计算几何的数学基础

朱春钢

Email: cgzhu@dlut.edu.cn

大连理工大学 数学科学学院 大黑楼A1116

2019年秋季

1-2 最佳平方逼近

内积空间

定义

假设X 是实线性空间, 如果其上定义一个满足如下性质的二元实值函数$(\cdot,\cdot)$:

1. $(x,y)=(y,x)$, $\forall x,y\in X$,
2. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, $\forall x,y\in X$, $\lambda\in\mathbb{R}$,
3. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$,
4. $(x,x)\geq 0$, $\forall x\in X$, 且$(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0$,

则称实值函数$(\cdot,\cdot)$为X上的内积, 而X称为内积空间.

内积空间的范数

对于内积空间X, 如果$x, y \in X$, 满足$(x, y) = 0$, 称x, y是正交的.
对任意的$x \in X$, 称

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.1}$$

为x的长度.

内积空间的范数

对于内积空间X，如果$x, y \in X$，满足$(x, y) = 0$，称x, y是正交的.
对任意的$x \in X$，称

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.1}$$

为x的长度.
内积空间X满足如下性质：

1. 平行四边形法则. 任取$x, y \in X$，则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

内积空间的范数

对于内积空间X, 如果$x, y \in X$, 满足$(x, y) = 0$, 称x, y是正交的.
对任意的$x \in X$, 称

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.1}$$

为x的长度.
内积空间X满足如下性质:

1. 平行四边形法则. 任取$x, y \in X$, 则

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Schwarz不等式. 任取$x, y \in X$, 则

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

内积空间的范数

对于内积空间X，如果$x, y \in X$，满足$(x, y) = 0$，称x, y是正交的.
对任意的$x \in X$，称

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.1}$$

为x的长度.
内积空间X满足如下性质：

1. 平行四边形法则. 任取$x, y \in X$，则
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
2. Schwarz不等式. 任取$x, y \in X$，则
$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$
3. 公式$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$满足范数的定义. 换句话说，其定义的内积空间X是赋范线性空间.

实例

例

最简单的内积空间是Euclid空间$\mathbb{R}^n$, 它也是线性空间. 任取$\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots, x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

实例

例

最简单的内积空间是Euclid空间$\mathbb{R}^n$, 它也是线性空间. 任取$\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots, x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 定义内积

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.2}$$

容易验证, 它满足内积的四条性质.

实例

例

最简单的内积空间是Euclid空间$\mathbb{R}^n$, 它也是线性空间. 任取$\boldsymbol{x} = (x_1\cdots,x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 定义内积

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.2}$$

容易验证, 它满足内积的四条性质. 进一步, 此内积按照所定义的范数

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

使得$\mathbb{R}^n$构成赋范线性空间。这就是欧式范数(2-范数).

内积空间上的最佳逼近问题

设X是内积空间，其n维子空间Φ_n是由X中n个线性无关元素$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$所生成，

$$\Phi_n = span\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}.$$

内积空间上的最佳逼近问题

设X是内积空间, 其n维子空间Φ_n是由X中n个线性无关元素$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$所生成,

$$\Phi_n = span\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}.$$

对$f \in X$, 其在Φ_n上的最佳逼近定义为

$$\Delta(f, \Phi_n) = ||f - \varphi^*|| = \inf_{\varphi \in \Phi_n} ||f - \varphi||, \tag{1.3}$$

其中元素φ^*称为f在Φ_n上的最佳逼近元.

内积空间上最佳逼近元的存在唯一性

由于内积空间构成赋范线性空间, 因此内积空间上的最佳逼近的存在唯一性可以由赋范线性空间中的相关结论所导出.

内积空间上最佳逼近元的存在唯一性

由于内积空间构成赋范线性空间，因此内积空间上的最佳逼近的存在唯一性可以由赋范线性空间中的相关结论所导出.

引理

内积空间是严格凸的.

内积空间上最佳逼近元的存在唯一性

由于内积空间构成赋范线性空间, 因此内积空间上的最佳逼近的存在唯一性可以由赋范线性空间中的相关结论所导出.

引理

内积空间是严格凸的.

定理

设X是内积空间, Φ_n是X的n维子空间. 则对任意的$f \in X$, 它在Φ_n中的最佳逼近元φ^*存在且唯一.

内积空间上最佳逼近元的存在唯一性

由于内积空间构成赋范线性空间, 因此内积空间上的最佳逼近的存在唯一性可以由赋范线性空间中的相关结论所导出.

引理

内积空间是严格凸的.

定理

设X是内积空间, Φ_n是X的n维子空间. 则对任意的$f \in X$, 它在Φ_n中的最佳逼近元φ^*存在且唯一.

但内积空间也有自己的特点，其研究最佳逼近元的特征与求解还需要更加特殊的方法。

内积空间上最佳逼近元的特征

定理

设X是内积空间，$f \in X$，则$\varphi^* \in \Phi_n$为f在Φ_n上的最佳逼近元的充分必要条件是

$$(f - \varphi^*, \varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in \Phi_n. \tag{1.4}$$

内积空间上最佳逼近元的特征

定理

设X是内积空间, $f \in X$, 则$\varphi^* \in \Phi_n$为f在Φ_n上的最佳逼近元的充分必要条件是

$$(f-\varphi^*, \varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in \Phi_n. \tag{1.4}$$

其几何解释为: f在Φ_n中的最佳逼近元就是f在Φ_n中的正交投影.

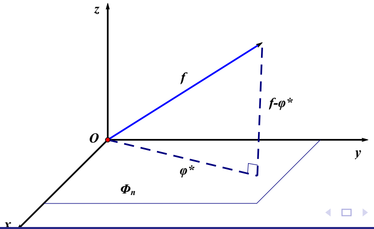
内积空间上最佳逼近元的特征

定理

设X是内积空间，$f \in X$，则$\varphi^* \in \Phi_n$为f在Φ_n上的最佳逼近元的充分必要条件是

$$(f-\varphi^*, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi_n. \tag{1.4}$$

其几何解释为：f在Φ_n中的最佳逼近元就是f在Φ_n中的正交投影.



内积空间上最佳逼近元的特征

定理

设X是内积空间, 其子空间$\Phi_n = span\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$. 对$f \in X$, 则$\varphi^* \in \Phi_n$为$f$在$\Phi_n$上的最佳逼近元的充分必要条件是

$$(f - \varphi^*, \varphi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.5}$$

内积空间上最佳逼近元的特征

定理

设X是内积空间，其子空间$\Phi_n = span\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$. 对$f \in X$，则$\varphi^* \in \Phi_n$为$f$在$\Phi_n$上的最佳逼近元的充分必要条件是

$$(f - \varphi^*, \varphi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.5}$$

如上两个结论给出了最佳逼近元所具有的本质特征，但是如何求解最佳逼近元还需要从特征出发进一步讨论。

内积空间上最佳逼近元的求解

设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n.$$

内积空间上最佳逼近元的求解

设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n.$$

将其带入特征定理中, 可以得到

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k^*\varphi_k, \varphi_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

内积空间上最佳逼近元的求解

设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n.$$

将其带入特征定理中，可以得到

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k^*\varphi_k, \varphi_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

利用内积性质，从而建立方程组

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^*(\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.6}$$

内积空间上最佳逼近元的求解

令$\boldsymbol{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \cdots, c_n^*)^T$，矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix},$$

内积空间上最佳逼近元的求解

令$\boldsymbol{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \cdots, c_n^*)^T$，矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix},$$

从而方程组为

$$G\boldsymbol{c}^* = ((f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \cdots, (f, \varphi_n))^T. \tag{1.7}$$

内积空间上最佳逼近元的求解

令$\boldsymbol{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \cdots, c_n^*)^T$，矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix},$$

从而方程组为

$$G\boldsymbol{c}^* = ((f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \cdots, (f, \varphi_n))^T. \tag{1.7}$$

如果矩阵G是非奇异的, 则可唯一解出$\boldsymbol{c}^*$, 从而可以求出最佳逼近元φ^*.

Gram行列式

实对称矩阵G称为关于$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$的Gram矩阵, 而相应的行列式称为Gram行列式.

Gram行列式

实对称矩阵G称为关于$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$的Gram矩阵, 而相应的行列式称为Gram行列式.

定理

设X是内积空间, 则X中的元素$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$线性无关的充要条件是相应的*Gram*行列式不为零.

Gram行列式

实对称矩阵G称为关于$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$的Gram矩阵, 而相应的行列式称为Gram行列式.

定理

设X是内积空间, 则X中的元素$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$线性无关的充要条件是相应的*Gram*行列式不为零.

定理

设X是内积空间, 则X中的线性无关元素$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$构成的*Gram*行列式大于零.

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元, 则误差为

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元, 则误差为

$$\|f - \varphi^*\|^2 = (f - \varphi^*, f - \varphi^*)$$

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元, 则误差为

$$\begin{aligned} \|f-\varphi^*\|^2 &= (f-\varphi^*, f-\varphi^*) \\ &= (f-\varphi^*, f) - (f-\varphi^*, \varphi^*) \end{aligned}$$

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元，则误差为

$$\begin{aligned} \|f-\varphi^*\|^2 &= (f-\varphi^*, f-\varphi^*) \\ &= (f-\varphi^*, f) - (f-\varphi^*, \varphi^*) \\ &= (f-\varphi^*, f) \end{aligned} \tag{1.8}$$

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元, 则误差为

$$\begin{aligned} \|f - \varphi^*\|^2 &= (f - \varphi^*, f - \varphi^*) \\ &= (f - \varphi^*, f) - (f - \varphi^*, \varphi^*) \\ &= (f - \varphi^*, f) \\ &= (f, f) - (f, \varphi^*) \end{aligned} \tag{1.8}$$

最佳逼近的误差估计

假设

$$\varphi^* = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + \cdots + c_n^*\varphi_n$$

是f在子空间Φ_n上的最佳逼近元, 则误差为

$$\begin{aligned}
\|f-\varphi^*\|^2 &= (f-\varphi^*, f-\varphi^*) \\
&= (f-\varphi^*, f) - (f-\varphi^*, \varphi^*) \\
&= (f-\varphi^*, f) \\
&= (f, f) - (f, \varphi^*) \\
&= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^*(f, \varphi_i).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

1-2 最佳平方逼近

内积空间$L_\rho^2[a,b]$

如果$\rho(x)$是$[a,b]$上Lebesgue可积的非负函数, 并且至多在一个零测度集上为零, 称$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数.

内积空间$L_\rho^2[a,b]$

如果$\rho(x)$是$[a,b]$上Lebesgue可积的非负函数，并且至多在一个零测度集上为零，称$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数.

在$[a,b]$上$\rho(x)f^2(x)$为Lebesgue可积的所有可测函数$f(x)$的集合，构成一个线性空间，记为$L_\rho^2[a,b]$.

内积空间$L_\rho^2[a,b]$

如果$\rho(x)$是$[a,b]$上Lebesgue可积的非负函数，并且至多在一个零测度集上为零，称$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数.

在$[a,b]$上$\rho(x)f^2(x)$为Lebesgue可积的所有可测函数$f(x)$的集合，构成一个线性空间，记为$L_\rho^2[a,b]$.

在$L_\rho^2[a,b]$上定义的二元函数

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx, \qquad f(x),g(x)\in L_\rho^2[a,b], \tag{2.1}$$

内积空间$L_\rho^2[a,b]$

可以验证(f,g)满足内积的四条性质，因此$L_\rho^2[a,b]$构成内积空间.

内积空间$L^2_\rho[a,b]$

可以验证(f,g)满足内积的四条性质, 因此$L^2_\rho[a,b]$构成内积空间.

由此内积诱导的范数为

$$||f||_2=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b \rho(x)f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\qquad f(x)\in L^2_\rho[a,b], \tag{2.2}$$

进而$L^2_\rho[a,b]$构成赋范线性空间.

最佳平方逼近

定义

设$f(x) \in L_\rho^2[a,b]$, Φ_n是由$L_\rho^2[a,b]$中n个线性无关的函数$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$生成的n维子空间, 即

$$\Phi_n = span\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}. \tag{2.3}$$

最佳平方逼近

定义

设$f(x)\in L_\rho^2[a,b]$, Φ_n是由$L_\rho^2[a,b]$中n个线性无关的函数$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$生成的n维子空间, 即

$$\Phi_n = span\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}. \tag{2.3}$$

称

$$\Delta(f,\Phi_n) = \inf_{\varphi(x)\in\Phi_n} ||f-\varphi||_2 \tag{2.4}$$

为空间Φ_n对$f(x)$的最佳平方逼近,

最佳平方逼近

定义

设$f(x) \in L_\rho^2[a,b]$, Φ_n是由$L_\rho^2[a,b]$中n个线性无关的函数$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$生成的n维子空间, 即

$$\Phi_n = span\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}. \tag{2.3}$$

称

$$\Delta(f, \Phi_n) = \inf_{\varphi(x)\in\Phi_n} ||f - \varphi||_2 \tag{2.4}$$

为空间Φ_n对$f(x)$的最佳平方逼近, 满足

$$||f - \varphi^*||_2 = \inf_{\varphi(x)\in\Phi_n} ||f - \varphi||_2 = \Delta(f, \Phi_n) \tag{2.5}$$

的函数$\varphi^*(x)$称为$f(x)$在Φ_n上的最佳平方逼近函数.

最佳平方逼近函数的求解

由于$L_\rho^2[a,b]$是内积空间，最佳平方逼近函数具有存在唯一性，以及相应特征，最佳平方逼近函数的求解可以借助内积函数空间中最佳逼近元的求解方法。

最佳平方逼近函数的求解

由于$L^2_\rho[a,b]$是内积空间，最佳平方逼近函数具有存在唯一性，以及相应特征，最佳平方逼近函数的求解可以借助内积函数空间中最佳逼近元的求解方法。

即，求解线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^* \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.6}$$

最佳平方逼近函数的求解

由于$L^2_\rho[a,b]$是内积空间，最佳平方逼近函数具有存在唯一性，以及相应特征，最佳平方逼近函数的求解可以借助内积函数空间中最佳逼近元的求解方法。

即，求解线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^* \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad k=1,2,\cdots,n, \tag{2.6}$$

从而给出最佳平方逼近函数

$$\varphi^*(x) = c_1^*\varphi_1(x) + \cdots + c_n^*\varphi_n(x).$$

实例

例

在线性多项式空间中构造$f(x) = \sqrt{x} \in L_\rho^2[1/4, 1]$的最佳平方逼近多项式, 其中权函数$\rho(x) = 1$.

实例

例

在线性多项式空间中构造$f(x)=\sqrt{x}\in L_\rho^2[1/4,1]$的最佳平方逼近多项式，其中权函数$\rho(x)=1$.

解： 设$\mathbb{P}_1=span\{\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=x\}$. 设$f(x)$在$\mathbb{P}_1$上的最佳平方逼近多项式为$\varphi^*(x)=c_1^*\varphi_1(x)+c_2^*\varphi_2(x)$.

实例

例

在线性多项式空间中构造$f(x)=\sqrt{x}\in L_\rho^2[1/4,1]$的最佳平方逼近多项式, 其中权函数$\rho(x)=1$.

解： 设$\mathbb{P}_1=span\{\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=x\}$. 设$f(x)$在$\mathbb{P}_1$上的最佳平方逼近多项式为$\varphi^*(x)=c_1^*\varphi_1(x)+c_2^*\varphi_2(x)$.
注意$\rho(x)=1$, 可得

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_{1/4}^1 1dx=\frac{3}{4},\quad (\varphi_1,\varphi_2)=\int_{1/4}^1 xdx=\frac{15}{32},$$
$$(\varphi_2,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{15}{32},\quad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_{1/4}^1 x^2dx=\frac{21}{64},$$
$$(f,\varphi_1)=\int_{1/4}^1 \sqrt{x}dx=\frac{7}{12},\quad (f,\varphi_2)=\int_{1/4}^1 x\sqrt{x}dx=\frac{31}{80}.$$

实例(续)

建立方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{4}c_1^* + \frac{15}{32}c_2^* = \frac{7}{12}, \\ \frac{15}{32}c_1^* + \frac{21}{64}c_2^* = \frac{31}{80}. \end{cases}$$

实例(续)

建立方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{4}c_1^* + \frac{15}{32}c_2^* = \frac{7}{12}, \\ \frac{15}{32}c_1^* + \frac{21}{64}c_2^* = \frac{31}{80}. \end{cases}$$

求解得到$c_1^* = \frac{10}{27}, c_2^* = \frac{88}{135}$, 从而最佳平方逼近多项式为

$$\varphi^*(x) = \frac{10}{27} + \frac{88}{135}x.$$

实例(续)

建立方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{4}c_1^* + \frac{15}{32}c_2^* = \frac{7}{12}, \\ \frac{15}{32}c_1^* + \frac{21}{64}c_2^* = \frac{31}{80}. \end{cases}$$

求解得到$c_1^* = \frac{10}{27}, c_2^* = \frac{88}{135}$, 从而最佳平方逼近多项式为

$$\varphi^*(x) = \frac{10}{27} + \frac{88}{135}x.$$

$f(x) = \sqrt{x}$在$[1/4, 1]$上的一次最佳一致逼近多项式为

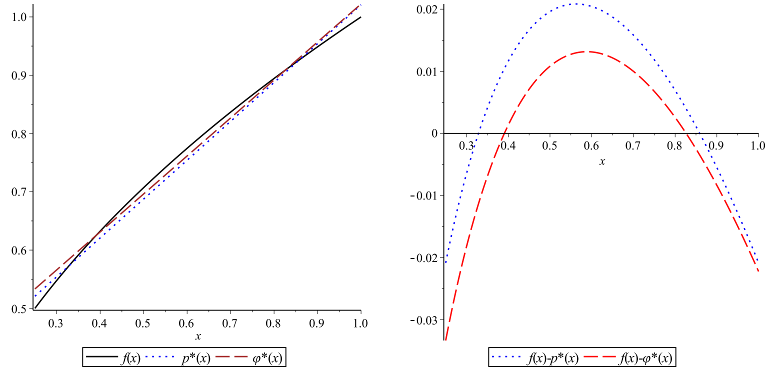
$$p^*(x) = \frac{17}{48} + \frac{2}{3}x.$$

实例(续)

因为采用的度量(范数)不同，虽然采用的都是线性多项式逼近，但仍导致结果不同。

实例(续)

因为采用的度量(范数)不同，虽然采用的都是线性多项式逼近，但仍导致结果不同。



方程组求解的讨论

最佳平方逼近函数可以通过解线性方程组

$$G\boldsymbol{c}^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.7}$$

来得到。

方程组求解的讨论

最佳平方逼近函数可以通过解线性方程组

$$G\boldsymbol{c}^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.7}$$

来得到。虽然方程组在理论上是唯一可解的，但在实际数值计算中，即使Gram矩阵G是实对称阵，但一般来说仍不易求解.

方程组求解的讨论

最佳平方逼近函数可以通过解线性方程组

$$Gc^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.7}$$

来得到。虽然方程组在理论上是唯一可解的，但在实际数值计算中，即使Gram矩阵G是实对称阵，但一般来说仍不易求解.

如果在子空间Φ_n中选择适当的基函数，那么G将会有更简单的结构，不但相应的求解大大简化，而且还可以改善求解过程的数值稳定性.

方程组求解的讨论

最佳平方逼近函数可以通过解线性方程组

$$G\boldsymbol{c}^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.7}$$

来得到。虽然方程组在理论上是唯一可解的，但在实际数值计算中，即使Gram矩阵G是实对称阵，但一般来说仍不易求解.

如果在子空间Φ_n中选择适当的基函数，那么G将会有更简单的结构，不但相应的求解大大简化，而且还可以改善求解过程的数值稳定性.

什么时候G的结构最简单？**G为对角阵或单位阵！**

正交函数系

定义

若给定函数系$\{\varphi_i(x)\} \subset L^2_\rho[a,b]$满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

正交函数系

定义

若给定函数系$\{\varphi_i(x)\} \subset L^2_\rho[a,b]$满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

则称$\{\varphi_i(x)\}$为在$[a,b]$上关于权$\rho(x)$的正交函数系, 简称正交系.

正交函数系

定义

若给定函数系$\{\varphi_i(x)\} \subset L_\rho^2[a,b]$满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

则称$\{\varphi_i(x)\}$为在$[a,b]$上关于权$\rho(x)$的正交函数系, 简称正交系.
若正交系$\{\varphi_i(x)\}$满足

$$(\varphi_i, \varphi_i) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i^2(x)\,dx = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

即$\|\varphi_i\|_2 = 1, i = 1, \cdots,$

正交函数系

定义

若给定函数系$\{\varphi_i(x)\} \subset L_\rho^2[a,b]$满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

则称$\{\varphi_i(x)\}$为在$[a,b]$上关于权$\rho(x)$的正交函数系, 简称正交系.
若正交系$\{\varphi_i(x)\}$满足

$$(\varphi_i, \varphi_i) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i^2(x)\,dx = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

即$\|\varphi_i\|_2 = 1, i = 1, \cdots$, 则称$\{\varphi_i(x)\}$为标准正交系.

常用的正交函数系

1. 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是定义在闭区间$[-\pi, \pi]$上关于权函数1的正交系.

常用的正交函数系

1. 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是定义在闭区间$[-\pi, \pi]$上关于权函数1的正交系.

2. 余弦函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$$

是$[0, \pi]$上关于权函数1的正交系.

常用的正交函数系(续)

3. 正弦函数系

$$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$$

是$[0, \pi]$上关于权函数1的正交系.

常用的正交函数系(续)

3. 正弦函数系

$$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$$

是$[0,\pi]$上关于权函数1的正交系.

4. Chebyshev多项式系

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \cdots$$

是$[-1,1]$上关于权函数$1/\sqrt{1-x^2}$的正交系.

方程组求解的再讨论

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基,

方程组求解的再讨论

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基, 那么其构成的Gram矩阵G是对角阵。

方程组求解的再讨论

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基，那么其构成的Gram矩阵G是对角阵。

此时方程组

$$Gc^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.8}$$

容易求解，其解为:

方程组求解的再讨论

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基, 那么其构成的Gram矩阵G是对角阵。

此时方程组

$$Gc^* = ((f,\varphi_1),(f,\varphi_2),\cdots,(f,\varphi_n))^T. \tag{2.8}$$

容易求解，其解为:

$$c_i^* = \frac{(\varphi_i,f)}{(\varphi_i,\varphi_i)} = \frac{(\varphi_i,f)}{\|\varphi_i\|_2^2}, \qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{2.9}$$

方程组求解的再讨论

定理

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基, 则对任意给定的函数$f(x) \in L_\rho^2[a,b]$, 其在Φ_n上的最佳平方逼近函数为

方程组求解的再讨论

定理

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基, 则对任意给定的函数$f(x) \in L_\rho^2[a,b]$, 其在Φ_n上的最佳平方逼近函数为

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\varphi_i, f)}{\|\varphi_i\|_2^2} \varphi_i(x), \tag{2.10}$$

方程组求解的再讨论

定理

若$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$是$L_\rho^2[a,b]$子空间Φ_n的一组正交基，则对任意给定的函数$f(x)\in L_\rho^2[a,b]$，其在Φ_n上的最佳平方逼近函数为

$$\varphi^*(x)=\sum_{i=1}^n\frac{(\varphi_i,f)}{\|\varphi_i\|_2^2}\varphi_i(x), \tag{2.10}$$

而相应的最佳逼近为

$$\Delta(f,\Phi_n)=\sqrt{\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^n(c_i^*)^2\|\varphi_i\|_2^2}. \tag{2.11}$$

基函数的正交化

对于$L_\rho^2[a,b]$中的子空间Φ_n，设$\{\psi_i\}_{i=1}^n$是Φ_n的一组基函数。

基函数的正交化

对于$L_\rho^2[a,b]$中的子空间Φ_n，设$\{\psi_i\}_{i=1}^n$是Φ_n的一组基函数。

基函数的正交化是指：从$\{\psi_i\}_{i=1}^n$出发，构造Φ_n的一个标准正交基$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$，

基函数的正交化

对于$L_\rho^2[a,b]$中的子空间Φ_n，设$\{\psi_i\}_{i=1}^n$是Φ_n的一组基函数。

基函数的正交化是指：从$\{\psi_i\}_{i=1}^n$出发，构造Φ_n的一个标准正交基$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$， 即满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

基函数的正交化

对于$L_\rho^2[a,b]$中的子空间Φ_n，设$\{\psi_i\}_{i=1}^n$是Φ_n的一组基函数。

基函数的正交化是指：从$\{\psi_i\}_{i=1}^n$出发，构造Φ_n的一个标准正交基$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$， 即满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

最常用的逼近子空间为**多项式空间**，后面我们将讨论Φ_n为多项式空间时，其正交多项式基函数的正交化构造方法.

正交多项式系的行列式构造法

目的：从幂函数系$1, x, x^2, \cdots$出发，对给定$[a, b]$上的权函数$\rho(x)$，构造$[a, b]$上的正交多项式系。

正交多项式系的行列式构造法

目的：从幂函数系$1, x, x^2, \cdots$出发，对给定$[a, b]$上的权函数$\rho(x)$，构造$[a, b]$上的正交多项式系。

令$\varphi_0(x) = 1$,

正交多项式系的行列式构造法

目的：从幂函数系$1, x, x^2, \cdots$出发，对给定$[a,b]$上的权函数$\rho(x)$，构造$[a,b]$上的正交多项式系。

令$\varphi_0(x) = 1$，当$k \geq 1$时，令

$$\varphi_k(x) = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^{k-1}) & 1 \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^{k-1}) & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x^k,1) & (x^k,x) & \cdots & (x^k,x^{k-1}) & x^k \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

正交多项式系的行列式构造法

目的：从幂函数系$1, x, x^2, \cdots$出发，对给定$[a,b]$上的权函数$\rho(x)$，构造$[a,b]$上的正交多项式系。

令$\varphi_0(x) = 1$，当$k \geq 1$时，令

$$\varphi_k(x) = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^{k-1}) & 1 \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^{k-1}) & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x^k,1) & (x^k,x) & \cdots & (x^k,x^{k-1}) & x^k \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

容易证明，

$$(\varphi_k, \varphi_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, k-1), \quad (\varphi_k, \varphi_k) > 0.$$

正交多项式系的行列式构造法

目的：从幂函数系$1, x, x^2, \cdots$出发，对给定$[a, b]$上的权函数$\rho(x)$，构造$[a, b]$上的正交多项式系。

令$\varphi_0(x) = 1$，当$k \geq 1$时，令

$$\varphi_k(x) = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^{k-1}) & 1 \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^{k-1}) & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x^k,1) & (x^k,x) & \cdots & (x^k,x^{k-1}) & x^k \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

容易证明，

$$(\varphi_k, \varphi_i) = 0 (i = 0, 1, \cdots, k-1), \quad (\varphi_k, \varphi_k) > 0.$$

因此$\{\varphi_i(x)\}$构成$[a, b]$上关于权函数$\rho(x)$的正交多项式系，单位化后得到标准正交多项式系。

正交多项式系的性质

假设$\{\varphi_i(x)\}(i \geq 0)$是空间$L_\rho^2[a,b]$上的幂函数系经正交化得到的正交多项式系, 则满足如下性质

正交多项式系的性质

假设$\{\varphi_i(x)\}(i \geq 0)$是空间$L^2_\rho[a,b]$上的幂函数系经正交化得到的正交多项式系, 则满足如下性质

1. $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$是n 次代数多项式空间$\mathbb{P}_n$的一组正交基.

正交多项式系的性质

假设$\{\varphi_i(x)\}(i \geq 0)$是空间$L^2_\rho[a,b]$上的幂函数系经正交化得到的正交多项式系，则满足如下性质

1. $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$是n 次代数多项式空间$\mathbb{P}_n$的一组正交基.
2. 当$i \geq 1$时，$\varphi_i(x)$与所有次数低于i的多项式正交，即

$$(\varphi_i, p_{i-1}) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)p_{i-1}(x)\,dx = 0,$$

其中$p_{i-1}(x) \in \mathbb{P}_{i-1}$.

正交多项式系的性质

假设$\{\varphi_i(x)\}(i \geq 0)$是空间$L^2_\rho[a,b]$上的幂函数系经正交化得到的正交多项式系，则满足如下性质

1. $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$是n 次代数多项式空间$\mathbb{P}_n$的一组正交基.
2. 当$i \geq 1$时，$\varphi_i(x)$与所有次数低于i的多项式正交，即
$$(\varphi_i, p_{i-1}) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)p_{i-1}(x)\,dx = 0,$$
其中$p_{i-1}(x) \in \mathbb{P}_{i-1}$.
3. $\{\varphi_i(x)\}(i \geq 0)$构成空间$L^2_\rho[a,b]$上的完备正交系(即封闭正交系).

正交多项式根的性质

定理

设$n \geq 1$, 则正交多项式$\varphi_n(x)$的所有根都是实单根, 并且都包含在开区间(a,b)中.

正交多项式根的性质

定理

设$n \geq 1$, 则正交多项式$\varphi_n(x)$的所有根都是实单根, 并且都包含在开区间(a, b)中.

定理

设$n \geq 1$, 则正交多项式$\varphi_n(x)$与$\varphi_{n+1}(x)$的根必互相交错. 即若$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 是正交多项式$\varphi_n(x)$的n个根, 那么在每个区间$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_n, b)$内都有$\varphi_{n+1}(x)$ 的一个根.

首一正交多项式系的构造方法

如果正交多项式系中每个多项式最高次项都为1，那么称为首一正交多项式系。

首一正交多项式系的构造方法

如果正交多项式系中每个多项式最高次项都为1, 那么称为首一正交多项式系。

定理

首一正交多项式系$\{\hat{\varphi}_i(x)\}(i \geq 0)$可以按如下方式迭代构造

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_0(x) = 1, \\ \hat{\varphi}_1(x) = x - \alpha_0, \\ \hat{\varphi}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\hat{\varphi}_n(x) - \beta_{n-1}\hat{\varphi}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{2.13}$$

其中

$$\alpha_0 = \frac{(x\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)}{(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)}, \quad \alpha_n = \frac{(x\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n)}{(\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n)}, \quad \beta_{n-1} = \frac{(\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n)}{(\hat{\varphi}_{n-1}, \hat{\varphi}_{n-1})}.$$

常用的正交多项式系

1. Legendre多项式系.

常用的正交多项式系

1. Legendre多项式系.
2. Chebyshev多项式系.

常用的正交多项式系

1. Legendre多项式系.
2. Chebyshev多项式系.
3. Laguerre多项式系.

常用的正交多项式系

1. Legendre多项式系.
2. Chebyshev多项式系.
3. Laguerre多项式系.
4. Hermite多项式系.

Legendre多项式系

定义在$[-1,1]$上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式系

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots \tag{2.14}$$

称为Legendre多项式系. $P_n(x)$的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

Legendre多项式系

定义在$[-1,1]$上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式系

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots \tag{2.14}$$

称为Legendre多项式系. $P_n(x)$的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

1 正交性:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

Legendre多项式系

定义在$[-1,1]$上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式系

$$P_0(x)=1, \quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n=1,2,\cdots \tag{2.14}$$

称为Legendre多项式系. $P_n(x)$的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m=n. \end{cases}$$

2. 奇偶性:

$$P_n(x)=(-1)^n P_n(-x).$$

Legendre多项式系

定义在$[-1,1]$上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式系

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots \tag{2.14}$$

称为Legendre多项式系. $P_n(x)$的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

2. 奇偶性:

$$P_n(x)=(-1)^nP_n(-x).$$

3. 三项递推公式:

$$\begin{cases}P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\\ P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

(第一类)Chebyshev多项式系

Chebyshev多项式系(也称为第一类Chebyshev多项式系)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \cdots.$$

是定义在区间$[-1, 1]$上关于权函数$\rho(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$的正交多项式系. $T_n(x)$的首项系数为2^{n-1}.

(第一类)Chebyshev多项式系

Chebyshev多项式系(也称为第一类Chebyshev多项式系)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

是定义在区间$[-1, 1]$上关于权函数$\rho(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$的正交多项式系. $T_n(x)$的首项系数为2^{n-1}.

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & m = n = 0, \\ \pi/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

(第一类)Chebyshev多项式系

Chebyshev多项式系(也称为第一类Chebyshev多项式系)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

是定义在区间$[-1,1]$上关于权函数$\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$的正交多项式系. $T_n(x)$的首项系数为2^{n-1}.

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & m = n = 0, \\ \pi/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

2. 奇偶性:

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x).$$

(第一类)Chebyshev多项式系

Chebyshev多项式系(也称为第一类Chebyshev多项式系)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

是定义在区间$[-1,1]$上关于权函数$\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$的正交多项式系. $T_n(x)$的首项系数为2^{n-1}.

1. 正交性：

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & m = n = 0, \\ \pi/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

2. 奇偶性：

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x).$$

3. 三项递推公式：

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{2.15}$$

第二类Chebyshev多项式系

定义在区间$[-1,1]$上关于权函数$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$的正交多项式系

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)},\quad n=0,1,\cdots$$

称为第二类Chebyshev多项式系. $U_n(x)$的首项系数为2^n.

第二类Chebyshev多项式系

定义在区间$[-1,1]$上关于权函数$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$的正交多项式系

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}, \quad n=0,1,\cdots$$

称为第二类Chebyshev多项式系. $U_n(x)$的首项系数为2^n.

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_m(x)U_n(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

第二类Chebyshev多项式系

定义在区间$[-1,1]$上关于权函数$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$的正交多项式系

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)},\quad n=0,1,\cdots$$

称为第二类Chebyshev多项式系. $U_n(x)$的首项系数为2^n.

1. 正交性:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_m(x)U_n(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

2. 三项递推公式:

$$\begin{cases}U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,\\ U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

Laguerre多项式系

定义在$(0,\infty)$上，以$\rho(x)=e^{-x}$为权函数的正交多项式系

$$L_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\quad n=0,1,\cdots$$

称为Laguerre多项式系. $L_n(x)$的首项系数为$(-1)^n$.

Laguerre多项式系

定义在$(0,\infty)$上，以$\rho(x)=e^{-x}$为权函数的正交多项式系

$$L_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\quad n=0,1,\cdots$$

称为Laguerre多项式系. $L_n(x)$的首项系数为$(-1)^n$.

1. 正交性：

$$\int_0^{\infty}e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx=\begin{cases}(n!)^2, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

Laguerre多项式系

定义在$(0,\infty)$上，以$\rho(x)=e^{-x}$为权函数的正交多项式系

$$L_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\quad n=0,1,\cdots$$

称为Laguerre多项式系. $L_n(x)$的首项系数为$(-1)^n$.

1. 正交性：

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx=\begin{cases}(n!)^2, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

2. 三项递推公式：

$$\begin{cases}L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x,\\ L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

Hermite多项式系

定义在区间$(-\infty, \infty)$上以$\rho(x) = -e^{x^2}$为权函数的正交多项式系

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

称为Hermite多项式系. $H_n(x)$的首项系数为$(-2)^n$。

Hermite多项式系

定义在区间$(-\infty,\infty)$上以$\rho(x)=-e^{x^2}$为权函数的正交多项式系

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),\quad n=1,2,\cdots$$

称为Hermite多项式系. $H_n(x)$的首项系数为$(-2)^n$。

1. 正交性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=\begin{cases}2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

Hermite多项式系

定义在区间$(-\infty,\infty)$上以$\rho(x)=-e^{x^2}$为权函数的正交多项式系

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),\quad n=1,2,\cdots$$

称为Hermite多项式系. $H_n(x)$的首项系数为$(-2)^n$。

1. 正交性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=\begin{cases}2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

2. 三项递推公式:

$$\begin{cases}H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

1-2 最佳平方逼近

数据拟合的基本思想

在科学实验与实际数据处理中，人们获得了大量散乱数据。

数据拟合的基本思想

在科学实验与实际数据处理中，人们获得了大量散乱数据。而这些散乱数据主要来源于物理量的测量数据、试验结果以及科学计算等，具有不规则性，可能存在误差与噪音。

数据拟合的基本思想

在科学实验与实际数据处理中，人们获得了大量散乱数据。而这些散乱数据主要来源于物理量的测量数据、试验结果以及科学计算等，具有不规则性，可能存在误差与噪音。

凭借这些散乱数据做，借助于某些数学手段来作相对“精确”的判断或者预测，显然采用近似的方法来拟合(fitting)这些数据是更合理的。

数据拟合的基本思想

在科学实验与实际数据处理中，人们获得了大量散乱数据。而这些散乱数据主要来源于物理量的测量数据、试验结果以及科学计算等，具有不规则性，可能存在误差与噪音。

凭借这些散乱数据做，借助于某些数学手段来作相对“精确”的判断或者预测，显然采用近似的方法来拟合(fitting)这些数据是更合理的。

这就是散乱数据逼近的思想，在工程上也称为散乱数据拟合。

数据拟合的基本思想

在科学实验与实际数据处理中，人们获得了大量散乱数据。而这些散乱数据主要来源于物理量的测量数据、试验结果以及科学计算等，具有不规则性，可能存在误差与噪音。

凭借这些散乱数据做，借助于某些数学手段来作相对“精确”的判断或者预测，显然采用近似的方法来拟合(fitting)这些数据是更合理的。

这就是散乱数据逼近的思想，在工程上也称为散乱数据拟合。

最小二乘法是数据拟合中最基本的方法之一.

实例

例

考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的记录。希望构造某一函数，近似还原纤维的强度与其拉伸倍数之间的关系。

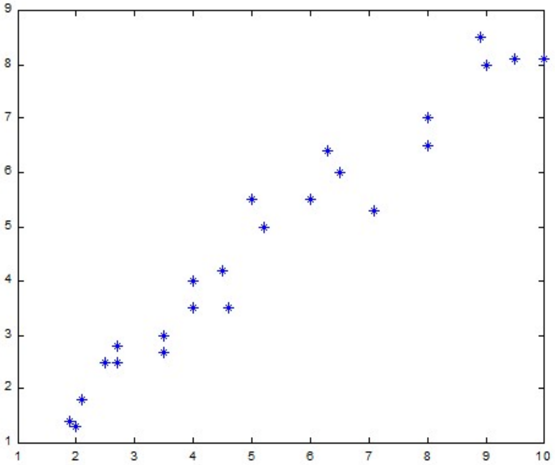
实例

例

考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的记录。希望构造某一函数，近似还原纤维的强度与其拉伸倍数之间的关系。

编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i	编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i
1	1.9	1.4	13	5	5.5
2	2	1.3	14	5.2	5
3	2.1	1.8	15	6	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3	19	8	6.5
8	3.5	2.7	20	8	7
9	4	4	21	8.9	8.5
10	4	3.5	22	9	8
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10	8.1

实例(续)



欧式空间上的最小二乘法的目的

对给定数据值$y_0, y_1, \cdots, y_m$，构造$m+1$维向量

$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

欧式空间上的最小二乘法的目的

对给定数据值$y_0, y_1, \cdots, y_m$，构造$m+1$维向量

$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

设$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是$\mathbb{R}^{m+1}$中的$n+1$个线性无关的向量，并要求$m > n$. 则向量空间

$$V = span\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$$

成为$\mathbb{R}^{m+1}$中的$n+1$维线性子空间。

欧式空间上的最小二乘法的目的

对给定数据值$y_0, y_1, \cdots, y_m$，构造$m+1$维向量

$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

设$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是$\mathbb{R}^{m+1}$中的$n+1$个线性无关的向量，并要求$m > n$. 则向量空间

$$V = span\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$$

成为$\mathbb{R}^{m+1}$中的$n+1$维线性子空间。

希望： 寻求V中的向量来表示或逼近$\boldsymbol{y}$。

欧式空间上的最小二乘法的目的(续)

一般来说$\boldsymbol{y}$不在V中, 因此

$$\boldsymbol{y} = c_0\boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

不一定有解.

欧式空间上的最小二乘法的目的(续)

一般来说$\boldsymbol{y}$不在V中, 因此

$$\boldsymbol{y} = c_0\boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

不一定有解.
设

$$A = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n),$$
$$\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_n)^T,$$

因此方程组$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$不一定有解.

欧式空间上的最小二乘法的目的(续)

一般来说$\boldsymbol{y}$不在V中, 因此

$$\boldsymbol{y} = c_0\boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

不一定有解.
设

$$\begin{aligned} A &= (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \\ \boldsymbol{c} &= (c_0, c_1, \cdots, c_n)^T, \end{aligned}$$

因此方程组$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$不一定有解.

目的：寻求V中的向量来逼近$\boldsymbol{y}$。

欧式空间上的最小二乘法

最佳逼近问题：

$$\Delta(\boldsymbol{y}, V) = \min_{\boldsymbol{x} \in V} ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||_2, \tag{3.1}$$

称为最小二乘问题。

欧式空间上的最小二乘法

最佳逼近问题：

$$\Delta(\boldsymbol{y}, V) = \min_{\boldsymbol{x} \in V} ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||_2, \tag{3.1}$$

称为最小二乘问题。

最小二乘问题的解，即

$$||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*||_2 = \Delta(\boldsymbol{y}, V) = \min_{\boldsymbol{x} \in V} ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||_2 = \min_{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n+1}} ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}||_2$$

的解$\boldsymbol{x}^*$称为最小二乘解. 此类数据拟合方法称为最小二乘法。

欧式空间上的最小二乘法

由于欧式空间是内积空间，最小二乘解具有唯一性。

欧式空间上的最小二乘法

由于欧式空间是内积空间，最小二乘解具有唯一性。
最小二乘解

$$\boldsymbol{x}^* = c_0^*\boldsymbol{x}_0 + c_1^*\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n^*\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{c}^* \in V$$

的系数向量$\boldsymbol{c}^*$为如下方程组的解

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_n) \\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

欧式空间上的最小二乘法

显然，此方程组为

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T \boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

欧式空间上的最小二乘法

显然，此方程组为

$$A^TA\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

称为求解最小二乘问题的法方程组.

欧式空间上的最小二乘法

显然，此方程组为

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

称为求解最小二乘问题的法方程组.

由于向量组$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$线性无关, 故矩阵$A$列满秩.

欧式空间上的最小二乘法

显然，此方程组为

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T \boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

称为求解最小二乘问题的法方程组.

由于向量组$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$线性无关，故矩阵$A$列满秩. 因此，$A^T A$必为正定阵，从而$(A^T A)^{-1}$ 存在，使得法方程组的解为

$$\boldsymbol{c}^* = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y}. \tag{3.4}$$

欧式空间上的最小二乘法

显然，此方程组为

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T \boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

称为求解最小二乘问题的法方程组.

由于向量组$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$线性无关，故矩阵$A$列满秩. 因此，$A^T A$必为正定阵，从而$(A^T A)^{-1}$ 存在，使得法方程组的解为

$$\boldsymbol{c}^* = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y}. \tag{3.4}$$

最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}^* = A\boldsymbol{c}^* = A(A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y}.$$

最小二乘法的一般思想

给定一组数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$, 其中$x_i \in [a,b]$且两两不同,
且y_i可以认为是来自某个函数$f(x)$在x_i点处的函数值,
即$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, m$.

最小二乘法的一般思想

给定一组数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$, 其中$x_i \in [a, b]$且两两不同,
且y_i可以认为是来自某个函数$f(x)$在x_i点处的函数值,
即$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, m$.

最小二乘法的一般思想

给定一组数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$，其中$x_i \in [a, b]$且两两不同，且y_i可以认为是来自某个函数$f(x)$在x_i点处的函数值，即$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, m$.

最小二乘法的一般思想是：在$n+1$维函数空间Φ_{n+1}中（$n < m$）寻找一个函数$S^*(x)$，使得

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [S^*(x_i) - y_i]^2 = \min_{S(x) \in \Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} [S(x_i) - y_i]^2. \tag{3.5}$$

最小二乘法的一般思想

给定一组数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$，其中$x_i \in [a, b]$且两两不同，且y_i可以认为是来自某个函数$f(x)$在x_i点处的函数值，即$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, m$.

最小二乘法的一般思想是：在$n+1$维函数空间Φ_{n+1}中（$n < m$）寻找一个函数$S^*(x)$，使得

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [S^*(x_i) - y_i]^2 = \min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} [S(x_i) - y_i]^2. \tag{3.5}$$

其中$\boldsymbol{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_m)^T$，$\delta_i = S^*(x_i) - y_i (i = 0, 1, \cdots, m)$称为残差，$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$称为平方误差或残差的平方和.

最小二乘法的一般思想

给定一组数据点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$，其中$x_i \in [a, b]$且两两不同，且y_i可以认为是来自某个函数$f(x)$在x_i点处的函数值，即$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, m$.

最小二乘法的一般思想是：在$n+1$维函数空间Φ_{n+1}中（$n < m$）寻找一个函数$S^*(x)$，使得

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [S^*(x_i) - y_i]^2 = \min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} [S(x_i) - y_i]^2. \tag{3.5}$$

其中$\boldsymbol{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_m)^T$，$\delta_i = S^*(x_i) - y_i (i = 0, 1, \cdots, m)$称为残差，$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$称为平方误差或残差的平方和.

此类数据拟合方法称为最小二乘法，函数$S^*(x)$称为最小二乘解。

加权最小二乘法

在最小二乘法中$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$考虑为加权残差平方和

$$\min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S(x_i)-y_i)]^2, \tag{3.6}$$

加权最小二乘法

在最小二乘法中$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$考虑为加权残差平方和

$$\min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S(x_i)-y_i)]^2, \tag{3.6}$$

其中$\omega(x)\geq 0$是$[a,b]$上的权函数, 可以理解为表示数据点(x_i,y_i)的重要性或准确性. 此类数据拟合方法称为加权最小二乘法。

加权最小二乘法

在最小二乘法中$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$考虑为加权残差平方和

$$\min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S(x_i) - y_i)]^2, \tag{3.6}$$

其中$\omega(x) \geq 0$是$[a, b]$上的权函数，可以理解为表示数据点(x_i, y_i)的重要性或准确性．此类数据拟合方法称为加权最小二乘法。

加权最小二乘法

在最小二乘法中$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$考虑为加权残差平方和

$$\min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S(x_i)-y_i)]^2, \tag{3.6}$$

其中$\omega(x)\geq 0$是$[a,b]$上的权函数，可以理解为表示数据点(x_i,y_i)的重要性或准确性. 此类数据拟合方法称为加权最小二乘法。

加权最小二乘法

在最小二乘法中$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$考虑为加权残差平方和

$$\min_{S(x)\in\Phi_{n+1}} \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S(x_i)-y_i)]^2, \tag{3.6}$$

其中$\omega(x)\geq 0$是$[a,b]$上的权函数, 可以理解为表示数据点(x_i,y_i)的重要性或准确性. 此类数据拟合方法称为加权最小二乘法。

(加权)最小二乘法本质上为最佳平方逼近问题的离散化!

最小二乘法的求解

设$\Phi_{n+1} = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$.

最小二乘法的求解

设$\Phi_{n+1} = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$. 因此$S(x) \in \Phi_{n+1}$可表示为

$$S(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \in \Phi_{n+1}. \tag{3.7}$$

最小二乘法的求解

设$\Phi_{n+1} = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$. 因此$S(x) \in \Phi_{n+1}$可表示为

$$S(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \in \Phi_{n+1}. \tag{3.7}$$

那么求(加权)最小二乘解就转化为求多元函数

$$I(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) \left[\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x_i) - y_i \right]^2 \tag{3.8}$$

的极小值的问题.

最小二乘法的求解

设$\Phi_{n+1} = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$. 因此$S(x) \in \Phi_{n+1}$可表示为

$$S(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \in \Phi_{n+1}. \tag{3.7}$$

那么求(加权)最小二乘解就转化为求多元函数

$$I(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) \left[\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x_i) - y_i \right]^2 \tag{3.8}$$

的极小值的问题. 由求多元函数取极值的必要条件, 需求解方程组

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 2\sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) \left[\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x_i) - y_i \right] \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

法方程组

引进记号

$$\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_i(x_0), \varphi_i(x_1), \cdots, \varphi_i(x_m))^T,$$
$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T,$$
$$(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i),$$
$$(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)y_i,$$

法方程组

引进记号

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_i &= (\varphi_i(x_0), \varphi_i(x_1), \cdots, \varphi_i(x_m))^T, \\
\boldsymbol{y} &= (y_0, y_1, \cdots, y_m)^T, \\
(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_j) &= \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i), \\
(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)y_i,
\end{aligned}$$

如上方程组可改写为

$$\sum_{j=0}^{m} c_j(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_j) = (\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y}), \quad k = 0, \cdots, n. \tag{3.10}$$

法方程组

即

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\boldsymbol{y}) \\ (\varphi_1,\boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ (\varphi_n,\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

法方程组

即

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \boldsymbol{y}) \\ (\varphi_1, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ (\varphi_n, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

如上方程组称为求解（加权）最小二乘问题的法方程组.

法方程组

即

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\boldsymbol{y}) \\ (\varphi_1,\boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ (\varphi_n,\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

如上方程组称为求解（加权）最小二乘问题的法方程组. 令矩阵

$$A = (\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n),$$
$$B = diag(\omega(x_0),\omega(x_1),\cdots,\omega(x_m)),$$

则法方程组系数矩阵$G = A^TBA$.

法方程组系数矩阵的讨论

必须指出的是：

法方程组系数矩阵的讨论

必须指出的是：

$(\varphi_k,\varphi_j),(\varphi_k,\boldsymbol{y})$并不是定义在函数空间$\boldsymbol{\Phi_{n+1}}$上的内积，因此$\Phi_{n+1}$不是按此定义的内积空间.

法方程组系数矩阵的讨论

必须指出的是：

$(\varphi_k, \varphi_j), (\varphi_k, \boldsymbol{y})$并不是定义在函数空间$\boldsymbol{\Phi}_{n+1}$上的内积，因此$\Phi_{n+1}$不是按此定义的内积空间.

函数系$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$在$[a, b]$ 的线性无关不能推出向量组$\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$线性无关，即不能推出法方程组系数矩阵G可能是奇异的.

法方程组系数矩阵的讨论

必须指出的是：

$(\varphi_k, \varphi_j), (\varphi_k, y)$并不是定义在函数空间$\Phi_{n+1}$上的内积，因此$\Phi_{n+1}$不是按此定义的内积空间.

函数系$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$在$[a,b]$ 的线性无关不能推出向量组$\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$线性无关，即不能推出法方程组系数矩阵G可能是奇异的.

证明法方程组系数矩阵G可逆还需要寻求其他条件.

Haar条件

定义

$C[a,b]$的$n+1$维线性子空间Φ_{n+1}称为在$[a,b]$上满足*Haar条件*，如果对任意的非零函数$\varphi(x)\in\Phi_{n+1}$，在$[a,b]$上最多有n个不同零点.

Haar条件

定义

$C[a,b]$的$n+1$维线性子空间Φ_{n+1}称为在$[a,b]$上满足*Haar条件*，如果对任意的非零函数$\varphi(x)\in\Phi_{n+1}$，在$[a,b]$上最多有n个不同零点.

定理

设Φ_{n+1}是$C[a,b]$上的$n+1$维线性子空间，则Φ_{n+1}在$[a,b]$上满足*Haar*条件的充要条件是，对Φ_{n+1}的任意一组基$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$与$[a,b]$中任取的$n+1$个不同的点$\{x_i\}_{i=0}^n$，如下矩阵非奇异

$$P=\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

最小二乘解

如果Φ_{n+1}在$[a,b]$上满足Haar条件，则矩阵A 具有非奇异的$n+1$阶子阵，因此其A的列向量组线性无关.

最小二乘解

如果Φ_{n+1}在$[a,b]$上满足Haar条件，则矩阵A 具有非奇异的$n+1$阶子阵，因此其A的列向量组线性无关.

当$\omega(x_i)>0(i=0,1,\cdots,m)$时，法方程组的系数矩阵$G=A^TBA$可逆，此时法方程组存在唯一解向量

$$\boldsymbol{c}^*=(c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*)^T.$$

最小二乘解

如果Φ_{n+1}在$[a,b]$上满足Haar条件, 则矩阵A 具有非奇异的$n+1$阶子阵, 因此其A的列向量组线性无关.

当$\omega(x_i)>0(i=0,1,\cdots,m)$时, 法方程组的系数矩阵$G=A^TBA$可逆, 此时法方程组存在唯一解向量

$$\boldsymbol{c}^*=(c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*)^T.$$

设

$$S^*(x)=c_0^*\varphi_0(x)+c_1^*\varphi_1(x)\cdots+c_n^*\varphi_n(x).$$

最小二乘解

如果Φ_{n+1}在$[a,b]$上满足Haar条件，则矩阵A 具有非奇异的$n+1$阶子阵，因此其A的列向量组线性无关.

当$\omega(x_i)>0(i=0,1,\cdots,m)$时，法方程组的系数矩阵$G=A^TBA$可逆，此时法方程组存在唯一解向量

$$\boldsymbol{c}^*=(c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*)^T.$$

设

$$S^*(x)=c_0^*\varphi_0(x)+c_1^*\varphi_1(x)\cdots+c_n^*\varphi_n(x).$$

可以证明$S^*(x)$是所求最小二乘解.

实例

例

已知一组实验数据如下表所示, 选择合适的多项式拟合此组数据.

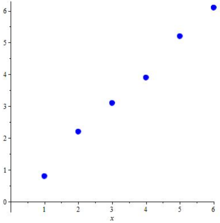
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0.8	2.2	3.1	3.9	5.2	6.1
$\omega(x_i)$	1	2	1	3	1.5	1

实例

例

已知一组实验数据如下表所示, 选择合适的多项式拟合此组数据.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0.8	2.2	3.1	3.9	5.2	6.1
$\omega(x_i)$	1	2	1	3	1.5	1



实例（续）

从图中可以看出，各个数据点分布在一条直线附近，因此可以选择线性函数作为拟合函数.

实例（续）

从图中可以看出，各个数据点分布在一条直线附近，因此可以选择线性函数作为拟合函数．选择函数空间$\Phi_2 = \mathbb{P}_1$，并选择幂基$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$。

实例（续）

从图中可以看出，各个数据点分布在一条直线附近，因此可以选择线性函数作为拟合函数. 选择函数空间$\Phi_2 = \mathbb{P}_1$，并选择幂基$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$。

那么Φ_2中的线性多项式可表示为$S(x) = c_0 + c_1 x$.

实例（续）

从图中可以看出，各个数据点分布在一条直线附近，因此可以选择线性函数作为拟合函数．选择函数空间$\Phi_2 = \mathbb{P}_1$，并选择幂基$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$。

那么Φ_2中的线性多项式可表示为$S(x) = c_0 + c_1 x$.

构造向量

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = (1,1,1,1,1,1)^T, \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = (1,2,3,4,5,6)^T,$$
$$\boldsymbol{y} = (0.8, 2.2, 3.1, 3.9, 5.2, 6.1)^T.$$

实例（续）

从而

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_0, \varphi_0) = 9.5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = 33.5, \\
&(\varphi_1, \varphi_1) = 139.5, \quad (\varphi_0, \boldsymbol{y}) = 33.9, \quad (\varphi_1, \boldsymbol{y}) = 141.3.
\end{aligned}
$$

实例（续）

从而

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_0, \varphi_0) = 9.5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = 33.5, \\
&(\varphi_1, \varphi_1) = 139.5, \quad (\varphi_0, \boldsymbol{y}) = 33.9, \quad (\varphi_1, \boldsymbol{y}) = 141.3.
\end{aligned}
$$

实例（续）

从而

$$(\varphi_0, \varphi_0) = 9.5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = 33.5,$$
$$(\varphi_1, \varphi_1) = 139.5, \quad (\varphi_0, \boldsymbol{y}) = 33.9, \quad (\varphi_1, \boldsymbol{y}) = 141.3.$$

法方程组为

$$\begin{pmatrix} 9.5 & 33.5 \\ 33.5 & 139.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.9 \\ 141.3 \end{pmatrix}.$$

实例（续）

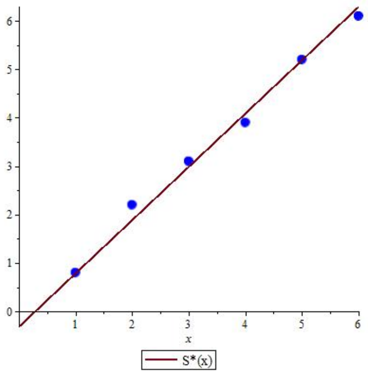
解得$c_0 = 0.319212, c_1 = 1.102463$，从而最小二乘解为

$$S^*(x) = 0.319212 + 1.102463x.$$

实例（续）

解得$c_0 = 0.319212, c_1 = 1.102463$，从而最小二乘解为

$$S^*(x) = 0.319212 + 1.102463x.$$



实例

例

考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的记录。希望构造某一函数，近似还原纤维的强度与其拉伸倍数之间的关系。

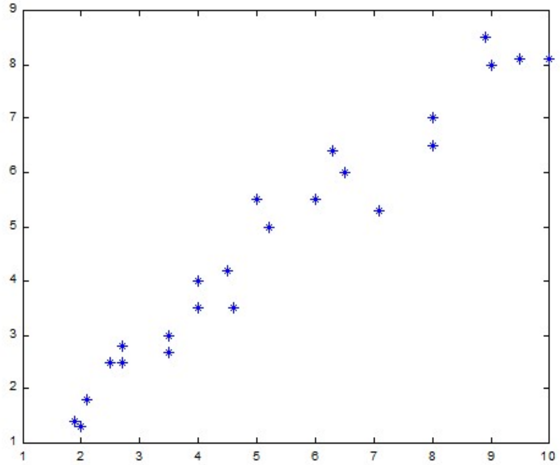
实例

例

考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的记录。希望构造某一函数，近似还原纤维的强度与其拉伸倍数之间的关系。

编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i	编 号	拉伸倍数 x_i	强 度 y_i
1	1.9	1.4	13	5	5.5
2	2	1.3	14	5.2	5
3	2.1	1.8	15	6	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3	19	8	6.5
8	3.5	2.7	20	8	7
9	4	4	21	8.9	8.5
10	4	3.5	22	9	8
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10	8.1

实例(续)



实例（续）

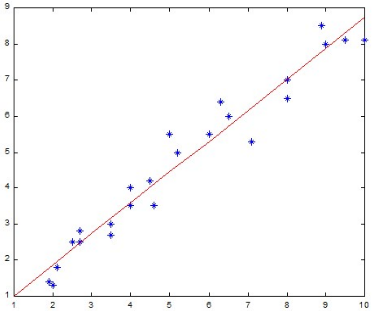
同样采用线性多项式做最小二乘拟合，解得$c_0 = 0.1505, c_1 = 0.8587$, 从而最小二乘解为

$$S^*(x) = 0.1505 + 0.8587x.$$

实例（续）

同样采用线性多项式做最小二乘拟合，解得$c_0 = 0.1505, c_1 = 0.8587$, 从而最小二乘解为

$$S^*(x) = 0.1505 + 0.8587x.$$



转换为线性拟合

有时拟采用的拟合函数虽然表面上不是线性函数的形式, 但通过变换仍可化为线性模型.

转换为线性拟合

有时拟采用的拟合函数虽然表面上不是线性函数的形式, 但通过变换仍可化为线性模型.

1. 希望采用$S(x)=ae^{bx}$去拟合给定数据点集. 对其两端取对数, 则

$$\ln S(x)=\ln a+bx,$$

再设

$$y(x)=\ln S(x),\quad c_0=\ln a,\quad c_1=b,$$

从而转换为线性函数的最小二乘拟合问题.

转换为线性拟合

2. 希望采用$S(t) = at^b$去拟合给定数据点集. 对其两端取对数, 则

$$\ln S(t) = \ln a + b \ln t,$$

再设

$$x = \ln t, \quad y(x) = \ln S(e^x), \quad c_0 = \ln a, \quad c_1 = b,$$

从而也转换为线性函数的最小二乘拟合问题.

法方程组求解的再讨论

利用线性函数或指数函数进行最小二乘拟合是容易计算的, 但是对数据点集的几何性质要求过高.

法方程组求解的再讨论

利用线性函数或指数函数进行最小二乘拟合是容易计算的, 但是对数据点集的几何性质要求过高.

对于给定的一般数据点集, 由于满足Haar条件并且较为简单, 我们希望将Φ_{n+1}选为n次多项式空间$\mathbb{P}_n$, 来进行最小二乘拟合.

法方程组求解的再讨论

利用线性函数或指数函数进行最小二乘拟合是容易计算的, 但是对数据点集的几何性质要求过高.

对于给定的一般数据点集, 由于满足Haar条件并且较为简单, 我们希望将Φ_{n+1}选为n次多项式空间$\mathbb{P}_n$, 来进行最小二乘拟合.

如果选择幂基$\varphi_i(x) = x^i (i = 0, 1, \cdots, n)$, 此时法方程组系数矩阵$G = A^T BA$可能呈现病态, 方程组同样不易求解.

法方程组求解的再讨论

利用线性函数或指数函数进行最小二乘拟合是容易计算的, 但是对数据点集的几何性质要求过高.

对于给定的一般数据点集, 由于满足Haar条件并且较为简单, 我们希望将Φ_{n+1}选为n次多项式空间$\mathbb{P}_n$, 来进行最小二乘拟合.

如果选择幂基$\varphi_i(x) = x^i (i = 0, 1, \cdots, n)$, 此时法方程组系数矩阵$G = A^T BA$可能呈现病态, 方程组同样不易求解.

但是如果我们选择$\mathbb{P}_n$的正交基, 从而使得系数矩阵$G = A^T BA$是对角阵, 此时法方程组显然很容易求解.

正交基

设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in \mathbb{P}_n$, 满足

正交基

设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in \mathbb{P}_n$, 满足

$$(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ A_j > 0, & k = j, \end{cases} \tag{3.13}$$

正交基

设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in \mathbb{P}_n$, 满足

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ A_j > 0, & k = j, \end{cases} \tag{3.13}$$

则$\{\varphi(x)\}_{i=0}^{n}$称为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^{m}$与权$\{\omega(x_i)\}_{i=0}^{m}$正交的多项式组. 从而构成$\mathbb{P}_n$的一组正交基函数。

法方程组的再求解

法方程组的系数矩阵为对角阵，从而解为

法方程组的再求解

法方程组的系数矩阵为对角阵，从而解为

$$c_k^* = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) y_i \varphi_k(x_i)}{\sum_{i=0}^{m} \omega(x_i) \varphi_k^2(x_i)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \tag{3.14}$$

法方程组的再求解

法方程组的系数矩阵为对角阵，从而解为

$$c_k^* = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{\sum_{i=0}^m \omega(x_i) y_i \varphi_k(x_i)}{\sum_{i=0}^m \omega(x_i) \varphi_k^2(x_i)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \quad (3.14)$$

且平方误差为

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \|\boldsymbol{y}\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k^*)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2.$$

正交基的构造

定理

给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$与权$\{\omega(x_i) \geq 0\}_{i=0}^m$,

正交基的构造

定理

给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$与权$\{\omega(x_i)\geq 0\}_{i=0}^m$, 满足

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=1,\\ \varphi_1(x)=x-\alpha_0,\\ \varphi_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)\varphi_k(x)-\beta_{k-1}\varphi_{k-1}(x), \quad k=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \tag{3.15}$$

的多项式组$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$构成正交多项式组,

正交基的构造

定理

给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$与权$\{\omega(x_i)\geq 0\}_{i=0}^m$, 满足

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=1, \\ \varphi_1(x)=x-\alpha_0, \\ \varphi_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)\varphi_k(x)-\beta_{k-1}\varphi_{k-1}(x), \quad k=1,2,\cdots,n-1. \end{cases} \tag{3.15}$$

的多项式组$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$构成正交多项式组, 其中

$$\alpha_k=\frac{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_k)}=\frac{\sum_{i=0}^m\omega(x_i)x_i\varphi_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m\omega(x_i)\varphi_k^2(x_i)},\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\beta_{k-1}=\frac{(\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_{k-1},\boldsymbol{\varphi}_{k-1})}=\frac{\sum_{i=0}^m\omega(x_i)\varphi_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m\omega(x_i)\varphi_{k-1}^2(x_i)},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$