MIA Feuille d'exercices numéro 2

Yannick Brenning

September 30, 2024

Exercice 2

1.

   On peut exprimer la probabilité d'une intersection d'évènements avec la formule des probabilités composées:
   $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

   On utilisant la modèle graphique, on peut simplifier les évènements indépendants. Bien sûr que TS est indépendant de tout les autres évènements, et SlO, SuO sont indépendants entre eux.

   $P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS)$
   $= P(TS) \cdot P(SlO) \cdot P(SuO) \cdot P(SlL|SlO, TS) \cdot P(SuL|SuO, TS)$

2. Oui, parce que les valuers t, u et l contiennent implicitement l'information sur $P(SlL|SlO, TS)$ et $P(SuL|SuO, TS)$. Cela ce voit dans les formules $P(SlL = 1|SlO = a, TS = b) = a \vee b$ et $P(SuL = 1|SuO = a, TS = b) = a \vee b$, qui sont equivalentes et directement liées à les valeurs de t, u et l.

   On peut donc exprimer la factorisation de la manière suivante:

   $$P(SlL, SuL, SlO, SuO, TS) = t \cdot u \cdot l$$

3.

$$P(TS=1|SlL=1) = \frac{P(TS=1, SlL=1)}{P(SlL=1)} \qquad \text{Définition de la prob. cond.}$$

$$= \frac{P(SlL=1|TS=1)\cdot P(TS=1)}{P(SlL=1)}$$

Car $P(SlL=1|SlO=a, TS=b) = a \vee b$, on voit que pour $TS=1$, la probabilité est toujours égale à 1, c'est-à-dire $P(SlL=1|TS=1)$ est l'événement certain.

$$= \frac{P(TS=1)}{P(SlO=1)+P(TS=1)-P(SlO=1, TS=1)} \qquad \text{Définition de } P(A \text{ ou } B)$$

$$= \frac{P(TS=1)}{P(SlO=1)+P(TS=1)-P(SlO=1)\cdot P(TS=1)}$$

$$= \frac{t}{l+t-l\cdot t}$$

4.

$$P(SlO=1|SlL=1) = \frac{P(SlO=1, SlL=1)}{P(SlL=1)}$$

$$\frac{P(SlL=1|SlO=1)\cdot P(SlO=1)}{P(SlL=1)}$$

$$= \frac{1\cdot P(SlO=1)}{P(SlL=1)}$$

$$= \frac{l}{l+t-l\cdot t}$$

5.

$$P(TS=1|SlL=1, SuL=1) = \frac{P(TS=1, SlL=1, SuL=1)}{P(SlL=1, SuL=1)}$$

$$= \frac{P(TS=1)\cdot P(SlL=1|TS=1)\cdot P(SuL=1|TS=1)}{P(SlL=1, SuL=1)}$$

$$= \frac{P(TS=1)}{P(SlL=1, SuL=1)}$$

On peut calculer $P(SlL=1, SuL=1)$ en pensant à les opérateurs logiques. Si les deux sont en retard, soit TS, soit SlO et SuO, ou bien les trois on eu lieu.

$$\frac{P(TS=1)}{P(SlL=1, SuL=1)} = \frac{t}{l\cdot u+t+l\cdot u\cdot t}$$

6.

$$P(SlO=1|SlL=1,SuL=1) = \frac{P(SlO=1,SlL=1,SuL=1)}{P(SlL=1,SuL=1)}$$
$$= \frac{P(SlO=1)\cdot P(SlL=1|SlO=1)\cdot P(SuL=1)}{P(SlL=1,SuL=1)}$$
$$= \frac{l\cdot(u+t-u\cdot t)}{l\cdot u+t+l\cdot u\cdot t}$$

7. Pour répondre à cette question, il faut calculer $P(TS=1|SlL=1)$ et $P(SlO=1|SlL=1)$ et les comparer.

$$P(TS=1|SlL=1) = \frac{P(TS=1,SlL=1)}{P(SlL=1)}$$
$$= \frac{P(TS)\cdot P(SlL=1|TS=1)}{P(SlL=1)}$$
$$= \frac{P(TS)}{P(SlL=1)} = \frac{t}{l+t-l\cdot t}$$
$$= \frac{0.1}{0.5+0.1-0.5\cdot 0.1} \approx 0.18$$

$$P(SlO=1|SlL=1) = \frac{P(SlO=1,SlL=1)}{P(SlL=1)}$$
$$= \frac{P(SlO=1)\cdot P(SlL=1|SlO=1)}{P(SlL=1)}$$
$$= \frac{P(SlO=1)}{P(SlL=1)} = \frac{l}{l+t-l\cdot t}$$
$$= \frac{0.5}{0.5+0.1-0.5\cdot 0.1} \approx 0.91$$

Alors dans ce cas, “Sleepy overslept” est plus probable.

8. On fait les même calculations que ci-dessus avec $u=0.01$ au lieu de $l=0.5$ pour obtenir $P(TS=1|SuL=1)\approx 0.92$ et $P(SuO=1|SuL=1)\approx 0.09$, ce qui nous dit que “There is a train strike” est plus probable.

9. La probabilité calculé dans la question précédante devient $P(SuO=1|SuL=1)\approx 0.71$.

Exercice 6

1.

$$
\begin{aligned}
&b(\hat{f}) = \mathbb{E}(\hat{f}) - f \\
&= \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - \mu \\
&= [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)] - \mu && \text{Linéarité de l'espérance} \\
&= [\frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu] - \mu && X_i \text{ ont les mêmes espérances} \\
&= \mu - \mu = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(\hat{f}) = \mathbb{E}[(\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f}))^2] \\
&= \mathbb{E}[(\hat{f} - \mu)^2] \\
&= \mathbb{E}[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu)^2] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2]
\end{aligned}
$$

2.

$$
b(\hat{V}) = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2] - \mathbb{E}[(\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f})^2]
$$