개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (넓이와 속도) 177~192p

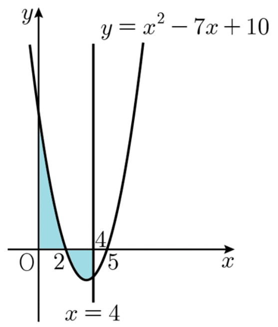
넓이 ~ 속도와 거리

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

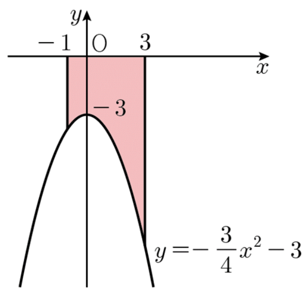
이름

01 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2-7x+10$과 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① 4　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 20

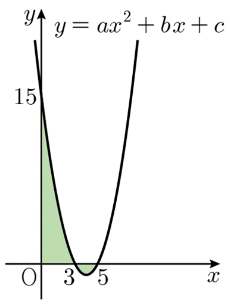
02 다음 그림과 같이 곡선 $y=-\frac{3}{4}x^2-3$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



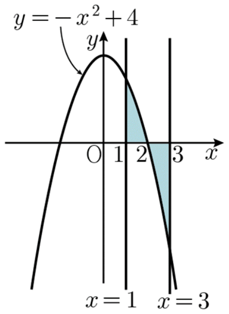
03 곡선 $y=-2x^2+6x+8$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 22　② $\frac{67}{3}$　③ $\frac{68}{3}$　④ 23　⑤ $\frac{70}{3}$

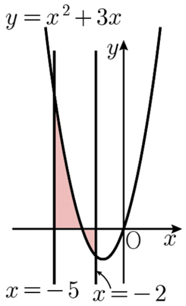
04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=ax^2+bx+c$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 색칠한 도형의 넓이를 구하시오.



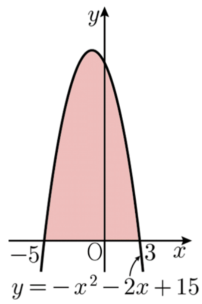
05 다음 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+4$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



06 다음 그림에서 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



07 다음 그림에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



08 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4t+1$ $(t\ge 0)$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오.

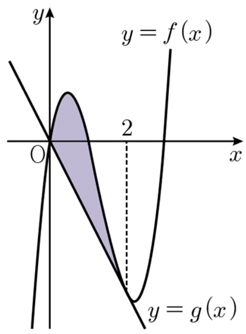
09 좌표가 2인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t+3$ $(t\ge 0)$일 때, $t=2$에서 점 P의 위치를 구하시오.

10 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=3t^2-6t\ (t\geq 0)$일 때, $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

11 [2020년 10월 고3 문과 10번/3점]
양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

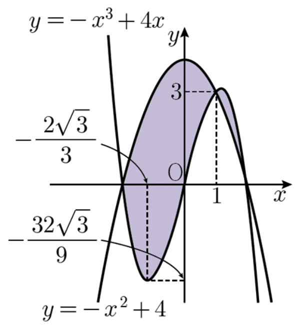
① $\frac{a^3}{12}$ ② $\frac{a^3}{8}$ ③ $\frac{a^3}{6}$
④ $\frac{a^3}{4}$ ⑤ $\frac{a^3}{3}$

12 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 4
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

13 다음 그림과 같이 두 곡선 $y=-x^3+4x$와 $y=-x^2+4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $12(S_1+S_2)$의 값을 구하시오.



14 곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은? (단, $k>1$)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

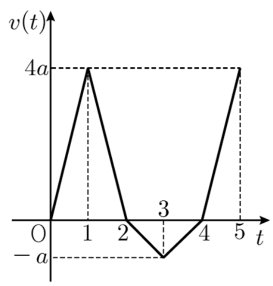
15 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=40-at$이다. 시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌었을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 90 ② 95 ③ 100
④ 105 ⑤ 110

16 지상 $120\mathrm{m}$ 높이에서 $50\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직하게 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=50-10t$ $(0\le t\le 12)$일 때, 이 물체의 지면으로부터의 최고 높이를 구하시오.

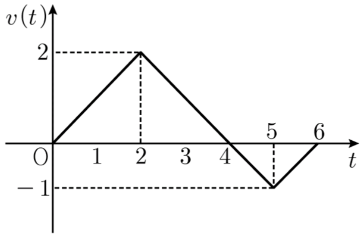
17 지상에서 처음 속도 $20\mathrm{m/s}$로 똑바로 위로 발사한 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=-4t+20(\mathrm{m/s})$라 할 때, 발사 후 8초 동안 물체가 움직인 거리를 구하시오.

18 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $t=3$에서의 점 P의 위치가 14일 때, $t=5$에서 점 P의 위치는? (단, $0\le t\le 5$)



① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

19 좌표가 -1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져있을 때, 점 P의 위치를 구하시오.

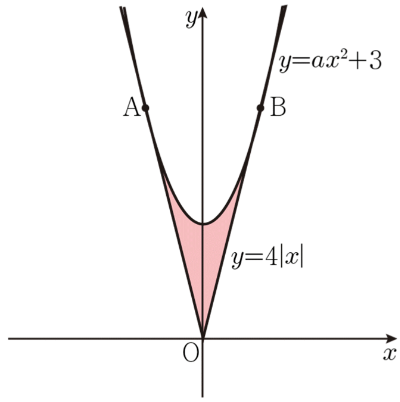


20 [2019년 11월 고3 문과 26번/4점]
두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

21 [2020년 3월 고3 이과 10번 변형]
다음 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=4|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다.
두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=4|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

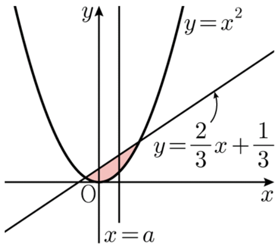
22 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f'(0)=4$ (나) $f(1)=f'(1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

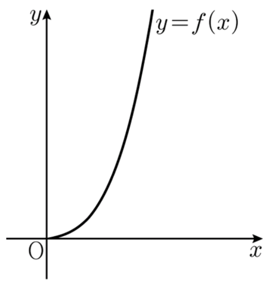
① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

23 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{3}{4}$ ④ 1
⑤ $\frac{5}{4}$

24 함수 $f(x)=\frac{1}{5}x(x^2+1)$ $(x\geq 0)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 정적분 $\int_2^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.



25 함수 $f(x)=x^3$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^3 f(x)\,dx+\int_1^{27} g(x)\,dx$의 값은?

① 20 ② 40 ③ 41
④ 80 ⑤ 81

26 함수 $f(x)=x^3+2\,(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

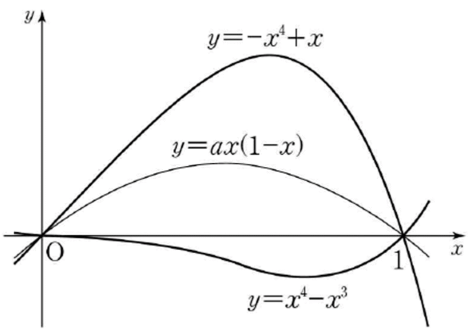
27 함수 $f(x)=\frac{1}{12}x^2$ $(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

28 함수 $f(x)=x^4-(2+a)x^3+2ax^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은? (단, $a \neq 2$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

29 [2009년 9월 고3 이과 7번]

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

30 [2023년 11월 고3 12번 변형]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$과 실수 t $(0<t<3)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -2(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{61}{9}$ ③ $\frac{62}{9}$ ④ 7 ⑤ $\frac{64}{9}$

개념+유형 개념편 - 수학 II (2025) (넓이와 속도) 177~192p

넓이 ~ 속도와 거리

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 19	03 ③
04 $\frac{58}{3}$	05 4	06 $\frac{59}{6}$
07 $\frac{256}{3}$	08 21	09 10
10 22	11 ③	12 ②
13 142	14 ②	15 ③
16 245 m	17 68 m	18 ④
19 3	20 14	21 ③
22 ①	23 ①	24 $\frac{41}{4}$
25 ④	26 ⑤	27 48
28 ③	29 ④	30 ⑤

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (넓이와 속도)
177~192p

넓이 ~ 속도와 거리

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ③

해설 $\int_0^4 |x^2-7x+10|dx$

$=\int_0^2 (x^2-7x+10)dx+\int_2^4 (-x^2+7x-10)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-10x\right]_2^4$

$=12$

02 **정답** 19

해설 $\int_{-1}^3 \left\{-\left(-\frac{3}{4}x^2-3\right)\right\}dx=\int_{-1}^3 \left(\frac{3}{4}x^2+3\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^3+3x\right]_{-1}^3$

$=\frac{63}{4}-\left(-\frac{13}{4}\right)=19$

03 **정답** ③

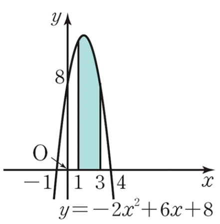
해설 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3 (-2x^2+6x+8)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_1^3$

$=(-18+27+24)-\left(-\frac{2}{3}+3+8\right)$

$=\frac{68}{3}$



04 **정답** $\frac{58}{3}$

해설 곡선 $y=ax^2+bx+c$의 y절편이 15이므로

$c=15$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $x=3$ 또는

$x=5$이므로

$a(x-3)(x-5)=0$

$ax^2-8ax+15a=0$

$15a=c=15$이므로

$a=1$

$-8a=b$이므로

$b=-8$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3 (x^2-8x+15)dx-\int_3^5 (x^2-8x+15)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_0^3-\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_3^5$

$=18+\frac{4}{3}=\frac{58}{3}$

05 **정답** 4

해설 $\int_1^3 |-x^2+4|dx$

$=\int_1^2 (-x^2+4)dx+\int_2^3 (x^2-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$

$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$

06 정답 $\frac{59}{6}$

해설 $\int_{-5}^{-2}|x^2+3x|dx$

$=\int_{-5}^{-3}(x^2+3x)dx+\int_{-3}^{-2}(-x^2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-5}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-2}$

$=\frac{26}{3}+\frac{7}{6}=\frac{59}{6}$

07 정답 $\frac{256}{3}$

해설 $\int_{-5}^{3}(-x^2-2x+15)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+15x\right]_{-5}^{3}$

$=(-9-9+45)-\left(\frac{125}{3}-25-75\right)$

$=\frac{256}{3}$

08 정답 21

해설 $\int_{0}^{3}(4t+1)dt=\left[2t^2+t\right]_{0}^{3}=21$

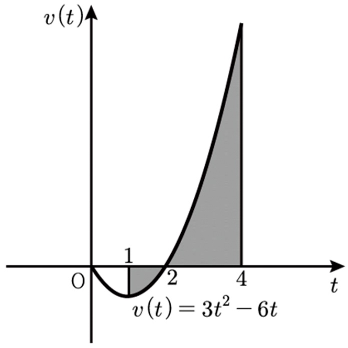
09 정답 10

해설 $2+\int_{0}^{2}(t+3)dt=2+\left[\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{0}^{2}$

$=2+8=10$

10 정답 22

해설 $v(t)=3t^2-6t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore \int_{1}^{4}|v(t)|dt$

$=\int_{1}^{2}(-3t^2+6t)dt+\int_{2}^{4}(3t^2-6t)dt$

$=\left[-t^3+3t^2\right]_{1}^{2}+\left[t^3-3t^2\right]_{2}^{4}$

$=2+20=22$

11 정답 ③

해설 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 좌표는

방정식 $x^2=ax$에서 $(0,\ 0)$, $(a,\ a^2)$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{a}|ax-x^2|dx=\left[\frac{a}{2}x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a}$

$=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$

12 정답 ②

해설 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이고, 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 원점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근 2와 다른 한 근 $x=0$을 갖는다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)-g(x)=2x(x-2)^2=2x^3-8x^2+8x$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{2}(2x^3-8x^2+8x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{8}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{8}{3}$

13 정답 142

해설 두 곡선 $y=-x^3+4x$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는

$-x^3+4x=-x^2+4$에서

$x^3-x^2-4x+4=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=\pm 2$

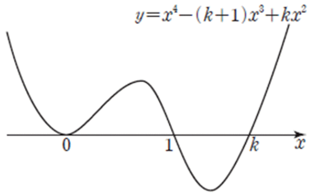
따라서 두 도형의 넓이는

$$S_1=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(-x^3+4x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{45}{4}$$
$$S_2=\int_{1}^{2}\{(-x^3+4x)-(-x^2+4)\}dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{7}{12}$$
$$\therefore\ 12(S_1+S_2)=12\left\{\frac{45}{4}+\frac{7}{12}\right\}=142$$

14 정답 ②

해설 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2=x^2(x-k)(x-1)$이므로

곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$은 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{k}\{x^4-(k+1)x^3+kx^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+1}{4}\cdot x^4+\frac{k}{3}x^3\right]_{0}^{k}$$
$$=\frac{k^5}{5}-\frac{(k+1)k^4}{4}+\frac{k^4}{3}=0$$

이때 $k>1$이므로 $\frac{k}{5}-\frac{k+1}{4}+\frac{1}{3}=0$

$12k-15(k+1)+20=0,\ -3k+5=0$

따라서 $k=\frac{5}{3}$이다.

15 정답 ③

해설 시각 $t=4$에서 점 P 의 운동 방향이 바뀌므로

$v(4)=0$이다.

$v(4)=40-4a=0$에서 $a=10$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_{0}^{6}|v(t)|dt=\int_{0}^{6}|40-10t|dt$$
$$=\int_{0}^{4}(20-10t)dt+\int_{4}^{6}(10t-40)dt$$
$$=\left[40t-5t^2\right]_{0}^{4}+\left[5t^2-40t\right]_{4}^{6}=80+20=100$$

16 정답 245 m

해설 $v(t)=50-10t=0$에서 $t=5$이다.

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$120+\int_{0}^{5}(50-10t)dt=120+\left[50t-5t^2\right]_{0}^{5}$$
$$=120+125$$
$$=245(\mathrm{m})$$

17 정답 68 m

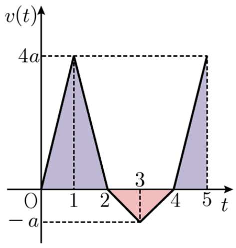
해설 움직인 거리는 $\int_{0}^{8}|-4t+20|dt$이므로

$$\int_{0}^{5}(-4t+20)dt+\int_{5}^{8}(4t-20)dt$$
$$=\left[-2t^2+20t\right]_{0}^{5}+\left[2t^2-20t\right]_{5}^{8}$$
$$=68(\mathrm{m})$$

18 정답 ④

해설 $t=3$일 때의 점 P의 위치가 14이므로

$$\begin{aligned}14&=\int_0^3 v(t)dt\\&=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4a+\frac{1}{2}\cdot1\cdot4a-\frac{1}{2}\cdot1\cdot a\\&=2a+2a-\frac{1}{2}a=\frac{7}{2}a\end{aligned}$$



즉, $\frac{7}{2}a=14$이므로 $a=4$

$t=5$일 때의 점 P의 위치를 구하면

$$\begin{aligned}\int_0^5 v(t)dt&=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt+\int_4^5 v(t)dt\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4a-\frac{1}{2}\cdot2\cdot a+\frac{1}{2}\cdot1\cdot4a\\&=4a-a+2a\\&=5a\\&=4\cdot5\\&=20\end{aligned}$$

19 정답 3

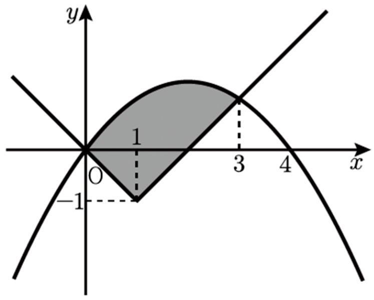
해설 점 P는 $t=4$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고 그때의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}-1+\int_0^4 v(t)dt&=-1+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\\&=-1+4\\&=3\end{aligned}$$

20 정답 14

해설 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서

$x=0$

$x\geq1$일 때, $g(x)=x-2$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$

$x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx\\&\qquad+\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx\\&\qquad+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3\\&=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ 4S=14$

21 정답 ③

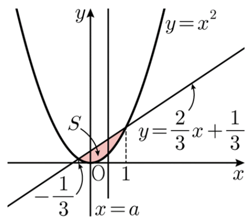
해설 $x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=-4x$의 그래프가 접하므로
$ax^2+3=-4x$, 즉 $ax^2+4x+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4-3a=0$
따라서 $a=\frac{4}{3}$이므로 접점 A의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$이다.
점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로
접점 B의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다.
주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는
$2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3}x^2+3-4x\right)dx$
$=2\left[\frac{4}{9}x^3+3x-2x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$
$=2\left\{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}$
$=2\cdot\frac{3}{2}=3$

22 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)에서 $f(0)=c=4$, $f'(0)=b=4$이므로
$f(x)=x^3+ax^2+4x+4$, $f'(x)=3x^2+2ax+4$
조건 (나)에서 $f(1)=1+a+4+4=a+9$
$f'(1)=3+2a+4=2a+7$이므로
$a+9=2a+7$에서
$a=2$
즉, $f(x)=x^3+2x^2+4x+4$, $f'(x)=3x^2+4x+4$
$f(x)=f'(x)$에서 $f(x)-f'(x)=0$이므로
$x^3-x^2=0$, $x^2(x-1)=0$
$x=0$ 또는 $x=1$
$0\le x\le 1$에서 $f(x)\le f'(x)$이므로
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_0^1\{(3x^2+4x+4)-(x^3+2x^2+4x+4)\}dx$
$=\int_0^1(x^2-x^3)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$
$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

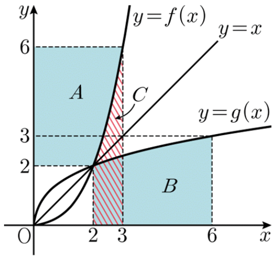
23 정답 ①

해설 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$의 교점의 x좌표는
$x^2=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$에서
$3x^2-2x-1=0$, $(3x+1)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면
$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-x^2\right)dx$
그런데 S는 곡선
$y=-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$와 x축으로
둘러싸인 부분의 넓이이므로 대칭축 $x=\frac{1}{3}$에 의하여
이등분된다.
$\therefore\ a=\frac{1}{3}$



24 정답 $\frac{41}{4}$

해설 함수 $f(x)=\frac{1}{5}x(x^2+1)$ $(x \ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
다음 그림에서



(B의 넓이)=(A 의 넓이)

$=3 \cdot 6-2 \cdot 2-$(C의 넓이)

$=14-\int_2^3 f(x)dx$

$=14-\int_2^3 \frac{1}{5}x(x^2+1)dx$

$=14-\frac{1}{5}\int_2^3 (x^3+x)dx$

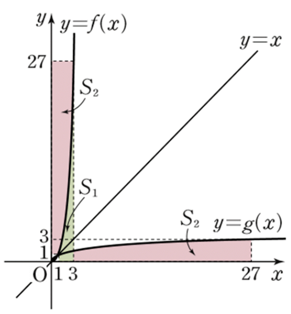
$=14-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$

$=14-\frac{1}{5} \cdot \frac{75}{4}=\frac{41}{4}$

$\therefore \int_2^6 g(x)dx=$($B$의 넓이)$=\frac{41}{4}$

25 정답 ④

해설 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



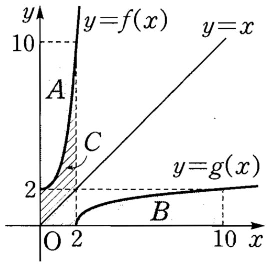
$S_1=\int_1^3 f(x)dx$, $S_2=\int_1^{27} g(x)dx$라고 하면

$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^{27} g(x)dx=S_1+S_2$

$=3 \cdot 27-1 \cdot 1=80$

26 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)=x^3+2$ $(x \ge 0)$
의 역함수가 $g(x)$ 이므로$y=f(x)$ 의 그래프와
$y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여
대칭이다.



그림에서 (A의 넓이)$=$(B의 넓이)이므로

$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$

$=$(C의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=$(C의 넓이)$+$(A의 넓이)

$=2 \cdot 10=20$

27 정답 48

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$x=0$ 또는 $x=12$

닫힌구간 $[0, 12]$에서 $x \ge \frac{1}{12}x^2$이므로

구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^{12}\left(x-\frac{1}{12}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{36}x^3\right]_0^{12}=48$

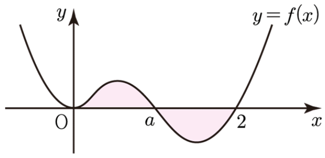
28 정답 ③

해설 $f(x)=x^4-(2+a)x^3+2ax^2$

$=x^2(x-2)(x-a)$

(ⅰ) $0<a<2$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림 1]과 같다.



[그림1]

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\{x^4-(2+a)x^3+2ax^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2+a}{4}x^4+\frac{2a}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}-4(2+a)+\frac{16a}{3}$$

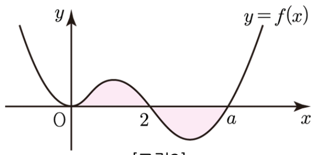
$$=\frac{20a-24}{15}$$

에서 $20a-24=0$

$\therefore a=\frac{6}{5}$

(ⅱ) $a>2$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림2]와 같다.



[그림2]

곡선 $y=f(x)$와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\{x^4-(2+a)x^3+2ax^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2+a}{4}x^4+\frac{2a}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{5}a^5-\frac{2+a}{4}\cdot a^4+\frac{2}{3}a^4$$

$$=a^4\left(-\frac{a}{20}+\frac{1}{6}\right)=0$$

에서 $a\neq 0$이므로 $a=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}=4$

29 정답 ④

해설 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-(ax-ax^2)\}dx$$

$$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$

$$=2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx$$

$$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx-$$

$$2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx=0$$

$$\int_0^1[(-2x^4+x^3+x)-2\{x^4+ax^2+(1-a)x\}]dx$$

$$=0$$

$$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}ax^3+\frac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}a+a-\frac{1}{2}=0$$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

30 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 -2인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $\left(t+\frac{f(t)}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{f(t)}{2}-t\right)\cdot f(t)$$

$$=\int_0^t f(x)dx+\frac{\{f(t)\}^2}{4}$$

이때 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+\frac{f(t)\cdot f'(t)}{2}$$

$$=f(t)\left\{1+\frac{f'(t)}{2}\right\}$$

한편, $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$이므로 $0<t<3$에서

$f(t)>0$

이때 $1+\frac{f'(t)}{2}$를 정리하면

$1+\frac{f'(t)}{2}$

$$=1+\frac{1}{6}\{(t-3)(t-6)+t(t-6)+t(t-3)\}$$

$$=1+\frac{1}{6}\{(t^2-9t+18)+(t^2-6t)+(t^2-3t)\}$$

$$=1+\frac{1}{6}(3t^2-18t+18)$$

$$=1+\frac{1}{2}(t^2-6t+6)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2-6t+8)$$

$$=\frac{1}{2}(t-2)(t-4)$$

따라서 $0<t<3$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	(극대)	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S(2)=\int_0^2 f(x)dx+\frac{\{f(2)\}^2}{4}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-4)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2(x^3-9x^2+18x)dx+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 16-3\cdot 8+9\cdot 4\right)+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{64}{9}$$