

실시일자	-	내신대비	이름
19문제 / DRE수학			

썸 - 수학 II (2025) 48~58p\_문제연습3

미분계수 ~ 도함수

01

함수  $y = f(x)$ 에 대하여  $x$ 의 값이 2에서 7까지 변할 때의 평균변화율이 6일 때, 두 점  $A(2, f(2)), B(7, f(7))$ 을 지나는 직선 AB의 기울기를 구하시오.

02

[2025년 5월 고3 5번/3점]

함수  $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 2x + 5)$ 에 대하여  $f'(2)$ 의 값은?

① 8

② 12

③ 16

④ 20

⑤ 24

03

함수  $f(x) = x^2$ 에 대하여  $x$ 의 값이 3에서  $3 + h$ 까지 변할 때의 평균변화율이 10일 때, 상수  $h$ 의 값은? (단,  $h > 0$ )

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

04

[2021년 7월 고3 18번/3점]

함수  $f(x) = x^3 + ax$ 에서  $x$ 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이  $f'(a)$ 의 값과 같게 되도록 하는 양수  $a$ 에 대하여  $3a^2$ 의 값을 구하시오.

05

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - 5h) - f(a)}{3h}$ 를  $f'(a)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

①  $-\frac{2}{3}f'(a)$

②  $-f'(a)$

③  $-\frac{4}{3}f'(a)$

④  $-\frac{5}{3}f'(a)$

⑤  $-2f'(a)$

06

함수  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + 2 & (x \geq 2) \\ 2x + b & (x < 2) \end{cases}$ 가  $x = 2$ 에서 미분가능하도록 하는 상수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값은?

① 12

② 24

③ 36

④ 48

⑤ 60

07

미분가능한 두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $f'(8) = 10, g'(8) = 9$ 일 때, 함수  $f(x) + g(x)$ 의  $x = 8$ 에서의 미분계수를 구하시오.

08 함수  $f(x) = 2x^3 - 3x$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{3h}$ 의 값은?

- ① 6                  ② 7                  ③ 8  
④ 9                  ⑤ 10

09 함수  $f(x) = x^2 + 6x + 2$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 24$ 를 만족시키는 상수  $a$ 의 값은?

- ① 2                          ② 3                          ③ 4  
④ 5                          ⑤ 6

10 곡선  $y = x^3 + ax + 2b$  위의 점  $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 10일 때, 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값을 구하시오.

11 다항식  $x^{2004} - ax + b$ 가  $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어질 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.

12 다항식  $x^{10} - 2x^3 + 1$ 을  $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를  $R(x)$ 라 할 때,  $R(-2)$ 의 값을 구하시오.

13  $f(1) = 2, f'(1) = 3$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - x^2 f(1)}{x-1}$ 의 값은?

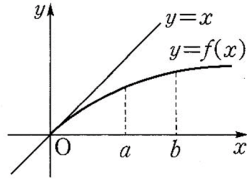
- ① 1                          ② 2                          ③ 3  
④ 4                          ⑤ 5

14 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy$ 를 만족시키고  $f'(0) = -4, f'(3a) = 14$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① -2                          ② -1                          ③ 1  
④ 2                          ⑤ 3

15 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 7일 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1}$ 의 값을 구하시오.

- 16 다음 그림은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 를 나타낸 것이다.  $0 < a < b$ 일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ.  $f(b)-f(a) > b-a$

ㄴ.  $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$

ㄷ.  $f'(a) < f'(b)$

ㄹ.  $f'(\sqrt{ab}) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- ① ㄱ, ㄴ      ② ㄴ, ㄹ      ③ ㄷ, ㄹ  
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

- 17 세 함수  $f(x), g(x), h(x)$ 를 다음 보기와 같이 정의하였다.

〈보기〉

$f(x) = |x|$

$g(x) = \{f(x)\}^2$

$h(x) = \{f(x)\}^3$

위 〈보기〉의 세 함수 중  $x=0$ 에서 연속인 함수의 개수와  $x=0$ 에서 미분가능한 함수의 개수를 순서대로 나열하면?

- ① 3, 0      ② 3, 1      ③ 3, 2  
④ 3, 3      ⑤ 2, 2

- 18 함수  $f(x)$ 의 함숫값이 항상 양수이고 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x+y) = 7f(x)f(y)$ 가 성립한다.

$f'(0) = 4$ 일 때,  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 의 값을 구하시오.

- 19  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + ax - 3}{x - 1} = 10$ 일 때, 자연수  $n$ 의 값을 구하시오.

실시일자	-	내신 대비	이름
19문제 / DRE수학			
썸 - 수학 II (2025) 48~58p_문제연습3 미분계수 ~ 도함수			

정답		
01 6	02 ④	03 ④
04 13	05 ④	06 ③
07 19	08 ②	09 ②
10 2	11 4007	12 20
13 ②	14 ①	15 14
16 ②	17 ③	18 28
19 8		

실시일자	-	유형별 학습	이름
19문제 / DRE수학			
썸 - 수학 II (2025) 48~58p_문제연습3			
미분계수 ~ 도함수			

01

정답 6

**해설**  $x$ 의 값이 2에서 7까지 변할 때의 함수  $f(x)$ 의  
평균변화율은 두 점  $A(2, f(2)), B(7, f(7))$ 을 지나는  
직선의 기울기와 같으므로 구하는 기울기는 6이다.

02

정답 ④

**해설** 곱의 미분법 이해하기  
 $f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x + 5) + (2x + 1)(2x - 2)$ 이므로  
 $f'(2) = 20$

03

정답 ④

**해설**  $x$ 의 값이 3에서  $3+h$ 까지 변할 때의 함수  $f(x)$ 의  
평균 변화율은  
$$\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{h^2+6h}{h}$$
$$= h+6$$
 $h+6=10$ 에서  $h=4$

04

정답 13

**해설** 미분계수 이해하기  
 $f'(x) = 3x^2 + a$   
 $x$ 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수  $f(x)$ 의  
평균변화율이  $f'(a)$ 의 값과 같으므로  
$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(a)$$
$$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2} = 3a^2+a$$
$$\therefore 3a^2 = 13$$

05

정답 ④

**해설** 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-5h)-f(a)}{3h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-5h)-f(a)}{-5h} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$= -\frac{5}{3}f'(a)$$

## 06 정답 ③

**해설** 함수  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 미분가능하면  $x=2$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 2-} (2x+b) = f(2)$

$$\text{즉, } 4+b = -4+2a+2$$

$$\therefore b = 2a-6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한  $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(-x^2+ax+2)-(-4+2a+2)}{x-2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(-x+a-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} (-x+a-2) = a-4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(2x+b)-(-4+2a+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2x+2a-6-(2a-2)}{x-2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$\text{에서 } a-4=2 \quad \therefore a=6$$

$$a=6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=2 \cdot 6-6=6$$

$$\therefore ab = 6 \cdot 6 = 36$$

(다른 풀이)

$$f_1(x) = -x^2+ax+2 \quad (x \geq 2),$$

$$f_2(x) = 2x+b \quad (x < 2) \text{로 놓으면}$$

$$f_1'(x) = -2x+a \quad (x \geq 2), \quad f_2'(x) = 2 \quad (x < 2)$$

함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 연속이므로  $f_1(2) = f_2(2)$

$$-4+2a+2 = 4+b$$

$$\therefore 2a-b=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한  $f'(2)$ 가 존재하므로  $f_1'(2) = f_2'(2)$

$$-4+a=2 \quad \therefore a=6$$

$$a=6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$12-b=6 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore ab = 6 \cdot 6 = 36$$

## 07 정답 19

**해설** 함수  $f(x)+g(x)$ 의  $x=8$ 에서의 미분계수는  $f'(8)+g'(8)=10+9=19$

## 08 정답 ②

$$\text{해설} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{3h} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{1}{3} f'$$

$$\text{한편, } f(x)=2x^3-3x \text{에서 } f'(x)=6x^2-3 \text{이므로}$$

$$f'(2)=21$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{3} f'(2)=7$$

## 09 정답 ②

$$\begin{aligned} \text{해설} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \\ &= 2f'(a) = 24 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(a) = 12$$

이때  $f(x)=x^2+6x+2$ 에서

$$f'(x)=2x+6$$

즉,  $f'(a)=2a+6=12$ 이므로

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

## 10 정답 2

**해설** 점  $(1, -2)$ 를 지나므로

$$1+a+2b=-2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y=x^3+ax+2b \text{에서}$$

$$y'=3x^2+a$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 10이므로

$x=1$ 일 때  $y'$ 의 값이 10이다.

$$\text{즉, } 3+a=10 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=7, \quad b=-5$$

$$\therefore a+b=2$$

## 11 정답 4007

$$\text{해설} \quad x^{2004}-ax+b=(x-1)^2 Q(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 1-a+b=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2004x^{2003}-a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2 Q'(x) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$x=1 \text{을 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } 2004-a=0$$

$$\therefore a=2004 \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$ 을  $\textcircled{4}$ 에 대입하면  $b=2003$

$$\therefore a+b=4007$$

## 12 정답 20

**해설**  $x^{10} - 2x^3 + 1$ 을  $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $R(x) = ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓으면

$$x^{10} - 2x^3 + 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변에  $x = -1$ 을 대입하면

$$1 - 2 \cdot (-1) + 1 = -a + b$$

$$\therefore a - b = -4 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$10x^9 - 6x^2 = 2(x+1)Q'(x) + (x+1)^2 Q''(x) + a \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 의 양변에  $x = -1$ 을 대입하면

$$10 \cdot (-1) - 6 \cdot (-1)^2 = a$$

$$\therefore a = -16$$

$a = -16$ 을  $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면  $-16 - b = -4$

$$\therefore b = -12$$

따라서 나머지  $R(x) = -16x - 12$ 이므로

$$R(-2) = -16 \cdot (-2) - 12 = 20$$

## 13 정답 ②

**해설**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - x^2 f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1) + f(1) - x^2 f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} - \frac{x^2 f(1) - f(1)}{x - 1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x+1)\{f(x^2) - f(1)\}}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x^2 - 1)f(1)}{x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (x+1) \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} - (x+1)f(1) \right\}$$

$$= 2f'(1) - 2f(1) = 2$$

## 14 정답 ①

**해설** 주어진 식에  $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

$$\therefore f'(3a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3a+h) - f(3a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3a) + f(h) - 9ah - f(3a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 9ah}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 9a$$

$$= f'(0) - 9a = -4 - 9a$$

따라서  $-4 - 9a = 14$ 이므로

$$a = -2$$

## 15 정답 14

**해설**

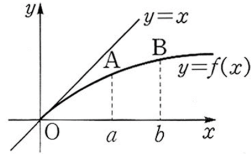
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \cdot (x+1)$$

$$= f'(1) \cdot 2$$

$$= 14$$

## 16 정답 ②

**해설** 다음 그림과 같이  $A(a, f(a))$ ,  $B(b, f(b))$ 라 하자.



ㄱ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$$

이때  $b-a > 0$ 이므로  $f(b)-f(a) < b-a$  (거짓)

ㄴ.  $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 A를 지나는 직선의

기울기이고,  $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 B를 지나는 직선의

기울기이므로  $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$  (참)

ㄷ.  $f'(a)$ 는 점 A에서의 접선의 기울기이고,  
 $f'(b)$ 는 점 B에서의 접선의 기울기이므로  
 $f'(a) > f'(b)$  (거짓)

ㄹ.  $0 < a < b$ 에 대하여  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$  이고,  $x$ 의 값이

클수록 곡선  $y=f(x)$ 의 접선의 기울기는 작아진다.

$$\therefore f'(\sqrt{ab}) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

## 17 정답 ③

**해설**  $f(x)=|x|$ ,  $g(x)=|x|^2=x^2$ ,  $h(x)=|x|^3=x^2|x|$

$f(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이므로

$\{f(x)\}^2$ ,  $\{f(x)\}^3$ 도  $x=0$ 에서 연속이다.

$f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분불가능,

$g(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능

$$h'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h)-h(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2|h|-0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h|h| = 0$$

$\therefore h(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능.

## 18 정답 28

**해설** 주어진 식에  $x=0$ ,  $y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 7f(0)f(0)$$

$$f(0) > 0 \text{이므로 } f(0) = \frac{1}{7}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{7}\right\}}{h}$$

$$= 7f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-\frac{1}{7}}{h}$$

$$= 7f(x)f'(0)$$

$$= 7f(x) \cdot 4 = 28f(x)$$

이때  $f(x) \neq 0$ 이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 28$$

## 19 정답 8

**해설**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n+ax-3}{x-1} = 10$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^n+ax-3) = 0 \text{이므로 } 1+a-3=0$$

$$\therefore a=2$$

$$x^n+2x-3 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n+2x-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1+2)$$

$$= n+2=10$$

$$\therefore n=8$$