

# MIA Feuille d'exercices numéro 3

Yannick Brenning

October 14, 2024

## Exercice 5

1.

$$B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2) \Leftrightarrow ((3, -2), (1, 1))$$

Il suffit de montrer que la famille de vecteurs  $B$  est linéairement indépendant:

$$3a_1 + a_2 = 0$$

$$-2a_1 + a_2 = 0$$

$$\Rightarrow -3a_1 = a_2 = 2a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

La seule combinaison linéaire des deux vecteurs égale au vecteur zéro est celle dont tous les coefficients sont nuls. Les deux vecteurs sont alors linéairement indépendants et forment une base dans  $\mathbb{R}^2$ .

2.

$$\begin{aligned}
 v &= v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow 1 &= 3a + b, 0 = -2a + b \Rightarrow 2a = b \Rightarrow a = 1/5, b = 2/5 \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= c \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow 0 &= 3c + d, 1 = -2c + d \Rightarrow d = -3c \Rightarrow c = -1/5, d = 3/5
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

## Exercice 7

1. (a) En utilisant la notation de séance 6, on peut écrire:

$$C = AB = \sum_i a_i \tilde{b}_i^T$$

Avec  $a_i$  la  $i$ -ième colonne de la matrice de gauche et  $\tilde{b}_i^T$  la transpose de la  $i$ -ième ligne de la matrice de droite. Dans ce cas, cela donne une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche avec les valeurs scalaires du vecteur de droite.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 4 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

Car la matrice de droite  $B$  est un vecteur dans ce cas, le resultat de cette expression devient une matrice contenant deux produits scalaires.

$$\begin{pmatrix} (3 \ 6 \ 2)^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (2 \ 1 \ 3)^T \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} C = AB &= (Ab_1 \ \dots \ Ab_p) \\ &= \left( A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (3 \ 6 \ 2)^T B \\ (2 \ 1 \ 3)^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = AB = (a_1 \ \tilde{b}_1^T) + (a_2 \ \tilde{b}_2^T) + (a_3 \ \tilde{b}_3^T)$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(d)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \langle \tilde{a}_1, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_1, b_2 \rangle \\ \langle \tilde{a}_2, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_2, b_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

### Exercice 8

1. On dénote les vecteurs colonne de  $A$  par  $a_i$ , et  $x_i$  sont les valeurs scalaires (les coefficients diagonaux).

$$\begin{aligned} \text{Adiag}(x_1, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 x_1 & \dots & a_n x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{diag}(x_1, \dots, x_n)B &= \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{b}_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ x_n \tilde{b}_n^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Exercice 15

1.

$$\begin{aligned}
 AV &= U\Sigma \\
 AVV^T &= U\Sigma V^T && \text{Multiplication à droite par } V^T \\
 \Leftrightarrow AI_n &= U\Sigma V^T && \text{Orthogonalité de } V \\
 \Leftrightarrow A &= U\Sigma V^T && \text{Multiplication par matrice identité}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 AV &= U\Sigma \\
 U^T AV &= U^T U\Sigma && \text{Multiplication à gauche par } U^T \\
 \Leftrightarrow I_m \Sigma &= U^T AV && \text{Orthogonalité de } U \\
 \Leftrightarrow \Sigma &= U^T AV && \text{Multiplication par matrice identité}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 AV &= U\Sigma \\
 \Leftrightarrow (Av_1 \ \dots \ Av_n) &= U\Sigma && \text{Exercice 7.2a} \\
 \Leftrightarrow (Av_1 \ \dots \ Av_n) &= U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0 \dots, 0) \\
 \Leftrightarrow (Av_1 \ \dots \ Av_n) &= (u_1 \sigma_1 \ \dots \ u_r \sigma_r \ u_{r+1} \cdot 0 \ \dots \ u_n \cdot 0) && \text{Exercice 8.1} \\
 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\} : &Av_i = u_i \sigma_i
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (Av_1 \ \dots \ Av_n) &= (u_1 \sigma_1 \ \dots \ u_r \sigma_r \ u_{r+1} \cdot 0 \ \dots \ u_n \cdot 0) \\
 \Leftrightarrow (Av_{r+1} \ \dots \ Av_n) &= (u_{r+1} \cdot 0 \ \dots \ u_n \cdot 0) \\
 \Leftrightarrow (Av_{r+1} \ \dots \ Av_n) &= (0 \ \dots \ 0) \\
 \Leftrightarrow \forall i \in \{r+1, \dots, n\} : &Av_i = 0
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 AV &= U\Sigma \Leftrightarrow A = U\Sigma V^T \\
 \Leftrightarrow A &= U (\sigma_1 v_1^T \ \dots \ \sigma_r v_r^T) \\
 \Leftrightarrow A &= \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^T && \text{Exercice 7.1a} \\
 \Leftrightarrow A &= \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T && \text{Loi commutative pour les coefficients réels } \sigma_i
 \end{aligned}$$