

교과서 (수학 II) - 미래엔 106~107p_대단원(접선의 방정식)

미분계수 ~ 접선의 방정식

실시일자	-
21문제 / DRE수학	

숙제

이름

01 점 $(0, 2)$ 에서 곡선 $y = x^3 - 2x$ 에 그은 접선의 기울기는?

- ① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

02 함수 $y = x^2 - x$ 의 구간 $[t, t+2]$ 에서의 평균변화율이 7일 때, t 의 값을 구하시오.

03 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ 에 대하여 $x = 1$ 에서 $x = a$ 까지의 평균변화율이 17일 때, a 의 값을 구하시오.
(단, $a > 1$)

04 다항식 $f(x)$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오.

05 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 & (x \geq 2) \\ ax - b & (x < 2) \end{cases}$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능할 때, 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- ① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

06 [2017년 9월 고2 문과 25번 변형]
두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + ax + b & (x < 1) \\ 4ax - 8 & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

07

[2019년 11월 고2 문과 9번 변형]

함수 $f(x) = (2x+1)(3x^2-5x+a)$ 에 대하여 $f'(0) = 7$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

08

함수 $f(x) = (2x^2-3)(x+1)(-3x+a)$ 에 대하여 $f'(1) = 41$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09

함수 $f(x) = x^3 - 6x + 7$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선이 $(a, 15)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

10

곡선 $y = x^3 + ax + b$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = -x + 1$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.

11

곡선 $y = (x+2)(x^2-15)$ 위의 $x = -2$ 인 점에서의 접선이 점 $(-3, a)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

12

두 곡선 $y = x^3 + ax$, $y = bx^2 + c$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 이 점에서 공통인 접선을 가질 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b, c 는 상수)

- 13** 두 곡선 $y = -x^3 + ax^2$, $y = x^2 + 4$ 가
점 $(t, t^2 + 4)$ 에서 접할 때, 상수 a , t 에 대하여 $a + t$ 의
값은?

- ① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

- 14** 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$ 일 때,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1) - f(x)}{x - 1}$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

- 15** [2008년 11월 고3 이과 18번]
다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 8}{x^2 - 4} = 5$ 일 때,
 $f(3) + f'(3)$ 의 값을 구하시오.

- 16** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{12} + 5x + 4}{x + 1}$ 의 값을 구하시오.

- 17** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 3x + 2}{x - 1} = 12$ 를 만족시키는 자연수 n 의
값은?

- ① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

- 18** 다항함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, 3)$ 에서의
접선의 기울기가 2이다. $f(x)$ 를 $(x - 1)^2$ 으로 나누었을
때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값을 구하시오.

- 19 다항식 $x^{15} + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하시오.

- 20 점 $A(0, -16)$ 에서 곡선 $y = x^2 - 4x$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 상수 a, b 에 대하여 $a + 3b$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

- 21 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(3, 9)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 6x - 9$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(3 + \frac{1}{2n}\right) - f(3) \right\}$ 의 값을 구하시오.

교과서 (수학 II) - 미래엔 106~107p_대단원(접선의 방정식)

미분계수 ~ 접선의 방정식

실시일자	-
21문제 / DRE수학	

숙제

이름

빠른정답

01 ③	02 3	03 2
04 0	05 ④	06 29
07 ③	08 ④	09 ④
10 - 12	11 ②	12 - 1
13 ⑤	14 ②	15 28
16 - 7	17 ④	18 5
19 30	20 ③	21 1



교과서 (수학 II) - 미래엔 106~107p_대단원(접선의 방정식)

미분계수 ~ 접선의 방정식

실시일자	-
21문제 / DRE수학	

숙제

이름

01 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-2x$ 로 놓으면
 $f'(x)=3x^2-2$
 접점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 이 점에서의 접선의
 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$
 이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로
 $-2t^3=2, t^3=-1$
 $\therefore t=-1$
 따라서 구하는 접선의 기울기는
 $f'(-1)=1$

02 정답 3

해설 함수 $f(x)=x^2-x$ 라 하면
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t+2)-f(t)}{(t+2)-t}$
 $= \frac{\{(t+2)^2-(t+2)\}-(t^2-t)}{(t+2)-t}$
 $= \frac{4t+2}{2}$
 $= 2t+1$
 $2t+1=7$
 $\therefore t=3$

03 정답 2

해설 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에서
 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a)-f(1)}{a-1}$
 $= \frac{(a^3+3a^2+a-1)-4}{a-1}$
 $= \frac{a^3+3a^2+a-5}{a-1}$
 $= \frac{(a-1)(a^2+4a+5)}{a-1}$
 $= a^2+4a+5$
 이때 평균변화율이 17이므로
 $a^2+4a+5=17$
 $a^2+4a-12=0, (a+6)(a-2)=0$
 $\therefore a=2 (\because a>1)$

04 정답 0

해설 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라
 하면 다항식 $f(x)$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지므로
 $f(x)=(x-2)^2Q(x)$
 $f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$
 따라서 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(2)=0$

05 정답 ④

해설 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로
미분계수 $f'(2)$ 가 존재해야 한다.

즉, 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 가 존재해야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로
 $x=2$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (ax-b) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^3-2x^2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2$$

$$\text{에서 } 2a-b=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 가 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{ax-2a}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^3-2x^2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} a = \lim_{x \rightarrow 2+} x^2$$

$$a=4 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $a=4$, $b=8$ 이므로

$$ab=32$$

06 정답 29

해설 (i) 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로
 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{이므로}$$

$$4a-8=3+a+b$$

$$\therefore 3a-b=11$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로
미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{3(1+h)^2 + a(1+h) + b\} - (4a-8)}{h}$$

$$= 6+a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{4a(1+h)-8\} - (4a-8)}{h}$$

$$= 4a$$

이때

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$\text{이므로 } 6+a=4a, \text{ 즉 } 3a=6, a=2$$

(i), (ii)에 의하여 $3a-b=11$, $a=2$ 이므로 $b=-5$

$$\text{따라서 } a^2+b^2=29$$

07 정답 ③

해설 함수 $f(x) = (2x+1)(3x^2-5x+a)$ 에서

$$f'(x) = 2(3x^2-5x+a) + (2x+1)(6x-5)$$

$$f'(0) = 2a + (-5) = 7$$

$$\text{따라서 } a=6$$

08 정답 ④

해설 $f'(x) = (2x^2-3)'(x+1)(-3x+a)$

$$+ (2x^2-3)(x+1)'(-3x+a)$$

$$+ (2x^2-3)(x+1)(-3x+a)'$$

$$= 4x(x+1)(-3x+a)$$

$$+ (2x^2-3) \cdot 1 \cdot (-3x+a)$$

$$+ (2x^2-3)(x+1) \cdot (-3)$$

$$f'(1) = -15+7a=41 \text{이므로 } 7a=56$$

$$\therefore a=8$$

09 정답 ④

해설 $f(x) = x^3-6x+7$ 에서

$$f'(x) = 3x^2-6$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,3)$ 에서의 접선의 기울기가

$$f'(2) = 12-6=6$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-3=6(x-2)$$

$$\text{즉, } y=6x-9$$

이 접선이 $(a,15)$ 를 지나므로

$$6a-9=15$$

$$\text{따라서 } a=4$$

10 정답 -12

해설 점 $(1,0)$ 이 곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점이므로

$$0=1+a+b$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x^3+ax+b$ 로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$ 이고,

점 $(1,0)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(1)=3+a=-1 \quad \therefore a=-4$$

$a=-4$ 를 ①에 대입하면

$$-4+b=-1 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore ab=(-4) \cdot 3=-12$$

11 정답 ②

해설 $f(x) = (x+2)(x^2-15)$ 로 놓으면
 $f'(x) = (x+2)'(x^2-15) + (x+2)(x^2-15)'$
 $= (x^2-15) + 2x(x+2)$
 $= 3x^2 + 4x - 15$
 즉, 곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = -2$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(-2) = 12 - 8 - 15 = -11$
 또, $f(-2) = (-2+2)(4-15) = 0$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y - 0 = -11 \cdot (x+2)$
 $\therefore y = -11x - 22$
 이때 점 $(-3, a)$ 가 직선 $y = -11x - 22$ 위의 점이므로
 $a = -11 \cdot (-3) - 22 = 11$

12 정답 -1

해설 $f(x) = x^3 + ax$, $g(x) = bx^2 + c$ 라 하면
 먼저 두 곡선이 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $f(1) = 1 + a = 0$, $g(1) = b + c = 0$
 $\therefore a = -1$, $b + c = 0$
 또한, 이 점에서 공통의 접선을 가진다고 했으므로 $x = 1$ 에서의 미분계수가 같아야 한다.
 $f'(x) = 3x^2 + a$, $g'(x) = 2bx$
 $f'(1) = 3 + a$, $g'(1) = 2b$
 $\therefore 3 + a = 2b$
 $\therefore b = 1$, $c = -1$
 $\therefore a + b + c = -1$

13 정답 ⑤

해설 $f(x) = -x^3 + ax^2$, $g(x) = x^2 + 4$ 로 놓으면
 $f'(x) = -3x^2 + 2ax$, $g'(x) = 2x$
 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 모두 점 $(t, t^2 + 4)$ 를 지나므로 $f(t) = g(t) = t^2 + 4$
 $-t^3 + at^2 = t^2 + 4 \quad \dots \textcircled{1}$
 두 곡선의 접점 $(t, t^2 + 4)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t) = g'(t)$
 $-3t^2 + 2at = 2t$
 $-3t + 2a = 2 \quad (\because \textcircled{1} \text{에서 } t \neq 0)$
 $2a = 3t + 2$
 $\therefore a = \frac{3}{2}t + 1 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $-t^3 + \left(\frac{3}{2}t + 1\right)t^2 = t^2 + 4$
 $\frac{1}{2}t^3 = 4$, $t^3 = 8$, $t^3 - 8 = 0$
 $(t-2)(t^2 + 2t + 4) = 0$
 $\therefore t = 2$
 $\textcircled{2}$ 에서 $a = \frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = 4$
 $\therefore a + t = 4 + 2 = 6$

14 정답 ②

해설 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1) - f(x)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1) - f(1) + f(1) - f(x)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x-1)f(1)}{x-1} - \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right\}$
 $= f(1) - f'(1)$
 $= 2 - 4 = -2$

15 정답 28

해설 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-8}{x^2-4} = 5$ 에서
 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x+1)-8\} = 0$ 이어야 하므로
 $f(3) = 8$
 $x+1 = t$ 로 놓으면

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t)-f(3)}{t-3} \times \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t+1}$$

$$= \frac{1}{4} f'(3) = 5$$

 $\therefore f'(3) = 20$
 $\therefore f(3) + f'(3) = 28$

16 정답 -7

해설 $f(x) = x^{12} + 5x$ 로 놓으면 $f(-1) = -4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= f'(-1)$$

 $f'(x) = 12x^{11} + 5$ 이므로
 $f'(-1) = -7$

17 정답 ④

해설 $f(x) = x^n - 3x$ 로 놓으면 $f(1) = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

 $f'(x) = nx^{n-1} - 3$ 이므로
 $f'(1) = n - 3$
 $n - 3 = 12$ 에서 $n = 15$

18 정답 5

해설 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
 나머지를 $R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{㉠}$
 점 $(1, 3)$ 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로
 $f(1) = 3 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$
 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1) = 2$
 $\therefore a = 2$
 $a = 2$ 를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $b = 1$
 따라서 $R(x) = 2x + 1$ 이므로
 $R(2) = 5$

19 정답 30

해설 다항식 $x^{15} + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의
 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^{15} + ax + b = (x-1)^2 Q(x) + 3x + 4 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 + a + b = 7$
 $\therefore a + b = 6 \quad \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $15x^{14} + a = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + 3$
 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $15 + a = 3$
 $\therefore a = -12$
 $a = -12$ 를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $b = 18$
 $\therefore b - a = 30$

20 정답 ③

해설 $f(x) = x^2 - 4x$ 로 놓으면

$f'(x) = 2x - 4$ 과 접점의 좌표를 $(t, t^2 - 4t)$ 라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = 2t - 4$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - (t^2 - 4t) = (2t - 4)(x - t)$$

$$y = (2t - 4)x - t^2$$

이 직선이 점 $A(0, -16)$ 을 지나므로

$$-16 = -t^2, t^2 = 16$$

$$t = -4 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 $B(-4, 32)$, $C(4, 0)$ 이므로

삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0 + (-4) + 4}{3}, \frac{-16 + 32 + 0}{3} \right),$$

즉 $\left(0, \frac{16}{3} \right)$ 이다.

따라서 $a = 0$, $b = \frac{16}{3}$ 이므로

$$a + 3b = 16$$

21 정답 1

해설 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(3, 9)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 6x - 9$ 이므로

$$f'(3) = 6$$

$h = \frac{1}{2n}$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(3 + \frac{1}{2n}\right) - f(3) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{6h} \\ &= \frac{1}{6} f'(3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \end{aligned}$$