마플시너지(2025) - 공통수학2(무리함수) 299~322p

무리함수의 그래프

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수는?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

02 무리식 $y=\sqrt{6-3x}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{3-x}$의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정할 때, x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 Mm의 값은?

① -4　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 4

03 $a<0$, $b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

04 $\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

05 양수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ 일 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$의 값은?

① $6-4\sqrt{2}$　② $6-2\sqrt{2}$　③ 6　④ $6+4\sqrt{2}$　⑤ $6+6\sqrt{2}$

06 두 수 x, y가 각각

$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 일 때,

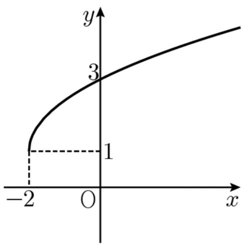
$2x^2-5xy+2y^2$ 의 값은?

① 185 ② 187 ③ 189
④ 191 ⑤ 193

07 $x=\sqrt{2}+1$일 때, x^3-2x^2+2x+1의 값은?

① $4+3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$
③ 0 ④ $4-3\sqrt{2}$
⑤ $-3\sqrt{2}$

08 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.



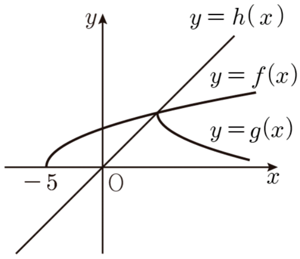
09 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{y\,|\,y\le -3\}$ ② $\{y\,|\,y\ge -3\}$ ③ $\{y\,|\,y\le 3\}$
④ $\{y\,|\,y\ge 3\}$ ⑤ $\{y\,|\,y\le 9\}$

10 함수 $y=\sqrt{3x-k}+6$의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge a\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge b\}$이고 그래프가 점 $(2,\ 8)$을 지날 때, 상수 a, b, k에 대하여 $ab+k$의 값을 구하시오.

11 함수 $y=2-\sqrt{2x-5}$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축, y축 방향으로 각각 m, n만큼 평행 이동한 것이다. mn의 값을 구하시오.

12 두 함수 $f(x)=\sqrt{3x+15}$, $g(x)=-\sqrt{3x-15}+5$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



① 9　② 11　③ 13
④ 15　⑤ 17

13 함수 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 실수 a, b의 차 $a-b$ 의 값을 구하여라.

14 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하였다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

15 다음 함수 중 그 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은?

① $y=\sqrt{x+1}-1$　② $y=-\sqrt{x+1}$
③ $y=-\sqrt{-x+1}+1$　④ $y=\sqrt{-x-1}-1$
⑤ $y=-\sqrt{x}+1$

16 함수 $y=-\sqrt{6-2x}+k$의 그래프가 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

17 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 점 $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$을 지난다.
② 정의역은 $\{x\,|\,x\leq-3\}$이다.
③ 치역은 $\{y\,|\,y\geq-2\}$이다.
④ $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 제2사분면을 지나지 않는다.

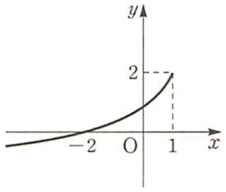
18 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

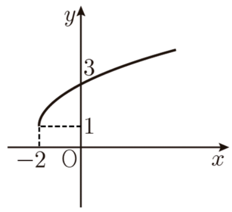
ㄱ. $a>0$이면 제2사분면을 지난다.
ㄴ. $a<0$일 때, x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다.
ㄷ. $|a|$의 값이 작을수록 x축에 가까워진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오.

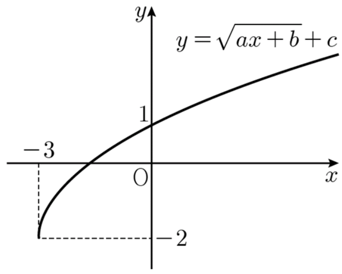


20 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?



① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

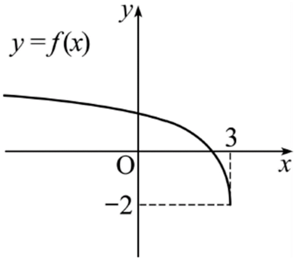
21 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?



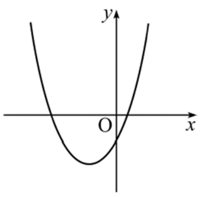
① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

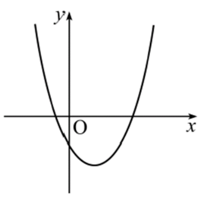
22 [2006년 3월 고2 13번]

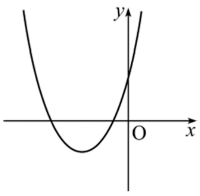
무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때,

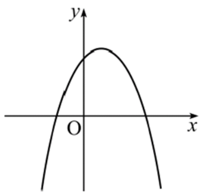


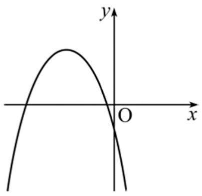
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.)

①


②


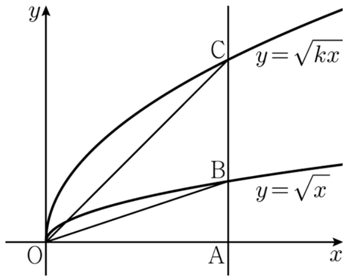
③


④


⑤


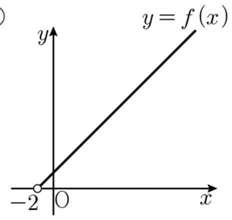
23 [2024년 3월 고2 14번/4점]

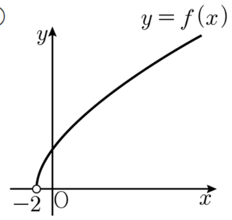
그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

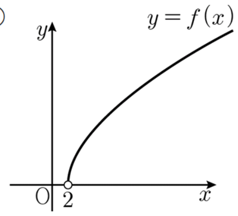


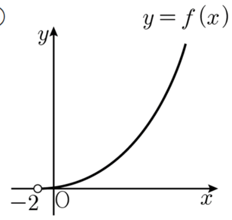
① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

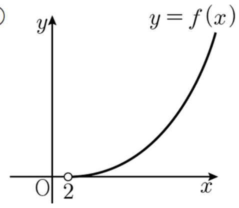
24 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$가 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이를 $f(k)$라 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은?

①


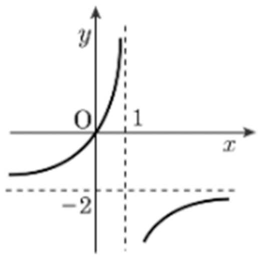
②


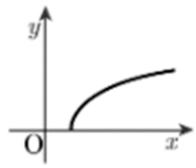
③


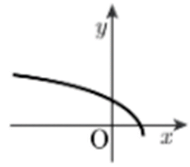
④


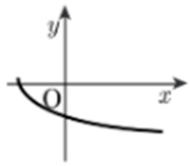
⑤


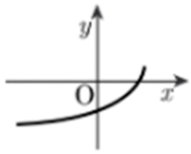
25 함수 $y=\frac{bx+c}{ax-1}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은?

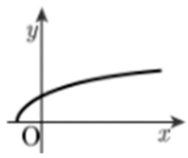


①


②


③


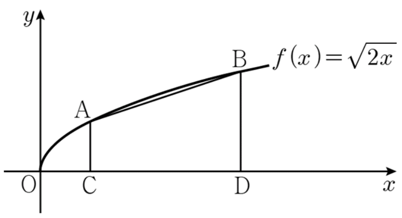
④


⑤


26 함수 $y=\sqrt{3x+9}+k$의 그래프가 제4사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

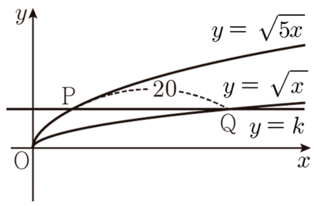
27 함수 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

28 [2025년 3월 고2 10번/3점]
그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(k,\ f(k))$, $\mathrm{B}(4k,\ f(4k))$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 넓이가 18일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 값은?



① $\sqrt{35}$　② $2\sqrt{10}$　③ $3\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{55}$

29 다음 그림과 같이 직선 $y=k$와 두 함수 $y=\sqrt{5x}$, $y=\sqrt{x}$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 P, Q 사이의 거리가 20일 때, 양수 k의 값을 구하시오.



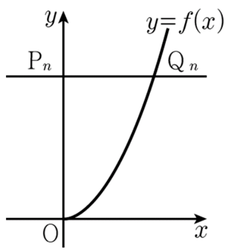
30 $3\le x\le 8$에서 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

31 $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=\sqrt{a-2x}+b$의 최댓값이 4, 최솟값이 2일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>4$)

32 $y=\sqrt{2x+1}$의 역함수를 $y=g(x)$라 하면, $g(-3)$의 값은?

① 4 ② $\sqrt{-5}$ ③ -5
④ 없다 ⑤ -3

33 [2016년 3월 고3 문과 13번 변형]
자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 4n+1)$인 점을 P_n,
함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ (x\geq 0)$이라 하자.
점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 하자.
점 Q_n의 y좌표를 a_n이라 할 때, $f^{-1}(a_1)\cdot f^{-1}(a_{11})$의 값은?



① 15 ② $15\sqrt{2}$ ③ $15\sqrt{3}$
④ 30 ⑤ $30\sqrt{2}$

34 함수 $y=9-\sqrt{3x-6}$의 역함수가 $y=a(x+b)^2+c$ $(x\leq d)$일 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 곱 $abcd$의 값을 구하시오.

35 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-10}+2 & (x\geq 5)\\ -\sqrt{-x+5}+2 & (x<5)\end{cases}$에 대하여 $f^{-1}(4)+f^{-1}(-2)$의 값을 구하시오.

36 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}$와 그 역함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값을 구하시오.

37 두 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x+4}$에 대하여 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)$의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

38 [2019년 3월 고3 문과 12번/3점]
$x\geq-1$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}+1$과 $x\geq1$에서 정의된 함수 $g(x)=(x-1)^2-1$에 대하여 $(g\circ f\circ f)(15)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

39 함수 $f(x)=\sqrt{x+6}$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

40 [2018년 3월 고3 문과 17번 변형]
무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 4)$에서 만날 때, $g(6)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

41 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이다. 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

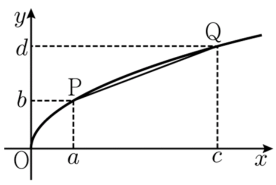
42 두 함수 $y=\sqrt{x+3}$과 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1\leq k<\frac{13}{4}$ ② $2\leq k<\frac{13}{4}$
③ $3\leq k\leq\frac{13}{4}$ ④ $3<k<\frac{13}{4}$
⑤ $3\leq k<\frac{13}{4}$

43 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

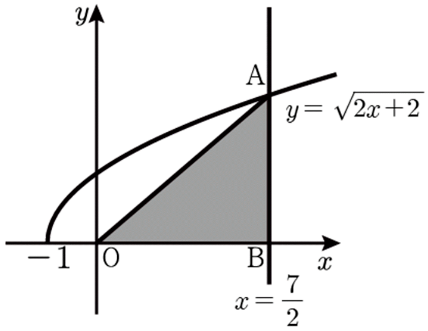
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

44 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 $\dfrac{b+d}{3}=1$을 만족시킬 때, 직선 PQ의 기울기를 구하시오. (단, $0<a<c$)



45 [2018년 6월 고2 문과 8번 변형]

다음 그림과 같이 직선 $x=\dfrac{7}{2}$ 과 곡선 $y=\sqrt{2x+2}$ 가 만나는 점을 A, 직선 $x=\dfrac{7}{2}$ 과 x 축이 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{9}{2}$ ② $\dfrac{19}{4}$ ③ 5
④ $\dfrac{21}{4}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}$

46 [2019년 11월 고3 문과 10번/3점]

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

47 [2019년 6월 고3 문과 12번/3점]

두 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

48 두 집합
$A=\{(x,\ y)\,|\,-2\le x\le 2,\ 2\le y\le 5\}$,
$B=\{(x,\ y)\,|\,y=\sqrt{x-k}\}$
에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 실수 k의 최솟값은?

① -29　　② -27　　③ -25
④ -23　　⑤ -21

49 함수 $f(x)=x^2+7\ (x\ge 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.)

① $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$　　② $4\sqrt{2}$　　③ $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$　　⑤ $9\sqrt{2}$

마플시너지(2025) - 공통수학2(무리함수) 299~322p

무리함수의 그래프

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ①	03 ③
04 ①	05 ④	06 ④
07 ①	08 8	09 ③
10 6	11 5	12 ④
13 0	14 10	15 ⑤
16 2	17 ⑤	18 ⑤
19 2	20 ④	21 ⑤
22 ①	23 ⑤	24 ②
25 ①	26 2	27 1
28 ②	29 5	30 3
31 6	32 ④	33 ④
34 -54	35 -4	36 8
37 ②	38 ③	39 ④
40 ③	41 -8	42 ⑤
43 ②	44 $\frac{1}{3}$	45 ④
46 ③	47 ①	48 ②
49 ④		

마플시너지(2025) - 공통수학2(무리함수) 299~322p

무리함수의 그래프

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $x+4\geq 0$에서 $x\geq -4$

$5-2x>0$에서 $x<\frac{5}{2}$

$\therefore -4\leq x<\frac{5}{2}$를 만족시키는 정수 x는

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$의 7개이다.

02 정답 ①

해설 무리식 $y=\sqrt{6-3x}+\frac{\sqrt{x+2}}{3-x}$의 값이 실수가 되려면

$6-3x\geq 0,\ 3-x\neq 0,\ x+2\geq 0$에서

$x\leq 2,\ x\neq 3,\ x\geq -2$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

따라서 $M=2,\ m=-2$이므로

$Mm=-4$

03 정답 ③

해설 ① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$

$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}\,i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

04 정답 ①

해설 (주어진 식) $=\frac{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$=\frac{(1-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

05 정답 ④

해설 양수 x에 대하여

$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\frac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\frac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}$

$=\frac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(x+2)-x}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50}$

$=6+4\sqrt{2}$

06 정답 ④

해설 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$

$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$

따라서 $x+y=10$, $xy=1$이므로

$$\begin{aligned}2x^2-5xy+2y^2&=2(x^2+y^2)-5xy\\&=2\{(x+y)^2-2xy\}-5xy\\&=2(10^2-2)-5\cdot1\\&=191\end{aligned}$$

07 정답 ①

해설 $x=\sqrt{2}+1$에서 $x-1=\sqrt{2}$ 이고
양변을 제곱하면

$x^2-2x+1=2$

$\therefore x^2-2x=1 \quad \cdots ㉠$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-2x^2+2x+1&=x(x^2-2x)+2x+1\\&=x+2x+1(\because ㉠)\\&=3x+1\\&=3(\sqrt{2}+1)+1\\&=4+3\sqrt{2}\end{aligned}$$

08 정답 8

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}+1 \quad \cdots ㉠$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{2(x+2)}+1$

$\therefore y=\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=1$이므로 $abc=8$

09 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a, a)$를 지나므로

$a=-\sqrt{-a+a}-a+6$, $2a=6$

$\therefore a=3$

따라서 $y=-\sqrt{x+3}-3+6$, 즉

$y=-\sqrt{x+3}+3$이므로 이 함수의 치역은

$\{y|y\le3\}$이다.

10 정답 6

해설 함수 $y=\sqrt{3x-k}+6$의 그래프가 점 $(2, 8)$을 지나므로

$8=\sqrt{6-k}+6$, $\sqrt{6-k}=2$

$\therefore k=2$

함수 $y=\sqrt{3x-2}+6$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\ge\dfrac{2}{3}\right\}$,

치역은 $\{y|y\ge6\}$이므로

$a=\dfrac{2}{3}$, $b=6$

$\therefore ab+k=\dfrac{2}{3}\cdot6+2=6$

11 정답 5

해설 $y=2-\sqrt{2x-5}=-\sqrt{2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}+2$이므로

$y=2-\sqrt{2x-5}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를

x축 방향으로 $\dfrac{5}{2}$, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=\dfrac{5}{2}$, $n=2$

$\therefore mn=\dfrac{5}{2}\cdot2=5$

12 정답 ④

해설 함수 $g(x)=-\sqrt{3x-15}+5=-\sqrt{3(x-5)}+5$의 그래프는 함수 $f(x)=\sqrt{3x+15}=\sqrt{3(x+5)}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=10$, $n=5$

$\therefore m+n=15$

13 정답 0

해설 $y=\sqrt{2x+6}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

따라서 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-3,\ b=-3$ 이므로

$a-b=-3-(-3)=0$

14 정답 10

해설 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-1)+b}+c+2$

$\ =\sqrt{-ax-a+b}+c+2$

위의 함수의 그래프가 $y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하므로

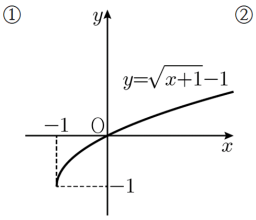
$-a=-3,\ -a+b=2,\ c+2=4$

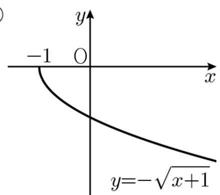
따라서 $a=3,\ b=5,\ c=2$이므로

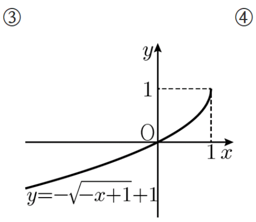
$a+b+c=10$

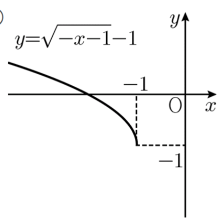
15 정답 ⑤

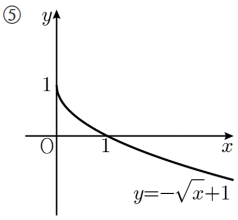
해설 각 함수의 그래프는 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


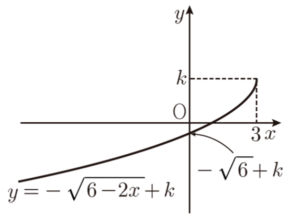
따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은 ⑤이다.

16 정답 2

해설 $y=-\sqrt{6-2x}+k=-\sqrt{-2(x-3)}+k$이므로

이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{6-2x}+k$의 그래프가 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



그러므로 $k>0$ $\cdots$ ㉠

또, 그래프의 y절편이 음수이어야 하므로

$-\sqrt{6}+k<0$

$\therefore\ k<\sqrt{6}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다.

17 정답 ⑤

해설 ① $y=\sqrt{6+2x}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{6+2x}-3,\ 3=\sqrt{6+2x}$

$9=6+2x$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{3}{2}$

따라서 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

② $6+2x\geq 0$에서 $x\geq -3$

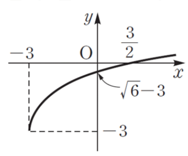
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -3\}$이다.

③ $\sqrt{6+2x}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq -3\}$이다.

④ $y=\sqrt{6+2x}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향-3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

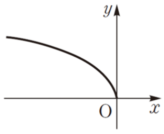
⑤ 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



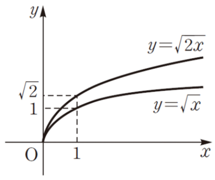
18 정답 ⑤

해설 ㄱ. $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프는 $a>0$ 이면 제1사분면에 존재하고 $a<0$ 이면 제2사분면에 존재한다. (거짓)

ㄴ. $a<0$ 일 때 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 의 값이 커지면 y 의 값은 작아진다. (참)



ㄷ. 오른쪽 그림에서 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프가 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프보다 x 축에 더 가깝다.
즉, $|a|$의 값이 작을수록 x 축에 가까워진다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19 정답 2

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a(-2-1)}+2,\ \sqrt{-3a}=2$

$\therefore\ a=-\dfrac{4}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}(x-1)}+2$

$=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}}+2$

따라서 $a=-\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{4}{3},\ c=2$이므로

$a+b+c=2$

20 정답 ④

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+2)}+1$ $\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2$

$2a=4$ $\quad\therefore\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $b=4,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=7$

21 정답 ⑤

해설 주어진 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는
$y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+3)}-2$ $(a>0)$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{3a}-2$

$3=\sqrt{3a}$

$9=3a$

$\therefore\ a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{3(x+3)}-2$

$\therefore\ y=\sqrt{3x+9}-2$

따라서 $a=3,\ b=9,\ c=-2$이므로

$a+b+c=3+9+(-2)=10$

22 정답 ①

해설 조건을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 구하는 문제이다.
무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c$ 의 그래프가 주어진 그림과 같으므로 상수 a,b,c 의 값(부호)은
$a>0,\ b=3,\ c=-2$이다.
이때 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 꼭짓점의 x좌표가
$-\dfrac{b}{2a}<0$이고, y절편이 $c<0$이므로
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은
①번 그림과 같다.

23 정답 ⑤

해설 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.
점 $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$, 점 $\mathrm{C}(k, k)$이고 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} = 3\overline{\mathrm{AB}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{k}$, $\overline{\mathrm{AC}} = k$에서

$k = 3\sqrt{k}$, $k^2 - 9k = 0$

$k > 1$이므로

$k = 9$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$

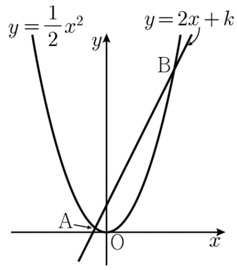
24 정답 ②

해설 함수 $y = \frac{1}{2}x^2$과 직선 $y = 2x + k$가 두 점에서 만나므로

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 = 2x + k$, 즉 $x^2 - 4x - 2k = 0$의

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 4 + 2k > 0$에서 $k > -2$이다.



방정식 $x^2 - 4x - 2k = 0$의 두 실근을 α, β라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = -2k$ $\cdots$ ㉠

두 점 A, B의 좌표가 $(\alpha, 2\alpha + k)$, $(\beta, 2\beta + k)$이므로
선분 AB의 길이는

$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2}$

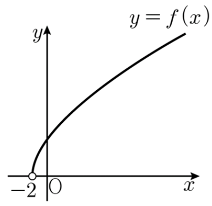
$= \sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}}$ $\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\sqrt{5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} = \sqrt{5(16 + 8k)}$

즉, $f(k) = \sqrt{5(16 + 8k)} = \sqrt{40(k + 2)}$ $(k > -2)$

따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



25 정답 ①

해설 유리함수의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$이므로

$y = \frac{k}{x - 1} - 2$ $\cdots$ ㉠

㉠이 원점을 지나므로

$0 = -k - 2$

$\therefore k = -2$

이것을 ㉠에 대입하면

$y = \frac{-2}{x - 1} - 2 = \frac{-2x}{x - 1}$

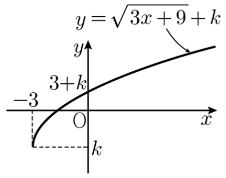
따라서 $a = 1$, $b = -2$ $c = 0$이므로

$y = \sqrt{ax + b} + c = \sqrt{x - 2}$

따라서 구하는 함수의 그래프의 개형은 ①이다.

26 정답 2

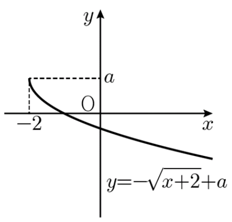
해설 $y=\sqrt{3x+9}+k=\sqrt{3(x+3)}+k$이므로
이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\sqrt{3x+9}+k$의 그래프가 제4사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



그러므로 $k<0$ $\cdots$ ㉠
또, 그래프의 y절편이 양수이어야 하므로
$3+k>0$
$\therefore k>-3$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-3<k<0$
따라서 정수 k는 -1, -2의 2개이다.

27 정답 1

해설 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 다음 그림과 같이 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$-\sqrt{2}+a<0$ $\quad\therefore a<\sqrt{2}$
따라서 자연수 a의 최댓값은 1이다.

28 정답 ②

해설 무리함수의 그래프를 이해하여 선분의 길이를 구한다.
점 $\mathrm{A}(k,\ \sqrt{2k})$, 점 $\mathrm{B}(4k,\ 2\sqrt{2k})$, 점 $\mathrm{C}(k,\ 0)$, 점 $\mathrm{D}(4k,\ 0)$이고 사각형 ACDB는 넓이가 18인 사다리꼴이므로

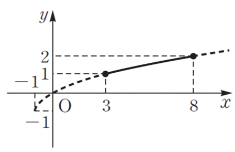
$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2k}+2\sqrt{2k})\cdot 3k=18$
$9k\sqrt{2k}=36$, $2k^3=16$
$k^3=8$에서 $k=2$이므로
$\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(8,\ 4)$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(8-2)^2+(4-2)^2}$
$=2\sqrt{10}$

29 정답 5

해설 직선 $y=k$와 $y=\sqrt{5x}$, $y=\sqrt{x}$ 의 교점은 모두 y좌표가 k이다.
즉, $k=\sqrt{5x}$ 에서 $x=\frac{k^2}{5}$, $k=\sqrt{x}$ 에서 $x=k^2$
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{k^2}{5},\ k\right)$, $\mathrm{Q}(k^2,\ k)$에서
$\overline{\mathrm{PQ}}=k^2-\frac{k^2}{5}=\frac{4}{5}k^2$이므로
$\frac{4}{5}k^2=20$, $k^2=25$
$\therefore k=5$ $(\because k>0)$

30 정답 3

해설 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
$3\le x\le 8$에서 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.

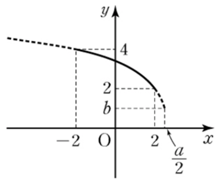


$x=3$일 때, 최솟값 $m=\sqrt{3+1}-1=1$
$x=8$일 때 최댓값 $M=\sqrt{8+1}-1=2$
$\therefore M+m=2+1=3$

31 정답 6

해설 $f(x)=\sqrt{a-2x}+b=\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+b$

에서 $\frac{a}{2}>2$ ($\because a>4$)이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 4, $x=2$일 때 최솟값 2를 가지므로

$f(-2)=\sqrt{a+4}+b=4$ ……㉠

$f(2)=\sqrt{a-4}+b=2$ ……㉡

㉠에서 $\sqrt{a+4}=4-b$

$\therefore a+4=(4-b)^2$ ……㉢

㉡에서 $\sqrt{a-4}=2-b$

$\therefore a-4=(2-b)^2$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$(2-b)^2+8=(4-b)^2$

$b^2-4b+12=b^2-8b+16$

$4b=4 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉣에 대입하면

$a-4=(2-1)^2 \qquad \therefore a=5$

$\therefore a+b=5+1=6$

32 정답 ④

해설 역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.

$y=\sqrt{2x+1}$ 의 역함수 $y=g(x)$의 정의역은

$y=\sqrt{2x+1}$ 의 치역이 되어야 하는데

이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로

$g(-3)$의 값은 존재하지 않는다.

33 정답 ④

해설 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.

$a_n=4n+1$이므로 $a_1=5$, $a_{11}=45$

$y=\frac{1}{2}x^2$ $(x\ge 0)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\sqrt{2x}$ $(x\ge 0)$이다.

그러므로 $f^{-1}(a_1)=\sqrt{10}$, $f^{-1}(a_{11})=\sqrt{90}$

$\therefore f^{-1}(a_1)\cdot f^{-1}(a_{11})=\sqrt{10}\cdot\sqrt{90}$

$=\sqrt{10\cdot 90}$

$=\sqrt{900}$

$=30$

34 정답 -54

해설 함수 $y=9-\sqrt{3x-6}$ 의 치역이 $\{y\,|\,y\le 9\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 9\}$이다.

$y=9-\sqrt{3x-6}$ 에서 $y-9=-\sqrt{3x-6}$

양변을 제곱하면 $(y-9)^2=3x-6$

x에 대하여 정리하면 $x=\frac{1}{3}(y-9)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=\frac{1}{3}(x-9)^2+2$ $(x\le 9)$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-9$, $c=2$, $d=9$이므로

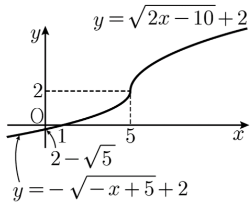
$abcd=\frac{1}{3}\cdot(-9)\cdot 2\cdot 9=-54$이다.

35 정답 -4

해설 $x \geq 5$에서 $f(x)=\sqrt{2x-10}+2$ $\cdots$ ㉠

$x<5$에서 $f(x)=-\sqrt{-x+5}+2$ $\cdots$ ㉡

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(4)=a$라 하면 $f(a)=4$

위의 그림에서 $f(a)=4$를 만족시키는 함수의 식은 ㉠이므로

$\sqrt{2a-10}+2=4,\ \sqrt{2a-10}=2$

$2a-10=4$

$\therefore a=7$

$\therefore f^{-1}(4)=7$

$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $f(b)=-2$

위의 그림에서 $f(b)=-2$를 만족시키는 함수의 식은 ㉡이므로

$-\sqrt{-b+5}+2=-2,\ \sqrt{-b+5}=4$

$-b+5=16$

$\therefore b=-11$

$\therefore f^{-1}(-2)=-11$

$\therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=7-11=-4$

36 정답 8

해설 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}$에서 $y=\sqrt{2x-4}$라 하고, 양변을 제곱하면

$y^2=2x-4,\ x=\dfrac{1}{2}y^2+2$

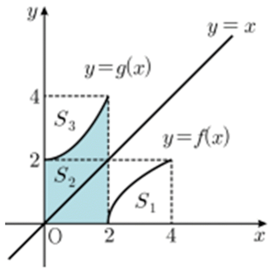
x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2\ (x \geq 0)$

이때 $f(4)=\sqrt{2 \cdot 4-4}=2$이므로 $g(2)=4$이다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.



이때 두 직선 $x=2$, $y=4$와 x축, y축으로 둘러싸인 직사각형에서 S_2를 뺀 영역을 S_3이라 하면 $S_1=S_3$

$\therefore S_1+S_2=S_3+S_2=2 \cdot 4=8$

37 정답 ②

해설 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(2)=(g^{-1} \circ f)(2)$

$=g^{-1}(f(2))$

$=g^{-1}(1)\ (\because f(2)=\sqrt{2-1}=1)$

이때 $g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$이므로

$g(k)=\sqrt{2k+4}=1$

$2k+4=1$

$\therefore k=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(1)=-\dfrac{3}{2}$

38 정답 ③

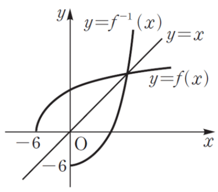
해설 합성함수와 역함수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

함수 f와 함수 g는 서로 역함수이므로
$g \circ f = I$(단, I는 항등함수)이다.
그러므로 $g \circ f \circ f = (g \circ f) \circ f = I \circ f = f$
따라서
$$\begin{aligned}(g \circ f \circ f)(15) &= ((g \circ f) \circ f)(15) \\ &= (I \circ f)(15) \\ &= f(15) \\ &= \sqrt{15+1}+1 \\ &= 5\end{aligned}$$

[다른 풀이]
$f(15) = \sqrt{15+1}+1 = 5$,
$f(5) = \sqrt{5+1}+1 = \sqrt{6}+1$,
$g(\sqrt{6}+1) = (\sqrt{6}+1-1)^2-1 = 5$이므로
$$\begin{aligned}(g \circ f \circ f)(15) &= g(f(f(15))) \\ &= g(f(5)) \\ &= g(\sqrt{6}+1) \\ &= 5\end{aligned}$$

39 정답 ④

해설



함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면 $x+6=x^2$
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=3$ ($\because x>0$)
따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$이므로
$a=3$, $b=3$ $\therefore a+b=6$

40 정답 ③

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2, 4)$에서 만나므로 $f(2)=4$이고 $g(2)=4$이다.
이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(2)=4$에서 $f(4)=2$
$f(2)=\sqrt{2a+b}+2=4$에서
$2a+b=4$ $\cdots$ ㉠
$f(4)=\sqrt{4a+b}+2=2$에서
$4a+b=0$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $a=-2$, $b=8$
$\therefore f(x)=\sqrt{-2x+8}+2$
$g(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로
$f(k)=\sqrt{-2k+8}+2=6$에서
$\sqrt{-2k+8}=4$, $-2k+8=16$ $\therefore k=-4$
$\therefore g(6)=-4$

41 정답 -8

해설 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이므로
$\sqrt{8a}=8$, $8a=64$ $\therefore a=8$
따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{8x+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접하므로 $\sqrt{8x+b}=x$의 양변을 제곱하면
$8x+b=x^2$ $\therefore x^2-8x-b=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(-b)=0$$
$16+b=0$ $\therefore b=-16$
$\therefore a+b=-8$

42 정답 ⑤

해설 직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3}=x+k$

$\therefore\ x+3=(x+k)^2$

$x^2+(2k-1)x+(k^2-3)=0$ 에서

$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+12=0$

$\therefore\ -4k+13=0$

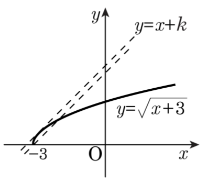
$\therefore\ k=\dfrac{13}{4}$

또, 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0=-3+k \quad \therefore\ k=3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3\le k<\dfrac{13}{4}$



43 정답 ②

해설 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $x=3$일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3}-2$가 1과 5 사이에 있어야 한다.

즉, $1\le\sqrt{3k+3}-2\le 5$

$\sqrt{3k+3}-2\ge 1$에서

$\sqrt{3k+3}\ge 3,\ 3k+3\ge 9$

$\therefore\ k\ge 2$

또, $\sqrt{3k+3}-2\le 5$에서

$\sqrt{3k+3}\le 7,\ 0\le 3k+3\le 49$

$\therefore\ 2\le k\le\dfrac{46}{3}$

따라서 $1\le\sqrt{3k+3}-2\le 5$를 만족하는 k의 범위는

$2\le k\le\dfrac{46}{3}$ 이므로 구하는 정수 k는 $2,3,4,\cdots,15$의 14개이다.

44 정답 $\dfrac{1}{3}$

해설 점 P, Q가 함수 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$b=\sqrt{a},\ d=\sqrt{c}$, 즉 $a=b^2,\ c=d^2$이 성립한다.

또, 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{d-b}{c-a}$ 이므로

$a=b^2,\ c=d^2$을 대입하여 정리하면

$\dfrac{d-b}{d^2-b^2}=\dfrac{1}{b+d}$

이때 $b+d=3$이므로 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

45 정답 ④

해설 $\overline{AB}=\sqrt{2\cdot\dfrac{7}{2}+2}=3$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot 3=\dfrac{21}{4}$

46 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

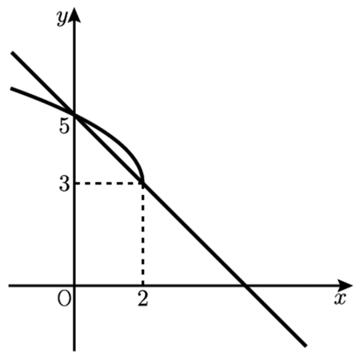
함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한

필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,3)$을 지날 때,

조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.

따라서 구하는 k의 최솟값은

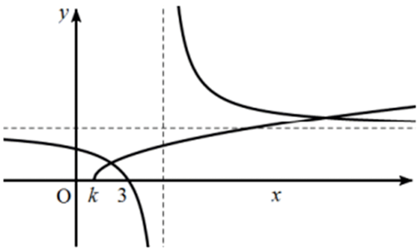
$3=-2+k$

$\therefore\ k=5$

47 정답 ①

해설 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 점근선은 두 직선 $x=5$, $y=3$

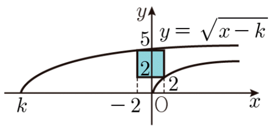
$y=0$일 때 $x=3$이므로 그래프는 다음과 같다.



위 그림에서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$k \le 3$이어야 한다.
따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3

48 정답 ②

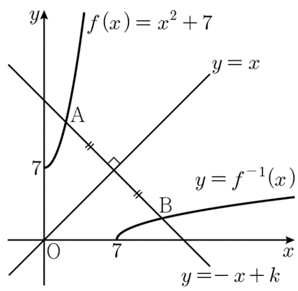
해설 다음 그림과 같이 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(-2,\ 5)$를 지날 때 k의 값이 최소가 된다.



따라서 $5=\sqrt{-2-k}$이므로 k의 최솟값은 -27이다.

49 정답 ④

해설 다음 그림과 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는
$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고
직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로
두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 선분 AB의 길이의 최솟값은 함수 $f(x)=x^2+7$
$(x \ge 0)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의
최솟값의 2배이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+7)$ $(a>0)$이라 하면 점 P와
직선 $y=x$, 즉 $-x+y=0$ 사이의 거리 d는

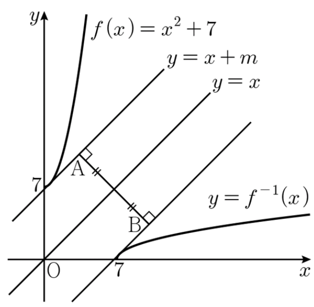
$$d=\frac{|-a+a^2+7|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

이므로 d의 최솟값은 $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$이다.

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$

[다른 풀이]
다음 그림과 같이 직선 $y=x$와 평행하고,
함수 $f(x)=x^2+7$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을
$y=x+m$이라 하자.



이차방정식 $x^2+7=x+m$, 즉 $x^2-x+7-m=0$의
판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=(-1)^2-4(7-m)=0$, $4m-27=0$

$\therefore\ m=\dfrac{27}{4}$

이때 두 직선 $y=x$와 $y=x+\dfrac{27}{4}$은 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과
직선 $y=x+\dfrac{27}{4}$, 즉 $4x-4y+27=0$ 사이의 거리와
같으므로 거리 d는

$$d=\frac{|27|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{27}{4\sqrt{2}}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$