개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부등식의 활용) 118~126p

방정식과 부등식에서의 활용

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 방정식 $2x^4-4x^2+3=0$ 의 서로 다른 실근은 몇 개인가?

① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

02 방정식 $x^4-2x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

03 방정식 $2x^4-4x^3=-x^4+12x^2+2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

04 방정식 $x^3+3x^2-9x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 k의 값의 곱을 구하시오.

05 x에 대한 삼차방정식 $x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+k=0$이 중근과 다른 한 개의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 값을 구하시오.

06 직선 $y=2x+k$와 곡선 $y=x^3-x$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-4<k<0$ ② $-3<k<1$
③ $-2<k<2$ ④ $-1<k<3$
⑤ $0<k<4$

07 [2022년 6월 고3 9번/4점]
두 함수 $f(x)=x^3-x+6$, $g(x)=x^2+a$가 있다.
$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

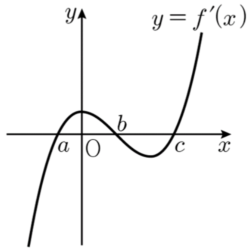
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

08 두 함수 $f(x)=2x^3-20x+k$, $g(x)=3x^2+16x-5$가 있다. 열린구간 $(1, 4)$에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.

09 [2017년 11월 고2 이과 15번 변형]
모든 실수 x에 대하여
부등식 $x^4-4x-a^2+2a+11 \geq 0$이
항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

10 다항함수 $y=f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다. $f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=2$일 때, 방정식 $f(x)-4=0$의 실근의 개수를 구하시오.



11 삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x+2a=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

12 x에 대한 삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x+p=0$이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖도록 하는 정수 p의 개수는?

① 4　② 8　③ 13
④ 19　⑤ 26

13 x에 대한 방정식 $2x^3+18x^2+14x=3x^2-10x+k$가 서로 다른 세 개의 음근을 가질 때, 다음 중 실수 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -10 ② -7 ③ -4
④ -1 ⑤ 2

14 x에 대한 방정식 $2x^3+3x^2-12x+p=0$이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 갖도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-20<p<0$ ② $-20<p<7$
③ $-7<p<20$ ④ $0<p<7$
⑤ $0<p<20$

15 x에 대한 방정식 $x^3-9x^2+15x+k=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 21 ② 22
③ 23 ④ 24
⑤ 25

16 x에 대한 방정식 $x^3+4x^2-6x+k=x^2+3x$가 오직 한 개의 음근만을 갖도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.

17 두 함수
$f(x)=3x^3+x^2-6x$, $g(x)=2x^3+4x^2+3x+a$
에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오.

18 곡선 $y=x^3-kx$ 밖의 점 $(2, 1)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k\neq\frac{7}{2}\right)$

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

19 다음 보기 중 '$x>a$일 때, $f'(x)>0$이고 $f(a)=0$이면 $f(x)>0$이다.'라는 성질을 이용하여 증명할 수 있는 부등식만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $x>1$일 때, $2x^3+1>3x^2$
ㄴ. $x>2$일 때, $x^3+4>3x^2$
ㄷ. $x>-2$일 때, $x^3-3x+3>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

20 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4+4(a-1)x^2+8ax+44\geq -\frac{4}{3}x^3-8ax$$

가 성립하도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21 [2023년 사관학교 19번/3점]

x에 대한 방정식 $x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

22 [2016년 9월 고3 문과 20번 변형]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-4)=f'(4)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(3)$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선은 점 $(-2, f(-2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23 [2019년 10월 고3 문과 27번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=0$
(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

24 [2020년 6월 고3 문과 19번 변형]

방정식 $-2x^3-9x^2+a=0$이 $-3\le x\le 3$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

25 [2020년 6월 고3 문과 19번/4점]

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부등식의 활용) 118~126p

방정식과 부등식에서의 활용

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ①	02 0	03 2
04 -135	05 -22	06 ③
07 ⑤	08 76	09 ②
10 2	11 ①	12 ④
13 ⑤	14 ①	15 ④
16 6	17 26	18 ②
19 ③	20 ②	21 12
22 ⑤	23 19	24 ④
25 ③		

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부등식의 활용) 118~126p

방정식과 부등식에서의 활용

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ①

해설 $f(x)=2x^4-4x^2+3$ 이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)$

$=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로 아래 증감표에 의하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$

이 함수의 최댓값은 존재하지 않고 최솟값은 1 이 된다. 따라서, 이 함수는 실근을 가지지 않는다.

02 **정답** 0

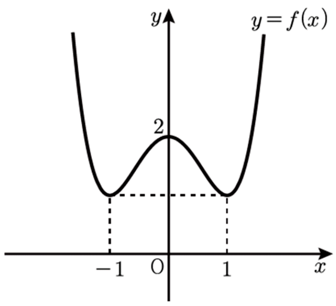
해설 $f(x)=x^4-2x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.



03 **정답** 2

해설 $2x^4-4x^3=-x^4+12x^2+2$에서

$3x^4-4x^3-12x^2-2=0$

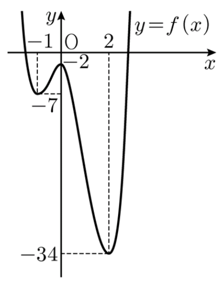
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2-2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-34	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



04 **정답** -135

해설 $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-3)f(1)=0$이어야 하므로

$(27+k)(-5+k)=0$

$\therefore k=-27$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 모든 k의 값의 곱은

$(-27)\cdot 5=-135$

05 정답 -22

해설 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x-18=3(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=22+k$,

극솟값은 $f(3)=k-\frac{81}{2}$

삼차방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-2)\cdot f(3)=0$ 이어야 하므로

$(22+k)\left(k-\frac{81}{2}\right)=0$이고 k는 정수이므로

$k=-22$

06 정답 ③

해설 직선 $y=2x+k$와 곡선 $y=x^3-x$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x+k=x^3-x$, 즉 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2-k$	$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)<0$, $(2-k)(-2-k)<0$

$(k+2)(k-2)<0$ $\quad\therefore\ -2<k<2$

07 정답 ⑤

해설 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$\therefore\ h'(x)=3x^2-2x-1$

$\qquad\quad =(3x+1)(x-1)$

따라서 $h'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

이때 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a\leq 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

08 정답 76

해설 $h(x)=f(x)-g(x)=2x^3-3x^2-36x+5+k$가 열린구간 $(1,\ 4)$에서 $h(x)\geq 0$이 되는 최솟값 k를 구한다.

$h'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=3$

$h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$k-32$	$\searrow$	$k-76$	$\nearrow$	$k-59$

따라서 열린구간 $(1,\ 4)$에서 $h(x)$의 최솟값은 $k-76$이므로 $h(x)\geq 0$이려면 $k-76\geq 0$이어야 한다.

따라서 k의 최솟값은 76이다.

09 정답 ②

해설 $f(x)=x^4-4x-a^2+2a+11$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

$f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-a^2+2a+8$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$-a^2+2a+8\ge 0$, $a^2-2a-8\le 0$

$(a-4)(a+2)\le 0$

$\therefore\ -2\le a\le 4$

따라서 정수 a의 개수는 7

10 정답 2

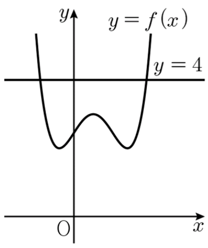
해설 $f(x)-4=0$, 즉 방정식 $f(x)=4$의 실근의 개수는

$y=f(x)$, $y=4$의 교점의 개수와 같다.

$y=f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

아래의 그림에서 $y=f(x)$와 $y=4$의 교점의 개수가 2이므로 $f(x)-4=0$의 실근의 개수도 2이다.

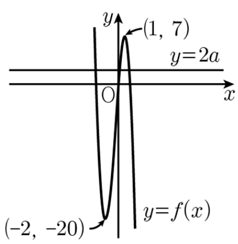


11 정답 ①

해설 $2a=-2x^3-3x^2+12x$ 에서 $-2x^3-3x^2+12x$를 $f(x)$라 하면

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x-1)(x+2)$

따라서 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x+2a=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖기 위해선 $0<2a<7$ 이어야 하므로 자연수 a의 최댓값은 3이다.

12 정답 ④

해설 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+p$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$p+7$	↘	$p-20$	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음을 만족해야 한다.

(ⅰ) (극댓값)>0, (극솟값)<0에서

$p+7>0$, $p-20<0$

$\therefore\ -7<p<20$ …… ㉠

(ⅱ) (y절편)>0에서

$f(0)=p>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<p<20$

따라서 정수 p는 1, 2, 3, $\cdots$, 19의 19개이다.

13 정답 ⑤

해설 $2x^3+18x^2+14x=3x^2-10x+k$에서

$2x^3+15x^2+24x=k$

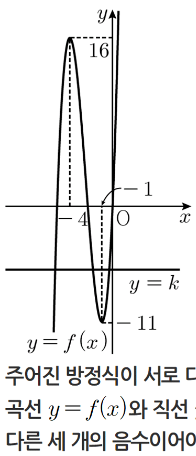
$f(x)=2x^3+15x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+30x+24=6(x+1)(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-11	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 개의 음수이어야 하므로

$-11<k<0$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

14 정답 ①

해설 $2x^3+3x^2-12x+p=0$에서

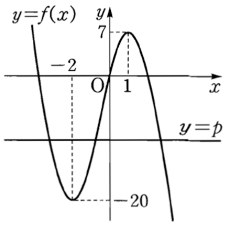
$p=-2x^3-3x^2+12x$

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 p의 값의 범위는 $-20<p<0$

15 정답 ④

해설 $x^3-9x^2+15x+k=0$에서 $x^3-9x^2+15x=-k$

$f(x)=x^3-9x^2+15x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

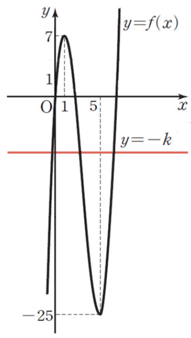
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 k의 값의 범위는 $-25<-k<0$

$\therefore 0<k<25$

따라서 정수 k의 최댓값은 24이다.



16 **정답** 6

해설 $x^3+4x^2-6x+k=x^2+3x$에서

$x^3+3x^2-9x=-k$

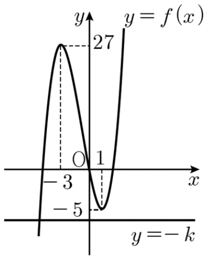
$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 음근만을 가지려면

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고,

교점의 x좌표가 음수이어야 하므로

$-k<-5$

$\therefore\ k>5$

따라서 정수 k의 최솟값은 6이다.

17 **정답** 26

해설 $f(x)=g(x)$에서

$3x^3+x^2-6x=2x^3+4x^2+3x+a$

이 식을 정리하면 $x^3-3x^2-9x=a$

이때 $h(x)=x^3-3x^2-9x$로 놓으면

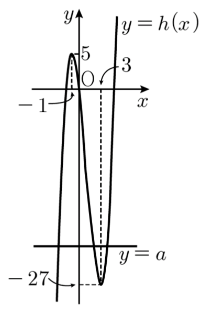
$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-27<a<0$이다.

즉, 구하는 정수 a의 개수는 26이다.

18 **정답** ②

해설 $y=x^3-kx$에서 $y'=3x^2-k$

점 $(2,\ 1)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-kt)$라 하면

접선의 방정식은 $y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1-(t^3-kt)=(3t^2-k)\cdot(2-t)$

$2t^3-6t^2+1+2k=0$ $\cdots$ ㉠

점 $(2,\ 1)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-6t^2+1+2k$로 놓으면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로 $(1+2k)(-7+2k)=0$

따라서 상수 k의 값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

19 **정답** ③

해설 ㄱ. $g(x)=2x^3-3x^2+1$로 놓으면
$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$x>1$일 때, $g'(x)>0$이고 $g(1)=0$이므로
$g(x)>0$, 즉 $2x^3+1>3x^2$이다. (참)
ㄴ. $h(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면
$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$x>2$일 때, $h'(x)>0$이고 $f(2)=0$이므로
$h(x)>0$, 즉 $x^3+4>3x^2$이다. (참)
ㄷ. $i(x)=x^3-3x+3$으로 놓으면
$i'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$
$x>-2$에서 $i'(x)$의 부호를 정할 수 없으므로
$i(x)>0$을 증명할 수 없다. (거짓)
따라서 주어진 성질을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은 ㄱ, ㄴ이다.

20 **정답** ②

해설 $x^4+4(a-1)x^2+8ax+44\geq-\dfrac{4}{3}x^3-8ax$에서

$x^4+\dfrac{4}{3}x^3+4(a-1)x^2+16ax+44\geq 0\cdots㉠$

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하므로

$f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3+4(a-1)x^2+16ax+44$로

놓으면 함수 $f(x)$의 최솟값을 m이라 할 때,
$m\geq 0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+4x^2+8(a-1)x+16a\\&=4\{x^3+x^2+2(a-1)x+4a\}\\&=4(x+2)(x^2-x+2a)\end{aligned}$$

a는 자연수이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+2a=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+2a-\dfrac{1}{4}>0$

따라서 $f'(x)=0$에서 $x=-2$이고,
$x<-2$일 때 $f'(x)<0$, $x>-2$일 때
$f'(x)>0$이므로
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이다.
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$\begin{aligned}f(-2)&=16-\frac{32}{3}+16(a-1)-32a+44\\&=-16a+\frac{100}{3}\end{aligned}$$

이므로 $-16a+\dfrac{100}{3}\geq 0$에서 $a\leq\dfrac{25}{12}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 2이다.

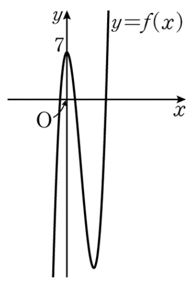
21 **정답** 12

해설 $f(x)=x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3nx=3x(x-n)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=n$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7=0$의 해는 함수 $y=f(x)$의

그래프의 x절편과 같으므로 x에 대한 방정식

$x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7=0$의 1보다 큰 서로 다른 두 실근의

개수가 2가 되려면 $f(1)>0$이고 $f(n)<0$을

만족시켜야 한다. $f(1)=8-\dfrac{3n}{2}>0$이고

$f(n)=n^3-\dfrac{3n}{2}\cdot n^2+7=-\dfrac{1}{2}n^3+7<0$

즉, $\sqrt[3]{14}\leq n<\dfrac{16}{3}$이므로 이를 만족하는 자연수

$n=3,\ 4,\ 5$이고 그 합은 $3+4+5=12$이다.

22 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$라고 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(-4)=f'(4)$에서 $b=0$이고

$x=-3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-3)=27a+c=0$에서 $c=-27a$이다.

따라서 $f'(x)=3ax^2-27a$ $(a>0)$이므로

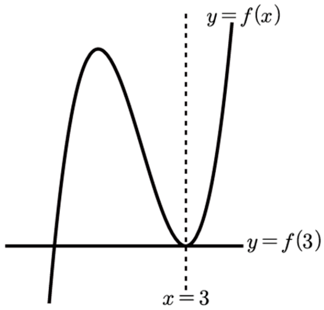
$f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2-27a$

$=3a(x+3)(x-3)$

조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 다음 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(3)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(x)=ax^3-27ax+d$ $(a>0)$이고,

$f'(x)=3ax^2-27a$이므로

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-26a+d)=-24a(x-1)$

$y=-24ax-2a+d$ ⋯ ㉠

이때 ㉠에 점 $(-2,\ f(-2))$, 즉 $(-2,\ 46a+d)$를 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은 점 $(-2,\ f(-2))$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

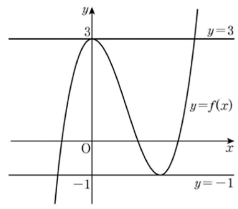
23 정답 19

해설 조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

따라서 $f(4)=19$

24 정답 ④

해설 $f(x)=-2x^3-9x^2+a$라 하면

$f'(x)=-6x^2-18x$

$=-6x(x+3)$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$이고,

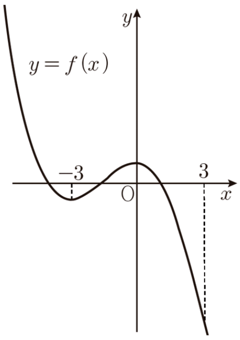
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$	a	$\searrow$

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-3 \le x \le 3$에서

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(3)=a-135$이므로 $f(-3)>f(3)$이다.

그러므로 조건을 만족시키기 위해서는

$f(-3)\le 0$이고 $f(0)>0$이어야 한다.

$f(-3)\le 0$에서

$a-27 \le 0,\ a \le 27$ ⋯ ㉠

또, $f(0)>0$에서

$a>0$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $0<a\le 27$이므로

구하는 정수 a의 개수는 27이다.

25 정답 ③

해설 미분을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건 구하기

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+12x$

$=6x(x+2)$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이고,

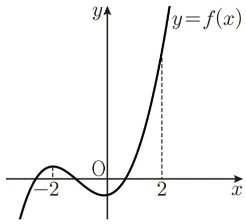
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$8+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(2)=40+a$이므로 $f(2)>f(-2)$이다.

그러므로 조건을 만족시키기 위해서는

$f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.

$f(-2)\ge 0$에서

$8+a\ge 0,\ a\ge -8$ ⋯ ㉠

또, $f(0)<0$에서

$a<0$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$이므로

구하는 정수 a의 개수는 8이다.