计算几何的数学基础

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

第一章 计算几何的数学基础

1-1 最佳一致逼近

什么是函数逼近?

用简单的函数$p(x)$近似地代替函数$f(x)$, 是计算数学中最基本的概念和方法之一. 近似代替又称为逼近.
函数$f(x)$称为被逼近的函数, $p(x)$称为逼近函数, 两者之差

$$R(x) = p(x) - f(x)$$

称为误差余项.

什么是函数逼近？

用简单的函数$p(x)$近似地代替函数$f(x)$，是计算数学中最基本的概念和方法之一. 近似代替又称为逼近.

函数$f(x)$称为被逼近的函数，$p(x)$称为逼近函数，两者之差

$$R(x) = p(x) - f(x)$$

称为误差余项.

函数逼近问题的一般提法：**对于赋范线性空间X，范数为$\|\cdot\|$. 给定的元素$x \in X$与X的一个相对简单且便于计算的非空子空间$Y \subset X$，问能否在Y中找到一个逼近x的元素y?**

函数逼近问题的一般化

1. 对于$x \in X$, 是否存在Y的一个点列$\{y_n\}$一致收敛于x, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0?$$

函数逼近问题的一般化

1. 对于$x \in X$, 是否存在Y的一个点列$\{y_n\}$一致收敛于x, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0?$$

2. 对于$x \in X$, 是否存在$y^* \in Y$, 使得

$$\|x - y^*\| = \inf_{y\in Y} \|x - y\|?$$

函数逼近问题的一般化

1. 对于$x \in X$, 是否存在Y的一个点列$\{y_n\}$一致收敛于x, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0?$$

2. 对于$x \in X$, 是否存在$y^* \in Y$, 使得

$$\|x - y^*\| = \inf_{y\in Y} \|x - y\|?$$

解决这些问题需要两个先决条件：一是X与Y的选择, 二是确定(1)的收敛速度与(2)的逼近程度（即误差函数）的度量，即范数的选择.

函数逼近问题的一般化

1. 对于$x \in X$, 是否存在Y的一个点列$\{y_n\}$一致收敛于x, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0?$$

2. 对于$x \in X$, 是否存在$y^* \in Y$, 使得

$$\|x - y^*\| = \inf_{y\in Y} \|x - y\|?$$

解决这些问题需要两个先决条件：一是X与Y的选择, 二是确定(1)的收敛速度与(2)的逼近程度（即误差函数）的度量，即范数的选择.

如果范数选为一致范数$\|\cdot\|_\infty$，那么问题(1)就称为一致逼近问题, (2)称为最佳逼近问题(或最佳一致逼近).

赋范线性空间

定义

设X为线性空间, 若定义在X上的实函数$\|\cdot\|$满足如下三点:

1. $\|x\| \geq 0$, 且$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $x \in X$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$,

则称$\|\cdot\|$是线性空间X的范数或模, X称为赋范线性空间.

实例

例

对线性空间$\mathbb{R}^n$, 按如下范数构成赋范线性空间: 设$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

1. $||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $1-$范数.
2. $||\boldsymbol{x}||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, 欧式范数或$2-$范数, 构成欧式空间.
3. $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, *Chebyshev*范数或$\infty-$范数.

实例

例

设$[a,b]$上所有连续函数的集合为$C[a,b]$, 其构成一无限维线性空间. $C[a,b]$对如下定义的两类范数分别构成赋范线性空间：

1. L_1范数

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx,$$

2. Chebyshev范数(也称为∞-范数或一致范数)

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

赋范线性空间上的最佳逼近问题

定义

设Y是赋范线性空间X的一个线性子空间, $x \in X$, 则称

$$\Delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y|| \tag{1.1}$$

为子空间Y对元素x的最佳逼近, 称Y为逼近子空间. 满足

$$||x - y^*|| = \Delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||$$

的Y中元素y^*称为x在Y中的最佳逼近元.

赋范线性空间上的最佳逼近问题

定义

设Y是赋范线性空间X的一个线性子空间, $x \in X$, 则称

$$\Delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y|| \tag{1.1}$$

为子空间Y对元素x的最佳逼近, 称Y为逼近子空间. 满足

$$||x - y^*|| = \Delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||$$

的Y中元素y^*称为x在Y中的最佳逼近元.

赋范线性空间上的最佳逼近所研究的核心问题是：最佳逼近元的**存在性**、**唯一性**、**特征定理**、**构造**.

赋范线性空间上的最佳逼近问题

赋范线性空间X的范数$||\cdot||$称为严格凸的，如果当$x, y \in X$，$x \neq y$且$||x|| = ||y|| = 1$时，有$||x+y|| < 2$.

定理

赋范线性空间上的最佳逼近问题

赋范线性空间X的范数$||\cdot||$称为严格凸的，如果当$x, y \in X$, $x \neq y$且$||x|| = ||y|| = 1$时，有$||x + y|| < 2$.

定理

1. 设X是赋范线性空间，Y是X的一个有限维子空间. 则对任意的$x \in X$，它在Y中都存在最佳逼近元.

赋范线性空间上的最佳逼近问题

赋范线性空间X的范数$||\cdot||$称为严格凸的，如果当$x, y \in X$, $x \neq y$且$||x|| = ||y|| = 1$时，有$||x+y|| < 2$.

定理

1. 设X是赋范线性空间，Y是X的一个有限维子空间. 则对任意的$x \in X$，它在Y中都存在最佳逼近元.
2. 设X是严格凸的赋范线性空间，Y是X的一个有限维子空间. 则对任意的$x \in X$，它在Y中的最佳逼近元存在且唯一.

赋范线性空间上的最佳逼近问题

赋范线性空间X的范数$\|\cdot\|$称为严格凸的，如果当$x, y \in X$，$x \neq y$且$\|x\| = \|y\| = 1$时，有$\|x+y\| < 2$.

定理

1. 设X是赋范线性空间，Y是X的一个有限维子空间. 则对任意的$x \in X$，它在Y中都存在最佳逼近元.
2. 设X是严格凸的赋范线性空间，Y是X的一个有限维子空间. 则对任意的$x \in X$，它在Y中的最佳逼近元存在且唯一.

但是某些范数并不是严格凸的（例如，赋范线性空间$C[a, b]$上定义的范数$\|\cdot\|_\infty$），因此证明最佳逼近元的存在唯一性有时不能直接采用如上结论.

1-1 最佳一致逼近

一致逼近问题

最为常见的函数是连续函数，最为简单的连续函数则莫过于多项式函数.

一致逼近问题

最为常见的函数是连续函数，最为简单的连续函数则莫过于多项式函数. 因此, 人们首先考虑了多项式函数对一般连续函数的一致逼近问题.

一致逼近问题

最为常见的函数是连续函数，最为简单的连续函数则莫过于多项式函数. 因此，人们首先考虑了多项式函数对一般连续函数的一致逼近问题.

设$X=C[a,b]$, Y为$[a,b]$上的多项式空间，那么此时一致逼近问题为：**对X中的一个函数$f(x)$, 能否找Y上的函数使其充分“接近”$f(x)$?**

一致逼近问题

最为常见的函数是连续函数，最为简单的连续函数则莫过于多项式函数. 因此，人们首先考虑了多项式函数对一般连续函数的一致逼近问题.

设$X = C[a,b]$, Y为$[a,b]$上的多项式空间，那么此时一致逼近问题为：**对X中的一个函数$f(x)$，能否找Y上的函数使其充分“接近”$f(x)$?**

换句话说: **对任意的$\varepsilon > 0$，是否都存在多项式$p(x) \in Y$，使得**

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon?$$

一致逼近问题

最为常见的函数是连续函数，最为简单的连续函数则莫过于多项式函数. 因此，人们首先考虑了多项式函数对一般连续函数的一致逼近问题.

设$X = C[a, b]$, Y为$[a, b]$上的多项式空间，那么此时一致逼近问题为：**对X中的一个函数$f(x)$，能否找Y上的函数使其充分"接近"$f(x)$?**

换句话说: **对任意的$\varepsilon > 0$，是否都存在多项式$p(x) \in Y$，使得**

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon?$$

这个问题称为连续函数的一致逼近问题，也称为Weierstrass逼近问题.

Weierstrass第一逼近定理

定理（Weierstrass第一逼近定理）

设$f(x) \in C[a,b]$，那么对于任意给定的$\epsilon > 0$，都存在这样的代数多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| = \|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

Weierstrass第一逼近定理

定理 (Weierstrass第一逼近定理)

设$f(x) \in C[a,b]$，那么对于任意给定的$\epsilon > 0$，都存在这样的代数多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| = \|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

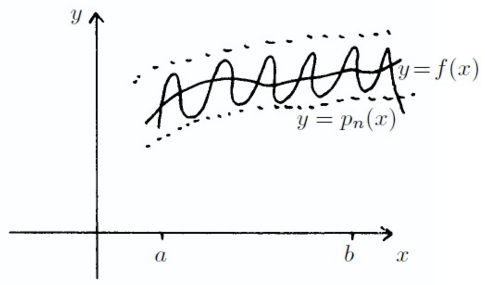
Weierstrass第一逼近定理则表明,**对于闭区间上任意连续函数, 均存在一代数多项式序列对其进行一致逼近**. 这为人们采用多项式函数逼近一般的连续函数提供了理论基础.

几何解释

Weierstrass逼近定理在几何上的意义是非常明显的：对区间$[a, b]$上的连续函数f与任意正数ϵ, 我们可以找一条宽度为2ϵ的带状区域，使得f通过其中线（可以想象为直径为2ϵ的水管将f包在里面），那么一定存在n次多项式p_n，使得p_n的图形全部落在带状区域内。

几何解释

Weierstrass逼近定理在几何上的意义是非常明显的：对区间$[a,b]$上的连续函数f与任意正数ϵ，我们可以找一条宽度为2ϵ的带状区域，使得f通过其中线（可以想象为直径为2ϵ的水管将f包在里面），那么一定存在n次多项式p_n，使得p_n的图形全部落在带状区域内。



Karl Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (卡尔・特奥多尔・威廉・魏尔斯特拉斯, 1815-1897), 德国数学家，被誉为"现代分析之父"。生于威斯特法伦的欧斯腾费尔德，逝于柏林。

Karl Weierstrass (来自百度百科)

在数学分析领域中的最大贡献，是在柯西、阿贝尔等开创的数学分析的严格化潮流中，以$\varepsilon-\delta$语言，系统建立了实分析和复分析的基础，基本上完成了分析的算术化。他引进了一致收敛的概念，并由此阐明了函数项级数的逐项微分和逐项积分定理。在建立分析基础的过程中，引进了实数轴和n维欧氏空间中一系列的拓扑概念，并将黎曼积分推广到在一个可数集上的不连续函数之上。1872年，魏尔斯特拉斯给出了第一个处处连续但处处不可微函数的例子，使人们意识到连续性与可微性的差异，由此引出了一系列诸如皮亚诺曲线等反常性态的函数的研究。

Karl Weierstrass (来自百度百科)

在数学分析领域中的最大贡献，是在柯西、阿贝尔等开创的数学分析的严格化潮流中，以$\varepsilon-\delta$语言，系统建立了实分析和复分析的基础，基本上完成了分析的算术化。他引进了一致收敛的概念，并由此阐明了函数项级数的逐项微分和逐项积分定理。在建立分析基础的过程中，引进了实数轴和n维欧氏空间中一系列的拓扑概念，并将黎曼积分推广到在一个可数集上的不连续函数之上。1872年，魏尔斯特拉斯给出了第一个处处连续但处处不可微函数的例子，使人们意识到连续性与可微性的差异，由此引出了一系列诸如皮亚诺曲线等反常性态的函数的研究。

魏尔斯特拉斯在获得中学教师资格后开始了漫长的中学教师生活。他在两处偏僻的地方中学度过了包括30岁到40岁的这段数学家的黄金岁月。

Karl Weierstrass

1. 学术贡献：hyperelliptic integrals, Abel functions, power series, entire function, uniform convergence, determinant, bilinear form, quadratic form, $\epsilon - \delta$, $\cdots$

Karl Weierstrass

1. 学术贡献：hyperelliptic integrals, Abel functions, power series, entire function, uniform convergence, determinant, bilinear form, quadratic form, $\epsilon - \delta$, $\cdots$
2. 间接学术贡献：计算几何(逼近论、几何造型等).

Karl Weierstrass

1. 学术贡献：hyperelliptic integrals, Abel functions, power series, entire function, uniform convergence, determinant, bilinear form, quadratic form, $\epsilon - \delta$, $\cdots$
2. 间接学术贡献：计算几何(逼近论、几何造型等).
3. 主要弟子：H. A. Schwarz(1843- 1921)、Sofya Kovalevskaya (1850-1891)、G. Cantor (1845-1918)、Mittag – Leffler (1846-1927), **D. Hilbert**(1862-1943).

S.N. Bernstein

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968)，俄国数学家。

Bernstein多项式

Bernstein多项式 (S.N. Bernstein, 1912)

$$B_n^f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

Bernstein多项式

Bernstein多项式 (S.N. Bernstein, 1912)

$$B_n^f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

起源于二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2.2}$$

Bernstein多项式

对上式两端对x求导后乘以$\frac{x}{n}$,

$$x(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k y^{n-k}. \tag{2.3}$$

Bernstein多项式

对上式两端对x求导后乘以$\frac{x}{n}$,

$$x(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^ky^{n-k}. \tag{2.3}$$

对上式两端对x求导后乘以$\frac{x}{n}$,

$$\frac{x}{n}(x+y)^{n-1}+\frac{n-1}{n}x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2x^ky^{n-k}. \tag{2.4}$$

Bernstein多项式

令$y = 1 - x$，分别代入上面三式, 可得连续函数1, x, x^2的Bernstein多项式为：

Bernstein多项式

令$y = 1 - x$，分别代入上面三式, 可得连续函数1, x, x^2的Bernstein多项式为:

$$B_n^1(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{2.5}$$

$$B_n^x(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = x, \tag{2.6}$$

$$B_n^{x^2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \tag{2.7}$$

Bernstein多项式

从最后一项，可得x^2的估计式

$$|x^2 - B_n^{x^2}(x)| = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Bernstein多项式

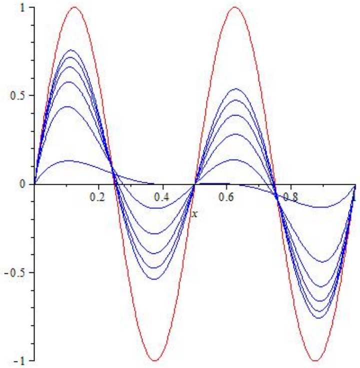
从最后一项，可得x^2的估计式

$$|x^2 - B_n^{x^2}(x)| = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

因此，当$i=0,1$时，Bernstein多项式$B_n^{x^i}(x) = x^i$。当n越大时，$B_n^{x^2}(x)$与x^2越接近。这也是利用Bernstein多项式来证明Weierstrass定理的思路。

实例

设$f(x) = \sin(4\pi x)$, $n = 5, 10, \cdots, 40.$



导函数的一致逼近性

定理

设$f(x) \in C^1[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f'(x) - \left(B_n^f\right)'(x) \right\|_\infty = 0.$$

Bernstein基函数

Bernstein多项式

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2.8}$$

Bernstein基函数

Bernstein多项式

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2.8}$$

多项式集合

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \cdots, n \tag{2.9}$$

构成一元n次多项式空间$\mathbb{P}_n$的一组基，称为**Bernstein基函数**，其对计算几何乃至其他学科有非常重要的作用.

纪念Bernstein基函数100周年

Computer Aided Geometric Design 29 (2012) 379–419

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Computer Aided Geometric Design

www.elsevier.com/locate/cagd

The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective ☆

Rida T. Farouki

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Davis, CA 95616, United States

Weierstrass逼近的缺点

利用Bernstein多项式去逼近闭区间上的连续函数时，在整个区间上具有良好的一致逼近性质，但也存在一定的缺点：

Weierstrass逼近的缺点

利用Bernstein多项式去逼近闭区间上的连续函数时, 在整个区间上具有良好的一致逼近性质，但也存在一定的缺点：

1. 收敛速度太慢(收敛阶在后续内容中介绍);

Weierstrass逼近的缺点

利用Bernstein多项式去逼近闭区间上的连续函数时，在整个区间上具有良好的一致逼近性质，但也存在一定的缺点：

1. 收敛速度太慢(收敛阶在后续内容中介绍);
2. 要想提高逼近精度，就只好增加多项式的次数. 然而随着多项式次数的增高，可能出现数值不稳定现象.

Weierstrass逼近的缺点

利用Bernstein多项式去逼近闭区间上的连续函数时, 在整个区间上具有良好的一致逼近性质，但也存在一定的缺点：

1. 收敛速度太慢(收敛阶在后续内容中介绍);
2. 要想提高逼近精度, 就只好增加多项式的次数. 然而随着多项式次数的增高, 可能出现数值不稳定现象.

因为所有多项式集合构成的空间是连续函数空间中的一个无限维子空间，我们不妨考虑**利用有限维子空间对连续函数进行最佳逼近**，而最简单的有限维子空间同样是多项式空间。

1-1 最佳一致逼近

最佳一致逼近问题的提出

对于指定的非负整数n，次数不超过n的实系数多项式集合

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\forall i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

为$C[a,b]$的$n+1$维线性子空间。

最佳一致逼近问题的提出

对于指定的非负整数n，次数不超过n的实系数多项式集合

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\forall i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

为$C[a,b]$的$n+1$维线性子空间。

考虑最佳逼近问题：**对给定函数$f(x) \in C[a,b]$，希望在$\mathbb{P}_n$中寻求多项式$p(x)$，使得它与$f(x)$的偏差**

$$\Delta(f,p) := ||f-p||_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$$

尽可能的小.

最佳一致逼近问题的提出

对于指定的非负整数n，次数不超过n的实系数多项式集合

$$\mathbb{P}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\forall i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

为$C[a,b]$的$n+1$维线性子空间。

考虑最佳逼近问题：**对给定函数$f(x) \in C[a,b]$，希望在$\mathbb{P}_n$ 中寻求多项式$p(x)$，使得它与$f(x)$的偏差**

$$\Delta(f,p) := ||f-p||_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$$

尽可能的小.

这个最佳逼近问题称为Chebyshev逼近问题。由于$\|\cdot\|_\infty$是一致范数，因此此逼近问题也称为最佳一致逼近问题。

最佳一致逼近问题的提出

称

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n)=\inf_{p(x)\in\mathbb{P}_n}\Delta(f,p)$$

为$f(x)$关于$\mathbb{P}_n$的最佳逼近，也称为Chebyshev逼近.

最佳一致逼近问题的提出

称

$$\Delta(f, \mathbb{P}_n) = \inf_{p(x)\in\mathbb{P}_n} \Delta(f, p)$$

为$f(x)$关于$\mathbb{P}_n$的最佳逼近, 也称为Chebyshev逼近.

称满足

$$\Delta(f, p^*) = \Delta(f, \mathbb{P}_n) = \inf_{p(x)\in\mathbb{P}_n} \Delta(f, p)$$

的多项式$p^*(x) \in \mathbb{P}_n$为$f(x)$在$[a, b]$上的n次最佳一致逼近代数多项式, 简称为**最佳逼近多项式**.

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots ,$$

再由Weierstrass第一定理，有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0 (n \to \infty).$$

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots ,$$

再由Weierstrass第一定理，有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0 (n \to \infty).$$

研究最佳一致逼近，需要解决如下几个问题：

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots ,$$

再由Weierstrass第一定理，有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0(n \to \infty).$$

研究最佳一致逼近，需要解决如下几个问题：

1. 最佳逼近多项式是否存在?

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots,$$

再由Weierstrass第一定理，有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0 (n \to \infty).$$

研究最佳一致逼近，需要解决如下几个问题：

1. 最佳逼近多项式是否存在?
2. 如果最佳逼近多项式存在，那么它是否唯一?

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots ,$$

再由Weierstrass第一定理, 有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0(n \to \infty).$$

研究最佳一致逼近, 需要解决如下几个问题:

1. 最佳逼近多项式是否存在?
2. 如果最佳逼近多项式存在, 那么它是否唯一?
3. 最佳逼近多项式的特征是什么?

最佳一致逼近需解决的问题

最佳逼近$\Delta(f,\mathbb{P}_n)$显然满足

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \geq \Delta(f,\mathbb{P}_{n+1}) \geq \cdots ,$$

再由Weierstrass第一定理，有

$$\Delta(f,\mathbb{P}_n) \to 0 (n \to \infty).$$

研究最佳一致逼近，需要解决如下几个问题：

1. 最佳逼近多项式是否存在?
2. 如果最佳逼近多项式存在，那么它是否唯一?
3. 最佳逼近多项式的特征是什么?
4. 如何构造最佳逼近多项式?

存在性定理及其证明

定理（Borel定理）

对任意给定的$f(x) \in C[a,b]$, 总存在$p^*(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\Delta(f, p^*) = \Delta(f, \mathbb{P}_n).$$

偏差点集

对给定函数$f(x) \in C[a,b]$与多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$，点集

$$E^+(f-p) = \{x \mid f(x) - p(x) = \Delta(f,p), x \in [a,b]\},$$
$$E^-(f-p) = \{x \mid f(x) - p(x) = -\Delta(f,p), x \in [a,b]\},$$

分别称为$f(x) - p(x)$在$[a,b]$上的正、负偏差点集。

偏差点集

对给定函数$f(x) \in C[a,b]$与多项式$p(x) \in \mathbb{P}_n$，点集

$$\begin{aligned} E^{+}(f-p) &= \{x \mid f(x)-p(x) = \Delta(f,p), x \in [a,b]\}, \\ E^{-}(f-p) &= \{x \mid f(x)-p(x) = -\Delta(f,p), x \in [a,b]\}, \end{aligned}$$

分别称为$f(x)-p(x)$在$[a,b]$上的正、负偏差点集。

称点集

$$E(f-p) = E^{+}(f-p) \cup E^{-}(f-p)$$

为$f(x)-p(x)$在$[a,b]$上的偏差点集(也称偏离点集).

交错点组

定义

如果点集$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset E(f-p)$满足:

$$f(x_j) - p(x_j) = -[f(x_{j+1}) - p(x_{j+1})], \quad j = 1, 2, \cdots, k-1,$$

则称它为$f(x) - p(x)$在$[a, b]$上的交错偏差点组, 简称交错点组.
由k个点形成的交错点组称为是极大的, 如果不存在由k个以上点组成的交错点组.

交错点组

定义

如果点集$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset E(f-p)$满足:

$$f(x_j) - p(x_j) = -[f(x_{j+1}) - p(x_{j+1})], \quad j = 1, 2, \cdots, k-1,$$

则称它为$f(x) - p(x)$在$[a, b]$上的交错偏差点组, 简称交错点组. 由k个点形成的交错点组称为是极大的, 如果不存在由k个以上点组成的交错点组.

事实：如果多项式$p^*(x)$为$f(x)$在$[a, b]$上的最佳逼近多项式, 那么$f(x) - p^*(x)$在$[a, b]$上的正、负偏差点一定同时存在.

Chebyshev定理(特征定理)

定理（Chebyshev定理）

设$f(x) \in C[a,b]$, 则$p^*(x) \in \mathbb{P}_n$是$f(x)$在$[a,b]$上的n次最佳逼近多项式的充要条件是, $f(x) - p^*(x)$在$[a,b]$上有至少$n+2$个点组成的交错点组(称为**Chebyshev交错点组**.).

Chebyshev定理(特征定理)

定理（Chebyshev定理）

设$f(x) \in C[a,b]$, 则$p^*(x) \in \mathbb{P}_n$是$f(x)$在$[a,b]$上的n次最佳逼近多项式的充要条件是, $f(x) - p^*(x)$在$[a,b]$上有至少$n+2$个点组成的交错点组(称为**Chebyshev交错点组**.).

例

设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$于$\mathbb{P}_0$中的最佳逼近多项式为

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[\min_{a\le x\le b} f(x) + \max_{a\le x\le b} f(x)\right].$$

推论

推论

设$f(x) \in C[a,b]$, 其在$\mathbb{P}_n$中的最佳逼近多项式存在且唯一.

推论

推论

设$f(x) \in C[a,b]$, 其在$\mathbb{P}_n$中的最佳逼近多项式存在且唯一.

推论

设$f(x) \in C[a,b]$, 如果在$[a,b]$上$f(x)$的$n+1$阶导数存在, 并且$f^{(n+1)}(x)$在区间(a,b)上保号(恒正或恒负), 那么其Chebyshev交错点组唯一, 且区间端点a,b属于Chebyshev交错组.

实例

例

设 $f(x) \in C^2[a,b]$,且 $f''(x) > 0(a \leq x \leq b)$, 求 $f(x)$ 于 $\mathbb{P}_1$ 中的最佳逼近多项式.

实例

例

设$f(x) \in C^2[a,b]$,且$f''(x) > 0(a \le x \le b)$, 求$f(x)$于$\mathbb{P}_1$ 中的最佳逼近多项式.

解: 设$f(x)$在$[a,b]$上的最佳逼近多项式为$p^*(x) = Ax + B \in \mathbb{P}_1$, 其中$A, B \in \mathbb{R}$.

实例

例

设$f(x) \in C^2[a,b]$,且$f''(x) > 0 (a \leq x \leq b)$, 求$f(x)$于$\mathbb{P}_1$ 中的最佳逼近多项式.

解: 设$f(x)$在$[a,b]$上的最佳逼近多项式为$p^*(x) = Ax + B \in \mathbb{P}_1$, 其中$A, B \in \mathbb{R}$.
由如上推论可知，Chebyshev交错点组点数恰好为3, 且a, b都属于交错点组. 那么在区间(a,b)上存在一个$f(x) - p^*(x)$交错点, 设其为c.

实例

例

设$f(x) \in C^2[a,b]$,且$f''(x) > 0(a \le x \le b)$, 求$f(x)$于$\mathbb{P}_1$ 中的最佳逼近多项式.

解: 设$f(x)$在$[a,b]$上的最佳逼近多项式为$p^*(x) = Ax + B \in \mathbb{P}_1$, 其中$A, B \in \mathbb{R}$.
由如上推论可知，Chebyshev交错点组点数恰好为3, 且a, b都属于交错点组. 那么在区间(a,b)上存在一个$f(x) - p^*(x)$交错点, 设其为c. c必为$f(x) - p^*(x)$的稳定点,即

$$f'(c) - (p^*)'(c) = f'(c) - A = 0,$$

于是

$$A = f'(c).$$

实例

再由点组的交错性，可得

$$f(a) - p^*(a) = -[f(c) - p^*(c)] = f(b) - p^*(b). \tag{3.1}$$

实例

再由点组的交错性，可得

$$f(a) - p^*(a) = -[f(c) - p^*(c)] = f(b) - p^*(b). \tag{3.1}$$

求解此方程，可得

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad B = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a + c}{2} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

实例

再由点组的交错性，可得

$$f(a)-p^*(a)=-[f(c)-p^*(c)]=f(b)-p^*(b). \tag{3.1}$$

求解此方程，可得

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad B=\frac{f(a)+f(c)}{2}-\frac{a+c}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

从而最佳逼近多项式$p^*(x)$为

$$p^*(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{f(a)+f(c)}{2}-\frac{a+c}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

其中c由

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

所决定

实例

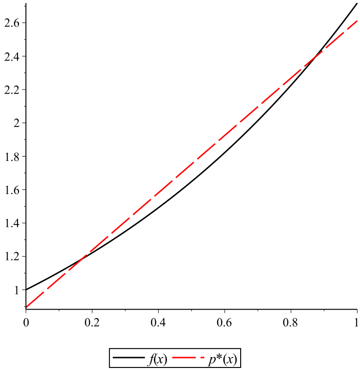
1. 设$f(x)=e^x$, 区间$[a,b]=[0,1]$, 那么其一次最佳逼近多项式为

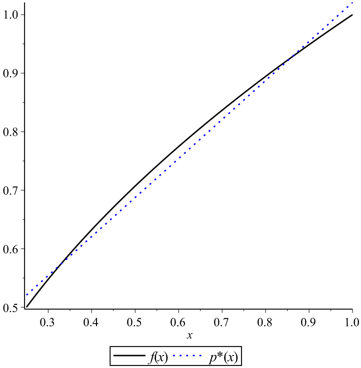
$$p^*(x)=(e-1)x+\frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)].$$

实例

1. 设$f(x) = e^x$, 区间$[a,b] = [0,1]$, 那么其一次最佳逼近多项式为
$$p^*(x) = (e-1)x + \frac{1}{2}[e - (e-1)\ln(e-1)].$$
2. 设$f(x) = \sqrt{x}$, 区间$[a,b] = [1/4,1]$, 那么其一次最佳逼近多项式为
$$p^*(x) = \frac{17}{48} + \frac{2}{3}x. \tag{3.2}$$

实例


2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
f(x)
p*(x)


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x
f(x)
p*(x)

Kolmogorov定理

定理（Kolmogorov定理)

多项式$p^*(x)$是$f(x) \in C[a,b]$在$\mathbb{P}_n$中的最佳一致逼近多项式，当且仅当对所有的$q(x) \in \mathbb{P}_n$，均有

$$\max_{x_i \in E(f-p^*)} \{[f(x_i) - p^*(x_i)]\, q(x_i)\} \geq 0. \tag{3.3}$$

最小零偏差多项式

考虑如下**问题**：

最小零偏差多项式

考虑如下**问题**：*在n次多项式类$\mathbb{P}_n$中，寻求如此的多项式$p_n^*(x)$，使其在给定的有界闭区间上与零的偏差尽可能地小.*

最小零偏差多项式

考虑如下**问题**：在n次多项式类$\mathbb{P}_n$中，寻求如此的多项式$p_n^*(x)$，使其在给定的有界闭区间上与零的偏差尽可能地小.

它被称为最小零偏差多项式问题(或最小偏零多项式问题)，这是一个具有重要理论和实际意义的问题.

最小零偏差多项式

考虑如下**问题**：*在n次多项式类$\mathbb{P}_n$中，寻求如此的多项式$p_n^*(x)$，使其在给定的有界闭区间上与零的偏差尽可能地小.*

它被称为最小零偏差多项式问题(或最小偏零多项式问题)，这是一个具有重要理论和实际意义的问题.

俄国数学家Chebyshev发现，此类问题同多项式(为什么是多项式？)

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \tag{3.4}$$

有关.

最小零偏差多项式

为了防止出现平凡结果，我们设$\widetilde{\mathbb{P}}_n$表示最高次项x^n的系数为1的所有n次多项式的集合.

最小零偏差多项式

为了防止出现平凡结果，我们设$\widetilde{\mathbb{P}}_n$表示最高次项x^n的系数为1的所有n次多项式的集合.

那么最小零偏差多项式问题是：在区间$[a,b]$上，寻找$p_n^*(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n$，使得

$$\|p_n^*-0\|_\infty=\|p_n^*\|_\infty=\inf_{p_n(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n}\|p_n\|_\infty=\inf_{p_n(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n}\|p_n-0\|_\infty. \tag{3.5}$$

最小零偏差多项式

为了防止出现平凡结果，我们设$\widetilde{\mathbb{P}}_n$表示最高次项x^n的系数为1的所有n次多项式的集合.
那么最小零偏差多项式问题是：在区间$[a,b]$上，寻找$p_n^*(x) \in \widetilde{\mathbb{P}}_n$，使得

$$\|p_n^* - 0\|_\infty = \|p_n^*\|_\infty = \inf_{p_n(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n} \|p_n\|_\infty = \inf_{p_n(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n} \|p_n - 0\|_\infty. \tag{3.5}$$

由于$\widetilde{\mathbb{P}}_n$中的任意多项式$p_n(x)$可表示为

$$p_n(x) = x^n - (c_{n-1}x^{n-1} + \cdots c_1 x + c_0), \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

最小零偏差多项式

取$f(x)=x^n$, 如上最小零偏差多项式问题转化为: 在区间$[a,b]$上, 寻找x^n在$\mathbb{P}_{n-1}$上的最佳逼近多项式的问题, 即寻找$p_{n-1}^*(x)\in\mathbb{P}_{n-1}$, 使得

$$\|x^n-p_{n-1}^*\|_\infty=\inf_{p_{n-1}(x)\in\mathbb{P}_{n-1}}\|x^n-p_{n-1}(x)\|_\infty.$$

最小零偏差多项式

取$f(x)=x^n$, 如上最小零偏差多项式问题转化为: 在区间$[a,b]$上, 寻找x^n在$\mathbb{P}_{n-1}$上的最佳逼近多项式的问题, 即寻找$p_{n-1}^*(x)\in\mathbb{P}_{n-1}$, 使得

$$\|x^n-p_{n-1}^*\|_\infty=\inf_{p_{n-1}(x)\in\mathbb{P}_{n-1}}\|x^n-p_{n-1}(x)\|_\infty.$$

由Chebyshev定理知: $p_{n-1}^*(x)$为x^n的最佳$n-1$次逼近多项式当且仅当误差函数$x^n-p_{n-1}^*(x)$ 在区间$[a,b]$上有至少$n+1$个点组成的交错点组.

最小零偏差多项式

换句话说：寻找$p_n^*(x) \in \widetilde{\mathbb{P}}_n$，使得$p_n^*(x)$在$[a,b]$的$n+1$个点上依次以正负交错的符号取到它的绝对值的最大值，即$\|p_n^*\|_\infty$.

最小零偏差多项式

换句话说：寻找$p_n^*(x) \in \widetilde{\mathbb{P}}_n$，使得$p_n^*(x)$在$[a,b]$的$n+1$个点上依次以正负交错的符号取到它的绝对值的最大值，即$\|p_n^*\|_\infty$.

三角函数$\cos n\theta$恰好满足在$n+1$个点

$$\theta_i = \frac{i\pi}{n}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

处依次改变符号，并轮流达到其最大和最小值± 1.

Chebyshev多项式

设$[a,b]=[-1,1]$. 函数

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \qquad -1\le x\le 1 \tag{3.6}$$

满足递推公式:

Chebyshev多项式

设$[a,b]=[-1,1]$. 函数

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\qquad -1\le x\le 1 \tag{3.6}$$

满足递推公式:

$$\begin{cases} T_0(x)=1, T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{3.7}$$

Chebyshev多项式

设$[a, b] = [-1, 1]$. 函数

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{3.6}$$

满足递推公式:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{3.7}$$

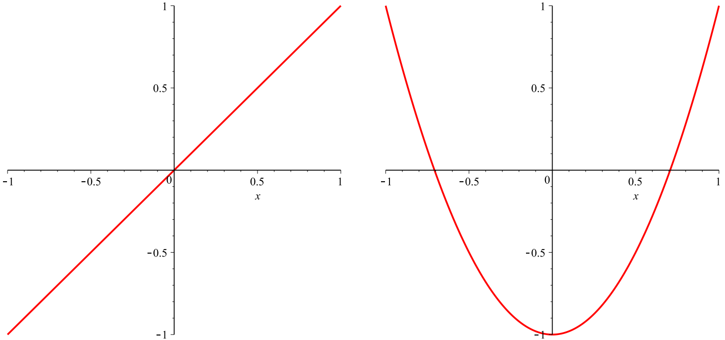
$T_n(x)$确实是关于x的n次多项式. $T_n(x)(n = 0, 1, \cdots)$称为第一类Chebyshev多项式, 简称Chebyshev多项式.

Chebyshev多项式

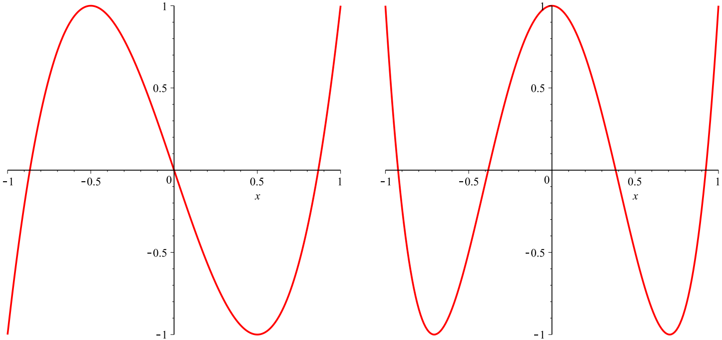
常用的低次Chebyshev多项式：

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1
\end{aligned}
$$

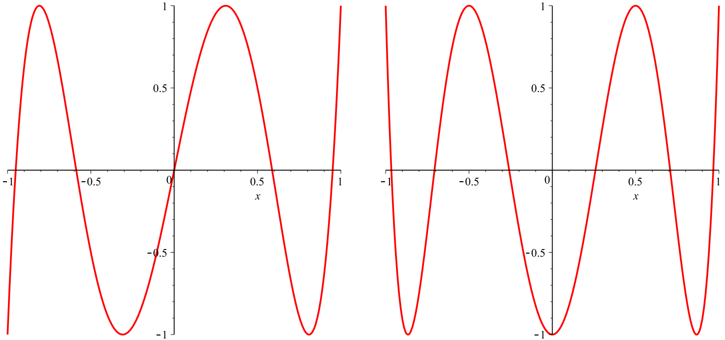
1-2次Chebyshev多项式



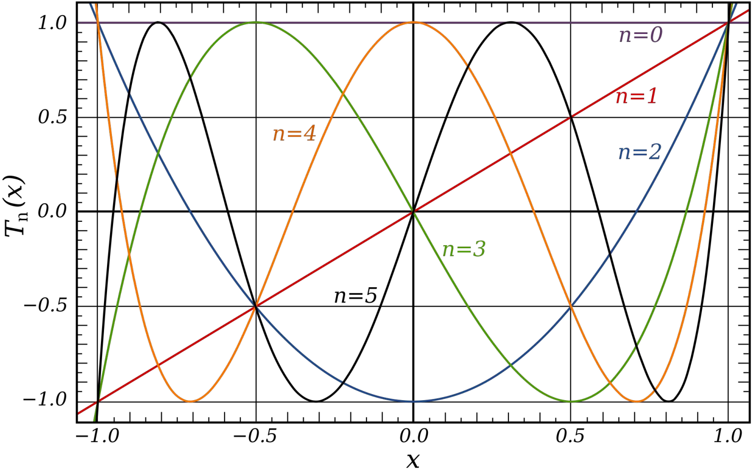
3-4次Chebyshev多项式



5-6次Chebyshev多项式



0-6次Chebyshev多项式



Chebyshev多项式的性质

Chebyshev多项式$T_n(x)$具有如下基本性质：

1. $T_n(x)$是n次代数多项式，且当$n \geq 1$时，最高次项系数为2^{n-1}.

Chebyshev多项式的性质

Chebyshev多项式$T_n(x)$具有如下基本性质：

1. $T_n(x)$是n次代数多项式，且当$n \geq 1$时，最高次项系数为2^{n-1}.
2. 当$x \in [-1,1]$时，$|T_n(x)| \leq 1$. 在点集

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

上$T_n(x)$依次以正负交错的符号取到它的绝对值的最大值1.

Chebyshev多项式的性质

Chebyshev多项式$T_n(x)$具有如下基本性质：

1. $T_n(x)$是n次代数多项式，且当$n \geq 1$时，最高次项系数为2^{n-1}.
2. 当$x \in [-1,1]$时，$|T_n(x)| \leq 1$. 在点集

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

   上$T_n(x)$依次以正负交错的符号取到它的绝对值的最大值1.
3. $T_n(x)$在$(-1,1)$上有n个不同的实根

$$x_k = \cos\left(\frac{2(n-k)+1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Chebyshev多项式的性质(续)

4. $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$. 即$T_n(x)$随n为奇数或偶数而分别是$[-1, 1]$上的奇函数或偶函数.

Chebyshev多项式的性质(续)

4. $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$. 即$T_n(x)$随n为奇数或偶数而分别是$[-1,1]$上的奇函数或偶函数.
5. Chebyshev多项式系$\{T_n(x)\}$具有正交性:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi, & m=n=0, \\ \pi/2, & m=n\neq 0, \\ 0, & m\neq n. \end{cases}$$

最佳偏零多项式

定理

当$n \geq 1$时，在首项x^n系数为*1*的所有n次多项式中，

$$p_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$$

是$[-1, 1]$上唯一的最小偏零多项式，其偏差为$1/2^{n-1}$.

最佳偏零多项式

定理

当$n \geq 1$时，在首项x^n系数为1的所有n次多项式中，

$$p_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$$

是$[-1,1]$上唯一的最小偏零多项式，其偏差为$1/2^{n-1}$.
即对任意的$p_n(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n$，有

$$2^{1-n} = \|p_n^*\|_\infty = \|2^{1-n}T_n\|_\infty = \inf_{p_n(x)\in\tilde{\mathbb{P}}_n} \|p_n\|_\infty.$$

最佳偏零多项式

定理

当$n \geq 1$时，在首项x^n系数为1的所有n次多项式中，

$$p_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$$

是$[-1,1]$上唯一的最小偏零多项式，其偏差为$1/2^{n-1}$.
即对任意的$p_n(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n$，有

$$2^{1-n} = \|p_n^*\|_\infty = \|2^{1-n}T_n\|_\infty = \inf_{p_n(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n} \|p_n\|_\infty.$$

$p_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$也称为最佳偏零多项式.