Wahrscheinlichkeitstheorie für Inf. & Lehramt
Wintersemester 2021/2022

Dr. M. Tautenhahn
Dr. S. Kliem

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es seien $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse. Drücken Sie mit Hilfe von Mengenoperationen folgende Ereignisse aus:

(a) Keines der Ereignisse tritt ein.

(b) Mindestens eines der Ereignisse tritt ein.

(c) Genau eines der Ereignisse tritt ein.

(d) Mindestens zwei der Ereignisse treten ein.

(e) Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

(f) Mindestens eines der Ereignisse tritt nicht ein.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Aussagen (a)-(f) des Lemmas 1.2.

Aufgabe 3. Die Arbeit eines Kraftwerkes wird durch drei unabhängig voneinander arbeitende Kontrollsysteme überwacht, die einer gewissen Störanfälligkeit unterliegen. Es bezeichne S_j das Ereignis, dass das j-te System störungsfrei arbeitet ($j \in \{1, 2, 3\}$).

(a) Was beschreibt das Ereignis $S_1 \cap S_2$?

(b) Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse S_1, S_2 und S_3 aus:

A: Alle drei Systeme arbeiten störungsfrei.

B: Kein System arbeitet störungsfrei.

C: Mindestens ein System arbeitet störungsfrei.

D: Genau ein System arbeitet störungsfrei.

E: Höchstens zwei Systeme sind gestört.

(c) Wie sieht ein geeigneter Grundraum Ω aus?

(d) Welche der unter (b) genannten Ereignisse können als Elementarereignisse betrachtet werden?

(e) Aus wie vielen Elementarereignissen bestehen die Ereignisse D und C?

Aufgabe 4. Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = 0.25,\ P(B) = 0.45,\ P(A \cup B) = 0.5.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B^c),\ P(A^c \cap B^c) \text{ und } P\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right).$$

Aufgabe 5. Es sei (Ω, p) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $p(i) = p_i$, wobei $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$.
Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 3\}$ Teilmengen von Ω und es sei bekannt, dass für das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gilt

(a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$,

(b) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.

Geben Sie in beiden Fällen alle Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ an, die dies erfüllen.

Aufgabe 6. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von n Kindern wenigstens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Vereinfachend sei dabei angenommen, dass kein Kind am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. Zeigen Sie (unter Verwendung der Ungleichung $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$)

$$p_n \geq 1 - \mathrm{e}^{-n(n-1)/730},$$

und bestimmen ein möglichst kleines n mit $p_n \geq 1/2$.