*$，满足，$x_0^{***}=J_1(x_0^*)$，且 $\|x_0^*\|=\|x_0^{***}\|=1$，但 $\forall x\in X, x_0^*(x)=x^{**}(x_0^*)=x_0^{***}(x^{**})=0$，从而 $x_0^*=0$ 与 $\|x_0^*\|=1$ 矛

盾，故必有$J(X)=X^{**}$，即X自反.

19,设H是一可分的 Hilbert 空间，其正规正交基为$\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$，设$\{x_n\}$是H中的一个序列，证明下列两个陈述等价：

（1）对任给的$x\in H$，$(x,x_n)\to 0$；

（2）对每个$m=1,2,\cdots$，$(e_m,x_n)\to 0(n\to\infty)$，并且$\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$有界.

Proof: $(1)\Rightarrow(2)$，由(1)，特殊地，分别取$x=e_m,m=1,2,\cdots$，即得对每个$m=1,2,\cdots$，$(e_m,x_n)\to 0(n\to\infty)$，显然对每个$n$，$(x_n,\cdot)$是$H$上的连续线性泛函，该泛函范数恰好为$\|x_n\|$，$\forall x\in X$，由$(x_n,x)\to 0$知$\{|(x_n,x)|\}_{n=1}^{\infty}$有界，则由一致有界原理得$\sup\limits_{n}\|x_n\|<\infty$.

$(2)\Rightarrow(1)$，由$\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$有界，则其有聚点$\hat{x}$，设$x_{n_k}\to\hat{x}$，则有

$\lim\limits_{k\to\infty}(e_m,x_{n_k})=(e_m,\hat{x})=0$，即$\hat{x}$与每个基底$e_m$正交，则$\hat{x}=0$，从而$\{x_n\}$的聚点只能是$0$，故$x_n\to 0$，则$(x,x_n)\to(x,0)=0$.

26,设X,Y_1,Y_2均为 Banach 空间，$T_1:D(T_1)\to Y_1$，$T_2:D(T_2)\to Y_2$都是闭线性算子，且有$D(T_1)\subseteq D(T_2)$，证明：存在正数C使得对任意$x\in D(T_1)$，

$$\|T_2x\|\le C(\|x\|+\|T_1x\|).$$

Proof：考虑T_1的图$G(T_1)=\{\langle x,T_1x\rangle:x\in D(T_1)\}$，定义算子$T:G(T)\to Y_2$，满足：$T(\langle x,T_1x\rangle)=T_2x$，容易验证$T$是线性的，由于$T_1$,$T_2$都是闭线性算子，据闭图形定理可知$T_1,T_2$都是连续的，从而$T$也连续，即$T$有界，于是存在$C>0$，使得对任意的$x\in D(T_1)$，有：$\|T(\langle x,T_1x\rangle)\|\le C\|\langle x,T_1x\rangle\|$，此即：

$$\|T_2x\|\le C(\|x\|+\|T_1x\|).$$

第二章习题：

6. 令 X 是紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{B}$ 是 $C_R(X)$ 的闭理想，令 $Y=\{x: f(x)=0, f\in\mathcal{B}\}$，证明：$Y$ 是闭的，并且 $\mathcal{B}=\{f\in C_R(X): f|_Y=0\}$.

Proof：由 f 的连续性知 Y 的闭性是显然的，由 Y 的定义显然有包含关系 $\mathcal{B}\subset\{f\in C_R(X): f|_Y=0\}$ 成立，下证反包含关系成立，任取 $f_0\in C_R(X)$，$f_0|_Y=0$，由于 $\mathcal{B}$ 是闭理想，如果 $f_0\notin\mathcal{B}$，根据 Hahn-Banach 定理，则存在 $x_0^{**}\in X^{**}$，使得 $x_0^{**}(f)=f(x_0)=0$，$\forall f\in\mathcal{B}$，但 $x_0^{**}(f_0)=f_0(x_0)=1$，这得出矛盾，因为有 $x_0\in Y$，$f_0|_Y=0$，但 $f_0(x_0)=1\neq 0$，从而相反包含关系成立.

16. 设 $(X,\mathcal{P})$ 是局部凸空间，f 是 X 上线性泛函，证明下列陈述等价：

Proof: $(1)\Rightarrow(2)$ 显然，由于 f 是线性的，$(2)\Rightarrow(3)$ 也是显然的，$(3)\Rightarrow(4)$ 也显然，下证 $(4)\Rightarrow(5)$，假设 f 不连续，即 f 无界，则 $\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=\infty$，因此存在点列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\|=1$，但 $|f(x_n)|\to\infty$，令 $y_n=\dfrac{x_n}{f(x_n)}-\dfrac{x_1}{f(x_1)}$，则有 $f(y_n)=1-1=0$，因此由 $\ker f$ 是闭集有 $y_n\to-\dfrac{x_1}{f(x_1)}\in\ker f$，但 $-\dfrac{x_1}{f(x_1)}\notin\ker f$，矛盾，因此 f 连续，从而 $p(x)$ 连续，$p(x)$ 为半范数只需按定义验证即可得到. $(5)\Rightarrow(6)$ 和 $(6)\Rightarrow(1)$ 参看书上 62 页定理 2.2.2 证明即可.

20. （1），待续.（2）嘛找个特例就行.

（3），假设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 和 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是网，设 $A_\alpha{}^*\xrightarrow{s}A^*$，$B_\alpha\xrightarrow{s}B$，证明：$A_\alpha B_\alpha\xrightarrow{w}AB$.

Proof：由三角不等式：$|f(A_\alpha B_\alpha)-f(AB)|\le|f(A_\alpha(B_\alpha-B))|+|f((A_\alpha-A)B)|$

$|f((A_\alpha-A)B)|=|(A_\alpha^*-A^*)f(B)|\to 0$，这是因为 $A_\alpha{}^*\xrightarrow{s}A^*$（强收敛），至于 $|f(A_\alpha(B_\alpha-B))|$，应用一致有界原理可得它也趋于 0,具体操作看第一章习题 14，这个的想法跟那道题一模一样,略写.

（4），设 A_n, B_n 是使得 $A_n\xrightarrow{s}A$，$B_n\xrightarrow{s}B$ 的序列，证明：$A_nB_n\xrightarrow{s}AB$.

Proof：同样利用三角不等式分两段分别加以控制，具体为：

$\|A_nB_nx-ABx\|\le\|A_n(B_n-B)x\|+\|(A_n-A)Bx\|$，前面一部分同样利用

一致有界原理和$B_n \xrightarrow{s} B$知其趋于 0，后一部分直接由$A_n \xrightarrow{s} A$得其趋于 0.

（5），自己找个反例吧，实在不行从别的参考书上找.

23. 设X,Y是赋范线性空间，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$，定义：$T':Y^* \to X^*$，$[T'f](x)=f(Tx)$，证明：

（1）在给定X^*和Y^*弱$*$拓扑下，T'是连续的.

（2）在给定X和Y的弱拓扑下，T是连续的.

Proof： （1），设在Y^*弱$*$拓扑下，有序列$\{f_n\}\in Y^*$，$f \in Y^*$，$f_n \to f$，这等价于$\lim_n p_y(f_n - f)=0$，$\forall y \in Y$，即$|f_n(y)-f(y)| \to 0$，$\forall y \in Y$，在X^*弱$*$拓扑下，$T'f_n \to T'f$等价于$\lim_n p_x(T'f_n - T'f)=0$，$\forall x \in X$，此即$|[T'f_n - T'f](x)| \to 0$，$\forall x \in X$，即$|f_n(Tx)-f(Tx)| \to 0$，$\forall x \in X$，由前面$f_n$在$Y^*$弱拓扑下的收敛性得这是自然成立的，因此$T'$连续.

（2），设在X的弱拓扑下，有序列$\{x_n\}\in X$，$x \in X$，$x_n \to x$，这等价于$\lim_n p_f(x_n - x)=0, \forall f \in X^*$，也即$f(x_n) \to f(x), \forall f \in X^*$，即$x_n \xrightarrow{w} x$，在$Y$弱拓扑下，同样$Tx_n \to Tx$等价于$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$，即：

$$|y^*(Tx_n)-y^*(Tx)|=|(T'y^*)(x_n)-(T'y^*)(x)| \to 0,\quad \forall y^* \in Y^*$$

该式自然成立，因为只需在$x_n \xrightarrow{w} x$的表述中取$f=T'y^*$即可.

第三章习题：

5. 证明：作为$C[0,1]$上的映射，Volterra 积分算子：

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)dt$$

的谱半径等于 0，$\|T\|=1$.

Proof:设$f \in C[0,1]$，$\|f\|=\max_{0\le t\le 1}|f(t)|$，对任意的$x \in [0,1]$，

$$|(Tf)(x)| \le \int_0^x |f(t)|dt \le \|f\|\int_0^x 1dt = \|f\|x,$$

$$|(T^2 f)(x)| \le \int_0^x |(Tf)(t)|dt \le \|f\|\int_0^x tdt = \frac{1}{2}x^2\|f\|,$$

$$\cdots$$

由归纳法可得：$|(T^n f)(x)| \le \frac{1}{n!}x^n\|f\|, \forall x \in [0,1]$，从而：$\|T^n\| \le \frac{1}{n!}$，则

$0 \le r(T) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$，故谱半径 $r(T)=0$，由前面证明知：

$\|Tf\| \le \|f\|, \forall f \in C[0,1]$，从而 $\|T\| \le 1$，取 $f \equiv 1 \in C[0,1]$，$\|f\|=1$，有 $\|Tf\|=1$，因此有 $\|T\|=1$.

6. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 是收敛半径为 R 的幂级数，$0<R\le\infty$，H 是 Hilbert 空间，如果 $T\in\mathcal{L}(H)$，$\|T\|<R$，证明：存在 $S\in\mathcal{L}(H)$，使得对任意的 x，$y\in H$，有：

$$(Sx,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(T^n x,y).$$

Proof:由 $(Sx,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(T^n x,y)=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n T^n x,y)$，定义 $Sx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n T^n x$，$\forall x\in H$，只需证明这样定义的 S 有意义而且是 H 上的有界线性算子即可，因为：

$$\|Sx\| \le \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\|T^n x\| \le \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\|T\|^n\|x\|,$$

因 $\|T\|<R$，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\|T\|^n<\infty$，即 S 有界，而且 Hilbert 空间 H 是完备的赋范线性空间，它中绝对收敛的级数（按范数收敛）必收敛，从而 $Sx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n T^n x$ 有定义，故 $S\in\mathcal{L}(H)$.

7. （1），如果 T 是 Hilbert 空间 H 上的正规算子，证明：T 是单射当且仅当 T 有稠值域.

Proof：Hilbert 空间 H 是自反的，$(\ker T^*)^{\perp}=cl(RanT)$，由此可知 T 是稠值域的当且仅当 T^* 是单射，又由 $T^*T=TT^*$ 可知 T 是单射当且仅当 T^* 是单射.

（2），给出 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子 S，使得 $\ker S=\{0\}$，但 $cl(RanS)\ne H$.

解：取 Hilbert 空间 $H=l^2$，考虑右移位算子 $S(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$，显然有 $\ker S=\{0\}$，S 稠值域当且仅当 S^* 是单射，但 $S^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$ 显然不

是单射，故S不是稠值域的.

（3），给出 Hilbert 空间H上的有界线性算子S，使得$\ker S\neq\{0\}$，但S是稠值域的.

解：仍取 Hilbert 空间$H=l^2$，考虑左移位算子$S(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$，显然$S$不是单射，令$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，则有$(S\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{i+1}\overline{\eta_i}$，定义$S^*(\eta_1,\eta_2,\cdots)=(0,\eta_1,\eta_2,\cdots)$，从而验证可知$(\xi,S^*\eta)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{i+1}\overline{\eta_i}=(S\xi,\eta)$，由共轭算子的唯一性知这样定义的$S^*$是$S$的共轭算子，显然$S^*$是单射，从而$S$是稠值域的.

10. P,Q是 Hilbert 空间H上的正交投影算子，给出$P-Q$是正交投影的充要条件.

解：正交投影算子当且仅当它是自伴的、幂等的，从而有$P^2=P,P^*=P$，$Q^2=Q,Q^*=Q$，因为$(P-Q)^*=P^*-Q^*=P-Q$，即$P-Q$是自伴的，因此只需当它是幂等的即为正交投影，$(P-Q)^2=P^2-(PQ+QP)+Q^2=P-(PQ+QP)+Q$，要使之等于$P-Q$，即需$(I-P)Q=Q(P-I)$.

15. 设X为 Banach 空间，$T\in\mathcal{L}(X)$，$0\neq\lambda\in C$，若对任何$x\in X$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{n-1}x}{\lambda^n}$都收敛（按范数收敛），证明：$\lambda\in\rho(T)$.

Proof：形式上$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{I-\frac{T}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{n-1}}{\lambda^n}$，从而对任何$x\in X$，有$(\lambda I-T)^{-1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{n-1}x}{\lambda^n}$，右边级数按范数收敛，即绝对收敛，$X$是 Banach 空间，从而级数本身收敛，从而$(\lambda I-T)$有有界逆，因此$\lambda\in\rho(T)$.

16. 设H是 Hilbert 空间，$T\in\mathcal{L}(H)$，称$W(T)=\{(Tx,x):\|x\|=1\}$为T的数值域，证明：$\sigma(T)\subset clW(T)$.

Proof：（1），若$\lambda\in\sigma_p(T)$，即存在$x\neq0$，使得$Tx=\lambda x$，将x单位化，则有

$\|x\|=1$，$(Tx,x)=(\lambda x,x)=\lambda$，即 $\lambda\in W(T)$.

（2），若 $\lambda\in\sigma_{re}(T)$，即 $H_0=cl(Ran(\lambda I-T))\neq H$，从而 H_0 是 H 中闭子空间，根据 Hahn-Banach 定理，存在线性泛函 $f\in H^*$，$f(y)=0,\forall y\in H_0$，由 Riesz 表现定理，存在 $z_f\in H$，使得 $f(y)=(y,z_f),\forall y\in H$，因此 $(\lambda x-Tx,z_f)=0,\forall x\in H$，特殊地，取 $x=\frac{z_f}{\|z_f\|}$，则有：$\|x\|=1$，$(\lambda\frac{z_f}{\|z_f\|},z_f)=(T\frac{z_f}{\|z_f\|},z_f)$，从而有 $\lambda=(\lambda x,x)=(Tx,x)$，$\lambda\in W(T)$.

（3），若 $\lambda\in\sigma_c(T)$，从而 $cl(Ran(\lambda I-T))=H$，$Ran(\lambda I-T)\neq H$，因 $0\in H$，则有有界点列 $\{x_n\}\in H$，使得 $(\lambda x_n-Tx_n)\to 0$，不妨设 $\|x_n\|=1$，否则将其单位化，从而有 $\lim\limits_n(Tx_n,x_n)=\lim\limits_n(\lambda x_n,x_n)=\lambda$，即 $\lambda\in cl(W(T))$.

17.设 X 是赋范线性空间，$T\in\mathcal{L}(H)$，证明 $\partial\sigma(T)\subset\sigma_{ap}(T)$.

Proof:设 $\lambda\in\partial\sigma(T)$，因此存在点列 $\lambda_n\notin\sigma(T),\lambda_n\to\lambda$，取点列 $\|x_n\|=1$，考虑 $\|(\lambda_n I-T)x_n\|$，若 $\exists\delta>0$，使得 $\|(\lambda_n I-T)x_n\|\geq\delta$，即 $\|\lambda_n I-T\|\geq\delta$，由于：

$1=\|x_n\|=\|(\lambda_n I-T)(\lambda_n I-T)^{-1}x_n\|\geq\delta\|(\lambda_n I-T)^{-1}x_n\|$，则 $\|(\lambda_n I-T)^{-1}\|\leq\frac{1}{\delta}$，又因为 $\lambda_n\in\rho(T)$，即 $(\lambda_n I-T)$ 可逆，

$$\lambda I-T=-[(\lambda_n-\lambda)I-(\lambda_n I-T)]=-(\lambda_n I-T)^{-1}[(\lambda_n-\lambda)(\lambda_n I-T)-I]$$

因此当 $\|(\lambda_n-\lambda)(\lambda_n I-T)\|<1$，即 $|\lambda_n-\lambda|<\frac{1}{\|\lambda_n I-T\|}\leq\frac{1}{\delta}$ 时，$(\lambda I-T)$ 也是可逆的，这表明 $\lambda\in\rho(T)$，矛盾，故必有 $\|(\lambda_n I-T)x_n\|\to 0$，则：

$$\|(\lambda I-T)x_n\|\leq\|(\lambda-\lambda_n)x_n\|+\|(\lambda_n I-T)x_n\|\to 0,$$

即 $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$.

36.设 $\mathcal{A}$ 是有单位元的复 Banach 代数，则不可能有其中的两个元 x,y，使得 $xy-yx=e$.

Proof:假设存在x, y使得$xy - yx = e$，从而$xy = e + yx$，由于：

$\lambda e - (e + yx) = (\lambda - 1)e + yx$，$\Rightarrow \sigma(e + yx) = 1 + \sigma(yx)$，从而$\sigma(xy) = 1 + \sigma(yx)$，但是$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$，矛盾，故不存在这样的$x, y$.