Übungsblatt 7

PA 1

$X \setminus Y$	-2	0	1	
0	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{6}{16}$
2	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{7}{16}$
	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	1

Unabhängigkeit:

$\mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=-2) = \frac{3}{16}\cdot\frac{7}{16}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=-2) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=-2)$

$\Rightarrow$ X und Y sind nicht stochastisch unabhängig.

$\mathbb{E}(X) = 0\cdot\frac{3}{16} + 1\cdot\frac{6}{16} + 2\cdot\frac{7}{16} = \frac{20}{16}$

$\mathbb{E}(Y) = -2\cdot\frac{7}{16} + 0\cdot\frac{6}{16} + 1\cdot\frac{3}{16} = -\frac{11}{16}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\mathbb{E}(X^2) = 0^2\cdot\frac{3}{16} + 1^2\cdot\frac{6}{16} + 2^2\cdot\frac{7}{16} = \frac{34}{16}$

$\mathbb{E}(Y^2) = (-2)^2\cdot\frac{7}{16} + 0^2\cdot\frac{6}{16} + 1^2\cdot\frac{3}{16} = \frac{31}{16}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{34}{16} - (\frac{5}{4})^2 = \frac{34-25}{16} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \frac{31}{16} + (\frac{11}{16})^2 = \frac{375}{256}$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

$Z = XY$, sodass $Z \in \{-4, -2, 0, 1, 2\}$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Z) = -4 \cdot \frac{4}{16} - 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{-16-6}{16} = -\frac{22}{16}$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{11}{8} - \frac{5}{4} \cdot -(\frac{11}{16}) = -\frac{11}{8} + \frac{55}{64} = -\frac{33}{64}$

$\Rightarrow \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$

PA 4

(a) f ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte obwohl manche Funktionswerte größer als 1 sind, da Wkt.-Dichtefunktionen mit dem Integral die Wahrscheinlichkeiten berechnen, d.h. die Fläche unter f im Intervall $[0, 1]$ ist in diesem Fall gleich 1. Außerdem ist die Kurve nichtnegativ, was eine weitere Eigenschaft der Wkt.-Dichtefunktionen ist.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x < 0.1) &= \int_0^{0.1} 3(x-1)^2 \, dx \\
&= \left[(x-1)^3\right]_0^{0.1} \\
&= (-0.9)^3 - (-1)^3 \\
&= 0.271
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x < 0.5) &= \int_0^{0.5} 3(x-1)^2 \, dx \\
&= \left[(x-1)^3\right]_0^{0.5} \\
&= (-0.5)^3 - (-1)^3 \\
&= 0.875
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) \, dx \\
&= \int_0^1 3x^3 - 6x^2 + 3x \, dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} - 0 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{Var}(X) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 3x^4 - 6x^3 + 3x^2\, dx \\
&= \left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{5} - \frac{3}{2} + 1 - 0 \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{10} - \frac{1}{16} \\
&= \frac{3}{80}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0.19
$$