2학기 중간고사 - 1회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

내신대비

이름

01 정답 3

해설 점 $(-4,\ 1)$과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot(-4)-4\cdot1+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{\sqrt{25}}=3$$

02 정답 ②

해설 ① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

03 정답 ①

해설 $\triangle ABC$는 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이 성립한다.

$(x+1)^2+4+(x-3)^2+1=16+1$

$\therefore\ x^2-2x-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 실수 x의 값의 합은 2이다.

04 정답 5

해설 선분 AB를 $b:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(-2,\ 7)$이므로

$$\frac{b\cdot1+3\cdot(-4)}{b+3}=-2,\ \frac{b\cdot a+3\cdot9}{b+3}=7$$

$b-12=-2b-6,\ ab+27=7b+21$

$\therefore\ a=4,\ b=2$

따라서 $A(-4,\ 9),\ B(1,\ 4)$이므로

선분 AB를 $1:2b$, 즉 $1:4$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot1+4\cdot(-4)}{1+4},\ \frac{1\cdot4+4\cdot9}{1+4}\right)$, 즉 $(-3,\ 8)$

따라서 $p=-3,\ q=8$이므로

$p+q=5$

05 정답 ②

해설 두 직선 $x+y=1,\ ax+2y+a+2=0$이 만나야하므로

$a\neq2$

두 직선의 교점을 구하면

$\left(\frac{a+4}{2-a},\ \frac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제1사분면에 있어야 하므로

$\frac{a+4}{2-a}>0,\ \frac{2a+2}{a-2}>0$

(i) $\frac{a+4}{2-a}>0$에서 분모와 분자가 0이 아니고 부호가 서로 같아야 하므로

$(a-2)(a+4)<0$

$\therefore\ -4<a<2$

(ii) $\frac{2a+2}{a-2}>0$에서 분모와 분자가 0이 아니고 부호가 서로 같아야 하므로

$(2a+2)(a-2)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>2$

두 식의 양변에 $(a-2)^2$을 곱하면

즉, (i), (ii)에서 $-4<a<-1$이다.

따라서 정수 a는 $-3,\ -2$의 2개이다.

06 정답 ⑤

해설 직선 $x+3y+4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$에

평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인

직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=-\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}$

$\therefore\ a=-1$

07 정답 4

해설 직선 $3x-y-6=0$위의 한 점 $(2,\ 0)$에서

직선 $3x-y+k=0$까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k는 양수)

08 정답 ②

해설 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=10$이므로

$\angle ABC=90^\circ$ 이다.

따라서 원의 중심은 선분 AC의 중점이므로

$p=\frac{-6+2}{2}=-2$, $q=\frac{0+6}{2}=3$

$\therefore\ p^2+q^2=13$

09 정답 ②

해설 직선 $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는

각각 $(5,\ 0)$, $(0,\ 3)$

이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(5-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{34}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-3)^2=34$

10 정답 ①

해설 원 $x^2+y^2=2$에 접하고, 기울기가 3인 접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{2}\sqrt{3^2+1}$ $\quad\therefore\ y=3x\pm2\sqrt{5}$

이 중 y절편이 양수인 접선의 방정식은

$y=3x+2\sqrt{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$x-y=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\sqrt{5}-1$, $b=-\sqrt{5}-3$

따라서 $a=-\sqrt{5}-1$, $b=-\sqrt{5}-3$이므로

$3a-b=-3\sqrt{5}-3-(-\sqrt{5}-3)=-2\sqrt{5}$

11 정답 ③

해설 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-(y-3)+k-1=0$

즉, $kx-y-km+k+2=0$

이 직선이 직선 $2x-y+1=0$과 일치하므로

$k=2$, $-km+k+2=1$

따라서 $k=2$, $m=\frac{3}{2}$이므로

$km=3$

12 정답 ③

해설 ㄱ. $x^2+y^2-2x=0$에서 $(x-1)^2+y^2=1$

따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.

ㄴ. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.

ㄷ. $x^2+y^2+4x-2y+2=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

따라서 반지름의 길이가 다르므로 평행이동하여 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

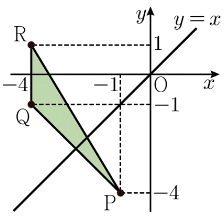
13 정답 3

해설 점 $P(-1,\ -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-4,\ -1)$

점 $Q(-4,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 $(-4,\ 1)$

따라서 다음 그림에서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$



14 정답 1

해설 $A(-2,\ 5)$와 $B(5,\ -9)$를 $3:4$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot 5+4(-2)}{3+4},\ \frac{3\cdot(-9)+4\cdot 5}{3+4}\right)=(1,\ -1)$

이 점이 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로 $-1=-2+k$

$\therefore k=1$

15 정답 $\frac{22}{3}$

해설 $B(a,\ b)$, $C(c,\ d)$라 하면

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(1,\ 7)$이므로

$\frac{a+c}{2}=1,\ \frac{b+d}{2}=7$

$\therefore a+c=2,\ b+d=14$ $\cdots$ ㉠

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$이므로

$\frac{5+a+c}{3}=x,\ \frac{1+b+d}{3}=y$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x=\frac{7}{3},\ y=5$

$\therefore x+y=\frac{22}{3}$

16 정답 ⑤

해설 $P(x,\ y)$라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$\frac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x-3y-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$

$|3x+y+2|=|x-3y-2|$

$3x+y+2=\pm(x-3y-2)$

$\therefore x+2y+2=0$ 또는 $2x-y=0$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$2x-y=0$

17 정답 ③

해설 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로

$k=2$

이때 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 넓이의 합은

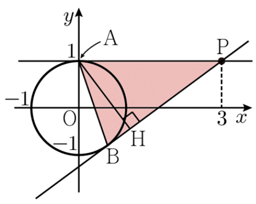
$\pi\cdot 1^2+\pi\cdot 5^2=26\pi$이므로

$a=26$

$\therefore a+k=28$

18 정답 $\frac{9}{5}$

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고
점 $(3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=m(x-3)$
$\therefore mx-y-3m+1=0 \quad \cdots ㉠$
원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 1이므로
원과 직선이 접하려면
$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$
$|-3m+1|=\sqrt{m^2+1}$
이때 양변을 제곱하여 정리하면
$9m^2-6m+1=m^2+1$
$8m^2-6m=0,\ m(4m-3)=0$
$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{3}{4}$
㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$-y+1=0,\ \frac{3}{4}x-y-\frac{5}{4}=0$에서
$y=1,\ 3x-4y-5=0$이므로
직선 BP의 방정식은 $3x-4y-5=0$이다.



따라서 점 $\mathrm{A}(0, 1)$에서 직선 $3x-4y-5=0$에
내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|-4-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{9}{5}$

19 정답 2

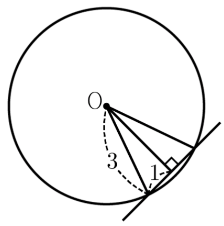
해설 직선 l의 방정식은
$7x+y-9=0$
원 $(x-2)^2+y^2=9$의 중심 $(2, 0)$과 직선 l 사이의
거리를 원의 반지름의 길이 3과 비교하면
$\frac{|14+0-9|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<3$
따라서 직선 l과 원 $(x-2)^2+y^2=9$는 서로 다른 두
점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다.

20 정답 ③

해설 직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하여 정리하면
$x^2-22x+120=0,\ (x-10)(x-12)=0$
$x=10$ 또는 $x=12$
따라서 원과 직선의 두 교점의 좌표는 $(10, -6), (12, 0)$
이때 원의 중심은 두 점 $(10, -6), (12, 0)$을 이은
선분의 중점이므로 $\left(\frac{10+12}{2}, \frac{-6+0}{2}\right)$
즉, $(11, -3)$이다.

21 정답 16

해설 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선 $y=x+m$ 사이의
거리가 $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$임을 알 수 있다.



따라서 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$과
직선 $y=x+m$ 사이의 거리가
$\frac{|m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$이므로 $m=\pm 4$
$\therefore m^2=16$

22 정답 49

해설 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $(8, 6)$에서의 접선의 방정식은
$8x+6y=100$
직선 $8x+6y-100=0$과
원 $(x+3)^2+(y-9)^2=k$가 접할 때, 접선과 원의
중심인 점 $(-3, 9)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이
$\sqrt{k}$와 같으므로
$\frac{|8\cdot(-3)+6\cdot 9-100|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\sqrt{k},\ 7=\sqrt{k}$
$\therefore k=49$

23 정답 $\frac{19}{8}$

해설 주어진 이차함수의 그래프를 x축 방향으로 m만큼 평행이동시키면

$y=(x-m)^2+2(x-m)+5$

이 이차함수가 주어진 직선과 접하므로

$(x-m)^2+2(x-m)+5=x+m$

정리하면

$x^2-2mx+m^2+2x-2m+5=x+m$

$x^2+(-2m+1)x+m^2-3m+5=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-2m+1)^2-4(m^2-3m+5)=0$

정리하면

$4m^2-4m+1-4m^2+12m-20=0$

$8m=19$

$\therefore m=\frac{19}{8}$

24 정답 ①

해설 $2\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$P(x, y)$라 하면

$4\{(x-3)^2+(y-2)^2\}=(x-6)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

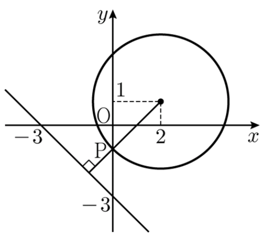
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=8$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(2, 1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는 $\frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$이므로

점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

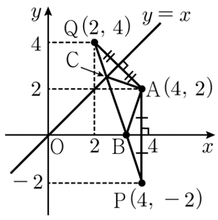
$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$



25 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 지점 O를 좌표평면 위의 원점, 직선도로 l을 x축으로 정하면 직선도로 m은 직선 $y=x$, 정류소 A의 좌표는 $(4, 2)$이다.

또한, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면 $P(4, -2)$이고, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면 점 $Q(2, 4)$이다.



이때 $\overline{AB}=\overline{BP}$, $\overline{AC}=\overline{CQ}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$

$\geq \overline{PQ}$

즉, 만들려고 하는 도로의 길이의 최솟값은 $\overline{PQ}$이고, 두 점 B, C가 직선 PQ 위에 있을 때 최소이다.

두 점 $P(4, -2)$, $Q(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+10$

이때 직선 $y=-3x+10$과 x축의 교점은 $B\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

두 직선 $y=-3x+10$, $y=x$의 교점은 $C\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 두 정류소 B와 C 사이의 거리는

$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{10}}{6}$(km)

2학기 중간고사-2회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

내신대비

이름

01 정답 -11

해설 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$\dfrac{3\cdot 12+b\cdot(-4)}{3+b}=2,\ \dfrac{3\cdot a+b\cdot 8}{3+b}=-1$

$36-4b=6+2b,\ 3a+8b=-3-b$

$b=5,\ a+3b=-1$

따라서 $a=-16,\ b=5$이므로

$a+b=-11$

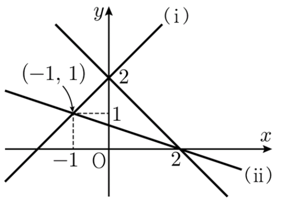
02 정답 ②

해설 $mx-y+m+1=0$에서

$m(x+1)-(y-1)=0 \qquad \cdots$ ㉠

이므로 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

다음 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여보면



(ⅰ) 직선 ㉠이 $(0,\ 2)$를 지날 때

$m-1=0 \qquad \therefore\ m=1$

(ⅱ) 직선 ㉠이 $(2,\ 0)$을 지날 때

$3m+1=0 \qquad \therefore\ m=-\dfrac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 m의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{3}<m<1$

03 정답 ⑤

해설 직선 $x+3y+4=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}$에

평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$인

직선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{1}{3}(x-2)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

이 직선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2=-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ a=-1$

04 정답 2

해설 두 직선이 평행하므로 직선 $x+3y+1=0$ 위의 한 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이다.

$\dfrac{|-1+0+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=2\sqrt{10}$ 이므로

$|k-1|=20,\ k-1=\pm 20$

$\therefore\ k=21$ 또는 $k=-19$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$21+(-19)=2$

05 정답 ①

해설 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓는다. 세 점 $(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1)$은 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 위의 점이므로 등식이 성립한다. 따라서 세 점을 대입한 식을 연립하면 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x=0$이다.

$x^2+y^2-2x=0$을 정리하면 $(x-1)^2+y^2=1$이다.

따라서 $a=1,\ b=0,\ r=1$이므로 $a+b+r=2$이다.

06 정답 ①

해설 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-4)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+4)^2=r^2$
이 원이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로
$(-a)^2+(-a+1)^2=r^2$
$\therefore\ 2a^2-2a+1=r^2 \quad \cdots ㉠$
또, 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$(3-a)^2+(-a+4)^2=r^2$
$\therefore\ 2a^2-14a+25=r^2 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ r^2=5$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

07 정답 ③

해설 접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.
공식을 이용하면 접선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm10$ 이므로
$\mathrm{m}=3, n=10 \therefore mn=30$

08 정답 5

해설 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는
$\mathrm{P}'(a-4,\ b+3)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-4-a)^2+(b+3-b)^2}$
$=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

09 정답 ④

해설 평행이동한 직선의 방정식은
$k(x-m)-(y-5)+k+2=0$
$\therefore\ kx-y-km+k+7=0$
이 직선이 직선 $4x-y+3=0$과 일치하므로
$k=4,\ -km+k+7=3$
따라서 $k=4,\ m=2$이므로
$k+m=6$

10 정답 ②

해설 평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면 반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은 반지름의 길이가 1인 ② 이다.

11 정답 -9

해설 직선 $5x+y-1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$5x+(-y)-1=0$
$\therefore\ 5x-y-1=0$
이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+k)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(2,\ -k)$를 지난다. 즉,
$10+k-1=0$
$\therefore\ k=-9$

12 정답 ③

해설 직선 $ax+by+c=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 직선은

$bx+ay+c=0\rightarrow y=-\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{a}$

$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$과 수직이 되려면

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$가 되어야 한다.

$\therefore\ \dfrac{8a}{3b}=\dfrac{8}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)=2$

13 정답 -5

해설 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{m\cdot7+n\cdot(-2)}{m+n},\ \dfrac{m\cdot(-2)+n\cdot3}{m+n}\right)$, 즉
$\left(\dfrac{7m-2n}{m+n},\ \dfrac{-2m+3n}{m+n}\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다. 즉,
$\dfrac{7m-2n}{m+n}=0 \qquad \therefore\ 7m=2n$
이때 $m,\ n$은 서로소인 자연수이므로 $m=2,\ n=7$
$\therefore\ m-n=-5$

14 정답 ③

해설 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=4$, $\dfrac{0+y_1+y_2}{3}=2$이므로

$x_1+x_2=12$, $y_1+y_2=6$

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=6$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=3$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(6, 3)$이다.

15 정답 ①

해설 $P(x, y)$라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$\dfrac{|2x+3y+8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|3x-2y-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$

$|2x+3y+8|=|3x-2y-2|$

$2x+3y+8=\pm(3x-2y-2)$

$\therefore 5x+y+6=0$ 또는 $x-5y-10=0$

직선 $5x+y+6=0$의 x절편은 $-\dfrac{6}{5}$이고,

직선 $x-5y-10=0$의 x절편은 10이다.

따라서 점 P의 자취의 방정식 중 그 그래프의 x절편이 양수인 것은

$x-5y-10=0$

16 정답 4

해설 $x^2+y^2-8x-10y+4k+25=0$에서

$(x-4)^2+(y-5)^2=16-4k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$16-4k>0 \quad \therefore k<4$ ⋯ ㉠

원의 중심의 좌표는 $(4, 5)$, 반지름의 길이는

$\sqrt{16-4k}$이므로 이 원이 제1사분면에 있으려면

$\sqrt{16-4k}<4$, $16-4k<16$

$\therefore k>0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $0<k<4$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=4$

17 정답 -6

해설 $x^2+y^2+8x+4ay+8-b=0$에서

$(x+4)^2+(y+2a)^2=4a^2+b+8$

이 원의 중심의 좌표가 $(-4, -2a)$이고

x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-4|=|-2a|=\sqrt{4a^2+b+8}$

$|-4|=|-2a|$에서 $a=2$ $(\because a>0)$

$|-4|=\sqrt{4a^2+b+8}$의 양변을 제곱하면

$16=4a^2+b+8$

$a=2$를 위의 식에 대입하면 $16=16+b+8$

$\therefore b=-8$

$\therefore a+b=2+(-8)=-6$

18 정답 12

해설 y축과 만나는 점 A의 좌표를 $(0, a)$, 점 B의 좌표를 $(0, b)$라 하면 $\overline{AB}=8$이므로

$\sqrt{(0-0)^2+(a-b)^2}=8$

$(a-b)^2=64$ ⋯ ㉠

두 점 A, B의 y좌표는 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입하여 얻은 이차방정식 $y^2+4y-k=0$의 두 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-4$, $ab=-k$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에 대입하면

$64=(-4)^2+4k$

$\therefore k=12$

19 정답 12

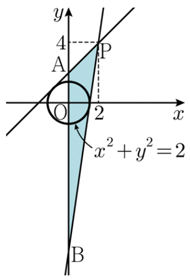
해설 접점을 $Q(x_1, y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=2$

이 직선이 $P(2, 4)$를 지나므로

$2x_1+4y_1=2$

즉, $x_1=1-2y_1$ $\cdots$ ㉠



또한, 점 Q가 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=2$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(1-2y_1)^2+{y_1}^2=2$

$5{y_1}^2-4y_1-1=0$

$(5y_1+1)(y_1-1)=0$

$\therefore y_1=-\frac{1}{5}$ 또는 $y_1=1$

$y_1=-\frac{1}{5}$일 때 $x_1=\frac{7}{5}$, $y_1=1$일 때 $x_1=-1$이므로

접선의 방정식은

$\frac{7}{5}x-\frac{1}{5}y=2$, $-x+y=2$

두 접선이 y축과 만나는 두 점은

$A(0, -10)$, $B(0, 2)$ 또는 $A(0, 2)$, $B(0, -10)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot12\cdot2=12$

20 정답 2

해설 직선 $3x+y-2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x-y-2=0$ $\therefore 3x+y+2=0$

이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-a)+(y+5)+2=0$

$\therefore 3x+y-3a+7=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-1, 2)$를 지나야 하므로

$-3+2-3a+7=0$, $3a=6$

$\therefore a=2$

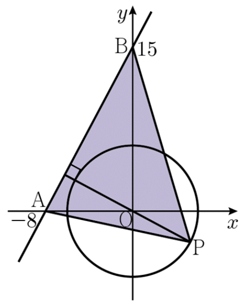
21 정답 111

해설 삼각형 PAB에서 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(0+8)^2+(15-0)^2}=17$로 일정하므로

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때

삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.



직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-8}+\frac{y}{15}=1$, $15x-8y+120=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $15x-8y+120=0$ 사이의 거리는

$\frac{|120|}{\sqrt{15^2+(-8)^2}}=\frac{120}{17}$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$\frac{120}{17}+6=\frac{222}{17}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot17\cdot\frac{222}{17}=111$

22 정답 $-\frac{131}{13}$

해설 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x+3y=13$ $\therefore 2x+3y-13=0$

$x^2+y^2+4x-2y+k=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=5-k$

직선 $2x+3y-13=0$과

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5-k$의 중심 $(-2, 1)$ 사이의

거리는 $\frac{|-4+3-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{13}}=\frac{14\sqrt{13}}{13}$

이때 직선과 원이 접하므로

$5-k=\left(\frac{14\sqrt{13}}{13}\right)^2$ $\therefore k=-\frac{131}{13}$

23 정답 -6

해설 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+10=(x-2)^2-2(x-2)$

$\therefore y=x^2-6x-2$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면

p, q는 이차방정식 $x^2-6x-2=ax$, 즉

$x^2-(a+6)x-2=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $p+q=a+6$

이때 선분 PQ의 중점이 원점이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{a+6}{2}=0$

$\therefore a=-6$

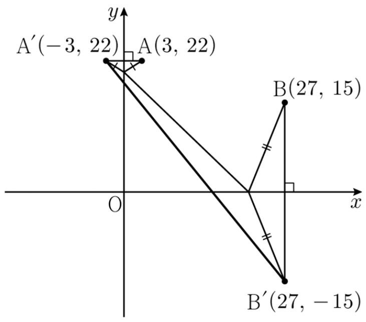
24 정답 2269

해설 좌표평면에서 두 점 A$(3, 22)$, B$(27, 15)$라 하고,

점 A를 y축에 대하여 대칭이동 시킨 점을 A$'$,

점 B를 x축에 대하여 대칭이동 시킨 점을 B$'$이라 하면

A$'(-3, 22)$, B$'(27, -15)$



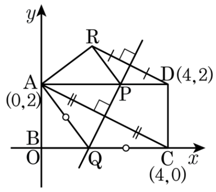
이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(27+3)^2+(-15-22)^2}\\&=\sqrt{2269}\end{aligned}$$

따라서 $l=\sqrt{2269}$ 이므로 $l^2=2269$

25 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 점 B 가 원점이 되도록 사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 나타내면



A$(0, 2)$, B$(0, 0)$, C$(4, 0)$, D$(4, 2)$

이 때, 두 점 A, C 와 두 점 D, R 는

각각 직선 PQ 에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 PQ 는 직선 AC 와 수직이고,

직선 AC 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 PQ 의 기울기는 2 이다.

또한, 직선 PQ 는 선분 AC 의 중점 $(2, 1)$ 을 지난다.

따라서, 직선 PQ 의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,

즉 $y=2x-3$

결국 점 D$(4, 2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여 대칭이동한 점이 R 이다.

이 때, R(a, b) 라고 하면

직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로

$\frac{b-2}{a-4}\cdot 2=-1$

$\therefore a+2b=8$ ……㉠

또한, 선분 DR 의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는

직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-3$

$\therefore 2a-b=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{8}{5}$, $b=\frac{16}{5}$

$\therefore$ R$\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

$\therefore \overline{BR}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

2학기 중간고사-3회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

내신대비

이름

01 정답 0

해설 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\mathrm{G}\left(\frac{a-3+13}{3}, \frac{0+2+b}{3}\right)$,

즉, $\mathrm{G}\left(\frac{a+10}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

이 점의 좌표가 $\mathrm{G}(1, 3)$이므로

$\frac{a+10}{3}=1$, $\frac{b+2}{3}=3$

따라서 $a=-7$, $b=7$이므로 $a+b=-7+7=0$

02 정답 10

해설 두 직선이 평행하므로 직선 $2x+y=5$ 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $2x+y=k$, 즉, $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이다.

즉, $\frac{|5-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로

$|5-k|=5$, $5-k=\pm 5$

$\therefore k=0$ 또는 $k=10$

이때 k는 양수이므로 $k=10$

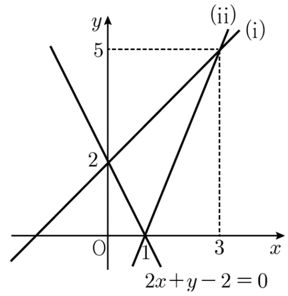
03 정답 ①

해설 $mx-y-3m+5=0$에서

$(x-3)m-(y-5)=0$ $\cdots$ ㉠

이므로 m의 값에 관계없이 점 $(3, 5)$를 지난다.

다음 그림과 같이 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여보면



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때

$-3m+3=0$

$\therefore m=1$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때

$-2m+5=0$

$\therefore m=\frac{5}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 m의 값의 범위는

$1<m<\frac{5}{2}$

04 정답 2

해설 점 $(-7, 3)$을 x축의 방향으로 11만큼 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4, -5)$

이 점이 직선 $y=ax-13$ 위에 있으므로

$-5=4a-13$

$\therefore a=2$

05 정답 74

해설 점 $(7, 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A}(7, -5)$
점 $(7, 5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(-7, 5)$
점 $(7, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}(5, 7)$
따라서 삼각형 ABC에서
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-7-7)^2+\{5-(-5)\}^2}=2\sqrt{74}$
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\{5-(-7)\}^2+(7-5)^2}=2\sqrt{37}$
$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(7-5)^2+(-5-7)^2}=2\sqrt{37}$
이때 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로
삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{37}\cdot 2\sqrt{37}=74$

06 정답 6

해설 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-3)}{1+2}, \frac{1\cdot 8+2\cdot(-5)}{1+2}\right)$, 즉
$\left(\frac{a-6}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로
$\frac{a-6}{3}=0$
$\therefore a=6$

07 정답 ①

해설 직선 $4x+2y+1=0$, 즉 $y=-2x-\frac{1}{2}$에
평행한 직선의 기울기는 -2이다.
따라서 점 $(4, -2)$를 지나고 기울기가 -2인
직선의 방정식은
$y-(-2)=-2(x-4)$
$\therefore y=-2x+6$
이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로
$4=-2a+6$
$\therefore a=1$

08 정답 ③

해설 원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고, 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+y^2=r^2$ ……㉠
이 원이 두 점 $(4, 3)$, $(-1, 2)$를 지나므로 두 점의 좌표를 각각 ㉠에 대입하면
$(4-a)^2+3^2=r^2$, $(-1-a)^2+2^2=r^2$
$\therefore a^2-8a+25=r^2$, $a^2+2a+5=r^2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=13$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는
$r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$
|다른 풀이|
원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓으면 점 $(a, 0)$에서 두 점 $(4, 3)$, $(-1, 2)$에 이르는 거리가 같으므로
$\sqrt{(a-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-8a+25=a^2+2a+5$, $-10a=-20$
$\therefore a=2$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(4, 3)$을 지나므로
$(4-2)^2+3^2=r^2$, $r^2=13$
$\therefore r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$

09 정답 10

해설 원의 방정식 계산하기
원점을 지나는 원의 방정식
$x^2+y^2+ax+by=0$ (a, b는 상수)가
두 점 $(6, 0)$, $(-4, 4)$를 지나므로
$\begin{cases} 36+6a=0 & \cdots ㉠ \\ 32-4a+4b=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡에 의하여 $a=-6$, $b=-14$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-14y=0$
$(x-3)^2+(y-7)^2=58$
이때 원의 중심의 좌표는 $(3, 7)$이다.
$\therefore p+q=10$

10 정답 ①

해설 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)+(y-2)-k+1=0$

$\therefore\ kx+y-km-k-1=0$

이 직선이 직선 $2x+y-2=0$과 일치하므로

$k=2,\ -km-k-1=-2$

따라서 $k=2,\ m=-\dfrac{1}{2}$이므로

$km=-1$

11 정답 ②

해설 점 $(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(2,\ a)$이고, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,\ -a)$이므로

$(2,\ -a)=(b,\ 3)$

따라서 $a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

12 정답 ①

해설 좌표평면에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \dfrac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)=(3,\ -2)$

이다.

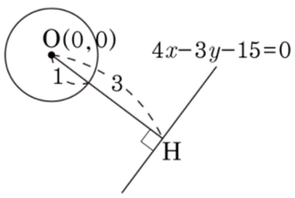
점 $(3,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-2=6+k$

$\therefore\ k=-8$

13 정답 ①

해설 원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 직선 $4x-3y-15=0$에 이르는 거리는 $\dfrac{|-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$이다.



따라서 직선에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{\mathrm{OH}}+$(원의 반지름의 길이)$=3+1=4$

(최솟값)$=\overline{\mathrm{OH}}-$(원의 반지름의 길이)$=3-1=2$

따라서 $m=4,\ n=2$이므로

$m-n=2$

14 정답 ③

해설 점 $(3,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y+4=m(x-3)$이다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y+4=m(x-3)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|-3m-4|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{5}$에서

$4m^2+24m+11=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{11}{2}$ 또는 $m=-\dfrac{1}{2}$

$y=mx-3m-4$가 y축과 만나는 점의 좌표는

$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{25}{2}\right),\ \mathrm{C}\left(0,\ -\dfrac{5}{2}\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\left\{\dfrac{25}{2}-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{45}{2}$

15 정답 16

해설 y축과 만나는 점 A의 좌표를 $(0,\ a)$, 점 B의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로

$\sqrt{(0-0)^2+(a-b)^2}=10$

$(a-b)^2=100$ $\cdots$ ㉠

두 점 A, B의 y좌표는 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입하여 얻은 이차방정식 $y^2+6y-k=0$의 두 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-6,\ ab=-k$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에 대입하면

$100=(-6)^2+4k$

$\therefore\ k=16$

16 정답 1

해설 직선 l의 방정식은

$12x+5y-8=0$

원 $(x-5)^2+y^2=16$의 중심 $(5,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리를 원의 반지름의 길이 4와 비교하면

$\dfrac{|60+0-8|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{52}{13}=4$

따라서 직선 l과 원 $(x-5)^2+y^2=16$은 한 점에서 접하므로 교점의 개수는 1이다.

17 정답 17

해설 원 $x^2+y^2=r^2$위의 점 $(a,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$ax+y=r^2$, $ax+y-r^2=0$

$\therefore\ k(ax+y-r^2)=x-\dfrac{1}{3}y+b$

$k=\dfrac{1}{a}$ 이므로

$x+\dfrac{1}{a}y-\dfrac{r^2}{a}=x-\dfrac{1}{3}y+b$

$\therefore\ a=-3$

점 $(-3,\ 1)$를 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면 $r^2=10$

$-\dfrac{10}{-3}=b$이므로 $b=\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ a+3b+r^2=(-3)+10+10=17$

18 정답 5

해설 직선 $5x-7y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$5(-x)-7(-y)+4=0$

$5x-7y-4=0$

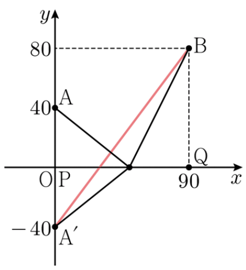
이 직선이 원의 중심인 점 $(a,\ 3)$을 지날 때 원의 넓이를 이등분하므로

$5a-7\cdot3-4=0,\ a=5$

19 정답 150 m

해설 다음 그림과 같이 점 P가 원점, 직선 PQ가 x축, 직선 AP가 y축이 되도록 좌표평면을 잡으면

$\mathrm{A}(0,\ 40)$, $\mathrm{B}(90,\ 80)$



점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면 $\mathrm{A'}(0,\ -40)$

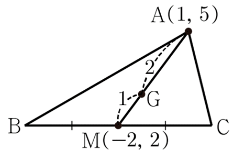
구하는 최단 거리는 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(90-0)^2+(80+40)^2}=150$

따라서 소가 움직이는 최단 거리는 150 m이다.

20 정답 ①

해설 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 하고 △ABC의 무게중심을 G라 하면 G는 $\overline{\mathrm{AM}}$을 2 : 1로 내분하는 점이다.



즉, 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}=-1$

$y=\dfrac{2\cdot2+1\cdot5}{2+1}=3$

따라서 무게중심의 좌표는 $(-1,\ 3)$이다.

21 정답 −15

해설 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5\ \therefore\ x+2y-5=0$ $\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$ $\cdots$ ㉡

직선 ㉠과 원 ㉡의 중심 $(-1,\ -2)$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로

$5-k=(2\sqrt{5})^2$ $\quad\therefore\ k=-15$

22 정답 120

해설 원점 O와 직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1$, 즉 $x+2y-6=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 정삼각형 ABC의

넓이가 최소일 때의 높이는 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

넓이가 최대일 때의 높이는 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이의 최솟값과 최댓값의 비는

$\dfrac{\sqrt{5}}{5}:\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$, 즉 $1:11$이므로

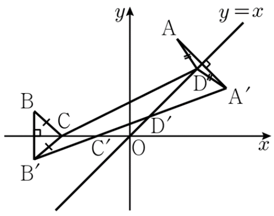
넓이의 최솟값과 최댓값의 비는 $1^2:11^2$, 즉 $1:121$

따라서 $a=1$, $b=121$이므로

$\therefore\ b-a=121-1=120$

23 정답 ③

해설



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(4,\ 2)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-4,\ -1)$

$\overline{AD}=\overline{A'D},\ \overline{BC}=\overline{B'C}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}&=\overline{A'D}+\overline{DC}+\overline{CB'}\\&\geq \overline{A'D'}+\overline{D'C'}+\overline{C'B'}\\&=\overline{A'B'}\\&=\sqrt{\{(-4)-4\}^2+\{(-1)-2\}^2}\\&=\sqrt{73}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}$의 최솟값은 $\sqrt{73}$ 이다.

24 정답 ⑤

해설 점 A를 원점, 두 직선 AB, AD를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면 위에 정사각형 ABCD를 놓으면

점 P는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

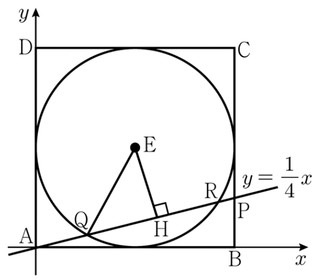
$\overline{AB}:\overline{BP}=4:1$이다.

즉, 직선 AP의 기울기가 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{4}$이므로

직선 AP의 방정식은 $y=\dfrac{1}{4}x$이다.

다음 그림과 같이 원의 중심을 E,

점 E에서 직선 $y=\dfrac{1}{4}x$, 즉 $x-4y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 8이므로

점 E의 좌표는 $(4,\ 4)$이고,

$$\overline{EH}=\frac{|4-4\cdot 4|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{12}{\sqrt{17}}=\frac{12\sqrt{17}}{17}$$

이때 $\overline{EQ}=4$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{QH}&=\sqrt{\overline{EQ}^2-\overline{EH}^2}\\&=\sqrt{4^2-\left(\frac{12\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\sqrt{16-\frac{144}{17}}\\&=\frac{8\sqrt{34}}{17}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{QR}=2\overline{QH}=\frac{16\sqrt{34}}{17}$$

25 정답 ③

해설 이차함수 $y=(x-k)^2-3$의 그래프와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로

$(x-k)^2-3=6$, $(x-k)^2=9$

$\therefore$ $x=k-3$ 또는 $x=k+3$

따라서 $\mathrm{A}(k-3,\ 6)$, $\mathrm{B}(k+3,\ 6)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=(k+3)-(k-3)=6$

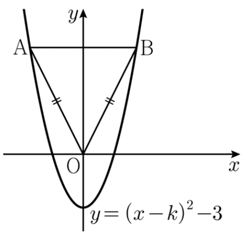
삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되는 경우는

(ⅰ) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 경우

$\sqrt{(k-3)^2+6^2}=\sqrt{(k+3)^2+6^2}$

$(k-3)^2=(k+3)^2$

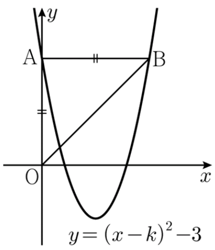
$\therefore$ $k=0$



(ⅱ) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 경우

$\sqrt{(k-3)^2+6^2}=6$, $(k-3)^2=0$

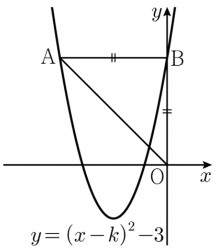
$\therefore$ $k=3$



(ⅲ) $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 경우

$\sqrt{(k+3)^2+6^2}=6$, $(k+3)^2=0$

$\therefore$ $k=-3$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $n=3$, $M=3$이므로

$n+M=6$

실시일자	-	내신대비	이름
25문제 / DRE수학			

2학기 중간고사-4회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

01 정답 ③

해설 점 $(4,\ 2)$와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\cdot4+4\cdot2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

02 정답 ④

해설 $\triangle$ABC의 무게중심 $G(-3,\ ab)$는

$\left(\frac{a-1+b}{3},\ \frac{3+10-1}{3}\right)$이므로

$\frac{a-1+b}{3}=-3,\ \frac{3+10-1}{3}=ab$이다.

따라서 $a+b=-8$이고 $ab=4$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-8)^2-2\cdot4$

$=64-8=56$

$\therefore\ a^2+b^2=56$

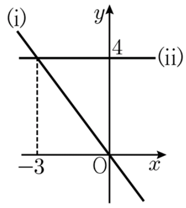
03 정답 2

해설 $(m+1)x+y-(1-3m)=0$에서

$(x+3)m+(x+y-1)=0$ ⋯ ㉠

$x+3=0,\ x+y-1=0$에서 $x=-3,\ y=4$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 4)$를 지난다. 다음 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$3m-1=0$

$\therefore\ m=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 x축에 평행할 때,

$m+1=0$

$\therefore\ m=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{1}{3}$

따라서 정수 m은 $-1,\ 0$의 2개다.

04 정답 2

해설 직선 $x+3y-5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+3\cdot(-y)-5=0$

$\therefore\ x-3y-5=0$

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y+k)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-1,\ -k)$를 지난다. 즉,

$-1+3k-5=0$

$\therefore\ k=2$

05 **정답** 24

해설 점의 대칭이동과 평행이동의 성질을 이용하여 점의 좌표를 계산한다.
점 $(5,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4,\ 5)$이다.
점 $(4,\ 5)$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4,\ 6)$이다.
따라서 $a=4,\ b=6$이므로
$ab=24$

06 **정답** ④

해설 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}(4,\ -5)$에 대하여
선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{3\cdot 4+2\cdot a}{3+2},\ \dfrac{3\cdot(-5)+2\cdot 0}{3+2}\right)$
$=\left(\dfrac{12+2a}{5},\ -3\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $\dfrac{12+2a}{5}=0$에서
$a=-6$
따라서 점 A의 좌표는 $(-6,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{4-(-6)\}^2+(-5-0)^2}$
$=\sqrt{125}$
$=5\sqrt{5}$

07 **정답** ②

해설 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2),\ \mathrm{Q}(2,\ 3),\ \mathrm{R}(6,\ 1)$의 좌표를 각각 대입하면
$-A+2B+C+5=0$,
$2A+3B+C+13=0$,
$6A+B+C+37=0$
위의 세 식을 연립하면
$A=-4,\ B=4,\ C=-17$
즉, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+4y-17=0$
$\therefore\ (x-2)^2+(y+2)^2=25$
이때, 중심의 좌표는 $(2,\ -2)$이고 반지름의 길이는 5이다.
따라서 $a=2,\ b=-2,\ r=5$이므로
$abr=2\cdot(-2)\cdot 5=-20$

08 **정답** ⑤

해설 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2
원 $x^2+y^2=4$에 접하는 기울기가 -2인
직선의 방정식은 $y=-2x\pm 2\sqrt{(-2)^2+1}$
$\therefore\ y=-2x\pm 2\sqrt{5}$
따라서 구하는 직선의 y절편은 $\pm 2\sqrt{5}$

09 **정답** 2

해설 직선 $x-2y-7=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은
$-x+2y-7=0\quad \therefore\ x-2y+7=0$
직선 l_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은
$y-2x+7=0\qquad \therefore\ y=2x-7$
따라서 직선 l_2의 기울기는 2이다.

10 **정답** $\dfrac{1}{3}$

해설 $2ax-(a+1)y+14=0,\ (a-1)x+ay-7=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$2ax-(a+1)y+14+k\{(a-1)x+ay-7\}=0$ (k는 실수)로 놓으면
$(2a+ak-k)x+(ak-a-1)y+14-7k=0\ \cdots ㉠$
직선 ㉠이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로
$2a+ak-k-ak+a+1+14-7k=0$
$\therefore\ 3a-8k+15=0\quad \cdots ㉡$
직선 ㉠의 기울기가 -1이므로
$-\dfrac{2a+ak-k}{ak-a-1}=-1$
$2a+ak-k=ak-a-1$
$\therefore\ 3a-k+1=0\quad \cdots ㉢$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{3}$

11 정답 ③

해설 각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 P (x, y)

에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 에 이르는

거리는 같다. $|y|=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y=\pm\frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y=\frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

12 정답 1

해설 $x^2+y^2+4x+2ay+3-b=0$에서

$(x+2)^2+(y+a)^2=a^2+b+1$

이 원의 중심의 좌표가 $(-2, -a)$이고

x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-2|=|-a|=\sqrt{a^2+b+1}$

$|-2|=|-a|$에서 $a=2$ $(\because a>0)$

$|-2|=\sqrt{a^2+b+1}$ 의 양변을 제곱하면

$4=a^2+b+1$

$a=2$를 위의 식에 대입하면 $4=4+b+1$

$\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

13 정답 3

해설 $x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=1$

원의 중심 $(2, -3)$과 직선 $3x+4y+16=0$의 거리는

$\frac{|3\cdot2+4\cdot(-3)+16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

원의 반지름의 길이가 1이므로

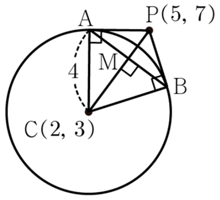
$M=2+1=3$, $m=2-1=1$

$\therefore Mm=3\cdot1=3$

14 정답 $\frac{24}{5}$

해설 원의 중심 $C(2, 3)$과 점 $P(5, 7)$ 사이의 거리는

$\overline{CP}=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$



$\triangle CAP$는 직각삼각형이므로

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{AB}$와 $\overline{CP}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{CP}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{CA}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{AM}$에서

$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\overline{AM}$

$\therefore \overline{AM}=\frac{12}{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=\frac{24}{5}$

15 정답 14

해설 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=100$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-p)^2+(-y-q)^2=100$

$\therefore (x-p)^2+(y+q)^2=100$

이 원을 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-6-p)^2+(y+q)^2=100$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|6+p|=|-q|=10$

$\therefore p=4, q=10$ $(\because p>0, q>0)$

$\therefore p+q=14$

16 정답 ②

해설 원 C의 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

직선 l의 방정식은 $x-2my+4=0$

직선 l이 원 C의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(2, 3)$을 지나야 하므로

$2-6m+4=0$

$\therefore m=1$

17 정답 10

해설 원 $x^2+y^2-4x+1=0$에서
$(x-2)^2+y^2=3$
이 원을 원점에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+y^2=3$
이때 직선 $y=5x+k$가
원 $(x+2)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분하려면
직선이 원의 심 $(-2, 0)$을 지나야 하므로
$k=10$

18 정답 46

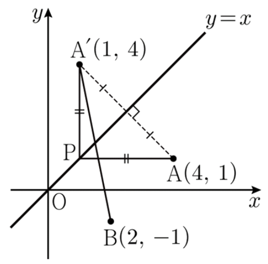
해설 원 $x^2+y^2=169$ 위의 점 $(-12, a)$에서의 접선의 방정식은
$-12x+ay=169$
이 접선이 점 $(3, b)$를 지나므로
$-36+ab=169$
$\therefore ab=205$ $\cdots$ ㉠
또, 점 $(-12, a)$는 원 $x^2+y^2=169$ 위의 점이므로
$144+a^2=169$
$\therefore a=5$ ($\because a>0$)
$a=5$를 ㉠에 대입하면
$b=41$
$\therefore a+b=46$

19 정답 13

해설 직선 $2x-5y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-2x+5y+a=0$
$\therefore 2x-5y-a=0$ $\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=29$와 만나지 않으므로
$\dfrac{|-2-15-a|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}>\sqrt{29}$, $|a+17|>29$
$a+17<-29$ 또는 $a+17>29$
$\therefore a<-46$ 또는 $a>12$
따라서 자연수 a의 최솟값은 13이다.

20 정답 ①

해설 점 $\mathrm{A}(4, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $\mathrm{A}'(1, 4)$



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$
$\geq \overline{\mathrm{A'B}}$
$=\sqrt{(2-1)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{26}$

21 정답 14

해설 근과 계수의 관계를 활용하여 문제해결하기
곡선 $y=x^2-8x+1$과 직선 $y=2x+6$의
두 교점 A, B의 좌표를 각각
$(\alpha, 2\alpha+6)$, $(\beta, 2\beta+6)$이라 하면
α, β는 $x^2-10x-5=0$의 서로 다른 두 실근이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=10$
이때 점 (a, b)가 삼각형 OAB의 무게중심으로
$a=\dfrac{\alpha+\beta+0}{3}$, $b=\dfrac{(2\alpha+6)+(2\beta+6)+0}{3}$
$\therefore a+b=\alpha+\beta+4=14$

22 정답 ④

해설 두 점 $A(0, 12)$, $B(4, 0)$을 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot4+1\cdot0}{3+1}, \dfrac{3\cdot0+1\cdot12}{3+1}\right)$이므로

$P(3, 3)$이다.

이때 점 $P(3, 3)$이 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 위의 점이므로

$3^2+3^2+3a+3b=0$

$a+b=-6$ $\cdots$ ㉠

원의 중심과 점 P를 지나는 직선을 l이라 하면, 직선 l은 직선 AB와 서로 수직이고 직선 AB의 기울기가 -3이므로 직선 l의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.

이때 직선 l이 점 $P(3, 3)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}(x-3)+3$

또, 원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by=0$을 정리하면

$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}$

이때 원의 중심 $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$가 직선 l 위의 점이므로

$-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{a}{2}-3\right)+3$

$a-3b=12$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a-b=3$

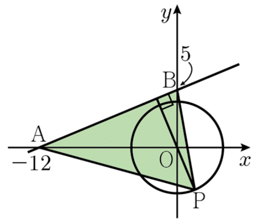
23 정답 56

해설 삼각형 PAB에서 $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(0+12)^2+(5-0)^2}=13$으로 일정하므로

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때

삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.



직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{-12}+\dfrac{y}{5}=1$, $5x-12y+60=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $5x-12y+60=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|60|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{60}{13}$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$\dfrac{60}{13}+4=\dfrac{112}{13}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot\dfrac{112}{13}=56$

24 정답 ④

해설 제1사분면에 있는 원 C의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 원 C는 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ ⋯ ㉠

원의 중심 $(a,\ b)$는 직선 $x+y-5=0$ 위에 있으므로

$a+b-5=0$

$\therefore b=5-a$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-a)^2+(y-5+a)^2=a^2$ ⋯ ㉢

이때 x축에 의하여 잘린 원 C의 현은 $y=0$일 때이므로 ㉢에 $y=0$을 대입하면

$x^2-2ax+a^2+a^2-10a+25=a^2$

$\therefore x^2-2ax+a^2-10a+25=0$ ⋯ ㉣

x에 대한 이차방정식 ㉣의 서로 다른 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 잘린 현의 길이가 6이므로 $|\alpha-\beta|=6$이다.

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2-10a+25$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$36=4a^2-4a^2+40a-100$

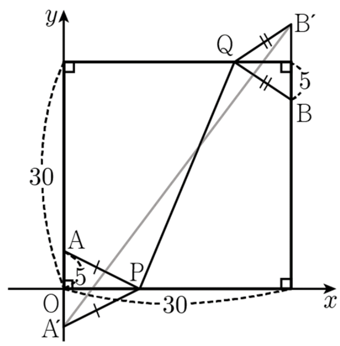
$40a=136$

$\therefore a=\dfrac{17}{5}$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 $\dfrac{17}{5}$이다.

25 정답 50 m

해설 다음 그림과 같이 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내고 처음 토끼의 위치를 A, 움직인 후의 토끼의 위치를 B라 하면



$A(0,\ 5),\ B(30,\ 25)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$A'(0,\ -5)$

점 B를 직선 $y=30$에 대하여 대칭이동한 점은

$B'(30,\ 35)$

이때 토끼가 x축의 벽면을 거치는 지점을 P, x축에 대하여 평행한 벽면을 거치는 지점을 Q라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(30-0)^2+(35+5)^2}\\&=50\end{aligned}$$

따라서 토끼가 움직인 최단 거리는 50 m이다.

2학기 중간고사-5회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

내신대비

이름

01 정답 ⑤

해설 서로 평행한 두 직선
$3x-y+5=0$, $3x-y-5=0$사이의 거리는
직선 $3x-y+5=0$ 위의 점 $(0, 5)$ 와
직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
구하는 거리는
$\dfrac{|0-5-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

02 정답 5

해설 $|10-5|=5$

03 정답 ④

해설 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
$(1-2)^2+(a-5)^2=(1+1)^2+(a-4)^2$
$a^2-10a+26=a^2-8a+20$
$\therefore a=3$

04 정답 ③

해설 세 점 $A(2, 5)$, $B(-3, 2)$, $C(a, b)$의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{2+(-3)+a}{3}, \dfrac{5+2+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a-1}{3}, \dfrac{b+7}{3}\right)$
이 좌표가 $(0, 2)$이므로
$\dfrac{a-1}{3}=0$, $\dfrac{b+7}{3}=2$
$\therefore a=1, b=-1$
따라서 $a+b=0$

05 정답 ③

해설 ㄱ. 직선 m에 점 $(-1, 1)$을 대입하면 성립 (참)
ㄴ. $k=1$일 때, 직선 l과 m의 기울기의 곱이 -1이므로 수직 (참)
ㄷ. 두 직선 l과 m이 제1사분면에서 만나려면 직선 m이 $(2, 0)$과 $(0, 2)$ 사이를 지나야 하므로
기울기 k의 범위는 $-\dfrac{1}{3}<k<1$
즉, 정수 k의 개수는 1 (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 정답 ①

해설 점 P의 좌표를 (a, b)라 하자.
점 P를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$(a+3, b-2)$
이 점의 좌표가 $(3, -5)$이므로
$a+3=3$, $b-2=-5$
$\therefore a=0, b=-3$
따라서 점 P의 좌표는 $(0, -3)$이다.

07 정답 3

해설 직선 $y=2x+k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y=-2x+k$, 즉 $y=2x-k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k=-3$
$\therefore k=3$

08 정답 4

해설 점 $(k, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-k, 2)$
점 $(k, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(2, k)$
선분 PQ의 길이가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(2+k)^2+(k-2)^2}=2\sqrt{10}$
$\sqrt{2k^2+8}=2\sqrt{10}$
양변을 제곱하면 $2k^2+8=40$
$k^2=16$
$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

09 정답 ③

해설 선분의 내분을 이해하여 선분의 길이를 구한다.
두 점 $A(a, 0)$, $B(2, -4)$에 대하여
선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{3\cdot 2+1\cdot a}{3+1}, \dfrac{3\cdot(-4)+1\cdot 0}{3+1}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{6+a}{4}, -3\right)$
이 점이 y축 위에 있으므로 $\dfrac{6+a}{4}=0$에서
$a=-6$
따라서 점 A의 좌표는 $(-6, 0)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-6)\}^2+(-4-0)^2}$
$=\sqrt{80}$
$=4\sqrt{5}$

10 정답 -1

해설 $\dfrac{a}{-4}=\dfrac{-1}{(a-3)}\neq\dfrac{-3}{3}$ 에서
$a^2-3a-4=0$, $a\neq 4$
$(a+1)(a-4)=0$, $a\neq 4$
$\therefore a=-1$ ($\because a\neq 4$)

11 정답 ①

해설 직선 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{12}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는
각각 $(5, 0)$, $(0, -12)$
이 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(5-0)^2+(0-(-12))^2}=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-5)^2+y^2=169$

12 정답 ②

해설 세 집의 위치를 좌표로 나타내면
$A(1, 4)$, $B(4, 2)$, $C(2, -1)$
공원의 위치를 $P(a, b)$라 하면
$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-4)^2=(a-4)^2+(b-2)^2$
$\therefore 6a-4b-3=0$ $\cdots$ ㉠
$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-4)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$
$\therefore a-5b+6=0$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$
따라서 공원의 위치를 좌표로 나타내면 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

13 정답 ③

해설 $3x-4y-12=0$ 에서
$y=\dfrac{3}{4}x-3$ $\cdots\cdots$㉠
이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로
기울기가 $-\dfrac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은
$y=-\dfrac{4}{3}x+b$ $\cdots\cdots$㉡
로 놓을 수 있다.
㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,
원의 중심 $(-3, 2)$ 에서 이 직선까지의 거리가
반지름의 길이와 같으므로
$\dfrac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$, $|3b+6|=5$, $3b+6=\pm 5$
$3b=-1$ 또는 $3b=-11$
$\therefore b=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $b=-\dfrac{11}{3}$
이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ 또는 $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{11}{3}$

14 정답 -4

해설 평행이동 $(x,\ y) \to (x-1,\ y-4)$에 의하여
직선 $3x+ay+b=0$은
$3(x+1)+a(y+4)+b=0$으로 옮겨진다.
이 식을 정리하면
$3x+ay+4a+b+3=0$이다.
이 식은 $3x+y+2=0$과 같은 식이므로
계수를 비교하면
$a=1,\ 4a+b+3=2$
$\therefore\ a=1,\ b=-5$
$\therefore\ a+b=-4$

15 정답 ②

해설 두 점 $A(1,\ 3),\ B(-2,\ -5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는
$\mathrm{P}\left(\dfrac{-2m+n}{m+n},\ \dfrac{-5m+3n}{m+n}\right)$
점 P가 직선 $x-y=1$위에 있으므로
$\dfrac{-2m+n}{m+n}-\dfrac{-5m+3n}{m+n}=1$
$3m-2n=m+n$
$\therefore\ 2m=3n$
비례식으로 나타내면 $m:n=3:2$
이 비례식을 만족하는 서로소인 자연수 $m,\ n$의 값은 $m=3,\ n=2$
$\therefore\ m-n=1$

16 정답 ③

해설 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(-1,\ a)$와 두 직선 사이의 거리가 서로 같으므로
$\dfrac{|-3-4a+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-4-3a-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$
$|-4a|=|-6-3a|,\ -4a=\pm(-6-3a)$
$\therefore\ a=6$ 또는 $a=-\dfrac{6}{7}$
따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $-\dfrac{36}{7}$이다.

17 정답 ③

해설 $x^2+y^2+2kx+6ky+20k-15=0$에서
$(x+k)^2+(y+3k)^2=10k^2-20k+15$
이 원의 중심의 좌표는 $(-k,\ -3k)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10k^2-20k+15}$이다.
원의 넓이가 최소가 되려면 반지름의 길이가 최소가 되어야 하므로
$\sqrt{10k^2-20k+15}=\sqrt{10(k-1)^2+5}$에서
$k=1$일 때 원의 반지름의 길이가 최소가 되고 그 때의 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ -3)$이다.

18 정답 ③

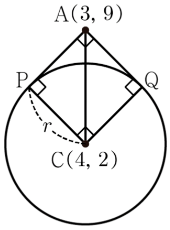
해설 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로
$k=2$
이때 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로
$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$
$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 넓이의 합은
$\pi\cdot 1^2+\pi\cdot 5^2=26\pi$이므로
$a=26$
$\therefore\ a+k=28$

19 정답 10

해설 $x^2+y^2+2x-8y+12=0$에서
$(x+1)^2+(y-4)^2=5$
원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-1-8-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4\sqrt{5}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x-2y-11=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$4\sqrt{5}-\sqrt{5}\le d\le 4\sqrt{5}+\sqrt{5}$
$\therefore\ 3\sqrt{5}\le d\le 5\sqrt{5}$
따라서 정수 d는 $7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 10이다.

20 정답 5

해설 원의 중심을 $\mathrm{C}(4,\ 2)$, 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.



따라서 직각삼각형 CAP에서

$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2$이므로

$(3-4)^2+(9-2)^2=r^2+r^2$

$2r^2=50,\ r^2=25$

$\therefore\ r=5\ (\because\ r>0)$

21 정답 ④

해설 직선 $4x-3y+7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4y-3x+7=0$

$\therefore\ 3x-4y-7=0$

이 직선을 평행이동 $(x,\ y)\to(x+a,\ y+4)$에 의하여 옮긴 직선의 방정식은

$3(x-a)-4(y-4)-7=0$

$\therefore\ 3x-4y-3a+9=0$

이 직선이 직선 $3x-4y-12=0$과 일치하므로

$-3a+9=-12$

$\therefore\ a=7$

22 정답 -5

해설 원 $(x-2a)^2+(y+5)^2=16$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-2a)^2+(y+5)^2=16$

$\therefore\ (x+2a)^2+(y+5)^2=16$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y+2a)^2+(x+5)^2=16$

$\therefore\ (x+5)^2+(y+2a)^2=16$

이때 이 원의 넓이가 직선 $4x+3y-10=0$에 의하여 이등분되려면 이 직선이 원의 중심 $(-5,\ -2a)$를 지나야 하므로

$-20-6a-10=0,\ 6a=-30$

$\therefore\ a=-5$

23 정답 2

해설 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+3=-(x+2)^2+6(x+2)$

$\therefore\ y=-x^2+2x+5$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면

p, q는 이차방정식

$-x^2+2x+5=ax$, 즉 $x^2-(2-a)x-5=0$의

두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=2-a$

선분 PQ의 중점이 원점이므로

$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{2-a}{2}=0$

$\therefore\ a=2$

24 정답 25

해설 $x^2+y^2-8x-4y-30=0$에서

$(x-4)^2+(y-2)^2=50$

원의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(4,\ 2)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 원의 지름일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 최대이므로

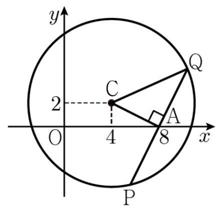
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최댓값은 $10\sqrt{2}$

또한, 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CA}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 최소이고

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(8-4)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{CQ}}=5\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 CAQ에서

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{30}$



따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{30}$

$\therefore\ 2\sqrt{30}\le\overline{\mathrm{PQ}}\le 10\sqrt{2}$

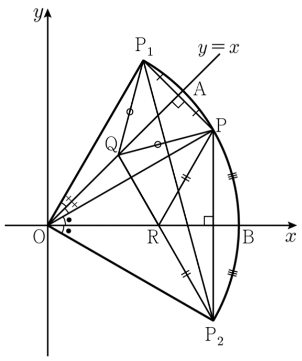
이때 $10<2\sqrt{30}<11,\ 14<10\sqrt{2}<15$이므로

$M=14,\ m=11$

$\therefore\ M+m=25$

25 정답 ①

해설 점 O를 원점, 반직선 OB를 x축의 양의 방향으로 잡고 점 A가 제1사분면에 있도록 하는 부채꼴 OAB를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 45° 이므로 직선 OA를 나타내는 방정식은 $y=x$이다.
점 P를 직선 OA, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P_1}$이라 하고, 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P_2}$라 하면 선분 OA 위의 점 Q와 선분 OB 위의 점 R에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{P_1Q}}$, $\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RP_2}}$

이므로 삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{P_1Q}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP_2}}\ge\overline{\mathrm{P_1P_2}}$

즉, 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 $\mathrm{P_1P_2}$의 길이이다.
이때 점 P가 호 AB를 삼등분하는 점 중 하나이고, 점 P를 직선 $y=x$와 x축에 대하여 대칭이동한 점이 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$이므로

$$\angle\mathrm{P_1OA}=\angle\mathrm{AOP}=\left(\frac{1}{3}\cdot45\right)^\circ=15^\circ$$

$$\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{BOP_2}=\left(\frac{2}{3}\cdot45\right)^\circ=30^\circ$$

그러므로

$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{P_1OP_2}\\&=(\angle\mathrm{P_1OA})+(\angle\mathrm{AOP})+(\angle\mathrm{POB})+(\angle\mathrm{BOP_2})\\&=15^\circ+15^\circ+30^\circ+30^\circ=90^\circ\end{aligned}$$

이고 삼각형 $\mathrm{P_1OP_2}$는 $\overline{\mathrm{OP_1}}=\overline{\mathrm{OP_2}}=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$ 인 직각이등변삼각형이다.
따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값인 선분 $\mathrm{P_1P_2}$의 길이는

$$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\sqrt{2}\cdot\overline{\mathrm{OP_1}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$$