

Übungsblatt 3

PA 1

1. Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses (d.h. die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wochentag) immer gleich ist, genau genommen $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{7}$.
2. Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da beim einmaligen Ziehen jedes Los die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gezogen zu werden, nämlich $\frac{1}{120}$.
3. Es handelt sich nicht um ein Laplace-Experiment, da es nicht gleichwahrscheinlich ist, "vorne" oder "hinten" ein Plattfuß zu kriegen.

PA 2

- (a) i. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:
- $\Omega = \{\text{rot, gelb, blau}\}$
 - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
 - $\mathbb{P}(\text{rot}) = \frac{3}{6}, \mathbb{P}(\text{gelb}) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{1}{6}$
- ii. Es handelt sich nicht um einen Laplace-Raum, da die Elementarereignisse (rot, gelb, blau) nicht gleichwahrscheinlich sind.
- iii. Option 1:
- $$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- Option 2:
- $$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\text{gelb}) + \mathbb{P}(\text{blau}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- (b) i. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
 - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
 - $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| = n^k = 6^2 = 36$
- $A = \{\text{Es wird keine sechs gewürfelt}\}$
- $$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$$

ii. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+2-1}{2} = 21$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5+2-1}{2}}{21} = \frac{15}{21}$$

(c) i. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.665$

PA 3

(a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

- $\Omega = \{\text{Grün, Rot}\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\text{Grün}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(\text{Rot}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Es handelt sich nicht um einen Laplace-Raum, da die beiden Elementarereignisse nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

(b) $\mathbb{P}(\text{GRGRRR}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0.0055$

$$\mathbb{P}(\text{GRRRRR}) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0.0027$$

$$\mathbb{P}(*\text{RGRRR oder RGRRR}*) = \mathbb{P}(\text{RGRRR}) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0.0082$$

Das Ereignis $*\text{RGRRR oder RGRRR}*$ ist somit am wahrscheinlichsten.

HA 1

Modellierung als Laplace-Raum mit durchnummerierten Karten:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{12}), \omega_i \in \{1, \dots, 48\} \mid \omega_i < \omega_{i+1} \wedge i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Es handelt sich um eine Kombination ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Es gibt $n = 24 \cdot 2$ Karten, da jede der 24 Karten doppelt vorkommt. Insgesamt wird immer $k = 12$ mal gezogen.

Daher ergibt sich für das Zufallsexperiment $|\Omega| = \binom{48}{12}$.

(a) $A = \{\text{Es werden zwei Kreuzdamen gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{46}{10}}{\binom{48}{12}} = 0.05851063829 \approx 0.059$$

- (b) $B = \{\text{Es werden genau fünf Trümpfe gezogen}\}$

Da wir genau fünf Trümpfe ziehen wollen, darf keine von den anderen gezogenen Karten ein Trumpf sein. Es werden also $k = 5$ von den $n = 24$ Trümpfen gezogen und die restlichen $k = 7$ Karten gehören zu den $n = 24$ nicht-Trümpfen.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{24}{5} \cdot \binom{24}{7}}{\binom{48}{10}} = 0.21115421084 \approx 0.21$$

- (c) $C = \{\text{Es werden genau drei Pik und 4 Herz gezogen}\}$

Dieses mal sollen $k = 3$ von den $n = 12$ verschiedenen Pik-Karten gezogen werden. Das gleiche gilt für die vier gezogenen Herz-Karten, und die restlichen vier sollen schließlich zu den 24 übrigen Symbolen gehören.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{48}{12}} = 0.0664386819 \approx 0.066$$

- (d) $D = \{\text{Es werden mindestens 10 Trümpfe gezogen}\}$

$\Leftrightarrow \{\text{Es werden 10, 11, oder 12 Trümpfe gezogen}\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}(D) &= \sum_{i=10}^{12} \frac{\binom{24}{i} \cdot \binom{24}{12-i}}{\binom{48}{12}} \\ &= 0.00776974368 + 0.00085989258 + 0.00003881459 \\ &= 0.00866845085 \approx 0.0087 \end{aligned}$$

- (e) $E = \{\text{Es werden genau 3 Pik oder genau 4 Herz gezogen}\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{36}{9}}{\binom{48}{12}} + \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{36}{8}}{\binom{48}{12}} - \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{24}{5}}{\binom{48}{12}} \\ &= 0.297286598 + 0.21500191462 - 0.0664386819 \\ &= 0.44584983072 \approx 0.45 \end{aligned}$$

- (f) $F = \{\text{Es werden genau neun Damen gezogen}\}$

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\binom{8}{9} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{48}{12}} = 0$$

- (g) $D = \{\text{Es wird ein Kreuz, Pik, Herz oder Karo gezogen}\}$

Da $|D| = |\Omega|$, ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D)$ dieses Ereignisses 1.

Anders gesagt: es gibt keine Karten im Deck, die nicht eine der vier genannten Symbole haben. Somit trifft das Ereignis auf alle Elementarereignisse in Ω zu.

HA 2

Es sei ω_i die "Nummer" des Mantels, und i die Person, die den Mantel erhält.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$$

Es handelt sich um eine Variation ohne Wiederholung, d.h. Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

- (a) $A = \{\text{Keine der vier Personen erhält den eigenen Mantel}\}$

$$= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \omega_i \neq i\}$$

Es werden $k = 4$ von den übrigen $n = 4$ Mänteln gezogen.

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{4!}{0!} = 24$$

Wir können $|A|$ mithilfe des Gegenereignisses bestimmen.

d.h. $A^c = \{\text{Mindestens zwei Personen haben den richtigen Mantel}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

- (b) $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

$$P(B) = \frac{1}{\frac{4!}{(4-2)!}} = \frac{1}{12}$$

HA 3

- (a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

- (b) Laplace-Raum:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Kein Laplace-Raum:

$$\Omega' = \{\omega = \omega_1 + \omega_2 \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)^{24}$$

$$\Rightarrow A = \Omega^{24}$$

- (c) Spiel 1:

$$A = \{\text{Unter den vier Würfeln kommt mindestens eine sechs}\}$$

$$A^c = \{\text{Unter den vier Würfeln kommt keine sechs}\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518$$

$$B = \{24 \text{ Doppelwürfe, darunter mindestens eine Doppelsechs}\}$$

$$B^c = \{24 \text{ Doppelwürfe, darunter keine Doppelsechs}\}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)^2\right)^{24} \approx 0.491$$

- (d) Die Ereigniswahrscheinlichkeiten summieren sich nicht auf, da jedes mal der Würfel neu geworfen wird. Sonst hätte das Ereignis, bei sechs Würfeln eine sechs zu werfen, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$.

Statt zu multiplizieren, müssen die Elementarwahrscheinlichkeiten potenziert werden.