고1	공통수학2　기말고사 대비	선택형		서답형	
	집합~무리함수 출처: 2024_1-2_중간/기말_경기여고	32문항		8문항	

※.2024년 경기여고 중간/기말고사를 공통수학2 기말고사대비로 편집했습니다. 문항수가 32문제 서답형 8문항으로 편집했습니다. 일반계 고등학교 시험보다 어려운 난이도입니다. 꼭 문제 연습하셔서 기말고사 100점 맞으시기를 응원합니다.

1 정의역이 $\{-2, 1, 2\}$인 두 함수 $f(x)=a|x|-2$와 $g(x)=3x^2-b$에 대하여 $f=g$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3 & (x \geq 0) \\ (a+2)x+3 & (x<0)\end{cases}$$

이 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

3 실수 a, b에 대하여 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+b}$가 $f(1)=f^{-1}(1)=2$를 만족할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

4 세 함수

$$f(x)=2x+4,\ g(x)=-3x+1,\ h(x)=ax+b$$

에 대하여 $\left(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ h\right)(x)=f(x)$이다. 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f의 역함수가 존재하고

$$3f(3)-f(1)=13,\ f^{-1}(3)-f^{-1}(1)=2$$

일 때, $f(4)+f^{-1}(4)-f(5)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

6 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$에 대한 설명으로 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수)

| 보 기 |

ㄱ. 정의역은 $\left\{x \mid x \geq -\dfrac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq c\}$이다.
ㄴ. a의 절댓값이 커질수록 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=c$로부터 멀어진다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나기 위한 필요충분조건은 $a<0$, $b>c^2$, $c<0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

7 함수 $f(x)=\dfrac{1}{-2x+2}$에 대하여

$f=f^1$, $f\circ f=f^2$, $f\circ f^2=f^3$, $\cdots$, $f\circ f^n=f^{n+1}$
로 정의할 때, $f^{1213}(2)$의 값은? (단, n은 자연수)

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ 2

8 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(2x+1)=3x-4$가 성립할 때, 역함수 $f^{-1}(x)=ax+b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

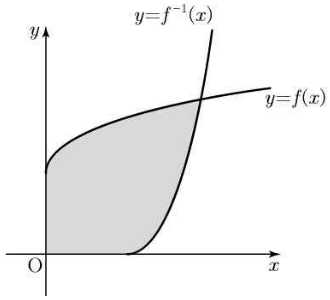
① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

9 $-4 < x \le -2$에서 $\dfrac{64}{x} \le ax-1 \le \dfrac{8}{x}$가 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 하자. $M-m$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{7}{4}$ ③ 2
④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

10 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x}+3$에 대하여 좌표평면에서 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$, x축, y축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는?

① 24
② 26
③ 28
④ 30
⑤ 32



11 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 실수 p에 대하여 $x \ge p$에서 정의된 함수 $g(x)=\sqrt{x-p}$가 있다. $t \ge p$에 대하여 $t \le x \le t+4$에서 함수 $(f \circ g)(x)$의 최솟값을 $h(t)$라 할 때, $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(t)=\begin{cases} 4 & (p \le t < p+4) \\ f(g(t)) & (t \ge p+4) \end{cases}$
(나) $h(p+9)=6$

$f(4)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

12 유리함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 서로 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 C, D에 대하여 직사각형 ABCD의 넓이가 18일 때, 상수 a의 값은? (단, A, B, C, D는 서로 다른 네 점)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

13 [서답형1] 두 함수

$f(x)=2x+a$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq a) \\ 3x-8 & (x < a) \end{cases}$에 대하여

$(g \circ f)(1)+(f \circ g)(5)=60$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하여라.

14 [서답형2] x에 대한 무리식

$\dfrac{(x-2)\sqrt{-x^2+2px-p^2+4}}{x}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x가 4개일 때, 이를 만족하는 정수 p의 개수를 구하여라.

15 [서답형3] 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 다음 조건을 모두 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.
(나) $f(3)$의 값은 홀수이다.

16 [서답형4] 정의역과 공역이 각각 $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$, $\{y \mid -5 \leq y \leq 5\}$이고, 역함수가 존재하는 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+3}-\dfrac{5}{2}a & (-3 \leq x < 1) \\ -2|x-2|+bx+c & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

에 대하여 $a-b-c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수, $a<0$)

17. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=53$, $n(A)=37$, $n(B)=29$일 때, $n((A-B)\cup(B-A))$의 값은? [4.1점]

① 40 ② 41 ③ 42
④ 43 ⑤ 44

18. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 세 부분집합 A, B, X에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$일 때, $A\cap X=\varnothing$, $B\cap X=\{2,\ 4\}$를 만족시키는 집합 X의 개수는? [4.2점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

19. 전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R이 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 세 명제 $\sim p \to r$, $r \to \sim q$, $\sim r \to q$가 모두 참일 때, 항상 옳은 것은? [4.2점]

① $P\subset Q$ ② $P^C\subset Q$ ③ $P\cap Q=R^C$
④ $R-P^C=\varnothing$ ⑤ $R^C\cup P^C\subset Q$

20. 실수 전체의 집합에서 세 조건

$p: x^2-2x-8<0$ 또는 $x<-5$,
$q: x\le a$,
$r: x>b$

에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고, r은 $\sim p$이기 위한 필요조건이다. a, b는 정수일 때, $a-b$의 최솟값은? [4.2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

21. 두 실수 a, b에 대하여 항상 성립하는 부등식만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은? [4.4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $|a+b| \geq |a|+|b|$

ㄴ. $a^2+3ab+5b^2 \geq 0$

ㄷ. $\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (단, $a>0$, $b>0$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 어느 학교 학생 200명을 대상으로 두 체험 활동 A, B를 신청한 학생 수를 조사하였더니 체험 활동 A를 신청한 학생은 체험 활동 B를 신청한 학생보다 25명이 많았고, 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생은 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생보다 80명이 적었다. 체험 활동 A만 신청한 학생 수의 최댓값은? [4.4점]

① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

23. 다음 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4.6점]

(가) $x>0$인 어떤 실수 x에 대하여 $2x<18-4a$
(나) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여
$x^2-(2a+3)x+(a^2+3a) \geq 0$

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

24. 실수 x에 대한 두 조건

$$p : x^2-5x-6<0$$
$$q : x^2-(4a-4)x+(3a^2-10a+3) \geq 0$$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a의 값의 합은? [4.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

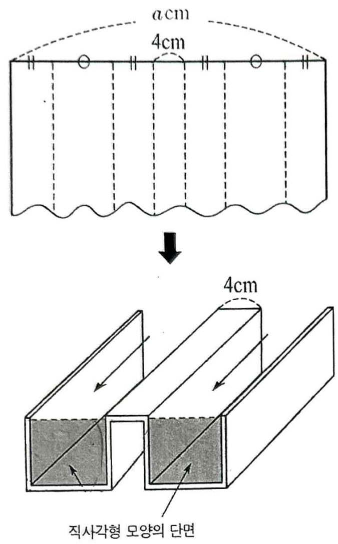
25. 다음은 5이상인 자연수 n에 대하여 n^4-20n^2+4는 소수가 아닌 자연수임을 귀류법으로 증명한 것이다.

5이상인 자연수 n에 대하여 $n^4-20n^2+4=n^2(n^2-20)+4$이므로 $n^4-20n^2+4 \geq \boxed{\text{(가)}} > 0$ 따라서 n^4-20n^2+4은 자연수이다. n^4-20n^2+4이 소수라고 가정하자. $n^4-20n^2+4=(\boxed{\text{(나)}})(n^2-4n-2)$이고 $n \geq 5$일 때 $\boxed{\text{(나)}}>0$, $n^2-4n-2>0$이므로 $\boxed{\text{(나)}}$와 n^2-4n-2둘 중 하나는 $\boxed{\text{(다)}}$이다. (i) $\boxed{\text{(나)}}=\boxed{\text{(다)}}$인 경우 등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다. (ii) $n^2-4n-2=\boxed{\text{(다)}}$ 인 경우 등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다. 따라서 이는 모순이므로 n^4-20n^2+4는 소수가 아니다.

(가), (다)에 알맞은 수를 각각 α, β라 하고 (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\alpha+f(\beta)$의 값은? [4.6점]

① 132 ② 133 ③ 134
④ 135 ⑤ 136

26. 그림과 같이 폭이 $a\,\text{cm}$ 인 긴 양철판을 접어서 두 줄기로 물이 가득 차서 흘러가도록 하려고 한다.



물이 흘러가는 방향에 수직으로 자른 단면이 서로 합동이고 한 변이 없는 두 개의 직사각형 모양이 되도록 할 때, 두 직사각형의 넓이의 합을 $S\ \text{cm}^2$라 하자. $a+2S=100$을 만족하는 a의 최솟값은?
(단, $a>4$이고 양철판의 두께는 무시한다.)

① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

27. 자연수 k의 양의 약수 전체의 집합을 X_k라 할 때, 두 자연수 p, q에 대하여 참인 명제만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (4.7점)

〈 보 기 〉

ㄱ. $2 \notin X_{pq}$이면 $2 \notin (X_p \cup X_q)$

ㄴ. p, q가 서로소이면 $n(X_{pq}) = n(X_p) \times n(X_q)$

ㄷ. p, q가 소수이면 $n(X_p \cup X_q) = n(X_p) + n(X_q)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 짝수를 적어도 한 개 이상 가지는 모든 부분집합을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 하고, A_k의 모든 원소의 합을 $S(A_k)$라 할 때, $S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_n)$의 값은? (단, k는 $1 \le k \le n$를 만족하는 자연수이다.) [4.8점]

① 1663 ② 1664 ③ 1665
④ 1666 ⑤ 1667

29. [서답형1]

전체집합 $U=\{x|x$는 8이하의 자연수$\}$의 세 부분집합
$A=\{x|x^3-3x^2+2x=0\}$, $B=\{x+y|x\in A,\ y\in A\}$,
$C=\{xy|x\in A,\ y\in B\}$에 대하여 $(B-A)\cup(A\cup C)^C$의 부분집합의 개수를 구하시오.[5점]

30. [서답형2] 실수 x에 대한 두 조건

$p: 3x-a\neq 0$,

$q: x^2+bx+16\leq 0$

에 대하여 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건, q는 $\sim p$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a, b의 값을 구하시오 (단, $a>0$이다.) [5점]

31. [서답형3] 명제 '자연수 a, b에 대하여 a, b모두 홀수이면 $a^2+2b^2-3ab-a+2b\neq 0$이다.' 가 참임을 대우를 이용하여 증명하시오. [5점]

32. [서답형4]세 실수 x, y, z에 대하여 등식 $x+y+z=3$, $x^2+2y^2+3z^2=24$가 성립한다. x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (4.8점]

① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

문항별 정답

1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
⑤	②	②	⑤	②	⑤	①	③	④	②
11번	12번	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번
④	③	해설참조	해설참조	해설참조	해설참조	①	④	③	⑤
21번	22번	23번	24번	25번	26번	27번	28번	29번	30번
④	④	①	⑤	①	④	③	②	해설참조	해설참조
31번	32번								
해설참조	해설참조								

□ 문항별 분석표 (1~32번)

● 기말 대비 - DRE 분석 기준표
● 난이도와 예상 정답률은 일반계 고등학교 기준

문항	단원	주제	키포인트	난이도	예상 정답률
1	함수	절댓값 함수/함수값 비교	정의역의 각 x에서 f=g 성립 → 연립	중	60%
2	함수	일대일 대응 조건	구간별 기울기 부호 판단	중	55%
3	유리함수	유리함수와 역함수 조건 /대입 연립	$f(1)=f(1)^{-1}=2$→ 연립	중	55%
4	합성함수	합성함수 역과 동일 조건	$f\circ(g\circ f)^{-1}\circ h=f$	중	55%
5	함수/역함수	역함수 조건/일대일 대응	값을 직접 배치하는 케이스 분석	중상	45%
6	무리함수	그래프 · 정의역 · 치역	$y=\sqrt{ax+b}+c$그래프 분석	중상	45%
7	합성함수	반복함수/주기 문제	반복적인 규칙성 찾기	중상	45%
8	역함수	역함수 표현	x → 2x+1, 치환 역함수 구하기	중	55%
9	유리함수	유리함수 범위 추론	그래프해석/ 구간 끝값 비교	상	35%
10	무리함수	자연수 개수구하기	$x=1,2,3,4,5,6$ 개수 세기	최상	5%
11	합성함수	이차/무리함수 합성 최솟값	구간별 최솟값 규칙 적용	최상	5%
12	유리함수	직선과 유리함수의 교점/넓이	점대칭,y=x대칭 → 넓이 18	최상	20%
13	합성함수(서답)	f◦g, g◦f 값 일치	부분함수 구간 분기	상	20%
14	무리식(서답)	루트식 정의역 조건	루트≥0 & 분모≠0	상	20%
15	경우의 수(서답)	증가 함수 개수	조합(증가 함수)	중상	50%
16	구간별 함수(서답)	역함수 · 일대일 대응	기울기 · 구간 매칭	최상	15%
17	집합	합집합 · 교집합	집합의 연산	중	70%
18	집합	조건부 집합 구성	A∩X=∅, B∩X={2,3}	중	65%
19	명제	집합 관계	p→r, r→~q 집합의 포함	중상	45%
20	명제	조건과 필요/충분 조건 해석	p가 q의 충분조건	중상	45%
21	절대부등식/ 증명	절댓값 · 제곱 · 인수분해	부등식 성립 여부 판단	중상	40%
22	집합	신청자 최대값	A,B 인원 최대화	중상	40%
23	명제	부등식 조건	임의 실수의 존재/전체 조건	중상	40%
24	명제	단 한 개의 정수 조건	이차식 근의 중복 조건	중상	35%
25	귀류법	자연수식 구조분해	n^4-20n^2+4의 인수분해 찾기	최상	15%
26	절대부등식	단면 넓이 최대/최소	직사각형 2개 구성	최상	10%
27	집합	약수집합 성질	서로소/소수 조건	최상	10%
28	집합/경우의 수	부분집합 합	짝수 포함 조건	상	35%
29	집합(서답)	여러 집합 조합	차집합 · 교집합	중상	45%
30	명제(서답)	충분조건/필요조건	완전제곱 & 조건 반대	상	25%
31	대우 증명 (서답)	대우 작성	인수분해찾기, 짝수/홀수 분리	상	20%
32	절대부등식(서답)	식변형/코치-슈바르츠부등식	등식 성립 조건	상	20%

□ 전체 총평 (일반계 기준)

✔ 난이도 매우 높음

경기여고 편집본이라 일반 일반계 기말 대비보다 1.5 ~ 2단계 더 높음
문항 대부분이 "수학적 구조 이해"를 묻는 고난도 구성.

✔ 고득점은 "함수 단원 + 집합/명제 + 무리함수 그래프" 실력 필요

특히 다음 단원은 반드시 보완해야 함:
합성함수, 역함수 → 4,7,8,11,13,16
무리함수/역함수 → 6,10
집합/명제 → 17~21,23,24,27,28
함수 그래프 해석 → 1,2,3,5,12

✔ 최상위권 변별

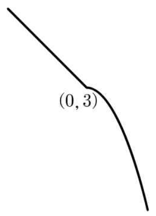
객관식: 10,11,12,25,26,27번
서답형은 13,16,25번
이 3문제는 일반 내신에서 거의 출제되지 않는 난이도
상위 5~10% 변별용에 해당. 충분한 연습을 하면 100점 맞는데 도움이 되는 아주 좋은 문제.

[공통수학2 내신대비 기말고사 정답 및 해설]

1. ⑤

정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 각각 같아야 한다.
$x=-2,\ 2$일 때, $2a-2=12-b$에서 $2a+b=14$
$x=1$일 때, $a-2=3-b$에서 $a+b=5$
연립하여 풀면
$a=9,\ b=-4$
$a+b=5$

2. ②



기울기가 음수여야 한다.
$a+2<0$
$a<-2$
정수 a의 최댓값은 -3

3. ②

$f(1)=2$에서 $\dfrac{a+1}{1+b}=2\quad \therefore\ a-2b=1$

$f(2)=1$에서 $\dfrac{2a+1}{2+b}=1\quad \therefore\ 2a-b=1$

연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{b}{a}=-1$

4. ⑤

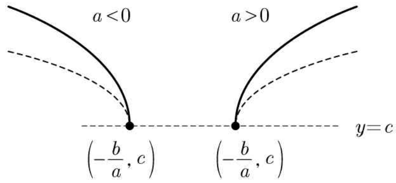
$\left(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ h\right)(x)$
$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ h)(x)$
$=(g^{-1}\circ h)(x)=f(x)$
$h(x)=(g\circ f)(x)$
$=-3(2x+4)+1=-6x-11$
$a-b=5$

5. ②

$3f(3)-f(1)=13$에서 $f(3)=5$이어야 한다.
$15-f(1)=13$
$\therefore\ f(1)=2$
$f^{-1}(3)-f^{-1}(1)=2$에서
$f^{-1}(3)$과 $f^{-1}(1)$은 $1,\ 3$을 제외한 $2,\ 4,\ 5$ 중 차가 2인 $2,\ 4$ 가능
$\therefore\ f^{-1}(3)=4,\ f^{-1}(1)=2$
$f(4)=3,\ f(4)=3$
일대일대응이므로 $f(5)=4$
$f(4)+f^{-1}(4)-f(5)=3+5-4=4$

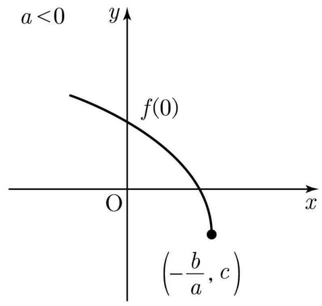
6. ⑤

ㄱ.



ㄱ. (×) ㄴ. (○)

ㄷ.



$a<0,\ -\dfrac{b}{a}>0$에서 $b>0,\ c<0$

$f(0)=\sqrt{b}+c>0$
$\therefore\ b>c^2$
필요충분조건은 $a<0,\ b>c^2,\ c<0$

7. ①

$(2)\to-\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{3}\to\dfrac{3}{4}\to 2\to\cdots$

주기가 4

$1213=4n+1$이므로 $f^{1213}(2)=f(2)=-\dfrac{1}{2}$

8. ③

$f^{-1}(3x-4)=2x+1$
$3x-4=t$라 하면

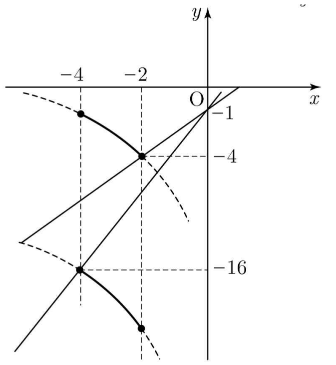
$x=\dfrac{t+4}{3}$

$f^{-1}(t)=2\cdot\dfrac{t+4}{3}+1=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{11}{3}$

$a=\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{11}{3}$

$a-b=-3$

9. ④



m : $(-2,\ -4)$를 지날 때 $\dfrac{3}{2}$

M : $(-4,\ -16)$을 지날 때 $\dfrac{15}{4}$

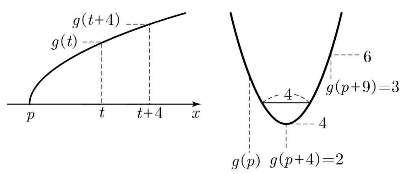
$M-m=\dfrac{9}{4}$

10. ②
교점의 좌표는
$\sqrt{2x}+3=x$에서
$\sqrt{2x}=x-3$
$2x=x^2-6x+9$
$x^2-8x+9=0$
$x=4+\sqrt{7}\ (=6.\times\times\times)$
역함수는 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2\ (x\ \geq\ 3)$

x	1	2	3	4	5	6
위끝	$3+\sqrt{2}$	5	$3+\sqrt{6}$	$3+\sqrt{8}$	$3+\sqrt{10}$	$3+\sqrt{18}$
아래끝	0	0	0	$\dfrac{1}{2}$	2	6
자연수 점 개수	4	5	5	5	5	2

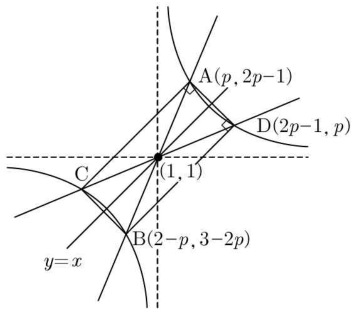
$\therefore$ 26(개)

11. ④



$f(x)=a(x-2)^2+4$
$f(3)=6$이므로
$a+4=6$
$\therefore\ a=2$
$f(x)=2(x-2)^2+4$
$f(4)=12$

12. ③



AB, BD의 기울기의 절댓값이 1이므로
$S=\sqrt{2}(p-1)\times\sqrt{2}(3p-3)=18$
$(p-1)^2=3$
$p=1+\sqrt{3}$
$\mathrm{A}(1+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}+1)$
$f(x)=\dfrac{x+a}{x-1}$ 위의 점이므로
$\dfrac{1+\sqrt{3}+a}{1+\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}+1$
$1+\sqrt{3}+a=6+\sqrt{3}$
$a=5$

13. $\boldsymbol{a=-6,\ a=1}$
ⅰ) $a>5$일 때, $(f\circ g)(5)=f(7)=14+a$
$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(5)=a^2+5a+18=60$
$a^2+5a-42=0$일 때, $a>5$이므로 만족하는 a의 값은 없다.
ⅱ) $a\leq 5$일 때, $(f\circ g)(5)=f(25)=a+50$
$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(5)=a^2+5a+54=60$
$a^2+5a-6=0$ 즉, $(a+6)(a-1)=0$이므로
구하은 값은 $\boldsymbol{a=-6,\ a=1}$

14. 3(개)
ⅰ) $x=2$일 때, 무리식의 값이 0이므로 실수이다.
ⅱ) 분모가 0이 아니어야 하므로 $x\neq 0$
ⅲ) 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 하므로
$-x^2+2px-p^2+4=-(x-p-2)(x-p+2)\ \geq\ 0$
즉, $p-2\ \leq\ x\ \leq\ p+2$
정수 p에 대하여 ⅰ), ⅱ), ⅲ)을 모두 만족하는 정수 x가 4개이려면
$p=0,1,2$만 성립한다. 따라서 정수 p는 3(개)

15. **126**가지
조건에 의해 $f(3)$의 값은 3, 5, 7의 한 값
ⅰ) $f(3)=3$인 경우 조건을 만족하는 함수의 개수는
${}_2\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2=21$(가지)
ⅱ) $f(3)=5$인 경우 조건을 만족하는 함수의 개수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=60$(가지)
ⅲ) $f(3)=7$인 경우 조건을 만족하는 함수의 개수는
${}_6\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=45$(가지)
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $21+60+45=126$(가지)

16. -5 또는 1

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+3}-\dfrac{5}{2}a & (-3 \le x < 1) \\ (b+2)x+c-4 & (1 \le x < 2) \\ (b-2)x+c+4 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

$f(x)$는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

$(b+2)(b-2)>0$

$\therefore\ b<-2,\ b>2$

i) $b<-2$일 때,

정의역과 공역이 각각

$\{x\mid -3\le x\le 3\},\ \{y\mid -5\le y\le 5\}$이고, $a<0$이므로

$f(x)$는 $(-3,5),\ (3,\ -5)$를 지난다.

$f(-3)=\dfrac{5}{2}a=5 \qquad \therefore\ a=-2$

$f(3)=3b+c-2=-5$

$3b+c=-3 \quad \cdots\cdots ①$

$g(x)=-2\sqrt{x+3}+5$라 하면

$g(1)=f(1)$이 성립하므로 $1=b+c-2$

$b+c=3 \quad \cdots\cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$b=-3,\ c=6$

$\therefore\ a-b-c=2-(-3)-6=-5$

ii) $b>2$일 때,

정의역과 공역이 각각

$\{x\mid -3\le x\le 3\},\ \{y\mid -5\le y\le 5\}$이고, $a<0$이므로

$f(x)$는 $(-3,5),\ (1,\ -5)$를 지난다.

$f(-3)=\dfrac{5}{2}a=5 \qquad \therefore\ a=-2$

$f(1)=b+c-2=-5$

$b+c=-3 \quad \cdots\cdots ③$

$g(x)=-2\sqrt{x+3}+5$라 하면

$g(1)=f(3)$이 성립하므로 $1=3b+c-2$

$3b+c=3 \quad \cdots\cdots ④$

③, ④를 연립하여 풀면

$b=3,\ c=-6$

$\therefore\ a-b-c=-2-3+6=1$

$a-b-c$의 값은 -5 또는 1

17. ①

$n((A-B)\cup(B-A))$

$=n(A\cup B)-n(A\cap B)=53-13=40$

18. ④

$1,\ 3,\ 5\not\in X$이며

$2,\ 4\in X,\ 6\not\in X$이므로

X의 개수는 $2^{4=16}$이다.

19. ③

$Q^C\subset R\subset Q^C$에서 $R=Q^C$이고,

$P^C\subset R=Q^C$이다.

$\therefore\ (R^C=Q)\subset P$

옳은 것은

③ $P\cap Q=R^C$

20. ⑤

$p: x<-5$ 또는 $-2<x<4$이므로

$a\ge 4,\ b<-5$이며,

$a-b$의 최소는 $4-(-6)=10$

21. ④

ㄱ. $|a+b|\ge|a|+|b|$

$|a+b|^2-(|a|+|b|)^2=2(ab-|ab|)\le 0$이므로 거짓이다.

ㄴ. $a^2+3ab+5b^2\ge 0$

$\left(a+\dfrac{3}{2}b\right)^2+\dfrac{11}{4}b^2\ge 0$이므로 참이다.

ㄷ. $\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (단, $a>0,\ b>0$)

좌변$-$우변$=(b-a)\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\ge 0$이므로 참이다.

이상에서 정답은 ㄴ, ㄷ이다.

22. ②

$n(A\cup B)=k$라 하면 $k-(200-k)=80$

따라서 $n(A\cup B)=140$.

$n(A)=a, n(B)=b$

$n(A\cup B)=140=a+b-n(B\cap A)=(b+25)+b-n(B\cap A)$

$2b-115\ge 0$ 따라서 $b\ge 57.xx$, b는 58명 이상

A만 신청 $=a-n(A\cap B)=(b+25)-(2b-115)$

$=140-b$

b의 최솟값은 58명이므로 140-58 = 82명

23. ①

(가)에서 $18-4a>0$

$\therefore\ a<\dfrac{9}{2}$

(나)에서

$D=4a^2+12a+9-4a^2-12a>0$이거나

축의 방정식 $\dfrac{2a+3}{2}\ge 0$이고 $f(0)=a^2+3a\ge 0$이므로

이상을 정리하면 $0\le a<\dfrac{9}{2}$

24. ⑤

$p: -1<x<6$

$q: (x-3a+1)(x-a+3)\ge 0$

정수가 오직 하나가 되려면

i) $3a-1=5$인 경우

$q: x\le -1$또는 $x\ge 5$이므로 성립한다.

ii) $a-3=0$인 경우

$q: x\le 0$또는 $x\ge 8$이므로 성립한다.

이상에서 정수 a의 합은 $2+3=5$

25. ①

$\boxed{(가)}=129$

$\boxed{(나)}=n^2+4n-2$

$\boxed{(다)}=1$

$\therefore\ \alpha+f(\beta)=129+3=132$

26. ④

직사각형의 가로를 y, 세로를 x라 하면

$S=2xy$, $4x+2y=a-4$이다.

산술기하평균에 의해

$a-4=4x+2y\geq 2\sqrt{8xy}$에서

$(a-4)^2\geq 32xy$

$100=a+2S=a+4xy\leq a+\dfrac{(a-4)^2}{8}$ 정리하면

$a^2\geq 784=28^2$

$\therefore\ a\geq 28$

27. ③

ㄱ. 2의 원소가 들어가지 않으므로, pq가 홀수이다.
따라서 p, q 모두 홀수이다. 2는 X_p 또는 X_q의 원소가 될 수 없다.
그러므로 참이다.

ㄴ. p, q가 서로소이면 소인수가 겹치지 않으므로
$n(X_{pq})=n(X_p)\times n(X_q)$가 성립한다.

ㄷ. 반례 $p=2$, $q=2$이므로 거짓인 명제이다.

이상에서 정답은 ㄱ, ㄴ이다.

28. ②

각 원소별로 들어가는 횟수를 센다.

1, 3, 5, 7의 경우 전체에서 짝수가 없는 경우는 제외하면
2^6-2^3이고,

2, 4, 6의 경우 이미 짝수이므로
2^6이다.

총합은 $(1+3+5+7)\times(2^6-2^3)+(2+4+6)\times 2^6=1664$

29. 16

$A=\{1,\ 2\}$

$B=\{2,\ 3,\ 4\}$

$C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$(B-A)\cup(A\cup C)^C$

$=(A\cup(C-B))^C$

$=\{1,\ 2,\ 6,\ 8\}^C$

$=\{3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

이므로 부분집합의 개수는 $2^4=16$이다.

30. $a=12$, $b=-8$

$p\to\sim q$이고, $q\to\sim p$이므로

q와 $\sim p$또는 $\sim q$와 p는 필요충분조건이다.

q의 근이 $x=\dfrac{a}{3}$하나가 되려면 완전제곱식이 되어야 하므로

$\therefore\ b=-8$, $a=12$

31. 해설참고

대우는

자연수 a, b에 대하여 $a^2+2b^2-3ab-a+2b=0$이면 a, b중 적어도 하나는 짝수이다.

$(a-2b)(a-b-1)=0$이므로 $a=2b$ 또는 $a=b+1$

$a=2b$ a는 짝수,

$a=b+1$이면 둘 중 하나는 짝수이므로

성립한다.

32. ⑤

$y+z=3-x$

$2y^2+3z^2=24-x^2$

코시슈바르츠 부등식에 의하여

$(2y^2+3z^2)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\geq(y+z)^2$에 대입하면

$(24-x^2)\times\dfrac{5}{6}\geq x^2-6x+9$

정리하면

$11x^2-36x-66\leq 0$

최대와 최소는 근과 계수에 의하여

$Mm=-6$