Übungsblatt 5

PA 1

(a) Die Ereignisse sind kausal abhängig, da der erste Wurf (welcher bei B sechs sein soll) die Augenzahl mitbestimmt.

(b) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Die Ereignisse A und B sind also stochastisch unabhängig.

PA 2

- Ergebnis := Kopf oder Zahl, Erfolg := “Kopf”, d.h. $p = \frac{1}{2}$
- Ergebnis := Kaputt oder funktionsfähig, Erfolg := “Maschine funktionsfähig”
- Ergebnis := Gerade oder ungerade Augenzahl, Erfolg := “Gerade Augenzahl”, d.h. $p = \frac{3}{6}$
- Ergebnis := Auto oder keine Auto, Erfolg := “Spielzeugauto”
- Ergebnis := Wirkt oder wirkt nicht, Erfolg := “Wirkt”
- Ergebnis := Geblitzt oder nicht geblitzt werden, Erfolg := “Nicht geblitzt”
- Ergebnis := Test positiv oder negativ, Erfolg := “Negativ”

PA 3

(a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{10}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6^{10}}$

(b) $N \in \{5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5\}$

(c) Es beschreibe X nun die Anzahl an würfen, bis 6 getroffen wurde.

Es handelt sich um eine geometrische Verteilung, d.h. $X \sim \text{Geom}(p)$.

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{5}{6}^{1-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \approx 0.167 = \mathbb{P}(N=5)$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{5}{6}^{2-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0.139 = \mathbb{P}(N=4)$$
$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{5}{6}^{3-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0.116 = \mathbb{P}(N=3)$$
$$\mathbb{P}(X=4) = \frac{5}{6}^{4-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0.096 = \mathbb{P}(N=2)$$
$$\mathbb{P}(X=5) = \frac{5}{6}^{5-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{625}{7776} \approx 0.08 = \mathbb{P}(N=1)$$
$$\mathbb{P}(X=6) = \frac{5}{6}^{6-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3125}{46656} \approx 0.067 = \mathbb{P}(N=0)$$
$$\mathbb{P}(X=7) = \frac{5}{6}^{7-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15625}{279936} \approx 0.056 = \mathbb{P}(N=-1)$$
$$\mathbb{P}(X=8) = \frac{5}{6}^{8-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{78125}{1679616} \approx 0.047 = \mathbb{P}(N=-2)$$
$$\mathbb{P}(X=9) = \frac{5}{6}^{9-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{390625}{10077696} \approx 0.039 = \mathbb{P}(N=-3)$$
$$\mathbb{P}(X=10) = \frac{5}{6}^{10-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1953125}{60466176} \approx 0.032 = \mathbb{P}(N=-4)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(N=-5) = 1 - \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(X=k) \approx 1 - 0.839 = 0.161$$

(d) $A = \{\text{Der Nettogewinn ist negativ}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X=-k) \approx 0.056 + 0.047 + 0.039 + 0.032 = 0.174$$

HA 1

(b) **Berechnung:**

$\mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1^c) = (\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}) \cdot (1 - \frac{6}{10}) = \frac{54}{90} \cdot \frac{4}{10} = \frac{216}{900} = 0.24$

$\mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} \approx 0.133$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1^c) \neq \mathbb{P}(A_2 \cap A_1^c)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse A_2 und A_1^c sind somit nicht unabhängig.

Erklärung:

Die Wahrscheinlichkeit von A_2 beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass im zweiten Zug ein fehlerfreies Produktionsteil entnommen wird. Da es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt, sind nach dem ersten Zug unterschiedlich viele Produktionsteile in der Kiste, d.h. vor dem zweiten Zug sind in jedem Fall weniger Produktionsteile insgesamt enthalten als vor dem ersten. Die Wahrscheinlichkeiten des zweiten Zuges ändern sich also je nachdem was im ersten Zug entnommen wird, denn nach dem ersten Zug gibt es entweder ein fehlerhaftes oder ein fehlerfreies Teil weniger als davor.

Somit hängt A_2 davon ab, was im ersten zug entnommen wurde, in diesem Fall wäre es ein fehlerhaftes Produktionsteil (A_1^c).

HA 2

(a) Wahrscheinlichekitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

- $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\}$
- $\mathbb{P}(\omega) = \binom{4}{X} \cdot (\frac{1}{2})^4$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

HA 3

(a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- $\Omega = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(b) $G \in \{2, 1.5, 1, 0.5, -5\}$

k	2	1.5	1	0.5	-5
$\mathbb{P}(G = k)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$

(c) Die einzige Möglichkeit, dass der Besitzer Geld verliert ist mit $G = -5$, d.h. die Wahrscheinlichkeit auf Verlust für den Besitzer ist $\mathbb{P}(G = -5) = \frac{7}{20}$.

(d) $\mathbb{E}(G) = \frac{2}{20} \cdot 2 + \frac{1}{20} \cdot 1.5 + \frac{3}{20} \cdot 1 + \frac{7}{20} \cdot 0.5 + \frac{7}{20} \cdot (-5)$
$\Rightarrow \mathbb{E}(G) = -1.15$

Der Gewinn des Ladenbesitzers nimmt im Mittel einen negativen Wert an, da der Erwartungswert von G negativ ist.

Der Stand ist also auf lange Sicht nicht profitabel.

HA 4

(a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^1 0$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{5^{10}}$

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl an Punkten bzw. Anzahl an richtig beantworteten Aufgaben.

$X \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$