MIA Feuille d'exercices numéro 3

Yannick Brenning

October 11, 2024

Exercice 5

1.

$B = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2) \Leftrightarrow ((3, -2), (1, 1))$

Il suffit de montrer que la famille de vecteurs B est linéairement indépendant:

$3a_1 + a_2 = 0$
$-2a_1 + a_2 = 0$
$\Rightarrow -3a_1 = a_2 = 2a_1$
$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

La seule combinaison linéaire des deux vecteurs égale au vecteur zéro est celle dont tous les coéfficients sont nuls. Les deux vecteurs sont alors linéairement indépendants et forment une base dans $\mathbb{R}^2$.

2.

$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Pour $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$,

un vecteur de coordonnées de v dans la base B.

3.

$P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7

1. (a) En utilisant la notation de séance 6, on peut écrire:

$$C = AB = \sum_i a_i \tilde{b}_i^T$$

Avec a_i la i-ième colonne de la matrice de gauche et $\tilde{b}_i^T$ la transpose de la i-ième ligne de la matrice de droite. Dans ce cas, cela donne une combinaison linéaire des colonnes de la matrice de gauche avec les valeurs scalaires du vecteur de droite.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 4 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

Car la matrice de droite B est un vecteur dans ce cas, le resultat de cette expression devient une matrice contenant deux produits scalaires.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$C = AB = \begin{pmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} B \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_1 & \tilde{b}_1^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & \tilde{b}_2^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & \tilde{b}_3^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

(d)

$$C = AB = \begin{pmatrix} \langle \tilde{a}_1, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_1, b_2 \rangle \\ \langle \tilde{a}_2, b_1 \rangle & \langle \tilde{a}_2, b_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

1. On dénote les vecteurs colonne de A par a_i, et x_i sont les valeurs scalaires (les coefficients diagonaux).

$$A\text{diag}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 x_1 & \dots & a_n x_n \end{pmatrix}$$

2.

$$\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)B = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{b}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \tilde{b}_1^T \\ \vdots \\ x_n \tilde{b}_n^T \end{pmatrix}$$

Exercice 15

1.

$$\begin{aligned} AV &= U\Sigma & \\ AVV^T &= U\Sigma V^T & \text{Multiplication à droite par } V^T \\ \Leftrightarrow AI_n &= U\Sigma V^T & \text{Orthogonalité de } V \\ \Leftrightarrow A &= U\Sigma V^T & \text{Multiplication par matrice identité} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AV &= U\Sigma & \\ U^T AV &= U^T U\Sigma & \text{Multiplication à gauche par } U^T \\ \Leftrightarrow I_m\Sigma &= U^T AV & \text{Orthogonalité de } U \\ \Leftrightarrow \Sigma &= U^T AV & \text{Multiplication par matrice identité} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} AV &= U\Sigma & \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= U\Sigma & \text{Exercice 7.2a} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= U\operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0 \dots, 0) & \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1\sigma_1 & \dots & u_r\sigma_r & u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} & \text{Exercice 8.1} \\ \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\} : Av_i &= u_i\sigma_i & \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1\sigma_1 & \dots & u_r\sigma_r & u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_{r+1} & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{r+1} \cdot 0 & \dots & u_n \cdot 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Av_{r+1} & \dots & Av_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \forall i \in \{r+1, \dots, n\} : Av_i &= 0 \end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
AV = U\Sigma \Leftrightarrow A = U\Sigma V^T & \\
\Leftrightarrow A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T & \dots & \sigma_r v_r^T \end{pmatrix} & \\
\Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T & \qquad \text{Exercice 7.1a} \\
\Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T & \qquad \text{Loi commutative pour les coéfficients réels } \sigma_i
\end{aligned}
$$