

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

이름

유형별 학습

01 두 집합 $X = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,

$Y = \{y | a \leq y \leq b\}$ 에서 $f: X \rightarrow Y$,

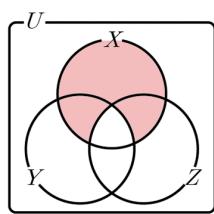
$f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재할 때,

실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

03 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $B \subset A$
- ② $A \subset (A \cup B)$
- ③ $A \cup B = A$
- ④ $(A \cap B) \cup B = A$
- ⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

02 다음 중 아래 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합은?



- ① $X - (Y - Z)$
- ② $X - (Y \cap Z)$
- ③ $X \cap (Y - Z)$
- ④ $X \cap (Y \cup Z)$
- ⑤ $X \cup (Y \cap Z)$

04 다음은 ‘ x, y 가 실수일 때, $x - y$ 가 무리수이면 x, y 중 적어도 하나는 무리수이다.’를 증명한 과정이다.
(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짹지어진 것은?

주어진 명제의 대우는

‘ x, y 가 모두 유리수이면 $x - y$ 는 유리수이다.’이다.

x, y 가 모두 유리수이면

$x = \frac{b}{a}, y = \frac{d}{c}$ (a, b, c, d 는 정수, $a \neq 0, c \neq 0$)

로 놓을 수 있으므로

$$x - y = \frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{(가)}{ac}$$

(가) 와 ac 는 (나)이고, $ac \neq 0$ 이므로

$x - y = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로

주어진 명제도 참이다.

- ① $bc - ad$, 정수, 유리수
- ② $bc - ad$, 정수, 무리수
- ③ $bc - ad$, 무리수, 유리수
- ④ $ad - bc$, 정수, 유리수
- ⑤ $ad - bc$, 무리수, 무리수



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 05** 두 집합 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{4-x}\}$,
 $B = \{(x, y) | y = -x + k\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 0$ 을 만족시키는 정수 k 의 최솟값을 구하시오.

- 06** 세 함수 $f(x) = -x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 2x$ 에 대하여 $(h \circ f) \circ g$ 를 구하시오.

- 07** [2009년 3월 고2 8번]
 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $*$ 을

$$A * B = (A \cup B)^C \cup (A \cap B)$$

 로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

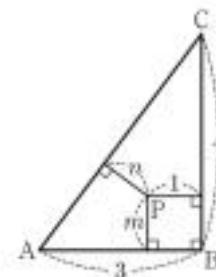
- ㄱ. $A * B = B * A$
- ㄴ. $A * A = A$
- ㄷ. $\underbrace{A * A * \dots * A}_{{A}가~2009개} = A$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 08** 어느 놀이공원의 입장객 85명을 대상으로 범퍼카와 자이로드롭을 이용한 입장객 수를 조사하였더니 각각 40명, 50명이었다. 이때 범퍼카와 자이로드롭을 모두 이용한 입장객 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

- ① 50
- ② 100
- ③ 150
- ④ 200
- ⑤ 250

- 09** 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ 인 직각삼각형 ABC 의 내부의 한 점 P 에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 길이가 1이고, \overline{AB} , \overline{AC} 에 내린 수선의 길이가 각각 m , n 일 때, $m^2 + n^2$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{28}{17}$
- ② $\frac{29}{17}$
- ③ $\frac{30}{17}$
- ④ $\frac{31}{17}$
- ⑤ $\frac{32}{17}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

10

함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타낸 것은?

- ① $g\left(\frac{x}{3}\right)$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

11

함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 는 $x=p$ 에서 최댓값 q 를 갖는다.
이때 $p+q$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

12

다음 보기 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이고
충분조건은 아닌 것을 있는 대로 고르시오.
(단, a, b 는 실수이다.)

〈보기〉

- ㄱ. $p: A \cup B = B, q: A \subset B$
ㄴ. $p: a^2 + b^2 = 0, q: a = 0$ 이고 $b = 0$
ㄷ. $p: a^2 = b^2, q: a = b$

13

2이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이
정의된 함수 f 가 있다.

〈보기〉

- I. $f(p) = p$ (p 가 소수)
II. $f(rs) = f(r) + f(s)$ ($r, s \in A$)

이 때, $f(1200)$ 의 값을 구하시오.

14

함수 $f(x) = \sqrt{3x-3} + 1$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의
그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른
두 점 P, Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

15

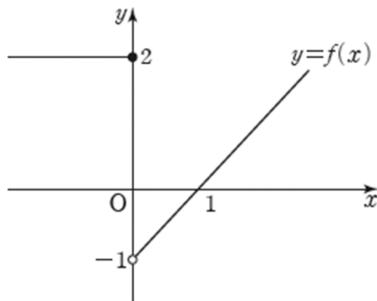
집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots,$
 A_8 이라 하고, A_1 의 원소의 총합을 $S(A_1), A_2$ 의 원소의
총합을 $S(A_2), \dots, A_8$ 의 원소의 총합을 $S(A_8)$ 이라 할
때, $S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_8)$ 의 값은?

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

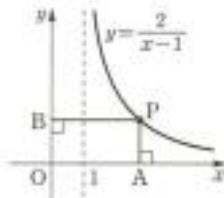
- 16** 함수 $f(x) = \begin{cases} 2 & (x \leq 0) \\ x-1 & (x > 0) \end{cases}$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

- 18** 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{2}{x-1}$ 위의 한 점 P와 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소가 될 때, 이 사각형의 넓이는?
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



- ① 1 ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ 4

- 17** 직선 $y = -x + 6$ 이 두 유리함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y축에 가까운 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $3x_1 > x_2$
ㄴ. $y_1 - y_2 = x_2 - x_1$
ㄷ. $x_1y_2 + x_2y_1 = 2x_1x_2$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

19

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right|$$
에 대하여 $a < b$ 인 두 양수 a, b 가

$f(a)=f(b)$ 를 만족시킬 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $0 < f(a) < 2$

ㄴ. $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$

ㄷ. $\frac{f(a)+f(b)}{7} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)}$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20

실수 전체의 집합 \mathbb{R} 에 대하여 \mathbb{R} 에서 \mathbb{R} 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a(1-x)} + 2 & (x \geq 1) \\ -2(x-1)^2 + b & (x < 1) \end{cases}$$

다음 중 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위한 상수 a, b 에 대한 조건으로 옳은 것은?

① $a < 0, b = 1$

② $a > 0, b = 2$

③ $a < 0, b = 2$

④ $a > 0, b = 1$

⑤ $a < 0, b = -1$

21

좌표평면에서

두 함수 $f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ 의

그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다.

ㄴ. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 곡선 $y = g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

ㄷ. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = 3$, $x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 87이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22

집합 $A = \{x | x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키면서 k 개의 원소를 갖는 집합 B 의 개수를 a_k 라 하자. 이때 $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.

(가) $B \subset A$, $n(B) \neq 0$

(나) $x \in B$ 이면 $\frac{729}{x} \in B$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 23** 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 의
두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $A \cap B = \{1, 2, 5\}$
(나) $A^C \cap B^C = \{7, 11\}$

집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 할 때,
 $S(A) = 3S(B)$ 가 되도록 하는 두 집합 A, B 에 대하여
 $\frac{S(A)S(B)}{2}$ 의 값을 구하시오.

- 24** 함수 $f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여
방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로 다른
실근의 합을 구하시오.

- 25** 좌표평면에서 무리함수 $f(x) = 2\sqrt{x}$ 의 그래프와
원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을 각각
A, B라 하고, 함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의
그래프와 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을
각각 C, D라 하자. 두 직선 AB, CD의 기울기를 각각
 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 \cdot m_2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

이름

유형별 학습

빠른정답

| | | |
|---|----------------|-------|
| 01 | 02 ② | 03 |
| 04 ① | 05 5 | |
| 06 $((h \circ f) \circ g)(x) = -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$ | | |
| 07 ④ | 08 ④ | 09 ⑤ |
| 10 ⑤ | 11 ② | 12 ㄷ |
| 13 21 | 14 $3\sqrt{2}$ | 15 ③ |
| 16 ② | 17 ② | 18 ② |
| 19 ③ | 20 | 21 ⑤ |
| 22 4 | 23 294 | 24 14 |
| 25 ③ | | |



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

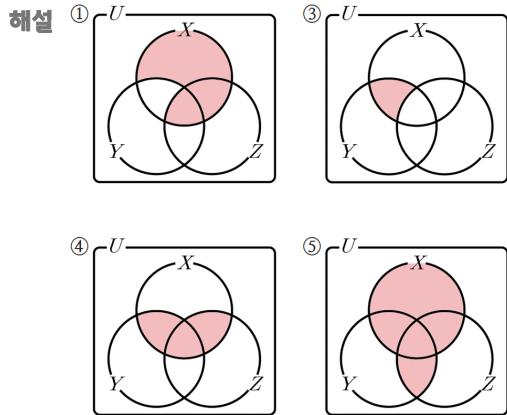
유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 함수 $y = f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
따라서 함수 $y = f(x)$ 는 점 $(0, a), (2, b)$ 를 지나야 한다.
즉, $a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$ 이므로
 $a + b = 4$

02 정답 ②



03 정답 ④

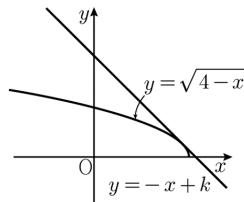
해설 $A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로
옳지 않다.

04 정답 ①

해설 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad}{ac}$ 이므로 (가)는 $bc - ad$ 이다.
따라서 $bc - ad$ 와 ac 은 정수이므로 (나)는 정수이다.
또한 위의 조건과 $ac \neq 0$ 에 의해
 $x - y$ 는 유리수이므로 (다)는 유리수이다.

05 정답 5

해설 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고
직선 $y = -x + k$ 는 기울기가 -1 이고 y절편이 k 이므로
다음 그림과 같다.



$n(A \cap B) = 0$ 이므로 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와
직선 $y = -x + k$ 가 만나지 않아야 한다.
 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 접할 때,
 $\sqrt{4-x} = -x + k$ 의 양변을 제곱하면
 $4 - x = x^2 - 2kx + k^2$
 $x^2 + (1 - 2k)x + k^2 - 4 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (1 - 2k)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$
 $-4k + 17 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$
따라서 $k > \frac{17}{4}$ 이므로 정수 k 의 최솟값은 5이다.

06 정답 $((h \circ f) \circ g)(x) = -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

해설 $(h \circ f)(x) = h(f(x))$
 $= h(-x^3 - 1)$
 $= -2x^3 - 2$ 이므로
 $((h \circ f) \circ g)(x) = (h \circ f)(g(x))$
 $= (h \circ f)(x^2 - 1)$
 $= -2(x^2 - 1)^3 - 2$
 $= -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

07 정답 ④

해설 집합의 연산의 성질을 이해하고 연산의 규칙성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned} \neg. A * B &= (A \cup B)^C \cup (A \cap B) \\ &= (B \cup A)^C \cup (B \cap A) \\ &= B * A \quad (\text{참}) \\ \vdash. A * A &= A^C \cup A = U \quad (\text{거짓}) \\ \sqsubset. A * A * A &= U * A = U^C \cup A = A \\ A * A * A * A &= A * A * A = U \\ A * A * A * A * A &= A * A * A = A \\ &\vdots \\ \text{위로부터} \\ \underbrace{A * A * A * \cdots * A}_{A \text{가 짝수개}} &= U \\ \underbrace{A * A * A * \cdots * A}_{A \text{가 홀수개}} &= A \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 2009가 홀수이므로
 $\underbrace{A * A * A * \cdots * A}_{A \text{가 } 2009\text{개}} = A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ과 ㄷ이다.

[참고]

연산 *에 대한 결합법칙

$A * (B * C) = (A * B) * C$ 이 성립하므로

$A * (B * C), (A * B) * C$ 는 모두

$A * B * C$ 로 나타낼 수 있다.

08 정답 ④

해설 입장객 전체의 집합을 U ,

범퍼카를 이용한 입장객의 집합을 A ,

자이로드롭을 이용한 입장객의 집합을 B 라 하면

$n(U) = 85, n(A) = 40, n(B) = 50$

범퍼카와 자이로드롭을 모두 이용한 입장객의 집합은

$A \cap B$ 이므로 $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이다.

$\therefore M = n(A) = 40$

또, $A \cup B = U$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최소이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 에서

$m = 40 + 50 - 85 = 5$

$\therefore Mm = 200$

09 정답 ⑤

해설 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA$ 에서

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 3m + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5n$$

$$\therefore 3m + 5n = 8$$

이때 코사-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2 + 5^2)(m^2 + n^2) \geq (3m + 5n)^2$$

$$34(m^2 + n^2) \geq 8^2$$

$$\therefore m^2 + n^2 \geq \frac{64}{34} = \frac{32}{17}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{32}{17}$ 이다.

10 정답 ⑤

해설 $f(x) = 4x - 1$ 을 $y = 4x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 4y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 를 $y = 12x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 12y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{12}$$

$$\therefore \{f(3x)\}^{-1} = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}g(x)$$

〈다른풀이〉

$y = f(3x)$ 에서 x, y 를 바꾸면 $x = f(3y)$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3y \quad \therefore y = \frac{1}{3}f^{-1}(x)$$

따라서 $y = f(3x)$ 의 역함수는

$$\frac{1}{3}f^{-1}(x) = \frac{1}{3}g(x)$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

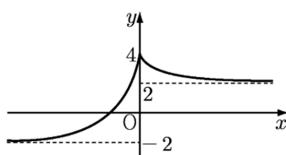
집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

11 정답 ②

해설 (i) $x < 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{-x+1} = \frac{-6}{x-1} - 2$

(ii) $x > 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2$

함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 0$ 일 때 최댓값 4를 가지므로 $p = 0$, $q = 4$
 $\therefore p+q=4$

12 정답 □

해설 ㄱ. $A \cup B = B$ 에서 $A \subset B$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = 0$ 이고 $b = 0$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $a^2 = b^2$ 에서 $a = \pm b$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

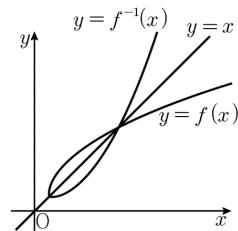
13 정답 21

해설 $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1200) &= f(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^4) + f(3) + f(5^2) \\ &= 4f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 4 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 21 \end{aligned}$$

14 정답 $3\sqrt{2}$

해설 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{3x-3} + 1 = x \text{에서 } \sqrt{3x-3} = x-1$$

양변을 제곱하면

$$3x-3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 P(1, 1), Q(4, 4) 또는 P(4, 4), Q(1, 1)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

15 정답 ③

해설 집합 A의 부분집합을 모두 구해보면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 이다.

이때 1을 반드시 포함하는 집합은 4개, 2를 반드시 포함하는 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 집합은 4개이므로 원소의 총합은 $4(1+2+3)=24$.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

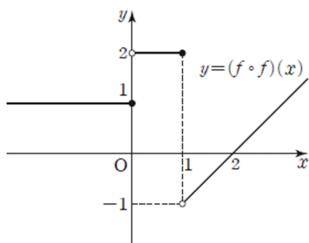
16 정답 ②

해설 $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 값은 -1 부터 커지므로 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프 중 $x > -1$ 인 부분을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

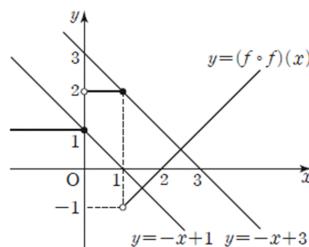
또, $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(2) = 1$ 이다.

그러므로 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



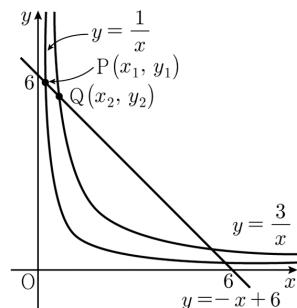
이때 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나는 정수 k 는 1, 3으로 그 합은 4이다.



17 정답 ②

해설 직선 $y = -x + 6$ 이 두 함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와

제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y 축에 가까운 점을 다음 그림과 같이 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 라 하자.



⊓ 주어진 그래프에서 $y_1 > y_2$ 이므로

$$\frac{1}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

이때 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 이므로 위의 부등식의 양변에

$x_1 x_2$ 를 곱하면 $x_2 > 3x_1$ (거짓)

⊓ 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식이 $y = -x + 6$ 이므로 직선 PQ의 기울기는 -1 이다.

$$\text{즉}, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1, y_1 - y_2 = -(x_1 - x_2)$$

$$\therefore y_1 - y_2 = x_2 - x_1 \text{ (참)}$$

⊓ 원점 O에서 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 각각

지나는 직선의 기울기를 비교하면

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} > \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}, \frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2}{x_2}$$

$$\therefore x_2 y_1 > x_1 y_2 \quad (\because x_1 > 0, x_2 > 0)$$

이 부등식의 양변에 $x_1 y_2$ 를 각각 더하면

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 > x_1 y_2 + x_1 y_2$$

$$= 2x_1 y_2$$

$$> 2x_1 x_2 \quad (\because y_2 > x_2)$$

$$\therefore x_1 y_2 + x_2 y_1 > 2x_1 x_2 \text{ (거짓!)}$$

따라서 옳은 것은 ⊓이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{t-1}\right)$ 로 놓으면 $t > 1$ 이므로

사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} & 2\left(t + \frac{2}{t-1}\right) - 2\left(1+t-1+\frac{2}{t-1}\right) \\ & \geq 2\left(1+2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}}\right) \\ & = 2(1+2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

이때 등호는 $t-1 = \frac{2}{t-1}$ 일 때 성립하므로

$t = \sqrt{2} + 1$ 일 때 둘레의 길이가 최소가 된다.

따라서 이때의 사각형 OAPB의 넓이는

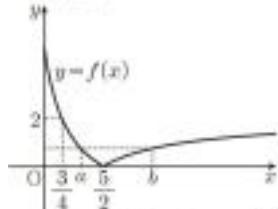
$$t \cdot \frac{2}{t-1} = (\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

19 정답 ③

해설 $f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| = \left| \frac{7}{x+1} - 2 \right|$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$,

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음

그림과 같다.



ㄱ. 위 그림에서와 같이 $0 < f(a) = f(b) < 2$ 이다. (참)

ㄴ. 위 그림에서 알 수 있듯이 $0 < f(a) < 2$ 이기 위해서는

$$\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$$
어야 한다. (참)

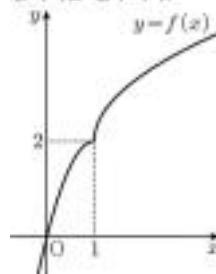
ㄷ. $f(a) = \frac{7}{a+1} - 2$, $f(b) = 2 - \frac{7}{b+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{f(a)+f(b)}{7} &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \\ &= \frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 정답 ③

해설 아래 그림과 같이 $x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 이차함수 $y = -2(x-1)^2 + b$ 의 그래프의 일부이고 증가하는 함수이다.



따라서 다음 그림과 같이 $x \geq 1$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{a(1-x)} + 2$ 의 그래프도 증가해야 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 된다.

즉, $y = \sqrt{a(1-x)} + 2 = \sqrt{-a(x-1)} + 2$ 에서 $-a > 0$ 이므로 $a < 0$

$$f(1) = b = 2$$

$$\therefore a < 0, b = 2$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

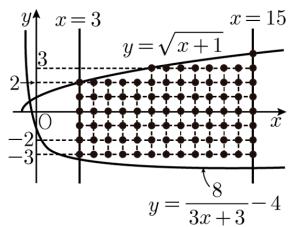
21 정답 ⑤

해설 ㄱ. 함수 $f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4$ 의 점근선의 방정식은

$x = -1, y = -4$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는
직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다. (참)

ㄴ. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 함수 $g(x) = \sqrt{x+1}$ 에서
 $2 \leq g(x) \leq 4$ 이므로 y 좌표가 정수인 점의 개수는
3이다. (참)

ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
점 $(3, -\frac{10}{3})$ 을 지나고, 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
점 $(3, 2)$ 를 지난다.



$3 \leq x \leq 15$ 에서 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
 y 좌표가 정수인 점이 없고 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
 $x = 3, 8, 15$ 일 때만 y 좌표가 정수이다.

두 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4, y = \sqrt{x+1}$ 과

두 직선 $x = 3, x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는
그 경계에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의
개수는

$x = 3, 4, 5, 6, 7$ 일 때 각각 6

$x = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ 일 때 각각 7

$x = 15$ 일 때 8

따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는

$$5 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 87 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

22 정답 4

해설 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B 는 공집합이
아니어야 하고, 집합 B 의 원소는 729의 양의 약수이어야
한다.

이때 729의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729이고
조건 (나)에 의하여 1과 729, 3과 243, 9와 81은 어느
하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의
원소이다.

(i) $n(B) = 1$ 인 경우는 $\{27\}$ 이므로 $a_1 = 1$

(ii) $n(B) = 3$ 인 경우는 $\{1, 27, 729\}, \{3, 27, 243\},$
 $\{9, 27, 81\}$ 이므로 $a_3 = 3$

(i), (ii)에 의하여

$$a_1 + a_3 = 1 + 3 = 4$$

23 정답 294

해설 조건 (가)에서 $S(A \cap B) = 8$

조건 (나)에서 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{7, 11\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\therefore S(A \cup B) = 48$$

$$S(A) + S(B) = S(A \cup B) + S(A \cap B) \\ = 48 + 8 = 56$$

이때 $S(A) = 3S(B)$ 이므로

$$S(A) + S(B) = 3S(B) + S(B) = 4S(B)$$

따라서 $4S(B) = 56$ 이므로

$$S(B) = 14, S(A) = 3S(B) = 42$$

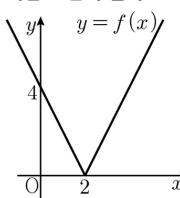
$$\therefore \frac{S(A)S(B)}{2} = \frac{42 \cdot 14}{2} = 294$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

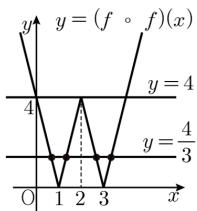
집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

24 정답 14

해설 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 에서
 $(f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$ 이므로
 $(f \circ f)(x) = t$ 라 하면 $f(t) = t$ 이다.
 $|2t - 4| = t$ 의 양변을 제곱하면 $(2t - 4)^2 = t^2$,
 $3t^2 - 16t + 16 = 0$, $(t - 4)(3t - 4) = 0$
즉, $t = \frac{4}{3}$ 또는 $t = 4$ 이므로 $(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$,
 $(f \circ f)(x) = 4$ 이다.
 $f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3}$ 의 교점의

x 좌표가 각각 $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$ 이므로 방정식

$(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$ 의 서로 다른 실근의 합은

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 8$ 이고, 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의

그래프와 직선 $y = 4$ 의 교점의 x 좌표가 각각

0, 2, 4이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = 4$ 의 서로 다른
실근의 합은 $0 + 2 + 4 = 6$ 이다.

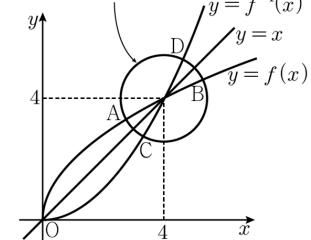
따라서 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로
다른 실근의 합은 $8 + 6 = 14$ 이다.

25 정답 ③

해설 원 $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
두 직선 AB, CD는 서로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$$



따라서 직선 AB의 방정식을 $y = m_1x + n$ 이라 하면

직선 CD의 방정식은 $x = m_1y + n$

$$\text{즉, } y = \frac{1}{m_1}x - \frac{n}{m_1} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } m_2 = \frac{1}{m_1} \text{ 이므로 } m_1m_2 = 1$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

24문제 / dre수학

유형별 학습

이름

- 01** 자연수를 원소로 갖는 집합 A 가 다음 조건을 만족시킬 때,
집합 A 의 개수는?

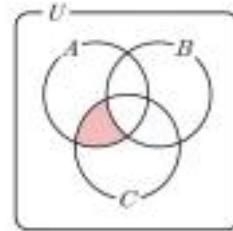
$$x \in A \text{이면 } \frac{16}{x} \in A$$

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개
④ 7개 ⑤ 8개

- 02** 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합 X 에 대하여 집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 하자.
집합 X 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $S(X)$ 의
최솟값을 구하시오.

- (가) $\{6, 8, 9\} \subset X$, $\{1, 5, 9\} \not\subset X$
(나) $S(X)$ 의 값은 짝수이다.
(다) $n(X)=6$

- 03** 다음 중 아래 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는
집합과 항상 같은 집합은?



- ① $(B \cap C) \cap A^c$ ② $(A \cap C) - B$
③ $B - (A \cap C)^c$ ④ $B - (A \cup C)^c$
⑤ $A \cap (B^c \cap C^c)$

- 04** 전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 에 대하여
 $A \cap B = A$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수
없는 것은?

- ① $A \subset B$ ② $A \cup B = B$
③ $A - B = \emptyset$ ④ $A \cup B^c = U$
⑤ $B^c \subset A^c$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

05

전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 7\text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $*$ 를
 $A * B = (A - B^C)^C \cap (A^C - B)^C$ 로 약속할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $\{2, 3, 4\} * \{3, 4, 5\} = \{2, 5\}$
- ㄴ. $A * B = A^C * B^C$
- ㄷ. $A * B = U$ 을 만족시키는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 128이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07

학생 수가 40인 어느 학습에서 두 인터넷 사이트 A, B 의 모의고사를 본 학생 수를 조사하였더니 각각 24명, 32명이었다. 두 인터넷 사이트의 모의고사를 모두 본 학생 수는 최소 몇 명인가?

- ① 14명 ② 15명 ③ 16명
④ 17명 ⑤ 18명

06

두 집합

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여
집합 P 가 다음 조건을 만족한다.

- (ㄱ) $n(P \cap A) = 4$
- (ㄴ) $P - B = \emptyset$
- (ㄷ) 집합 P 의 모든 원소의 합은 48이다.

집합 $P - A$ 의 모든 원소의 곱을 구하시오.

08

a, b, c 가 실수일 때, 〈보기〉에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고른 것은 ?

〈보기〉

- ㄱ. $p : a + b > 0$
- ㄴ. $q : a > 0$, 또는 $b > 0$
- ㄷ. $p : (a - b)(b - c) = 0$
- ㄹ. $q : a = b = c$
- ㅂ. $p : a > b$ 이고 $b > c$
- ㅎ. $q : a > c$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㅂ ⑤ ㄴ, ㅂ

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

09

' ab 가 짝수이면 a 또는 b 는 짝수이다.'라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다. 이때 (가) ~ (라)에 알맞은 것은?
(단, a, b 는 정수이다.)

주어진 명제의 대우는

' a, b 가 모두 홀수이면 ab 도 홀수이다.'

a, b 를 $a = 2k+1, b = 2l+1$ (단, k, l 은 정수)로
놓으면

$$ab = (2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1$$

$$= 2(2kl + k + l) + 1$$

k, l 이 정수이므로 $2kl + k + l$ 은 (가)이다.

따라서 ab 는 (나)이다.

이때 주어진 명제의 대우가 (다)이므로 주어진

명제는 (라)이다.

| | (가) | (나) | (다) | (라) |
|---|-----|-----|-----|-----|
| ① | 짝수 | 정수 | 참 | 참 |
| ② | 홀수 | 홀수 | 거짓 | 거짓 |
| ③ | 정수 | 홀수 | 참 | 참 |
| ④ | 홀수 | 짝수 | 거짓 | 거짓 |
| ⑤ | 정수 | 짝수 | 참 | 참 |

11

실수 전체의 침합 \mathbb{R} 에서 정의된 함수 f 가 일의의 두
실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b) + 3$ 을
만족시킬 때, $f(3) + f(-3)$ 의 값을 구하시오.

12

함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$$

일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 구하면?

① $-x$

② $1-x$

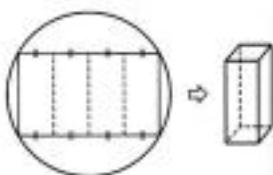
③ $2x-3$

④ x

⑤ $x+2$

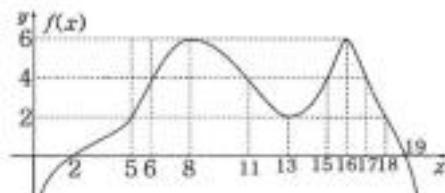
10

지름이 $4\sqrt{5}$ 인 원에 내접하는 직사각형을 잘라서 다음
그림과 같이 정선을 따라 접어 두 밑면이 없는
정사각기둥을 만들었다. 이 기둥의 모든 모서리의 길이의
합의 최댓값을 구하시오.



13

다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. x 에 대한
방정식 $f(f(x+2)) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수와 합을
순서대로 적은 것은?
($x < 2$ 또는 $x > 19$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 2, 20

② 2, 22

③ 3, 20

④ 4, 42

⑤ 4, 50

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

14 두 집합

$$X = \{x \mid -1 \leq x \leq a\}, Y = \{y \mid -13 \leq y \leq b\}$$

에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = -3x + 2$ 의

역함수가 존재할 때, ab 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.)

15

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여

$$f(5x-9) = 10x+1 \text{이다. } f^{-1}(x) = ax+b \text{일 때,}$$

$a-b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수)

16

다음 중 함수 $y = |2x-1|$ 의 그래프와

직선 $y = m(x+2) - 1$ 가 만나도록 하는 상수 m 의
값의 범위는?

- ① $m > -2$
- ② $m \leq \frac{2}{5}$
- ③ $-2 < m < \frac{2}{5}$
- ④ $m < -2$ 또는 $m \geq \frac{2}{5}$
- ⑤ $m \leq -2$ 또는 $m > \frac{2}{5}$

17

곡선 $y = -\frac{3}{x} + 2$ 위의

$$\text{두 점 } A(1, -1), B\left(k, -\frac{3}{k} + 2\right) (-3 < k < 0) \text{을}$$

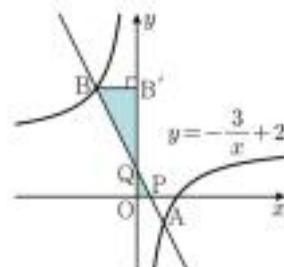
지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자.

점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발을 B' 이라 할 때,

두 삼각형 BQB' , OPQ 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자.

$S_1 + S_2$ 의 최솟값을 m , 그때의 k 값을 α 라 할 때,

$m + \alpha$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)



$$\textcircled{1} \frac{3\sqrt{10}}{5} - 1 \quad \textcircled{2} \frac{7\sqrt{10}}{10} - 1 \quad \textcircled{3} \frac{4\sqrt{10}}{5} - 1$$

$$\textcircled{4} \frac{9\sqrt{10}}{10} - 1 \quad \textcircled{5} \sqrt{10} - 2$$

18

$y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ (k 는 상수)의

교점의 개수를 $N(k)$ 라 하자. 이때

$N(0) + N(1) + N(2) + N(3)$ 의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

19

[2009년 3월 고2 10번/4점]

함수 $f(x) = \frac{a}{x-6} + b$ 에 대하여

함수 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고, $a \neq 0$ 이다.)

- | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|
| ① $-\frac{25}{6}$ | ② -4 | ③ $-\frac{23}{6}$ |
| ④ $-\frac{11}{3}$ | ⑤ $-\frac{7}{2}$ | |

20

함수 $f(x) = \left| 2 - \frac{4}{x} \right|$ 가 있다.

등식 $4f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) = f(b)$ 를 만족시키는 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 $30ab$ 의 값을 구하시오.

22

두 함수

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}k$ ($x \geq 0$), $g(x) = \sqrt{4x-2k}$ 에

대하여 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 개수는?

- | | | |
|-----|-----|-----|
| ① 2 | ② 3 | ③ 4 |
| ④ 5 | ⑤ 6 | |

21

함수 $y = \sqrt{5x+2}$ 의 정의역을 A , 함수 $y = \sqrt{16-4x}$ 의 정의역을 B 라 할 때, $A \cap B$ 에 속하는 정수의 개수는?

- | | |
|-----|-----|
| ① 4 | ② 5 |
| ③ 6 | ④ 7 |
| ⑤ 8 | |

23

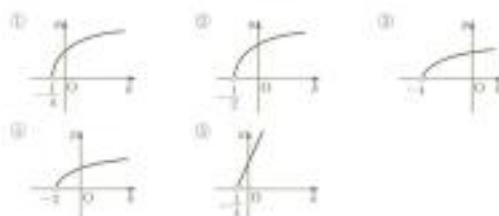
두 함수 $f(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{7}k$ ($x \geq 0$),

$g(x) = \sqrt{7x-k}$ 에 대하여 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 개수는?

- | | | |
|------|------|------|
| ① 10 | ② 11 | ③ 12 |
| ④ 13 | ⑤ 14 | |

24

이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 일차함수 $y = x+k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, 선분 AB 의 길이는 k 에 대한 함수가 된다. 이 함수를 $y = f(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(k)$ 의 그래프의 개형은?



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

24문제 / dre수학

이름

유형별 학습

빠른정답

| | | |
|-------|--------|---------|
| 01 ④ | 02 30 | 03 |
| 04 ④ | 05 ⑤ | 06 5040 |
| 07 ③ | 08 | 09 ③ |
| 10 40 | 11 -6 | 12 ④ |
| 13 ① | 14 25 | 15 10 |
| 16 ④ | 17 ② | 18 6 |
| 19 | 20 128 | 21 ② |
| 22 | 23 ④ | 24 ① |



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

24문제 / dre수학

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $1 \in A$ 이면 $\frac{16}{1} = 16 \in A$

$2 \in A$ 이면 $\frac{16}{2} = 8 \in A$

$4 \in A$ 이면 $\frac{16}{4} = 4 \in A$

따라서 집합 A 는 $\{4\}$, $\{1, 16\}$, $\{2, 8\}$, $\{1, 4, 16\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 8, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 의 7개이다.

02 정답 30

해설 조건 (가)에서 $\{6, 8, 9\} \subset X$ 이고 조건 (나)에서 $S(X)$ 의 값은 짝수이므로 X 는 홀수 2개와 짝수 4개 또는 홀수 4개와 짝수 2개를 원소로 갖는 집합이다.

(i) 집합 X 가 홀수 2개와 짝수 4개를 원소로 가질 때

조건 (가)에서 $\{6, 8, 9\} \subset X$ 이므로 1, 3, 5, 7에서 원소를 1개, 2, 4, 10에서 원소를 2개를 택하는 것과 같다.

위의 조건을 만족시키면서 $S(X)$ 가 최소가 되는 경우는 $X = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ 일 때

$S(X) = 30$ 이다.

(ii) 집합 X 가 홀수 4개와 짝수 2개를 원소로 가질 때

조건 (가)에서 $\{6, 8, 9\} \subset X$,

$\{1, 5, 9\} \not\subset X$ 이므로 $1 \notin X$ 또는 $5 \notin X$ 이다.

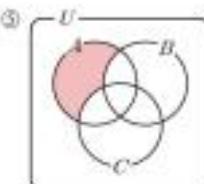
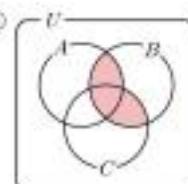
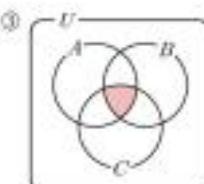
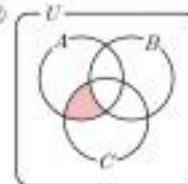
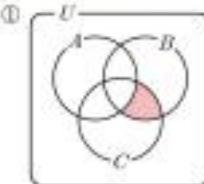
위의 조건을 만족시키면서 $S(X)$ 가 최소가 되는 경우는 $X = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ 일 때

$S(X) = 34$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 $S(X)$ 의 최솟값은 30이다.

03 정답 ②

해설 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 집합은 ⑤이다.

04 정답 ④

해설



$$A \cap B = A \text{에서 } A \subset B$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$\Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow A^c \cup B = U$$

$$\Leftrightarrow B^c \cup A^c$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

05 정답 ⑤

해설 $A * B = (A - B^C)^C \cap (A^C - B)^C$
 $= (A \cap B)^C \cap (A^C \cap B^C)^C$
 $= (A \cap B)^C \cap (A \cup B)$
ㄱ. $\{2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$
 $\{3, 4\}^C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$
 $\{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $\{2, 3, 4\} * \{3, 4, 5\}$
 $= \{1, 2, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5\}$
 $= \{2, 5\}$
ㄴ. $A^C * B^C = (A^C \cap B^C)^C \cap (A^C \cup B^C)$
 $= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C)$
 $= (A^C \cup B^C) \cap (A \cup B)$
 $= (A \cap B)^C \cap (A \cup B)$
 $= A * B$
ㄷ. $A * B = (A \cap B)^C \cap (A \cup B) = U$ 에서
 $(A \cap B)^C = U, A \cup B = U$
즉, $A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$ 이므로 $B = A^C$
따라서 $A * B = U$ 를 만족시키는 집합 A 가 정해지면
집합 B 도 정해지므로
구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는 전체집합 U 의
부분집합 A 의 개수와 같다.
 $\therefore 2^7 = 128$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 정답 5040

해설 $n(P \cap A) = 4$ 에서 집합 A 에 속한 5개의 원소 중
오직 4개만 집합 P 에 속한다. 즉, 집합 A 의 원소 중
집합 P 에 속하는 원소들의 합의 최댓값은
 $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, 최솟값은 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 이다.
그러므로 집합 A 에 속하지 않는 원소들의 합은
34 이상 38 이하이다. … ⊖
 $P - B = \emptyset$ 에서 $P \subset B$ 이고 집합 B 의 원소 중
집합 A 에 속하는 원소를 제외한 나머지 원소들의 집합은
 $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.
(i) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 이 집합 P 에 포함되는 경우 원소의
합은 40이므로 ⊖을 만족시키지 않는다.
(ii) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합 중 네 원소로 이루어진
집합이 집합 P 에 포함되는 경우
원소의 합의 최솟값은 $6 + 7 + 8 + 9 = 30$,
최댓값은 $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ 이므로
⊖을 만족시키는 집합은 $\{7, 8, 9, 10\}$ 이고
(다)에 의해 $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ 은 집합 P 가
될 수 있다.
(iii) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합 중 세 개 이하의 원소로
이루어진 집합은 ⊖을 만족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여
 $P = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ 이고
 $P - A = \{7, 8, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $P - A$ 의 모든 원소의 곱은 5040이다.

07 정답 ③

해설 학생 전체의 집합을 U , 두 인터넷 사이트 A, B 의
모의고사를 본 학생의 집합을 각각 P, Q 라 하면
 $n(U) = 40, n(P) = 24, n(Q) = 32$
 $n(P \cup Q) \leq n(U)$ 이므로 $n(P \cup Q) \leq 40$
그런데 $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$
 $24 + 32 - n(P \cap Q) \leq 40$
 $\therefore n(P \cap Q) \geq 16$
따라서 두 인터넷 사이트의 모의고사를 모두 본 학생 수는
최소 16명이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

08 정답 ④

해설 ㉠. $-p : a+b \leq 0$
 $\neg q : a \leq 0$ 이고 $b \leq 0$
 $\neg q \Rightarrow -p$ 이므로 $p \Rightarrow q$
(반례) $a=1, b=-2$ 이면 $q \neq p$ 이므로
 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
아니다.
㉡. $p : (a-b)(b-c)=0$ 에서 $a=b$ 또는 $b=c$
 $q : a=b=c$
따라서 $p \neq q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 가 q 이기 위한
필요조건이지만 충분조건은 아니다.
㉢. $p : a > b$ 이고 $b > c$ 에서 $a > b > c$ 이므로
 $p \Rightarrow q$
(반례) $a=2, b=-2, c=1$ 이면 $q \neq p$ 이므로
 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
아니다.

09 정답 ③

해설 k, l 이 정수이므로, $2kl+k+l$ 은 정수이다.
따라서 $ab = 2(2kl+k+l)+1$ 은 홀수이다.
주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제 역시 항상
참이다.

10 정답 40

해설



정사각기둥의 전개도에서 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b 라 하면 피타고라스 정리에서
 $a^2 + b^2 = 80$... ①

즉, 계급의 합이 일정하다.
정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합을 l 이라 하면
 $l = 2a + 4b$
따라서 계급의 합이 일정할 때, 합의 최댓값을 구하는
것이므로 코시-슈바르츠의 부등식
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에
 $x = 2, y = 4$ 를 대입하면
 $(a^2 + b^2)(2^2 + 4^2) \geq (2a + 4b)^2$... ②

①을 ②에 대입하면 $80 \cdot 20 \geq (2a + 4b)^2$
 $\therefore 2a + 4b \leq \sqrt{80 \cdot 20} = 40$
따라서 구하는 최댓값은 40이다.

11 정답 -6

해설 $f(a+b) = f(a) + f(b) + 3$... ①
①에 $a=b=0$ 을 대입하면
 $f(0) = f(0) + f(0) + 3$
 $\therefore f(0) = -3$
①에 $a=3, b=-3$ 을 대입하면
 $f(3-3) = f(3) + f(-3) + 3$
 $f(0) = f(3) + f(-3) + 3$
 $-3 = f(3) + f(-3) + 3$
 $\therefore f(3) + f(-3) = -6$

12 정답 ④

해설 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$
해서 $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ 이므로
(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x)) = f(x) = x$
(ii) x 가 무리수일 때, $1-x$ 도 무리수이므로
 $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$
(i), (ii)에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

13 정답 ①

해설 $f(x+2) = t$ 라 하면
주어진 그래프에서 $f(t) = 4$ 인 t 의 값은
 $t = 6, 11, 15, 17$
한번, 다음을 만족하는 x 의 값을 구한다.
 $f(x+2) = 6, 11, 15, 17$... ①
이때 그래프에서 $f(x) \leq 6$ 이므로 ① 중에서 실근을 갖는
것은 $f(x+2) = 6$ 일 때문이다.
따라서 그래프에서 $f(8) = 6, f(16) = 6$ 이므로
 $x+2 = 8, 16$
 $\therefore x = 6, 14$
따라서 조건을 만족하는 서로 다른 실근은 2개이고 그 합은
 $6+14 = 20$

14 정답 25

해설 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.
 $f(x) = -3x + 2$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은
감소하므로
 $f(-1) = b, f(a) = -13$ 이다.
 $f(-1) = b = 5, f(a) = -3a + 2 = -13$
 $\therefore a = 5, b = 5$
 $\therefore ab = 25$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

15 정답 10

해설 $5x - 9 = t$ 로 놓으면

$$x = \frac{t+9}{5}$$

$$\text{따라서 } f(t) = 10 \cdot \frac{t+9}{5} + 1 = 2t + 19$$

$$\therefore f(x) = 2x + 19$$

$$y = 2x + 19 \text{라 하면}$$

$$2x = y - 19$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{19}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{19}{2}$$

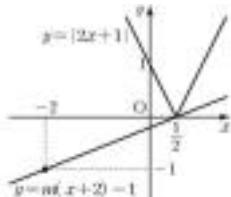
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{19}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{19}{2} \text{ 이므로}$$

$$a - b = 10$$

16 정답 ④

해설



위의 그림에서 함수 직선 $y = m(x+2)-1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$ 을 지닌다.

이때, 함수 $y = |2x+1|$ 의 그래프와

직선 $y = m(x+2)-1$ 이 만나려면

$$(i) m < -\frac{1}{2} \text{에서 } m < -2$$

$$(ii) m \geq -\frac{-1-0}{-2-\frac{1}{2}} \text{에서 } m \geq \frac{2}{5}$$

$$(i), (ii)에서 m < -2 \text{ 또는 } m \geq \frac{2}{5}$$

17 정답 ②

해설 두 절 A(1, -1), B($k, -\frac{3}{k}+2$) ($-3 < k < 0$)을

지나는 직선의 기울기가

$$-\frac{\frac{3}{k}+3}{k-1} = \frac{-3+3k}{k(k-1)} = \frac{3}{k}$$

이므로 직선의 방정식은 $y = \frac{3}{k}(x-1)-1$,

$$\text{즉 } y = \frac{3}{k}x - \frac{3}{k} - 1 \text{이다.}$$

이때 두 절 P, Q의 좌표는 각각 P($\frac{k}{3}+1, 0$),

$$Q(0, -\frac{3}{k}-1) \text{ 이므로}$$

$$\overline{OP} = \frac{k}{3}+1, \overline{OQ} = -\frac{3}{k}-1, \overline{B'Q} = 3, \overline{BB'} = -k$$

따라서 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2 는

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-k) = -\frac{3}{2}k,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{3}+1\right) \left(-\frac{3}{k}-1\right) = -\left(1 + \frac{3}{2k} + \frac{k}{6}\right)$$

이므로

$$S_1 + S_2 = -\frac{5}{3}k - \frac{3}{2k} - 1$$

이때 $-3 < k < 0$ 에서 두 수 $-\frac{5}{3}k, -\frac{3}{2k}$ 이 모두

양수이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_1 + S_2 \geq 2 \sqrt{\left(-\frac{5}{3}k\right) \cdot \left(-\frac{3}{2k}\right)} - 1 = \sqrt{10} - 1$$

(단, 등호는 $k = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 일 때 성립)

$$\therefore m+a = \frac{7\sqrt{10}}{10} - 1$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 6

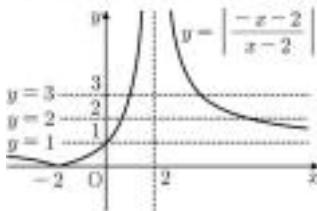
해설 $y = \frac{-x-2}{x-2} = \frac{-(x-2)-4}{x-2} = -\frac{4}{x-2} - 1$

이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-1$ 이고, x 절편은 -2 , y 절편은 1 이다.

함수 $y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프는

유리함수 $y = \frac{-x-2}{x-2}$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은

그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것임으로 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=0$ 의 교점의 개수는 1이므로

$$N(0)=1$$

(ii) 함수 $y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수는 1이므로

$$N(1)=1$$

(iii) 함수 $y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$N(2)=2$$

(iv) 함수 $y = \left| \frac{-x-2}{x-2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$N(3)=2$$

(i)~(iv)에 의하여

$$\therefore N(0)+N(1)+N(2)+N(3)=1+1+2+2=6$$

19 정답 ④

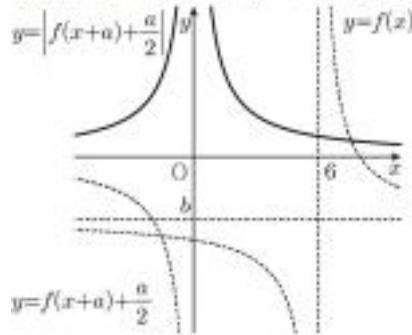
해설 평행이동을 이용하여 유리함수의 그래프를 추론한다.

곡선 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 는

곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 x 축 아래에 그려진 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y 축에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 점근선의

방정식은 그림과 같이 $x=0$, $y=0$ 이어야 함을 알 수 있다.



$$0 \text{ 때 } f(x) = \frac{a}{x-6} + b \text{ 이며 }$$

$$f(x+a) + \frac{a}{2} = \frac{a}{x+a-6} + b + \frac{a}{2} \text{ 이고}$$

곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 점근선의 방정식은

$$x=6-a, y=b+\frac{a}{2}$$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$ 이어야 하므로

$$6-a=0, b+\frac{a}{2}=0$$

$$\therefore a=6, b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{6}{x-6} - 3 \text{ 이므로}$$

$$f(b) = f(-3) = -\frac{11}{3}$$

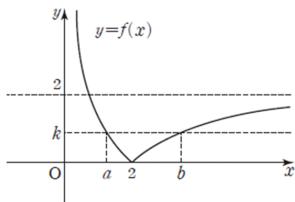
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

20 정답 128

해설 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} - 2 & (0 < x < 2) \\ 2 - \frac{4}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$ 이므로

$x > 0$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $f(a) = f(b) = k$ ($a < b$)라 하면
 $0 < k < 2$ 이다.

$$f(a) = \frac{4}{a} - 2 = k \text{에서 } a = \frac{4}{2+k}$$

$$f(b) = 2 - \frac{4}{b} = k \text{에서 } b = \frac{4}{2-k}$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2+k} + \frac{4}{2-k} \right) = \frac{8}{4-k^2} \text{이고}$$

$$0 < k < 2 \text{에서 } \frac{8}{4-k^2} > 2 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2 - \frac{4}{\frac{8}{4-k^2}} = 2 - \frac{4-k^2}{2} = \frac{k^2}{2}$$

$$\text{따라서 } 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) = f(b) \text{에서}$$

$$4 \cdot \frac{k^2}{2} = k, \quad k(2k-1) = 0$$

$$0 < k < 2 \text{이므로 } k = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{4}{2+\frac{1}{2}} = \frac{8}{5}, \quad b = \frac{4}{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$30ab = 30 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{3} = 128$$

21 정답 ②

해설 함수 $y = \sqrt{5x+2}$ 의 정의역은

$$5x+2 \geq 0 \text{에서 } x \geq -\frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$\left\{ x \mid x \geq -\frac{2}{5} \right\} \text{이다.}$$

$$\therefore A = \left\{ x \mid x \geq -\frac{2}{5} \right\}$$

함수 $y = \sqrt{16-4x}$ 의 정의역은

$$16-4x \geq 0 \text{에서 } x \leq 4 \text{이므로 } \{x \mid x \leq 4\} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } A \cap B = \left\{ x \mid -\frac{2}{5} \leq x \leq 4 \right\} \text{이므로 } A \cap B \text{에}$$

속하는 정수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

22 정답 ①

해설 함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}k$ ($x \geq 0$)은 집합 $\{x | x \geq 0\}$ 에서

집합 $\left\{y \mid y \geq \frac{1}{2}k\right\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}k \text{ 라 하면}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = y - \frac{1}{2}k$$

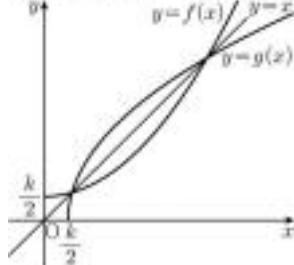
$$x^2 = 4y - 2k$$

$$\therefore x = \sqrt{4y - 2k} (\because x \geq 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \sqrt{4x - 2k}$

즉, 함수 $g(x) = \sqrt{4x - 2k}$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다. 따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}k = x \text{에서 } x^2 - 4x + 2k = 0$$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 2k > 0$$

또한 이차방정식의 두 실근의 곱은 음이 아닌 실수이므로 $2k \geq 0$

$$\therefore 0 \leq k < 2$$

따라서 정수 k 의 개수는 0, 1로 2이다.

23 정답 ④

해설 함수 $f(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{7}k$ ($x \geq 0$)는

집합 $\{x | x \geq 0\}$ 에서 집합 $\left\{y \mid y \geq \frac{1}{7}k\right\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$y = \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{7}k \text{에서}$$

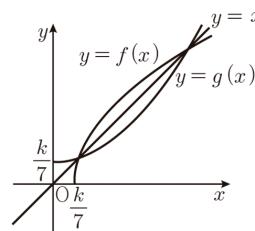
$$\frac{1}{7}x^2 = y - \frac{1}{7}k, x^2 = 7y - k$$

$$\therefore x = \sqrt{7y - k} (\because x \geq 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \sqrt{7x - k}$

즉, 함수 $g(x) = \sqrt{7x - k}$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{7}k = x \text{에서}$$

$x^2 - 7x + k = 0$
이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$k \geq 0, D = (-7)^2 - 4k > 0$$

$$\therefore 0 \leq k < \frac{49}{4}$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 12의 13개이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

24 정답 ①

해설 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프의 두 교점 A, B 라

x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A(\alpha, \alpha+k), B(\beta, \beta+k)$$

이때, $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 의 서로 다른

두 실근이 α, β 이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -k$$

$x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이므로

$$1 + 4k > 0 \quad \therefore k > -\frac{1}{4}$$

따라서 \overline{AB} 의 길이 $f(k)$ 는

$$f(k) = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha + k - \beta - k)^2}$$

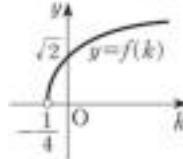
$$= \sqrt{2[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta]}$$

$$= \sqrt{2(1 + 4k)} = \sqrt{8\left(k + \frac{1}{4}\right)}$$

함수 $y = f(k)$ 의 그래프는

$$y = \sqrt{8k}$$
의 그래프를 k 축 방향으로 $-\frac{1}{4}$ 만큼

평행 이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(k)$ 의 그래프 개형은 ①이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

- 01** 집합 $A = \{x | x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키면서 k 개의 원소를 갖는 집합 B 의 개수를 a_k 라 하자. 이때 $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.

- (가) $B \subset A$, $n(B) \neq 0$
(나) $x \in B$ 이면 $\frac{729}{x} \in B$ 이다.

- 02** 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| ㄱ, $\emptyset \in A$ | ㄴ, $\{1, 2\} \subset A$ |
| ㄷ, $\{1, 2, 3\} \subset A$ | ㄹ, $\{\emptyset\} \subset A$ |
| ㅁ, $2 \in A$ | ㅂ, $\{1\} \in A$ |

- ① ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ
② ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ
③ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

- 03** 두 집합 $A = \{3, 5\}$, $B = \{x | x\text{는 }20\text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$, $X \neq A$, $X \neq B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하시오.

- 04** 두 집합 $A = \{3, 4, a+2\}$, $B = \{b+1, 5, 7\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 7\}$ 일 때, $a+b$ 의 값을?

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

- 05** 전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 $B - A = B$ 일 때, 다음 보기 중 항상 성립하는 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

- | | |
|---------------------------|--------------------|
| ㄱ, $A \subset B$ | ㄴ, $A - B = A$ |
| ㄷ, $A \cap B = \emptyset$ | ㅂ, $B^C \subset A$ |

- 06** 두 집합 $A = \{2, 1, a+3, b\}$, $B = \{4, a, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, 집합 A 의 원소는 4개, 집합 B 의 원소는 3개이다.)



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

07

전체집합 U 의 서로 다른 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A \cap \{(A \cap B) \cup (A \cup B^C)^C\} = B$ 일 때, 다음 보기에서
 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

- ㄱ. $A \cap B = B$
- ㄴ. $B - A = \emptyset$
- ㄷ. $A^C \cup B = U - B$
- ㄹ. $A \cup B^C = U$

08

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합
 A, B 에 대하여 연산 * 를
 $A * B = (A - B^C) \cup (A^C - B)$ 로 약속할 때, 다음 보기
 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- ㄴ. $A^C * B = B^C * A$
- ㄷ. $A^C * B = \emptyset$ 을 만족시키는 두 집합 A, B 의
 순서쌍 (A, B) 의 개수는 128이다.

① ㄴ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09

세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라
 하자. $P \cap Q = R$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중
 참인 명제는?

- ① $p \Rightarrow q$
- ② $p \Rightarrow \sim r$
- ③ $q \Rightarrow r$
- ④ $r \Rightarrow p$
- ⑤ $r \Rightarrow \sim q$

10

[2016년 6월 고3 문과 16번 변형]
 실수 x 에 대한 세 조건

$$p: |x| \leq 2,$$

$$q: x^2 - 4 < 0,$$

$$r: x > 2$$

에 대하여 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

$$\neg. p \rightarrow q$$

$$\text{ㄴ. } p \rightarrow \sim r$$

$$\text{ㄷ. } r \rightarrow \sim q$$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11

어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E의
 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을
 세웠다.

- (i) A형인 사람은 B형이 아니다.
- (ii) C형이 아닌 사람은 B형이 아니다.
- (iii) C형인 사람은 D형이 아니다.
- (iv) E형인 사람은 B형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두
 고르면?

보기

Ⓐ A형인 사람은 E형이 아니다.

Ⓑ E형인 사람은 C형이 아니다.

Ⓒ E형이면서도 D형인 사람이 있다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

12

다음 보기 중 명제 ' $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ '이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, x, y 는 실수이다.)

〈보기〉

- | | |
|--------------------|--------------------|
| ㄱ. $ x + y > 0$ | ㄴ. $x + y \neq 0$ |
| ㄷ. $xy \neq 0$ | ㄹ. $x^2 + y^2 > 0$ |

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

13

전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에서 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- | | |
|--|-------------------------------|
| ㄱ. $p: A \cap B^C = \emptyset$ | ㄴ. $q: A \cup B = B$ |
| ㄷ. $p: A \cup (B \cup C) = (B \cup C)$ | ㄹ. $q: A \cap (B \cap C) = A$ |
| ㅌ. $p: A \subset B, B \subset A$ | ㅍ. $q: A^C \cup B^C = U$ |

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㅌ

14

실수 x 에 대한 두 조건

$p: 5|x+2| < 14 + 3x,$

$q: a < x < b$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때,
 $b - a$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15

$x > 1$ 일 때, $x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq a$ 가 항상 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 구하시오.

16

실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f: R \rightarrow R$ 가 $f(x) = a|x-3| + 2x$ 로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

17

함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때,
함수 $f(x)$ 는?

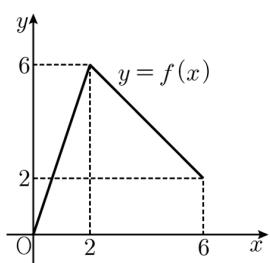
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ① $f(x) = \frac{x-1}{2}$ | ② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ |
| ③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$ | ④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ |
| ⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$ | |

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

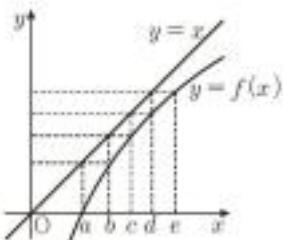
18

$0 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해를 모두 구하시오.



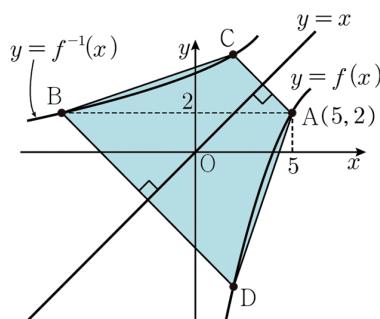
19

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)$ 의 값을 구하시오.
(단, 모든 절선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



20

다음 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 A(5, 2)를 지나는 x 축과 평행한 직선이 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점 C와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 D에 대하여 두 선분 AC, BD가 직선 $y = x$ 에 수직이다. $3f^{-1}(2) + 2f(2) = 1$ 일 때, 사각형 ACBD의 넓이를 구하시오.



21

다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{3x^2 + 7x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

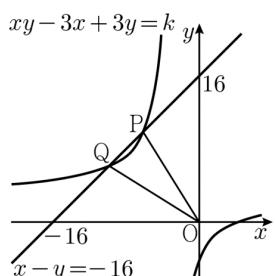
성립할 때, abc 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

22

- 그림과 같이 곡선 $xy - 3x + 3y = k$ 가
직선 $x - y = -16$ 과 만나는 두 점을 P, Q라 하자.
두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 60일 때,
 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값을 구하시오. (단, $k < 0$)



23

- 함수 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1$,
 $f^3 = f \circ f^2$, ..., $f^n = f \circ f^{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$)로
정의한다. $f^{100}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 일 때, 상수 a, b, c, d 에
대하여 $a+b-c+d$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b, c, d 는 서로소이고, $a > 0$ 이다.)

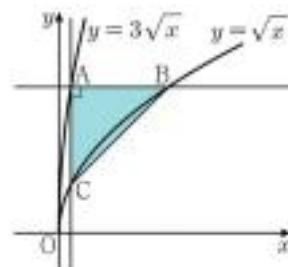
24

- 함수 $y = \frac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로
다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25

- (2015년 3월 22일 문제 17번 변형)
다음 그림과 같이 함수 $y = 3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의
점 A를 지나고 x 축, y 축에 각각 평행한 직선이
함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라
하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때,
삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

빠른정답

| | | |
|--|---------|--------|
| 01 4 | 02 ② | 03 62 |
| 04 ① | 05 ㄴ, ㄷ | 06 6 |
| 07 ㄱ, ㄴ, ㄹ | 08 ④ | 09 ④ |
| 10 | 11 ⑤ | 12 ② |
| 13 ① | 14 ⑤ | 15 4 |
| 16 3 | 17 ④ | |
| 18 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 5$ | | 19 e |
| 20 72 | 21 6 | 22 136 |
| 23 102 | 24 ③ | 25 ④ |



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B 는 공집합이 아니어야 하고, 집합 B 의 원소는 729의 양의 약수이어야 한다.

이때 729의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729이고 조건 (나)에 의하여 1과 729, 3과 243, 9와 81은 어느 하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의 원소이다.

- (i) $n(B)=1$ 인 경우는 $\{27\}$ 이므로 $a_1=1$
(ii) $n(B)=3$ 인 경우는 $\{1, 27, 729\}$, $\{3, 27, 243\}$, $\{9, 27, 81\}$ 이므로 $a_3=3$
(i), (ii)에 의하여
 $a_1+a_3=1+3=4$

02 정답 ②

해설 $\sqsubset, \{\{1, 2, 3\}\} \sqsubset A$ 또는 $\{\{\{1, 2, 3\}\}\} \sqsubset A$
 $\sqsubseteq, \{\{1\}\} \sqsubseteq A$

03 정답 62

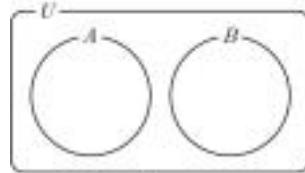
해설 $A=\{3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합에서 두 집합 A, B 를 제외한 것과 같으므로
집합 X 의 개수는 $2^{8-2}-2=62$

04 정답 ①

해설 $(A \cap B) \subset A$ 이고 $(A \cap B) \subset B$ 에서
 $a+2=7, b+1=4$ 이므로
 $a=5, b=3$
 $\therefore a+b=5+3=8$

05 정답 \sqsubset, \sqsubseteq

해설 다음 그림과 같이 $B-A=B$ 이면
 $A \cap B = \emptyset, A \subset B^C$



$$\therefore A-B=A$$

따라서 항상 성립하는 것은 \sqsubset, \sqsubseteq 이다.

06 정답 6

해설 (i) $a+3=4$ 일 때, $a=1$

$$A=\{2, 1, 4, b\}$$

$$B=\{4, 1, b+1\}$$

$$b+1=2,$$

$b=1$ 에서 $A=\{1, 2, 4\}$ 이고 원소는 3개가 되므로 조건에 맞지 않음.

(ii) $b=4$ 일 때,

$$A=\{2, 1, a+3, 4\}$$

$$B=\{4, a, 5\}$$

$a+3=5, a=2$ 에서 성립함.

$$\therefore a+b=4+2=6$$

07 정답 $\sqsubseteq, \sqsubset, \sqsupseteq$

해설 $A \cap \{(A \cap B) \cup (A \cup B^C)^C\}$
 $= A \cap \{(A \cap B) \cup (A^C \cap B)\}$
 $= A \cap \{(A \cup A^C) \cap B\}$
 $= A \cap (U \cap B)$
 $= A \cap B$
즉, $A \cap B=B$ 이므로 $B \subset A$ 이다.
 $\sqsubseteq, A \cap B=B$
 $\sqsubset, B-A=\emptyset$
 $\sqsupseteq, A^C \cup B \neq U-B$
 $\sqsupseteq, A \cup B^C=(A^C \cap B)^C=\emptyset^C=U$
따라서 항상 옳은 것은 $\sqsubseteq, \sqsubset, \sqsupseteq$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

08 정답 ④

해설 $A * B = (A - B^C) \cup (A^C - B)$

$$= (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cup B)^C$$

$$\neg. \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 3\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\} \text{이므로}$$

$$\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{2, 3\} \cup \{4, 6, 7\}$$

$$= \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

$$\vdash. A^C * B = (A^C \cap B) \cup (A^C \cup B)^C$$

$$= (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$B^C * A = (B^C \cap A) \cup (B^C \cup A)^C$$

$$= (B^C \cap A) \cup (B \cap A^C)$$

$$= (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$\text{따라서 } A^C * B = B^C * A$$

$$\vdash. A^C * B = (A^C \cap B) \cup (A^C \cup B)^C = \emptyset \text{에서}$$

$$A^C \cap B = \emptyset, (A^C \cup B)^C = \emptyset$$

$$\text{즉, } A^C \cap B = \emptyset, A^C \cup B = U \text{이므로}$$

$$B = (A^C)^C = A$$

따라서 $A^C * B = \emptyset$ 를 만족시키는 집합 A 가 정해지면 집합 B 도 정해지므로

구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 A 의 개수와 같다.

$$\therefore 2^7 = 128$$

따라서 옳은 것은 \vdash, \vdash 이다.

09 정답 ④

해설 세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap Q = R$ 인 관계가 성립하므로 $R \subset P, R \subset Q$ 이다. 따라서 $r \Rightarrow p, r \Rightarrow q$ 등이 참인 명제가 된다.

10 정답 ④

해설 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid -2 < x < 2\}$$

$$R = \{x \mid x > 2\}$$

$\neg. P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

$$\vdash. R^C = \{x \mid x \leq 2\} \text{이므로}$$

$$P \subset R^C$$

즉, 명제 $p \rightarrow \sim r$ 은 참이다.

$$\vdash. Q^C = \{x \mid x \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq x\} \text{이므로}$$

$$R \subset Q^C$$

즉, 명제 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

따라서 참인 명제는 \vdash, \vdash 이다.

11 정답 ⑤

해설 조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv)

를 명제로 표현하면

$A \rightarrow \sim B, \sim C \rightarrow \sim B, C \rightarrow \sim D, E \rightarrow$

B 이고, 대우를 각각 구해 보면

(i)의 경우 : B형이면 A형이 아니다.

즉, $B \rightarrow \sim A$

(ii)의 경우 : B형이면 C형이다.

즉, $B \rightarrow C$

(iii)의 경우 : D형이면 C형이 아니다.

즉, $D \rightarrow \sim C$

(iv)의 경우 : B형이 아니면 E형이 아니다.

즉, $\sim B \rightarrow \sim E$

$E \rightarrow B$ 이고 $B \rightarrow \sim A$ 이므로 $E \rightarrow \sim A$,

즉, $A \rightarrow \sim E$

$\sim C \rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \rightarrow \sim E$

즉, $E \rightarrow C$

$D \rightarrow \sim C, \sim C \rightarrow \sim B, \sim B \rightarrow \sim E$ 이므로 $D \rightarrow \sim E$

따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 (i), (ii)이다.

12 정답 ②

해설 ㄱ. $|x| + |y| > 0$, 즉 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$

따라서 $|x| + |y| > 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $x + y \neq 0$, 즉 $x \neq -y$ 이므로

$x + y \neq 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 과 포함관계가 아니다.

ㄷ. $xy \neq 0$, 즉 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이므로

$xy \neq 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄹ. $x^2 + y^2 > 0$, 즉 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$

따라서 $x^2 + y^2 > 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한 필요조건이다.

따라서 필요충분조건인 것은 ㄷ뿐이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

13 정답 ①

해설 ㄱ. $A \cap B^C = \emptyset$ 이면 $A \subset B$
 $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$
따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로
 p 가 q 이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. $A \cup (B \cup C) = (B \cup C)$ 이면 $A \subset (B \cup C)$
 $A \cap (B \cap C) = A$ 이면 $A \subset (B \cap C)$
따라서 $q \Rightarrow p$, $p \not\Rightarrow q$ 이므로
 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $A \subset B$, $B \subset A$ 이면 $A = B$
 $A^C \cup B^C = U$ 이면 $(A \cap B)^C = U$
 $\therefore A \cap B = \emptyset$
따라서 $p \not\Rightarrow q$, $q \not\Rightarrow p$ 이다.
이상에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ뿐이다.

14 정답 ⑤

해설 조건 p 에서
(i) $x \geq -2$ 일 때,
 $x + 2 \geq 0$ 이므로 $5(x+2) < 14 + 3x$
 $2x < 4$, $x < 2$
따라서 부등식의 해는 $-2 \leq x < 2$
(ii) $x < -2$ 일 때,
 $x + 2 < 0$ 이므로 $-5(x+2) < 14 + 3x$
 $-8x < 24$, $x > -3$
따라서 부등식의 해는 $-3 < x < -2$
(i), (ii)에 의하여 $-3 < x < 2$
이때 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로
 $a = -3$, $b = 2$
따라서 $b - a = 2 - (-3) = 5$

15 정답 4

해설 $x > 1$ 이므로 $x - 1 > 0$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$$
이므로
 $a \leq 4$ 이어야 한다.
따라서 a 의 최댓값은 4

16 정답 3

해설 (i) $x < 3$ 일 때, $x - 3 < 0$ 이므로
 $f(x) = -a(x-3) + 2x = -(a-2)x + 3a$
(ii) $x \geq 3$ 일 때, $x - 3 \geq 0$ 이므로
 $f(x) = a(x-3) + 2x = (a+2)x - 3a$
(i), (ii)에서
$$f(x) = \begin{cases} -(a-2)x + 3a & (x < 3) \\ (a+2)x - 3a & (x \geq 3) \end{cases}$$

함수 f 가 일대일대응이 되려면 두 직선
 $y = -(a-2)x + 3a$, $y = (a+2)x - 3a$ 의 기울기의
부호가 서로 같아야 하므로
 $-(a-2)(a+2) > 0$, $(a-2)(a+2) < 0$
 $\therefore -2 < a < 2$
따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

17 정답 ④

해설 $f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라 놓으면
 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로
$$f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$$

 $\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18

정답 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 5$

해설 주어진 그림에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < 2) \\ -x + 8 & (2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 에서

$f(x) = t$ ($0 \leq t \leq 6$)이라 하면 $f(t) = t + 2$

(i) $0 \leq t < 2$ 일 때

$$3t = t + 2$$

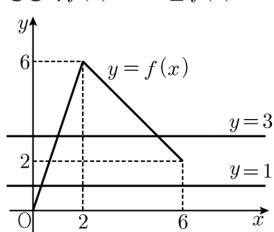
$$\therefore t = 1$$

(ii) $2 \leq t \leq 6$ 일 때

$$-t + 8 = t + 2, 2t = 6$$

$$\therefore t = 3$$

(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해는
방정식 $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3$ 의 해와 같다.



방정식 $f(x) = 1$ 의 해는

$$0 \leq x < 2 \text{ 일 때}, 3x = 1 \text{에서 } x = \frac{1}{3}$$

$2 \leq x \leq 6$ 일 때, 해가 존재하지 않는다.

방정식 $f(x) = 3$ 의 해는

$$0 \leq x < 2 \text{ 일 때}, 3x = 3 \text{에서 } x = 1$$

$$2 \leq x \leq 6 \text{ 일 때}, -x + 8 = 3 \text{에서 } x = 5$$

따라서 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해는

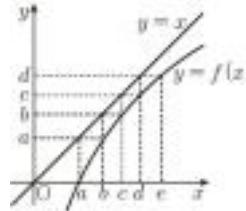
$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

19

정답

e

해설 직선 $y = x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 구하면 다음과 그림과 같다.



$$f^{-1}(c) = k \text{라 하면 } f(k) = c \text{이므로}$$

$$k = d$$

$$f^{-1}(d) = l \text{라 하면 } f(l) = d \text{이므로}$$

$$l = e$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c) &= f^{-1}(f^{-1}(c)) \\ &= f^{-1}(d) \\ &= e \end{aligned}$$

20

정답

72

해설 점 A(5, 2)가 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(5) = 2 \text{이고 } f^{-1}(2) = 5$$

$$3f^{-1}(2) + 2f(2) = 1 \text{에 대입하면}$$

$$2f(2) = 1 - 3f^{-1}(2) = 1 - 3 \cdot 5 = -14 \text{에서}$$

$$f^{-1}(-7) = 2 \text{이므로 } B(-7, 2)$$

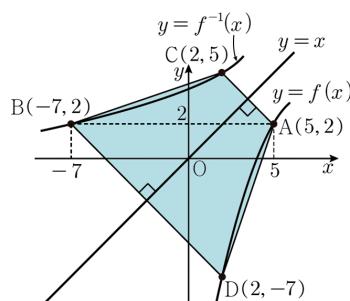
이때 두 직선 AC, BD가 직선 $y = x$ 에 수직이고

두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가

직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 A, B를

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 각각 C, D이다.

즉, C(2, 5), D(2, -7)



사다리꼴 ACBD에서 $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$, $\overline{BD} = 9\sqrt{2}$ 이고

높이는 선분 AC의 중점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 과 선분 BD의

중점 $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로 $6\sqrt{2}$ 이다.

따라서 사다리꼴 ACBD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2} + 9\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{2} = 72$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

21 정답 6

해설 $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$ 이므로
 주어진 등식의 양변에 $(x-1)(x+1)^2$ 을 곱하면
 $3x^2 + 7x - 2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1)^2$
 $+ c(x-1)$
 $3x^2 + 7x - 2 = (a+b)x^2 + (2b+c)x + (-a+b-c)$
 $a+b=3, 2b+c=7, -a+b-c=-2$ 이므로
 세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2, c=3$
 $\therefore abc=6$

22 정답 136

해설 $xy - 3x + 3y = k \quad \dots \textcircled{1}$
 곡선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $x - y = -16$ 의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라 하고, $y = x + 16$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면
 $x^2 + 16x + (48 - k) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
 이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha\beta = 48 - k = 60$
 $\therefore k = -12$
 $k = -12$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $x = -6$ 또는 $x = -10$
 $\therefore P(-6, 10), Q(-10, 6)$
 $\therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP}^2 = 6^2 + 10^2 = 136$

23 정답 102

해설 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에서

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

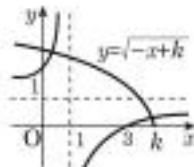
$$f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

같은 방법으로 하면 $f^{100}(x) = \frac{x}{1-100x}$

따라서 $a=1, b=0, c=-100, d=1$ 이므로
 $a+b-c+d=102$

24 정답 ③

해설 $y = \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3이다.

25 정답 ④

해설 점 A의 좌표를 $(a, 3\sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면 B($9a, 3\sqrt{a}$), C(a, \sqrt{a})가 된다.
 직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a, 2\sqrt{a}$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로
 $8a = 2\sqrt{a}, 4a = \sqrt{a}$
 $16a^2 = a$
 이때 $a \neq 0$ 이므로 $16a = 1, a = \frac{1}{16}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (8a)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

이름

유형별 학습

01 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

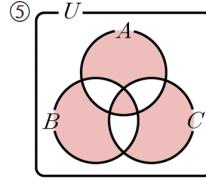
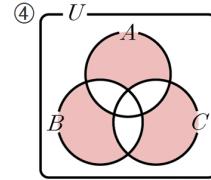
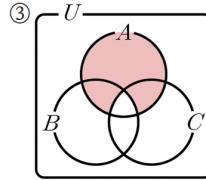
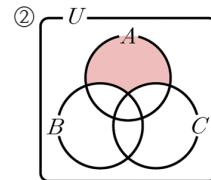
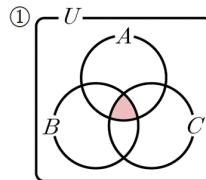
- ① $\{a, b, c\} \subset A$ ② $\{b, c\} \subset A$
③ $\{a, c\} \in A$ ④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$
⑤ $\emptyset \subset A$

02 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

- ① $B \cap A^C$ ② $(A \cup B) - B$
③ $B - A$ ④ $B \cap (U - A)$
⑤ $B \cap (A \cap B)^C$

03 두 집합 $A = \{a + 2b, -5\}$, $B = \{2a + b, 2\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, $b - a$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

04 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 집합 $(A - B) \cup (C^C - A^C)$ 을 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

05

다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?
(단, x, y, z 는 실수이다.)

- ① $p: x+y$ 는 무리수이다.
 $q: x$ 또는 y 가 무리수이다.
- ② $p: xy = 0$
 $q: xyz = 0$
- ③ $p: xy > x+y > 4$
 $q: x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p: xy+1 > x+y > 2$
 $q: x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p: |x+y+z| = |x| + |y| + |z|$
 $q: xy + yz + zx \geq 0$

06

어느 운동 동호회 회원 80명을 대상으로 야구와 축구의 선호도를 조사하였다. 그 결과 야구를 좋아하는 회원이 38명, 축구를 좋아하는 회원이 44명, 야구와 축구 중 어느 것도 좋아하지 않는 회원이 12명이었다. 이때 축구만 좋아하는 회원 수를 구하시오.

07

집합 $X = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^3 - 6x - 18$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

08

함수 $f(x) = \begin{cases} 4x & (x \geq 2) \\ -x^2 + 6x & (x < 2) \end{cases}$ 에 대하여
 $(f \circ f)(3) + f^{-1}(-7)$ 의 값을 구하시오.

09

함수 $f(x) = \frac{4x+3}{x+a}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x+b}{cx-4}$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하시오.

10

실수 x 에 대하여 $|x| = x$ 일 때, $3x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{3x^2 + 1}$ 의 최솟값은? (단, $x \neq 0$)

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

11

어떤 농부가 길이 40m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양으로 이루어진 우리를 만들려고 한다. 이때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 40m^2 ② 50m^2 ③ 60m^2
 ④ 70m^2 ⑤ 80m^2

12

다음 중 실수 전체의 집합에서 정의된
 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록
 하는 두 상수 a, b 의 값으로 적당한 것을 고르면?

- ① $a=1, b=-1$ ② $a=1, b=1$
 ③ $a=2, b=-1$ ④ $a=2, b=0$
 ⑤ $a=-1, b=2$

13

함수 $y = \frac{ax+3}{2x-b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이
 $x=-2, y=4$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx+a}$ 의 정의역에
 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

14

무리함수 $y = \sqrt{kx+3} - 2$ 의 그래프가
 두 점 A(3, 1), B(3, 5)를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는
 정수 k 의 개수는?

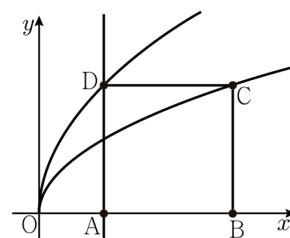
- ① 12 ② 14 ③ 16
 ④ 18 ⑤ 20

15

함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f^{(20)}\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값을 구하시오.
 (단, $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수이다.)

16

두 무리함수 $y = \sqrt{3x}, y = \sqrt{x}$ 의 그래프가
 다음 그림과 같다. 점 A($a, 0$)에서 x 축에 수직인 직선을
 그어 함수 $y = \sqrt{3x}$ 와 만나는 점을 D라 하고,
 \overline{AD} 를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD를 만들면
 점 C는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위에 있다. 이때 양수 a 의
 값을 구하시오.



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프와

17

두 무리함수 $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y = \sqrt{6}$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

18

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 하자. $2 \in X$, $4 \in X$, $8 \notin X$ 인 모든 X 에 대하여 $S(X)$ 의 합은?

- ① 456 ② 464 ③ 472
④ 480 ⑤ 488

19

정수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a+k, b+k, c+k, d+k\}$ 에 대하여, $A \cap B = \{2, 5\}$ 이고 A 에 속하는 모든 원소의 합이 10, $A \cup B$ 에 속하는 모든 원소의 합이 21일 때, k 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

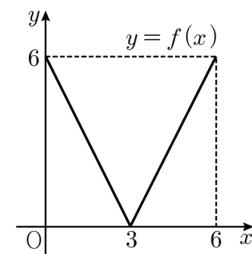
20

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A^C \cup B^C) \cap (A \cup B^C)\} \cup \{(A^C \cap B) \cup (A \cap B)\}$ 를 간단히 하면?

- ① \emptyset ② A ③ B
④ A^C ⑤ U

21

함수 $f(x) = |6 - 2x|$ ($0 \leq x \leq 6$)에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

- ㄱ. $f(f(3))=6$
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$ 의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$ 의 모든 실근의 합은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

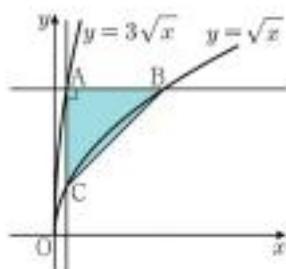
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

22

[2018년 3월 고2 22번 변형]

다음 그림과 같이 함수 $y = 3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x 축, y 축에 각각 평행한 직선이 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제I사분면에 있다.)



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

23

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여
함수 $f : X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 9이다.
(나) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$
 $+ f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 62$
(다) 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의
차는 8이다.

집합 X 의 어떤 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b) = n$ 을
만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

24

[2008년 3월 고2 26번]

두 함수

$$f(x) = |x| - 4, g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 $g(f(k)) = 3$ 을 만족하는 실수 k 의 값을
 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 라 하자. 이때 $\alpha - \beta$ 의 값을 구하시오.

25

함수 $y = 4\sqrt{x-7} + 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

a 만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y = f(x)$ 라 하자.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 접할 때,
 a 의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

빠른정답

| | | |
|------------------|----------------|-------------------|
| 01 | 02 ② | 03 7 |
| 04 ③ | 05 ④ | 06 30 |
| 07 9 | 08 47 | 09 -6 |
| 10 | 11 ② | 12 ③ |
| 13 | 14 ② | 15 $\frac{1}{30}$ |
| 16 $\frac{3}{4}$ | 17 $4\sqrt{6}$ | 18 ④ |
| 19 ② | 20 ⑤ | 21 ⑤ |
| 22 ④ | 23 8 | 24 10 |
| 25 3 | | |



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

01 정답 ⑤

- 해설 ① $\{a, \{b, c\}\} \subset A$
② $\{b, c\} \in A$
③ $\{a, c\} \subset A$
④ $\{\{b, c\}, c\} \subset A$

02 정답 ②

해설 ① $B \cap A^C$
② $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^C$
 $= (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C)$
 $= A \cap B^C$
③ $B - A = B \cap A^C$
④ $B \cap (U - A) = B \cap A^C$
⑤ $B \cap (A \cap B)^C = B \cap (A^C \cup B^C)$
 $= (B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)$
 $= B \cap A^C$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

03 정답 7

해설 $A = B$ 이므로
 $a + 2b = 2, 2a + b = -5$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -4, b = 3$
 $\therefore b - a = 3 - (-4) = 7$

04 정답 ③

해설 $(A - B) \cup (C^C - A^C) = (A \cap B^C) \cup \{C^C \cap (A^C)^C\}$
 $= (A \cap B^C) \cup (C^C \cap A)$
 $= A \cap (B^C \cup C^C)$
 $= A \cap (B \cap C)^C$
 $= A - (B \cap C)$

따라서 $(A - B) \cup (C^C - A^C)$ 를 벤다이어그램으로
바르게 나타낸 것은 ③이다.

05 정답 ④

- 해설 ① $x+y$ 는 무리수이다. $\Leftrightarrow x$ 또는 y 가 무리수이다.
[\leftarrow 의 반례] $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$
 \therefore 충분조건
② $xy = 0 \Leftrightarrow xyz = 0$
[\leftarrow 의 반례] $x = 3, y = 2, z = 0$
 \therefore 충분조건
③ $xy > x+y > 4 \Leftrightarrow x > 2$ 이고 $y > 2$
[\rightarrow 의 반례] $x = 4, y = 2$
 \therefore 필요조건
④ $xy+1 > x+y > 2$
 $\Leftrightarrow xy+1 > x+y$ 이고 $x+y > 2$
 $\Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0$ 이고 $x+y - 2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$ 이고 $(x-1) + (y-1) > 0$
 $\Leftrightarrow x-1 > 0$ 이고 $y-1 > 0$
 $\Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$
 \therefore 필요충분조건
⑤ $|x+y+z| = |x| + |y| + |z|$
 $\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq 0$
[\leftarrow 의 반례] $x = 3, y = 5, z = -1$
 \therefore 충분조건

06 정답 30

해설 회원 전체의 집합을 U , 야구를 좋아하는 회원의 집합을 A , 축구를 좋아하는 회원의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 80, n(A) = 38, n(B) = 44,$
 $n(A^C \cap B^C) = 12$
 $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $n(A \cup B) = 80 - 12 = 68$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 38 + 44 - 68$
 $= 14$
따라서 축구만 좋아하는 회원 수는
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
 $= 44 - 14$
 $= 30$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

07 정답 9

해설 $f(x) = x^2 - 6x - 18 = (x-3)^2 - 27$ 이고
함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로
 $a \geq 3, f(a) = a$
 $f(a) = a$ 에서 $a^2 - 6a - 18 = a$
 $a^2 - 7a - 18 = 0, (a+2)(a-9) = 0$
 $\therefore a = 9 (\because a \geq 3)$

08 정답 47

해설 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(12) = 48$
한편, $f^{-1}(-7) = a$ 라 하면 $f(a) = -7$
(i) $a \geq 2$ 일 때
 $f(a) = 4a$ 이므로
 $4a = -7$
 $\therefore a = -\frac{7}{4}$
그런데 $a \geq 2$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $a < 2$ 일 때
 $f(a) = -a^2 + 6a$ 이므로
 $-a^2 + 6a = -7, a^2 - 6a - 7 = 0$
 $(a+1)(a-7) = 0$
 $\therefore a = -1 (\because a < 2)$
(i), (ii)에서 $a = -1$ 이므로 $f^{-1}(-7) = -1$
 $\therefore (f \circ f)(3) + f^{-1}(-7) = 48 + (-1) = 47$

09 정답 -6

해설 $y = \frac{4x+3}{x+a}$ 으로 놓으면 $y(x+a) = 4x+3$
 $(y-4)x = -ay+3$
 $\therefore x = \frac{-ay+3}{y-4}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-ax+3}{x-4}$
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax+3}{x-4}$
즉, $\frac{2x+b}{cx-4} = \frac{-ax+3}{x-4}$ 이므로
 $a = -2, b = 3, c = 1$
 $\therefore abc = -2 \cdot 3 \cdot 1 = -6$

10 정답 ④

해설 $|x| = x, x \neq 0$ 에서 $x > 0$ 이므로 산술평균과
기하평균의 관계에 의하여

$$3x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{3x^2+1} = \frac{3x^2+1}{x} + \frac{16x}{3x^2+1}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3x^2+1}{x} \cdot \frac{16x}{3x^2+1}}$$

$$= 2 \cdot 4 = 8$$

(단, 등호는 $\frac{3x^2+1}{x} = \frac{16x}{3x^2+1}$, 즉 $x = \frac{1}{3}$ 또는
 $x = 1$ 일 때 성립한다.)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8

11 정답 ②

해설



전체 직사각형의 가로의 길이를 am , 세로의
길이를 bm 라고 하면
 $a > 0, b > 0$

철망의 길이가 40m이므로
 $2a + 4b = 40$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2a + 4b \geq 2\sqrt{2a \cdot 4b}, 40 \geq 2\sqrt{8ab}$
 $\therefore 20 \geq \sqrt{8ab}$ (단, 등호는 $2a = 4b$ 일 때 성립)
양변을 제곱하면

$$400 \geq 8ab \quad \therefore ab \leq 50$$

직사각형의 넓이 S 는 $S = ab \leq 50$

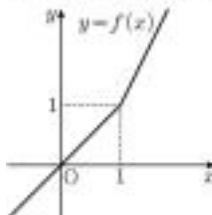
따라서 우리의 넓이의 최댓값은 $50m^2$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

12 정답 ③

해설 f 가 일대일대응이 되려면
 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y = ax + b$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로
 $a + b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$
또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선 $y = ax + b$ 의
기울기도 양이어야 한다.
 $\therefore a > 0 \quad \dots \textcircled{2}$

따라서 주어진 보기 중 ①, ②를 만족하는 것은 ③이다.

13 정답 ⑤

해설 $y = \frac{ax+3}{2x-b} = \frac{\frac{ab+6}{4}}{\frac{x-\frac{b}{2}}{2}} + \frac{a}{2}$ 이므로

점근선의 방정식은 $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$

$$\therefore a = 8, b = -4$$

따라서 함수 $y = \sqrt{-4x+8}$ 의 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$
이므로 정의역에 속하는 정수의 최댓값은 2이다.

14 정답 ②

해설 무리함수 $y = \sqrt{kx+3} - 2$ 의 그래프가 선분 AB와
만나기 위해서는 $x = 3$ 일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3} - 2$ 가
1과 5 사이에 있어야 한다.

$$\text{즉}, 1 \leq \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5$$

$$\sqrt{3k+3} - 2 \geq 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{3k+3} \geq 3, 3k+3 \geq 9$$

$$\therefore k \geq 2$$

$$\text{또}, \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5 \text{에서}$$

$$\sqrt{3k+3} \leq 7, 0 \leq 3k+3 \leq 49$$

$$\therefore 2 \leq k \leq \frac{46}{3}$$

따라서 $1 \leq \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5$ 를 만족하는 k 의 범위는

$$2 \leq k \leq \frac{46}{3} \text{ 이므로 구하는 정수 } k \text{는 } 2, 3, 4, \dots, 15 \text{의 } 14 \text{개이다.}$$

15 정답 $\frac{1}{30}$

해설 $f^1(x) = \frac{x}{1+x}$
 $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$
 $= f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$
 $f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$
 $= f\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}$
 \vdots
 $\therefore f^n(x) = \frac{x}{1+nx}$
 $\therefore f^{20}(x) = \frac{x}{1+20x}$
 $\therefore f^{20}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1+20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$

16 정답 $\frac{3}{4}$

해설 점 A의 좌표가 $(a, 0)$ 이므로 점 D의 좌표는 $(a, \sqrt{3a})$

이때 두 점 C, D의 y좌표가 같으므로

$$\sqrt{x} = \sqrt{3a} \text{에서}$$

$$x = 3a$$

즉, 점 C의 좌표는 $(3a, \sqrt{3a})$

이때 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로

$$\sqrt{3a} = 3a - a$$

$$4a^2 - 3a = 0$$

$$a(4a - 3) = 0$$

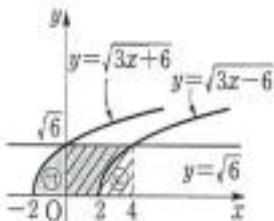
$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = \frac{3}{4}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

17 정답 $4\sqrt{6}$

해설 $y = \sqrt{3x-6} = \sqrt{3(x-4)+6}$ 이므로
 $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{3x+6}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프와
 x 축 및 직선 $y = \sqrt{6}$ 으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의
색칠한 부분과 같다.



이때 ①과 ②의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 빗금 친
직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $4 \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

18 정답 ④

해설 $2 \not\in X$, $4 \in X$, $8 \not\in X$ 인 집합 X 의 개수는
 $2^{8-1-1-1} = 2^5 = 32$
한편, 32개의 집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의
개수는 $1 \in X$, $2 \not\in X$, $4 \in X$, $8 \not\in X$ 인 집합의 개수와
같으므로
 $2^{8-1-3} = 2^4 = 16$
마찬가지로 3, 5, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도
16이므로 $S(X)$ 의 합은
 $32 \cdot 4 + 16(1+3+5+6+7) = 480$

19 정답 ②

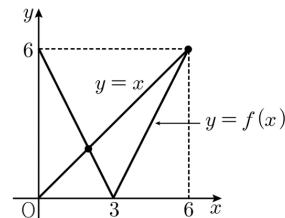
해설 A 에 속하는 원소들의 합을 $S(A)$ 라고 하면,
 $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$
 $21 = 10 + S(B) - 7$
 $\therefore S(B) = 18 = a+b+c+d+4k = 10+4k$
 $\therefore 4k = 8$
 $\therefore k = 2$

20 정답 ⑤

해설 $\{(A^C \cup B^C) \cap (A \cup B^C)\} \cup \{(A^C \cap B) \cup (A \cap B)\}$
 $= \{(A^C \cap A) \cup B^C\} \cup \{(A^C \cup A) \cap B\}$
 $= (\emptyset \cup B^C) \cup (U \cap B)$
 $= B^C \cup B = U$

21 정답 ⑤

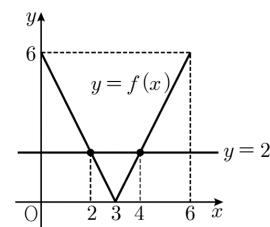
해설 ㄱ. $f(3) = |6 - 2 \cdot 3| = 0$ 이므로
 $f(f(3)) = f(0) = |6 - 2 \cdot 0| = 6$ (참)
ㄴ. 아래 그림과 같이 방정식 $f(x) = x$ 의 실근의 개수는
함수 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 개수와 같다.
즉, 방정식 $f(x) = x$ 의 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 에서 $f(x) = t$ 로 치환하고
방정식 $f(t) = t$ 를 만족하는 해를 구하면
 $|6 - 2t| = t$ 에서 $t = 2$ 또는 $t = 6$
즉, $f(x) = 2$ 또는 $f(x) = 6$ 을 만족시키는 x 의 값을
구하면 된다.

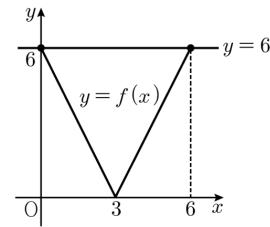
(i) $f(x) = 2$ 인 경우

$$|6 - 2x| = 2 \\ \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$



(ii) $f(x) = 6$ 인 경우

$$|6 - 2x| = 6 \\ \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$



(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의
모든 실근의 합은 $2+4+0+6=12$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

22 정답 ④

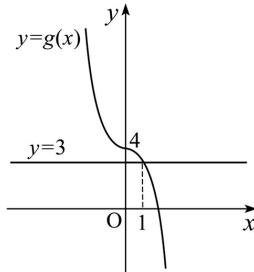
해설 절 A의 좌표를 $(a, 3\sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면
 $B(9a, 3\sqrt{a})$, $C(a, \sqrt{a})$ 가 된다.
 직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌
 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a$, $2\sqrt{a}$ 이고
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로
 $8a = 2\sqrt{a}$, $4a = \sqrt{a}$
 $16a^2 = a$
 이때 $a \neq 0$ 이므로 $16a = 1$, $a = \frac{1}{16}$
 따라서 삼각형 ACB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \cdot (8a)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

23 정답 8

해설 조건 (가)에 의하여 치역의 원소의 개수는 9이고
 조건 (다)에 의하여 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과
 최솟값의 차가 8이므로 가능한 함수의 치역은
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 또는
 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.
 (i) 치역이 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 일 때
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 이므로
 $46 \leq 45+n \leq 54$
 그런데 조건 (나)에서 모든 함숫값의 합은 62이므로
 $f(a)=f(b)=n$ 을 만족하는 자연수 n 은 존재하지
 않는다.
 (ii) 치역이 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 일 때
 $2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$ 이므로
 $56 \leq 54+n \leq 64$
 조건 (나)에서 모든 함숫값의 합은 62이므로
 $54+n=62$
 $n=8$
 (i), (ii)에 의하여 $n=8$ 이다.

24 정답 10

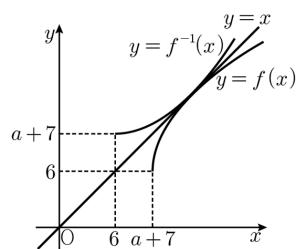
해설 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 문제를
 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.
 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 보면,



$g(f(k))=3$ 이므로 $f(k) > 0$ 이고 $-\{f(k)\}^2 + 4 = 3$
 $\therefore f(k)=1$
 $f(k)=|k|-4=1$
 $\therefore k=\pm 5$
 따라서 $\alpha=5$, $\beta=-5$ 이다.
 $\therefore \alpha-\beta=10$

25 정답 3

해설 $y=4\sqrt{x-7}+6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼
 평행이동한 그래프의 식은
 $y=4\sqrt{x-a-7}+6$
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의
 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$ 에
 접해야 한다.



$$\begin{aligned} 4\sqrt{x-a-7}+6 &= x \\ 4\sqrt{x-a-7} &= x-6 \\ \text{위의 식의 양변을 제곱하면} \\ 16(x-a-7) &= x^2 - 12x + 36 \\ \therefore x^2 - 28x + 16a + 148 &= 0 \\ \text{이 이차방정식의 판별식을 } D \text{라 하면} \\ \frac{D}{4} &= (-14)^2 - (16a + 148) = 0 \\ -16a + 48 &= 0 \\ \therefore a &= 3 \end{aligned}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

- 01** 집합 $A = \{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $n(A) = 5$ ② $1 \in A$ ③ $3 \in A$
④ $\{4, 5\} \subset A$ ⑤ $\{3, 4, 5\} \subset A$

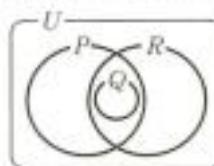
- 02** 전체집합 U 의 공집합이 아닌

서로 다른 두 부분집합 A, B 에 대하여

$(B \cup A^C)^C \cup (A - B^C)$ 을 간단히 한 것은?

- ① A ② B ③ $A - B$
④ $A \cap B$ ⑤ $A \cup B$

- 03** 세 조건 p, q, r 의 전리집합을 각각 P, Q, R 라 할 때 P, Q, R 사이의 포함 관계가 아래 그림과 같다. 다음 중 거짓인 명제는?
(단, U 는 전체집합이다.)



- ① $q \rightarrow p$ ② $q \rightarrow r$
③ $\sim p \rightarrow \sim r$ ④ $\sim p \rightarrow \sim q$
⑤ $\sim r \rightarrow \sim q$

- 04** 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 세 함수 f, g, h 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1) + g(2) + h(3)$ 의 값은?

- (가) f 는 일대일대응, g 는 항등함수,
 h 는 상수함수이다.
(나) $f(2) = g(2) = h(2)$
(다) $f(3) = h(3) - g(1)$

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

05

두 조건 ' $p: -3 \leq x \leq a$ ', ' $q: b < x < 3$ '에 대하여
 p 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a, b 의 값의 범위를
구하시오.

06

집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수
 $f(x) = x^2 - 4x + 6, g(x) = ax + b$ 에 대하여 $f = g$ 일
때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.

07

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에
대하여 X 에서 Y 로의 일대일대응 중에서 $f(2) = a$,
 $f(4) = e$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.

08

[2018년 3월 고2 문과 11번 변형]

실수 x 에 대한 두 조건

$$p: |x - a| \leq 1,$$

$$q: x^2 - 2x - 15 > 0$$

에 대하여 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되도록 하는
실수 a 의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

09

$1 < a < b$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로
고른 것은?

<보기>

$$\neg, \frac{1}{1-b} > \frac{1}{1-a} \quad \neg, \frac{b}{1-b} > \frac{a}{1-a}$$

$$\neg, \frac{b}{1-a} > \frac{a}{1-b}$$

① \neg

② \neg, \neg

③ \neg, \neg

④ \neg, \neg

⑤ \neg, \neg, \neg

10

실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$
의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

11

실수 전체의 집합에서 정의된
함수 $f(x) = |x - 2| + ax - 6$ 이 역함수를 가질 때,
상수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$
- ② $-1 < a < 0$
- ③ $0 < a < 1$
- ④ $a > 1$
- ⑤ $a < -1$ 또는 $a > 1$

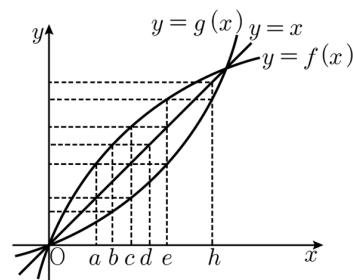
12

실수 전체의 집합에서 정의된 일차함수 $f(x)$ 가
 $f = f^{-1}$, $f(1) = 4$ 를 만족한다. $y = f(x)$ 의 그래프의
 x 절편을 m , y 절편을 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

- ① 4
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

13

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 가 다음 그림과 같을 때,
 $(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(e)$ 의 값은?
(단, 모든 절선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



- ① a
- ② b
- ③ c
- ④ d
- ⑤ e

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 14** 함수 $f(x) = \frac{bx+2}{x+a}$ 의 그래프의 점근선이

두 직선 $x=3$, $y=1$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

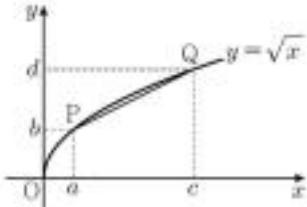
〈보기〉

- ㄱ. $f(x) = f^{-1}(x)$
- ㄴ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x - 2$ 에 대하여 대칭이다.
- ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 15** 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기는?

(단, $0 < a < c$)



- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

- 16** 다음은 명제 '자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + 3n^2$ 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.'를 증명하는 과정이다.

mn 이 (가) 라 가정하면

m, n 은 모두 (나) 이어야 하므로

$m = 2k - 1$, $n = 2l - 1$ (k, l 은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$\begin{aligned} m^2 + 3n^2 &= (2k-1)^2 + 3(2l-1)^2 \\ &= 2(2k^2 - 2k + 6l^2 - 6l + 2) \end{aligned}$$

이므로 $m^2 + 3n^2$ 은 (다) 이다.

그런데 이것은 $m^2 + 3n^2$ 이 (라) 라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + 3n^2$ 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.

위의 과정에서 (가) ~ (라)에 알맞은 것을 써넣으시오.

- 17** 양수 a, b 에 대하여 $a^2 - 8a + \frac{3a}{b} + \frac{25b}{3a}$ 의 값의 최솟값을 m , 그때 a, b 의 값을 각각 α, β 라 할 때, $m + \alpha + \beta$ 의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

18 실수 전체의 집합에서 정의된

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + a & (x > 3) \\ x - 8 & (x \leq 3) \end{cases}$ 의 역함수가 존재할

때, $f^{-1}(11)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수)

19 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에

대하여 $\frac{-7x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 성립할

때, $a+2b+3c$ 의 값을 구하여라.

(단, a , b , c 는 상수이다.)

20 함수 $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ 에 대하여

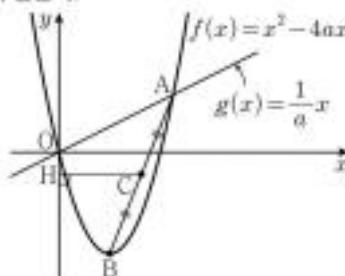
$f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = (f \circ f_n)(x)$

(n 은 자연수)로 정의할 때, $f_{2009}(2)$ 의 값을 구하시오.

21 다음 그림과 같이 양수 a 에 대하여 이차함수

$f(x) = x^2 - 4ax$ 의 그래프와 직선 $g(x) = \frac{1}{a}x$ 가 두 점

O, A에서 만난다.



이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점을 B라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하자. 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때. 선분 CH의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 2
- ② $\sqrt{5}$
- ③ $\sqrt{6}$
- ④ $\sqrt{7}$
- ⑤ $2\sqrt{2}$

22 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의

두 부분집합 X, Y 에 대하여 다음 조건을 만족시키는

집합 X 의 개수를 a , 집합 Y 의 개수를 b 라 하자.

이때 ab 의 값을 구하시오.

- (가) $\{2, 3, 5, 7\} \cap X = \{3, 5\}$

(나) $\{4, 6, 8\} \cup Y = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

23

함수 $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{2-2x} & (x < -1) \\ 7 - \sqrt{x+10} & (x \geq -1) \end{cases}$ 에 대하여

$(f^{-1} \circ f^{-1})(a) = -7$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

24

함수 $y = 4\sqrt{x-7} + 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

a 만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y = f(x)$ 라 하자.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 접할 때,
 a 의 값을 구하시오.

25

이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때,

방정식 $(f \circ f)(x) = 2$ 의 모든 실근의 합을 구하시오.

- (가) 이차항의 계수는 양수이다.
- (나) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표는 2이다.
- (다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(3-x) = f(3+x)$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ② 02 03 ③

04 ④ 05 $a \geq 3, -3 \leq b < 3$

06 -4 07 6 08 ④

09 ② 10 ③ 11 ⑤

12 ④ 13 ① 14 ②

15 ④

16 (가): 홀수, (나): 홀수, (다): 짝수, (라): 홀수

17 $\frac{2}{5}$ 18 7 19 -7

20 -5 21 ③ 22 512

23 3 24 3 25 6



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자

-

25문제 / dre수학

유형별 학습

이름

01 정답 ②

- 해설** 집합 $A = \{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 의 원소는
1, 2, $\{3\}$, $\{4, 5\}$
① $n(A) = 4$
② $1 \in A$
③ $\{3\} \in A$ 이고 $3 \notin A$ 이다.
④ $\{4, 5\} \in A$ 이고 $\{4, 5\} \subset A$
⑤ $\{\{3\}, \{4, 5\}\} \subset A$ 이고 $\{3, 4, 5\} \subset A$

02 정답 ①

해설 $(B \cup A^c)^c \cup (A - B^c) = (B^c \cap A) \cup (A \cap B)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$
 $= A \cap (B^c \cup B)$
 $= A \cap U$
 $= A$

03 정답 ③

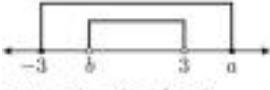
해설 주어진 벤 다이어그램에서 $Q \subset P$, $Q \subset R$ 이므로
 $q \rightarrow p$, $q \rightarrow r$ 가 모두 참이다.
또한, $P^c \subset Q^c$, $R^c \subset Q^c$ 이므로
 $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim r \rightarrow \sim q$ 도 모두 참이다.
그러나 $P^c \not\subset R^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 은 거짓이다.

04 정답 ④

해설 g 는 항등함수이므로
 $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$
 $\therefore f(2) = g(2) = h(2) = 2$
이때 h 는 상수함수이고 $h(2) = 2$ 이므로
 $h(1) = 2$, $h(3) = 2$
 $\therefore f(3) = h(3) - g(1) = 2 - 1 = 1$
한편 f 는 일대일대응이므로 $f(1) = 3$
 $\therefore f(1) + g(2) + h(3) = 3 + 2 + 2 = 7$

05 정답 $a \geq 3, -3 \leq b < 3$

해설 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
즉, $\{x | b < x < 3\} \subset \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 이므로 다음
그림과 같다.


$$\therefore a \geq 3, -3 \leq b < 3$$

06 정답 -4

해설 $f(1) = g(1)$ 에서
 $1 - 4 + 6 = a + b$
 $\therefore a + b = 3$... ①
 $f(2) = g(2)$ 에서
 $4 - 8 + 6 = 2a + b$
 $\therefore 2a + b = 2$... ②
①, ②를 연립하여 풀면
 $a = -1, b = 4$
 $\therefore ab = -4$

07 정답 6

해설 $f(2) = a$, $f(4) = e$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 다음과 같다.
(i) $f(1) = b$, $f(3) = c$, $f(5) = d$
(ii) $f(1) = b$, $f(3) = d$, $f(5) = c$
(iii) $f(1) = c$, $f(3) = b$, $f(5) = d$
(iv) $f(1) = c$, $f(3) = d$, $f(5) = b$
(v) $f(1) = d$, $f(3) = b$, $f(5) = c$
(vi) $f(1) = d$, $f(3) = c$, $f(5) = b$
따라서 구하는 함수 f 의 개수는 6이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

08 정답 ④

해설 조건 $p : |x-a| \leq 1$ 의 진리집합은

$$P = \{x \mid a-1 \leq x \leq a+1\}$$

조건 $q : x^2 - 2x - 15 > 0$ 에 대하여

조건 $\sim q : x^2 - 2x - 15 \leq 0$ 이므로

조건 $\sim q$ 의 진리집합은

$$Q^C = \{x \mid x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$$

$$= \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$$

따라서 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q^C$ 이어야 하므로

$$-3 \leq a-1, a+1 \leq 5$$

$$-2 \leq a, a \leq 4$$

$$-2 \leq a \leq 4$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 4

09 정답 ②

해설 $1 < a < b$ 이므로

$$1-a < 0, 1-b < 0, b-a > 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$\therefore \frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{(1-a)-(1-b)}{(1-a)(1-b)}$$

$$= \frac{b-a}{(1-a)(1-b)} > 0 \quad (\because (1))$$

$$\therefore \frac{1}{1-b} > \frac{1}{1-a} \quad (\text{㉠})$$

$$\therefore \frac{b}{1-b} - \frac{a}{1-a}$$

$$= \frac{b(1-a)-a(1-b)}{(1-a)(1-b)}$$

$$= \frac{b-a}{(1-a)(1-b)} > 0 \quad (\because (1))$$

$$\therefore \frac{b}{1-b} > \frac{a}{1-a} \quad (\text{㉡})$$

$$\therefore \frac{b}{1-a} - \frac{a}{1-b}$$

$$= \frac{b(1-b)-a(1-a)}{(1-b)(1-a)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-1)}{(1-a)(1-b)} > 0 \quad (\because a+b > 2)$$

$$\therefore \frac{b}{1-a} < \frac{a}{1-b} \quad (\text{㉢})$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

10 정답 ③

해설 코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left[\left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right] \geq (x+y)^2$$

$$13 \geq (x+y)^2 \text{이므로}$$

$$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$$

$$\therefore x+y \text{의 최댓값은 } \sqrt{13}$$

11 정답 ⑤

해설 $f(x) = |x-2| + ax - 6$

$$= \begin{cases} (a-1)x-4 & (x < 2) \\ (a+1)x-8 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 역함수가

존재하려면 $f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서 직선의 기울기 $a-1$ 과 $a+1$ 은 모두 양수이거나

모두 음수이어야 하므로

$$(a-1)(a+1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

12 정답 ④

해설 $f = f^{-1}$ 이므로 $f(1) = 4$ 에서 $f(1) = f^{-1}(1) = 4$

$$f^{-1}(1) = 4 \text{이므로 } f(4) = 1$$

$f(x) = ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(1) = a+b = 4, f(4) = 4a+b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=5$

$\therefore f(x) = -x+5$ 이므로 $y=f(x)$ 의 x 절편은 5,

y 절편은 5이다.

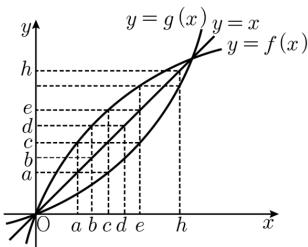
따라서 $m=5, n=5$ 이므로 $m+n=10$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

13 정답 ①

$$\begin{aligned} \text{해설 } & (g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(e) \\ &= (g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g)(e) \\ &= (f^{-1} \circ g)(e) \\ &= f^{-1}(g(e)) \\ &= f^{-1}(c) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f^{-1}(c) = k \text{라 하면} \\ f(k) = c \\ \therefore k = a \\ \therefore f^{-1}(c) = a \\ \therefore (g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(e) = a \end{aligned}$$

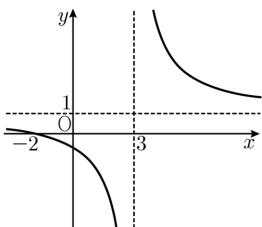
14 정답 ②

$$\text{해설 } f(x) = \frac{bx+2}{x+a} = \frac{-ab+2}{x+a} + b$$

이때 점근선은 $x = -a$, $y = b$ 이므로
 $-a = 3$, 즉 $a = -3$ 이고, $b = 1$ 이다.

$$\therefore f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 1$$

따라서 그레프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore f(4) = \frac{5}{4-3} + 1 = 6 \text{에서 } f^{-1}(6) = 4 \text{이고,}$$

$$f(6) = \frac{5}{6-3} + 1 = \frac{8}{3} \text{ 이므로}$$

$f(x) \neq f^{-1}(x)$ (거짓)

↳ $f(x)$ 의 점근선이 $x = 3$, $y = 1$ 이므로 두 점근선의 교점은 $(3, 1)$ 이다.

따라서 $f(x)$ 는 $y = \pm(x-3)+1$, 즉 $y = x-2$, $y = -x+4$ 에 대하여 대칭이다. (참)

↳ 함수의 그레프는 모든 사분면을 지난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 뒷다른 것이다.

15 정답 ④

해설 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \sqrt{a}, d = \sqrt{c}$$

$$\therefore a = b^2, c = d^2$$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b}$$

$$\frac{b+d}{2} = 1 \text{에서 } b+d = 2 \text{이므로}$$

$$(\text{직선 } PQ \text{의 기울기}) = \frac{1}{2}$$

16 정답 (가): 홀수, (나): 홀수, (다): 짝수, (라): 홀수

해설 mn 이 홀수라 가정하면 m, n 은 모두 홀수이어야 하므로 $m = 2k-1, n = 2l-1$ (k, l 은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$\begin{aligned} m^2 + 3n^2 &= (2k-1)^2 + 3(2l-1)^2 \\ &= 2(2k^2 - 2k + 6l^2 - 6l + 2) \end{aligned}$$

이므로 $m^2 + 3n^2$ 은 짝수이다.

그런데 이것은 $m^2 + 3n^2$ 이 홀수라는 가정에 모순이다.
 따라서 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + 3n^2$ 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.

17 정답 $\frac{2}{5}$

해설 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 - 8a + \frac{3a}{b} + \frac{25b}{3a} &= (a-4)^2 + \frac{3a}{b} + \frac{25b}{3a} - 16 \\ &\geq (a-4)^2 + 2\sqrt{\frac{3a}{b} \cdot \frac{25b}{3a}} - 16 \\ &= (a-4)^2 - 6 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3a = 5b$ 일 때 성립)

이때 $(a-4)^2 - 6$ 는 $a = 4$ 일 때 최솟값 -6 을 갖는다.

$$a = 4 \text{을 } 3a = 5b \text{에 대입하면 } b = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서 } m = -6, \alpha = 4, \beta = \frac{12}{5}$$

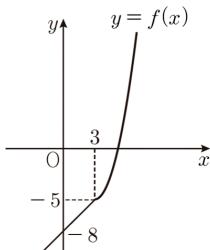
$$\therefore m + \alpha + \beta = \frac{2}{5}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 7

해설 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



곡선 $y = x^2 - 6x + a$ 가 점 $(3, -5)$ 를 지나야 하므로
 $9 - 18 + a = -5$

$$\therefore a = 4$$

$f^{-1}(11) = k$ 라 하면 $f(k) = 11$ 이고,

$x > 3$ 일 때, $f(x) > -5$,

$x \leq 3$ 일 때 $f(x) \leq -5$ 이므로 $k > 3$

즉, $f(k) = 11$ 에서 $k^2 - 6k + 4 = 11$

$$k^2 - 6k - 7 = 0, (k+1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 (\because k > 3)$$

$$\therefore f^{-1}(11) = 7$$

19 정답 -7

해설 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ 이므로 주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2 + x + 1)$ 을 곱하여 정리하면

$$a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x-1) = -7x + 1$$

$$\therefore (a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)$$

$$= -7x + 1$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=0, a-b+c=-7, a-c=1$$

세 식을 연립하여 정리하면

$$a = -2, b = 2, c = -3$$

$$\therefore a+2b+3c = -2+2 \cdot 2+3 \cdot (-3) = -7$$

20 정답 -5

해설 $f_1(x) = \frac{x-3}{x+1}$

$$f_2(x) = f(f_1(x))$$

$$= \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = -\frac{x+3}{x-1}$$

$$f_3(x) = f(f_2(x))$$

$$= -\frac{-\frac{x+3}{x-1} - 3}{-\frac{x+3}{x-1} + 1} = -\frac{-4x}{-4} = x$$

$$f_4(x) = f(f_3(x)) = f(x) = f_1(x)$$

$$f_5(x) = f(f_4(x)) = f(f_1(x)) = f_2(x)$$

$$f_6(x) = f(f_5(x)) = f(f_2(x)) = f_3(x)$$

⋮

$$\therefore f_{3k}(x) = f_3(x), f_{3k+1}(x) = f_1(x),$$

$$f_{3k+2}(x) = f_2(x) \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$\therefore f_{2004}(2) = f_{3 \cdot 668+2}(2)$$

$$= f_2(2) = -\frac{2+3}{2-1} = -5$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

21 정답 ③

해설 이차함수 $f(x) = x^2 - 4ax$ 의 그래프와 직선

$$g(x) = \frac{1}{a}x \text{의 교점 A의 } x\text{-좌표는}$$

$$x^2 - 4ax = \frac{1}{a}x \text{에서}$$

$$x - 4a = \frac{1}{a} (\because x > 0)$$

$$\therefore x = 4a + \frac{1}{a}$$

$$\text{위의 식을 } y = \frac{1}{a}x \text{에 대입하면 } y = 4 + \frac{1}{a^2} \text{이므로}$$

$$A\left(4a + \frac{1}{a}, 4 + \frac{1}{a^2}\right)$$

$f(x) = x^2 - 4ax = (x - 2a)^2 - 4a^2$ 에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점 B는

$$B(2a, -4a^2)$$

선분 AB의 중점 C는

$$C\left(\frac{4a + \frac{1}{a} + 2a}{2}, \frac{4 + \frac{1}{a^2} - 4a^2}{2}\right) \text{즉}$$

$$C\left(3a + \frac{1}{2a}, 2 + \frac{1}{2a^2} - 2a^2\right) \text{이므로}$$

결과는

$$H\left(0, 2 + \frac{1}{2a^2} - 2a^2\right)$$

$$\therefore \overline{CH} = \left|3a + \frac{1}{2a}\right| = 3a + \frac{1}{2a} (\because a > 0)$$

$3a > 0, \frac{1}{2a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에

의하여

$$3a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{3a \cdot \frac{1}{2a}} \\ = \sqrt{6} \quad \left(\text{단, 등호는 } a = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ 일 때 성립}\right)$$

따라서 선분 CH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.

22 정답 512

해설 조건 (가)에서 집합 X 는 전체집합 U 의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고, 2, 7은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{10-2-2} = 2^6 = 64$

조건 (나)에서 집합 Y 는 전체집합 U 의 부분집합 중

2, 7, 9를 반드시 원소로 갖고, 1, 3, 5, 10은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 Y 의 개수는 $2^{10-3-4} = 2^3 = 8$

즉, $a = 64, b = 8$ 이므로 $ab = 512$

23 정답 3

해설 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a) = -7$ 이면 $(f \circ f)^{-1}(a) = -7$

$$\therefore (f \circ f)(-7) = a$$

$$\text{이때 } f(-7) = 2 + \sqrt{2-2 \cdot (-7)} = 6 \text{이고,}$$

$$f(6) = 7 - \sqrt{6+10} = 3$$

$$\therefore a = (f \circ f)(-7) = f(f(-7)) = f(6) = 3$$

24 정답 3

해설 $y = 4\sqrt{x-7} + 6$ 의 그래프를 x -축의 방향으로 a 만큼

평행이동한 그래프의 식은

$$y = 4\sqrt{x-a-7} + 6$$

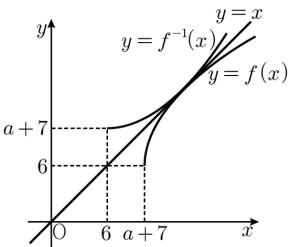
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의

그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에

접해야 한다.



$$4\sqrt{x-a-7} + 6 = x \text{에서}$$

$$4\sqrt{x-a-7} = x - 6$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$16(x-a-7) = x^2 - 12x + 36$$

$$\therefore x^2 - 28x + 16a + 148 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-14)^2 - (16a + 148) = 0$$

$$-16a + 48 = 0$$

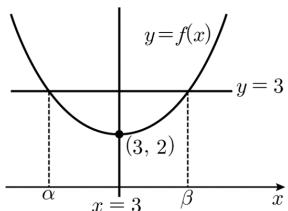
$$\therefore a = 3$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

25 정답 6

해설 조건 (다)에서 모든 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 $f(3-x)=f(3+x)$ 를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표가 2이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, 2)$ 이다. 즉, $f(3)=2$ 이므로 방정식 $(f \circ f)(x)=2$ 에서 $f(f(x))=2$
 $\therefore f(x)=3$
이때 조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$ 의 이차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.
즉, 방정식 $f(x)=3$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고 두 실근을 α, β 라 하면
함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 $x=3$ 이므로
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=3$$

 $\therefore \alpha+\beta=6$