Übungsblatt 3

PA 1

1. Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses (d.h. die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wochentag) immer gleich ist, genau genommen $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{7}$.
2. Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da beim einmaligen Ziehen jedes Los die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gezogen zu werden, nämlich $\frac{1}{120}$.
3. Es handelt sich nicht um ein Laplace-Experiment, da es nicht gleichwahrscheinlich ist, "vorne" oder "hinten" ein Plattfuß zu kriegen.

PA 2

(a)
  i. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:
     - $\Omega = \{\text{rot}, \text{gelb}, \text{blau}\}$
     - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
     - $\mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{3}{6}, \mathbb{P}(\text{gelb}) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{1}{6}$

  ii. Es handelt sich nicht um einen Laplace-Raum, da die Elementarereignisse (rot, gelb, blau) nicht gleichwahrscheinlich sind.

  iii. Option 1:
     $\mathbb{P}(A^\mathsf{c}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
     Option 2:
     $\mathbb{P}(A^\mathsf{c}) = \mathbb{P}(\text{gelb}) + \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(b)
  i. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:
     - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
     - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
     - $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| = n^k = 6^2 = 36$

     $A = \{\text{Es wird keine sechs gewürfelt}\}$

     $$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$$

ii. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:
   - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$
   - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
   - $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+2-1}{2} = 21$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5+2-1}{2}}{21} = \frac{15}{21}$$

(c) i. $\mathbb{P}(A) =$

HA 1

Modellierung als Laplace-Raum mit durchnummiererten Karten:
$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{12}), \omega_i \in \{1, \dots, 48\} \mid \omega_i < \omega_{i+1} \land i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$
Es handelt sich um eine Kombination ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Es gibt $n = 24 \cdot 2$ Karten, da jede der 24 Karten doppelt vorkommt. Insgesamt wird immer $k = 12$ mal gezogen.

Daher ergibt sich für das Zufallsexperiment $|\Omega| = \binom{48}{12}$.

(a) $A = \{\text{Es werden zwei Kreuzdamen gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{46}{10}}{\binom{48}{12}} = 0.05851063829 \approx 0.059$$

(b) $B = \{\text{Es werden genau fünf Trümpfe gezogen}\}$

Da wir genau fünf Trümpfe ziehen wollen, darf keine von den anderen gezogenen Karten ein Trumpf sein. Es werden also $k = 5$ von den $n = 24$ Trümpfen gezogen und die restlichen $k = 7$ Karten gehören zu den $n = 24$ nicht-Trümpfen.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{24}{5} \cdot \binom{24}{7}}{\binom{48}{10}} = 0.21115421084 \approx 0.21$$

(c) $C = \{\text{Es werden genau drei Pik und 4 Herz gezogen}\}$

Dieses mal sollen $k = 3$ von den $n = 12$ verschiedenen Pik-Karten gezogen werden. Das gleiche gilt für die vier gezogenen Herz-Karten, und die restlichen vier sollen schließlich zu den 24 übrigen Symbolen gehören.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{48}{12}} = 0.0664386819 \approx 0.066$$

(d) $D = \{\text{Es werden mindestens 10 Trümpfe gezogen}\}$

$\Leftrightarrow \{\text{Es werden 10, 11, oder 12 Trümpfe gezogen}\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(D) = \sum_{i=10}^{12} \frac{\binom{24}{i} \cdot \binom{24}{12-i}}{\binom{48}{12}}$$
$= 0.00776974368 + 0.00085989258 + 0.00003881459$

$= 0.00866845085 \approx 0.0087$

(e) $E = \{$Es werden genau 3 Pik oder genau 4 Herz gezogen$\}$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{36}{9}}{\binom{48}{12}} + \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{36}{8}}{\binom{48}{12}} - \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{24}{5}}{\binom{48}{12}}$$
$= 0.297286598 + 0.21500191462 - 0.0664386819$

$= 0.44584983072 \approx 0.45$

(f) $F = \{$Es werden genau neun Damen gezogen$\}$

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\binom{8}{9} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{48}{12}} = 0$$

(g) $D = \{$Es wird ein Kreuz, Pik, Herz oder Karo gezogen$\}$

Da $|D| = |\Omega|$, ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D)$ dieses Ereignisses 1.

Anders gesagt: es gibt keine Karten im Deck, die nicht eine der vier genannten Symbole haben. Somit trifft das Ereignis auf alle Elementarereignisse in Ω zu.

HA 2

Es sei ω_i die "Nummer" des Mantels, und i die Person, die den Mantel erhält.
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

Es handelt sich um eine Variation ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

(a) $A = \{$Keine der vier Personen erhält den eigenen Mantel$\}$

$= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \omega_i \neq i\}$

Es werden $k = 4$ von den übrigen $n = 4$ Manteln gezogen.

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{4!}{0!} = 24$$

Wir können $|A|$ mithilfe des Gegenereignisses bestimmen.

d.h. $A^c = \{$Mindestens zwei Personen haben den richtigen Mantel$\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(b) $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid w_i \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

$$P(B) = \frac{1}{\frac{4!}{(4-2)!}} = \frac{1}{12}$$

HA 3

(a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

(b) Laplace-Raum:

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

Kein Laplace-Raum:

$\Omega' = \{\omega = \omega_1 + \omega_2 \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathbb{P}(\omega) = (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})^2 4$

$\Rightarrow A = \Omega^{24}$

(c) Spiel 1:

$A = \{$Unter den vier Würfen kommt mindestens eine sechs$\}$

$A^c = \{$Unter den vier Würfen kommt keine sechs$\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.518$

$B = \{$24 Doppelwürfe, darunter mindestens eine Doppelsechs$\}$

$B^c = \{$24 Doppelwürfe, darunter keine Doppelsechs$\}$

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - (1 - (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})^2)^{24} \approx 0.491$

(d) Die Ereigniswahrscheinlichkeiten summieren sich nicht auf, da jedes mal der Würfel neu geworfen wird. Sonst hätte das Ereignis, bei sechs Würfen eine sechs zu werfen, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$.

Statt zu multiplizieren, müssen die Elementarwahrscheinlichkeiten potenziert werden.