

고1	공통수학2 기말고사 대비	선택형	서답형
	집합~무리함수 출처: 2024_1-2_중간/기말_경기여고	32문항	8문항

※ .2024년 경기여고 중간/기말고사를 공통수학2 기말고사대비로 편집했습니다. 문항수가 32문제 서답형 8문항으로 편집했습니다. 일반계 고등학교 시험보다 어려운 난이도입니다. 꼭 문제 연습하셔서 기말고사 100점 맞으시기를 응원합니다.

- 1 정의역이 $\{-2, 1, 2\}$ 인 두 함수 $f(x)=a|x|-2$ 와 $g(x)=3x^2-b$ 에 대하여 $f=g$ 이다. 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?
 ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

- 2 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x \geq 0) \\ (a+2)x+3 & (x < 0) \end{cases}$ 이 일대일대응이 되도록 하는 정수 a 의 최댓값은?
 ① -4 ② -3 ③ -2
 ④ -1 ⑤ 0

3 실수 a, b 에 대하여 유리함수 $f(x)=\frac{ax+1}{x+b}$ 가

$f(1)=f^{-1}(1)=2$ 를 만족할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 1
 ④ 3 ⑤ 5

4 세 함수

$f(x)=2x+4, g(x)=-3x+1, h(x)=ax+b$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ h)(x)=f(x)$ 이다. 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

- 5** 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 의 역함수가 존재하고

$$3f(3) - f(1) = 13, \quad f^{-1}(3) - f^{-1}(1) = 2$$

일 때, $f(4) + f^{-1}(4) - f(5)$ 의 값은?

- (1) 2 (2) 4 (3) 6
(4) 8 (5) 10

- 7** 함수 $f(x) = \frac{1}{-2x+2}$ 에 대하여

$$f = f^1, \quad f \circ f = f^2, \quad f \circ f^2 = f^3, \quad \dots, \quad f \circ f^n = f^{n+1}$$

로 정의할 때, $f^{1213}(2)$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

- (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$
(4) 1 (5) 2

- 6** 함수 $f(x) = \sqrt{ax+b} + c$ 에 대한 설명으로 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수)

| 보기 |

- ㄱ. 정의역은 $\left\{x \mid x \geq -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq c\}$ 이다.
- ㄴ. a 의 절댓값이 커질수록 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = c$ 로부터 멀어진다.
- ㄷ. $y = f(x)$ 의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나기 위한 필요충분조건은 $a < 0, b > c^2, c < 0$ 이다.

- (1) ㄱ (2) ㄴ (3) ㄷ
(4) ㄱ, ㄴ (5) ㄴ, ㄷ

- 8** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여

$f(2x+1) = 3x-4$ 가 성립할 때, 역함수 $f^{-1}(x) = ax+b$ 이다.
상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은?

- (1) -5 (2) -4 (3) -3
(4) -2 (5) -1

9 $-4 < x \leq -2$ 에서 $\frac{64}{x} \leq ax - 1 \leq \frac{8}{x}$ 가 항상 성립할 때,

실수 a 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자.

$M - m$ 의 값은?

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① $\frac{3}{2}$ | ② $\frac{7}{4}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{9}{4}$ | ⑤ $\frac{5}{2}$ | |

11 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 와 실수 p 에 대하여 $x \geq p$ 에서 정의된 함수 $g(x) = \sqrt{x-p}$ 가 있다. $t \geq p$ 에 대하여 $t \leq x \leq t+4$ 에서 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 할 때, $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) h(t) = \begin{cases} 4 & (p \leq t < p+4) \\ f(g(t)) & (t \geq p+4) \end{cases}$$

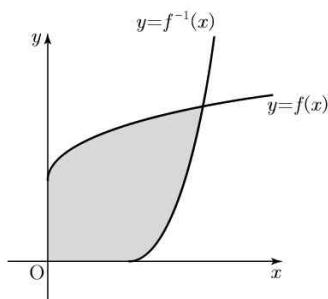
(나) $h(p+9) = 6$

$f(4)$ 의 값은?

- | | | |
|------|------|------|
| ① 6 | ② 8 | ③ 10 |
| ④ 12 | ⑤ 14 | |

10 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x} + 3$ 에 대하여 좌표평면에서 $y = f(x), y = f^{-1}(x), x$ 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수는?

- ① 24
- ② 26
- ③ 28
- ④ 30
- ⑤ 32



12 유리함수 $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - 10$ 이 서로 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 C, D에 대하여 직사각형 ABCD의 넓이가 18일 때, 상수 a 의 값은? (단, A, B, C, D는 서로 다른 네 점)

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

13 [서답형1] 두 함수

$$f(x) = 2x + a, g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq a) \\ 3x - 8 & (x < a) \end{cases}$$

에 대하여
 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(5) = 60$ 을 만족시키는 실수 a 의 값을 구하여라.

15 [서답형3] 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 다음 조건을 모두 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면

$f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

(나) $f(3)$ 의 값은 홀수이다.

14 [서답형2] x 에 대한 무리식

$$\frac{(x-2)\sqrt{-x^2+2px-p^2+4}}{x}$$

의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x 가 4개일 때, 이를 만족하는 정수 p 의 개수를 구하여라.

16 [서답형4] 정의역과 공역이 각각 $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$,

$\{y \mid -5 \leq y \leq 5\}$ 이고, 역함수가 존재하는 함수

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} - \frac{5}{2}a & (-3 \leq x < 1) \\ -2|x-2| + bx + c & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

에 대하여 $a-b-c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수, $a < 0$)

17. 두 집합 A , B 에 대하여 $n(A \cup B) = 53$, $n(A) = 37$,

$n(B) = 29$ 일 때, $n((A - B) \cup (B - A))$ 의 값은? [4.1점]

- ① 40 ② 41 ③ 42
④ 43 ⑤ 44

18. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 세 부분집합 A , B , X 에

대하여 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 일 때,
 $A \cap X = \emptyset$, $B \cap X = \{2, 4\}$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는?

[4.2점]

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

19. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 P , Q , R 이 각각

세 조건 p , q , r 의 진리집합이고, 세 명제
 $\sim p \rightarrow r$, $r \rightarrow \sim q$, $\sim r \rightarrow q \not\models$ 모두 참일 때, 항상 옳은 것은?
[4.2점]

- ① $P \subset Q$ ② $P^C \subset Q$ ③ $P \cap Q = R^C$
④ $R - P^C = \emptyset$ ⑤ $R^C \cup P^C \subset Q$

20. 실수 전체의 집합에서 세 조건

$$p : x^2 - 2x - 8 < 0 \text{ 또는 } x < -5,$$

$$q : x \leq a,$$

$$r : x > b$$

에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이고, r 은 $\sim p$ 이기 위한 필요조건이다. a , b 는 정수일 때, $a - b$ 의 최솟값은? [4.2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

- 21.** 두 실수 a , b 에 대하여 항상 성립하는 부등식만을
<보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.4점]

〈보기〉

$$\begin{aligned} \neg. \quad & |a+b| \geq |a| + |b| \\ \lhd. \quad & a^2 + 3ab + 5b^2 \geq 0 \\ \sqsubset. \quad & \frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ (단, } a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

- ① \neg ② \lhd ③ \neg, \sqsubset
④ \lhd, \sqsubset ⑤ \neg, \lhd, \sqsubset

- 22.** 어느 학교 학생 200명을 대상으로 두 체험 활동 A, B를 신청한 학생 수를 조사하였더니 체험 활동 A를 신청한 학생은 체험 활동 B를 신청한 학생보다 25명이 많았고, 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생은 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생보다 80명이 적었다. 체험 활동 A만 신청한 학생 수의 최댓값은?
[4.4점]
- ① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

- 23.** 다음 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 모든 정수 a 의 개수는? [4.6점]

$$\begin{aligned} (\text{가}) \quad & x > 0 \text{인 어떤 실수 } x \text{에 대하여 } 2x < 18 - 4a \\ (\text{나}) \quad & x < 0 \text{인 모든 실수 } x \text{에 대하여} \\ & x^2 - (2a+3)x + (a^2 + 3a) \geq 0 \end{aligned}$$

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

- 24.** 실수 x 에 대한 두 조건

$$p: x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$q: x^2 - (4a-4)x + (3a^2 - 10a + 3) \geq 0$$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x 가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a 의 값의 합은? [4.7점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

- 25.** 다음은 5이상인 자연수 n 에 대하여 $n^4 - 20n^2 + 4$ 는 소수가 아닌 자연수임을 귀류법으로 증명한 것이다.

5이상인 자연수 n 에 대하여

$$n^4 - 20n^2 + 4 = n^2(n^2 - 20) + 4 \text{이므로}$$

$$n^4 - 20n^2 + 4 \geq \boxed{\text{(가)}} > 0$$

따라서 $n^4 - 20n^2 + 4$ 은 자연수이다.

$n^4 - 20n^2 + 4$ 이 소수라고 가정하자.

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (\boxed{\text{(나)}})(n^2 - 4n - 2) \text{이고}$$

$$n \geq 5 \text{일 때 } \boxed{\text{(나)}} > 0, n^2 - 4n - 2 > 0 \text{이므로}$$

$\boxed{\text{(나)}}$ 와 $n^2 - 4n - 2$ 둘 중 하나는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

(i) $\boxed{\text{(나)}} = \boxed{\text{(다)}}$ 인 경우

등식을 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $n^2 - 4n - 2 = \boxed{\text{(다)}}$ 인 경우

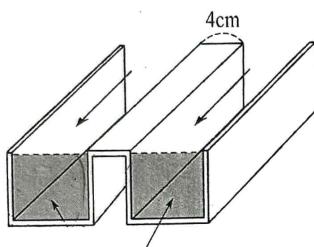
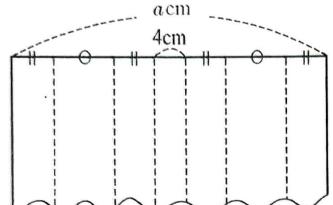
등식을 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

따라서 이는 모순이므로 $n^4 - 20n^2 + 4$ 는 소수가 아니다.

(가), (다)에 알맞은 수를 각각 α, β 라 하고 (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $\alpha + f(\beta)$ 의 값은? [4.6점]

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ① 132 | ② 133 | ③ 134 |
| ④ 135 | ⑤ 136 | |

- 26.** 그림과 같이 폭이 a cm인 긴 양철판을 접어서 두 줄기로 물이 가득 차서 흘러가도록 하려고 한다.



물이 흘러가는 방향에 수직으로 자른 단면이 서로 합동이고 한 변이 없는 두 개의 직사각형 모양이 되도록 할 때, 두 직사각형의 넓이의 합을 $S \text{ cm}^2$ 라 하자. $a + 2S = 100$ 을 만족하는 a 의 최솟값은?

(단, $a > 4$ 이고 양철판의 두께는 무시한다.)

- | | | |
|------|------|------|
| ① 7 | ② 14 | ③ 21 |
| ④ 28 | ⑤ 35 | |

27. 자연수 k 의 양의 약수 전체의 집합을 X_k 라 할 때, 두 자연수 p, q 에 대하여 참인 명제만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (4.7점)

<보기>

- ㄱ. $2 \in X_{pq}$ 이면 $2 \in (X_p \cup X_q)$
- ㄴ. p, q 가 서로소이면 $n(X_{pq}) = n(X_p) \times n(X_q)$
- ㄷ. p, q 가 소수이면 $n(X_p \cup X_q) = n(X_p) + n(X_q)$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중 짝수를 적어도 한 개 이상 가지는 모든 부분집합을 A_1, A_2, \dots, A_n 이라 하고, A_k 의 모든 원소의 합을 $S(A_k)$ 라 할 때,
 $S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots + S(A_n)$ 의 값은? (단, k 는 $1 \leq k \leq n$ 를 만족하는 자연수이다.) [4.8점]

- ① 1663 ② 1664 ③ 1665
④ 1666 ⑤ 1667

29.[서답형1]

전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 8\text{이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$, $B = \{x+y|x \in A, y \in A\}$,
 $C = \{xy|x \in A, y \in B\}$ 에 대하여 $(B-A) \cup (A \cup C)^C$ 의
부분집합의 개수를 구하시오.[5점]

30.[서답형2] 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : 3x - a \neq 0,$$

$$q : x^2 + bx + 16 \leq 0$$

에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 는 $\sim p$ 이기 위한
필요조건이 되도록 하는 정수 a, b 의 값을 구하시오 (단,
 $a > 0$ 이다.) [5점]

31.[서답형3] 명제 ‘자연수 a, b 에 대하여 a, b 모두 홀수이면

$a^2 + 2b^2 - 3ab - a + 2b \neq 0$ 이다.’ 가 참임을 대우를 이용하여
증명하시오. [5점]

32.[서답형4] 세 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $x + y + z = 3$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$ 가 성립한다. x 의 최댓값을 M , 최솟값을
 m 이라 할 때, Mm 의 값은? (4.8점)

- | | | |
|-------|------|------|
| ① -10 | ② -9 | ③ -8 |
| ④ -7 | ⑤ -6 | |

문항별 정답

1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
(5)	(2)	(2)	(5)	(2)	(5)	(1)	(3)	(4)	(2)
11번	12번	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번
(4)	(3)	해설참조	해설참조	해설참조	해설참조	(1)	(4)	(3)	(5)
21번	22번	23번	24번	25번	26번	27번	28번	29번	30번
(4)	(4)	(1)	(5)	(1)	(4)	(3)	(2)	해설참조	해설참조
31번	32번								
해설참조	해설참조								