MIA Feuille d'exercices numéro 1

Yannick Brenning

September 17, 2024

Exercice 1

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

2.

$$\mathbf{J}_{g \circ f} = \mathbf{J}_g(f(x))\mathbf{J}_f$$

On introduit deux fonctions f et g pour que leur composition $g \circ f$ soit la norme euclidienne.

$f : x \to \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g : x \to \sqrt{x}$, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Donc $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = ||x||_2$.

Il faut d'abord calculer les Jacobiens de f et g:

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_g(f(x)) = \mathbf{J}_g(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{\partial g}{\partial \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_g(f(x))\mathbf{J}_f = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{f(x)}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{f(x)}} \end{bmatrix}$$

3.

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\mathbf{H}_{g_M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_M^2}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$g_M(x) = \begin{bmatrix} x_1, \dots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j m_{i,j}$$

D'abord, on peut exprimer la première derivée de g_M par rapport à x_k:

$$\frac{\partial g_M}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} x_i + \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} x_j = Mx + M^T x$$

$$(\mathbf{H}_{g_M})_{k,l} = \frac{\partial^2 g_M}{\partial x_k \partial x_l} = M_{k,l} + M_{l,k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{g_M} = M + M^T$$

Exercice 2

1. (Résolu dans la séance précédente)

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0$$

On peut determiner si $(0,0)$ est un minimum local avec la matrice hessienne:

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En calculant le déterminant (discriminant), on obtient:

$\det(\mathbf{H}_f) = 4 > 0$

$\det(\mathbf{H}_f) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0,$ alors $(0,0)$ est minimum local.

Avec la domaine de f, on peut montrer que $(0,0)$ est aussi un minimum global.

x^* est un minimum global de f ssi pour tout $x \in \mathrm{dom}(f), f(x^*) \leq f(x)$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0, y^2 \geq 0,$ donc $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0).$

Alors $(0,0)$ est aussi un minimum global pour f.

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 36, \frac{\partial f}{\partial y} = -36 + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 18, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 18$$

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est définie positive, donc f est convexe.

(`https://en.wikipedia.org/wiki/Hessian_matrix#Second-derivative_test`)

La fonction est limitée en dessous par -498, alors f est minorée.

Selon le théorème de séance 1, f admet un minimum global.

Exercice 3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2$$
$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque $\mathbf{H}_f$ est hermitien, on peut utiliser le critère de Sylvester (`https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester's_criterion`).
On va vérifier si tous les mineures principales sont positives.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$
$$\det(\mathbf{H}_f) = -1 < 0$$

Le déterminant de $\mathbf{H}_f$ est négative, alors la matrice hessienne n'est pas positive semidéfinie. f n'est pas convexe. $\square$