Übungsblatt 2

PA 1

(a) Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge:
$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

(b) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge:
$$\binom{n}{k} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

(c) Kombinationen für einen Spieler
(Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge):
$$\binom{n}{k} = \frac{48!}{12!(48-12)!} = 69668534468$$

Insgesamte Kombinationen
(Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge):
$$\frac{4!}{(4-4)!} = 4! = 24$$
$\Rightarrow 24 \cdot 69668534468$ Möglichkeiten insgesamt.

(d) Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Ziehungsreihenfolge:
$n^k = 4^5 = 1024$

PA 2

(a) i. $|M \cap B| = |M| - |M \cap G| = 32 - 23 = 9$
$|W \cap B| = |B| - |M \cap B| = 15 - 9 = 6$
$|W| = |K| - |M| = 50 - 32 = 18$
$|W \cap G| = |W| - |W \cap B| = 18 - 6 = 12$
$|G| = |M \cap G| + |W \cap G| = 23 + 12 = 35$

Geschlecht \Farbe	Grün	Blau	**Summe**
Männlich	23	$\lvert M \cap B\rvert$	32
Weiblich	$\lvert W \cap G\rvert$	$\lvert W \cap B\rvert$	$\lvert W\rvert$
Summe	$\lvert G\rvert$	15	50

Anteil der Käfer mit blauen Flügeln unter den Männchen: $\frac{9}{32}$

Anteil der Männchen unter Käfern mit blauen Flügeln: $\frac{9}{15}$

ii.
- Es gibt $\binom{n}{k} = \frac{50!}{8!(50-8)!} = 536878650$ verschiedene Möglichkeiten.
- Es gibt $\binom{15}{5} \cdot \binom{35}{3} = 3003 \cdot 6545 = 19654635$ Möglichkeiten.
- Es gibt $\binom{18}{6} \cdot \binom{32}{2} = 18564 \cdot 496 = 9207744$ Möglichkeiten.
- Es gibt $\binom{9}{3} \cdot \binom{23}{4} \cdot \binom{18}{1} = 84 \cdot 8855 \cdot 18 = 13388760$ Möglichkeiten.

iii.
- Es gibt $5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten.
-

HA 1

(a)
1. Emil wählt zufällig fünf Speisen, welche er in der bestellten bzw. ausgewählten Reihenfolge essen möchte und somit auch in der gegebenen Reihenfolge vom Koch auf das Förderband gestellt werden sollen. Emil ist es egal, wenn eine Speise mehrfach vorkommt.
2. Emil wählt zufällig fünf voneinander verschiedene Speisen, welche in der gegebenen Reihenfolge auf das Band gestellt und gegessen werden sollen.
3. Emil möchte fünf voneinander verschiedene Speisen zufällig bestellen. Emil hat kein Problem damit, bspw. den Nachtisch vor der Hauptspeise zu essen, also können die Gerichte vom Koch beliebig auf das Band gestellt werden.
4. Weil Emil sehr großen Hunger hat, will er in beliebiger Reihenfolge zufällige Gerichte essen, die sich ggf. auch doppeln können.

(b) 1.

$$\begin{aligned} n^k &= 8^5 \\ &= 32768 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{8!}{(8-5)!} \\ &= 6720 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{8!}{(8-5)!5!} \\ &= 56 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\binom{n+k-1}{k} &= \binom{8+5-1}{5} \\ &= \frac{(8+5-1)!}{(8+5-1-5)!5!} \\ &= 792\end{aligned}$$

HA 2

(a) i. Sie müsste $30^2 = 900$ verschiedene Kombinationen ausprobieren.

ii. Es verbleiben $\frac{30!}{(30-2)!} = 870$ Möglichkeiten.

iii. Es verbleiben nun $9 \cdot 6 = 54$ verschiedene Möglichkeiten wenn doppelte Zahlen vorkommen können, andernfalls sind es $54 - 6 = 48$.

iv. Wenn die Reihenfolge unklar ist, gibt es $(9 \cdot 6) \cdot 2 - 6^2 = 72$ Möglichkeiten mit und $72 - 6 = 66$ Möglichkeiten ohne Doppelziffern.

(b) i. Es gibt insgesamt $\binom{8}{5} = 56$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

ii. Wenn Lucie eine Gewinnerin ist, dann gibt es noch $\binom{8-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ verschiedene Möglichkeiten.

iii. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucie eine der Münzen zieht genau $\frac{35}{56} = 0.625$.

(c) Mit dieser Bedingung würde es sich nun um eine Kombination mit Wiederholung (Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge) handeln. Somit gäbe es nun $\binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5} = 792$ verschiedene Gewinnverteilungen.

HA 3

Wir wissen, dass ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Ziehungsreihenfolge $\binom{n}{k}$ mögliche Ziehungsergebnisse hat bei einem Stichprobenumfang von k und einer Grundgesamtheit von n.

Wenn wir den Fall betrachten, dass eine Urne n Kugeln mit der Beschriftung a und ebenso viele Kugeln mit der Beschriftung b enthält, und wir ziehen $k = n$ mal:

Wir können die Ereignismenge Ω zusammengefasst wie folgt ausdrücken:
$\Omega = \{(a^n), (a^{n-1}b^1), (a^{n-2}b^2), \dots, (a^1 b^{n-1}), (b^n)\}$

Wenn wir in diesem Urnenmodell nun alle Ereignisse zählen und summieren:

$$\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$= a^n + n \cdot a^{n-1}b^1 + \cdots + n \cdot a^1 b^{n-1} + b^n$$
$$= (a+b)^n$$

Beispielsweise mit $n = 3$ gibt es a^3 einmal, a^2b und ab^2 jeweils dreimal und b^3 einmal. Summiert ergibt das:
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = \sum_{k=0} 3\binom{n}{k}a^{3-k}b^k$