从而 $\dim\Lambda^r(V)=\binom{n}{r}$. 假设 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 线性相关. 设 $\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} a_{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0$

则~~要~~至少有一个 $a_{i_1\cdots i_r}\neq 0$. 不妨设 $a_{1\cdots r}\neq 0$. 将 $e_{r+1}\wedge\cdots\wedge e_n$ 与上式作外积有

设 $\{w^1,\cdots,w^n\}$ 是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的对偶基底.

$a_{1\cdots r}e_1\wedge\cdots\wedge e_r\wedge e_{r+1}\wedge\cdots\wedge e_n=0$. 从而 $0=a_{1\cdots r}e_1\wedge\cdots\wedge e_n(w^1,\cdots,w^n)=a_{1\cdots r}$ 矛盾. 故

$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$ 线性无关. 命题得证.

4. 定理 2.10. 向量 $v_1,\cdots,v_r\in V$. 线性相关的充要条件是: $v_1\wedge\cdots\wedge v_r=0$

证明: "$\Rightarrow$" 若 $v_1,\cdots,v_r$ 线性相关. 不妨设 $v_r=a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1}$. 则 $v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge v_r=$

$v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge(a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1})=0$ (反对称性)

"$\Leftarrow$" 若 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关 则可扩充为 V 的一组基 $\{v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$. 由于

($\Lambda^n(V)$ 的基)

$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n\neq 0$, 故 $v_1\wedge\cdots\wedge v_r\neq 0$

5. 练习 2-1. 设 $\theta^1,\cdots,\theta^r\in V^*$, $\dim V=m>r$, 证明: $\theta^1,\cdots,\theta^r$ 线性无关的充要条件是: $\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r\neq 0$

与 4 证法相同

6. 练习 2-4. 证明: 任一个二阶协变张量都可以写成一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量之和.

证明: 设 $x\in T_2(V)$, 设 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 令 $S(x)=\frac{1}{2}(\sigma_1x+\sigma_2x)$,

$A(x)=\frac{1}{2}(\sigma_1x-\sigma_2x)$. 则 $S(x)$ 为二阶对称张量. $A(x)$ 为二阶反对称张量, 且 $S(x)+A(x)=x$

7. 定理 2.11 (Cartan 引理) 设 $v_1,\cdots,v_r;w_1,\cdots,w_r$ 是 V 中两组向量, $r\le n=\dim V$.

满足: $\sum_{\alpha=1}^{r}v_\alpha\wedge w_\alpha=0$. 若 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 则 w_α 可表示成它们的线性组合: $w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta$ 且 $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$

证明: 由于 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 故可扩充为 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n$.

设 $w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta+\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_i$. 由于 $\sum_{\alpha=1}^{r}v_\alpha\wedge w_\alpha=0$. 代入得

$0=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\alpha\wedge v_\beta+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i=\sum_{1\le\alpha<\beta\le r}(a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha})v_\alpha\wedge v_\beta+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i$

由于 $\{v_i\wedge v_j\}$ $(1\le i<j\le n)$ 是 $\Lambda^2(V)$ 的一组基. 故 $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha i}=0$. 即 $w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta$