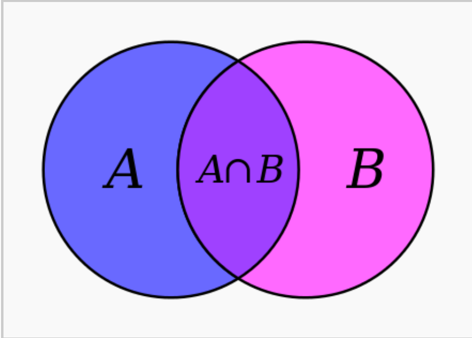
集合论

维基百科，自由的百科全书



二个集合交集的文氏图

集合论（英文：Set theory）或称**集论**，是研究集合（由一堆抽象对象构成的整体）的数学理论，包含集合和元素（或称为成员）、关系等最基本数学概念。在大多数现代数学的公式化中，都是在集合论的语言下谈论各种数学对象。集合论、命题逻辑与谓词逻辑共同构成了数学的公理化基础，以未定义的“集合”与“集合成员”等术语来形式化地建构数学对象。

现代集合论的研究是在1870年代由俄国数学家康托尔及德国数学家理察・戴德金的朴素集合论开始。在朴素集合论中，集合是当做一堆对象构成的整体之类的自证概念，没有有关集合的形式化定义。在发现朴素集合论会产生一些悖论后，二十世纪初期提出了许多公理化集合论，其中最著名的是包括选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论，简称ZFC。公理化集合论不直接定义集合和集合成员，而是先规范可以描述其性质的一些公理。

集合论常被视为数学基础之一，特别是 ZFC 集合论。除了其基础的作用外，集合论也是数学理论中的一部份，当代的集合论研究有许多离散的主题，从实数线的结构到大基数的一致性等。

目录

历史

现代集合论的研究开始于1870年代由康托尔及理察・戴德金提出的朴素集合论。一般数学主题的出现及发展都是由多名研究者的互动中产生的，但朴素集合论的开始是1874年康托尔的一篇论文《On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers》[1][2]。而在稍早的1873年12月6日，康托尔写信给戴德金，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的了，这一天也因此成为了**集合论**的诞生日。

从西元前五世纪时，数学家们就在研究有关无穷的性质，最早期是希腊数学家芝诺和印度数学家，十九世纪时伯纳德・波尔查诺在此领域有相当的进展[3]。现在对于无限的了解是从1867－71年康托尔在数论上的研究开始，1872年康托尔和理查德・戴德金的一次聚会影响了康托尔的理念，最后产生了1874年的论文。

当时的数学家对康托尔的研究有二种完全不同的反应：卡尔・魏尔斯特拉斯及理查德・戴德金支持康托尔的研究，而像利奥波德・克罗内克等结构主义者则持反对态度。康托尔的研究后来广为流传，原因是当中概念的实效性，例如集合之间的双射，康托尔对于实数较整数多的证明，以及由幂集所产生“无穷的无穷”的概念，等等。这些概念最后成为1898年《克莱因的百科全书》中的《Mengenlehre》（集合论）条目。

在1900年左右许多数学家发现朴素集合论会产生一些矛盾的情形，称为二律背反或是悖论，伯特兰・罗素和恩斯特・策梅洛均发现了最简单的悖论，也就是现在所称的罗素悖论：考虑“由所有不包含集合自身的集合所构成的集合”，记之为 *S*。不管假设 *S* 是或不是 *S* 自身的元素，按照 *S* 的定义都会导致矛盾。罗素悖论也造成了第三次数学危机。

1899年时康托尔自已也提出一个会产生悖论的问题“一个由所有集合形成的集合，其基数为何？”因而产生康托尔悖论。罗素在1903年他所著的《数学原理》中也用此悖论来评论当时的欧陆数学。

不过上述的争论没有使数学家放弃集合论，恩斯特・策梅洛及亚伯拉罕・弗兰克尔分别在1908年和1922年的研究．最后产生了策梅洛-弗兰克尔集合论的许多公理。昂利・勒贝格等人在实分析上的研究用到集合论中的许多数学工具，后来集合论也成为近代数学的一部份。集合论已被视为是数学的基础理论，不过在一些领域中范畴论被认为是更适合的基础理论。

康托尔

基础概念及符号

集合论是从一个对象o和集合A之间的二元关系开始：若o是A的元素，可表示为$o \in A$。由于集合也是一个对象，因此上述关系也可以用在集合和集合的关系。

另外一种二个集合之间的关系，称为包含关系。若集合A中的所有元素都是集合B中的元素，则称集合A为B的子集，符号为$A \subseteq B$。例如$\{1,2\}$ 是$\{1,2,3\}$ 的子集，但$\{1,4\}$ 就不是$\{1,2,3\}$ 的子集。依照定义，任一个集合也是本身的子集，不考虑本身的子集称为真子集。集合A为集合B的真子集当且仅当集合A为集合B的子集，且集合B不是集合A的子集。

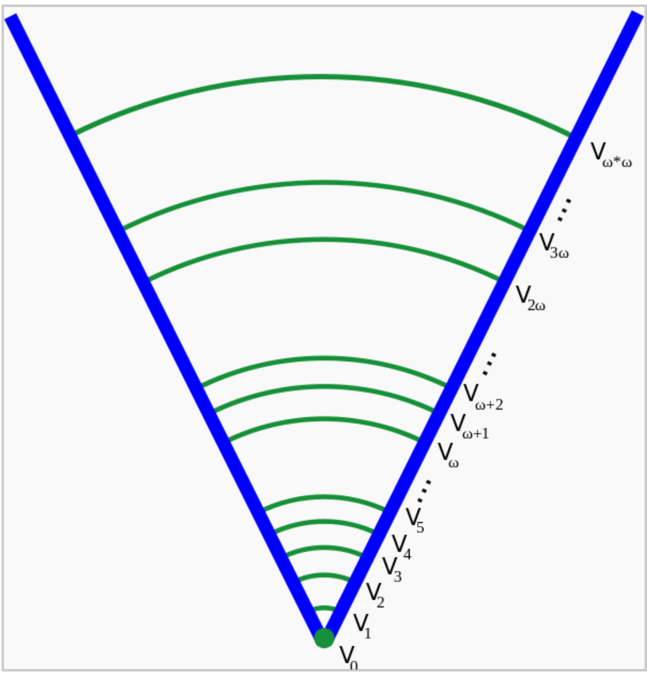
数的算术中有许多一元及二元运算，集合论也有许多针对集合的一元及二元运算：

- 集合A和B的联集，符号为$A \cup B$，是在至少在集合A或B中出现的元素，集合$\{1,2,3\}$ 和集合$\{2, 3, 4\}$ 的联集为集合$\{1, 2, 3, 4\}$ 。
- 集合A和B的交集，符号为$A \cap B$，是同时在集合A及B中出现的元素，集合$\{1,2,3\}$ 和集合$\{2, 3, 4\}$ 的交集为集合$\{2, 3\}$ 。
- 集合U和A的相对差集，符号为$U \setminus A$，是在集合U中，但不在集合A中的所有元素，相对差集$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\}$ 为$\{1\}$ ，而相对差集$\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\}$ 为$\{4\}$ 。当集合A是集合U的子集时，相对差集$U \setminus A$也称为集合A在集合U中的补集。若是研究文氏图，集合U为全集，且可以借由上下文找到全集定义时，会使用A^c来代替$U \setminus A$。
- 集合A和B的对称差，符号为$A \triangle B$或$A \ominus B$，是指只在集合A及B中的其中一个出现，没有在其交集中出现的元素。例如集合$\{1,2,3\}$ 和$\{2,3,4\}$ 的对称差为$\{1,4\}$ ，也是其联集和交集的相对差集$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$，或是二个相对差集的联集$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。
- 集合A和B的笛卡儿积，符号为$A \times B$，是一个由所有可能的有序对(a,b)形成的集合，其中第一个对象是A的成员，第二个对象是B的成员。{1, 2}和{red, white}的笛卡儿积为{(1, red), (1, white), (2, red), (2, white)}。
- 集合A的幂集是指以A的全部子集为元素的集合，例如集合$\{1, 2\}$ 的幂集为$\{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$ 。

一些重要的基本集合包括空集（唯一没有元素的集合），整数集合及实数集合。其他有关初等集合论的基本介绍，请参考集合。

集合的本体论

若一个集合的所有元素都是集合，所有元素的元素都是集合……，此集合称为纯集合，例如只包括空集合的集合是一个非空的纯集合。在当代的集合论中，常常严格限制只考虑纯集合的冯・诺伊曼全集，许多公理集合论的系统也是为了纯集合的公理化。这样的限制有许多技术上的优点，因为基本上所有的数学概念都可以用纯集合来表示，上述的限制不影响相关的应用。冯・诺伊曼全集中的集合可以以累积层次（cumulative hierarchy）的方式整理，也就会依元素的深度、元素的元素的深度……来分类。层次中的每一个集合都会以超限递归的方式指定一个序数，称为集合的阶。纯集合X的阶定义为所有集合X元素的阶的后继序数的最小上界。例如空集的阶定义为0，只包括空集的集合定义为1，针对每一个序数α，集合 V_α按定义包含了所有阶数小于α的纯集合，整个冯・诺伊曼全集用*V*来表示。



冯・诺伊曼层次中的一部份

公理集合论

基础集合论可以用非正式的、直觉的方式学习，在小学中就可以用文氏图说明。基础集合论直观地假设集合就是一群符合任意特定条件的对象的组合，但此假设会造成悖论。最简单及著名的是罗素悖论及布拉利-福尔蒂悖论。公理集合论的形成就是为了避免这些集合论的悖论。

许多数学家研究的公理集合论系统假设所有的集合形成累计层次。这类的系统可分为二类:

- 只由集合构成：这类系统包括最常用的公理集合论：含选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论（ZFC），由亚伯拉罕・弗兰克尔和陶拉尔夫・斯科伦扩展了策梅罗集合论所得。其他和ZFC有关的集合论有：
  - 策梅洛集合论是由德国数学家恩斯特・策梅洛创立，将分类公理代替替代公理。
  - 广义集合论，策梅洛集合论的一小部份，已足以处理皮亚诺公理及有限集合。
  - 克里普克-普拉特克集理论，省略了无穷公理、幂集公理和选择公理，削弱了分类公理和替代公理的公理架构。
- 由集合和真类构成：这类系统包括冯・诺伊曼-博内斯-哥德尔集合论，是设计生成同 ZFC 同样结果的集合论公理系统，但只有有限数目的公理而不使用公理模式。单论只涉及集合的内容，此理论的强度和ZFC相当。另外比ZFC强的Morse-Kelley集合论及Tarski–Grothendieck集合论也属于这一类。

可以修改上述系统，允许基本元素（urelement）的存在，基本元素不是集合，因此本身也没有成员，但基本元素可以是其他集合中的成员。

新基础集合论的系统NFU（允许基本元素）及NF（不允许基本元素）不是以累计层次为基础，NFU和NF有一个“包括所有对象的集合”，此外，每个集合都有其补集。这里基本元素存在与否是个关键问题，因为NF给出了选择公理的反例，而NFU则不会。新基础集合论和正集合论是已被提出的可替代的集合论之中的一部份。

建构式集合论的系统，像是CST（建构式集合论）、CZF（建构式策梅洛-弗兰克尔集合论）及IZF（直觉式策梅洛-弗兰克尔集合论）等，将其集合公理以直觉主义逻辑来表示，而不是使用一阶逻辑。其他的一些系统接受标准的一阶逻辑，但是允许非标准的隶属关系，包括粗集合及模糊集，其中表示隶属关系的原子公式数值不只是单纯的“真”或是“假”。ZFC中的布林值模型也是类似的概念。

内集合论是ZFC集合论的扩张，允许无穷小量和其他“非标准”的数字存在，由爱德华·尼尔森在1977年提出。

应用

许多数学概念可以只用集合论的概念来准确定义。例如像图、流形、环和向量空间等数学结构都可以用满足特定公理性质的集合来定义。在数学领域中，等价关系及序关系无所不在，而数学关系的理论也可以用集合论来描述。

对许多数学理论而言，集合论也是很有发展性的基础系统。从集合论刊在《数学原理》的第一卷起，许多数学家声称大部份甚至全部的数学定理都可以用恰当设计的一些集合论公理来证明，其中可能会配合许多定义的加强，可能使用一阶逻辑或二阶逻辑。例如有关自然数或是实数的性质就可以用集合论来推导，每个数系都等同为某个由等价类组成的集合（从在某个无限集上的等价关系所得）。

集合论在数学分析、拓扑学、抽象代数及离散数学中的基础地位比较没有争议，数学家接受这些领域中的定理（或是比较基础的定理）可以由集合论中的公理及适当的定义推导出来。因为用集合论证明复杂理论的推导过程比一般的推导过程长很多，只有少量这种的证明被正式验证过。一个称为Metamath的验证计划，以ZFC集合论为起点，使用一阶逻辑来进行证明，包括了超过一万个定理证明的推导。

研究领域

集合论是数学的主要研究领域之一，其中也有许多和其他领域相关的子领域。

组合集合论

组合集合论也称为无限组合数学，将有限的组合数学延伸到无限集中。组合集合论包括基数算术的研究，以及拉姆齐定理的扩展，例如艾狄胥－拉多定理。

描述集合论

描述集合论是关于实直线或波兰空间上子集的研究。描述集合论是从对波莱尔层次中点集研究开始，后来延伸到更复杂的层次，像是射影层次及魏吉层次。波莱尔集中的许多性质可以建立在包括选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论上，但要证明更复杂的集合也符合这些性质的话，就需要有其他和决定性和大基数有关的公理。

有效描述集合论介于集合论和递归论之间，包括对浅体点集的研究，和超算术理论紧密相关。许多情形下，描述集合论的结果也可以用有效描述集合论来表示。有时，会先利用有效描述集合论来证明，再将其延伸（相对化），使其应用范围更广。

描述集合论的当代研究包括波莱尔等价关系及一些更复杂的可定义等价关系。描述集合论在许多数学领域的不变量研究都很重要。

模糊集

在康托尔定义的朴素集合论及后来发展的ZFC集合论中，一个对象和一个集合的关系只有二种：是成员或者不是成员。卢菲特·泽德在模糊集中放宽上述的限制，对象有对于集合的归属度（degree of membership），是一个介于0到1之间的数字。例如有关一个人对于“身材高大的人”集合的归属度不是简单的是或不是，而是一个数值，例如0.75。

力迫

保罗·寇恩的一些工作是寻找一个ZFC的模型，使得选择公理或连续统假设失效，在这过程中他发明了力迫。力迫法是一种扩张模型的方法，在集合论的某模型中加入一些额外的集合，来产生一个较大的模型，这样的模型会具有预期的性质（依赖于具体构造方式和原模型）。例如，在保罗·寇恩的构造中，他给原模型附加了额外的自然数子集，而没有更改原模型的任何基数。力迫也是利用有穷方法（finitistic method）证明相对一致性的二种方法中的一种，另一个方法是布尔值模型。

对集合论的异议

一开始，有些数学家反对将集合论当做数学基础，认为这只是一场含有“奇幻元素”的游戏。对集合论最常见的反对意见来自数学结构主义者（像是利奥波德·克罗内克），他们认为数学多少都和计算有些关系的，但朴素集合论却加入了非计算性的元素。

埃里特·比修普驳斥集合论是“上帝的数学，应该留给上帝”。而且，路德维希·维特根斯坦特别对无限的操作有疑问，这也和策梅罗-弗兰克尔集合论有关。维特根斯坦对于数学基础的观点曾被保罗·贝奈斯所批评，且被克里斯平·赖特等人密切研究过[4]。

拓扑斯理论曾被认为是传统公理化集合论的另一种选择。拓朴斯理论可以被用来解释该集合论的各种替代方案，如数学结构主义、模糊集合论、有限集合论和可计算集合论等[5]。

相关条目

- 集合论主题列表
- 约略集合论提供了一个以上下近似来表示集合的方法。
- 音乐集合理论将组合数学和群论应用在音乐上；但除了使用有限集外，事实上它和数学中任何一种类型的集合论都没多大关系。最近两个年代以来，音乐中的转换理论已较严谨地采用数学集合论中的概念。
- 范畴论也以抽象的方法来处理数学概念。
- 关联模型有借用集合论中的一些概念。

参考资料

1. ^ Cantor, Georg, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002155583), J. Reine Angew. Math.. 1874, 77: 258 – 262
2. ^ Johnson, Philip, A History of Set Theory, Prindle, Weber & Schmidt. 1972, ISBN 0-87150-154-6
3. ^ Bolzano, BernardBerg, Jan, ., Einleitung zur Größenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre, Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe, edited by Eduard Winter et al., Vol. II, A, 7, Stuttgart, Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag. 1975: 152, ISBN 3-7728-0466-7
4. ^ John Francis. Philosophy Of Mathematics (http://books.google.com.tw/books?id=DuyMjOwWWnUC&pg=PA86&lpg=PA86#v=onepage&q&f=false). Global Vision Publishing Ho. 2008: 86. ISBN 8182202671.
5. ^ Ferro, A.; Omodeo, E. G.; Schwartz, J. T., Decision procedures for elementary sublanguages of set theory. I. Multi-level syllogistic and some extensions, Comm. Pure Appl. Math.. 1980, 33 (5): 599 – 608, doi:10.1002/cpa.3160330503 (http://dx.doi.org/10.1002%2Fcpa.3160330503)

取自“http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=集合论&oldid=32320940”
