

样条函数

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

样条函数

1 Why Splines?

样条函数

1 Why Splines?

2 一元样条函数

样条函数

- 1 Why Splines?
- 2 一元样条函数
- 3 三次样条插值

样条函数

- 1 Why Splines?
- 2 一元样条函数
- 3 三次样条插值
- 4 一元B样条函数

样条函数

- 1 Why Splines?
- 2 一元样条函数
- 3 三次样条插值
- 4 一元B样条函数
- 5 二元样条简介

Runge现象

例

已知区间 $[-1, 1]$ 上函数 $f(x) = \frac{1}{1+(5x)^2}$. 取等距节点

$$x_i = -1 + \frac{i}{5}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$$

并作 $Lagrange$ 插值多项式

$$L_{10}(x) = \sum_{i=0}^{10} f(x_i) l_i(x).$$

Runge现象

例

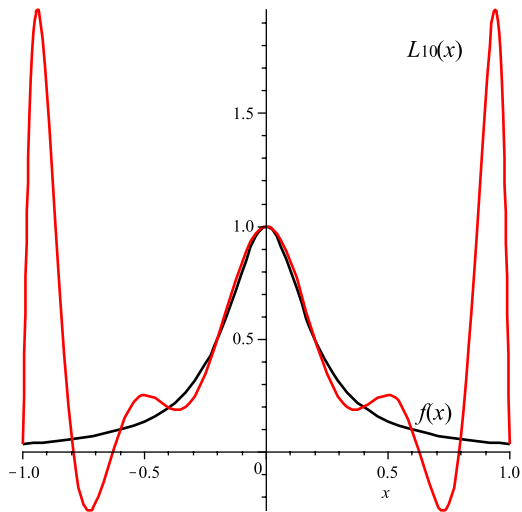
已知区间 $[-1, 1]$ 上函数 $f(x) = \frac{1}{1+(5x)^2}$. 取等距节点

$$x_i = -1 + \frac{i}{5}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$$

并作 $Lagrange$ 插值多项式

$$L_{10}(x) = \sum_{i=0}^{10} f(x_i) l_i(x).$$

从图中可以看出,在 $x = 0$ 附近, $L_{10}(x)$ 能较好地逼近 $f(x)$,但在有些地方,如在 $[-1, -0.8]$ 和 $[0.8, 1]$ 之间, $L_{10}(x)$ 与 $f(x)$ 差异很大,这种现象被称为 $Runge$ 现象.



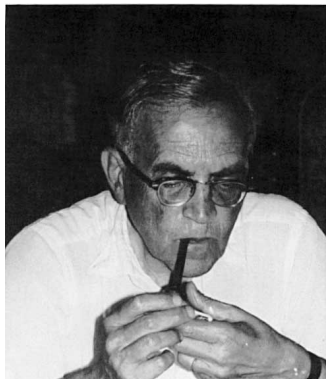
样条的来源

样条的英语单词“**spline**”来源于可变形的样条工具，那是一种在造船和工程制图时用来画出光滑形状的工具。在中国大陆，早期曾经被称做“齿函数”，后来因为工程学术语中“放样”一词而得名。

早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，且在结点处具有连续的曲率，然后沿木条画下曲线，成为**样条曲线**。

B样条简史

1. 均匀节点意义下的一元**B样条**(B-splines, Basis Splines缩写)是在1946年由**I. J. Schoenberg**系统提出的.



B样条简史

Schoenberg提出了样条函数的概念，并指出了样条函数非常重要的四种观点：**Fourier变换、截断多项式的差商、力学观点以及概率密度函数**的观点。

[1] I. J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Quart. Appl. Math. 4 (1946) 45-99, 112-141.

B样条简史

2. 非均匀节点定义的B样条由**Curry**在1947年提出.

[2] H. Curry. Review. Math. Tables Aids Comput., 2:167-169, 211-213, 1947.

B样条简史

2. 非均匀节点定义的B样条由**Curry**在1947年提出.
3. 在上个世纪60年代开始, 美国General Motors Research labs的数学家**Carl de Boor**利用B-样条作为工具研究几何表示. 1972年, de Boor给出了一种计算B样条曲线上点的迭代方法, 即著名的**de Boor 算法** [3].

[2] H. Curry. Review. Math. Tables Aids Comput., 2:167-169, 211-213, 1947.

[3] C. de Boor. On calculating with B-splines. J. Approx. Theory, 6(1):50-62, 1972.

B样条简史

4. 1972年，**de Boor**与Cox分别独立提出了计算B样条基函数的公式，这个公式对B样条作为CAGD重要工具起到了至关重要的作用，称之为**de Boor-Cox公式**。在此之前，计算B样条基函数大多用差分方法计算，数值上可能不稳定。

[4] M. Cox. The numerical evaluation of B-splines. J Inst. Maths. Applics., 10:134-149, 1972.

B样条简史

5. 样条函数在逼近论中用重要的作用，但是对CAGD而言，参数曲线曲面表示就更加重要。1974年，在Schoenberg工作的基础上，**Gordon**与**Riesenfeld** 引入了**B-Spline曲线曲面**，并给出了大量的几何算法，这个工作也是Riesenfeld博士论文[5]的核心。他们指出，de Boor算法是de Casteljau算法的推广形式。

[5] R. Riesenfeld. Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design. PhD thesis, Dept. of Computer Science, Syracuse Univ, 1973.

[6] W. Gordon and R. Riesenfeld. B-spline curves and surfaces. In R. E. Barnhill and R. F. Riesenfeld, editors, Computer Aided Geometric Design, pages 95-126. Academic Press, 1974.

样条发展简史

6. 1975年, 王仁宏教授[7]提出了研究多元样条的**光滑余因子方法**, 这是一种代数几何方法, 被国际上称为研究样条的三大流派之一。

[7] 王仁宏, 多元齿的结构与插值, 数学学报, 1975, 18, 91-106.

B样条简史

7. B样条保持了Bézier曲线曲面的所有有点，并克服了它们的缺点. **Boehm**[8]是第一位给出B样条到Bézier转化关系的学者。

[8] W. Boehm. Cubic B-spline curves and surfaces in computer aided geometric design. Computing, 19(1): 29-34, 1977.

B样条简史

7. B样条保持了Bézier曲线曲面的所有有点，并克服了它们的缺点. **Boehm**[8]是第一位给出B样条到Bézier转化关系的学者。随后，一些相关算法大量涌现，期中包括著名的**Boehm**节点插入算法[9], 以及**Cohen, Lyche**与**Riesenfeld**提出的**Oslo**算法[10].

[8] W. Boehm. Cubic B-spline curves and surfaces in computer aided geometric design. Computing, 19(1): 29-34, 1977.

[9] W. Boehm. Inserting new knots into B-spline curves. Computer Aided Design, 12(4): 199-201, 1980.

[10] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics. Comp. Graphics and Image Process., 14(2): 87-111, 1980.

一元 n 次样条

定义

若给定一组节点

$$-\infty \leq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b \leq \infty \quad (2.1)$$

构成区域 $[a, b]$ 上的一个剖分 Δ . 如果 Δ 上的分段多项式函数 $S(x)$ 满足:

一元 n 次样条

定义

若给定一组节点

$$-\infty \leq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b \leq \infty \quad (2.1)$$

构成区域 $[a, b]$ 上的一个剖分 Δ . 如果 Δ 上的分段多项式函数 $S(x)$ 满足:

- (1) 于每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \cdots, N$)上, $S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数多项式,

一元 n 次样条

定义

若给定一组节点

$$-\infty \leq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b \leq \infty \quad (2.1)$$

构成区域 $[a, b]$ 上的一个剖分 Δ . 如果 Δ 上的分段多项式函数 $S(x)$ 满足:

- (1) 于每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \cdots, N$)上, $S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数多项式,
- (2) $S(x) \in C^{n-1}[a, b]$,

一元 n 次样条

定义

若给定一组节点

$$-\infty \leq a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b \leq \infty \quad (2.1)$$

构成区域 $[a, b]$ 上的一个剖分 Δ . 如果 Δ 上的分段多项式函数 $S(x)$ 满足:

- (1) 于每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \cdots, N$)上, $S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数多项式,
- (2) $S(x) \in C^{n-1}[a, b]$,

则称 $S(x)$ 为一元 n 次样条函数. 把以(2.1)为结点的 n 次样条函数类记为 $\mathbb{S}_n(\Delta)$, 而 x_1, \cdots, x_N 称为(内部)样条节点, x_0, x_{N+1} 称为边界节点.

样条函数的结构特征

设 $S(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上是 n 次多项式 $p_0(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上是 $p_1(x)$.

样条函数的结构特征

设 $S(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上是 n 次多项式 $p_0(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上是 $p_1(x)$.

样条函数的结构特征

设 $S(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上是 n 次多项式 $p_0(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上是 $p_1(x)$. 考虑下述 n 次多项式

$$\eta(x) = p_1(x) - p_0(x).$$

样条函数的结构特征

设 $S(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上是 n 次多项式 $p_0(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上是 $p_1(x)$. 考虑下述 n 次多项式

$$\eta(x) = p_1(x) - p_0(x).$$

按 n 次样条函数的定义, $p_0(x)$ 与 $p_1(x)$ 于点 $x = x_1$ 处的函数值以及1阶、2阶、一直到 $n - 1$ 阶导数值皆相等,

样条函数的结构特征

设 $S(x)$ 在子区间 $[x_0, x_1]$ 上是 n 次多项式 $p_0(x)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上是 $p_1(x)$. 考虑下述 n 次多项式

$$\eta(x) = p_1(x) - p_0(x).$$

按 n 次样条函数的定义, $p_0(x)$ 与 $p_1(x)$ 于点 $x = x_1$ 处的函数值以及1阶、2阶、一直到 $n - 1$ 阶导数值皆相等, 因此

$$p_0^{(i)}(x_1) = p_1^{(i)}(x_1), \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

亦即

$$\eta^{(i)}(x_1) = 0, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

样条函数的结构特征

故 $\eta(x)$ 含 $(x - x_1)^n$ 这个因子. 由于 $\eta(x)$ 为 n 次多项式, 所以存在某常数 c_1 使得

$$\eta(x) = c_1(x - x_1)^n,$$

即

$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)^n. \quad (2.2)$$

样条函数的结构特征

故 $\eta(x)$ 含 $(x - x_1)^n$ 这个因子. 由于 $\eta(x)$ 为 n 次多项式, 所以存在某常数 c_1 使得

$$\eta(x) = c_1(x - x_1)^n,$$

即

$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)^n. \quad (2.2)$$

这说明 $S(x)$ 于区间 $[x_1, x_2]$ 上的表达式恰为其前一区间上的表达式加上 $(x - x_1)^n$ 的某一常数倍.

样条函数的结构特征

这样一来, $S(x)$ 于 $[x_0, x_2]$ 上的统一表达式应为

$$S(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ p_0(x) + c_1(x - x_1)^n, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases} \quad (2.3)$$

样条函数的结构特征

这样一来, $S(x)$ 于 $[x_0, x_2]$ 上的统一表达式应为

$$S(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ p_0(x) + c_1(x - x_1)^n, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases} \quad (2.3)$$

为把(2.3)写成一个统一的表达式, 引入截断幂函数

$$x_+ = \max\{0, x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$
$$x_+^m = (x_+)^m.$$

样条函数的结构特征

于是(2.3)所示的 $S(x)$ 可紧凑地表示为

$$S(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)_+^n, \quad x \in [x_0, x_2].$$

样条函数的结构特征

于是(2.3)所示的 $S(x)$ 可紧凑地表示为

$$S(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)_+^n, \quad x \in [x_0, x_2].$$

继续采用这种分析方法,可得 $S(x)$ 于整个区域上的表达式为

$$S(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i (x - x_i)_+^n, \quad x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

样条函数的结构特征

于是(2.3)所示的 $S(x)$ 可紧凑地表示为

$$S(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)_+^n, \quad x \in [x_0, x_2].$$

继续采用这种分析方法,可得 $S(x)$ 于整个区域上的表达式为

$$S(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i(x - x_i)_+^n, \quad x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

显然,由(2.4)式所给出的任一函数 $S(x)$ 必然满足 n 次样条函数的定义2.1, 亦即 $S(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$.

样条函数的结构特征

定理

$S(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$ 的充要条件为, 存在 $p_0(x) \in \mathbb{P}_n$ 和 N 个实数 c_1, c_2, \dots, c_N ,使得

$$S(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i (x - x_i)_+^n, \quad x \in [a, b]. \quad (2.5)$$

样条函数的结构特征

定理

$S(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$ 的充要条件为, 存在 $p_0(x) \in \mathbb{P}_n$ 和 N 个实数 c_1, c_2, \dots, c_N , 使得

$$S(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i (x - x_i)_+^n, \quad x \in [a, b]. \quad (2.5)$$

常数 $c_i \in \mathbb{R}$ 称为样条节点 x_i 上的**光滑余因子**, $c_i(x - x_i)^n$ 称为在样条节点 x_i 上的**跳跃量**. 显然, 只有内部样条节点上有光滑余因子与跳跃量存在.

样条函数的结构特征

推论

样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为

$$\dim(S_n(\Delta)) = N + n + 1,$$

样条函数的结构特征

推论

样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为

$$\dim(S_n(\Delta)) = N + n + 1,$$

且函数系

$$1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n$$

构成 n 次样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的一组基底.

自然样条函数

如果一个 $2n - 1$ 次样条函数 $N(x)$,在区间 $[x_0, x_1]$ 与 $[x_N, x_{N+1}]$ 上的表达式都是 $n - 1$ 次多项式(并不要求该两个 $n - 1$ 次多项式相同),则称之为 $2n - 1$ 次的**自然样条函数**.

自然样条函数

如果一个 $2n - 1$ 次样条函数 $N(x)$,在区间 $[x_0, x_1]$ 与 $[x_N, x_{N+1}]$ 上的表达式都是 $n - 1$ 次多项式(并不要求该两个 $n - 1$ 次多项式相同),则称之为 $2n - 1$ 次的自然样条函数.

在 Δ 上的所有 $2n - 1$ 次自然样条函数集合记为 $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$, 显然

$$\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta) \subset \mathbb{S}_{2n-1}(\Delta). \quad (2.6)$$

自然样条函数的结构特征

任一自然样条 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 均可表示为

$$N(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1}, \quad x \in [a, b], \quad (2.7)$$

其中 $p_0(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$.

自然样条函数的结构特征

任一自然样条 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 均可表示为

$$N(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1}, \quad x \in [a, b], \quad (2.7)$$

其中 $p_0(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$.

注意仅满足上式还不足以为保证函数 $N(x)$ 是一个自然样条函数.

自然样条函数的结构特征

任一自然样条 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 均可表示为

$$N(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1}, \quad x \in [a, b], \quad (2.7)$$

其中 $p_0(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$.

注意仅满足上式还不足以为保证函数 $N(x)$ 是一个自然样条函数. 还要求 $N(x)$ 于 $[x_N, x_{N+1}]$ 中的表达式

$$p_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)^{2n-1}$$

也为 $n-1$ 次多项式.

自然样条函数的结构特征

即须要求

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)^{2n-1} &= \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i (-x_j)^{2n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j (-x_j)^{2n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j x_j^{2n-1-i}.
 \end{aligned}$$

中 x^n, \dots, x^{2n-1} 的系数均为0,

自然样条函数的结构特征

即须要求

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)^{2n-1} &= \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i (-x_j)^{2n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j (-x_j)^{2n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^N c_j x_j^{2n-1-i}.
 \end{aligned}$$

中 x^n, \dots, x^{2n-1} 的系数均为0, 即

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

自然样条函数的结构特征

定理

为使 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$,

自然样条函数的结构特征

定理

为使 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$, 必须且只须存在 $p_0(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ 和满足线性约束

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

的实数 c_1, c_2, \dots, c_N ,

自然样条函数的结构特征

定理

为使 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$, 必须且只须存在 $p_0(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ 和满足线性约束

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

的实数 c_1, c_2, \dots, c_N , 使得

$$N(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j (x - x_j)_+^{2n-1}, \quad x \in [a, b]. \quad (2.10)$$

自然样条函数空间的维数

可以验证, $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 也构成一个线性空间.

自然样条函数空间的维数

可以验证, $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 也构成一个线性空间.

空间 $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 的维数由如下两个因素构成: $p_0(x)$ 的自由度与线性约束方程组(2.9)解空间的维数.

自然样条函数空间的维数

可以验证, $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 也构成一个线性空间.

空间 $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 的维数由如下两个因素构成: $p_0(x)$ 的自由度与线性约束方程组(2.9)解空间的维数.

方程组(2.9)的系数矩阵为 $n \times N$ 阶, 当 $1 \leq n \leq N$ 时, 由于样条节点两两不同, 矩阵行满秩, 即矩阵的秩为 n . 从而方程组解空间的维数为 $N - n$.

自然样条函数空间的维数

可以验证, $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 也构成一个线性空间.

空间 $\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 的维数由如下两个因素构成: $p_0(x)$ 的自由度与线性约束方程组(2.9)解空间的维数.

方程组(2.9)的系数矩阵为 $n \times N$ 阶, 当 $1 \leq n \leq N$ 时, 由于样条节点两两不同, 矩阵行满秩, 即矩阵的秩为 n . 从而方程组解空间的维数为 $N - n$.

$\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 的维数为

$$\dim(\mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)) = n + (N - n) = N.$$

恰好等于内部节点的个数.

自然样条函数插值的存在唯一性

定理

设 $1 \leq n \leq N$, 则对任意给定的 y_1, y_2, \dots, y_N , 存在唯一的自然样条函数 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$, 使得

$$N(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

自然样条函数插值的存在唯一性

定理

设 $1 \leq n \leq N$, 则对任意给定的 y_1, y_2, \dots, y_N , 存在唯一的自然样条函数 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$, 使得

$$N(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

证明: 证明满足插值与约束条件方程组对应的齐次方程组只有零解即可, 具体过程省略。

自然样条函数插值的最光滑性质

定理

给定区间 $[a, b]$ 及其剖分 Δ 。设 $1 \leq n \leq N$.

自然样条函数插值的最光滑性质

定理

给定区间 $[a, b]$ 及其剖分 Δ 。设 $1 \leq n \leq N$ 。如果 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 是满足插值条件

$$N(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

的自然样条函数,

自然样条函数插值的最光滑性质

定理

给定区间 $[a, b]$ 及其剖分 Δ 。设 $1 \leq n \leq N$ 。如果 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 是满足插值条件

$$N(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

的自然样条函数, 那么对任何满足插值条件

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N$$

的函数 $f(x) \in C^n[a, b]$,

自然样条函数插值的最光滑性质

定理

给定区间 $[a, b]$ 及其剖分 Δ 。设 $1 \leq n \leq N$ 。如果 $N(x) \in \mathbb{N}_{2n-1}(\Delta)$ 是满足插值条件

$$N(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

的自然样条函数, 那么对任何满足插值条件

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, N$$

的函数 $f(x) \in C^n[a, b]$, 必有

$$\int_a^b \left[N^{(n)}(x) \right]^2 dx \leq \int_a^b \left[f^{(n)}(x) \right]^2 dx, \quad (2.12)$$



自然样条函数插值的最光滑性质

若于定理中取 $n = 2$, 则有

$$\int_a^b [N''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (2.13)$$

自然样条函数插值的最光滑性质

若于定理中取 $n = 2$, 则有

$$\int_a^b [N''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (2.13)$$

我们知道, 一个函数当其一阶导数较小时, 其二阶导数与其曲率值是很接近的

$$y'' \approx \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

而曲率小在几何上理解为“平滑”也是很自然的, 因此常称自然样条函数插值是最“光滑”曲线插值.

样条函数插值问题

样条空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为 $N + n + 1$ ，不等于内部节点个数.

样条函数插值问题

样条空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为 $N + n + 1$ ，不等于内部节点个数.

样条函数的插值问题:

样条函数插值问题

样条空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为 $N + n + 1$ ，不等于内部节点个数.

样条函数的插值问题: 对于给定点列

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{N+n+1} \leq b, \quad (2.14)$$

与任意给定的一组实数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$,

样条函数插值问题

样条空间 $S_n(\Delta)$ 的维数为 $N + n + 1$, 不等于内部节点个数.

样条函数的插值问题: 对于给定点列

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{N+n+1} \leq b, \quad (2.14)$$

与任意给定的一组实数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$, 是否存在唯一的 n 次样条函数 $S(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$, 使得

$$S(\xi_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N + n + 1 \quad (2.15)$$

成立?

样条函数插值的存在唯一性

定理

对任意给定的 $y_1, y_2, \dots, y_{N+n+1}$, 样条插值问题有唯一解, 必须且只需由式(2.14)定义的插值节点满足

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

样条函数插值的存在唯一性

定理

对任意给定的 $y_1, y_2, \dots, y_{N+n+1}$, 样条插值问题有唯一解, 必须且只需由式(2.14)定义的插值节点满足

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

此结论告诉我们, 我们选取的插值节点不能在剖分 Δ 上局部太“稠密”, 要相对“稀疏”, 才能使得插值问题有唯一解.

样条函数插值问题的再讨论

推论

给定 $[a, b]$ 上 m 个插值节点

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m \leq b,$$

样条函数插值问题的再讨论

推论

给定 $[a, b]$ 上 m 个插值节点

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m \leq b,$$

利用 N 个内部样条节点 x_1, \cdots, x_N 对 $[a, b]$ 进行剖分 Δ , 在此剖分上建立 n 次样条函数空间 $S_n(\Delta)$, 其中 $n = m - N - 1$.

样条函数插值问题的再讨论

推论

给定 $[a, b]$ 上 m 个插值节点

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m \leq b,$$

利用 N 个内部样条节点 x_1, \cdots, x_N 对 $[a, b]$ 进行剖分 Δ , 在此剖分上建立 n 次样条函数空间 $S_n(\Delta)$, 其中 $n = m - N - 1$. 如果这 N 个内部样条结点满足

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+m-N}, \quad i = 1, \cdots, N,$$

样条函数插值问题的再讨论

推论

给定 $[a, b]$ 上 m 个插值节点

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m \leq b,$$

利用 N 个内部样条节点 x_1, \cdots, x_N 对 $[a, b]$ 进行剖分 Δ , 在此剖分上建立 n 次样条函数空间 $\mathbb{S}_n(\Delta)$, 其中 $n = m - N - 1$. 如果这 N 个内部样条结点满足

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+m-N}, \quad i = 1, \cdots, N,$$

则对任何一组实数 y_1, \cdots, y_m , 存在唯一的样条函数 $S(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$, 满足

$$S(\xi_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

一元样条函数的一般定义

如果将定义2.1中的结点改为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

条件(2)改为 $S(x)$ 于 $[a, b]$ 上具有一直到 μ ($\mu < n$) 阶的连续导数, 则 $S(x)$ 称为区间 $[a, b]$ 上的**分段 n 次 μ 阶光滑的样条函数**.

一元样条函数的一般定义

如果将定义2.1中的结点改为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

条件(2)改为 $S(x)$ 于 $[a, b]$ 上具有一直到 μ ($\mu < n$) 阶的连续导数, 则 $S(x)$ 称为区间 $[a, b]$ 上的**分段 n 次 μ 阶光滑的样条函数**.

类似地, 可以得到它在 $[a, b]$ 上的表达式为

$$S(x) = q_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i(x)(x - x_i)_+^{\mu+1}, \quad x \in [a, b],$$

其中 $q_0(x) \in \mathbb{P}_n, c_i(x) \in \mathbb{P}_{n-\mu-1}$.

一元样条函数的一般定义

如果将定义2.1中的结点改为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

条件(2)改为 $S(x)$ 于 $[a, b]$ 上具有一直到 μ ($\mu < n$) 阶的连续导数, 则 $S(x)$ 称为区间 $[a, b]$ 上的**分段 n 次 μ 阶光滑的样条函数**.

类似地,可以得到它在 $[a, b]$ 上的表达式为

$$S(x) = q_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i(x)(x - x_i)_+^{\mu+1}, \quad x \in [a, b],$$

其中 $q_0(x) \in \mathbb{P}_n, c_i(x) \in \mathbb{P}_{n-\mu-1}$.

对于一元样条函数来说,应用最为广泛的为具有局部支集的**B样条函数**.

三次样条插值问题

设给定区间 $[a, b]$ 的一个剖分 Δ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b.$$

三次样条插值问题

设给定区间 $[a, b]$ 的一个剖分 Δ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b.$$

三次样条插值问题: 任意给定一组常数 $y_0, y_1, \cdots, y_{N+1}$, 寻找三次样条 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 使其满足插值条件

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, N+1. \quad (3.1)$$

三次样条插值问题

设给定区间 $[a, b]$ 的一个剖分 Δ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b.$$

三次样条插值问题: 任意给定一组常数 $y_0, y_1, \cdots, y_{N+1}$, 寻找三次样条 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 使其满足插值条件

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, N+1. \quad (3.1)$$

由于 $\dim(\mathbb{S}_3(\Delta)) = N+4$, 而如上只有 $N+2$ 个插值条件, 因此**还需增加两个插值条件才使得解可能唯一**. 通常可在区间 $[a, b]$ 的端点 $x_0 = a, x_{N+1} = b$ 上各加一个条件(称为边界条件).

第一型样条插值问题

第一型样条插值问题: 寻找 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 满足

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i, & i = 0, 1, \dots, N+1, \\ S'(a) = y'_0, S'(b) = y'_{N+1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

第二型样条插值问题

第二型样条插值问题: 寻找 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 满足

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i, & i = 0, 1, \dots, N+1, \\ S''(a) = y''_0, S''(b) = y''_{N+1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

第二型样条插值问题

第二型样条插值问题: 寻找 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 满足

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i, & i = 0, 1, \dots, N+1, \\ S''(a) = y''_0, S''(b) = y''_{N+1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

其特殊情况为

$$S''(a) = S''(b) = 0, \quad (3.4)$$

此时也称为自然边界条件.

第三型样条插值问题

第三型(周期型)样条插值问题: 当被插函数 $f(x)$ 是以 $b - a$ 为周期的周期函数时, 则要求 $S(x)$ 也是周期函数.

第三型样条插值问题

第三型(周期型)样条插值问题: 当被插函数 $f(x)$ 是以 $b - a$ 为周期的周期函数时, 则要求 $S(x)$ 也是周期函数.
寻找 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$, 满足

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i, & i = 0, 1, \cdots, N, \\ S^{(j)}(a) = S^{(j)}(b), & j = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (3.5)$$

此时 $S(x)$ 称为**周期样条函数**.

三次样条插值求解

设

$$M_j = S''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N + 1.$$

三次样条插值求解

设

$$M_j = S''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N + 1.$$

因 $S(x)$ 为分段三次多项式,故 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上为一线性函数.

三次样条插值求解

设

$$M_j = S''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N+1.$$

因 $S(x)$ 为分段三次多项式,故 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上为一线性函数. 并且它是过 (x_{j-1}, M_{j-1}) 与 (x_j, M_j) 两点的线性插值多项式

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (x_{j-1} \leq x \leq x_j), \quad (3.6)$$

其中 $h_j = x_j - x_{j-1}$.

三次样条插值求解

设

$$M_j = S''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N+1.$$

因 $S(x)$ 为分段三次多项式,故 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上为一线性函数. 并且它是过 (x_{j-1}, M_{j-1}) 与 (x_j, M_j) 两点的线性插值多项式

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (x_{j-1} \leq x \leq x_j), \quad (3.6)$$

其中 $h_j = x_j - x_{j-1}$.

为了求出 $S(x)$ 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式, 只须对上式积分两次, 并由插值条件定出积分常数.

三次样条插值求解

因此, 当 $x \in [x_{j-1}, x_j]$, 时

$$\begin{aligned} S(x) = & M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} \\ & + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

再求一次导数, 有

$$S'(x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j. \quad (3.8)$$

三次样条插值求解

而为了求得各个 M_j , 利用节点处的光滑条件

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0). \quad (3.9)$$

三次样条插值求解

而为了求得各个 M_j , 利用节点处的光滑条件

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0). \quad (3.9)$$

由此可得连续性方程

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.10)$$

其中

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \quad \lambda_j = 1 - \mu_j, \quad d_j = \frac{6}{h_{j-1} + h_j} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

三次样条插值求解

对第一型样条插值问题, 利用边界条件

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_{N+1}) = y'_{N+1}$$

三次样条插值求解

对第一型样条插值问题, 利用边界条件

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_{N+1}) = y'_{N+1}$$

可得出两个方程

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \right), \\ M_N + 2M_{N+1} = \frac{6}{h_N} \left(y'_{N+1} - \frac{y_{N+1} - y_N}{h_N} \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

三次样条插值求解

对第一型样条插值问题, 利用边界条件

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_{N+1}) = y'_{N+1}$$

可得出两个方程

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \right), \\ M_N + 2M_{N+1} = \frac{6}{h_N} \left(y'_{N+1} - \frac{y_{N+1} - y_N}{h_N} \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

令

$$\lambda_0 = 1, \quad d_0 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \right),$$
$$\mu_{N+1} = 1, \quad d_{N+1} = \frac{6}{h_N} \left(y'_{N+1} - \frac{y_{N+1} - y_N}{h_N} \right).$$

三次样条插值求解

对第二型样条插值问题, 利用边界条件直接得到

$$M_0 = y''_0, \quad M_{N+1} = y''_{N+1}. \quad (3.12)$$

令

$$\lambda_0 = \mu_{N+1} = 0, \quad d_0 = 2y''_0, \quad d_{N+1} = 2y''_{N+1}.$$

三次样条插值求解

无论第一或第二型样条插值问题, 均可概括为方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_N & 2 & \lambda_N \\ & & & \mu_{N+1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_N \\ M_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \\ d_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

三次样条插值求解

对第三型样条插值问题, 利用周期性条件

$$S^{(j)}(x_{N+1}) = S^{(j)}(x_0), \quad j = 1, 2,$$

三次样条插值求解

对第三型样条插值问题, 利用周期性条件

$$S^{(j)}(x_{N+1}) = S^{(j)}(x_0), \quad j = 1, 2,$$

从而

$$\begin{cases} M_{N+1} = M_0, \\ \lambda_{N+1}M_1 + \mu_{N+1}M_N + 2M_{N+1} = d_{N+1}, \end{cases} \quad (3.14)$$

三次样条插值求解

对第三型样条插值问题, 利用周期性条件

$$S^{(j)}(x_{N+1}) = S^{(j)}(x_0), \quad j = 1, 2,$$

从而

$$\begin{cases} M_{N+1} = M_0, \\ \lambda_{N+1}M_1 + \mu_{N+1}M_N + 2M_{N+1} = d_{N+1}, \end{cases} \quad (3.14)$$

其中

$$\lambda_{N+1} = \frac{h_0}{h_0 + h_N}, \quad \mu_{N+1} = 1 - \lambda_{N+1},$$
$$d_{N+1} = \frac{6}{h_0 + h_N} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_{N+1} - y_N}{h_N} \right).$$

三次样条插值求解

得到方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_N & 2 & \lambda_N \\ \lambda_{N+1} & & & \mu_{N+1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_N \\ M_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \\ d_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

三弯矩方程

M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的**弯矩**，因此 M_j 称为 $S(x)$ 的矩，而如上两个方程称为**三弯矩方程**.

三弯矩方程

M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的**弯矩**，因此 M_j 称为 $S(x)$ 的矩，而如上两个方程称为**三弯矩方程**.

由于**严格对角占优**，因此有唯一解.

三弯矩方程

M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的**弯矩**，因此 M_j 称为 $S(x)$ 的矩，而如上两个方程称为**三弯矩方程**.

由于**严格对角占优**，因此有唯一解.

方程可采用**追赶法**来解.

三弯矩方程

M_j 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的**弯矩**，因此 M_j 称为 $S(x)$ 的矩，而如上两个方程称为**三弯矩方程**。

由于**严格对角占优**，因此有唯一解。

方程可采用**追赶法**来解。

带入在 $[x_{j-1}, x_j]$ 中的表达式

$$S(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} \\ + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}.$$

实例

例

给定列表函数值

x_j	1	2	4	5
$f(x_j)$	1	3	4	2

求满足自然边界条件 $S''(1) = S''(5) = 0$ 的三次样条插值函数 $S(x)$, 并计算 $f(3)$ 的近似值.

实例(续)

解: 由已知,该问题满足自然边界条件,因此4个未知数 M_0, \dots, M_3 中已确定了 $M_0 = M_3 = 0$,只需再确定 M_1, M_2 即可.

实例(续)

解: 由已知,该问题满足自然边界条件,因此4个未知数 M_0, \dots, M_3 中已确定了 $M_0 = M_3 = 0$,只需再确定 M_1, M_2 即可. 由连续性方程, 可得

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

实例(续)

解: 由已知,该问题满足自然边界条件,因此4个未知数 M_0, \dots, M_3 中已确定了 $M_0 = M_3 = 0$,只需再确定 M_1, M_2 即可. 由连续性方程, 可得

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \mu_2 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -3, \quad d_2 = -5.$$

实例(续)

于是上述方程组的解为

$$M_1 = -\frac{3}{4}, \quad M_2 = -\frac{9}{4}.$$

将其与 $M_0 = M_3 = 0$ 代入(3.7), 便可得到三次插值样条函数 $S(x)$ 在每个区间上的表达式为

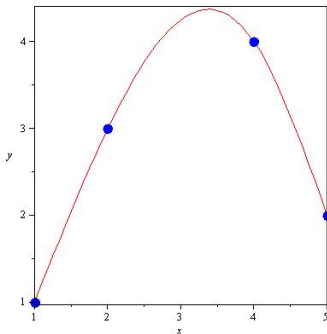
$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, & 2 \leq x \leq 4, \\ \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{103}{4}x - 33, & 4 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

实例(续)

并且

$$f(3) \approx S(3) = \frac{17}{4} = 4.25.$$

所得三次插值样条函数曲线如图.



三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数,

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则

$$R_3(f; x) = f(x) - S(x) = \int_a^b K_4(t; x) f^{(4)}(t) dt. \quad (3.16)$$

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则

$$R_3(f; x) = f(x) - S(x) = \int_a^b K_4(t; x) f^{(4)}(t) dt. \quad (3.16)$$

其中 *Peano* 核

$$K_4(t; x) = \frac{1}{3!} R_3((y - t)_+^3; x), \quad (3.17)$$

这里, 记号 $R_3((y - t)_+^3; x)$ 表示 $(y - t)_+^3$ 作为关于 y 的被插函数时其相应三次样条插值余项.

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数,

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则误差余项 $R_3(f; x) = f(x) - S(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上成立估计式

$$\|R_3^{(j)}\|_{\infty} \leq c_j h^{4-j} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.18)$$

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则误差余项 $R_3(f; x) = f(x) - S(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上成立估计式

$$\|R_3^{(j)}\|_{\infty} \leq c_j h^{4-j} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.18)$$

其中 $c_0 = \frac{1}{16}$, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $h = \max_{0 \leq i \leq N} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数,

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则误差余项 $R_3(f; x) = f(x) - S(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上成立估计式

$$\|R_3^{(j)}\|_{\infty} \leq c_j h^{4-j} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

三次样条函数插值的余项

定理

设被插函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为其相应的第一型或第二型三次样条插值函数, 则误差余项 $R_3(f; x) = f(x) - S(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上成立估计式

$$\|R_3^{(j)}\|_{\infty} \leq c_j h^{4-j} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

其中

$$c_0 = \frac{5}{384}, c_1 = \frac{1}{24}, c_2 = \frac{3}{8}, c_3 = \frac{\beta + \beta^{-1}}{2}, h = \max_{0 \leq i \leq N} h_i, \beta = h \left(\min_{0 \leq i \leq N} h_i \right)^{-1},$$

且 c_0, c_1 是最佳的.

泛函极小问题

给定泛函

$$\mathbf{J}(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

泛函极小问题

给定泛函

$$\mathbf{J}(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

泛函极小问题为：求函数 $S(x) \in \Phi_{\mathbf{y}}$, 满足

$$\mathbf{J}(S) = \min_{f \in \Phi_{\mathbf{y}}} \mathbf{J}(f). \quad (3.20)$$

泛函极小问题

给定泛函

$$\mathbf{J}(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

泛函极小问题为：求函数 $S(x) \in \Phi_{\mathbf{y}}$, 满足

$$\mathbf{J}(S) = \min_{f \in \Phi_{\mathbf{y}}} \mathbf{J}(f). \quad (3.20)$$

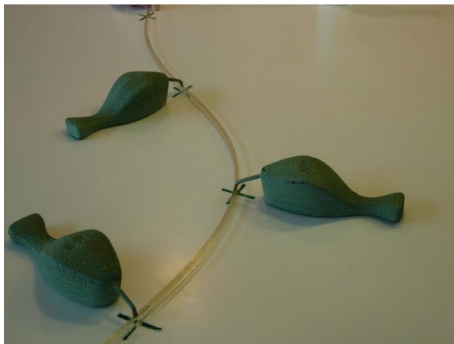
其中

$$\Phi_{\mathbf{y}} = \{f(x) \mid f(x) \in C^2[a, b], f'(a) = y'_0, f'(b) = y'_{N+1}, f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, N+1\},$$

点集 $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ 为剖分 Δ 的节点, 向量 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N+1})^T$.

放样

早期工程师制图时, 把富有弹性的细长木条用压铁固定在样点上, 在其他地方让它自由弯曲, 然后沿木条画下曲线, 成为样条曲线. 如果把细木条看做弹性细梁, 那么压铁可以看做作用在细梁上的集中载荷.



放样



三次样条的力学背景

在细梁弯曲不大, 即一阶导数很小, 通常称为“**小挠度**”的情况下, 其数学模型就是(3.20)所提出的泛函极小问题.

三次样条的力学背景

在细梁弯曲不大, 即一阶导数很小, 通常称为“**小挠度**”的情况下, 其数学模型就是(3.20)所提出的泛函极小问题.

Φ_y 反映的是小挠度梁通过一组指定点并具有指定端点斜率的函数集, 由(3.20)选出的细梁变形曲线在所有满足条件的曲线中**具有最小应变能**.

三次样条的力学背景

在细梁弯曲不大, 即一阶导数很小, 通常称为“**小挠度**”的情况下, 其数学模型就是(3.20)所提出的泛函极小问题.

Φ_y 反映的是小挠度梁通过一组指定点并具有指定端点斜率的函数集, 由(3.20)选出的细梁变形曲线在所有满足条件的曲线中**具有最小应变能**.

这时求解的变形曲线为分段三次多项式, 且在压铁处的**函数值（位移）、一阶导数（转角）和二阶导数（弯矩）都是连续的**, 而且三阶导数（剪力）有间断, 这就是**三次样条函数**。

三次样条插值的泛函极小性质

定理

泛函极小问题(3.20)的解存在唯一, 且它是第一型样条插值问题的解.

三次样条插值的泛函极小性质

定理

泛函极小问题(3.20)的解存在唯一, 且它是第一型样条插值问题的解.

定理

设 $f(x) \in \Phi_y$, 若 $S(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为是第一型样条插值问题的解, $g(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)$ 为任一样条函数, 则

$$\mathbf{J}(f - S) \leq \mathbf{J}(f - g), \quad (3.21)$$

即 $\int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx = \min_{g(x) \in \mathbb{S}_3(\Delta)} \int_a^b (f''(x) - g''(x))^2 dx$, 等式成立当且仅当 $g(x) = S(x)$.

B样条函数

给定区间 $[a, b]$ 与其剖分 Δ . 则样条函数空间 $\mathbb{S}_n(\Delta)$ 的一组基函数为

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, (x - x_1)_+^n, \cdots, (x - x_N)_+^n. \quad (4.1)$$

B样条函数

给定区间 $[a, b]$ 与其剖分 Δ . 则样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的一组基函数为

$$1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n. \quad (4.1)$$

虽然截断多项式 $(x - x_i)_+^n$ 都是 Δ 上定义的非平凡 n 次样条函数, 但是它的非零区间不具有局部支集性, 这对插值或其它数值计算都是不方便的.

B样条函数

给定区间 $[a, b]$ 与其剖分 Δ . 则样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的一组基函数为

$$1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n. \quad (4.1)$$

虽然截断多项式 $(x - x_i)_+^n$ 都是 Δ 上定义的非平凡 n 次样条函数, 但是它的非零区间不具有局部支集性, 这对插值或其它数值计算都是不方便的.

我们希望构造一类具有真正的“局部支集”(也称为紧支撑或紧支集)的样条函数, 而B样条函数恰好能满足这样的需求.

B样条函数

给定区间 $[a, b]$ 与其剖分 Δ . 则样条函数空间 $S_n(\Delta)$ 的一组基函数为

$$1, x, x^2, \dots, x^n, (x - x_1)_+^n, \dots, (x - x_N)_+^n. \quad (4.1)$$

虽然截断多项式 $(x - x_i)_+^n$ 都是 Δ 上定义的非平凡 n 次样条函数, 但是它的非零区间不具有局部支集性, 这对插值或其它数值计算都是不方便的.

我们希望构造一类具有真正的“局部支集”(也称为紧支撑或紧支集)的样条函数, 而B样条函数恰好能满足这样的需求.

B样条函数有差分型定义、差商型定义、**de Boor-Cox递推公式** (标准B样条基).

de Boor-Cox公式

设 $(-\infty, +\infty)$ 上的剖分 Δ 为

$$\cdots \leq x_{-2} \leq x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i < \cdots, \quad (4.2)$$

其中节点 $x_i \rightarrow \pm\infty$ ($i \rightarrow \pm\infty$), 若 $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+p}$, 则 x_i 称为 $p+1$ 重节点.

de Boor-Cox公式

设 $(-\infty, +\infty)$ 上的剖分 Δ 为

$$\cdots \leq x_{-2} \leq x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i < \cdots, \quad (4.2)$$

其中节点 $x_i \rightarrow \pm\infty$ ($i \rightarrow \pm\infty$), 若 $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+p}$, 则 x_i 称为 $p+1$ 重节点.

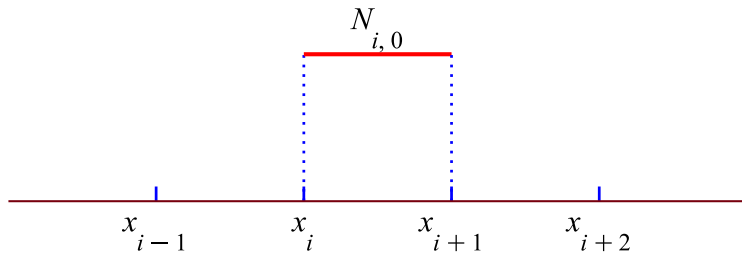
定义 (de Boor-Cox公式)

标准(规范)的 n 次($n+1$ 阶)**B样条基函数** $N_{i,n}(x)$ 定义为

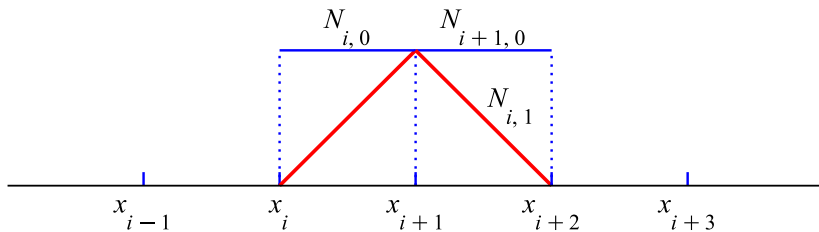
$$\begin{cases} N_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \\ N_{i,n}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} N_{i,n-1}(x) + \frac{x_{i+n+1} - x}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} N_{i+1,n-1}(u), \quad n \geq 1, \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$



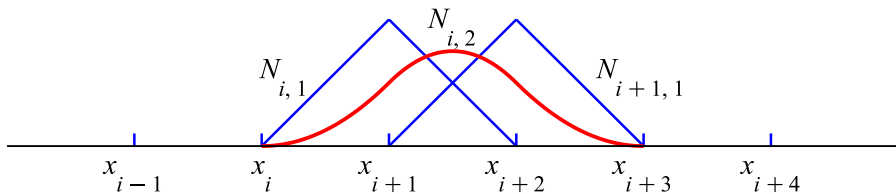
$$N_{i,0}(x)$$



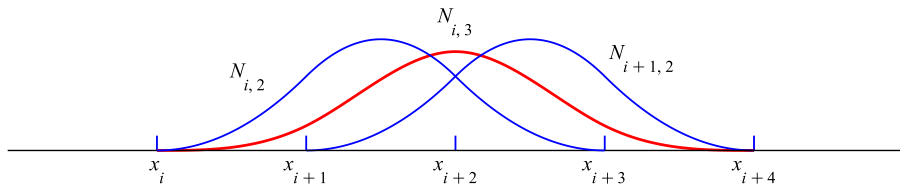
$$N_{i,1}(x)$$



$$N_{i,2}(x)$$



$$N_{i,3}(x)$$



B样条基函数的性质

1. **样条性质:** 当节点都为单节点时, $N_{i,n}(x)$ 为剖分 Δ 上的 n 次样条函数, 即满足是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 n 次分段多项式且 $N_{i,n}(x) \in C^{n-1}(-\infty, +\infty)$ 。

B样条基函数的性质

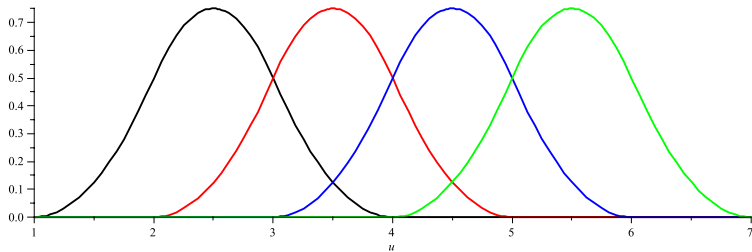
1. **样条性质:** 当节点都为单节点时, $N_{i,n}(x)$ 为剖分 Δ 上的 n 次样条函数, 即满足是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 n 次分段多项式且 $N_{i,n}(x) \in C^{n-1}(-\infty, +\infty)$ 。
2. **局部支集性:** 满足 $N_{i,n}(x) > 0, x \in (x_i, x_{i+n+1})$ 且 $N_{i,n}(x) \equiv 0, x \notin [x_i, x_{i+n+1}]$. 区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ (或 $[x_i, x_{i+n+1})$) 也称为B样条函数 $N_{i,n}(x)$ 的**局部支集**。

B样条基函数的性质

1. **样条性质:** 当节点都为单节点时, $N_{i,n}(x)$ 为剖分 Δ 上的 n 次样条函数, 即满足是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 n 次分段多项式且 $N_{i,n}(x) \in C^{n-1}(-\infty, +\infty)$ 。
2. **局部支集性:** 满足 $N_{i,n}(x) > 0, x \in (x_i, x_{i+n+1})$ 且 $N_{i,n}(x) \equiv 0, x \notin [x_i, x_{i+n+1}]$. 区间 $[x_i, x_{i+n+1}]$ (或 $[x_i, x_{i+n+1})$) 也称为B样条函数 $N_{i,n}(x)$ 的**局部支集**。
3. **平移性质:** 若节点为等距节点, 即 $x_i = x_0 + ih$, 同次的B样条基函数可由其中一个B样条基函数平移得到, 即

$$N_{i,n}(x) = N_{0,n}(x - ih).$$

平移性质与局部支集性质



B样条基函数的性质(续)

4. 线性无关性: n 次B样条函数系 $\{N_{i,n}(x)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 线性无关。

B样条基函数的性质(续)

4. 线性无关性: n 次B样条函数系 $\{N_{i,n}(x)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 线性无关。
5. 重节点的连续阶性质: 设 x_j 为 $\in [x_i, x_{i+n+1}]$ 上的 p_j 重节点, 其中 $1 \leq p_j \leq n$). 则 $N_{i,n}(x)$ 在节点 x_j 上的连续阶为 $n - p_j$ 。

B样条基函数的性质(续)

4. **线性无关性**: n 次B样条函数系 $\{N_{i,n}(x)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ **线性无关**。
5. **重节点的连续阶性质**: 设 x_j 为 $\in [x_i, x_{i+n+1}]$ 上的 p_j 重节点, 其中 $1 \leq p_j \leq n$). 则 $N_{i,n}(x)$ 在节点 x_j 上的连续阶为 $n - p_j$ 。
6. 在任意给定的区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内, 最多有 $n + 1$ 个 n 次B样条函数是非零的. 换句话说, 以同一区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 为公共局部支集的 n 次B样条函数有 $n + 1$ 个, 它们分别是 $N_{i-n,n}(x), \dots, N_{i,n}(x)$ 。

B样条基函数的性质(续)

4. **线性无关性**: n 次B样条函数系 $\{N_{i,n}(x)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ **线性无关**。
5. **重节点的连续阶性质**: 设 x_j 为 $\in [x_i, x_{i+n+1}]$ 上的 p_j 重节点, 其中 $1 \leq p_j \leq n$ 。则 $N_{i,n}(x)$ 在节点 x_j 上的连续阶为 $n - p_j$ 。
6. 在任意给定的区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内, 最多有 $n + 1$ 个 n 次B样条函数是非零的。换句话说, 以同一区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 为公共局部支集的 n 次B样条函数有 $n + 1$ 个, 它们分别是 $N_{i-n,n}(x), \dots, N_{i,n}(x)$ 。
7. **单位分解性**: 即对任意的 $x \in [x_i, x_{i+1}]$, 若以 $[x_i, x_{i+1}]$ 为局部支集的 n 次B样条函数共有 $n + 1$ 个, 则有

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,n}(x) = \sum_{j=i-n}^i N_{j,n}(x) \equiv 1. \quad (4.4)$$

实例

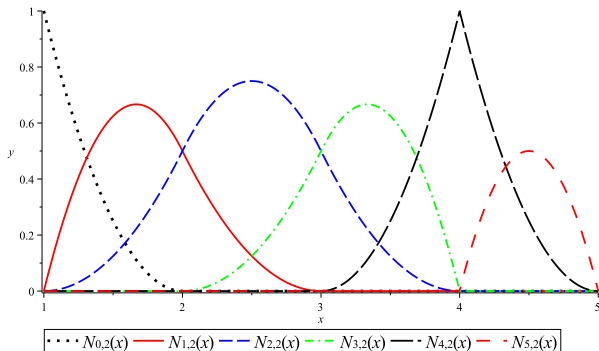
例

以样条节点 $\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5\}$ 构造二次标准 B 样条基函数。

实例

例

以样条节点 $\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5\}$ 构造二次标准B样条基函数。



B样条基函数的性质(续)

8. 积分性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{i,n}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+n+1}} N_{i,n}(x) dx = \frac{x_{i+n+1} - x_i}{n+1}.$$

B样条基函数的性质(续)

8. 积分性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{i,n}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+n+1}} N_{i,n}(x) dx = \frac{x_{i+n+1} - x_i}{n+1}.$$

9. 最大值性质: 除 $n=0$ 的情形外, $N_{i,n}(x)$ 恰好达到一个最大值.

B样条基函数的性质(续)

8. 积分性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{i,n}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+n+1}} N_{i,n}(x) dx = \frac{x_{i+n+1} - x_i}{n+1}.$$

9. 最大值性质: 除 $n=0$ 的情形外, $N_{i,n}(x)$ 恰好达到一个最大值.

10. 导数性质: B样条基函数的导数公式

$$N'_{i,n}(x) = \frac{n}{x_{i+n} - x_i} N_{i,n-1}(x) - \frac{n}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} N_{i+1,n-1}(x). \quad (4.5)$$

实例

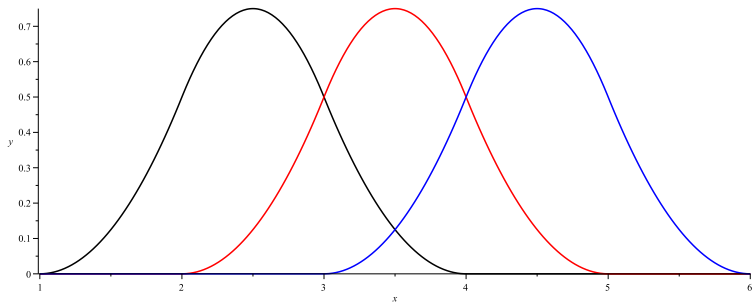
例

给定样条节点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 构造三个标准的二次 B 样条基函数如图所示.

实例

例

给定样条节点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 构造三个标准的二次B样条基函数如图所示.



实例(续)

这些B样条基函数只有在节点区间 $[3, 4]$ 上, 它们才同时满足非零, 即同时以其为局部支集, 因此满足单位分解性.

实例(续)

这些B样条基函数只有在节点区间 $[3, 4]$ 上, 它们才同时满足非零, 即同时以其为局部支集, 因此满足单位分解性.

而在 $[1, 3], [4, 6]$ 上不具有单位分解性.

实例(续)

这些B样条基函数只有在节点区间 $[3, 4]$ 上, 它们才同时满足非零, 即同时以其为局部支集, 因此满足单位分解性.

而在 $[1, 3], [4, 6]$ 上不具有单位分解性.

将节点扩展为

$$\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

实例(续)

这些B样条基函数只有在节点区间 $[3, 4]$ 上, 它们才同时满足非零, 即同时以其为局部支集, 因此满足单位分解性.

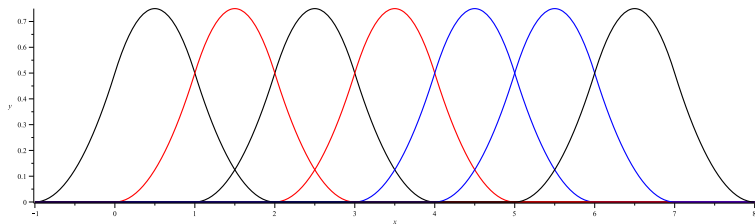
而在 $[1, 3], [4, 6]$ 上不具有单位分解性.

将节点扩展为

$$\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

构造等距节点上的二次B样条基函数共有7个.

实例(续)



实例(续)

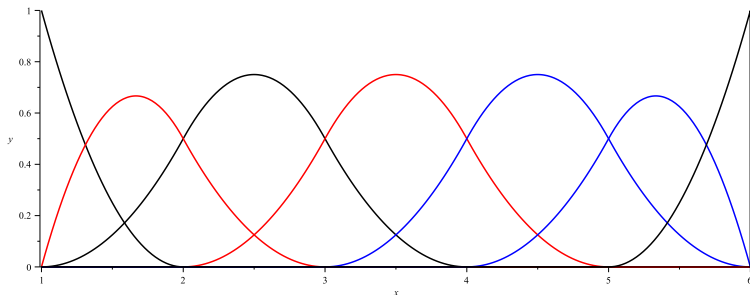
还可以采用边界重节点方式扩展节点, 使得B样条基函数具有单位分解性. 将原节点扩展为

$$\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6\}.$$

实例(续)

还可以采用边界重节点方式扩展节点, 使得B样条基函数具有单位分解性. 将原节点扩展为

$$\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6\}.$$



B样条基函数的最小支集性

B样条函数的一个重要性质即为它的局部支集性质. 我们知道 n 次B样条基函数的局部支集包含了 $n + 1$ 个节点区间. 下面我们将利用光滑余因子方法, 来证明B样条基函数的局部支集是最小的.

B样条基函数的最小支集性

B样条函数的一个重要性质即为它的局部支集性质. 我们知道 n 次B样条基函数的局部支集包含了 $n + 1$ 个节点区间. 下面我们将利用光滑余因子方法, 来证明B样条基函数的局部支集是最小的.

定理

如果 n 次样条函数 $s(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$ 具有局部支集 $[x_i, x_{i+N}]$, 也即满足条件

$$s(x) = 0, \text{ 当 } x \notin [x_i, x_{i+N}],$$

则除 $s(x) \equiv 0, x \in \Delta$ 之外, 必有 $N \geq n + 1$.

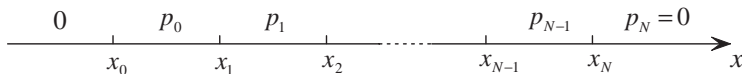
B样条基函数的最小支集性

证明: 不妨设 $s(x)$ 的局部支集为 $[x_0, x_N]$, 来证明 $N \geq n + 1$.

B样条基函数的最小支集性

证明: 不妨设 $s(x)$ 的局部支集为 $[x_0, x_N]$, 来证明 $N \geq n + 1$.

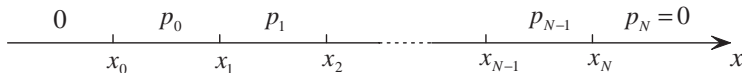
由 $s(x)$ 为分段的 n 次多项式, 因此记它在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的多项式为 $p_i(x)$.



B样条基函数的最小支集性

证明: 不妨设 $s(x)$ 的局部支集为 $[x_0, x_N]$, 来证明 $N \geq n + 1$.

由 $s(x)$ 为分段的 n 次多项式, 因此记它在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的多项式为 $p_i(x)$.



由 $s(x) \in \mathbb{S}_n(\Delta)$, 利用样条函数的结构特征定理, 注意到当 $x \notin [x_0, x_N]$ 时, $s(x) = 0$, 有 $s(x)$ 的如下分段表示

$$\begin{aligned} p_0(x) &= c_0(x - x_0)^n, \\ p_1(x) &= p_0(x) + c_1(x - x_1)^n, \\ &\dots \\ p_N(x) &= p_{N-1}(x) + c_N(x - x_N)^n. \end{aligned}$$

B样条基函数的最小支集性

由 $p_N(x) = 0$, 得到光滑余因子 c_0, c_1, \dots, c_N 需要满足协调方程

$$\sum_{i=0}^N c_i (x - x_i)^n \equiv 0. \quad (4.6)$$

B样条基函数的最小支集性

由 $p_N(x) = 0$, 得到光滑余因子 c_0, c_1, \dots, c_N 需要满足协调方程

$$\sum_{i=0}^N c_i (x - x_i)^n \equiv 0. \quad (4.6)$$

对于如上齐次方程组, 它是否有非零解与如下方程组是否有非零解等价(相当于对节点进行对称变换)

$$\sum_{i=0}^N c_i (x + x_i)^n \equiv 0.$$

B样条基函数的最小支集性

上式左端为一个 n 次多项式,它恒为零的充要条件是其展开式中 $n + 1$ 个系数全为零,即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{n}{1}x_0 & \binom{n}{1}x_1 & \cdots & \binom{n}{1}x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n}x_0^n & \binom{n}{n}x_1^n & \cdots & \binom{n}{n}x_N^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B样条基函数的最小支集性

而此齐次线性方程组是否有非零解又与如下方程组是否有非零解等价

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_N^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B样条基函数的最小支集性

当样条节点两两不同时，如上方程组的系数矩阵 A 的每一个子阵都是Vandemonde矩阵, 因此为可逆阵.

B样条基函数的最小支集性

当样条节点两两不同时，如上方程组的系数矩阵 A 的每一个子阵都是Vandemonde矩阵, 因此为可逆阵.

从而其秩满足

$$r(A) = \min\{n + 1, N + 1\}.$$

B样条基函数的最小支集性

当样条节点两两不同时，如上方程组的系数矩阵 A 的每一个子阵都是Vandemonde矩阵，因此为可逆阵。

从而其秩满足

$$r(A) = \min\{n + 1, N + 1\}.$$

如果方程组只有零解，则 $s(x) \equiv 0$ 。

B样条基函数的最小支集性

当样条节点两两不同时, 如上方程组的系数矩阵 A 的每一个子阵都是Vandemonde矩阵, 因此为可逆阵.

从而其秩满足

$$r(A) = \min\{n + 1, N + 1\}.$$

如果方程组只有零解, 则 $s(x) \equiv 0$. 因此 $s(x)$ 非平凡的充要条件即为方程组有非零解.

B样条基函数的最小支集性

当样条节点两两不同时, 如上方程组的系数矩阵 A 的每一个子阵都是Vandemonde矩阵, 因此为可逆阵.

从而其秩满足

$$r(A) = \min\{n + 1, N + 1\}.$$

如果方程组只有零解, 则 $s(x) \equiv 0$. 因此 $s(x)$ 非平凡的充要条件即为方程组有非零解. 因此需满足 $r(A) < N + 1$, 即

$$N \geq n + 1.$$

B样条基函数的最小支集性

因此, n 次样条函数 $s(x)$ 如果具有最小的局部支集, 则支集应该含有 $n + 2$ 个节点, 或 $n + 1$ 个节点区间.

B样条基函数的最小支集性

因此, n 次样条函数 $s(x)$ 如果具有最小的局部支集, 则支集应该含有 $n + 2$ 个节点, 或 $n + 1$ 个节点区间.

再由B样条基函数的局部支集性质可知, n 次B样条基函数的局部支集恰好满足这些条件, 因此具有最小局部支集性.

B样条基函数的最小支集性

因此, n 次样条函数 $s(x)$ 如果具有最小的局部支集, 则支集应该含有 $n + 2$ 个节点, 或 $n + 1$ 个节点区间.

再由B样条基函数的局部支集性质可知, n 次B样条基函数的局部支集恰好满足这些条件, 因此具有最小局部支集性.

事实上, 定义在同一个最小的局部支集上的 n 次样条函数是线性相关的.

B样条基函数的最小支集性

因此, n 次样条函数 $s(x)$ 如果具有最小的局部支集, 则支集应该含有 $n + 2$ 个节点, 或 $n + 1$ 个节点区间.

再由B样条基函数的局部支集性质可知, n 次B样条基函数的局部支集恰好满足这些条件, 因此具有最小局部支集性.

事实上, 定义在同一个最小的局部支集上的 n 次样条函数是线性相关的.

定理

如果 n 次样条函数 $s(x)$ 具有最小的局部支集 $\{x_i, \dots, x_{i+n+1}\}$, 则其它以 $\{x_i, \dots, x_{i+n+1}\}$ 为局部支集的 n 次样条函数 $\tilde{s}(x)$ 与 $s(x)$ 只相差一个常数倍, 即存在常数 λ 使得

$$\tilde{s}(x) = \lambda s(x).$$

二元样条空间

用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行**剖分** Δ ,

二元样条空间

用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行**剖分** Δ ,
则 D 被剖分为有限个子区域 D_1, D_2, \dots, D_N , 它们称作是剖分 Δ 的**胞腔**.

二元样条空间

用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行**剖分** Δ ,
则 D 被剖分为有限个子区域 D_1, D_2, \dots, D_N , 它们称作是剖分 Δ 的**胞腔**.
胞腔的边界线段称为**网线**或边, 网线的端点称为**网点或顶点**.

二元样条空间

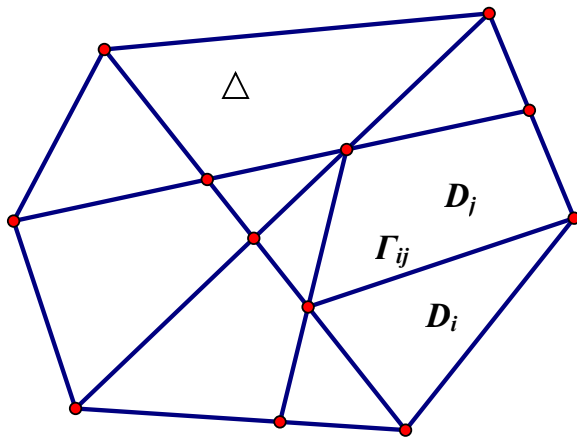
用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行**剖分** Δ ,

则 D 被剖分为有限个子区域 D_1, D_2, \dots, D_N , 它们称作是剖分 Δ 的**胞腔**.

胞腔的边界线段称为**网线**或边, 网线的端点称为**网点或顶点**.

所有以某一点 V 为顶点的胞腔的并集称为网点 V 的**星形域**或关联域, 记为 $St(V)$.

剖分



二元样条函数空间

定义

给定区域 D 的剖分 Δ , 设非负整数 μ 满足 $0 \leq \mu \leq k - 1$.

二元样条函数空间

定义

给定区域 D 的剖分 Δ , 设非负整数 μ 满足 $0 \leq \mu \leq k - 1$. 则

$$S_k^\mu(\Delta) = \{s \in C^\mu(D) | s|_{D_i} \in \mathbb{P}_k^{(2)}, i = 1, 2, \dots, N\}. \quad (5.1)$$

二元样条函数空间

定义

给定区域 D 的剖分 Δ , 设非负整数 μ 满足 $0 \leq \mu \leq k-1$. 则

$$S_k^\mu(\Delta) = \{s \in C^\mu(D) | s|_{D_i} \in \mathbb{P}_k^{(2)}, i = 1, 2, \dots, N\}. \quad (5.1)$$

称为剖分 Δ 上的二元 k 次 μ 阶连续样条函数空间, 简称为二元样条函数空间.

光滑余因子

定理

设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z|_{D_i} = p_i(x, y)$ 和 $z|_{D_j} = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in \mathbb{P}_k^{(2)}$.

光滑余因子

定理

设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z|_{D_i} = p_i(x, y)$ 和 $z|_{D_j} = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in \mathbb{P}_k^{(2)}$. 为使

$$s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j}),$$

光滑余因子

定理

设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z|_{D_i} = p_i(x, y)$ 和 $z|_{D_j} = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in \mathbb{P}_k^{(2)}$. 为使

$$s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j}),$$

必须且只必须存在多项式 $q_{ij} \in \mathbb{P}_{k-d(\mu+1)}^{(2)}$,

光滑余因子

定理

设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z|_{D_i} = p_i(x, y)$ 和 $z|_{D_j} = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in \mathbb{P}_k^{(2)}$. 为使

$$s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j}),$$

必须且只必须存在多项式 $q_{ij} \in \mathbb{P}_{k-d(\mu+1)}^{(2)}$, 使得

$$p_j(x, y) - p_i(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (5.2)$$

光滑余因子

定理

设函数 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为 $z|_{D_i} = p_i(x, y)$ 和 $z|_{D_j} = p_j(x, y)$, 其中 $p_i, p_j \in \mathbb{P}_k^{(2)}$. 为使

$$s(x, y) \in C^\mu(\overline{D_i \cup D_j}),$$

必须且只必须存在多项式 $q_{ij} \in \mathbb{P}_{k-d(\mu+1)}^{(2)}$, 使得

$$p_j(x, y) - p_i(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (5.2)$$

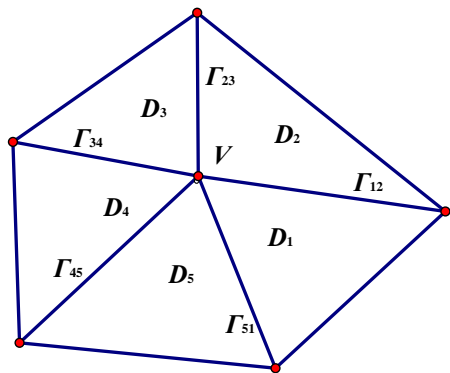
其中多项式 $q_{ij}(x, y)$ 称为内网线 $\Gamma_{ij} : l_{ij}(x, y) = 0$ 上的 (从 D_i 到 D_j 的) **光滑余因子**, 而 $l_{ij}(x, y)$ 为 d 次不可约多项式.

星型域

设 A 为剖分的任一给定的内网点. 按下列顺序将过 A 的所有内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 所涉及的指标 i, j 作如下调整: 使当一动点沿 A 为心的逆时针方向越过 Γ_{ij} 时,恰好是从 D_i 跨入 D_j .

星型域

设 A 为剖分的任一给定的内网点. 按下列顺序将过 A 的所有内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 所涉及的指标 i, j 作如下调整: 使当一动点沿 A 为心的逆时针方向越过 Γ_{ij} 时,恰好是从 D_i 跨入 D_j .



一点处协调条件

定理

函数 $s(x, y) \in \mathbb{S}_k^\mu(St(V))$ 的充要条件是,

一点处协调条件

定理

函数 $s(x, y) \in \mathbb{S}_k^\mu(St(V))$ 的充要条件是, $s(x, y)$ 在 $St(V)$ 中每条内网线上都有光滑余因子存在,

一点处协调条件

定理

函数 $s(x, y) \in \mathbb{S}_k^\mu(St(V))$ 的充要条件是, $s(x, y)$ 在 $St(V)$ 中每条内网线上都有光滑余因子存在, 并且这些按照围绕网点 V 逆时针方式定义的光滑余因子满足协调条件

$$\sum_V l_{ij}^{\mu+1}(x, y) \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad (5.3)$$

一点处协调条件

定理

函数 $s(x, y) \in \mathbb{S}_k^\mu(St(V))$ 的充要条件是, $s(x, y)$ 在 $St(V)$ 中每条内网线上都有光滑余因子存在, 并且这些按照围绕网点 V 逆时针方式定义的光滑余因子满足协调条件

$$\sum_V l_{ij}^{\mu+1}(x, y) \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad (5.3)$$

其中 \sum_V 表示对星型域 $St(V)$ 中所有内网线所求的和, 而 $q_{ij}(x, y)$ 为 Γ_{ij} 上从 D_i 到 D_j 的光滑余因子.

二元样条空间的基本定理

定理

对给定的剖分 Δ , Δ 的所有内网点为 A_1, \dots, A_M .

二元样条空间的基本定理

定理

对给定的剖分 Δ , Δ 的所有内网点为 A_1, \dots, A_M . 函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta)$, 必须而且只须 $s(x, y)$ 在每一条内网线上均有一光滑余因子存在, 并且满足如下所示的整体协调条件

二元样条空间的基本定理

定理

对给定的剖分 Δ , Δ 的所有内网点为 A_1, \dots, A_M . 函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta)$, 必须而且只须 $s(x, y)$ 在每一条内网线上均有一光滑余因子存在, 并且满足如下所示的整体协调条件

$$\sum_{A_\nu} [l_{ij}^{(\nu)}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}^{(\nu)}(x, y) \equiv 0, \quad \nu = 1, \dots, M. \quad (5.4)$$

其中相应于内网点 A_ν 的协调条件之 $q_{ij}^{(\nu)}(x, y)$ 应满足(5.3)的要求.

二元样条空间的维数

二元样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 是一个线性空间. 对于各种特定的剖分, 如何找出 $S_k^\mu(\Delta)$ 的便于应用的基函数组, 是多元样条理论和应用的关键问题之一.

二元样条空间的维数

二元样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 是一个线性空间. 对于各种特定的剖分, 如何找出 $S_k^\mu(\Delta)$ 的便于应用的基函数组, 是多元样条理论和应用的关键问题之一.

为此, 首先应求出样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数 $\dim S_k^\mu(\Delta)$.

二元样条空间的维数, 特别是当值 μ 和 k 接近时, 有时会严重依赖于剖分的几何性质.

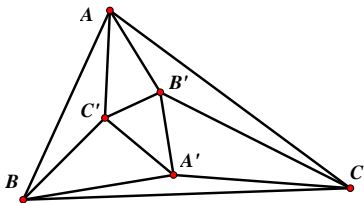
Morgan-Scott剖分

对于样条空间 $S_2^1(\Delta_{MS})$,

Morgan-Scott剖分

对于样条空间 $S_2^1(\Delta_{MS})$,

其中 Δ_{MS} 是著名的Morgan-Scott三角剖分:

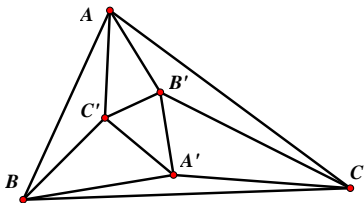


Morgan-Scott剖分

对于样条空间 $S_2^1(\Delta_{MS})$, 它具有如下维数公式

$$\dim S_2^1(\Delta_{MS}) = \begin{cases} 7, & \text{当 } AA', BB', CC' \text{ 3条直线共点时,} \\ 6, & \text{其他情形,} \end{cases}$$

其中 Δ_{MS} 是著名的Morgan-Scott三角剖分:



贯穿剖分下的二元样条空间

若区域 D 的剖分是由有限条贯穿区域 D 的直线切割而成的, 则称剖分是**贯穿剖分**, 常记之为 Δ_c . 每一条贯穿区域 D 的直线称为**贯穿线**.

贯穿剖分下的二元样条空间

若区域 D 的剖分是由有限条贯穿区域 D 的直线切割而成的, 则称剖分是**贯穿剖分**, 常记之为 Δ_c . 每一条贯穿区域 D 的直线称为**贯穿线**.

定理

设 Δ_c 为对区域 D 的**贯穿剖分**, 则如下维数公式成立

$$\dim S_k^\mu(\Delta_c) = \binom{k+2}{2} + L \cdot \binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{i=1}^V d_k^\mu(n_i), \quad (5.5)$$

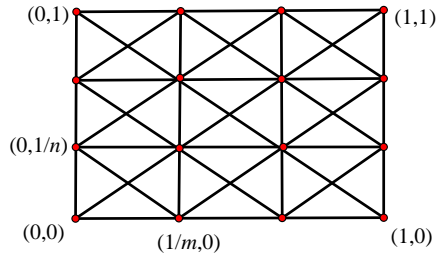
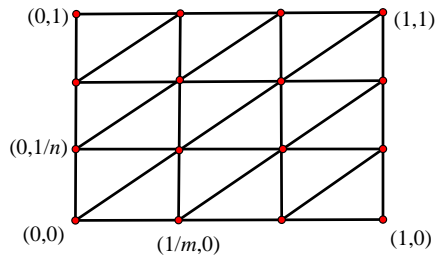
其中 L 为形成 Δ_c 的贯穿线数, V 为 Δ_c 中内网点数, n_i 是经过第 i 个内网点的贯穿线数, 而

$$d_k^\mu(n) = \frac{1}{2} \left(k - \mu - \left\lfloor \frac{\mu+1}{n-1} \right\rfloor \right)_+ \cdot \left((n-1)k - (n+1)\mu + (n-3) + (n-1) \left\lfloor \frac{\mu+1}{n-1} \right\rfloor \right), \quad (5.6)$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.



I-型与II-型三角剖分



I-型与II-型三角剖分的维数

定理

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(1)}) = \binom{k+2}{2} + (2m+2n-3) \binom{k-\mu+1}{2} \\ + (m-1)(n-1) \left(k - \mu - \left\lfloor \frac{\mu+1}{2} \right\rfloor \right)_+ \cdot \left(k - 2\mu + \left\lfloor \frac{\mu+1}{2} \right\rfloor \right), \quad (5.7)$$

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)}) = \binom{k+2}{2} + (3m+3n-4) \binom{k-\mu+1}{2} + mn \binom{k-2\mu}{2} \\ + \frac{1}{2}(m-1)(n-1) \left(k - \mu - \left\lfloor \frac{\mu+1}{3} \right\rfloor \right)_+ \cdot \left(3k - 5\mu + 3 \left\lfloor \frac{\mu+1}{3} \right\rfloor + 1 \right). \quad (5.8)$$

样条空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$

该空间的维数为

$$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = 2(m+2)(n+2) - 5. \quad (5.9)$$

样条空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$

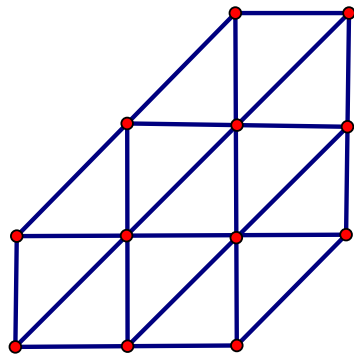
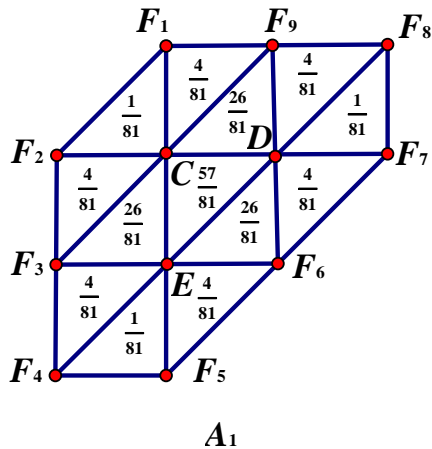
该空间的维数为

$$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = 2(m+2)(n+2) - 5. \quad (5.9)$$

在空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中有两个具有局部支集的样条 $B^1(x, y)$ 和 $B^2(x, y)$, 它们的支集分别为六边形 A_1 和 A_2 , $B^1(x, y)$ 与 $B^2(x, y)$ 有如下关系

$$B^2(x, y) = B^1(-x, -y). \quad (5.10)$$

$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的两个局部支集



$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的B样条基

B^1 和 B^2 都是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中具有最小局部支集的样条, 常称之为**B样条**.

$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的B样条基

B^1 和 B^2 都是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中具有最小局部支集的样条, 常称之为**B样条**. 定义

$$B_{ij}^r(x, y) = B^r(x - i/m, y - j/n), \quad r = 1, 2,$$

和下标集

$$\sigma_r = \{(i, j) \mid B_{ij}^r(x, y) \text{在区域} D \text{上不恒为零}\}.$$

算出 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ 的元素个数为 $2(m+2)(n+2) - 2$, 它**比空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的维数还要多3**.

$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的B样条基

所以

$$\mathcal{B} = \{B_{ij}^1 | (i, j) \in \sigma_1\} \cup \{B_{ij}^2 | (i, j) \in \sigma_2\}$$

是线性相关的.

$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的B样条基

所以

$$\mathcal{B} = \{B_{ij}^1 | (i, j) \in \sigma_1\} \cup \{B_{ij}^2 | (i, j) \in \sigma_2\}$$

是线性相关的.

可以证明

$$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = \text{span}\{\mathcal{B}\}, \quad (5.11)$$

并且按确定的规律从 \mathcal{B} 中删去某3个, 剩下的B样条是线性无关的.

$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的B样条基

所以

$$\mathcal{B} = \{B_{ij}^1 | (i, j) \in \sigma_1\} \cup \{B_{ij}^2 | (i, j) \in \sigma_2\}$$

是线性相关的.

可以证明

$$S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}) = \text{span}\{\mathcal{B}\}, \quad (5.11)$$

并且按确定的规律从 \mathcal{B} 中删去某3个, 剩下的B样条是线性无关的. 不仅如此, 并且对 $r = 1, 2$ 均有如下性质

$$\sum_{(i,j) \in \sigma_r} B_{ij}^r(x, y) \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (5.12)$$

拟插值算子

定义下列拟插值算子(变差缩减算子)

$$(V^r)f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \sigma_r} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{ij}^r(x, y), \quad r = 1, 2. \quad (5.13)$$

拟插值算子

定义下列**拟插值算子(变差缩减算子)**

$$(V^r)f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \sigma_r} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{ij}^r(x, y), \quad r = 1, 2. \quad (5.13)$$

可以证明, 对一切多项式 $p \in \mathbb{P}_1^{(2)}$, 均有

$$(V^r p)(x, y) \equiv p(x, y). \quad (5.14)$$

拟插值算子

定义下列**拟插值算子(变差缩减算子)**

$$(V^r)f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \sigma_r} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) B_{ij}^r(x, y), \quad r = 1, 2. \quad (5.13)$$

可以证明, 对一切多项式 $p \in \mathbb{P}_1^{(2)}$, 均有

$$(V^r p)(x, y) \equiv p(x, y). \quad (5.14)$$

定理

对任意给定的 $f(x, y) \in C(D)$, 均有如下的极限成立,

$$\lim_{\delta_{mn} \rightarrow 0} (V^r f)(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D, r = 1, 2. \quad (5.15)$$



样条空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$

可知

$$\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = (m+2)(n+2) - 1.$$

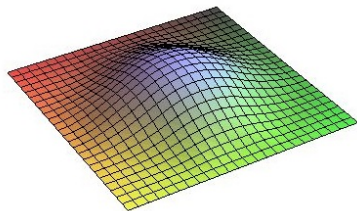
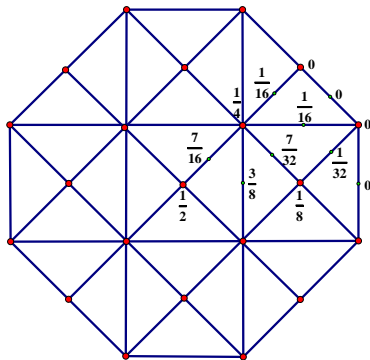
在空间中有一个具有下述局部支集的样条 $B(x, y)$ 。

样条空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$

可知

$$\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = (m+2)(n+2) - 1.$$

在空间中有一个具有下述局部支集的样条 $B(x, y)$ 。



$S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的B样条基

置 $B(x, y)$ 的支集中心在原点 $(0, 0)$, 则由其平移可产生一系列B样条

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i + 1/2, ny - j + 1/2).$$

$S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的B样条基

置 $B(x, y)$ 的支集中心在原点 $(0, 0)$, 则由其平移可产生一系列B样条

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i + 1/2, ny - j + 1/2).$$

集合

$$\mathcal{A} = \{B_{ij}(x, y) | i = 0, \dots, m+1; j = 0, \dots, n+1\}$$

是 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的子集, 而其所含元素个数为 $(m+2)(n+2)$, 它比 $\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 多1.

$S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的B样条基

置 $B(x, y)$ 的支集中心在原点 $(0, 0)$, 则由其平移可产生一系列B样条

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i + 1/2, ny - j + 1/2).$$

集合

$$\mathcal{A} = \{B_{ij}(x, y) | i = 0, \dots, m+1; j = 0, \dots, n+1\}$$

是 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的子集, 而其所含元素个数为 $(m+2)(n+2)$, 它比 $\dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 多1.

任取 $i \in \{0, 1, \dots, m+1\}, j \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, 有

$$S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = \text{span} \{ \mathcal{A} \setminus B_{i,j} \}. \quad (5.16)$$

拟插值算子

如下性质成立

$$\sum_{i,j} B_{ij}(x, y) \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} B_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

拟插值算子

如下性质成立

$$\sum_{i,j} B_{ij}(x, y) \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} B_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

定义拟插值算子(变差缩减算子)

$$\begin{aligned} V_{mn} : C(D) &\rightarrow S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}), \\ V_{mn}(f) &= \sum_{i,j} f\left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right) B_{ij}(x, y), \end{aligned} \quad (5.17)$$

它也是一个线性正算子.

拟插值算子

定义另一个拟插值算子

$$W_{mn}(f) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(f) B_{ij}(x, y), \quad (5.18)$$

其中 $\lambda_{ij}(f)$ 是如下的线性泛函

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(f) = & 2f\left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right) \\ & - \frac{1}{4} \left[f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{n}\right) + f\left(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

$W_{mn}(f)$ 虽然不是一个线性正算子,但它却有更高的逼近阶.

拟插值算子

定义另一个拟插值算子

$$W_{mn}(f) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(f) B_{ij}(x, y), \quad (5.18)$$

其中 $\lambda_{ij}(f)$ 是如下的线性泛函

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(f) = & 2f\left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right) \\ & - \frac{1}{4} \left[f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{n}\right) + f\left(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

$W_{mn}(f)$ 虽然不是一个线性正算子,但它却有更高的逼近阶.

可证

$$V_{mn}(f) \equiv f, \quad f = 1, x, y, xy,$$

$$W_{mn}(f) \equiv f, \quad f \in \mathbb{P}_2^{(2)}.$$

拟插值算子

定理

设紧集 K 为包含 D 的开集 Ω 的闭包. 则对充分大的 m, n , 如 $m, n \geq N_0$, 可得

(1) 设 $f \in C(K)$, 则

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \omega_K(f; \delta'_{mn});$$

(2) 若 $f \in C^1(D)$, 则

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \delta_{mn} \cdot \max \{ \omega_D(f_1; \delta_{mn}/2), \omega_D(f_2; \delta_{mn}/2) \};$$

(3) 若 $f \in C^2(D)$, 则

$$\|f - V_{mn}(f)\|_D \leq \frac{1}{4} \delta_{mn}^2 \cdot \|D^2 f\|.$$

其中 $\|\cdot\|_D$ 为函数在 D 上的上确界。

拟插值算子

定理

设 $f \in C(K)$, 且 $m, n \geq N_0$, 可得

(1) 当 $f \in C^2(D)$ 时, 则

$$\begin{aligned} \|f - W_{mn}(f)\|_D &\leq \frac{1}{2} \delta_{mn}^2. \\ \max\{\omega_D(f_{11}; \delta_{mn}/2), 2\omega_D(f_{12}; \delta_{mn}/2), \omega_D(f_{22}; \delta_{mn}/2)\}; \end{aligned} \quad (5.19)$$

(2) 当 $f \in C^3(D)$ 时,

$$\|f - W_{mn}(f)\|_D \leq \frac{1}{12} \delta_{mn}^3 \cdot \|D^3 f\|.$$