실시일자	-	# 유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

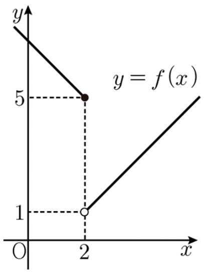
교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~28p_문제연습1

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

01

정답 5

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

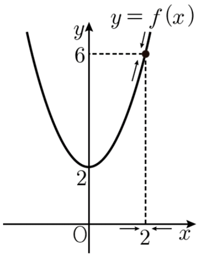


$\therefore \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=5$

02

정답 6

해설 $f(x)=x^2+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2)=6$

03

정답 ③

해설 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$ ……㉠

㉠의 분자와 분모를 각각 x로 나누면

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{r}{x}}+1}$

$=\dfrac{4}{1+1}=2$

04

정답 ⑤

해설 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$

$=1+0+2=3$

05

정답 ⑤

해설 $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+f(0)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$

$=1+2+(-1)=2$

06

정답 -1

해설 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-2x-1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-x+k)=-1+k$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$이어야 하므로

$-2=-1+k$

$\therefore k=-1$

07 정답 ①

해설 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}$에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2-x+a)=0$, $2+a=0$, $a=-2$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$$

$\therefore\ a+b=(-2)+3=1$

08 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(-1)\times0=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=0\times1=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$ (존재)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+0=-1$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=0+1=1$ (존재하지 않는다)

ㄷ. $\lim_{x\to1+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=(\{-1\}^2+0^2)=1$

$\lim_{x\to1-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=0+1^2=1$

$\therefore \lim_{x\to1}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$ (존재)

09 정답 ①

해설 조건 (나)에서 $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=2f(x)-h(x)$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=3$이다.

이때, 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+4g(x)}{f(x)-2g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+4\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)-2\{2f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{11f(x)-4h(x)}{-3f(x)+2h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{11-4\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{-3+2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{-11-4\cdot0}{-3+2\cdot0}=-\frac{11}{3}$$

10 정답 ②

해설 $$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+4)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)$$
$$=5\cdot3=15$$

11 정답 $\frac{1}{6}$

해설 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-3x\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}$

$=\frac{1}{6}$

12 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-2x}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}\right)$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x^2-2x}\times\frac{5-(2x+1)}{5(2x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2(x-2)}{5x(x-2)(2x+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{-2}{5x(2x+1)}$

$=-\frac{2}{50}=-\frac{1}{25}$

13 정답 $-\frac{1}{2}$

해설 (주어진 식)$=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\frac{x-6}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\frac{x-6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-6}{\sqrt{x}+2}=-\frac{1}{2}$

14 정답 ①

해설 $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{f(2)}{4}=-2$

따라서 $f(2)=-8$이다.

15 정답 ②

해설 $x\to a$일 때 분모→0이므로, 분자→0이다.

$\therefore\ f(2)=4a-2b-2=0\quad\therefore\ b=2a-1$

$\lim_{x\to2}\frac{ax^2-bx-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax^2-(2a-1)x-2}{(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(ax+1)}{(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}(ax+1)=4$

$2a+1=4\quad\therefore\ a=\frac{3}{2}\quad b=2$

$\therefore\ ab=3$

16 정답 ④

해설 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x^2}{x+2}+a\right)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+2a}{(x-2)(x+2)}=b$

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+2a)=0$이므로 $4+4a=0$

$\therefore\ a=-1$

$\therefore\ b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ b-a=\frac{3}{4}-(-1)=\frac{7}{4}$

17 정답 ③

해설 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$에서 $x\to1$일 때

(분자)$\to$0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1\cdots\cdots$㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to13}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}$

$=\frac{1}{a+2}=-1$

따라서$a=-3$, $b=2$이므로

$b-a=2-(-3)=5$

18 정답 ③

해설 $x\to-1$일 때,

(분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ $\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$

$=a-2=3$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로

$a+b=9$

19 정답 ④

해설 $0\le x\le2$일 때, $6x\le f(x)\le3x^2+3$에서

$\lim_{x\to1}6x=\lim_{x\to1}(3x^2+3)=6$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=6$

20 정답 5

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)=5$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{7}{x}\right)=5$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$

21 정답 50

해설 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{t}{5}(x+5)$

점 P는 직선 $y=\frac{t}{5}(x+5)$와 원 $x^2+y^2=25$의

교점이므로 점 P의 y좌표를 구하면

$\left(\frac{5y}{t}-5\right)^2+y^2=25,\ \frac{25}{t^2}y^2-\frac{50}{t}y+y^2=0$

$\therefore\ y=\frac{50t}{t^2+25}$ $(\because\ y\ne0)$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=t$, $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{50t}{t^2+25}$ 이므로

$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}})=\lim_{t\to\infty}\left(t\cdot\frac{50t}{t^2+25}\right)=50$

22 정답 ⑤

해설 두 점 A,B의 y좌표를 구하여 $\overline{PA},\overline{PB}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 A는 곡선 $y=\frac{1}{5}x^2$ 위의 점이므로 $\overline{PA}=\frac{1}{5}t^2$

$x^2+(y-2)^2=4$에서 $(y-2)^2=4-x^2$,

$y=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$\therefore\overline{PB}=2-\sqrt{4-t^2}$

$\therefore\lim_{t\to0}\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\lim_{t\to0}\frac{2-\sqrt{4-t^2}}{\frac{1}{5}t^2}$

$=\lim_{t\to0}\frac{5(2-\sqrt{4-t^2})}{t^2}$

$=\lim_{t\to0}\frac{5t^2}{t^2(2+\sqrt{4-t^2})}$

$=\lim_{t\to0}\frac{5}{2+\sqrt{4-t^2}}=\frac{5}{4}$

[참고] $\overline{PC}=2+\sqrt{4-t^2}$

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
13문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 41~43p_문제연습2

함수의 연속 ~ 연속함수의 성질

01 정답 ④

해설 (가)에서 함수 $y=f(x)$는

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하고 $f(a)$가 정의되어 있지만

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$이므로 $x=a$에서 불연속이다.

∴ (가) - ㄷ

(나)에서 함수 $y=f(x)$는 $f(a)$가 정의되어 있지만

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

∴ (나) - ㄱ

02 정답 ④

해설 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$m=2$

또, $x=-1,\ 0,\ 1$에서 불연속이므로 $n=3$

따라서 $m+n=5$이다.

03 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-x^2+2x-1$이라 하면

함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 연속이고,

$f(-2)=-8-4-4-1=-17<0$,

$f(-1)=-1-1-2-1=-5<0$,

$f(0)=-1<0$,

$f(1)=1-1+2-1=1>0$,

$f(2)=8-4+4-1=7>0$,

$f(3)=27-9+6-1=23>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가

열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-x^2+2x-1=0$은

열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

04 정답 ④

해설 $x=1$에서 두 함수 $f(x)+g(x)$, $g(x)$가 연속이고

$f(x)=f(x)+g(x)-g(x)$이므로 함수 $f(x)$도

$x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(ax+1)=a+1$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-2x+b)=-2+b$

$f(1)=-2+b$

$a+1=-2+b$ 에서

$a-b=-3$ …… ㉠

$x=2$에서 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)$가 연속이고

$g(x)=f(x)+g(x)-f(x)$이므로 함수 $g(x)$도

$x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=g(2)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(-2x+a)=-4+a$

$\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(x+2b)=2+2b$

$g(2)=2+2b$

$-4+a=2+2b$에서

$a-2b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-12,\ b=-9$

따라서 $a+b=-21$

05 정답 ①

해설 ㄴ. $x=a$일 때 $x-a=0$이고 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이면 $f(x-a)g(x)$가 불연속일 수 있다.

ㄷ. $g(a)=b\neq a$이고 $f(x)$가 $x=b$에서 불연속이면 $f(g(x))$는 $x=a$에서 불연속이다.

06 정답 ③

해설 ① $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-x^2-1$이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\frac{1}{x}(x^2+1)=x+\frac{1}{x}$이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f(g(x))=f(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}$이므로 $f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

④ $g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+1$이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x(x^2+1)}$이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

07 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 연속인 두 함수의 합, 곱의 꼴의 함수 역시 실수 전체의 집합에서 연속이므로

① 함수 $\{f(x)\}^2$은 연속함수이다.

② 함수 $\{f(x)+4\}^2$은 연속함수이다.

③ $f(f(x))=\{f(x)\}^2-4$
$=(x^2-4)^2-4=x^4-8x^2+12$
이므로 함수 $f(f(x))$는 연속함수이다.

④ $\frac{1}{f(x)-x^2}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$이므로 상수함수이다.
즉, 함수 $\frac{1}{f(x)-x^2}$은 연속함수이다.

⑤ 함수 $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2-4}$은 $x=-2,\ x=2$에서 정의되지 않으므로 $x=-2,\ x=2$에서 불연속이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 연속함수가 아닌 것은 ⑤이다.

08 정답 ④

해설 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 연속인 두 함수의 합, 곱의 꼴의 함수 역시 실수 전체의 집합에서 연속이므로

① 함수 $\{f(x)\}^2$은 연속함수이다.

② 함수 $\{f(x)+1\}^2$은 연속함수이다.

③ $f(f(x))=f(x)+3=(x+3)+3=x+6$이므로 함수 $f(f(x))$는 연속함수이다.

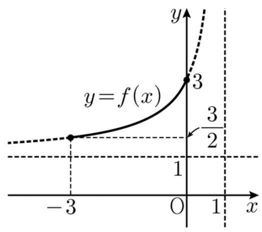
④ $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x+3}$은 $x=-3$에서 정의되지 않으므로 $x=-3$에서 불연속이다.

⑤ 함수 $f(x)+f(-x)=(x+3)+(-x+3)=6$는 상수함수이다. 즉, 함수 $f(x)+f(-x)$는 연속함수이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 연속함수가 아닌 것은 ④이다.

09 정답 $\frac{3}{2}$

해설 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x-1}=1-\frac{2}{x-1}$는 구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 3, $x=-3$에서 최솟값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

즉, $M=3,\ m=\frac{3}{2}$이므로

$M-m=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

10 정답 6

해설 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)=\frac{10}{x+4}$의 최솟값은

$f(1)=2$

함수 $g(x)=-\sqrt{x+3}+4$의 최댓값은

$g(-3)=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

11 정답 ④

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면
$x=-2$, $x=2$에서 연속이어야 한다.
$f(-2)=\lim_{x\to -2-} f(x)$에서 $4-2b=-2+a$
$\therefore\ a+2b=6$ ⋯ ㉠
또, $f(2)=\lim_{x\to 2+} f(x)$에서 $4+2b=2+a$
$\therefore\ a-2b=2$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=4,\ b=1$
$\therefore\ a+b=5$

12 정답 ⑤

해설 $x\neq 3$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^3-bx}{x-3}$이고
함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로
$x=3$에서 연속이다.
따라서 함숫값 $f(3)$이 존재하고 $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$이
성립해야 한다.
이때 $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{ax^3-bx}{x-3}$의 값이 존재하고
$\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이므로 함수의 극한의 성질에 의해
$\lim_{x\to 3}(ax^3-bx)=27a-3b=0$
$b=9a$ ⋯ ㉠
㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{ax^3-9ax}{x-3}\\ &=\frac{ax(x+3)(x-3)}{x-3}\\ &=ax(x+3)\ (x\neq 3)\end{aligned}$$

$f(1)=8$에서 $f(1)=a\cdot 4=8$
즉, $a=2$이므로
$f(x)=2x(x+3)\ (x\neq 3)$
$f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} 2x(x+3)=2\cdot 3\cdot 6=36$

13 정답 4

해설 $f(2)f(4)<0$, $f(5)f(6)<0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(2,\ 4)$, $(5,\ 6)$에서 각각 적어도 하나의 실근을
갖는다.
이때 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로
$f(0)f(-2)<0$, $f(-3)f(-4)<0$
즉, 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(-2,\ 0)$, $(-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의
실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.
$\therefore\ n=4$

실시일자	-	유형별 학습	이름
28문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p_문제연습3

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

01 정답 ②

해설 ① $-1+\frac{1}{n}$은 유리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(-1+\frac{1}{n}\right)^3\right\}=1$$

② $-1+\frac{\sqrt{5}}{n}$는 무리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{n}\right)^2\right\}$$
$$=-1$$

③ $2-\frac{\sqrt{2}}{n}$는 무리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(2-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(2-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2\right\}=-4$$

④ x가 유리수이면 $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(-x^3)=0$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(-x^2)=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=0$

⑤ x가 유리수이면 $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(-x^3)=-1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(-x^2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=-1$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

02 정답 2

해설 (ⅰ) $x>4$일 때, $f(x)=\frac{x-4}{x-4}=1$

(ⅱ) $x<4$일 때, $f(x)=\frac{-(x-4)}{x-4}=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim_{x\to4+} f(x)=1$, $\lim_{x\to4-} f(x)=-1$이므로

$a=1$, $b=-1$

$\therefore a-b=2$

03 정답 2

해설 $x=1$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1} f(x)=a$, $\lim_{x\to1} g(x)=b$라 하자. (단, $a>b$)

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)=a+b$

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1} f(x)\cdot\lim_{x\to1} g(x)=ab$

$a+b=7$, $ab=12$이므로 $a=4$, $b=3$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=4$, $\lim_{x\to1} g(x)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{2f(x)+8}{5g(x)-7}=\frac{2\cdot4+8}{5\cdot3-7}=2$$

04 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2g(x)\}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}=0$$

즉, $\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{2g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

05 정답 ⑤

해설

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+7}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{1-\frac{4}{x}}=2$

② $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2+3t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}=-1$$

③ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=0$$

⑤ $x\to-\infty$일 때, $x<0$이므로 $|x|=-x$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5|x|+1}{2x-4|x|+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5x+1}{2x+4x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}$$

이때 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t+1}{-6t+1}=-\frac{2}{3}$$

06 정답 ③

해설 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 $f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$에서

$-1+a-b+c=2,\ c=0,\ 1+a+b+c=-2$

$\therefore\ a=0,\ b=-3,\ c=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2-3)$$
$$=-3$$

[다른 풀이]

$g(x)=f(x)+2x$라 하면

$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$ 이므로

$g(-1)=g(0)=g(1)=0$

이 때, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=f(x)+2x=(x+1)x(x-1)$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x$

07 정답 ⑤

해설 ㄱ. [반례] $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=1$이면

$\lim_{x\to2}g(x)=2$이므로 값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)=p,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=q$ ($p,\ q$는 상수)라고

하면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=pq$이다.

$\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의

값도 존재한다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}f(x)g(x)=\beta$ ($\alpha,\ \beta$는 실수)라

하고 $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=\beta$이다.

$f(x)\neq0$일 때, $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=a$이고 $\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=a+0=a \text{ (참)}$$

ㄴ. $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$로 놓으면 $\lim_{x\to1}\frac{1}{h(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{h(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}\frac{1}{h(x)}$$
$$=a\times0=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. **[반례]** $f(x)=x-1,\ g(x)=\frac{1}{x-1}$로 놓으면

$\lim_{x\to1}f(x)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}1=1$이므로

주어진 조건을 만족시킨다.

그러나 $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$의 값은 존재하지

않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 정답 ③

해설 $\frac{2x-3}{x}<f(x)<\frac{2x^2+x-2}{x^2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2}=2$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

10 정답 ①

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=1$에서 극한값이 1이므로

분자, 분모는 같은 차수이고, 극한값은 최고차항의 계수이다.

따라서 $a=0,\ b=1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+d}{x^2-x-2}=1 \quad \cdots ㉠$$

$x\to-1$일 때, 분모$\to0$이므로 분자$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}x^2+cx+d=0,\ (-1)^2+c(-1)+d=0$

$1-c+d=0 \qquad \therefore d=c-1$

㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+(c-1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+c-1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+c-1}{x-2}$$
$$=\frac{-1+c-1}{-1-2}=1$$

$c=-1,\ d=-2$이므로

$a+b+c+d=0+1-1-2=-2$

11 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-1}=\frac{1}{8}$로 수렴하고, 분모의 극한값이

0이므로 분자의 극한값도 0이어야 한다. 따라서

$\sqrt{1+a}-b=0$, 즉 $b=\sqrt{1+a}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$
$$=\frac{1}{2\cdot2\sqrt{1+a}}=\frac{1}{8}$$

$\therefore a=3,\ b=2$

따라서 $a+b=5$이다.

12 정답 1

해설 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$, $\overline{OQ}=t$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}}{1}=1$$

13 정답 3

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프가

$x=-1,\ x=0,\ x=1$에서 끊어져 있으므로

함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=0,\ x=1$에서 불연속이다.

$\therefore\ a=3$

또한, $\lim_{x\to-1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

즉, $x=-1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않으므로

$\therefore\ b=1$

따라서 $a=3,\ b=1$이므로

$ab=3\cdot1=3$

14 정답 8

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=4$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+4)=4+4=8$

따라서 $a=8$

15 정답 12

해설 $x\neq-1,\ x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3+6x^2-x-6}{x^2-1}=x+6$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서도 연속이다.

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x),\ f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x+6)=5$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+6)=7$

$\therefore\ f(-1)+f(1)=12$

16 정답 $\frac{5}{2}$

해설

$$\lim_{x\to1}\frac{5(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2+x+1)}{(x+1)f(x)}=\frac{15}{2f(1)}=3$$

$\therefore\ f(1)=\frac{5}{2}$

17 정답 15

해설 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 6-}f(x)=\lim\limits_{x\to 6+}f(x)=f(6)=b$이다.

이때

$\lim\limits_{x\to 6-}f(x)=\lim\limits_{x\to 6-}(x+3)=9$

$\lim\limits_{x\to 6+}f(x)=\lim\limits_{x\to 6+}\{a(x-6)^2+b\}=b$이므로

$b=9$이다.

또, 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 8-}f(x)=\lim\limits_{x\to 8+}f(x)=f(8)=4a+9$이다.

이때

$\lim\limits_{x\to 8-}f(x)=\lim\limits_{x\to 8-}\{a(x-6)^2+9\}=4a+9$

$\lim\limits_{x\to 8+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x+3)=3$이므로

$a=-\dfrac{3}{2}$이다.

즉, $f(x)=\begin{cases} x+3 & (0\le x<6) \\ -\dfrac{3}{2}(x-6)^2+9 & (6\le x\le 8)\end{cases}$이므로

$f(23)=f(15)=f(7)=\dfrac{15}{2}$

$\therefore\ 2f(23)=15$

18 정답 ③

해설 ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프에서 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$와

$f(1)$은 존재하지만, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\ne f(1)$ 이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to 1+}g(x)\ne\lim\limits_{x\to 1-}g(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$의

값이 존재하지 않는다. 따라서 $g(x)$는

$x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

19 정답 5

해설 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\ge 2) \\ -x+3 & (x<2)\end{cases}$에서 $f(2)=1$이고,

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(x-1)=1,$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(-x+3)=1$이므로

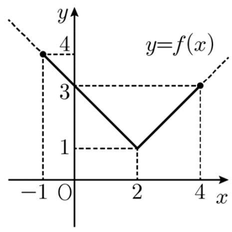
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이다.

따라서 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 4, $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.



따라서 $M=4,\ m=1$이므로

$M+m=4+1=5$

20 정답 6

해설 $g(x)=f(x)-4$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$이

구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면

$g(1)g(3)<0$이어야 하므로

$g(1)=f(1)-4=a-4,$

$g(3)=f(3)-4=a-7-4=a-11$

에서 $(a-4)(a-11)<0$

$\therefore\ 4<a<11$

따라서 정수 a는 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개이다.

21 정답 ②

해설 $f(x)=x^3-9x^2+24x-10$이라 하면 $f(x)$는 연속함수이다.

이때 $f(-1)<0,\ f(0)<0,\ f(1)>0,\ f(2)>0,$

$f(3)>0,\ f(4)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

22 정답 ③

해설 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, m, n이고

m, n은 자연수이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(2)f(4)<0$에서 $f(3)=0$

$f(4)f(6)<0$에서 $f(5)=0$

따라서 $f(x)=x(x-3)(x-5)$이므로

$f(7)=7\cdot4\cdot2=56$

23 정답 ①

해설 $x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a$ $\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2+2x^2}-2x}{ax-a}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2+2x^2}-2x\right)\left(\sqrt{2+2x^2}+2x\right)}{(ax-a)\left(\sqrt{2+2x^2}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)(x-1)}{a(x-1)\left(\sqrt{2+2x^2}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)}{a\left(\sqrt{2+2x^2}+2x\right)}=-\frac{1}{a}$$

$-\frac{1}{a}=-5$에서 $a=\frac{1}{5}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{1}{5}$

$\therefore a+2b=-\frac{1}{5}$

24 정답 -1

해설
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+4}-\sqrt{ax^2+2x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x^2+ax+4}-\sqrt{ax^2+2x+1}\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2+ax+4}+\sqrt{ax^2+2x+1}}{\sqrt{x^2+ax+4}+\sqrt{ax^2+2x+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(a-2)x+3}{\sqrt{x^2+ax+4}+\sqrt{ax^2+2x+1}} \quad\cdots\text{㉠}$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $1-a=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2ab=2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

25 정답 ③

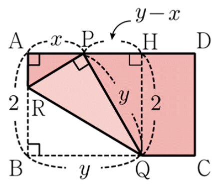
해설 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BQ}=y$라 하면 $\overline{PH}=y-x$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=y$이므로

직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+2^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+4$

$\therefore y=\dfrac{x^2+4}{2x}$ $\cdots$ ㉠



$\triangle RPA$와 $\triangle PQH$에서

$\angle A=\angle H=90^\circ$, $\angle APR=\angle HQP$

이므로 $\triangle RPA \backsim \triangle PQH$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AP}:\overline{HQ}=\overline{PR}:\overline{QP}$에서

$x:2=\overline{PR}:y$

$\therefore \overline{PR}=\dfrac{1}{2}xy$

$\overline{AR}^2=\overline{PR}^2-x^2=\dfrac{1}{4}x^2y^2-x^2$이므로

$S(x)=\dfrac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AR}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2(y^2-4)}$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{\{S(x)\}^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}x^2(y^2-4)\right\}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{16}x^2\left\{\frac{(x^2+4)^2}{(2x)^2}-4\right\}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x^6+8x^4+16x^2}{64x^2}-\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{4}$$

26 정답 -1

해설 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$f(1)g(1)=(1+4)(1+k)=5+5k$이고

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-x+8)(x+k)=7+7k$,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x+4)(x+k)=5+5k$

이므로 $7+7k=5+5k$, $2k=-2$

$\therefore k=-1$

27 정답 7

해설 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$이어야 한다.

$f(0)+g(0)=k$

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to0-}\{(-x+2)+(x^2+5)\}$

$=7$

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to0+}\{(x^3)+(x+k)\}=k$

이므로 $k=7$

28 정답 ⑤

해설 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1)<0$이면

방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서

각각 한 개의 실근을 가진다.

즉, $a^2-3a-4<0$에서 $(a+1)(a-4)<0$

$\therefore -1<a<4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1+16=17$

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
21문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 68~70p_문제연습4

미분계수 ~ 도함수

01 **정답** 1

해설 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$

02 **정답** 101

해설 $f'(x)=5$, $g'(x)=12x^3$이므로

$f'(2)+g'(2)=5+96=101$

03 **정답** 2

해설 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(0+\Delta x)^3+2(0+\Delta x)-2\}-(-2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{2+(\Delta x)^2\}=2$

04 **정답** ④

해설 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$f(1)=1+1+1+\cdots+1=11$

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$

$\therefore\ f'(1)-f(1)=55-11=44$

05 **정답** ②

해설 $y'=(3x+2)'(x^2+1)+(3x+2)(x^2+1)'$

$=3(x^2+1)+(3x+2)\cdot 2x$

$=3x^2+3+6x^2+4x$

$=9x^2+4x+3$

06 **정답** ①

해설 $f(x)=x^2-3x$, $f'(x)=2x-3$

$\therefore\ f'(2)=1$

07 **정답** ⑤

해설 $f'(x)=9x^2-2$이므로

$f'(1)=9-2=7$

08 **정답** 15

해설 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(3)=3\times 9-4\times 3=27-12=15$

09 **정답** 58

해설 곱의 미분법을 이해하여 미분계수의 값을 구한다.

$f'(x)=(2x+3)(x^2-x+2)+(x^2+3x)(2x-1)$

$\therefore\ f'(2)=7\cdot 4+10\cdot 3=58$

10 정답 ④

해설 구간 $[-1,\ k]$에서의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(-1)}{k+1}=\frac{(k^2+2k)-(1-2)}{k+1}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{k+1}=k+1 \ \cdots\cdots \ ㉠$$

$x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2+2(1+h)-(1^2+2\cdot1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+4)=4 \ \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠=㉡에서 $k+1=4$

$\therefore\ k=3$

11 정답 ①

해설 $$\lim_{h\to0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=-2f'(4)$$
$$=-2\cdot4$$
$$=-8$$

12 정답 ①

해설 $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\cdot(x+2)\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\cdot(x+2)\right\}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}\cdot4$$
$$=\frac{1}{4}\cdot4=1$$

13 정답 14

해설 $$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=f'(1)\cdot2$$
$$=14$$

14 정답 ②

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같고 이 접선은 두 점 $(2,\ 1)$과 $(-3,\ -4)$를 지나므로

$$f'(2)=\frac{1+4}{2+3}=1$$
$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2+6h)-f(2)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+6h)-f(2)}{6h}\cdot\frac{6}{3}$$
$$=2f'(2)=2\cdot1=2$$

15 정답 ②

해설 $f'(a)<0,\ f'(d)=0,\ 0<f'(b)<f'(c)$이므로
$f'(a)<f'(d)<f'(b)<f'(c)$

16 정답 ③

해설 미분계수 이해하기
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
따라서 $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서
$2-a=4+2b+a,\ b=-a-1$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-a)-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{x-2}{x-2}=1$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x^2+bx+a)-(2-a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x-a+1)=3-a$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로
$1=3-a$에서 $a=2,\ b=-3$
$\therefore\ f(2)=0$

17 정답 ④

해설 $f(1)=4$에서 $1+a+2=4$

$\therefore a=1$

즉, $f(x)=x^2+x+2$에서

$f'(x)=2x+1$

이때 $f'(1)=m$이므로

$m=2\cdot1+1=3$

$\therefore a+m=1+3=4$

18 정답 ①

해설 $f(1)=0$에서 $a+b+c=0$ $\cdots$ ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-2)=-11$에서 $-4a+b=-11$ $\cdots$ ㉡

$f'(1)=7$에서 $2a+b=7$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=3,\ b=1,\ c=-4$

$\therefore abc=3\cdot1\cdot(-4)=-12$

19 정답 ④

해설 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

미분계수 $f'(2)$가 존재해야 한다.

즉, 극한값 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재해야 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}(ax-b)=\lim\limits_{x\to2+}(x^3-2x^2)=2^3-2\cdot2^2$

에서 $2a-b=0$ $\cdots$ ㉠

(ⅱ) 극한값 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하려면

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{ax-2a}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2-}a=\lim\limits_{x\to2+}x^2$

$a=4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4,\ b=8$이므로

$ab=32$

20 정답 ③

해설 $f'(x)=(x^2-x+1)'(x^3-x^2-x+1)$
$\quad+(x^2-x+1)(x^3-x^2-x+1)'$
$=(2x-1)(x^3-x^2-x+1)$
$\quad+(x^2-x+1)(3x^2-2x-1)$

$\therefore f'(1)=1\cdot0+1\cdot0=0$

21 정답 19

해설 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=8$에서의 미분계수는

$f'(8)+g'(8)=10+9=19$

실시일자	-	유형별 학습	이름
14문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 106~107p_문제연습5

미분계수 ~ 접선의 방정식

01 정답 ③

해설 x의 값이 a에서 $a+2$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{\{(a+2)^2+(a+2)\}-(a^2+a)}{2}$$
$$=\frac{4a+6}{2}=2a+3=9$$

$\therefore\ 2a=6$

$\therefore\ a=3$

02 정답 3

해설 $\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f(1)-f'(1)$

$=7-4=3$

03 정답 64

해설 $\lim_{x\to5}\frac{f(x+5)-4}{x^2-25}=6$에서 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to5}\{f(x+5)-4\}=0$이므로 $f(10)=4$

$x+5=a$로 놓으면 $x\to5$일 때, $a\to10$이므로

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x+5)-4}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{f(x+5)-4}{(x+5)(x-5)}$$
$$=\lim_{a\to10}\frac{f(a)-f(10)}{a(a-10)}$$
$$=\lim_{a\to10}\left\{\frac{f(a)-f(10)}{a-10}\cdot\frac{1}{a}\right\}$$
$$=\frac{1}{10}f'(10)$$

즉, $\frac{1}{10}f'(10)=6$이므로 $f'(10)=60$

$\therefore\ f(10)+f'(10)=4+60=64$

04 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)=-x^3+ax+5$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$f(-1)=6-a=2$

$\therefore\ a=4$

따라서 $f(x)=-x^3+4x+5$, $f'(x)=-3x^2+4$이므로 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$m=f'(-1)=1$

$\therefore\ a+m=5$

05 정답 ③

해설 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)=2a+b$, $\lim_{x\to2+}f(x)=8$이므로

$2a+b=8$ $\cdots$ ㉠

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=a$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=12$

$a=12$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=12,\ b=-16$

$\therefore\ a-b=12-(-16)=28$

06 정답 ②

해설 $f'(x)$

$=3x^2(x^3+2x^2+x+5)+(x^3+a)(3x^2+4x+1)$

이므로

$f'(0)=a$

$\therefore\ a=3$

07 정답 11

해설 $f(x)=x^{10}+x$로 놓으면 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=10x^9+1$이므로

$f'(1)=10+1=11$

08 정답 ②

해설 1 $f(x)=x^n+x^3+x^2+x$로 놓으면 $f(1)=4$이므로

(주어진 식) $=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+3x^2+2x+1$이고

$f'(1)=10$이므로 $n+6=10,\ n=4$

09 정답 ③

해설 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$

접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 구하는 접선은

$y+1=3(x+1)$

$\therefore y=3x+2$

10 정답 ①

해설 $f(x)=x^3-5x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t)=(3t^2-5)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-5)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2t^3=-2,\ t^3=1$

$\therefore t=1$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(1)=-2$

11 정답 ④

해설 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(-1,\ 5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=5$

즉, $-1-a+b=5$에서 $a-b=-6$ $\cdots$ ㉠

또, 점 $(-1,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(-1)=-1$

즉, $3+a=-1$에서 $a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$a^2+b^2=20$

12 정답 ③

해설 $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2+cx+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx+c$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(1,\ -7)$을 지나므로

$f(1)=-7$에서

$-7=1+a$

$\therefore a=-8$ $\cdots$ ㉠

$g(1)=-7$에서

$-7=b+c+2$ $\cdots$ ㉡

점 $(1,\ -7)$에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3+a=2b+c$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-8,\ b=4,\ c=-13$

$\therefore a+b-c=-8+4-(-13)=9$

13 정답 ②

해설 $y=x^2-2x+5$ 위의 접점을 $(a,\ a^2-2a+5)$라 하면

이 접선에서의 기울기는 $y'=2a-2$이므로

접선의 방정식을 구하면

$y-(a^2-2a+5)=(2a-2)(x-a)$

$\therefore y=(2a-2)x-a^2+5$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=2a-2-a^2+5$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

즉, 구하는 접점의 좌표는 $(-1,\ 8),\ (3,\ 8)$이다.

따라서 두 접점과 점 $(1,\ 0)$이 이루는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot8=16$

14 **정답** $\frac{1}{3}$

해설 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면
$f(3)=12$에서
$(3-a)(3-b)(3-c)=12$ $\cdots$ ㉠
또,
$f'(x)$
$=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$이고
$f'(3)=4$이므로
$(3-b)(3-c)+(3-a)(3-c)+(3-a)(3-b)=4$
$\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}$$
$$=\frac{(3-b)(3-c)+(3-a)(3-c)+(3-a)(3-b)}{(3-a)(3-b)(3-c)}$$
$$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$