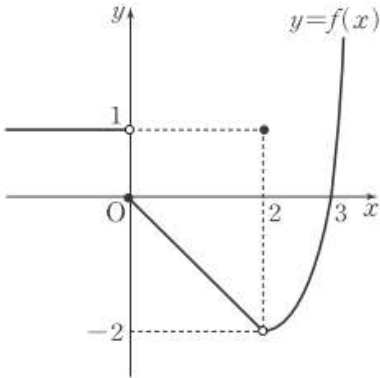


1.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

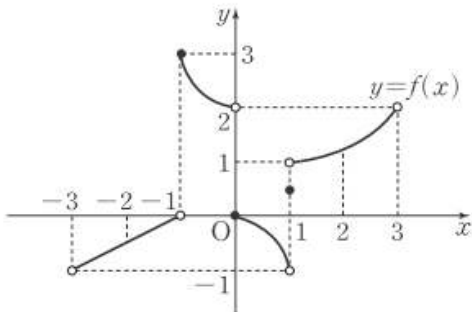


$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은? 1)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2.

$-3 < x < 3$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



부등식 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은? 2)

(단, $-3 < a < 3$)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ 의 값을 구하시오. 3)

4.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{\sqrt{x + 2} - 2}$ 의 값은? 4)

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

5.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x} - 2) \left(1 - \frac{1}{x - 4} \right)$ 의 값은? 5)

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6.

함수 $f(x) = a(x - 1)^2 + 1$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \sqrt{f(-x)} - \sqrt{f(x)} \} = 6$ 일 때,

양수 a 의 값은? 6)

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

7.

함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 15$ 를 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2xf(x-2)}{x^2+x-6}$ 의 값은? 7)

- ① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

8.

함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 3$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)f(x)$ 의 값은? 8)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)} = 4$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+3g(x)}{2f(x)-g(x)}$ 의 값을 구하시오. 9)

10.

다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)f(x) = 6$ 을 만족시킨다.

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax-1)f(x) = 26$ 일 때, $a+f(2)$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) 10)

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11.

두 상수 a , b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} = 6$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. 11)

12.

함수 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ 일 때,

$f(2)$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) 12)

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

13.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x}{x - 5} = 8 \text{ 일 때, } f(7) \text{의 값을 구하시오. }^{13)}$$

14.

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{5x^2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = -8$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. ¹⁴⁾

15. 일차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + g(x)}{x+3} = -4$$

일 때, $g(2) - f(2)$ 의 값을 구하시오.¹⁵⁾ [4점]

16.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x) - x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - f(x)}{x - 3} = 8$$

을 만족시킬 때, $g(5) - f(5)$ 의 값을 구하시오.¹⁶⁾ [4점]

17.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여
부등식

$$5x - 1 < (x^2 + 1)f(x) < 5x + 2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ 의 값은? 17)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18.

다항함수 $f(x)$ 는 양의 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(v) \ 2x^2 - 5x \leq f(x) \leq 2x^2 + 2$$

$$(vi) \ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4}$$

$f(3)$ 의 값을 구하시오. 18)

19.

양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \left| \frac{kx}{x-1} \right|$ 라 하자.

실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의
개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) + g(4) = 5$$

를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? 19)

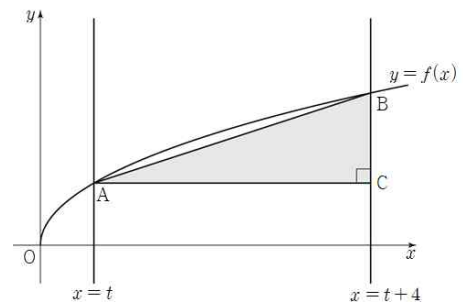
- ① 6 ② $\frac{15}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 12

20.

그림과 같이 좌표평면에서 양의 실수 t 에 대하여

함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프가 두 직선 $x = t$, $x = t + 4$ 와 만나는
점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 직선 $x = t + 4$ 에 내린 수선의
발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,

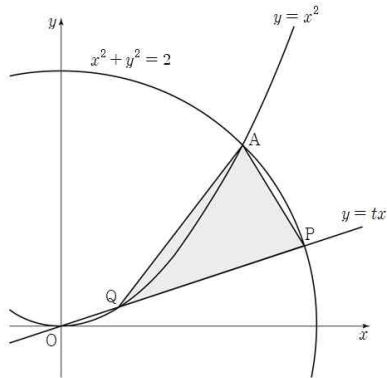
$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2}$ 의 값은? 20)



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

21.

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 $t (0 < t < 1)$ 에 대하여 직선 $y = tx$ 가 원 $x^2 + y^2 = 2$, 곡선 $y = x^2$ 과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{S(t)}{(1-t)^2} = k$ 이다. $20k$ 의 값을 구하시오. ²¹⁾

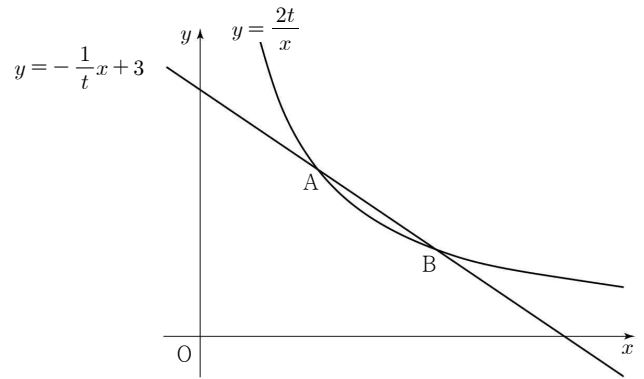


22.

실수 $t (t > 1)$ 에 대하여 곡선 $y = \frac{2t}{x}$ 와 직선 $y = -\frac{1}{t}x + 3$ 이

만나는 두 점을 A, B라 하자. $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{t-1} = k$ 라 할 때,

$30 \times k^2$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]²²⁾



23.

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = -2$$

(나) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$ 의 값이 존재하지 않는
실수 a 의 개수는 1이다.

$f(24)$ 의 값을 구하시오. [4점] 23)

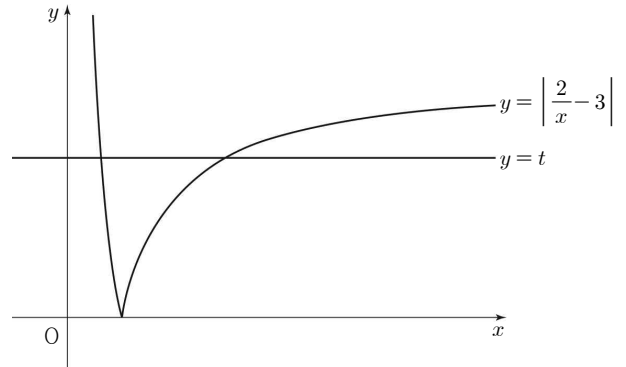
24.

$0 < t < 3$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y = \left| \frac{2}{x} - 3 \right|$ 의 그래프와

직선 $y = t$ 가 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t}$ 의 값은? [4점]24)

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$



〈정답 및 해설〉

1) [정답] ②

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 + (-2) = -1$$

2) [정답] ③

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 를 만족시키려면 $x = a$ 에서 함수 $f(x)$ 는 불연속이어야 한다.

(i) $a = -1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

(ii) $a = 0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(iii) $a = 1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(i)~(iii)에서 부등식 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 를 만족시키는 a 의 값은 0이어야 한다.

3) [정답] 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 1+4 = 5$$

4) [정답] ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-6)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 3(\sqrt{x+2}+2) \\ &= 3 \times (\sqrt{2+2}+2) = 12 \end{aligned}$$

5) ②

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}-2) \left(1 - \frac{1}{x-4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}-2) \left\{ 1 - \frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left\{ (\sqrt{x}-2) - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right\} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

6) [정답] ④

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \sqrt{f(-x)} - \sqrt{f(x)} \} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \sqrt{a(-x-1)^2+1} - \sqrt{a(x-1)^2+1} \} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{ \sqrt{a(-x-1)^2+1} - \sqrt{a(x-1)^2+1} \} \{ \sqrt{a(-x-1)^2+1} + \sqrt{a(x-1)^2+1} \}}{\sqrt{a(-x-1)^2+1} + \sqrt{a(x-1)^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax}{\sqrt{a(-x-1)^2+1} + \sqrt{a(x-1)^2+1}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a}{\sqrt{a(-1-\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{a(1-\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{4a}{2\sqrt{a}} = 6$$

따라서 $\sqrt{a} = 3$ 이므로 $a = 9$

7) [정답] ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2xf(x-2)}{x^2+x-6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2xf(x-2)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{4}{5} \times 15 = 12 \end{aligned}$$

8) [정답] ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 3 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(x-1)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

9) [정답] 2

$$h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)} \text{로 놓으면}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 4 \text{이고, } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)+1}{h(x)-1} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)+1}{h(x)-1} = \frac{4+1}{4-1} = \frac{5}{3}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+3g(x)}{2f(x)-g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}+3}{2\frac{f(x)}{g(x)}-1} = \frac{\frac{5}{3}+3}{\frac{10}{3}-1} = 2$$

10) [정답] ②

$f(x)$ 가 다항함수이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= 3 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ 이고 $f(2) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax-1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax-1) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= (2a+3) \times 2 = 26 \text{에서 } a = 5 \end{aligned}$$

따라서 $a+f(2) = 5+2 = 7$

11) [정답] 14

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} = 6 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a}-b) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\sqrt{a-2}-b=0, \text{ 즉 } b = \sqrt{a-2} \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2}) = 2\sqrt{a-2} = 6 \end{aligned}$$

$\sqrt{a-2}=3$ 에서 $a-2=9$, $a=11$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{11-2}=3$
따라서 $a+b=11+3=14$

12) [정답] ㉠

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 + a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이고}$$

$$f'(x) = 4x + a \text{이므로}$$

$$f'(1) = 4 + a = 5 \text{에서 } a = 1$$

$$2 + a + b = 0 \text{에서 } b = -3$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + x - 3$ 이므로

$$f(2) = 7$$

13) [정답] 27

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-x}{x-5} = 8 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \{f(x)-x\} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$f(x)-x$ 도 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x = (x-5)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+a)}{x-5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x+a) = 5+a = 8$$

에서 $a = 3$

따라서 $f(x) = (x-5)(x+3) + x$ 이므로

$$f(7) = 2 \times 10 + 7 = 27$$

14) [정답] 66

함수 $f(x)$ 는 다항함수이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{5x^2} = 2$ 이므로

$f(x) = x^3 + 10x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

또, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -8$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 10x^2 + ax + b) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$-1 + 10 - a + b = 0, \text{ 즉 } b = a - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 10x^2 + ax + a - 9}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 9x + a - 9)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 9x + a - 9)$$

$$= 1 - 9 + a - 9 = -17 + a = -8$$

에서 $a = 9, b = 0$

따라서 $f(x) = x^3 + 10x^2 + 9x$ 이므로

$$f(2) = 8 + 40 + 18 = 66$$

15) 27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)g(x), f(x)+g(x)$ 는

$x = -3$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} = 4 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)g(x) = f(-3)g(-3) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+g(x)}{x+3} = -4 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \{f(x)+g(x)\} = f(-3)+g(-3) = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $f(-3) = g(-3) = 0$ 이므로

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 각각 $x+3$ 을 인수로 갖는다.

$$f(x) = a(x+3), g(x) = (x+3)(x+b) \text{ (a, b 는 상수)}$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)^2(x+b)}{(x+3)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} a(x+b)$$

$$= a(-3+b) = 4 \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+g(x)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3) + (x+3)(x+b)}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} (a+x+b)$$

$$= a-3+b = -4 \cdots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하면

$$a(-a-4) = 4, a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \text{에서 } a = -2 \text{이고 } b = 1$$

$$f(x) = -2(x+3), g(x) = (x+3)(x+1)$$

따라서 $g(2) - f(2) = 5 \times 3 - (-2) \times 5 = 25$

16) [정답] 20

두 이차함수 $f(x), g(x)$ 의 x^2 의 계수를 각각

a, b ($a \neq 0, b \neq 0$)이라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)-x^2} = 1 \text{이므로}$$

두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)-x^2$ 의 차수는 2이고

$$\frac{a}{b-1} = 1, a = b-1, b-a = 1 \text{이므로}$$

$g(x)-f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-f(x)}{x-3} \text{의 값이 존재하므로}$$

다항식 $g(x)-f(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 갖는다.

$$g(x)-f(x) = (x-3)(x+k) \text{ (k 는 실수)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+k)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x+k) = 3+k = 8$$

$$k = 5 \text{이므로 } g(x)-f(x) = (x-3)(x+5)$$

따라서 $g(5) - f(5) = 20$

17) [정답] ㉤

부등식 $5x-1 < (x^2+1)f(x) < 5x+2$ 에서

$$\frac{5x-1}{x^2+1} < f(x) < \frac{5x+2}{x^2+1}$$

$$x > 0 \text{일 때, } \frac{x(5x-1)}{x^2+1} < xf(x) < \frac{x(5x+2)}{x^2+1} \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5x-1)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5x+2)}{x^2+1} = 5 \text{ 이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 5$

18) [정답] 10

조건 ㉞에서 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{2x^2-5x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x^2+2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2}{x^2} = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 ㉝에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2x-3) = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이어야 한다.

즉, $f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-1)(2x+a)$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+a)}{(x-1)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+a}{x+3} = \frac{2+a}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

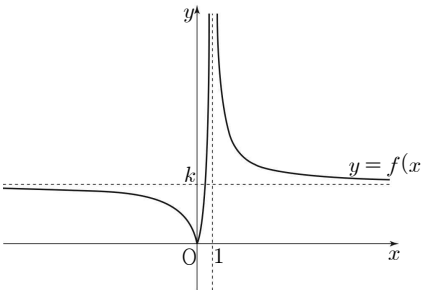
$2+a=1$ 에서 $a=-1$

따라서 $f(x) = (x-1)(2x-1)$ 이므로 $f(3) = 2 \times 5 = 10$

19) [정답] ①

$$f(x) = \left| \frac{kx}{x-1} \right| = \left| \frac{k}{x-1} + k \right| \text{ 이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $t < 0$ 일 때

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 만나지 않으므로

$$g(t) = 0$$

(ii) $t=0$ 또는 $t=k$ 일 때

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$

(iii) $0 < t < k$ 또는 $t > k$ 일 때

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 두 점에서 만나므로 $g(t)=2$

(i), (ii), (iii)에 의해 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t = 0 \text{ 또는 } t = k) \\ 2 & (0 < t < k \text{ 또는 } t > k) \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 2$ 이고, 모든 양수 a 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 2 \text{ 이므로 } \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) + g(4) = 5 \text{ 에서 } g(4) = 1 \text{ 이므로 } k = 4$$

$$\text{따라서 } f(3) = \left| \frac{4 \times 3}{3-1} \right| = 6$$

20) [정답] ④

$A(t, \sqrt{t})$, $B(t+4, \sqrt{t+4})$, $C(t+4, \sqrt{t})$ 이므로

$$\overline{AC} = 4, \overline{BC} = \sqrt{t+4} - \sqrt{t}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t}) = 2(\sqrt{t+4} - \sqrt{t})$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times (\sqrt{t+4} - \sqrt{t})(\sqrt{t+4} + \sqrt{t})}{\sqrt{t+4} + \sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4} + \sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}} + 1} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

21) [정답] 15

$y=x^2$ 과 $y=tx$ 를 연립하여 정리하면

$$x(x-t)=0 \text{ 이고 } x > 0 \text{ 이므로 } x=t$$

그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(t, t^2)$. 원점을 O라 하면

$$\overline{OP} = \sqrt{2}, \overline{OQ} = t\sqrt{1+t^2} \text{ 이므로 } \overline{PQ} = \overline{OP} - \overline{OQ} = \sqrt{2} - t\sqrt{1+t^2}$$

$x^2+y^2=2$ 와 $y=x^2$ 을 연립하여 정리하면

$$(y+2)(y-1)=0 \text{ 이고 } y > 0 \text{ 이므로 } y=1,$$

$$x^2=1 \text{ 에서 } x > 0 \text{ 이므로 } x=1$$

그러므로 점 A의 좌표는 $A(1, 1)$

점 A에서 직선 $y=tx$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $0 < t < 1$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$$

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} - t\sqrt{1+t^2}) \times \frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}$$

이므로

$$\begin{aligned} k &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{S(t)}{(1-t)^2} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{2-t^2(1+t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(t^2+2)(1-t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(t^2+2)(1+t)}{2\sqrt{1+t^2}(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2})} \\ &= \frac{3 \times 2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 20k = 20 \times \frac{3}{4} = 15$$

22) [정답] 54

$$\frac{2t}{x} = -\frac{1}{t}x + 3 \text{ 에서 } 2t^2 = -x^2 + 3tx$$

$$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0, (x-t)(x-2t) = 0$$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 $A(t, 2)$, $B(2t, 1)$

$$\overline{OA} = \sqrt{t^2+4}, \overline{OB} = \sqrt{4t^2+1}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{4t^2+1} - \sqrt{t^2+4}}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{4t^2+1} - \sqrt{t^2+4})(\sqrt{4t^2+1} + \sqrt{t^2+4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1} + \sqrt{t^2+4})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{3(t^2-1)}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1} + \sqrt{t^2+4})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2+1} + \sqrt{t^2+4}} = \frac{3}{5} \sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 $30 \times k^2 = 30 \times \left(\frac{3}{5} \sqrt{5}\right)^2 = 54$

23) [정답] 40
조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\{x + f(x)\}}{x + f(x)} = -1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - f(x)}{x + f(x)} = 2$$

세 상수 p, q, r 에 대하여

$$f(x) = px^2 + qx + r \quad (p > 0) \text{ 이라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-px^2 - (q-1)x - r}{px^2 + (q+1)x + r} = 2 \text{ 이므로}$$

$$r = 0, \quad q \neq -1$$

$$\frac{-(q-1)}{q+1} = 2, \quad q = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = px^2 - \frac{1}{3}x = x\left(px - \frac{1}{3}\right)$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x^2} - 3) \neq 0 \text{ 이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3} \text{ 의 값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x^2} - 3) = \sqrt{a^2} - 3 = 0, \quad |a| = 3$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$ 의 값이 존재하지

않는 실수 a 의 값이 -3 인 경우

$x = 3$ 에서 극한값이 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2} - 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x-4)f(x+1) = f(-1) \times f(4) = 0$$

$$-\left(-p - \frac{1}{3}\right) \times 4\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(p + \frac{1}{3}\right)\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$p = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } p = \frac{1}{12}$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$ 의 값이 존재하지

않는 실수 a 의 값이 3 인 경우

$x = -3$ 에서 극한값이 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2} - 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x-4)f(x+1) = f(-7) \times f(-2)$$

$$= 0$$

$$-7\left(-7p - \frac{1}{3}\right) \times (-2)\left(-2p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(7p + \frac{1}{3}\right)\left(2p + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$p = -\frac{1}{21} \text{ 또는 } p = -\frac{1}{6}$$

$p > 0$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 $p = \frac{1}{12}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{12}x(x-4)$$

따라서 $f(24) = \frac{1}{12} \times 24 \times 20 = 40$

24) [정답] $\frac{4}{9}$

$$x < 0 \text{ 일 때, } \left|\frac{2}{x} - 3\right| = -\frac{2}{x} + 3 > 3 \text{ 이므로}$$

$$x < 0 \text{ 에서 함수 } y = \left|\frac{2}{x} - 3\right| \text{ 의 그래프와}$$

직선 $y = t \quad (0 < t < 3)$ 은 만나지 않는다.

$$0 < x < \frac{2}{3} \text{ 일 때, } \left|\frac{2}{x} - 3\right| = \frac{2}{x} - 3$$

$$\frac{2}{x} - 3 = t \text{ 에서 } x = \frac{2}{3+t}$$

$$x \geq \frac{2}{3} \text{ 일 때, } \left|\frac{2}{x} - 3\right| = -\frac{2}{x} + 3$$

$$-\frac{2}{x} + 3 = t \text{ 에서 } x = \frac{2}{3-t}$$

$$\text{그러므로 } f(t) = \frac{2}{3-t} - \frac{2}{3+t} = \frac{4t}{(3-t)(3+t)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{t} \times \frac{4t}{(3-t)(3+t)} \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{(3-t)(3+t)} = \frac{4}{9}$$