Übungsblatt 3

HA 1

Modellierung als Laplace-Raum mit durchnummiererten Karten:
$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{12}), \omega_i \in \{1, \ldots, 48\} \mid \omega_i < \omega_{i+1} \wedge i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$
Es handelt sich um eine Kombination ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Es gibt $n = 24 \cdot 2$ Karten, da jede der 24 Karten doppelt vorkommt. Insgesamt wird immer $k = 12$ mal gezogen.

Daher ergibt sich für das Zufallsexperiment $|\Omega| = \binom{48}{12}$.

(a) $A = \{\text{Es werden zwei Kreuzdamen gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{46}{10}}{\binom{48}{12}} = 0.05851063829 \approx 0.059$$

(b) $B = \{\text{Es werden genau fünf Trümpfe gezogen}\}$

Da wir genau fünf Trümpfe ziehen wollen, darf keine von den anderen gezogenen Karten ein Trumpf sein. Es werden also $k = 5$ von den $n = 24$ Trümpfen gezogen und die restlichen $k = 7$ Karten gehören zu den $n = 24$ nicht-Trümpfen.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{24}{5} \cdot \binom{24}{7}}{\binom{48}{10}} = 0.21115421084 \approx 0.21$$

(c) $C = \{\text{Es werden genau drei Pik und 4 Herz gezogen}\}$

Dieses mal sollen $k = 3$ von den $n = 12$ verschiedenen Pik-Karten gezogen werden. Das gleiche gilt für die vier gezogenen Herz-Karten, und die restlichen vier sollen schließlich zu den 24 übrigen Symbolen gehören.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{48}{12}} = 0.0664386819 \approx 0.066$$

(d) $D = \{\text{Es werden mindestens 10 Trümpfe gezogen}\}$

$\Leftrightarrow \{\text{Es werden 10, 11, oder 12 Trümpfe gezogen}\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(D) = \sum_{i=10}^{12} \frac{\binom{24}{i} \cdot \binom{24}{12-i}}{\binom{48}{12}}$$
$$= 0.00776974368 + 0.00085989258 + 0.00003881459$$
$$= 0.00866845085 \approx 0.0087$$

(e) $E = \{\text{Es werden genau 3 Pik oder genau 4 Herz gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{36}{9}}{\binom{48}{12}} + \frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{36}{8}}{\binom{48}{12}} - \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{24}{5}}{\binom{48}{12}}$$

$$= 0.297286598 + 0.21500191462 - 0.0664386819$$

$$= 0.44584983072 \approx 0.45$$

(f) $F = \{\text{Es werden genau neun Damen gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\binom{8}{9}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{48}{12}} = 0$$

(g) $D = \{\text{Es wird ein Kreuz, Pik, Herz oder Karo gezogen}\}$

Da $|D| = |\Omega|$, ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D)$ dieses Ereignisses 1.

Anders gesagt: es gibt keine Karten im Deck, die nicht eine der vier genannten Symbole haben. Somit trifft das Ereignis auf alle Elementarereignisse in Ω zu.

HA 2

Es sei ω_i die "Nummer" des Mantels, und i die Person, die den Mantel erhält.
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1,2,3,4\} \mid i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

Es handelt sich um eine Variation ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

(a) $A = \{\text{Keine der vier Personen erhält den eigenen Mantel}\}$

$= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1,2,3,4\} \mid \omega_i \neq i\}$

Es werden $k = 4$ von den übrigen $n = 4$ Manteln gezogen.

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{4!}{0!} = 24$$

Wir können $|A|$ mithilfe des Gegenereignisses bestimmen.

d.h. $A^c = \{\text{Mindestens zwei Personen haben den richtigen Mantel}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(b) $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid w_i \in \{1,2,3,4\}, i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

$$P(B) = \frac{1}{\frac{4!}{(4-2)!}} = \frac{1}{12}$$

HA 3

(a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

(b) Laplace-Raum:

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

Kein Laplace-Raum:

$\Omega' = \{\omega = \omega_1 + \omega_2 \mid \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathbb{P}(\omega) = (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})^2 4$

$\Rightarrow A = \Omega^{24}$

(c) Spiel 1:

$A = \{\text{Unter den vier Würfen kommt mindestens eine sechs}\}$

$A^c = \{\text{Unter den vier Würfen kommt keine sechs}\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.518$

$B = \{24 \text{ Doppelwürfe, darunter mindestens eine Doppelsechs}\}$

$B^c = \{24 \text{ Doppelwürfe, darunter keine Doppelsechs}\}$

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - (1 - (\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})^2)^{24} \approx 0.491$

(d) Die Ereigniswahrscheinlichkeiten summieren sich nicht auf, da jedes mal der Würfel neu geworfen wird. Sonst hätte das Ereignis, bei sechs Würfen eine sechs zu werfen, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$.

Statt zu multiplizieren, müssen die Elementarwahrscheinlichkeiten potenziert werden.