Übungsblatt 6

HA 1

Es seien X, Y diskrete Zufallsvariablen, so dass gilt $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$, sowie $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

(a) $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) + 0$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b-\mu)^2)\\
\Leftrightarrow\ &\text{Var}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2)
\end{aligned}$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \text{Var}(aX+b) &= \mathbb{E}((aX+b-(a\mathbb{E}(X)+b))^2)\\
&= \mathbb{E}((aX+b-a\mathbb{E}(X)-b)^2)\\
&= \mathbb{E}((aX-a\mathbb{E}(X))^2)\\
&= \mathbb{E}(a^2(X-\mathbb{E}(X)^2)\\
\Leftrightarrow \text{Var}(aX+b) &= a^2\mathbb{E}((X-\mu)^2)\\
\Leftrightarrow \text{Var}(aX+b) &= a^2\text{Var}(X)
\end{aligned}$$

Daraus folgt der Beweis für $\text{SD}(aX+b) = |a| \cdot \text{SD}(X)$:

$$\begin{aligned}
\text{SD}(aX+b) &= +\sqrt{\text{Var}(aX+b)}\\
\Leftrightarrow \text{SD}(aX+b) &= +\sqrt{a^2\text{Var}(X)}\\
&= (+\sqrt{a^2}) \cdot (+\sqrt{\text{Var}(X)})\\
\Leftrightarrow \text{SD}(aX+b) &= |a| \cdot \text{SD}(X)
\end{aligned}$$

(b) $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y-\mu)^2)\\
\Leftrightarrow \text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2)\\
&= \mathbb{E}((X+Y)^2 - 2(X+Y)\mathbb{E}(X+Y) + \mathbb{E}(X+Y)^2)\\
&= \mathbb{E}((X+Y)^2 - \mathbb{E}(X+Y))^2\\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2\\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2\\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2))\\
&= (\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) + (\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) + (2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\\
\Leftrightarrow \text{Var}(X+Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))
\end{aligned}$$

HA 2

1. Im folgenden sei X der Gewinn aus einer gespielten Runde, d.h. der Preis abzüglich des Einsatzes. Somit ergibt sich der Wertebereich $X \in \{3, 1, -0.6, -1\}$.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{7}{56} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -0.6) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{42}{336} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = -1) &= 1 - \sum_{n=1}^{3} \mathbb{P}(X = n) \\ &= 1 - \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

Nun kann der Erwartungswert anhand der Zufallsvariablen (Gewinn pro Runde) bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = 3) \cdot 3 + \mathbb{P}(X = 1) \cdot 1 + \mathbb{P}(X = -0.6) \cdot (-0.6) + \mathbb{P}(X = -1) \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1 \cdot 6}{8 \cdot 10} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{6}{80} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{40}{80} - \frac{6}{80} - \frac{50}{80} \\ &= -\frac{2}{10}\end{aligned}$$

Der Einsatz ist nicht fair, da der Erwartungswert für unseren Gewinn negativ ist, und somit im Durchschnitt Verlust gemacht wird.

Das Spiel ist "fair", wenn der Erwartungswert (also der durchschnittliche Gewinn) gleich null ist.

Es sei nun e der Einsatz, der pro Runde verlangt wird, welcher vom Preis abgezogen wird um den Gewinn zu bestimmen. Jede Zufallsvariable wird anhand des Preises und des Einsatzes bestimmt, also kann die Gleichung angepasst werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = (4-e)) \cdot (4-e) + \mathbb{P}(X = (2-e)) \cdot (2-e) \\ &\quad + \mathbb{P}(X = (0.4-e)) \cdot (0.4-e) + \mathbb{P}(X = 0-e) \cdot (0-e)\end{aligned}$$

Um einen fairen Einsatz zu bestimmen setzen wir nun den Erwartungswert gleich null:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{4-e}{8} + \frac{2-e}{8} + \frac{0.4-e}{8} + \frac{-5e}{8} \\ &= \frac{6.4-8e}{8} \\ \Leftrightarrow 0 &= 6.4 - 8e \\ 0.8 &= e\end{aligned}$$

Ein fairer Einsatz für das Spiel wäre also 0.80 EUR, da somit der Erwartungswert (also der durchschnittliche Gewinn des Spiels) null wäre.

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{P}(X = 3) \cdot (3+0.2)^2 + \mathbb{P}(X = 1) \cdot (1+0.2)^2 \\ &\quad + \mathbb{P}(X = -0.6) \cdot (-0.6+0.2)^2 + \mathbb{P}(X = -1) \cdot (-1+0.2)^2 \\ &= \frac{10.24 + 1.44 - 0.16 - 5 \cdot 0.64}{8} \\ &= 2.29\end{aligned}$$

3. Der neue Wertebereich ist $Y \in \{1, 6.76, 9\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= \frac{2}{8} \\ \mathbb{P}(Y = 6.76) &= \mathbb{P}(X = 6.76) \\ &= \frac{1}{8} \\ \mathbb{P}(Y = 9) &= \mathbb{P}(X = -1) \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=6.76)\cdot 6.76 + \mathbb{P}(Y=9)\cdot 9 \\
&= \frac{2}{8} + \frac{6.76}{8} + \frac{45}{8} \\
&= \frac{53.76}{8} \\
&= 6.72
\end{aligned}
$$

4. Anwendung der Transformationsregel mit $g(X) = (X-2)^2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X=x_i) \\
\Rightarrow \mathbb{E}(Y) &= (3-2)^2\cdot\mathbb{P}(X=3) + (1-2)^2\cdot\mathbb{P}(X=1) \\
&\quad + (-0.6-2)^2\cdot\mathbb{P}(X=-0.6) + (-1-2)^2\cdot\mathbb{P}(X=-1) \\
&= \frac{1+1+6.76+9\cdot 5}{8} \\
&= \frac{53.76}{8} \\
&= 6.72
\end{aligned}
$$

HA 3

1. Um zu zeigen, dass $\mathbb{P}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

   i. $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X=k) \geq 0$
   ii. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) = 1$

   Zunächst gilt für $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ die Bedingung $p \geq 0$, da $p \in (0,1)$. Da $p \geq 0$, ist $\mathbb{P}(X=k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls nicht negativ.

   Ebenfalls gilt $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(1-p)^{k-1}$, sodass:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} p(1-p)^{k-1} &= p\sum k \in \mathbb{N}(1-p)^{k-1} \\
&= p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

   Da beide Bedingungen erfüllt sind, ist $\mathbb{P}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X.

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p) \cdot \mathbb{E}(X) + 1 \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} \\
&\dots \\
&= p \cdot \frac{2}{p^3} - p \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$