1. [원의 방정식]

좌표평면 위의 점 A$(-2,\ 0)$과 중심이 C인 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ACP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

2. [원과 점 사이의 거리]

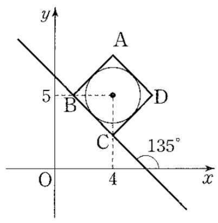
원 $(x-4)^2+(y-7)^2=9$ 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $\sqrt{(a+1)^2+(b+5)}$의 최댓값을 구하시오.

3. [원과 직선의 위치 관계]

직선 $(k+1)x-(k+2)y+k+5=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$에 접하도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

4. [원과 직선의 위치 관계]

오른쪽 그림과 같이 중심이 $(4,\ 5)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이 정사각형 ABCD에 내접하고 있다. 두 점 B, C를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $135°$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 y절편은?



① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

5. [원과 직선의 위치 관계]
점 $(8,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=16$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

6. 점 $\mathrm{A}(8,\ 6)$을 지나고 y축에 접하는 원 중에서 반지름의 길이가 최소인 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$라 할 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?
① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

7. 점 $(3,\ 3)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 있다. 이때 두 원의 중심거리를 구하시오.

8. 원 $C_1 : x^2+y^2-4x+3=0$이 원 C_2에 내접하고, 원 C_2는 점 $(7,\ -5)$에서 직선 $y=-5$에 접할 때, 두 원의 공통접선의 기울기를 구하시오.

9. 좌표평면 위의 두 원

$$O_1 : x^2+y^2=1,\ \ O_2 : (x-5)^2+y^2=4$$

의 공통접선이 점 $\mathrm{P}(2,\ a)$를 지난다. 이 중 a가 양의 유리수일 때의 공통접선과 원 O_2의 접점의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $5(p+q)$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 30
④ 32 ⑤ 35

10. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $3:2$인 점의 자취가 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

① 12π ② 10π ③ 8π
④ 6π ⑤ 4π

11. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 1)$, $\mathrm{P}(0,\ t)$가 있다. 중심이 x축 위에 있고 두 점 A, P를 지나는 원을 C, 중심이 x축 위에 있고 두 점 B, P를 지나는 원을 C'이라 할 때, 점 P에서 두 원 C, C'에 그은 접선이 직교하도록 하는 모든 양수 t의 값의 곱을 구하시오.

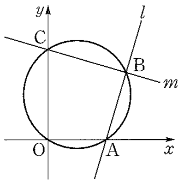
12. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(6,\ 11)$, $\mathrm{B}(6,\ 5)$에 대하여 점 P가 $x^2+y^2=4$ 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값은?

① 127 ② 131 ③ 138
④ 146 ⑤ 153

13. 좌표평면 위에 두 직선

l : $y=3x-6$, m : $y=-\frac{1}{3}x+4$가

있다. 직선 l과 x축의 교점을 A, 두 직선 l과 m의 교점을 B, 직선 m과 y축의 교점을 C라 하고, 세 점 A, B, C를 지나는 원을 K라 하자. 원 K에서 점 B와 반대쪽의 호 AC위에 점 D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하시오.



14. 원 $x^2+y^2=9$에 내접하고, 직선 $3x+4y-5=0$에 접하는 원 중에서 중심이 $(a, 0)$인 원의 반지름의 길이를 구하시오. (단, $a<0$)

[원의 방정식 빠른 정답]

1. 정답 ③ 2. 정답 16
3. 정답 -10 4. 정답 ①
5. 정답 $64\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6.정답 ④
7. 정답 12 8. 정답 $-\frac{40}{9}$
9. 정답 ② 10. 정답 ①
11. 정답 $4\sqrt{5}$ 12. 정답 ④
13. 정답 10 14. 정답 $\frac{7}{4}$

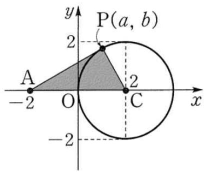
1. 정답 ③

원 $x^2-4x+y^2=0$에서

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$

이므로 원의 중심 C의 좌표는 $(2,\ 0)$

원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여



$$\triangle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot |b|$$
$$=2|b|$$

이때 $\triangle\mathrm{ACP}$의 넓이가 자연수가 되게 하는 $|b|$의 값은

$$|b|=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\ (\because\ |b|\le 2)$$

(i) $|b|=\frac{1}{2}$, 즉 $b=\pm\frac{1}{2}$인 점 P는 4개

(ii) $|b|=1$, 즉 $b=\pm 1$인 점 P는 4개

(iii) $|b|=\frac{3}{2}$, 즉 $b=\pm\frac{3}{2}$인 점 P는 4개

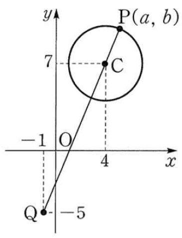
(iv) $|b|=2$, 즉 $b=\pm 2$인 점 P는 2개

이상에서 구하는 점 P의 개수는 $4+4+4+2=14$

2. 정답 16

점 Q의 좌표를 $(-1,\ -5)$라 하면

$\sqrt{(a+1)^2+(b+5)^2}$은 두 점 P, Q 사이의 거리를 나타낸다.



원의 중심 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{(4+1)^2+(7+5)^2}=13$

오른쪽 그림과 같이 세 점 P, C, Q가 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최대가 되므로

구하는 최댓값은

$$\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{CP}}=13+3=16$$

3. 정답 -10

원의 중심 $(-1,\ 1)$과 주어진 직선 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|(k+1)\cdot(-1)-(k+2)\cdot 1+k+5|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{|-k+2|}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

원과 직선이 접하려면 $d=1$이어야 하므로

$$|-k+2|=\sqrt{2k^2+6k+5}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2+10k+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 k의 값의 합은

$$\alpha+\beta=-10$$

4. 정답 ①

직선 BC의 기울기는 $\tan 135^\circ=-1$이고 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

따라서 직선 AB의 y절편을 $k(k>0)$라 하면 직선의 방정식은

$$y=x+k \qquad \therefore\ x-y+k=0$$

원의 중심 $(4,\ 5)$와 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

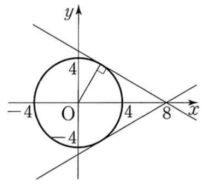
$$\frac{|4-5+k|}{\sqrt{1^2(-1)^2}}=\sqrt{2} \qquad |k-1|=2$$

$$\therefore\ k=3 \text{ 또는 } k=-1$$

이때 $k>0$이므로 $k=3$이다.

5. 정답 $64\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 $(8,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은



$$y=m(x-8)$$
$$\therefore\ mx-y-8m=0$$

점 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y-8m=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$\frac{|-8m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4, \qquad 2m=\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 또는

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{16\sqrt{3}}{3}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$$

6. 정답 ④

원이 y축에 접하므로 원의 방정식을

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

으로 놓으면 이 원이 점 $\mathrm{A}(8,\ 6)$을 지나므로

$$(8-a)^2+(6-b)^2=a^2$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{16}(b-6)^2+4$$

따라서 반지름의 길이 a는 $b=6$일 때 최솟값 4를 가지므로

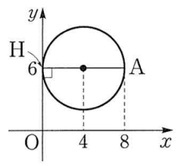
구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-6)^2=16$$

$$\therefore\ a+b+c=4+6+16=26$$

[다른 풀이]

점 $\mathrm{A}(8,\ 6)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이가 최소이다.



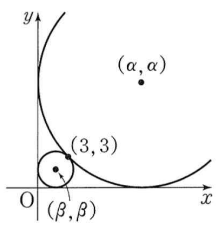
이 원의 중심의 좌표가 $(4,\ 6)$이고 반지름의 길이가 4이므로 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-6)^2=4^2$$

$$\therefore\ a=4,\ b=6, c=16$$

7. 정답 12

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 원의 방정식은



$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이 원이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$$(3-a)^2+(3-a)^2=a^2$$

$$a^2-12a+18=0$$

위의 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=18$$

따라서 두 원의 중심거리는

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}$$

$= \sqrt{\{2(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}}$

$= \sqrt{2(12^2 - 4 \cdot 18)}$

$= \sqrt{144} = 12$

8. 정답 $-\dfrac{40}{9}$

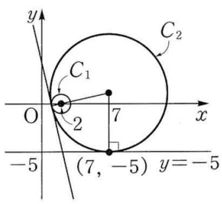
$C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 1$

$C_2 : (x-7)^2 + (y-b)^2 = (b+5)^2$으로

놓으면 두 원 C_1, C_2의 중심거리 d는

$d = \sqrt{(7-2)^2 + b^2}$

$= \sqrt{b^2 + 25}$



두 원의 반지름의 길이의 차는

$(b+5) - 1 = b+4$

두 원이 내접하므로 $\sqrt{b^2+25} = b+4$

양변을 제곱하면

$b^2 + 25 = b^2 + 8b + 16 \qquad \therefore\ b = \dfrac{9}{8}$

원 C_1의 중심 $(2,\ 0)$과 원 C_2의 중심 $\left(7,\ \dfrac{9}{8}\right)$를 지나는 직선의

기울기는 $\dfrac{\dfrac{9}{8} - 0}{7-2} = \dfrac{9}{40}$

두 원의 공통접선은 두 원의 중심을 지나는 직선에 수직이므로

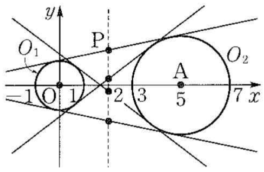
공통접선의 기울기는 $-\dfrac{40}{9}$이다.

9. 정답 ②

점 $\mathrm{P}(2,\ a)$를 지나고 y축에 평행한 직선은 두 원 O_1, O_2에 모두 접하지 않으므로 점 P를 지나고 두 원에 동시에 접하는 공통접선의 방정식은 $y = m(x-2) + a$,

즉

$mx - y - 2m + a = 0 \cdots\cdots$ ㉠



으로 놓을 수 있다.

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리는 1이고, 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 2이므로

$\dfrac{|-2m+a|}{\sqrt{m^2+1}} = 1, \quad |-2m+a| = \sqrt{m^2+1} \ \cdots\cdots$ ㉡

$\dfrac{|3m+a|}{\sqrt{m^2+1}} = 2, \quad |3m+a| = 2\sqrt{m^2+1} \ \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $|3m+a| = 2|-2m+a|$

$3m + a = \pm 2(-2m+a)$

$\therefore\ m = \dfrac{1}{7}a$ 또는 $m = 3a$

(ⅰ) $m = \dfrac{1}{7}a$일 때, ㉡에서 $\left|\dfrac{5}{7}a\right| = \sqrt{\dfrac{a^2}{49} + 1}$

$a^2 = \dfrac{49}{24} \qquad \therefore\ a = \pm\dfrac{7\sqrt{6}}{12}$

(ⅱ) $m = 3a$일 때, ㉡에서 $|-5a| = \sqrt{9a^2+1}$

$a^2 = \dfrac{1}{16} \qquad \therefore\ a = \pm\dfrac{1}{4}$

이때 a가 양의 유리수이므로 $a = \dfrac{1}{4}$, $m = \dfrac{3}{4}$

따라서 공통접선의 방정식은 $y = \dfrac{3}{4}(x-2) + \dfrac{1}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉣

공통접선 ㉣과 원 O_2의 접점은 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$을 지나고 ㉣에 수직인 직선 $y = -\dfrac{4}{3}(x-5)$와 ㉣의 교점이므로 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

$\therefore\ 5(p+q) = 5\left(\dfrac{19}{5} + \dfrac{8}{5}\right) = 27$

10. 정답 ①

주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3:2$이므로 $2\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore\ 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 - 12x = 0$

$\therefore\ (x-6)^2 + y^2 = 36$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi \cdot 6 = 12\pi$

11. 정답 $4\sqrt{5}$

원 C의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면

$C : (x-a)^2 + y^2 = r^2$

원 C가 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$를 지나므로 $\quad a^2 - 4a + 8 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉠

또 원 C가 점 $\mathrm{P}(0,\ t)$를 지나므로 $\quad a^2 + t^2 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡ 을 하면 $\quad -4a + 8 - t^2 = 0 \qquad \therefore\ a = \dfrac{8-t^2}{4t}$

직선 CP의 기울기는 $\quad \dfrac{0-t}{a-0} = -\dfrac{t}{a}$

점 P에서 그은 원 C의 접선의 기울기를 m이라 하면

$m = \dfrac{a}{t} = \dfrac{8-t^2}{4t}$

또 원 C'의 중심의 좌표를 $C'(b,\ 0)$, 반지름의 길이를 r'이라 하면

$C' : (x-b)^2 + y^2 = r^2$

원 C'이 두 점 $(-3,\ 1)$, $(0,\ t)$를 지나므로

$(b+3)^2 + 1 = r'^2,\ \ b^2 + t^2 = r'^2$

두 식을 연립하여 r'을 소거하면 $b = \dfrac{t^2-10}{6}$

직선 C′P의 기울기는 $\dfrac{0-t}{b-0} = -\dfrac{t}{b}$

점 P에서 그은 원 C'의 접선의 기울기를 m'이라 하면

$m' = \dfrac{b}{t} = \dfrac{t^2-10}{6t}$

두 접선이 직교하므로

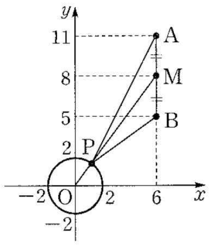
$mm' = \dfrac{8-t^2}{4t} \cdot \dfrac{t^2-10}{6t} = -1, \quad -80 + 18t^2 - t^4 = -24t^2$

$t^4 - 42t^2 + 80 = 0, \quad (t^2-2)(t^2-40) = 0$

$t>0$이므로 $t=\sqrt{2}$ 또는 $t=2\sqrt{10}$

따라서 모든 양수 t의 값의 곱은 $\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{5}$

12. 정답 ④



$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 (6, 8)

$\triangle PAB$에서 중선정리에 의하여

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$$

이때 $\overline{AM}=3$으로 일정하므로 $\overline{PM}$의 길이가 최소일 때,

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소이다.

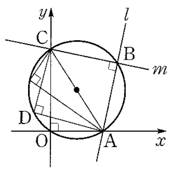
즉 점 P가 원의 중심 O(0, 0)과 M(6, 8)을 잇는 직선 위에 있을 때, $\overline{PM}$의 길이가 최소가 되므로

$$\overline{PM}\geq\overline{OM}-\overline{OP}=\sqrt{6^2+8^2}-2=8$$

$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2\geq 2(8^2+3^2)=146$$

따라서 구하는 최솟값은 146이다.

13. 정답 10



세 점 A, B, C는 각각

$$A(2,0),\ B(3,3),\ C(0,4)$$

두 직선 l, m의 기울기의 곱은 -1이므로 두 직선 l, m은 직교한다.

즉 $\angle ABC=90°$이므로 원 K는 선분 AC를 지름으로 하는 원이다.

$\triangle ABC$는 $\overline{BA}=\overline{BC}=\sqrt{10}$인 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=5$$

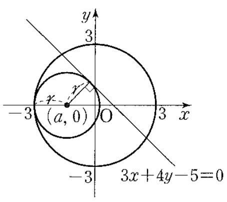
$\triangle ACD$의 넓이가 최대이려면 $\overline{AC}$를 밑변으로 생각할 때 높이가 최대인 위치에 점 D가 있어야 한다. 즉 점 D와 $\overline{AC}$사이의 거리가 최대이어야 한다.

이때 $\overline{AC}=2\sqrt{5}$에서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로

$$\triangle ACD\leq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$$

따라서 □ABCD의 넓이의 최댓값은 $\triangle ABC+\triangle ACD=10$

14. 정답 $\frac{7}{4}$



구하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

두 원이 내접하므로 두 원의 중심거리는 두 원의 반지름의 길이의 차와 같다.

$$\therefore\ -a=3-r \quad \cdots\cdots ㉠$$

원의 중심 $(a,0)$과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 r와 같으므로

$$\frac{|3a-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r,\quad \therefore\ |3a-5|=5r$$

$a<0$이므로 $\quad -3a+5=5r \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{5}{4},\ r=\frac{7}{4}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{7}{4}$이다.