✓〈 킬러패스〉 공통수학1

(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

여러가지 방정식
~ 행렬 종합편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

✓ 〈킬러패스〉 공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

여러가지 방정식편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

[3차 방정식]

1.내신 핵심 문항

삼차방정식 $x^3+2x^2-2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

풀이)

풀 이

두 가지 풀이법
1. 근과 계수와의 관계로 풀어 보자
2. 역수로 갖는 방정식으로 생각해보자

방법1)

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이

$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=-a$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=b$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1=-c$$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=1$이므로

$abc=-2\cdot 2\cdot 1=-4$

방법2)

역수 방정식으로 보면 된다.
a=−2, b=2,c=1 따라서 abc=−4

(내용정리)

역수 관계 삼차방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하자.

양변을 x^3로 나누면 $a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$x=\alpha$를 대입해 보면

$a+b(\frac{1}{\alpha})+c(\frac{1}{\alpha})^2+d(\frac{1}{\alpha})^3=0$이다.

즉 근이 $\frac{1}{\alpha}$이 된다.

따라서 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하면

$a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$\leftrightarrow d(\frac{1}{x})^3+c(\frac{1}{x})^2+b(\frac{1}{x})+a=0$ 의 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.

따라서 $\underline{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}, \ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=-\frac{a}{d}}$

[3차 방정식]

2.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3+(a-1)x^2+2ax+12=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 조립제법으로 인수분해 한다.
2. 이차방정식과 구한 근을 비교해 본다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+2ax+12$로 놓으면
$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a-1 & 2a & 12 \\ & & -2 & -2a+6 & -12 \\ \hline & 1 & a-3 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)\{x^2+(a-3)x+6\}$
이때 방정식이 $f(x)=0$이 중근을 가지려면
(i) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 $x=-2$를 근으로 가질 때
$4-2(a-3)+6=0$
$\therefore\ a=8$

다음 페이지 계속

(ii) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 중근을 가질 때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-24=0$

$a^2-6a-15=0$

$\therefore\ a=3\pm\sqrt{24}=3\pm2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$8+(3-2\sqrt{6})+(3+2\sqrt{6})=14$

[3차 방정식]

3.내신 킬러 문항

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식
$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) x에 대한 삼차방정식 $P(x) = 0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 곱은 5이다.
>
> (나) x에 대한 삼차방정식 $P(3x-1) = 0$은 한 근 0과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 합은 2이다.

$a + b + c$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
$f(x)=0$의 근 $\alpha \leftrightarrow f(ax+b)=0$의 근은
$ax+b=\alpha \leftrightarrow x=\dfrac{\alpha-b}{a}$

삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은

$\dfrac{\alpha+1}{3}$, $\dfrac{\beta+1}{3}$, $\dfrac{\gamma+1}{3}$

조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma=5$ … ㉠

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{\alpha+1}{3}=0$이고, $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

$\quad=x^3-3x^2+x+5$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=5$이므로

$a+b+c=3$

[3차 방정식]

4.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3 - x^2 - kx + k = 0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. α, β 중 실수는 하나뿐이고 $\alpha^2 = -2\beta$일 때, $\beta^2 + \gamma^2$의 값은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 인수분해를 해본다.
2. 실수는 하나뿐임을 분석해 본다.

삼차방정식의 근에 대한 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

$x^3 - x^2 - kx + k = 0$에서

$x^2(x-1) - k(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2-k) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x^2 = k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k > 0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k < 0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x = 1$뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha = 1$ 또는 $\beta = 1$

(i) $\alpha = 1$일 때

$\alpha^2 = -2\beta$에서 $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}$이므로

α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

다음 페이지 계속

(ii) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

[3차 방정식]

5.내신 킬러 문항

방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, 실수 p, q의 곱은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 두근이 허근임을 확인한다.
2.α와 α^2은 서로 켤레 복소수 관계

(ⅰ) 한 허근을 $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\alpha^2 = a - bi$ ($\because$ 계수가 실수인 방정식)

$\therefore (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a \cdots\cdots$ ①

$2ab = -b \cdots\cdots$ ②

①, ② 에서 $b \neq 0$ 이므로

$a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

[3차 방정식]

6.내신 킬러 문항

서로 다른 세 수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오.

(가) $a^3-4a^2-2a+10=a^2+b^2+c^2$
(나) $b^3-4b^2-2b+10=a^2+b^2+c^2$
(다) $c^3-4c^2-2c+10=a^2+b^2+c^2$

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 동일한 꼴을 확인한다.
2. 삼차방정식을 찾는다.
3. 근이 a, b, c 임을 확인한다.

조건 (가), (나), (다)에서

$$a^3-4a^2-2a+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$b^3-4b^2-2b+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$c^3-4c^2-2c+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$$x^3-4x^2-2x+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

의 세 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=-2$,

$abc=a^2+b^2+c^2-10$

$$\begin{aligned}\therefore\ abc&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-10\\&=16-2\cdot(-2)-10\\&=16+4-10\\&=10\end{aligned}$$

10

[3차 방정식]

7.내신 킬러 문항

x에 대한 삼차식

$$f(x) = x^3 + (2a-1)x^2 + (b^2-2a)x - b^2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

ㄴ. $a < b < 0$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근의 합이 7이 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
ㄴ. 존재성임을 확인한다.

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$이므로 조립제법에 의하여

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\
  &   & 1 & 2a & b^2 \\
\hline
  & 1 & 2a & b^2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}
$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

이때 $a<b<0$이면 $a-b<0$, $a+b<0$이므로 $D>0$이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

한편, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하고 $1+2a+b^2=0$이어야 한다.

다음 페이지 계속

예를 들어 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$ 이면

$a<b<0$이고 $1+2a+b^2=0$이며,

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른

두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의

합이 $-2a$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른

실근의 합은 $1+(-2a)=7$에서 $a=-3$

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$이어야 하므로 $b^2<a^2=9$

또, $x=1$이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이

아니어야 하므로 $1+2a+b^2\neq 0$, 즉 $b^2\neq 5$

그러므로 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$,

$(-3, 2)$, 그 개수는 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[3차 방정식]

8.내신 킬러 문항

x에 대한 삼차방정식

$(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$이 서로 다른 세 실근

$1,\ \alpha,\ \beta$를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1이 근이 되는 경우를 따져 본다.

삼차방정식 이해하기

(i) 1이 x에 대한 방정식 $x-a=0$의 근일 경우
$a=1$이므로
주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$이고
방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식
$D=4-16=-12<0$
따라서 방정식 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$은
서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

(ii) 1이 x에 대한 방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 경우
$1+(1-3a)+4=0$에서 $a=2$이므로
주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$
방정식 $x^2-5x+4=0$이 두 실근 1, 4를
가지므로 방정식 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$은
서로 다른 세 실근 1, 2, 4를 갖는다.

따라서 (i), (ii)에 의하여
$\alpha=2$, $\beta=4$ (또는 $\alpha=4$, $\beta=2$)이므로
$\alpha\beta=8$

[4차 방정식]

9.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식
$x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$이 실근과 허근을 모두 가질 때, 이 사차방정식에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

<보기>

ㄱ. $a=1$이면 모든 실근의 곱은 -3이다.

ㄴ. 모든 실근의 곱이 -4이면 모든 허근의 곱은 3이다.

ㄷ. 정수인 근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 -1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이)

풀 이

1. 인수분해를 해본다. $x^2 = a - 5$, $x^2 = a + 2$
2. 실근과 허근 가질 조건을 생각해 본다.
3. $a - 5$: 허근, $x^2 = a + 2$: 실근 조건을 확인

인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 추론한다.

ㄱ. $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$에서

$a = 1$이면 $x^4 + x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i) = 0$

$x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$ 또는 $x = -2i$ 또는 $x = 2i$

이때 실근은 $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$ 이므로

모든 실근의 곱은 $(-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -3$이다. (참)

ㄴ. $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$에서

$x^4 + (3-2a)x^2 + (a-5)(a+2) = 0$

$(x^2 - a + 5)(x^2 - a - 2) = 0$

$\therefore x^2 = a - 5$ 또는 $x^2 = a + 2$

$x^2 = a - 5$에서 $a - 5 \geq 0$이면 실근을 갖고

$a - 5 < 0$이면 허근을 갖는다.

$x^2 = a + 2$에서 $a + 2 \geq 0$이면 실근을 갖고

$a + 2 < 0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$이

실근과 허근을 모두 가지므로

다음 페이지 계속

$a+2 \geq 0$, $a-5<0$에서 $-2 \leq a<5$
$-2<a<5$일 때 방정식의 실근은
$x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$ 이고,
$a=-2$일 때 $x=0$
또, $-2 \leq a<5$일 때 방정식의 허근은
$x=-\sqrt{5-a}i$ 또는 $x=\sqrt{5-a}i$이다.
이때 모든 실근의 곱이 -4이려면
$(-\sqrt{a+2}) \cdot \sqrt{a+2}=-4$, $a+2=4$
$a=2$이므로 방정식의 허근은
$x=-\sqrt{3}i$ 또는 $x=\sqrt{3}i$이다.
따라서 모든 허근의 곱은 $(-\sqrt{3}i) \cdot \sqrt{3}i=3$이다.
(참)

ㄷ. ㄴ에서 $-2 \leq a<5$이고
$0<\sqrt{a+2}<\sqrt{7}$ 이므로 방정식이 가질 수 있는
정수인 근은 $\sqrt{a+2}$ 의 값이 0, 1, 2일 때이다.
즉, $\sqrt{a+2}=0$일 때, $a=-2$
$\sqrt{a+2}=1$일 때, $a=-1$
$\sqrt{a+2}=2$일 때, $a=2$
따라서 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값이
-2, -1, 2이므로 그 합은
$(-2)+(-1)+2=-1$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[4차 방정식]

10.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$의

서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

풀이)

풀 이

1.조립제법으로 인수분해 한다.
2. 인수분해된 이차방정식이
 ①실근 1인 경우 ② 중근이 경우를 생각해 본다.

사차방정식을 활용하여 문제 해결하기

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$에서

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$이므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=0$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$0^2+2a\cdot 0+a+2=0$

$\therefore a=-2$

따라서 사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1$, $x=0$ (중근), $x=4$

(ii) $x=-1$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=-1$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$(-1)^2+2a\cdot(-1)+a+2=0$

$\therefore a=3$

따라서 사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-5$, $x=-1$ (중근), $x=0$

다음 페이지
계속

(iii) 사차방정식이 $x \neq 0$이고 $x \neq -1$인 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a)^2-4(a+2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(a) $a=-1$ 인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1,\ x=0,\ x=1$ (중근)

(b) $a=2$인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-2$ (중근), $x=-1,\ x=0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 a는

$-2,\ -1,\ 2\ ,\ 3$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 12이다.

[4차 방정식]

11.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식 $x^4-9x^2+k-10=0$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

풀이)

풀 이

1.짝수인 복이차 $x^2 = t > 0$ 로 치환
2. 이차방정식이 양근, 양근 가질 조건을 따진다.
3. 두 근의 합≥ 0, 두 근의 곱≥ 0 , D≥ 0

사차방정식 해의 성질을 활용하여 문제해결하기

$x^2 = t\ (t \geq 0)$라 하면 주어진 사차방정식은

$t^2 - 9t + k - 10 = 0$이므로 t에 대한 이차방정식이다.

즉, 방정식 $t^2 - 9t + k - 10 = 0$의

두 실근이 0 이상이어야 한다.

따라서 판별식을 D라 하면

$D \geq 0$, (두 근의 합) ≥ 0, (두 근의 곱) ≥ 0이어야 한다.

$D = 9^2 - 4(k - 10) \geq 0$이므로

$k \leq \dfrac{121}{4}$ $\cdots$ ㉠

(두 근의 합) $= 9 \geq 0$이므로

k의 값에 관계없이 성립한다. $\cdots$ ㉡

두 근의 곱 $k - 10 \geq 0$이므로

$k \geq 10$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $10 \leq k \leq \dfrac{121}{4}$이므로

모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k는

10, 11, $\cdots$, 30이므로 k의 개수는 21이다.

[4차 방정식]

12.내신 킬러 문항

$a > b > 1$인 두 자연수 a, b에 대하여 사차방정식
$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$
의 네 근의 곱이 25일 때, $a^3 + b^3$의 값을 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^4 + e = 0$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$$

사차방정식 $x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a^2-b^2)^2 = 0$에서
$x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a+b)^2(a-b)^2 = 0$
$\{x^2 - (a+b)^2\}\{x^2 - (a-b)^2\} = 0$
$\therefore x = \pm(a+b)$ 또는 $x = \pm(a-b)$
이때 네 근의 곱이 25이므로
$(a+b)^2(a-b)^2 = 25$
a, b는 자연수이므로
$(a+b)^2 = 25 \quad \cdots ㉠$
$(a-b)^2 = 1 \quad \cdots ㉡$
㉠−㉡을 하면 $4ab = 24$이므로
$ab = 6$
a, b는 $a > b > 1$인 두 자연수이므로
$a = 3$, $b = 2$
$\therefore a^3 + b^3 = 3^3 + 2^3 = 35$

[4차 방정식]

13.내신 킬러 문항

사차방정식 $x^4-3x-1=0$의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, ${x_1}^4+{x_2}^4+{x_3}^4+{x_4}^4$의 값을 구하면?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 근을 대입해서 4차식을 일차식으로
(2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + \mathrm{d}x^4 + \mathrm{e} = 0$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

$x^4 = 3x + 1$이므로

$x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 + x_4{}^4$
$= 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4$

$x^4 - 3x - 1$
$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$
$= x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4$

x^3의 계수를 비교하면

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$\therefore x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 + x_4{}^4 = 4$

[4차 방정식]

14.내신 킬러 문항

삼차다항식 $f(x)$가 1부터 5까지의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{6}{n^2+2}$을 만족한다. 삼차다항식 $f(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 1일 때, $f(-1)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) $(n^2+2)\mathrm{f}(n)-6=0$ 5차 방정식
(2) 5차 방정식의 근은 1~5
(3) $(n^2+2)\mathrm{f}(\mathrm{n})-6=\mathrm{a}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}-4)(\mathrm{x}-5)$

삼차다항식 $f(x)$는 1부터 5까지의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{6}{n^2+2}$, 즉 $(n^2+2)f(n)-6=0$을 만족시킨다.

이대 $g(x)=(n^2+2)f(n)-6$이라하면 $g(x)$는 오차식이고

$g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=g(5)=0$이므로

인수정리에 의하여 0이 아닌 상수 a에 대하여

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

$\therefore\ (x^2+2)f(x)-6$

$\quad =a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \qquad \cdots$ ㉠

이때 ㉠의 양변에 $x=6$을 대입하면 $f(6)=1$이므로

$38f(6)-6=a\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$32=a\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$\therefore\ a=\dfrac{4}{15}$

다음 페이지 계속

따라서 ㉠에서

$(x^2+2)f(x)$

$=\frac{4}{15}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+6$

이때 이 식에 $x=-1$을 대입하면

$3f(-1)$

$=\frac{4}{15}(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)+6$

$\therefore f(-1)=-62$

[고차 방정식]

15.내신 킬러 문항

방정식 $x^{11}=1$의 10개의 허근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{10}$이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 인수분해 하기
(2) 10차 방정식의 근을 이용하여 방정식 구하기
(3) $x^{10}+x^{9}+\cdots x \quad +1=$
$=(\mathrm{x}-\alpha_1)(\mathrm{x}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{x}-\alpha_{10})$
(4) 양변에 $\mathrm{x}=-1$ 대입

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^{9}+\cdots+x+1)$이므로
$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{10}$은
방정식 $x^{10}+x^{9}+\cdots+x+1$의 10개의 근이다.
따라서
$x^{10}+x^{9}+\cdots+x+1$
$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$
위 식에 $x=-1$을 대입하면
$1-1+1-\cdots-1+1$
$=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$
$=-(1+\alpha_1)\times-(1+\alpha_2)\cdots\times-(1+\alpha_{10})$
$\therefore\ (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

[고차 방정식]

16.내신 킬러 문항

α, β를 $x^2+x+1=0$의 두 근이라 하고

$P(n)=\alpha^n+\beta^n$라 할 때,

$P(3n)+P(n)+P(n-1)+P(n-2)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) $\omega^3 = 1$,   연속된 3항의 합 $= 0$

$x^2 + x + 1 = 0$,

$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \alpha^3 = 1,\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

따라서 $n \geq 2$인 모든 정수에 대해

$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$이고,

β에 대해서도 마찬가지이다.

$\mathrm{P}(3n) + \mathrm{P}(n) + \mathrm{P}(n-1) + \mathrm{P}(n-2)$

$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$

$+ (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$

$= (1+1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$

$+ (\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$

$= 2 + 0 + 0 = 2$

DRE-EDU.com

[고차 방정식]

17.내신 킬러 문항

양의 실수 a, b, c에 대하여
$a^3+b^3+c^3=3abc$이다.
방정식 $ax^2+bx+c=0$을 만족시키는 x에 대하여
$x^{2019}+x^{1207}+x^{140}+2019$의 값을 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 식 변형하면 쉽게 접근할 수 있다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \quad \cdots ㉠$

$a+b+c \neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $a+b+c$로 나누면

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

그런데 a, b, c는 양의 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

즉,

$ax^2+bx+c=ax^2+ax+a$

$\qquad\qquad\quad =a(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^2+x+1=0$ ($\because a>0$)

위의 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$x^3=1$

$\therefore\ x^{2019}+x^{1207}+x^{140}+2019$
$=(x^3)^{673}+x(x^3)^{402}+x^2(x^3)^{46}+2019$
$=(x^2+x+1)+2019$
$=2019\ (\because\ x^2+x+1=0)$

(ⅱ) α, α^2을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

한 실근을 β라고 할 때, 세 근의 합은

$\beta+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2 \therefore \beta=-1$

$\therefore x^3+2x^2+px+q$
$=(x^2+x+1)(x+1)$
$=x^3+2x^2+2x+1$
$\therefore p=2,\ q=1$
$\therefore pq=2$

②

[삼차방정식 - ω]

18.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$의 한 허근을 w라 할 때, $\{w(\overline{w}-1)\}^n=256$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

풀이)

풀 이

인수를 찾아 인수분해를 해 본다.

삼차방정식을 이용하여 추론하기

삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$에서

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$

이때 $w \neq 1$이므로 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의

두 허근이 w, $\overline{w}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$w+\overline{w}=2$, $w\overline{w}=2$에서

$w\overline{w}-w=\overline{w}$

$\therefore \{w(\overline{w}-1)\}^n=(w\overline{w}-w)^n=\overline{w}^n$

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근은

$1+i, 1-i$

따라서 $w=1+i$, $\overline{w}=1-i$일 때

$\overline{w}^2=-2i$, $\overline{w}^4=-4$에서

$\overline{w}^{16}=256$

마찬가지로 $w=1-i$, $\overline{w}=1+i$일 때도

$\overline{w}^{16}=256$

$\therefore n=16$

[삼차방정식 - ω]

19.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고,

양의 정수 n 에 대하여 $f(n) = \dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$ 이라 정의할 때,

$f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(13)$ 의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 규칙을 찾아 본다.

삼차방정식 이해하기

$x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$이다.

$$f(1) = \frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1$$
$$= f(4) = f(7) = f(10) = f(13)$$
$$f(2) = \frac{\omega^2}{1+\omega^4} = \frac{\omega^2}{1+\omega} = -1$$
$$= f(5) = f(8) = f(11)$$
$$f(3) = \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$= f(6) = f(9) = f(12)$$

$\therefore f(1) - f(2) + \cdots - f(6) = 0$

$\therefore$ (준식)$= f(13) = -1$

[삼차방정식 - ω]

20.내신 킬러 문항

방정식 $x^3 = -1$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^n = -\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 규칙을 찾아 본다.
(3) n이 홀수 조건을 찾아 본다.

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉
$(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는
이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고,
ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 한 근이다.
$\therefore\ \omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$(\omega^2+1)^n=-\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n$ 에서

$(\omega^2+1)^n=\omega^n$,

$\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\omega-1}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)^n=\dfrac{1}{\omega^{2n}}$ 이므로

$\omega^n=-\dfrac{1}{\omega^{2n}}$

양변에 ω^{2n}을 곱하면
$\omega^{3n}=-1$, 즉 $(-1)^n=-1$
따라서 자연수 n은 홀수이어야 하므로 조건을
만족시키는 자연수 n은 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 99$의 50개이다.

[삼차방정식 - ω]

21.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고

양의 정수 n에 대하여 $f(n) = \dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$ 이라 정의할 때,

$f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(13)$의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

풀 이

[핵심포인트!]
(1) $\omega^3 = 1$
(2) $\omega^2 + \omega \ + 1 = 0$
(3) 연속된 3항의 합 = 0

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

한 허근이 ω이므로 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄱ. $\omega^7 = (\omega^3)^2 \times \omega = \omega$

ㄴ. $\overline{\omega}$도 $x^2 + x + 1 = 0$의 허근이므로 $\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} - \frac{\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}}$$

$$= \frac{-1-\omega^2}{1+\omega^2} - \frac{-1-\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}}$$

$$= -1 - (-1) = 0$$

ㄷ. $\omega + \omega^3 + \omega^5 + \omega^7 + \cdots + \omega^{99}$

$$= \omega + \omega^3 + \omega^3 \times \omega^2 + (\omega^3)^2 \times \omega + (\omega^3)^3 + (\omega^3)^3 \times \omega^2 + \cdots + (\omega^3)^{32} \times \omega + (\omega^3)^{33}$$

$$= (\omega + 1 + \omega^2) + (\omega + 1 + \omega^2) + \cdots + \omega + 1$$

$$= \omega + 1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

[삼차방정식 - ω]

22.내신 킬러 문항

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)=-4 \\ x^2+y^2+xy=4 \end{cases}$ 를

만족시키는 x, y를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 합과 곱을 치환한다.
(2) 치환한 이차 방정식을 푼다.

$\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)=-4 \\ x^2+y^2+xy=4 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} (x+y)^2+xy-4(x+y)=-4 \\ (x+y)^2-xy=4 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+v-4u=-4 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-4$ $\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2+u^2-4-4u=-4$, $2u^2-4u=0$

$u^2-2u=0$, $u(u-2)=0$ $\therefore$ $u=0$ 또는 $u=2$

㉢에서 $u=0$일 때, $v=-4$, $u=2$일 때, $v=0$

다음 페이지 계속

(ⅰ) $u=0$, $v=-4$, 즉 $x+y=0$, $xy=-4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-2)=0$ $\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore x=-2$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=-2$

(ⅱ) $u=2$, $v=0$, 즉 $x+y=2$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-2t=0$의 두 근이므로

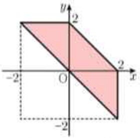
$t(t-2)=0$ $\qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

$\therefore x=0$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

따라서 네 점 $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$3\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=6$

[삼차방정식 - ω]

23.내신 킬러 문항

방정식 $xy+2x=y+6$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 일차식×일차식 = 상수꼴로 바꾼다

$xy+2x=y+6$에서

$xy+2x-y-6=0$, $(x-1)(y+2)=4$

이때 x, y는 정수이므로

(ⅰ) $x-1=-4$, $y+2=-1$일 때, $x=-3$, $y=-3$

(ⅱ) $x-1=-2$, $y+2=-2$일 때, $x=-1$, $y=-4$

(ⅲ) $x-1=-1$, $y+2=-4$일 때, $x=0$, $y=-6$

(ⅳ) $x-1=1$, $y+2=4$일 때, $x=2$, $y=2$

(ⅴ) $x-1=2$, $y+2=2$일 때, $x=3$, $y=0$

(ⅵ) $x-1=4$, $y+2=1$일 때, $x=5$, $y=-1$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 xy의 값은 9, 4, 0, -5이므로

xy의 최댓값은 9이다.

[부정방정식]

24.내신 킬러 문항

방정식 $(9x^2+4y^2-73)^2+(3x-2y+11)^2=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 제곱의 합 =0 이면 각 각 0이다.

주어진 식을 변형하면

$(2x-1)(y-2)=6$

이때 주어진 조건에서 x, y가 양의 정수이므로

$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고, $2x-1$은 양의 홀수이다.

따라서 $\begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$ 이므로

$\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

[부정방정식]

25.내신 킬러 문항

방정식 $x^2-4xy+5y^2+6y+9=0$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 완전제곱 꼴이 안되면 실수 조건을 이용하여 판별식을 이용한다.!

x, y 실수이므로 주어진 방정식이 실근을 가져야 한다. 즉 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2y)^2-(5y^2+6y+9)\geq 0$$

$$y^2+6y+9\leq 0,\ (y+3)^2\leq 0$$

이때 y도 실수이므로 $y=-3$

$y=-3$을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+12x+36=0,\quad (x+6)^2=0$$

$$\therefore x=-6$$

$$\therefore x+y=-9$$

[공통근]

26.내신 킬러 문항

다음 두 이차방정식 $x^2+2kx-(k-1)=0$, $2x^2+kx+k+2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 공통근을 대입하고 빼본다.!

공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} 2\alpha^2+4k\alpha-2(k-1)=0 & \cdots ① \\ 2\alpha^2+k\alpha+k+2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①－②하면 $3k\alpha-3k=0$

$\therefore k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 하나의 공통근을 갖지 않으므로 모순

즉, $k\neq 0$이므로 $\alpha=1$

이를 ①에 대입하면 $2+4k-2k+2=0$

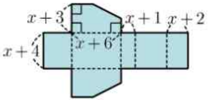
$\therefore 2k=-4$

$\therefore k=-2$

[삼차방정식의 활용]

27.내신 킬러 문항

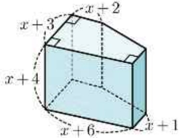
다음 그림과 같은 전개도의 점선을 따라 접어서 만든 오각기둥의 부피가 120일 때, x의 값을 구하시오.



풀 이

[핵심포인트!]
(1) 밑변을 사다리꼴 높이를 (x+4)로 접근한다.

주어진 전개도를 접어 오각기둥을 만들면 다음 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 120이므로

$$\left[(x+1)(x+6)+\frac{1}{2}\{(x+2)+(x+6)\}\times 2\right] \times(x+4)$$

$=120$

다음 페이지 계속

$(x^2+9x+14)(x+4)=120$

$\therefore\ x^3+13x^2+50x-64=0$

$f(x)=x^3+13x^2+50x-64$이라 하면

$f(1)=1+13+50-64=0$이므로 조립제법을

이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 13 & 50 & -64 \\
 & & 1 & 14 & 64 \\
\hline
 & 1 & 14 & 64 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x^2+14x+64)$

즉, $(x-1)(x^2+14x+64)=0$에서

이차방정식 $x^2+14x+64=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x=1$

✓〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

여러가지 부등식편
(일차부등식,이차부등식)

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법
절댓값이 0인점을 기준으로 범위를 나눈다.

$|4x-3| > |x-6|$에서

(i) $x < \frac{3}{4}$일 때,

$-(4x-3) \geq -(x-6)$

$-3x \geq 3$

$\therefore x < -1$

그런데 $x < \frac{3}{4}$이므로 $x < -1$

(ii) $\frac{3}{4} \leq x < 6$일 때,

$4x-3 \geq -(x-6)$

$5x \geq 9$

$\therefore x \geq \frac{9}{5}$

그런데 $\frac{3}{4} < x < 6$이므로 $\frac{9}{5} < x < 6$

(iii) $x > 6$일 때,

$4x-3 \geq x-6$

$3x \geq -3$

$\therefore x \geq -1$

그런데 $x > 6$이므로 $x > 6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$x \leq -1$ 또는 $x \geq \frac{9}{5}$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{9}{5}$ 이므로

$5ab=-9$

※절댓치 함수를 이용해서 문제를 풀면 조금더 쉽게 처리할 수 있다.

킬러

풀이과정)

풀 이

풀이법
절댓값이 0인점을 기준으로 범위를 나눈다.

$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로

주어진 부등식은 $||x+1|+|x-3||\le 6$

$\therefore 0\le |x+1|+|x-3|\le 6$

위 부등식을 세 가지 경우로 나눠서 생각해보자.

(i) $x<-1$일 때

$0<-x-1-x+3<6,\ 0<-2x+2<6$

$-2\le -2x\le 4,\ -2\le x\le 1$

$\therefore -2<x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때

$0<x+1-x+3<6,\ 0<4<6$

$\therefore -1\le x<3$

(iii) $x>3$일 때

$0\le x+1+x-3\le 6,\ 0\le 2x-2\le 6$

$2\le 2x\le 8,\ 1\le x\le 4$

$\therefore 3\le x\le 4$

$\therefore -2\le x\le 4$이므로, $a=-2,\ b=4$

$\therefore a+b=2$

풀이과정)

킬러

풀이과정)

풀 이

풀이법
절댓치는 0보다 크거나 같기 때문에 작은 경우를 생각하면 된다.

주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{1}{3}a-2<0$, $\frac{1}{3}a<2$

$\therefore a<6$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다.

킬러

풀이과정)

풀 이

풀이법
식으로 푸는 방법도 있지만 절댓치 함수를 그래고 조건에 맞조거한 겨우를 생각해도 좋다.

$|x-k| \geq 0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면 $k^2+k=0$

$k(k+1)=0 \quad \therefore k=-1 \ (\because k \neq 0)$

따라서 주어진 부등식은 $|x+1| \leq 0$이므로 구하는 해는 $x=-1$

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법

(1) 절댓치는 0보다 크거나 같기 때문에 작은 경우를 생각하면 된다.

(ⅰ) $x < -2$일 때

$-2(x+2)-(x-1) \le 6$

$-3x-3 < 6,\ x > -3$

$\therefore -3 \le x < -2$

(ⅱ) $-2 < x < 1$일 때

$2(x+2)-(x-1) \le 6$

$2x+4-x+1 < 6$

$x \le 1$

$\therefore -2 < x < 1$

(ⅲ) $x \ge 1$일 때

$2(x+2)+(x-1) < 6$

$2x+x+4-1 \le 6,\ x \le 1$

$\therefore x = 1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$-3 \le x \le 1$

$\therefore a = -3,\ b = 1$

$\therefore ab = -3$

풀이과정)

핵심

풀이과정)

풀 이

$x^2 - ax > 6a^2$에서

$x^2 - ax - 6a^2 > 0$

$\therefore (x+2a)(x-3a) > 0 \qquad \cdots ㉠$

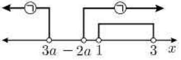
$1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하기 위해서는 $1 < x < 3$이 부등식 ㉠의 해의 범위에 포함되어야 한다.

(ⅰ) $a < 0$일 때,

부등식 ㉠의 해는

$x < 3a$ 또는 $x > -2a$이므로

다음 그림과 같아야 한다.



$-2a \leq 1$

$\therefore a \geq -\dfrac{1}{2}$

그런데 $a < 0$이므로

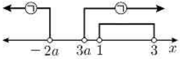
$-\dfrac{1}{2} \leq a < 0$

(ii) $a \geq 0$일 때,

부등식 ㉠의 해는

$x < -2a$ 또는 $x > 3a$이므로

다음 그림과 같아야 한다.



$3a \leq 1$

$\therefore a \leq \dfrac{1}{3}$

그런데 $a \geq 0$이므로

$0 \leq a \leq \dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $-\dfrac{1}{2} \leq a \leq \dfrac{1}{3}$이므로

실수 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

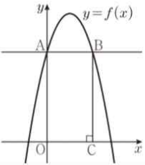
따라서 $p = \dfrac{1}{3}$이므로

$6p = 2$

[일차부등식]

7.내신 킬러 문항

다음 그림과 같이
이차함수 $f(x) = -x^2 + 4kx + 2k^2 + 3\ (k > 0)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 사각형 OCBA의 둘레의 길이를 $g(k)$라 할 때, 부등식 $66 \leq g(k) \leq 258$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)



풀 이

점 A가 y축 위의 점이므로

$A(0,\ 2k^2+3)$

$-x^2+4kx+2k^2+3=2k^2+3$에서

$x^2-4kx=x(x-4k)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4k$

따라서 점 B와 점 C의 좌표는 각각

$B(4k,\ 2k^2+3),\ C(4k,\ 0)$

이때 $k>0$이므로

$g(k)=2\cdot 4k+2(2k^2+3)$

$\quad =4k^2+8k+6$

$\therefore\ 33\le 2k^2+4k+3\le 129$

(i) $33\le 2k^2+4k+3$

$k^2+2k-15\ge 0,\ (k+5)(k-3)\ge 0$이므로

$k\le -5$ 또는 $k\ge 3$ $\cdots$ ㉠

(ii) $2k^2+4k+3\le 129$

$k^2+2k-63\le 0,\ (k+9)(k-7)\le 0$이므로

$-9\le k\le 7$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$-9\le k\le -5$ 또는 $3\le k\le 7$

이때 $k>0$이므로

$3\le k\le 7$

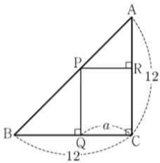
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+4+5+6+7=25$

[일차부등식]

8.내신 킬러 문항

그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{BC}=12$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 빗변 AB 위의 점 P에서 변 BC와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 직사각형 PQCR의 넓이는 두 삼각형 APR와 PBQ의 각각의 넓이보다 크다. $\overline{QC}=a$일 때, 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.



풀 이

연립이차부등식 문제해결하기

$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$이고

$\overline{BQ}=12-a$

또, 세 삼각형 ABC, APR, PBQ는 모두 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\therefore\ \square PQCR=a(12-a)$, $\triangle APR=\frac{1}{2}(12-a)^2$,

$\triangle PBQ=\frac{1}{2}(12-a)^2$

이때 $\square PQCR>\triangle APR$, $\square PQCR>\triangle PBQ$이므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $a^2-16a+48<0$

$(a-4)(a-12)<0$

$\therefore\ 4<a<12 \qquad \cdots ㉢$

㉡에서 $a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$

$\therefore\ 0<a<8 \qquad \cdots ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 합은 18이다.

[redacted]

킬러

풀이과정)

풀 이

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+5x+1 \le mx+n$, 즉
$x^2+(m-5)x+n-1 \ge 0$이므로
이차방정식 $x^2+(m-5)x+n-1=0$의
판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-5)^2-4(n-1) \le 0$

$\therefore 4n > m^2-10m+29$ … ㉠

또한, 모든 실수 x에 대하여 $mx+n \le x^2+x+3$, 즉
$x^2+(1-m)x+3-n > 0$이므로
이차방정식 $x^2+(1-m)x+3-n=0$의
판별식을 D_2라 하면

$D_2=(1-m)^2-4(3-n) \le 0$

$\therefore 4n \le -m^2+2m+11$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$m^2-10m+29 \le 4n < -m^2+2m+11$ … ㉢

즉, $m^2-10m+29 \le -m^2+2m+11$에서

$2m^2-12m+18 \le 0$, $m^2-6m+9 \le 0$

$(m-3)^2 \le 0$

$\therefore m=3$

$m=3$을 ㉢에 대입하면

$8 \le 4n \le 8$, $4n=8$

$\therefore n=2$

$\therefore m^2+n^2=3^2+2^2=13$

풀이과정)

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법
근의 분리를 아는가? 주어진 조건에 만족하는 그리프 찾기
판축경
→ 판: 판별식
축: x축
경: 경계값

이차방정식의 활용 문제 해결하기

$f(x)=x^2-2mx-3m-8$라 두면

이차방정식 $f(x)=0$에서

$\frac{D}{4}=m^2+3m+8=\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$이므로

m의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

두 실근이 모두 0 이하가 되려면

(i) 대칭축의 방정식은 $x=m$이므로 $m<0$

(ii) $f(0)=-3m-8\geq 0$에서 $m\leq -\frac{8}{3}$

(i), (ii)에 의해 $m\leq -\frac{8}{3}$이다. 따라서 두 근 중

적어도 하나가 양의 실수가 되려면 $m>-\frac{8}{3}$이므로

정수 m의 최솟값 $k=-2$이다.

$\therefore\ k^2=4$

핵심

풀이과정)

풀 이

$P(x)=4x^3+3x^2-x+1$, $Q(x)=x^2+x-1$이므로

$P(x)-(4x-1)Q(x)+mx^2$

$=(4x^3+3x^2-x+3)-(4x-1)(x^2+x-1)+mx^2$

$=4x^3+3x^2-x+3-(4x^3+3x^2-5x+1)+mx^2$

$=mx^2+4x+2$

$f(x)=mx^2+4x+2$라 하면

이차방정식 $mx^2+4x+2=0$의 근은

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가

x축과 만나는 점의 x좌표이다.

이때 한 근이 3보다 작고, 다른 한 근이 3보다 큰 경우는

다음과 같다.

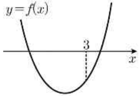
(ⅰ) $m>0$일 때,

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

다음 그림과 같아야 하므로

$f(3)=9m+14<0$에서

$m<-\dfrac{14}{9}$



그런데 $m>0$이므로 이를 만족시키는

정수 m은 존재하지 않는다.

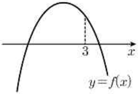
(ⅱ) $m<0$일 때,

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

다음 그림과 같아야 하므로

$f(3)=9m+14>0$에서

$m>-\dfrac{14}{9}$



$\therefore -\dfrac{14}{9}<m<0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-\dfrac{14}{9}<m<0$이므로

정수 m은 -1의 1개이다.

킬러

풀이과정)

풀 이

풀이법
삼차함수를 인수분해 하면 이차식의 근의 분류로 풀 수 있다.

삼차방정식의 근의 성질을 활용하여 문제해결하기

삼차방정식 $x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=0$에서

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & k-9 & k-3 \\ & & -1 & 6 & -k+3 \\ \hline & 1 & -6 & k-3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-5x^2+(k-9)x+k-3$

$=(x+1)(x^2-6x+k-3)$

즉, $x=-1$은 주어진 삼차방정식의 해이다.

따라서 이차방정식 $x^2-6x+k-3=0$이

1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

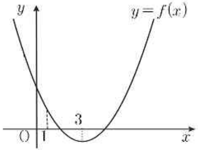
$f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하고, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

(ⅰ) $\frac{D}{4}=9-k+3>0$이므로

$k<12$

(ⅱ) $f(1)=1-6+k-3>0$이므로

$k>8$



따라서 (i), (ii)에 의하여 $8 < k < 12$이므로

정수 k는 9, 10, 11이다.

즉, 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$9+10+11=30$

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법
두 그래프가 만나는 교점을 이차 방정식의 교점으로 해석한다.
근의 분류의 다른 형태의 문제!

이차함수 $y = x^2 + mx + 2$의 그래프와
직선 $y = x - 1$이 만나는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여
선분 AB 위에 점 $(3, 2)$가 있으므로
이차방정식 $x^2 + mx + 2 = x - 1$, 즉
$x^2 + (m-1)x + 3 = 0$의 두 근 사이(두 근 포함)에
3이 있어야 한다.
$f(x) = x^2 + (m-1)x + 3$이라 하면
$f(3) \le 0$이어야 하므로
$f(3) = 9 + 3(m-1) + 3 \le 0$
$3m + 9 \le 0$
$\therefore m \le -3$
따라서 정수 m의 최댓값은 -3이다.

[redacted]

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법

가격× 입장객 = 수입!!

입장권 가격을 a원이라 하면 x% 인상한 가격은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\text{원}$$

입장객 수를 b명이라 하면 $0.6x$% 줄어든 입장객 수는

$$b\left(1-\frac{6x}{1000}\right)\text{명}$$

또한, 미술관의 수입은

(입장권의 가격) · (입장객 수)이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)b\left(1-\frac{6x}{1000}\right)$$

이때 미술관의 수입 증가액이 6.6% 이상이 되어야 하므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)b\left(1-\frac{6x}{1000}\right)\geq ab\left(1+\frac{66}{1000}\right)$$

$$\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{500-3x}{500}\right)\geq\frac{533}{500}$$

$3x^2-200x+3300\leq 0$, $(x-30)(3x-110)\leq 0$

즉, $30\leq x\leq\dfrac{110}{3}$

따라서 최소 30%를 인상해야 한다.

[일차부등식]

15.내신 핵심 문항

다음 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) 부등식 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right) \le 0$의 해가 $-7 \le x \le 9$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \ge 2x - \dfrac{13}{3}$이 성립한다.

① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{11}{6}$ ③ $\dfrac{23}{12}$

④ 2 ⑤ $\dfrac{25}{12}$

풀 이

풀이법

복잡하면 치환!

이차부등식과 이차함수의 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

조건 (가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$라 하면 $x=1-4t$이고,

부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\le 0$의 해가 $-7\le x\le 9$이므로

$-7\le 1-4t\le 9$, $-2\le t\le 2$

따라서 $f(t)=k(t-2)(t+2)$ $(k>0)$에서

$f(x)=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)$ $\cdots$ ㉠

라 할 수 있다.

조건 (나)에서 부등식 $f(x)\ge 2x-\frac{13}{3}$이

항상 성립하므로

이차부등식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}>0$의 해는

모든 실수이다.

따라서 방정식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}=0$의 판별식을

D라 놓으면

$$\frac{D}{4}=1-k\left(-4k+\frac{13}{3}\right)$$

$$=4k^2-\frac{13}{3}k+1\le 0$$

$12k^2-13k+3<0$

$(4k-3)(3k-1)\le 0$

$\frac{1}{3}\le k\le\frac{3}{4}$

㉠에서 $f(3)=5k$이므로

$\frac{5}{3}<f(3)<\frac{15}{4}$

따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$에서

$M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

핵심

풀이과정)

풀 이

풀이법
이차방정식이라 말이 없으면 2차 항의 계수가 0일때, 0이 아닐 때 꼭 확인한다!!

(i) $k=4$일 때, $1>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $k \neq 4$일 때, $(k-4)x^2+2(k-4)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k-4>0$, $k>4$ $\cdots$ ㉠

또, 이차방정식 $(k-4)x^2+2(k-4)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(k-4)^2-(k-4)<0$$

$$k^2-9k+20<0$$

$$(k-4)(k-5)<0$$

$\therefore\ 4<k<5$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $4<k<5$

(i), (ii)에서 $4 \leq k<5$

따라서 $m=4$, $n=5$이므로

$m+n=9$

[일차부등식]

17.내신 *핵심* 문항

풀이과정)

풀 이

풀이 법
그래프를 그려본다.
적당한 x값을 대입하며 조건을 찾는다.

해집합이 주어진 이차부등식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$ax^2+bx+c \geq 0$ 의 해가 $x=2$ 뿐이므로

$a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2=ax^2-4ax+4a$

$\therefore$ $a<0$이고, $b=-4a$, $c=4a$

ㄱ. $a<0$이다.

ㄴ. $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지므로
판별식 $b^2-4ac=0$이다.

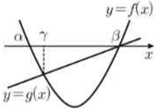
ㄷ. $a+b+c=a+(-4a)+4a=a<0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

[일차부등식]

18.내신 핵심 문항

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 아래 그림과 같을 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\gamma-\alpha<\beta-\gamma$)



〈보기〉

ㄱ. $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<g(\gamma)$

ㄴ. 방정식 $\{f(x)\}^2-f(x)g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

ㄷ. 부등식 $\{g(x)\}^2 \leq g(x)f(x)$의 해는 $x \geq \gamma$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

풀이 법
그래프 만나는 교점이 방정식의 근임을 따져 본다.

ㄱ. $\gamma - \alpha < \beta - \gamma$에서 $\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로

$g(\gamma) > f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) = 0$,

$f(x)\{f(x) - g(x)\} = 0$에서

$f(x) = 0$ 또는 $g(x) = f(x)$

$\therefore x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 또는 $x = \gamma$

따라서 $f(x)\{f(x) - g(x)\} = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. $\{g(x)\}^2 \leq g(x)f(x)$에서 $\{g(x)\}^2 - f(x)g(x) \leq 0$

$g(x)\{g(x) - f(x)\} < 0$

$\therefore g(x) \geq 0,\ g(x) \leq f(x)$ 또는

$g(x) < 0,\ g(x) > f(x)$

(i) $g(x) \geq 0,\ g(x) \leq f(x)$일 때

주어진 그래프에서 $x \geq \beta$

(ii) $g(x) \leq 0,\ g(x) \geq f(x)$일 때

주어진 그래프에서 $\gamma \leq x \leq \beta$

(i), (ii)에 의하여 $x \geq \gamma$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

[일차부등식]

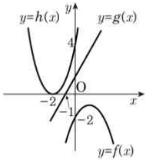
19.내신 핵심 문항

풀이과정)

풀 이

풀이 법
그래프로 해석해 본다.

(i) $f(x) \le g(x)$에서 $-x^2+x-2 \le ax+a$



$\therefore\ x^2+(a-1)x+a+2 \ge 0$

$D=(a-1)^2-4(a+2)=a^2-6a-7 \le 0$

$\therefore\ -1 \le a \le 7$

(ii) $g(x) < h(x)$에서 $ax+a < x^2+4x+4$

$\therefore\ x^2+(4-a)x+4-a > 0$

$D=(4-a)^2-4(4-a)=a^2-4a < 0$

$\therefore\ 0 < a < 4$

(i), (ii)에서 $0 < a < 4$이므로 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

풀이과정)

풀 이

절댓값을 포함한 일차부등식과 이차부등식을 이용하여 연립부등식 이해하기

x에 대한 연립부등식 $\begin{cases} |x-n|>2 & \cdots ㉠ \\ x^2-14x+40 \le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

에서 부등식 ㉠의 해는 $x<n-2$ 또는 $x>n+2$

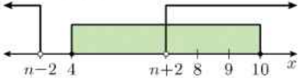
이차부등식 ㉡의 해는

$x^2-14x+40=(x-4)(x-10) \le 0$에서

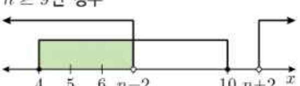
$4 \le x \le 10$

(i) $n \le 5$ 또는 $n \ge 9$인 경우

(a) $n \le 5$인 경우

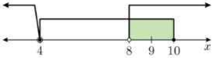


(b) $n \ge 9$인 경우



두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수는 3 이상이다.

(ii) $n=6$인 경우



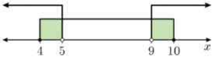
부등식 ㉠은 $|x-6|>2$이므로

해는 $x<4$ 또는 $x>8$

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는

9, 10이다.

(iii) $n=7$인 경우



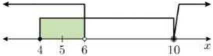
부등식 ㉠은 $|x-7|>2$이므로

해는 $x<5$ 또는 $x>9$

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는

4, 10이다.

(iv) $n=8$인 경우



부등식 ㉠은 $|x-8|>2$이므로

해는 $x<6$ 또는 $x>10$

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는

4, 5이다.

(i)~(iv)에 의하여 자연수 n의 값은 6, 7, 8이므로

모든 자연수 n의 값의 합은 21이다.

풀이과정)

킬러

풀이과정)

풀 이

$f(2n, 2n+2)$에서 $|x-2n|+|x| \le 2n+2$

(i) $x < 0$일 때,

$-(x-2n)-x \le 2n+2$

$-x+2n-x < 2n+2$

$\therefore x \ge -1$

그런데 $x < 0$이므로 $-1 \le x < 0$

(ii) $0 < x < 2n$일 때,

$-(x-2n)+x \le 2n+2$

$-x+2n+x \le 2n+2$

$\therefore 0 < 2$

따라서 x는 모든 실수이다 $\therefore x \le 2n+1$

그런데 $0 \le x < 2n$이므로 $0 \le x < 2n$

(iii) $x > 2n$일 때,

$x-2n+x \le 2n+2$

$\therefore x \le 2n+1$

그런데 $x > 2n$이므로 $2n < x < 2n+1$

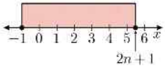
(i), (ii), (iii)에 의하여 $-1 \le x \le 2n+1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이려면 다음 그림에서

$5 \le 2n+1 < 6$, $4 \le 2n < 5$

$\therefore 2 \le n < \dfrac{5}{2}$

따라서 자연수 n의 값은 2이다.



풀 이

(2) 풀 이 법

그래프로 해석해 본다.

이 문제도 그래프로 해석해 보면 도움이 많이 될 것입니다.

그래프로 연습해 보기

✓〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

경우의 수편

(경우의 수, 순열,조합)

경우의 수는 킬러보다는 꼭 알아야
될 내용을 중심으로 문제를 선정했습니다.

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

풀이과정)

풀 이

풀이법 – 특정한 조건이 있으면 먼저 나열한다.

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$5! = 120$

이때, 자음은 b, c, d이므로

양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2 \times 3! = 3 \times 2 \times 6 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 - 36 = 84$

풀이과정)

풀 이

풀이법 – 순서가 있으면 조합으로 생각한다.

a가 될 수 있는 수는 1 또는 2 또는 3의 3개이다.

또, $4 \le b < c < d < 10$을 만족시키는 b, c, d는 4부터 9까지의 6개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3 = 20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3 \cdot 20 = 60$

[경우의 수]

3.내신 킬러 문항

풀이과정)

풀 이

풀이법
A를 중심으로 수형도를 그려본다.

이동한 거리가 3인 경우의 이동한 경로는 다음과 같다.

- A
  - C
    - D — B
    - F — B
  - D
    - C — B
    - E — B
  - E
    - D — B
    - F — B
  - F
    - C — B
    - E — B

따라서 구하는 경우의 수는 8이다.

[경우의 수]

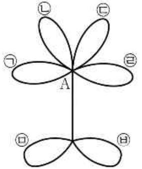
4.내신 킬러 문항

풀이과정)

풀 이

풀이법
A에서 출발하여 돌아오는 경우가 각각 2가지 이므로 16을 곱해 주어야 한다.

아래 그림에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 그리는 순서를 정하는 방법의 수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$이다.



그런데 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣은 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 그려지므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 그리는 방향을 정하는 경우의 수는 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$이다.
즉, 점 A에서 시작하여 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 한 번에 그릴 수 있는 방법의 수는 $24 \cdot 16 = 384$이다.
같은 방법으로 ㉤, ㉥을 그리는 순서를 정하는 방법의 수는 2, 그리는 방향을 정하는 경우의 수는 $2 \cdot 2 = 4$이므로 ㉤, ㉥을 한 번에 그릴 수 있는 방법의 수는 $2 \cdot 4 = 8$이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $384 \cdot 8 = 3072$이다.

풀이과정)

풀 이

풀이법
abc는 곱이므로 a,b,c중 하나만 짝수이면 짝수임은 생각하며 푼다.

$a+b+c+abc$가 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a+b+c$: 짝수, abc : 홀수

$a+b+c$가 짝수인 경우는

$(a, b, c)=$(짝, 짝, 짝), (짝, 홀, 홀), (홀, 짝, 홀), (홀, 홀, 짝) 으로 abc는 모두 짝수이다.

따라서 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

(ii) $a+b+c$: 홀수, abc : 짝수

$a+b+c$가 홀수인 경우는

$(a, b, c)=$(짝, 짝, 홀), (짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 짝), (홀, 홀, 홀)의 4가지이다.

이때 $(a, b, c)=$(짝, 짝, 홀)인 경우는

$3\times3\times3=27$(가지)이고, (짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 짝)이 모두 같은 경우이므로 $27\times3=81$(가지)이다.

한편, $(a, b, c)=$ (홀, 홀, 홀)인 경우는

abc가 짝수이라는 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우는 81가지이다.

풀이과정)

풀 이

풀이법
(전체)− (7의 배수가 아닌경우)

$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수 중 7의 배수인 것은
소인수 중에서 7을 적어도 1개 갖는 것을 의미한다.
따라서 $2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수의 개수에서 7을 소인수로
갖지 않는 약수, 즉 $2^2 \cdot 5^3$의 약수의 개수를 뺀 것과
같으므로
$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수의 개수는
$(2+1) \cdot (3+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
$2^2 \cdot 5^3$의 약수의 개수는
$(2+1) \cdot (3+1) = 3 \cdot 4 = 12$
$\therefore 36 - 12 = 24$

[경우의 수]

내신 핵심 문항

풀이과정)

풀 이

풀이법
A=C경우, A≠C 경우 B색 칠하는 경우가 달라진다.

D가 A, B, C와 모두 인접하여 있으므로 D를 가장 먼저 칠하면 D에 칠할 수 있는 경우의 수는 6이다.
또, B도 A와 C, D와 인접하여 있으므로 B에 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.
A와 C는 B, D와는 인접하여 있지만 서로 인접하지 않으므로 서로 같은 색을 칠하는 경우와 서로 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우
B와 D를 칠하고 남은 색이 4가지이므로
이 중 하나를 선택하여 A와 C에 모두 칠하는 경우의 수는 4이다.
따라서 A와 C에 같은 색을 칠하는 경우에 칠할 수 있는 모든 경우의 수는
$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

B와 D를 칠하고 남은 색이 4가지이므로

이 중 두 가지를 선택하여 A와 C에 모두 칠하는

경우의 수는 $4 \cdot 3$이다.

따라서 A와 C에 다른 색을 칠하는 경우에 칠할 수

있는 모든 경우의 수는

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

따라서 칠하는 경우의 수는

$120 + 360 = 480$

※ 색칠 문제는 같을 때와 다를 때를
나누는 경우와
그냥 계산하는 경우를 구별하는 것이
아주 중요하다.

※나누는 기준!
가운데 있는 영역이 옆에 있는 색에 영
향을 끼치면 경우를 나누고, 그렇지않
으면 그냥 곱해서 계산한다.

[경우의 수]

유사시 핵심 문항

풀이과정)

풀 이

풀이법
전체 – 아닌 경우 주목!

조합의 수 구하기

$${}_7C_2 - {}_3C_2 - {}_4C_2 - {}_3C_2 + 3 = 12$$

DRE-EDU.com

[조합]

9.내신 킬러 문항

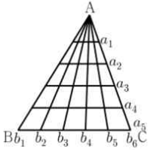
삼각형 ABC에서 꼭짓점 A와 선분 BC 위의 네 점을

풀이과정)

풀 이

풀이법 – 도형의 개수는 조합을 이용한다.
A를 중심으로 삼각형을 생각한다.

다음 그림과 같이 각각의 선을
a_i, b_j $(i=1, 2, 3, 4, 5, j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 이라 하자.



삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 한 개,
$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 중 두 개를 택해야 하므로
구하는 삼각형의 개수는
${}_5C_1 \cdot {}_6C_2 = 5 \cdot 15 = 75$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
(전체) −(아닌경우)

주어진 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

(ⅰ) 가로의 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot 3 = {}_4C_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

(ⅱ) 세로의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅲ) 대각선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - (12 + 4 + 4) = 200$$

풀이과정)

풀 이

풀이법
면적이 3임을 이용하여 경우의 수를 나누어 본다.

각 직선에서 2개씩 점을 택하여 만든 사다리꼴의 윗변의 길이를 a, 아랫변의 길이를 b라고 하면

넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)=3$이므로 $a+b=6$

$a=1$, $b=5$인 경우의 수는 $5\cdot 1=5$

$a=2$, $b=4$인 경우의 수는 $4\cdot 2=8$

$a=3$, $b=3$인 경우의 수는 $3\cdot 3=9$

$a=4$, $b=2$인 경우의 수는 $2\cdot 4=8$

$a=5$, $b=1$인 경우의 수는 $1\cdot 5=5$

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $5+8+9+8+5=35$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
순서가 있을 때 조합으로 계산!

조건 (가)에서 $a_3 = 5$이므로 a_1, a_2는 1부터 4까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2로 정하면 된다.

그러므로 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

그 각각에 대하여 a_4, a_5는 6부터 8까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 작은 수를 a_4, 큰 수를 a_5로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 1 \times 3 = 18$$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
순열과 조합 계산! 연속수를 찾으며 곱으로 표현해 본다.

${}_{n}\mathrm{P}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r}=392$, ${}_{n}\mathrm{P}_{r}-{}_{n}\mathrm{C}_{r}=280$이므로 두 식을 연립하면

${}_{n}\mathrm{P}_{r}=336$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}=56 \quad \cdots$ ㉠

${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$ 이므로 ㉠을 대입하면

$56=\dfrac{336}{r!}$, $r!=6$

$\therefore r=3$

${}_{n}\mathrm{P}_{3}=336=8\cdot7\cdot6$

$\therefore n=8$

따라서 $n+r=11$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
조합 + 이차방정식 근-계수 관계!

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{{}_nC_4}{{}_nC_2},\ \alpha\beta=\frac{{}_nC_6}{{}_nC_2}$$

이때 $\alpha\beta=1$이므로

$$\frac{{}_nC_6}{{}_nC_2}=1$$

${}_nC_2={}_nC_6$에서 $n-2=6$이므로

$n=8$

따라서 $$\alpha+\beta=\frac{{}_8C_4}{{}_8C_2}=\frac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{8\cdot7}{2\cdot1}}=\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4(\alpha^2+\beta^2)&=4\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=4\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\right\}\\&=17\end{aligned}$$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
순서가 있을 때 조합!

(i) $0 < a < b < c < d < 10$인 경우

1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 택하여 나열하면 된다.

$${}_9\mathrm{P}_4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

(ii) $0 < a < b < c = d < 10$인 경우

1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하고 그 중 가장 큰 것을 두 번 사용하여 나열하면 된다.

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3 \cdot 4!}{2!} = 1008$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3024 + 1008 = 4032$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
전체 – 아닌경우

주어진 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$$

(i) 가로의 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3\cdot 3={}_4C_1\cdot 3=4\cdot 3=12$$

(ii) 세로의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3\cdot 4=4$$

(iii) 대각선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3\cdot 4=4$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는

$$220-(12+4+4)=200$$

[조합]

풀이과정)

풀 이

풀이법
삼각형은 세 점 선택!

반원 위의 9개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 9개의 점 중에서 3개를 고르는 경우의 수에서 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 고르는 경우의 수를 빼면 된다.
따라서 구하는 삼각형의 개수는
$_{9}C_{3} - {}_{5}C_{3} = 84 - 10 = 74$

[조합]

18.내신 핵심 문항

풀이과정)

풀 이

직각삼각형 원주각 = 90°
정삼각형 → 센다

(ⅰ) 직각삼각형의 개수

지름에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 직각삼각형을 만들려면 삼각형의 한 변이 원의 지름이어야 한다.

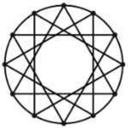
원 위의 12개의 점 중 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 6개이고 나머지 10개의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_1$ 이므로 구하는 직각삼각형의 개수 a는

$a = 6 \cdot {}_{10}C_1 = 60$

(ⅱ) 정삼각형의 개수

정삼각형은 다음 그림과 같이 4개 만들 수 있으므로

$b = 4$



(ⅰ), (ⅱ)에서 $a - b = 60 - 4 = 56$

풀이과정)

풀 이

풀이법
대진표 (2명+3명)(2명+3명) 배치!

5개의 팀을 2팀과 3팀으로 나누는 경우의 수는
${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10$
3개의 팀 중에서 부전승으로 올라갈 한 팀을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는 $10 \times 3 = 30$

풀이과정)

풀 이

풀이법
분할과 분배!

서로 다른 7개의 구슬을 3명이 각각 적어도 한 개의 구슬을 갖도록 나누어 갖는 방법은 다음과 같다.

(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 7 \cdot 15 = 105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(iii) 2개, 2개, 3개로 나누는 경우

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

나눈 구슬을 3명에게 나누어주는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 서로 다른 7개의 구슬을 3명 한 사람이 적어도 한 개의 구슬을 갖도록 나누어 갖는 방법의 수는

$(21 + 105 + 70 + 105) \cdot 6 = 301 \cdot 6 = 1806$

풀이과정)

풀 이

풀이법
자기 짝이 아닌 경우의 수
원소가 4개일 때 = 9
원소가 5가지 일때 =44

$a_1 \neq 1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여

a_2, a_3, a_4를 각각 구해 보면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4
2	1	4	3
	3	4	1
	4	1	3
3	1	4	2
	4	1	2
		2	1
4	1	2	3
	3	1	2
		2	1

따라서 구하는 정수의 개수는 9이다.

풀이과정)

풀 이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

$2x+y+z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는

(i) $x=0$일 때, $y+z=5$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$의 6개

(ii) $x=1$일 때, $y+z=3$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$의 4개

(iii) $x=2$일 때, $y+z=1$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 1)$, $(1, 0)$의 2개

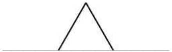
(i)~(iii)에서 합의 법칙에 의하여

$6+4+2=12$

[경우의 수]

23.내신 핵심 문항

그림과 같이 한 개의 정삼각형과 세 개의 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.

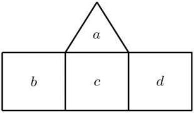


풀이과정)

풀 이

풀이법
b = d, b≠d 나누어서 생각한다.

순열과 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a,
정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.
조건 (가)에서 $a > b$, $a > c$, $a > d$이다.
조건 (나)에서 $b \neq c$, $c \neq d$이다.

(i) $b \neq d$일 때

a, b, c, d가 서로 다르다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4 = 15$

이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1 \cdot 3! = 6$

따라서 $b \neq d$인 경우의 수는 $15 \cdot 6 = 90$

(ii) $b=d$일 때

$a>b=d$, $a>c$이므로

a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는

경우의 수는 ${}_6C_3=20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서

가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$,

c로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1 \cdot 2!=2$

따라서 $b=d$ 인 경우의 수는

$20 \cdot 2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

DRE-EDU.com

[경우의 수]

24. 내신 핵심 문항

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서
어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이

풀이과정)

풀 이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

어른 2명은 반드시 앞줄과 뒷줄에 한 명씩 앉아야 하므로
어른을 앉히는 방법의 수는
$_2C_1 \cdot {}_2P_1 \cdot {}_3P_1 = 12$
어린이 3명을 나머지 3개의 자리에 앉히는 방법의 수는
$3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는
$12 \cdot 6 = 72$

[경우의 수]

25.내신 핵심 문항

서로 다른 종류의 꽃 4송이와 같은 종류의 초콜릿 2개를

풀이과정)

풀 이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
꽃 4송이와 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우
초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$이므로
1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는
$5 \cdot 24 = 120$

(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는

${}_4C_2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$이고,

꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는 $6 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 1 = 360$

(iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$이고,

꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는 $120 \cdot 4 = 480$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120 + 360 + 480 = 960$

✓〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

행렬편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

풀이과정)

풀 이

풀이법

2차 정사각행렬: i,j=1,2대입

j가 홀수이면 $a_{ij}=3i-2j$이므로

$a_{11}=3\cdot 1-2\cdot 1=1$,

$a_{21}=3\cdot 2-2\cdot 1=4$

j가 짝수이면 $a_{ij}=i+2j$이므로

$a_{12}=1+2\cdot 2=5$,

$a_{22}=2+2\cdot 2=6$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+4+5+6=16$

풀이과정)

풀 이

풀이법
규칙을 찾아본다.!

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&81\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&64\end{pmatrix}$

풀 이

풀이법
337를 거듭제곱수로 표현한다.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n + B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3^n + 4^n \end{pmatrix}$$

따라서 $A^n + B^n$의 모든 성분의 합은

$3^n + 4^n + 2$이므로

$3^n + 4^n + 2 = 339$, 즉 $3^n + 4^n = 337$

$3^4 + 4^4 = 81 + 256 = 337$이므로

$n = 4$

풀이과정)

풀 이

풀이법

$A^2 = O$ 이면 $A^n = O \ (n \geq 2)$

행렬의 연산을 이해하여 규칙성 추론하기

$AB + A = O$에 대입하여 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & -a+b+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a = 1$, $b = -1$이므로

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 이고 $A^2 = O$이다.

따라서 $A + A^2 + \cdots + A^{2010} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

이므로

$p = 1$, $q = -1$, $r = 1$, $s = -1$

따라서 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4$ 이다.

풀이과정)

풀 이

풀이법

$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$를 $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$와 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$로 나타내본다.

$$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$=2A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

따라서 $p=-1$, $q=7$이므로

$p+q=6$

풀이과정)

풀 이

풀이법
문제가 해석되지 않을 때 행렬을 성분으로 나타내 본다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore a=3,\ c=2$ $\cdots$ ㉠

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3a+2b \\ 3c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\therefore 3a+2b=-1,\ 3c+2d=10$ $\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$9+2b=-1,\ 6+2d=10$

$\therefore b=-5,\ d=2$

풀 이

즉, $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\2 & 2\end{pmatrix}$이므로

$$A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\left\{A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & -5\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-53\\18\end{pmatrix}$$

따라서 $A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-53+18=-35$

풀이과정)

풀 이

풀이법
행렬식 $D = ad - bc$

$D(kA) = k^2 D(A)$, $D(AB) = D(A) \times D(B)$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2-2 & x+2 \\ -2x-4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f(A^2) = (x^2-2) \cdot 2 - (x+2) \cdot (-2x-4)$$

$$= 2x^2 - 4 + 2x^2 + 8x + 8$$

$$= 4x^2 + 8x + 4$$

이때 $2A = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$f(2A) = 2x \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = 8x + 8$

이때 $f(A^2) = f(2A)$이므로

$4x^2 + 8x + 4 = 8x + 8$, $4x^2 - 4 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$-1 + 1 = 0$

풀이과정)

풀 이

풀이법
행렬의 성분을 구하자!

이차정사각행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$로 나타내면

$a_{11}=1\times(1+1)=2$, $a_{12}=1\times(2+1)=3$,

$a_{21}=(1+1)^2=4$, $a_{22}=2\times(2+1)=6$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+3+4+6=15$

풀이과정)

풀 이

풀이법
언제 단위행렬이 될까?

[정답] 256

[해설]

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-4E$

$A^8=A^4A^4=(-4E)(-4E)=16E^2=16E$

$A^{16}=A^8A^8=16E16E=256E^2=256E$

따라서 $k=256$

풀이과정)

풀 이

풀이법
케일리-해밀턴 정리 이용!

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

[정답/모범답안] 6

[해설]

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots ❶$$

$A^2=pB+qE$이므로

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4p & -2p \\ 3p & -4p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4p+q & -2p \\ 3p & -4p+q \end{pmatrix} \quad \cdots ❷$$

즉, $-4p+q=-5$, $-2p=-4$, $3p=6$이므로

$p=2$, $q=3$

따라서 $pq=2\times 3=6 \quad \cdots ❸$

풀이과정)

풀 이

풀이법
케일리–해밀턴 정리 이용!

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2+4A-E=O$ (단, O는 영행렬)

$A^2=-4A+E$

$\therefore\ 2A^2+5A-2E=2(-4A+E)+5A-2E$

$=-3A$

따라서 $k=-3$

풀이과정)

풀 이

풀이법
교환법칙이 성립하지 않음에 유의!

$$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$(A+B)^1=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(A+B)^6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$
$$(A+B)^{32}=(A+B)^{30}(A+B)^2=(A+B)^2$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

행렬 $(A+B)^{32}$의 모든 성분의 합은 5이다.

풀이과정)

풀 이

풀이법
곱셈공식 이용

$A^2-3A+9E=O$의 양변에 $A+3E$를 곱하면

$(A+3E)(A^2-3A+9E)=O$

$A^3+27E=O$

$\therefore\ A^3=-27E$

따라서

$A^{18}=(A^3)^6=(-27E)^6$

$\quad=3^{18}E=\begin{pmatrix}3^{18} & 0\\ 0 & 3^{18}\end{pmatrix}$

이므로 행렬 A^{18}의 모든 성분의 합은

$2\cdot 3^{18}$

[행렬]

13.내신 킬러 문항

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $A^2 = E$이면 $A = E$이다.

ㄴ. $(A+2B)^2 = (A-2B)^2$이면 $AB + BA = O$이다.

ㄷ. $AB = A$, $BA = B$이면 $A^2 + B^2 = A + B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$에서

$A^2+2AB+2BA+4B^2$

$=A^2-2AB-2BA+4B^2$

$4AB+4BA=O$

$\therefore AB+BA=O$ (참)

ㄷ. $AB=A$ ...... ㉠,

$BA=B$ ...... ㉡

㉠의 양변 오른쪽에 행렬 A를 곱하면 $ABA=A^2$,

이 식에 ㉡을 대입하면 $A^2=AB=A$이고,

㉡의 양변 오른쪽에 행렬 B를 곱하면 $BAB=B^2$,

이 식에 ㉠을 대입하면 $B^2=BA=B$이다.

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ