MIA Feuille d'exercices numéro 3

Yannick Brenning

October 14, 2024

Exercice 5

1.

$$B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2) \Leftrightarrow ((3, -2), (1, 1))$$

Il suffit de montrer que la famille de vecteurs B est linéairement indépendant:

$$3a_1 + a_2 = 0$$
$$-2a_1 + a_2 = 0$$
$$\Rightarrow -3a_1 = a_2 = 2a_1$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

La seule combinaison linéaire des deux vecteurs égale au vecteur zéro est celle dont tous les coéfficients sont nuls. Les deux vecteurs sont alors linéairement indépendants et forment une base dans $\mathbb{R}^2$.

2.

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3a + b, 0 = -2a + b \Rightarrow 2a = b \Rightarrow a = 1/5, b = 2/5$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3c + d, 1 = -2c + d \Rightarrow d = -3c \Rightarrow c = -1/5, d = 3/5$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

3.

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

1. (a) En utilisant la notation de séance 6, on peut écrire:

$$C = AB = \sum_i a_i \tilde{b}_i^T$$

Avec a_i la i-ième colonne de la matrice de gauche et $\tilde{b}_i^T$ la transpose de la i-ième ligne de la matrice de droite. Dans ce cas, cela donne une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche avec les valeurs scalaires du vecteur de droite.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 4 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

Car la matrice de droite B est un vecteur dans ce cas, le resultat de cette expression devient une matrice contenant deux produits scalaires.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$C = AB = \begin{pmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T B \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = AB = a_1 \tilde{b}_1 + a_2 \tilde{b}_2 + a_3 \tilde{b}_3$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(d)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \langle \tilde{a}_1^T, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_1^T, b_2 \rangle \\ \langle \tilde{a}_2^T, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_2^T, b_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

1. On dénote les vecteurs colonne de A par a_i, et x_i sont les valeurs scalaires (les coefficients diagonaux).

$$A\text{diag}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 x_1 & \dots & a_n x_n \end{pmatrix}$$

2.

$$\text{diag}(x_1, \dots, x_n)B = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{b}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ x_n \tilde{b}_n^T \end{pmatrix}$$

Exercice 15

1.

$$\begin{aligned}
AV &= U\Sigma \\
AVV^T &= U\Sigma V^T && \text{Multiplication à droite par } V^T \\
\Leftrightarrow AI_n &= U\Sigma V^T && \text{Orthogonalité de } V \\
\Leftrightarrow A &= U\Sigma V^T && \text{Multiplication par matrice identité}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AV &= U\Sigma \\
U^T AV &= U^T U\Sigma && \text{Multiplication à gauche par } U^T \\
\Leftrightarrow I_m\Sigma &= U^T AV && \text{Orthogonalité de } U \\
\Leftrightarrow \Sigma &= U^T AV && \text{Multiplication par matrice identité}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
AV &= U\Sigma \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= U\Sigma && \text{Exercice 7.2a} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= U\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0 \dots, 0) \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1\sigma_1 & \dots & u_r\sigma_r & u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} && \text{Exercice 8.1} \\
\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\} : Av_i &= u_i\sigma_i
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1\sigma_1 & \dots & u_r\sigma_r & u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_{r+1} & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_{r+1} & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \forall i \in \{r+1, \dots, n\} : Av_i &= 0
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
AV = U\Sigma \Leftrightarrow A &= U\Sigma V^T \\
\Leftrightarrow A &= U \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T & \dots & \sigma_r v_r^T \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow A &= \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T && \text{Exercice 7.1a} \\
\Leftrightarrow A &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T && \text{Loi commutative pour les coéfficients réels } \sigma_i
\end{aligned}$$