공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-2회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 세 집합 $A=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 8의 약수$\}$, $C=\{x\,|\,x$는 12의 약수$\}$에 대하여 $A\cap(B\cup C)$는?

① $\{4,\ 8\}$　② $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
③ $\{1,\ 2,\ 6\}$　④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

02 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 미만의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$, $A-B=\{1,\ 4,\ 6,\ 9\}$, $(A\cup B)^C=\{3,\ 8\}$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

03 두 집합 $X=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 상수함수일 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

04 역함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(1)=4$이고 $f(3x+1)=h(x)$라 할 때, $h^{-1}(1)$의 값을 구하시오.

05 함수 $y=\dfrac{ax+3}{x-2b}$의 그래프가 두 직선 $y=-x+3$과 직선 $y=x+4$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① $-\dfrac{7}{8}$　② $-\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ $\dfrac{5}{8}$

06 함수 $y=-\sqrt{x-2}+1$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
ㄴ. 그래프가 x축과 만나는 점은 $(1,\ 0)$이다.
ㄷ. 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 정의역 $\{x \mid x > 2\}$에서 정의된 두 함수

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{3x-1}$에 대하여

$(g \circ f^{-1})^{-1}(2\sqrt{2})$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

08 20 이하의 자연수 k에 대하여
두 집합 $A = \{x \mid x$는 k의 양의 약수$\}$, $B = \{2, 6, 7\}$이 있다. $n(A \cap B) = 2$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $A \cap B = \{2, 7\}$이면 $k = 14$이다.
ㄴ. $A \cap B = \{2, 6\}$을 만족하는 k의 최댓값은 12이다.
ㄷ. 집합 $A - B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되는 모든 k의 값의 합은 18이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 두 집합 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}$
$B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

(가) $A \cup B = \{x \mid x$는 실수$\}$
(나) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 5\}$

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

10 다음은 어느 고등학교의 학생 120명을 대상으로 세 곳의 교육여행 장소인 경상도, 전라도, 제주도 중에서 가고 싶은 장소를 선택하는 설문조사를 한 결과이다.

(가) 경상도를 선택한 학생은 40명, 전라도를 선택한 학생은 90명이다.
(나) 경상도와 전라도 중에서 어느 곳도 선택하지 않은 학생은 10명이다.
(다) 제주도만 선택한 학생은 5명이다.

경상도와 전라도를 모두 선택한 학생은 a명이고, 3개의 장소 중에서 어느 것도 선택하지 않은 학생은 b명일 때, ab의 값을 구하시오.

11 다음은 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.'를 증명한 것이다.

주어진 명제의 대우를 구하면
'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{(가)}$'이다.
n이 3의 배수가 아니므로
$n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m은 자연수)에서
$n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$
이때 $3m^2 \pm 2m$이 $\boxed{(다)}$이므로 n^2은 $\boxed{(라)}$
따라서 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3의 배수가 아니다.
② (나) 1
③ (다) 자연수
④ (라) 3의 배수이다.
⑤ (마) 참

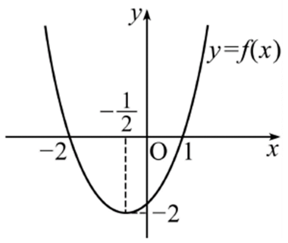
12 $X=\{x|x \geq a$인 실수$\}$이고, $f(x)=x^2-6x$로 정의되는 함수 $f: X \to X$가 일대일대응이 될 때, 상수 a의 값은?

① 3 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 10

13 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족할 때, 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $f(3)=5$
(나) $x_1 \in X$, $x_2 \in X$일 때, $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다.

14 [2006년 3월 고2 17번]
그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ 0 ⑤ 1

15 [2015년 6월 고2 이과 9번/3점]
일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $y=f(2x+3)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

16 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-3}$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나고, $f(x)=f^{-1}(x)$가 성립할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

17 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}+2$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

18 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 집합 $B=\{x|x$는 10의 약수$\}$와 서로소인 집합을 각각 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$이라 하고, 집합 X_i의 모든 원소의 합을 $S(X_i)$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$이라 하자. 이때 $S(X_1)+S(X_2)+S(X_3)+\cdots+S(X_n)$의 값은? (단, $X_i \neq \varnothing$)

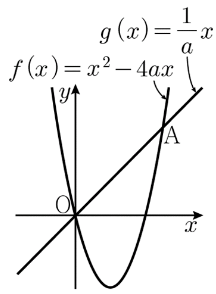
① 120 ② 130 ③ 140
④ 150 ⑤ 160

19 실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가
$p : x < a-1$, $q : 3x-2=13$,
$r : x^2-x-2=0$일 때, 명제 $q \rightarrow p$는 거짓이고, 명제 $r \rightarrow p$는 참이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

20 양수 a, b에 대하여 $ab+a+b=15$일 때, ab의 최댓값은?

① 4 ② 9 ③ 16
④ 25 ⑤ 36

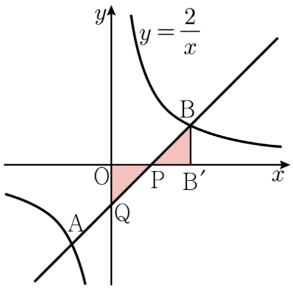
21 다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-4ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 B라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하자. 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

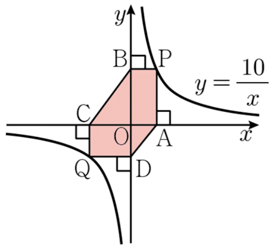
22 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 두 점

$\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B'이라 할 때, 두 삼각형 POQ, $\mathrm{PB'B}$의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$　② $\sqrt{2}+1$　③ $\sqrt{2}-1$
④ $2\sqrt{2}+2$　⑤ $2\sqrt{2}-2$

23 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 제1사분면 위에 있는 점을 P, 제3사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값을 구하시오.



24 함수 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=kx+3k+4$ $(k\neq 0)$의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-3<k<-1$
② $-3\leq k<-1$
③ $-3<k\leq -1$
④ $k<-3$ 또는 $k>-1$
⑤ $k<-3$ 또는 $k\geq -1$

25 [2019년 11월 고1 21번/4점]

전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의 부분집합

$$A_k=\{x|x(y-k)=30,\ y\in U\},$$

$$B=\left\{x\left|\frac{30-x}{5}\in U\right.\right\}$$

에 대하여 $n(A_k\cap B^C)=1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-2회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 ④	02 14	03 72
04 1	05 ①	06 ④
07 ③	08 ④	09 ②
10 100	11 ④	12 ④
13 12	14 ②	15 ④
16 9	17 2	18 ⑤
19 3	20 ②	21 ④
22 ⑤	23 30	24 ②
25 ②		

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-2회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

공통수학2

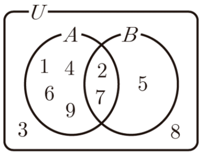
이름

01 정답 ④

해설 조건제시법을 원소나열법으로 고쳐 보면
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$,
$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
$B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$가 된다.
집합 A와의 공통 원소를 찾으면 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이다.

02 정답 14

해설 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $B=\{2,\ 5,\ 7\}$이므로
모든 원소의 합은 14이다.

03 정답 72

해설 두 집합 $X=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 상수함수이므로
$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=a\ (a\in Y)$라 하면
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 최댓값은
$a=11$일 때이므로
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=11+11+11+11$
$=44$
또, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 최솟값은
$a=7$일 때이므로
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=7+7+7+7$
$=28$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$44+28=72$

04 정답 1

해설 $h^{-1}(1)=k$라 놓으면 $h(k)=1=f(3k+1)$
이때 f가 일대일 대응이고
$f^{-1}(1)=4$에서 $f(4)=1$이므로 $3k+1=4$
$k=1$
$\therefore\ h^{-1}(1)=1$

05 정답 ①

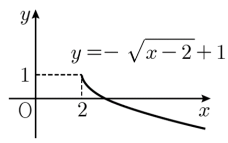
해설 $y=\dfrac{ax+3}{x-2b}=\dfrac{a(x-2b)+2ab+3}{x-2b}=\dfrac{2ab+3}{x-2b}+a$
이므로 점근선의 방정식은 $x=2b$, $y=a$
점근선의 교점 $(2b,\ a)$가 두 직선 $y=-x+3$,
$y=x+4$의 교점이므로 점을 두 직선에 대입하면
$a=-2b+3$, $a=2b+4$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{7}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$
$\therefore\ ab=\dfrac{7}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{7}{8}$

06 정답 ④

해설 ㄱ. $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)

ㄴ. $y=-\sqrt{x-2}+1$에 $y=0$을 대입하면
$0=-\sqrt{x-2}+1$
$\sqrt{x-2}=1$, $x-2=1$
$\therefore\ x=3$
따라서 함수 $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 점 $(3,\ 0)$에서 x축과 만난다. (거짓)

ㄷ. 다음 그림과 같이 $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 정답 ③

해설 $(g \circ f^{-1})^{-1}(2\sqrt{2}) = (f \circ g^{-1})(2\sqrt{2})$

$g^{-1}(2\sqrt{2}) = a$로 놓으면 $g(a) = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{3a-1} = 2\sqrt{2}$, $3a-1=8$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ (f \circ g^{-1})(2\sqrt{2}) = f(g^{-1}(2\sqrt{2}))$

$= f(3) = \dfrac{6+1}{3-2} = 7$

08 정답 ④

해설 ㄱ. $A \cap B = \{2, 7\}$이면 $2 \in A$, $7 \in A$

2와 7이 k의 양의 약수이려면 k는 14의 양의 배수이면서 20 이하의 자연수이어야 하므로

$k = 14$ (참)

ㄴ. $A \cap B = \{2, 6\}$이면 $2 \in A$, $6 \in A$

2와 6이 양의 약수이려면 k는 6의 양의 배수이면서 20 이하의 자연수이면 되므로 k의 최댓값은 18이다. (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $A \cap B = \{2, 7\}$일 때

$k = 14$이므로 $A = \{1, 2, 7, 14\}$

이때 $A - B$의 모든 원소의 합은

$1 + 14 = 15$이므로 홀수이다.

(ⅱ) $A \cap B = \{2, 6\}$일 때

$k = 6$ 또는 $k = 12$ 또는 $k = 18$이므로

$k = 6$일 때 $A = \{1, 2, 3, 6\}$

이때 $A - B$의 모든 원소의 합은

$1 + 3 = 4$이므로 짝수이다.

$k = 12$일 때 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

이때 $A - B$의 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 4 + 12 = 20$이므로 짝수이다.

$k = 18$일 때 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

이때 $A - B$의 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 9 + 18 = 31$이므로 홀수이다.

(ⅲ) $A \cap B = \{6, 7\}$일 때

이러한 20 이하의 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 집합 $A - B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되는 k의 값은 6, 12이므로 그 합은

$6 + 12 = 18$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 정답 ②

해설 $x^2 - 5x + 6 > 0$, $(x-2)(x-3) > 0$

$x < 2$ 또는 $x > 3$

$\therefore\ A = \{x \mid x < 2$ 또는 $x > 3\}$

이때 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$이 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

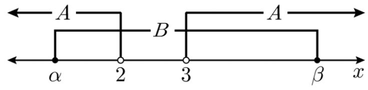
이때 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha \le \beta)$라 하면

$x^2 + ax + b \le 0$, $(x-\alpha)(x-\beta) \le 0$

$\alpha \le x \le \beta$

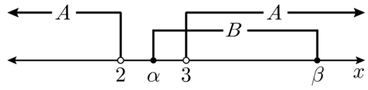
$\therefore\ B = \{x \mid \alpha \le x \le \beta\}$

(ⅰ) $A \cup B = \{x \mid x$는 실수$\}$이므로 다음 그림에서



$\therefore\ \alpha \le 2$, $\beta \ge 3$ ⋯ ㉠

(ⅱ) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \le 5\}$이므로 다음 그림에서



$\therefore\ 2 \le \alpha \le 3$, $\beta = 5$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha = 2$, $\beta = 5$

따라서 근과 계수의 관계에서

$a = -(\alpha + \beta) = -7$, $b = \alpha\beta = 10$

$\therefore\ a + b = -7 + 10 = 3$

10 정답 100

해설 학생 전체의 집합을 U, 경상도, 전라도, 제주도를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=120$, $n(A)=40$, $n(B)=90$,

$n(A^C\cap B^C)=10$, $n(C-(A\cup B))=5$이고,

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=120-n(A\cup B)=10$

$\therefore n(A\cup B)=110$

이때 경상도와 전라도를 모두 선택한 학생들의 집합은 $A\cap B$이므로 경상도와 전라도를 모두 선택한 학생의 수는

$a=n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=40+90-110=20$

한편, $n(C-(A\cup B))=5$에서

$n(C-(A\cup B))=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=n(A\cup B\cup C)-110$

$=5$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=5+110=115$

이때 3개의 장소 중에서 어느 것도 선택하지 않은 학생들의 집합은 $(A\cup B\cup C)^C$이므로

$b=n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=120-115=5$

따라서 $a=20$, $b=5$이므로

$ab=100$

11 정답 ④

해설 주어진 명제의 대우는

'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다.}}$'이다.

n이 3의 배수가 아니므로

$n=3m\pm\boxed{1}$ (m은 자연수)에서

$n^2=9m^2\pm6m+1=3(3m^2\pm2m)+1$

이때 $3m^2\pm2m$이 $\boxed{\text{자연수}}$이므로

n^2은 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다.}}$

따라서 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

12 정답 ④

해설 $X=\{x|x\ge a$인 실수$\}$이므로 함수 $f:X\to X$가 일대일대응이 되려면 $x^2-6x\ge x$가 되어야 한다.

$x^2-6x\ge x$에서

$x^2-7x\ge0$, $x(x-7)\ge0$

$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge7$

이때 $X=\{x|x\ge a$인 실수$\}$이므로

$x\ge7$을 만족하는 x의 최솟값 7이 a가 된다.

$\therefore a=7$

13 정답 12

해설 $f(3)=5$이고, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이므로

$f(4)=1$ 또는 $f(4)=3$

또, $f(1)>f(2)>5$이므로

집합 Y의 원소 7, 9, 11, 13 중 2개를 뽑아 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot{}_4C_2=2\cdot6=12$

14 정답 ②

해설 함수의 그래프와 합성함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구하는 문제이다.

$f(x)=0$의 두 근이 -2와 1이므로

$f(f(x))=0$에서 $f(x)=-2$ 또는 $f(x)=1$

(i) $f(x)=-2$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(x)=1$에서 $x=-\dfrac{1}{2}+\alpha$, $x=-\dfrac{1}{2}-\alpha$

따라서 모든 근의 합은

$-\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}+\alpha\right)+\left(-\dfrac{1}{2}-\alpha\right)=-\dfrac{3}{2}$

15 정답 ④

해설 역함수 이해하기

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(2y+3)$이다.

그러므로

$2y+3=g(x)$

역함수는 $y=\dfrac{1}{2}g(x)-\dfrac{3}{2}$이다.

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$이다.

$\therefore a+b=-1$

16 **정답** 9

해설 $y=\dfrac{ax+b}{x-3}$로 놓으면 $y(x-3)=ax+b$

이를 x에 대하여 풀면 $(y-a)x=3y+b$

$\therefore\ x=\dfrac{3y+b}{y-a}$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{3x+b}{x-a}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}$

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\dfrac{ax+b}{x-3}=\dfrac{3x+b}{x-a}$

$\therefore\ a=3$

또한, $f(1)=\dfrac{a+b}{1-3}=-3$에서

$a+b=6$이므로 $b=3$

$\therefore\ ab=3\cdot 3=9$

17 **정답** 2

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은

함수 $f(x)=\sqrt{x-a}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x-a}+2=x$에서 $\sqrt{x-a}=x-2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-a=x^2-4x+4$

$\therefore\ x^2-5x+4+a=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=4+a$

이때 두 교점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}&=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}\\&=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\\&=\sqrt{2\{5^2-4(4+a)\}}\\&=\sqrt{18-8a}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{18-8a}=\sqrt{2}$ 이므로

$18-8a=2$ $\qquad\therefore\ a=2$

18 **정답** ⑤

해설 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로

$A-B=\{3,\ 4,\ 6,\ 7\}$

즉, 집합 $A-B$의 공집합이 아닌 부분집합이

집합 B와 서로소인 집합이다.

이때 집합 $A-B$의 부분집합 중에서 3을 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

같은 방법으로 4와 6과 7을 각각 원소로 갖는 집합도 8개씩이므로

$S(X_1)+S(X_2)+S(X_3)+\cdots+S(X_n)$

$=3\cdot 8+4\cdot 8+6\cdot 8+7\cdot 8=160$

19 **정답** 3

해설 $q:3x-2=13$에서

$3x=15$

$\therefore\ x=5$

$r:x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

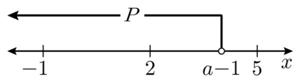
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,x<a-1\}$, $Q=\{5\}$, $R=\{-1,\ 2\}$

이때 명제 $q\to p$는 거짓이고, 명제 $r\to p$는 참이므로

$Q\not\subset P$, $R\subset P$

이를 만족시키는 집합 P는 다음 그림과 같으므로



$2<a-1\le 5$

$\therefore\ 3<a\le 6$

따라서 정수 a는 4, 5, 6의 3개이다.

20 **정답** ②

해설 $ab+a+b=15$에서 $a+b=15-ab$ $\cdots$ ㉠

$a>0,\ b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$15-ab\ge 2\sqrt{ab}$ $(\because$ ㉠$)$

$ab+2\sqrt{ab}-15\le 0$

$(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-15\le 0$

$(\sqrt{ab}+5)(\sqrt{ab}-3)\le 0$

$-5\le\sqrt{ab}\le 3$

$0<\sqrt{ab}\le 3$ $(\because\ \sqrt{ab}>0)$

$\therefore\ 0<ab\le 9$

따라서 ab의 최댓값은 9이다.

21 정답 ④

해설 이차함수 $f(x)=x^2-4ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$의 교점의 x좌표는

$x^2-4ax=\frac{1}{a}x$에서 $x^2-\left(4a+\frac{1}{a}\right)x=0$

$x\left\{x-\left(4a+\frac{1}{a}\right)\right\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4a+\frac{1}{a}$

$\therefore A\left(4a+\frac{1}{a},\ 4+\frac{1}{a^2}\right)$

또, 이차함수 $f(x)=x^2-4ax=(x-2a)^2-4a^2$의 그래프의 꼭짓점 B의 좌표는

$B(2a,\ -4a^2)$

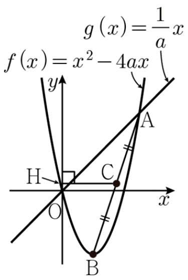
따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$C\left(\frac{1}{2}\left(2a+4a+\frac{1}{a}\right),\ \frac{1}{2}\left(-4a^2+4+\frac{1}{a^2}\right)\right)$

$\therefore C\left(3a+\frac{1}{2a},\ -2a^2+2+\frac{1}{2a^2}\right)$

다음 그림에서 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같으므로

$\overline{CH}=3a+\frac{1}{2a}$



이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+\frac{1}{2a}\geq 2\sqrt{3a\cdot\frac{1}{2a}}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } 3a=\frac{1}{2a}\text{, 즉 } a=\frac{\sqrt{6}}{6}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.

22 정답 ⑤

해설 두 점 $A(-1,\ -2)$, $B\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선의 기울기가

$\frac{\frac{2}{a}-(-2)}{a-(-1)}=\frac{\frac{2}{a}+2}{a+1}=\frac{\frac{2a+2}{a}}{a+1}=\frac{2}{a}$ 이므로

직선의 방정식은

$y=\frac{2}{a}(x+1)-2=\frac{2}{a}x+\frac{2}{a}-2$

즉, 점 P, Q의 좌표는 $P(a-1,\ 0)$, $Q\left(0,\ \frac{2}{a}-2\right)$

$\overline{OP}=a-1$, $\overline{OQ}=2-\frac{2}{a}$, $\overline{PB'}=a-(a-1)=1$,

$\overline{BB'}=\frac{2}{a}$ 이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(a-1)\cdot\left(2-\frac{2}{a}\right)=\frac{a^2-2a+1}{a}$

$=a-2+\frac{1}{a}$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{a}=\frac{1}{a}$

따라서 $S_1+S_2=a-2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=a+\frac{2}{a}-2$

$\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}-2$

$=2\sqrt{2}-2$

이므로 최솟값은 $2\sqrt{2}-2$

(단, 등호는 $a=\sqrt{2}$ 일 때 성립)

23 정답 30

해설 두 점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\dfrac{10}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ -\dfrac{10}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$S=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}$$
$$=a\cdot\frac{10}{a}+b\cdot\frac{10}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{10}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{10}{b}$$
$$=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\geq 20+5\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
$$=20+5\cdot 2$$
$$=30$$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 30이다.

24 정답 ②

해설 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$

$$=\begin{cases}-\dfrac{-2x-2}{-(x+1)} & (x<-1)\\ -\dfrac{-2x-2}{x+1} & (-1<x<0)\\ -\dfrac{2x-2}{x+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<0)\\ \dfrac{4}{x+1}-2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에서 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프는

두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이고

x절편이 1, y절편이 2이다.

또한, 직선 $y=kx+3k+4$,

즉 $y=k(x+3)+4$ $(k\neq 0)$은 k의 값에 관계없이

항상 점 $(-3,\ 4)$를 지난다.

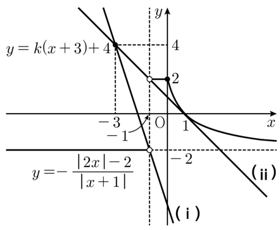
따라서 함수 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와

직선 $y=k(x+3)+4$의 교점이 존재하지 않으려면

다음 그림과 같이 직선 $y=k(x+3)+4$가

직선 (i)이거나 두 직선 (i)과 (ii)의 두 가지 경우 사이에

존재해야 한다.



(i) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 경우

$-2=2k+4$, $2k=-6$

$\therefore k=-3$

(ii) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나거나

유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하는 경우

직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나면

$2=2k+4$, $2k=-2$

$\therefore k=-1$

직선 $y=k(x+3)+4$가 유리함수

$y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하면

방정식 $k(x+3)+4=\dfrac{4}{x+1}-2$가 오직 하나의

근을 가져야 하므로 이 방정식의 양변에 $x+1$을

곱하면

$k(x+3)(x+1)+4(x+1)=4-2(x+1)$

$kx^2+4kx+3k+4x+4=4-2x-2$,

$kx^2+2(2k+3)x+3k+2=0$

$k\neq 0$이므로 이 이차방정식이 중근을 가져야 하고,

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k+3)^2-k(3k+2)=0$

$k^2+10k+9=0$, $(k+1)(k+9)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=-9$

그런데 직선 $y=k(x+3)+4$가 $x\geq 0$에서

유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접해야 하므로

$k=-1$

따라서 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를

지나거나 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$ $(x\geq 0)$의

그래프와 접하는 경우는 같은 직선이다.

즉, $k=-1$

(i), (ii)에 의하여 상수 k의 값의 범위는 $-3\leq k<-1$

25 정답 ②

해설 집합의 성질을 활용하여 문제해결하기

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로

x는 20 이하의 자연수이고 $y-k$는 30의 약수이다.

$y \in U$이므로 $y-k<30$이고 $x \neq 1$

$x \in U$이므로 $x \neq 30$

$y-k$와 x 사이의 관계는 다음 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$A_k \subset \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$

$\frac{30-x}{5} \in U$에서 $30-x$는 5의 배수이므로

$B=\{5, 10, 15, 20\}$

$(A_k \cap B^C) \subset \{2, 3, 6\}$

(ⅰ) $2 \in (A_k \cap B^C)$일 때,

$x=2$, $y-k=15$이고 $y=15+k \leq 20$

$k \leq 5$

(ⅱ) $3 \in (A_k \cap B^C)$일 때,

$x=3$, $y-k=10$이고 $y=10+k \leq 20$

$k \leq 10$

(ⅲ) $6 \in (A_k \cap B^C)$일 때,

$x=6$, $y-k=5$이고 $y=5+k \leq 20$

$k \leq 15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$k \leq 5$일 때, $A_k \cap B^C=\{2, 3, 6\}$

$5<k \leq 10$일 때, $A_k \cap B^C=\{3, 6\}$

$10<k \leq 15$일 때, $A_k \cap B^C=\{6\}$

$n(A_k \cap B^C)=1$이므로 $10<k \leq 15$

따라서 모든 자연수 k의 개수는 5