1. [점의 평행이동과 대칭이동]
점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},1)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 $y=2x+15$ 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

2. [도형의 평행이동]
원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2-10x-12y+57=0$과 일치한다고 할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

3. [도형의 평행이동]
원 $x^2+y^2+2kx-6y+k^2=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 직선 $x-y+2=0$에 의하여 원의 둘레가 이등분된다. 이때 상수 k의 값을 구하시오.

4. [도형의 평행이동과 대칭이동]
원 $(x+3)^2+(y-4)^2=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 원과 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이 일치할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -14 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 14

5. [도형의 대칭이동]
꼭짓점의 좌표가 $(h,\ k)$인 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식이 $y=dx^2+ex+f$일 때, $a+b+c+d+e+f$의 값은? (단, $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$는 상수)
① $-2k$ ② $-k$ ③ k
④ $2k$ ⑤ $3k$

6. 점 $(-3,\ 5)$를 지나는 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동하였더니 $x=3$에서 x축에 접하였다. 이때 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오.

7. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 점 $(3,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(4,\ 1)$이고 반지름의 길이가 3일 때, $a+b+r^2$의 값은?
① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

8. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=1$이 직선 l에 대하여 서로 대칭일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

9. 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(ax+by,\ cx+dy)$로 옮기는 이동에 의하여 점 $(2,\ 1)$은 점 $(4,\ 2)$로, 점 $(3,\ -1)$은 점 $(1,\ -7)$로 옮겨진다고 한다. 이 이동에 의하여 직선 $y=mx$가 자기 자신으로 옮겨질 때, 모든 상수 m의 값의 합을 구하시오.

10. 점 $(x,\ y)$를 점 $(x+a,\ y+b)$로 옮기는 평행이동에 의하여 원점 O가 옮겨진 점을 A라 하자. 직선 OA를 y축에 대하여 대칭이동한 직선이 원

$$(x+2)^2+(y-1)^2=3$$

에 접할 때, 두 수 $a,\ b$사이의 관계식은? (단, $ab\neq 0$)

① $2a^2+4ab-b^2=0$　② $2a^2+4ab+b^2=0$

③ $4a^2+2ab-b^2=0$　④ $4a^2+2ab+b^2=0$

⑤ $4a^2-2ab-b^2=0$

11. 양의 실수 a에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원이 원점 O를 지나는 직선 l과 접한다. 이 원과 x축과의 접점을 $\mathrm{A}(p,\ 0)$, 직선 l과의 접점을 $\mathrm{B}(q,\ r)$라 하자. 세 점 O, A, B를 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+sx+ty+u=0$$

이라 할 때, $p+q+r+s+t+u$의 값을 a로 나타내면?

(단, 직선 l은 x축이 아니다.)

① $\frac{1}{10}a$　② $\frac{3}{10}a$　③ $\frac{7}{10}a$

④ $\frac{9}{10}a$　⑤ a

[12. 도형의 이동 빠른 정답]

1. 정답 21
2. 정답 11
3. 정답 2
4. 정답 ②
5. 정답 ④
6. 정답 -11
7. 정답 ⑤
8. 정답 $y=-x+3$
9. 정답 $\frac{3}{2}$
10. 정답 ①
11. 정답 ④

1. 정답 21

점 $P(a, 1)$을 x축 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 Q라 하면

$$Q(a-2, 2)$$

점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 R라 하면

$$R(2, a-2)$$

점 R가 직선 $y=2x+15$ 위에 있으므로

$$a-2=2\cdot 2+15$$
$$\therefore\ a=21$$

2. 정답 11

$x^2+y^2-10x-12y+57=0$에서

$$(x-5)^2+(y-6)^2=4$$

이 원은 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로

$$a=5,\ b=6$$
$$\therefore\ a+b=11$$

[다른 풀이]

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=4$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-4=0$$

따라서 $2a=10,\ 2b=12,\ a^2+b^2-4=57$이므로

$$a=5,\ b=6$$
$$\therefore\ a+b=11$$

3. 정답 2

$x^2+y^2+2kx-6y+k^2=0$에서

$$(x+k)^2+(y-3)^2=9$$

이 원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$(x+k-1)^2+(y-1)^2=9$$

이 원의 둘레의 길이가 직선 $x-y+2=0$에 의하여 이등분되려면 직선 $x-y+2=0$이 원의 중심 $(-k+1, 1)$을 지나야하므로

$$-k+1-1+2=0$$
$$\therefore\ k=2$$

[다른 풀이]

직선 $x-y+2=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$(x+1)-(y-2)+2=0$$
$$\therefore\ x-y+5=0$$

이 직선이 주어진 원의 중심 $(-k, 3)$을 지나야 하므로

$$-k-3+5=0$$
$$\therefore\ k=2$$

4. 정답 ②

원 $(x+3)^2+(y-4)^2=1$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$$(-x+3)^2+(-y-4)^2=1$$
$$\therefore\ (x-3)^2+(y+4)^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$(x+3)^2+(y-4)^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+3)^2+(y-b-4)^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$a-3=3,\ b+4=-4$$
$$\therefore\ a=6,\ b=-8$$
$$\therefore\ a+b=-2$$

5. 정답 ④

꼭짓점의 좌표가 $(k,\ k)$인 포물선은

$$y=a(x-h)^2+k$$
$$=ax^2-2ahx+ah^2+k$$

직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 포물선은 원래의 포물선과 폭과 꼭짓점의 좌표는 같고, 위로 볼록이면 아래로 볼록으로, 아래로 볼록이면 위로 볼록으로 그 상태만 바뀌므로

$$y=-a(x-h)^2+k$$
$$=-ax^2+2ahx-ah^2+k$$
$$\therefore\ a+b+c+d+e+f$$
$$=a+(-2ah)+(ah^2+k)+(-a)+2ah+(-ah^2+k)$$
$$=2k$$

[다른 풀이]

점 $(x,\ y)$를 직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 점은 $(x, 2k-y)$

이므로 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$2k-y=ax^2+bx+c$$
$$\therefore\ y=2k-(ax^2+bx+c)$$

이 포물선의 방정식이 $y=dx^2+ex+f$와 일치하므로

$$dx^2+ex+f=2k-(ax^2+bx+c)$$
$$dx^2+ex+f=-ax^2-bx-c+2k$$

양변의 계수를 비교하면

$$d=-a,\ e=-b,\ f=-c+2k$$
$$\therefore\ a+b+c+d+e+f=2k$$

6. 정답 -11

평행이동하여 얻은 포물선이 $x=3$에서 x축에 접하므로 이 포물선의 방정식을

$$y=a(x-3)^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓을 수 있다.

이때 포물선 $y=ax^2+bx+c$는 ㉠의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$y-7=a(x+5-3)^2$$
$$\therefore\ y=a(x+2)^2+7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡의 그래프가 점 $(-3, 5)$를 지나므로

$$5=a(-3+2)^2+7 \qquad \therefore\ a=-2$$

따라서 $y=-2(x+2)^2+7=-2x^2-8x-1$

이므로 $a+b+c=(-2)+(-8)+(-1)=-11$

7. 정답 ⑤

원을 대칭이동 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$r^2=3^2=9$

두 원의 중심 $(a,\,b)$, $(4,\,1)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3,\,4)$이므로

$\dfrac{a+4}{2}=3,\ \dfrac{b+1}{2}=4$

$\therefore\ a=2,\ b=7 \quad \therefore\ a+b+r^2=2+7+9=18$

[다른 풀이]

중심이 $(4,\,1)$이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=9$

이 원을 점 $(3,\,4)$에 대하여 대칭이동하면

$(6-x-4)^2+(8-y-1)^2=9$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-7)^2=9$

따라서 $a=2,\ b=7$이므로 $a+b+r^2=18$

8. 정답 $y=-x+3$

두 원의 중심 $(-2,\,1)$, $(2,\,5)$는 직선 l에 대하여 서로 대칭이므로 직선 l은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하면

(i) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는 $(0,\,3)$이므로

$b=3$

(ii) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로 $a=-1$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-x+3$

9. 정답 $\dfrac{3}{2}$

점 $(2,\ 1)$이 점 $(4,\ 2)$로 옮겨지므로

$2a+b=4,\ 2c+d=2$ …… ㉠

점 $(3,\ -1)$이 점 $(1,\ -7)$로 옮겨지므로

$3a-b=1,\ 3c-d=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=4$

직선 $y=mx$ 위의 임의의 점 $(t,\ mt)$는 주어진 이동에 의하여 점 $(t+2mt,\ -t+4mt)$로 옮겨진다.

이 점도 직선 $y=mx$ 위의 점이므로

$-t+4mt=m(t+2mt)$

$\therefore\ t(2m^2-3m+1)=0$

이 식이 임의의 t에 대하여 항상 성립해야 하므로

$2m^2-3m+1=0, \qquad (2m-1)(m-1)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=1$

따라서 구하는 m의 값의 합은 $\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

10. 정답 ①

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(a,\ b)$이므로 직선 OA의 방정식은 $y=\dfrac{b}{a}x$

직선 OA를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\dfrac{b}{a}(-x) \qquad \therefore\ y=-\dfrac{b}{a}x$

이 직선이 원에 접하므로 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $bx+ay=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2b+a|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\sqrt{3}$

$|a-2b|=\sqrt{3(a^2+b^2)}$

양변을 제곱하면 $a^2-4ab+4b^2=3a^2+3b^2$

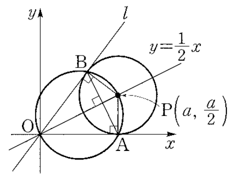
$\therefore\ 2a^2+4ab-b^2=0$

11. 정답 ④

중심의 좌표가 $\left(a,\ \dfrac{a}{2}\right)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

그런데 $a>0$이므로 이 원을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x축과의 접점 A의 좌표는 $(a,\ 0)$

직선 OP의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(q,\ r)$는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의

중점 $\left(\dfrac{a+q}{2},\ \dfrac{r}{2}\right)$는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$위에 있다.

즉 $\dfrac{r}{2}=\dfrac{a+q}{4}$에서 $r=\dfrac{a+q}{2}$ …… ㉠

또 직선 AB는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 수직이므로

$\dfrac{r-0}{q-a}=-2 \qquad \therefore\ r=-2q+2a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $q,\ r$를 a에 대한 식으로 나타내면

$q=\dfrac{3}{5}a,\ r=\dfrac{4}{5}a$

$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OBP}=90^\circ$이므로 세 점 O, A, B를 지나는 원은 선분 OP를 지름으로 한다.

$\overline{\mathrm{OP}}$의 중점 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{4}\right)$를 중심으로 하고, 반지름의 길이가

$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}a$인 원의 방정식은

$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{4}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}a\right)^2$

$\therefore\ x^2+y^2-ax-\dfrac{a}{2}y=0$

따라서 $s=-a,\ t=-\dfrac{a}{2},\ u=0$이므로

$p+q+r+s+t+u$

$=a+\dfrac{3}{5}a+\dfrac{4}{5}a+(-a)+\left(-\dfrac{a}{2}\right)+0=\dfrac{9}{10}a$