MIA Feuille d'exercices numéro 1

Yannick Brenning

September 24, 2024

Exercice 1

1.

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

2.

   $$\mathbf{J}_{g \circ f} = \mathbf{J}_g(f(x))\mathbf{J}_f$$

   On introduit deux fonctions f et g pour que leur composition $g \circ f$ soit la norme euclidienne.

   $f : x \to \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $g : x \to \sqrt{x}$, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   Donc $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = ||x||_2$.

Il faut d'abord calculer les Jacobiens de f et g:

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_g(f(x)) = \mathbf{J}_g(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{\partial g}{\partial \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_g(f(x))\mathbf{J}_f = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{f(x)}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{f(x)}} \end{bmatrix}$$

3.

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\mathbf{H}_{g_M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_M^2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$g_M(x) = \begin{bmatrix} x_1, \dots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j m_{i,j}$$

D'abord, on peut exprimer la première derivée de g_M par rapport à x_k:

$$\frac{\partial g_M}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} x_i + \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} x_j = Mx + M^T x$$

$$(\mathbf{H}_{g_M})_{k,l} = \frac{\partial^2 g_M}{\partial x_k \partial x_l} = M_{k,l} + M_{l,k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{g_M} = M + M^T$$

Exercice 2

1. (Résolu dans la séance précédente)

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0$$

On peut determiner si $(0,0)$ est un minimum local avec la matrice hessienne:

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En calculant le déterminant (discriminant), on obtient:

$\det(\mathbf{H}_f) = 4 > 0$

$\det(\mathbf{H}_f) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, alors $(0,0)$ est minimum local.

Avec la domaine de f, on peut montrer que $(0,0)$ est aussi un minimum global.

x^* est un minimum global de f ssi pour tout $x \in \text{dom}(f), f(x^*) \leq f(x)$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0, y^2 \geq 0,$ donc $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$.

Alors $(0,0)$ est aussi un minimum global pour f.

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 36, \frac{\partial f}{\partial y} = -36 + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 18, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 18$$

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie positive, donc f est convexe.

(`https://en.wikipedia.org/wiki/Hessian_matrix#Second-derivative_test`)

La fonction est limitée en dessous par -498, alors f est minorée.

Selon le théorème de séance 1, f admet un minimum global.

Exercice 3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2$$
$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque $\mathbf{H}_f$ est hermitien, on peut utiliser le critère de Sylvester (`https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester's_criterion`).
On va vérifier si tous les mineures principales sont positives.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$
$$\det(\mathbf{H}_f) = -1 < 0$$

Le déterminant de $\mathbf{H}_f$ est négative, alors la matrice hessienne n'est pas positive semidéfinie. f n'est pas convexe. $\square$

Exercice 5

1.

$$f : x, y \to x^2 + y^2$$
$$c_1 : x, y \to 1 - x - y$$
$$c_2 : x, y \to y - 2$$
$$c_3 : x, y \to x - y^2$$

$$\mathcal{L} : x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \to x^2 + y^2 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$$

Conditions KKT:

$$\nabla_{x,y}\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = 0$$
$$x^* + y^* \geq 1$$
$$y^* \leq 2$$
$$y^{*2} \geq x^*$$
$$\lambda_{1,2,3}^* \geq 0$$
$$\lambda_1^* c_1(x^*, y^*) = 0, \ldots \lambda_3^* c_3(x^*, y^*) = 0$$

$$\nabla_{x,y}\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = 0_2 = \begin{cases} 2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2y - \lambda_1 + \lambda_2 - 2y\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

2.

On a 8 différents cas ($\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0, \ldots \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^* \neq 0$)

Pour $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0,$ il n'existe aucun solution car $x^* = y^* = 0$ contredit le condition KKT $x^* + y^* \geq 1$.

Cas 2: $\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$

$\Rightarrow x = -\dfrac{\lambda_1^*}{2}, y = -\dfrac{\lambda_1^*}{2}$

Substitution: $x + y - 1 = 0 = -\dfrac{\lambda_1^*}{2} - \dfrac{\lambda_1^*}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 < 0$ (Contradiction de condition KKT)

Cas 3: $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* \neq 0, \lambda_3^* = 0$

$\Rightarrow x = 0, y = -\dfrac{\lambda_2^*}{2}$

Substitution: $0 - \dfrac{\lambda_1^*}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\lambda_1^*}{2} = 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2 < 0$ (Contradiction de condition KKT)

Cas 4: $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* \neq 0$

$\Rightarrow x = -\dfrac{\lambda_3^*}{2}$

$2y - 2y\lambda_3^* = 0 \Leftrightarrow y(2 - 2\lambda_3^*) = 0$

Si $y = 0,$ violation de $x + y \geq 1$

Cas 5: $\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* \neq 0, \lambda_3^* = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{\lambda_1^*}{2}$

$\lambda_1^* = 2, \lambda_2^* = 6, y = 2$

$\Rightarrow x = -1, y = 2$

Cas 6: $\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* \neq 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, y = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Cas 7: $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* \neq 0, \lambda_3^* \neq 0$
$\Rightarrow x = y^2, y - 2 = 0$
$\Rightarrow x = 4, y = 2$
Cas 8: $\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* \neq 0, \lambda_3^* \neq 0$
Pas de solution, car $x = 4, y = 2$ contredit contrainte $x + y - 1 = 0$.

3. On peut montrer la convexité de f avec la Hessienne:

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Car cette matrice est positive définie, alors f est convexe.

$$f(-1, 2) = 5, f(4, 2) = 20, f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 5 - 2\sqrt{5}$$

Car $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est un minimum local et f est une fonction convexe, il s'agit du minimum global. Les autres points sont des maximums locales.

4. Esquisse et visualization avec matplotlib

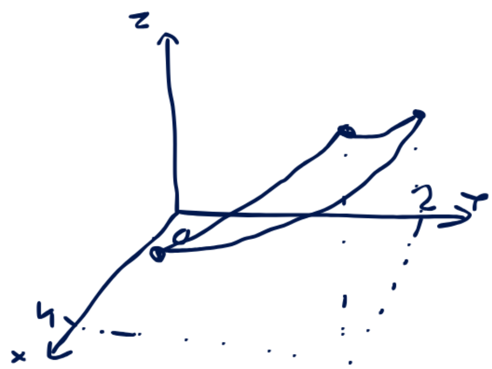

Figure 1: Esquisse du graphe

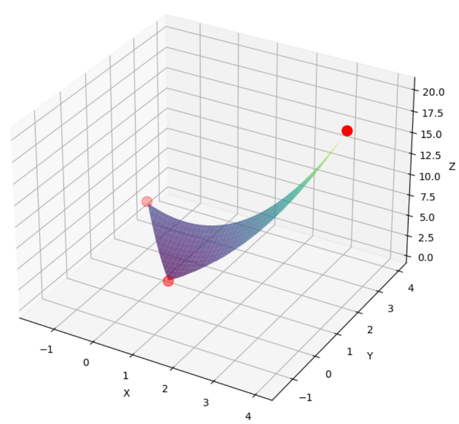

Figure 2: Visualization avec matplotlib