ADI-EULER-SEMI-IMPLICITO

Considerando o sistema de equações do modelo apresentado por FfitzHugh-Nagumo como interpretado no ultimo trabalho:

$$X(Cm + \frac{\partial V}{\partial t} + Ic(V)) = \nabla \cdot \sigma \nabla V \tag{1}$$

$$Ic(V) = \frac{(V(1-V)(V-a)-g)}{e} \tag{2}$$

$$g(V, g') = gnV - yg' \tag{3}$$

Onde Cm,X são parametros e Ic(V) é a função que representa o fluxo ionico.
Reescrevendo em função de variação de tensão:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\nabla \cdot \sigma \nabla V}{X} - Cm - Ic(V)$$

Sendo ∇·σ∇V o operador linear de difusão, pode ser rescrito em um contexto 2d como:

$$\frac{\nabla \cdot \sigma \nabla V}{X} = \frac{Ge(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) \pm Gi(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})}{X} \tag{4}$$

Para Ge e Gi coeficiente de difusão em cada direção.
Assumindo Ge=Gi e G= Ge/X é possivel simplificar:

$$\frac{\nabla \cdot \sigma \nabla V}{X} = \frac{Ge(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2})}{X} = G(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) = AV \tag{5}$$

Nota: Na literatura o operador de difusão é comummente apresentado em forma matricial coresspondendo a difusão do grupo de variaveis (eg V{u,v}), neste caso, como só há uma variavel, ele aparece em forma escalar.

Agrupando os termos conhecidos na função de reação:

$$R(V) = -Cm - Ic(V) \tag{6}$$

Assim a equação 2 pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = AV \ + \ R(V)$$

Ou na seguinte forma, convencional para NRD:

$$\frac{V^{n+1} - V^{n}}{\partial t} = AV + R(V) \tag{7}$$

ADI-EULER

Primeiro pegamos um ponto médio e consideramos a seguinte aproximação semi-implícta:

$$\frac{V^{n+1} - V^{n}}{\partial t} = AV^{n+\frac{1}{2}} + R(V^{n+\frac{1}{2}}) \tag{8}$$

Em seguida o metodo de Crank-Nicolson é aplicado no operador de difusão:

$$\frac{V^{n+1} - V^{n}}{\Delta t} = \frac{(AV^{n+1} + AV^{n})}{2} + R(V^{n+\frac{1}{2}}) \tag{9}$$

O termo de reação não linear ainda depende do valor de V em n+1/2, assim é introduzida a seguinte aproximação:

$$V' = V^{n} + \frac{1}{2}\Delta t(AV^{n} + R(V^{n})) \tag{10}$$

Essa aproximação é baseada no método de Euler Simples explicíto, já estudado. Assim:

$$V' = V^{n+\frac{1}{2}}$$

Dessa forma o operador de reação pode ser resolvido explicitamente sem depender de demais valores do mesmo instante de tempo.

Reescrevendo 7 considerando 8 e 9 :

$$\frac{V^{n+1} - V^{n}}{\Delta t} = \frac{(AV^{n+1} + AV^{n})}{2} + R(V') \tag{11}$$

Considerando o operador LaPlaciano em duas dimenões, ele pode ser divido em A1 e A2, em respeito a difusão no eixo x e no eixo y respectivamente:

$$\frac{V^{n+1} - V^{n}}{\Delta t} = (A_1 V^{n+1} + A_2 V^{n+1} + A_1 V^{n} + A_2 V^{n}) + R(V') \tag{12}$$

Para

$$G(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) = AV$$

$$A_1 = G(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) \qquad A_2 = G(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})$$

$$A = A_1 + A_2$$

Separando termos conhecidos e não conhecidos :

$$V^{n+1} = \frac{\Delta t}{2}(A_1 V^{n+1} + A_2 V^{n+1} + A_1 V^{n} + A_2 V^{n}) + R(V')\Delta t + V^{n}$$

$$V^{n+1} = \frac{\Delta t}{2}(A_1 + A_2)(V^{n+1} + V^{n}) + R(V')\Delta t + V^{n}$$

$$V^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(A_1 + A_2)\left(V^{n+1}\right) = \frac{\Delta t}{2}(A_1 + A_2)\left(V^{n}\right) + R(V')\Delta t + V^{n}$$

$$V^{n+1}(1 - \frac{\Delta t}{2}\ (\ A_1 + A_2\ )) = V^{n}(1 + \frac{\Delta t}{2}\ (\ A_1 + A_2))\ + R(V')\Delta t \tag{13}$$

Assim para a aplicação do método ADI, dividiremos a equação em duas, a primeira partindo de um ponto n, considera explicito a difusão em Y e implicíto a difusão em X e avançando a solução até um ponto médio n+1/2. A segunda parte desse ponto médio e considerando a difusão em X implícita e em Y explícita, avança a solução até n+1.

Resultando no sistemas de equação final:

$$V^{n+\frac{1}{2}}(1-\frac{\Delta t}{2}\ (A_1)) = V^n(1+\frac{\Delta t}{2}\ (A_2))\ +\frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{14}$$

$$V^{n+1}(1-\frac{\Delta t}{2}\ (A_2\ )) = V^{n\frac{1}{2}}(1+\frac{\Delta t}{2}\ (A_1))\ +\frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{15}$$

$$V' = V^n + \frac{1}{2}\Delta t(AV^n + R(V^n)) \tag{16}$$

$$Ic(V) = \frac{(V(1-V)(V-a)-g)}{e} \tag{17}$$

$$g(V,g') = gnV - yg' \tag{18}$$

RESOLUÇÃO

Tomando a equação 14 e simplificando:

$$V^{n+\frac{1}{2}}(1-\frac{\Delta t}{2}\ (A_1)) = V^n(1+\frac{\Delta t}{2}\ (A_2))\ +\frac{1}{2}R(V')\Delta t$$

$$V^{n+\frac{1}{2}} - V^{n+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{2}\ (A_1) = V^n + V^n\frac{\Delta t}{2}\ (A_2)\ +\frac{1}{2}R(V')\Delta t$$

$$V^{n+\frac{1}{2}} -{}^{n} = V^{n+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{2}(A1) + V^n\frac{\Delta t}{2}\ (A_2)\ +\frac{1}{2}R(V')\Delta t$$

$$\frac{V^{n+\frac{1}{2}} - V^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(V^{n+\frac{1}{2}}(A1) + V^n(A_2))\ +\frac{1}{2}R(V') \tag{19}$$

Em seguida abre-se o operador de difusão, considerando :

$$A_1 = G(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) = G\left(\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{\partial x^2}\right) \quad A_2 = G(\frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{\partial y^2}) \tag{20}$$

Obtendo:

$$\frac{V_{i,j}^{\;n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{\;n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}G\left(\frac{V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}G\left(\frac{V_{i,j-1}^{n} - 2V_{i,j}^{n} + V_{i,j+1}^{n}}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}R(V') \tag{21}$$

Assumindo dx=dy.

$$\frac{V_{i,j}^{\;n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{\;n}}{\Delta t} = \frac{1}{2\partial x^2}G\left(V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2\partial x^2}G\left(V_{i,j-1}^{n} - 2V_{i,j}^{n} + V_{i,j+1}^{n}\right) + \frac{1}{2}R(V')$$

Para:

$$\frac{\Delta t}{2\partial x^2}G = \gamma$$

Substituindo e separando termos conhecidos e não conhecidos:

$$V_{i,j}^{\;n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{\;n} = \gamma\left(V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \gamma\left(V_{i,j-1}^{n} - 2V_{i,j}^{n} + V_{i,j+1}^{n}\right) + \frac{1}{2}R(V')\Delta t$$

$$V_{i,j}^{\;n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma - \gamma\left(V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) = V_{i,j}^{\;n} - 2V_{i,j}^{n}\gamma + \gamma\left(V_{i,j-1}^{n} + V_{i,j+1}^{n}\right) + \frac{1}{2}R(V')\Delta t$$

$$(1-2\gamma)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \gamma V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \gamma V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = (1-2\gamma)V_{i,j}^{n} + V_{i,j-1}^{n}\gamma + V_{i,j+1}^{n}\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{22}$$

Para a segunda equação do sistema, 15, o resultado é similar:

$$(1-2\gamma)V_{i,j}^{n+1} - \gamma V_{i,j-1}^{n+1} - \gamma V_{i,j+1}^{n} = (1-2\gamma)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{23}$$

Por fim, como do lado direito da equação só existem termos conhecidos, podemos chamar de:

$$F_j^n = (1-2\gamma)V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n\gamma + V_{i,j+1}^n\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \quad (24)$$

$$F_i^n = (1-2\gamma)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \quad (25)$$

Para cada uma das equações respectivamente. Podendo então se escrever:

$$-\gamma V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\gamma)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \gamma V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_i^n \quad (26)$$

$$-\gamma V_{i,j-1}^{n+1} + (1-2\gamma)V_{i,j}^{n+1} - \gamma V_{i,j+1}^{n} = F_j^n$$

Assim para cada passo de tempo n>n+1 é preciso resolver 2 sistemas.

O primeiro sistema, avança até um ponto médio n+1/2. Avaliando os valores de V^n, nesse primeiro sistema, considera explicitamente o operador de difusão na direção do eixo y, para calcular F_j^n. Fixando a coordenada y y=j, o sistema resultante pode ser escrito na forma de uma matrix de bloco:

$$\begin{vmatrix} (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & \cdots \\ -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & \ddots \\ 0 & 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}_{Tx} \begin{vmatrix} V_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ V_{Tx,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{vmatrix}_{Tx} = \begin{vmatrix} F_{0,j}^n \\ F_{1,j}^n \\ F_{2,j}^n \\ \vdots \\ F_{Tx,j}^n \end{vmatrix}_{Tx}$$

De forma semelhante, o segundo sistema avança a equação de n+1/2 para n+1. Dessa vez F_j^n avalia explicitamente os valores do operador de difusão, ultilizando $V^{n+\frac{1}{2}}$. Fixando a coordenada x, x=i, o sistema resultante pode ser expressado de maneira similar:

$$
\begin{vmatrix}
(1-2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & \cdots \\
-\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & \cdots \\
0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & \ddots \\
0 & 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{vmatrix}_{Ty}
\begin{vmatrix}
V_{i,0}^{n+\frac{1}{2}} \\
V_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \\
V_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \\
\vdots \\
V_{i,Ty}^{n+\frac{1}{2}}
\end{vmatrix}_{Ty}
=
\begin{vmatrix}
F_{0,j}^{n} \\
F_{1,j}^{n} \\
F_{2,j}^{n} \\
\vdots \\
F_{Tx,j}^{n}
\end{vmatrix}_{Tx}
$$

Ambas as matrizes resultantes são tridiagonais, asssim, podem ser resolvidas de maneira eficiente usando o algoritmo de Thomas. Dessa forma, para cada passo de tempo é nescessario realizar as seguintes operações:

1. Calcular a aproximação semi-implícita do termo de reação para todo o domominio

$$
\begin{gathered}
R(V) = -Cm - Ic(V') \\
V' = V^{n} + \frac{1}{2}\Delta t(AV^{n} + R(V^{n})) \\
Ic(V) = \frac{(V(1-V)(V-a)-g)}{e} \\
g(V,g') = gnV - yg'
\end{gathered}
\tag{27}
$$

2. Fixar y, e para cada y=0,1,2,3,...Ty calcular:

$$
\begin{vmatrix}
(1-2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & \cdots \\
-\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & \cdots \\
0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & \ddots \\
0 & 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{vmatrix}_{Tx}
\begin{vmatrix}
V_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
V_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
V_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
\vdots \\
V_{Tx,j}^{n+\frac{1}{2}}
\end{vmatrix}_{Tx}
=
\begin{vmatrix}
F_{0,j}^{n} \\
F_{1,j}^{n} \\
F_{2,j}^{n} \\
\vdots \\
F_{Tx,j}^{n}
\end{vmatrix}_{Tx}
$$

onde:

$$
F_{x,j}^{n} = (1-2\gamma)V_{i,j}^{n} + V_{i,j-1}^{n}\gamma + V_{i,j+1}^{n}\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{28}
$$

3. Fixar x, e para cada x=0,1,2,3,.. Tx calcular:

$$\begin{vmatrix} (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & \cdots \\ -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma & \ddots \\ 0 & 0 & -\gamma & (1-2\gamma) & -\gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}_{Ty} \begin{vmatrix} V_{i,0}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ V_{i,Ty}^{n+\frac{1}{2}} \end{vmatrix}_{Ty} = \begin{vmatrix} F_{0,j}^{n} \\ F_{1,j}^{n} \\ F_{2,j}^{n} \\ \vdots \\ F_{Tx,j}^{n} \end{vmatrix}_{Tx}$$

onde:

$$F_i^n = (1-2\gamma)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\gamma + \frac{1}{2}R(V')\Delta t \tag{29}$$

CONSTANTES

Por fim é nescessario defenir a expressão das contantes ultilizadas em relaçao aos paramêtros do modelo:

$$\frac{\Delta t}{2\partial x^2}Ge = \gamma$$