✓〈킬러패스〉공통수학1

(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

여러가지 방정식편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

DRE-EDU.com

[3차 방정식]

1.내신 핵심 문항

삼차방정식 $x^3+2x^2-2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

풀이)

풀 이

두 가지 풀이법
1. 근과 계수와의 관계로 풀어 보자
2. 역수로 갖는 방정식으로 생각해보자

방법1)

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이

$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=-a$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=b$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1=-c$$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=1$이므로

$abc=-2\cdot 2\cdot 1=-4$

방법2)

역수 방정식으로 보면 된다.
a=-2, b=2,c=1 따라서 abc=-4

(내용정리)

역수 관계 삼차방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하자.

양변을 x^3로 나누면 $a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$x=\alpha$를 대입해 보면

$a+b(\frac{1}{\alpha})+c(\frac{1}{\alpha})^2+d(\frac{1}{\alpha})^3=0$이다.

즉 근이 $\frac{1}{\alpha}$이 된다.

따라서 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하면

$a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$\leftrightarrow d(\frac{1}{x})^3+c(\frac{1}{x})^2+b(\frac{1}{x})+a=0$ 의 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=-\frac{a}{d}$

[3차 방정식]

2.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3+(a-1)x^2+2ax+12=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 조립제법으로 인수분해 한다.
2. 이차방정식과 구한 근을 비교해 본다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+2ax+12$로 놓으면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a-1 & 2a & 12 \\ & & -2 & -2a+6 & -12 \\ \hline & 1 & a-3 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)\{x^2+(a-3)x+6\}$

이때 방정식이 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 $x=-2$를 근으로 가질 때

$4-2(a-3)+6=0$

$\therefore\ a=8$

다음 페이지 계속

(ii) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 중근을 가질 때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-24=0$

$a^2-6a-15=0$

$\therefore\ a=3\pm\sqrt{24}=3\pm2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$8+(3-2\sqrt{6})+(3+2\sqrt{6})=14$

[3차 방정식]

3.내신 킬러 문항

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식
$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) x에 대한 삼차방정식 $P(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 곱은 5이다.
(나) x에 대한 삼차방정식 $P(3x-1)=0$은 한 근 0과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 합은 2이다.

$a+b+c$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]

$f(x)=0$의 근 $\alpha \leftrightarrow f(ax+b)=0$의 근은

$ax+b=\alpha \leftrightarrow x=\dfrac{\alpha-b}{a}$

삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은

$\dfrac{\alpha+1}{3}$, $\dfrac{\beta+1}{3}$, $\dfrac{\gamma+1}{3}$

조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma=5$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{\alpha+1}{3}=0$이고, $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

$\quad =x^3-3x^2+x+5$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=5$이므로

$a+b+c=3$

[3차 방정식]

4.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3-x^2-kx+k=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. α, β 중 실수는 하나뿐이고 $\alpha^2=-2\beta$일 때, $\beta^2+\gamma^2$의 값은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 인수분해를 해본다.
2. 실수는 하나뿐임을 분석해 본다.

삼차방정식의 근에 대한 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

$x^3 - x^2 - kx + k = 0$에서

$x^2(x-1) - k(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2 - k) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x^2 = k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k > 0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k < 0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x = 1$뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha = 1$ 또는 $\beta = 1$

(i) $\alpha = 1$일 때

$\alpha^2 = -2\beta$에서 $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}$ 이므로

α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

다음 페이지 계속

(ii) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

[3차 방정식]

5.내신 킬러 문항

방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, 실수 p, q의 곱은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 두근이 허근임을 확인한다.
2.α와 α^2은 서로 켤레 복소수 관계

(ⅰ) 한 허근을 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\alpha^2=a-bi$ ($\because$ 계수가 실수인 방정식)

$\therefore (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$

$a^2-b^2=a \cdots\cdots\cdots$ ①

$2ab=-b \cdots\cdots\cdots$ ②

①, ② 에서 $b\neq0$ 이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

[3차 방정식]

6.내신 킬러 문항

서로 다른 세 수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오.

(가) $a^3-4a^2-2a+10=a^2+b^2+c^2$
(나) $b^3-4b^2-2b+10=a^2+b^2+c^2$
(다) $c^3-4c^2-2c+10=a^2+b^2+c^2$

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 동일한 꼴을 확인한다.
2. 삼차방정식을 찾는다.
3. 근이 a ,b ,c 임을 확인한다.

조건 (가), (나), (다)에서

$$a^3-4a^2-2a+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$b^3-4b^2-2b+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$c^3-4c^2-2c+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$$x^3-4x^2-2x+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

의 세 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=-2$,

$abc=a^2+b^2+c^2-10$

$$\begin{aligned}\therefore\ abc&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-10\\&=16-2\cdot(-2)-10\\&=16+4-10\\&=10\end{aligned}$$

10

[3차 방정식]

7.내신 킬러 문항

x에 대한 삼차식

$$f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

ㄴ. $a<b<0$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근의 합이 7이 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
ㄴ. 존재성임을 확인한다.

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$이므로
인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
(참)

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$이므로
조립제법에 의하여

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\ & & 1 & 2a & b^2 \\ \hline & 1 & 2a & b^2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$
이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

이때 $a<b<0$이면 $a-b<0$, $a+b<0$이므로
$D>0$이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은
항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
한편, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을
가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을
근으로 가져야 하고 $1+2a+b^2=0$이어야 한다.

다음 페이지 계속

예를 들어 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$ 이면

$a<b<0$이고 $1+2a+b^2=0$이며,

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른

두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의

합이 $-2a$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른

실근의 합은 $1+(-2a)=7$에서 $a=-3$

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$이어야 하므로 $b^2<a^2=9$

또, $x=1$이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이

아니어야 하므로 $1+2a+b^2\neq 0$, 즉 $b^2\neq 5$

그러므로 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$,

$(-3, 2)$, 그 개수는 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[3차 방정식]

8.내신 킬러 문항

x에 대한 삼차방정식

$(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$이 서로 다른 세 실근 1, α, β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1이 근이 되는 경우를 따져 본다.

삼차방정식 이해하기

(ⅰ) 1이 x에 대한 방정식 $x-a=0$의 근일 경우
$a=1$이므로
주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$이고
방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식
$D=4-16=-12<0$
따라서 방정식 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$은
서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

(ⅱ) 1이 x에 대한 방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 경우
$1+(1-3a)+4=0$에서 $a=2$이므로
주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$
방정식 $x^2-5x+4=0$이 두 실근 1, 4를
가지므로 방정식 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$은
서로 다른 세 실근 1, 2, 4를 갖는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$\alpha=2$, $\beta=4$ (또는 $\alpha=4$, $\beta=2$)이므로
$\alpha\beta=8$

[4차 방정식]

9.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식

$x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$이 실근과 허근을 모두 가질 때, 이 사차방정식에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

<보기>

ㄱ. $a=1$이면 모든 실근의 곱은 -3이다.

ㄴ. 모든 실근의 곱이 -4이면 모든 허근의 곱은 3이다.

ㄷ. 정수인 근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 -1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이)

풀 이

1. 인수분해를 해본다. $x^2 = a - 5$, $x^2 = a + 2$
2. 실근과 허근 가질 조건을 생각해 본다.
3. $a - 5$: 허근, $x^2 = a + 2$: 실근 조건을 확인

인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 추론한다.

ㄱ. $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$에서

$a = 1$이면 $x^4 + x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i) = 0$

$x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$ 또는 $x = -2i$ 또는 $x = 2i$

이때 실근은 $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$ 이므로

모든 실근의 곱은 $(-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -3$이다. (참)

ㄴ. $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$에서

$x^4 + (3-2a)x^2 + (a-5)(a+2) = 0$

$(x^2 - a + 5)(x^2 - a - 2) = 0$

$\therefore\ x^2 = a - 5$ 또는 $x^2 = a + 2$

$x^2 = a - 5$에서 $a - 5 \geq 0$이면 실근을 갖고

$a - 5 < 0$이면 허근을 갖는다.

$x^2 = a + 2$에서 $a + 2 \geq 0$이면 실근을 갖고

$a + 2 < 0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^4 + (3-2a)x^2 + a^2 - 3a - 10 = 0$이

실근과 허근을 모두 가지므로

다음 페이지 계속

$a+2 \geq 0$, $a-5<0$에서 $-2 \leq a<5$

$-2<a<5$일 때 방정식의 실근은

$x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$ 이고,

$a=-2$일 때 $x=0$

또, $-2 \leq a<5$일 때 방정식의 허근은

$x=-\sqrt{5-a}i$ 또는 $x=\sqrt{5-a}i$이다.

이때 모든 실근의 곱이 -4이려면

$(-\sqrt{a+2}) \cdot \sqrt{a+2}=-4$, $a+2=4$

$a=2$이므로 방정식의 허근은

$x=-\sqrt{3}i$ 또는 $x=\sqrt{3}i$이다.

따라서 모든 허근의 곱은 $(-\sqrt{3}i) \cdot \sqrt{3}i=3$이다.

(참)

ㄷ. ㄴ에서 $-2 \leq a<5$이고

$0 \leq \sqrt{a+2}<\sqrt{7}$ 이므로 방정식이 가질 수 있는

정수인 근은 $\sqrt{a+2}$ 의 값이 0, 1, 2일 때이다.

즉, $\sqrt{a+2}=0$일 때, $a=-2$

$\sqrt{a+2}=1$일 때, $a=-1$

$\sqrt{a+2}=2$일 때, $a=2$

따라서 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값이

-2, -1, 2이므로 그 합은

$(-2)+(-1)+2=-1$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

DRE-EDU.com

[4차 방정식]

10.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식
$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$의
서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 a의
값의 곱을 구하시오.

풀이)

풀 이

1.조립제법으로 인수분해 한다.
2. 인수분해된 이차방정식이
①실근 1인 경우 ② 중근이 경우를 생각해 본다.

사차방정식을 활용하여 문제 해결하기

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$에서

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$이므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=0$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$0^2+2a\cdot0+a+2=0$

$\therefore a=-2$

따라서 사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1$, $x=0$ (중근), $x=4$

(ii) $x=-1$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=-1$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$(-1)^2+2a\cdot(-1)+a+2=0$

$\therefore a=3$

따라서 사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-5$, $x=-1$ (중근), $x=0$

다음 페이지 계속

(iii) 사차방정식이 $x \neq 0$이고 $x \neq -1$인 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a)^2-4(a+2)=0$

$\therefore$ $a=-1$ 또는 $a=2$

(a) $a=-1$ 인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1$, $x=0$, $x=1$ (중근)

(b) $a=2$인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-2$ (중근), $x=-1$, $x=0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 a는

-2, -1, 2, 3

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 12이다.

[4차 방정식]

11.내신 킬러 문항

x에 대한 사차방정식 $x^4-9x^2+k-10=0$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

풀이)

풀 이

1.짝수인 복이차 $x^2 = t > 0$ 로 치환
2. 이차방정식이 양근, 양근 가질 조건을 따진다.
3. 두 근의 합≥ 0, 두 근의 곱≥ 0 , D≥ 0

사차방정식 해의 성질을 활용하여 문제해결하기

$x^2 = t\ (t \geq 0)$라 하면 주어진 사차방정식은

$t^2 - 9t + k - 10 = 0$이므로 t에 대한 이차방정식이다.

즉, 방정식 $t^2 - 9t + k - 10 = 0$의

두 실근이 0 이상이어야 한다.

따라서 판별식을 D라 하면

$D \geq 0$, (두 근의 합) ≥ 0, (두 근의 곱) ≥ 0이어야 한다.

$D = 9^2 - 4(k - 10) \geq 0$이므로

$k \leq \dfrac{121}{4}$ $\cdots$ ㉠

(두 근의 합) $= 9 \geq 0$이므로

k의 값에 관계없이 성립한다. $\cdots$ ㉡

두 근의 곱 $k - 10 \geq 0$이므로

$k \geq 10$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $10 \leq k \leq \dfrac{121}{4}$ 이므로

모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k는

10, 11, $\cdots$, 30이므로 k의 개수는 21이다.

[4차 방정식]

12.내신 킬러 문항

$a > b > 1$인 두 자연수 a, b에 대하여 사차방정식

$$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

의 네 근의 곱이 25일 때, $a^3 + b^3$의 값을 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \mathrm{d}x^4 + \mathrm{e} = 0$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

사차방정식 $x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a^2-b^2)^2 = 0$에서
$x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a+b)^2(a-b)^2 = 0$
$\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\} = 0$
$\therefore x = \pm(a+b)$ 또는 $x = \pm(a-b)$
이때 네 근의 곱이 25이므로
$(a+b)^2(a-b)^2 = 25$
a, b는 자연수이므로
$(a+b)^2 = 25 \quad \cdots ㉠$
$(a-b)^2 = 1 \quad \cdots ㉡$
㉠−㉡을 하면 $4ab = 24$이므로
$ab = 6$
a, b는 $a > b > 1$인 두 자연수이므로
$a = 3$, $b = 2$
$\therefore a^3 + b^3 = 3^3 + 2^3 = 35$

[4차 방정식]

13.내신 킬러 문항

사차방정식 $x^4-3x-1=0$의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, ${x_1}^4+{x_2}^4+{x_3}^4+{x_4}^4$의 값을 구하면?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 근을 대입해서 4차식을 일차식으로
(2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^4 + e = 0$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$$

$x^4 = 3x + 1$이므로

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$
$$= 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4$$
$$x^4 - 3x - 1$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$
$$= x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4$$

x^3의 계수를 비교하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$\therefore x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4$$

DRE-EDU.com

[4차 방정식]

14.내신 킬러 문항

삼차다항식 $f(x)$가 1부터 5까지의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{6}{n^2+2}$을 만족한다. 삼차다항식 $f(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 1일 때, $f(-1)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) $(n^2+2)\mathrm{f}(n)-6=0$ 5차 방정식
(2) 5차 방정식의 근은 1~5
(3) $(n^2+2)\mathrm{f(n)}-6=\mathrm{a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$

삼차다항식 $f(x)$는 1부터 5까지의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{6}{n^2+2}$, 즉 $(n^2+2)f(n)-6=0$을 만족시킨다.

이대 $g(x)=(n^2+2)f(n)-6$이라하면 $g(x)$는 오차식이고

$g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=g(5)=0$이므로

인수정리에 의하여 0이 아닌 상수 a에 대하여

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

$$\therefore (x^2+2)f(x)-6$$
$$=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \qquad \cdots ㉠$$

이때 ㉠의 양변에 $x=6$을 대입하면 $f(6)=1$이므로

$38f(6)-6=a\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$32=a\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$$\therefore a=\frac{4}{15}$$

다음 페이지 계속

따라서 ㉠에서

$(x^2+2)f(x)$

$=\frac{4}{15}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+6$

이때 이 식에 $x=-1$을 대입하면

$3f(-1)$

$=\frac{4}{15}(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)+6$

$\therefore f(-1)=-62$

[고차 방정식]

15.내신 킬러 문항

방정식 $x^{11}=1$의 10개의 허근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 인수분해 하기
(2) 10차 방정식의 근을 이용하여 방정식 구하기
(3) $x^{10}+x^9+\cdots x\quad+1=$
$=(\mathrm{x}-\alpha_1)(\mathrm{x}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{x}-\alpha_{10})$
(4) 양변에 $\mathrm{x}=-1$ 대입

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$이므로
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$은
방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1$의 10개의 근이다.
따라서
$$x^{10}+x^9+\cdots+x+1$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$$
위 식에 $x=-1$을 대입하면
$$1-1+1-\cdots-1+1$$
$$=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$$
$$=-(1+\alpha_1)\times-(1+\alpha_2)\cdots\times-(1+\alpha_{10})$$
$$\therefore\ (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$$

[고차 방정식]

16.내신 킬러 문항

α, β를 $x^2+x+1=0$의 두 근이라 하고

$\mathrm{P}(n)=\alpha^n+\beta^n$라 할 때,

$\mathrm{P}(3n)+\mathrm{P}(n)+\mathrm{P}(n-1)+\mathrm{P}(n-2)$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) $\omega^3 = 1$,　　연속된 3항의 합 $= 0$

$x^2 + x + 1 = 0$,

$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \longrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \alpha^3 = 1,\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

따라서 $n \geq 2$인 모든 정수에 대해

$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$이고,

β에 대해서도 마찬가지이다.

$\mathrm{P}(3n) + \mathrm{P}(n) + \mathrm{P}(n-1) + \mathrm{P}(n-2)$

$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$

$+ (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$

$= (1+1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$

$+ (\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$

$= 2 + 0 + 0 = 2$

[고차 방정식]

17.내신 킬러 문항

양의 실수 a, b, c에 대하여
$a^3+b^3+c^3=3abc$이다.
방정식 $ax^2+bx+c=0$을 만족시키는 x에 대하여
$x^{2019}+x^{1207}+x^{140}+2019$의 값을 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 식 변형하면 쉽게 접근할 수 있다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \quad \cdots ㉠$

$a+b+c \neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $a+b+c$로 나누면

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

그런데 a, b, c는 양의 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

즉,

$ax^2+bx+c=ax^2+ax+a$

$\qquad\qquad\quad =a(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^2+x+1=0$ ($\because a>0$)

위의 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$x^3=1$

$\therefore\ x^{2019}+x^{1207}+x^{140}+2019$

$=(x^3)^{673}+x(x^3)^{402}+x^2(x^3)^{46}+2019$

$=(x^2+x+1)+2019$

$=2019\ (\because\ x^2+x+1=0)$

(ⅱ) α, α^2을 두 근으로 하는 이차방정식은 x^2+x $+1=0$

한 실근을 β라고 할 때, 세 근의 합은

$\beta+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2 \therefore \beta=-1$

$\therefore x^3+2x^2+px+q$

$=(x^2+x+1)(x+1)$

$=x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore p=2,\ q=1$

$\therefore pq=2$

②

[삼차방정식 - ω]

18.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$의 한 허근을 w라 할 때, $\{w(\overline{w}-1)\}^n=256$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

풀이)

풀 이

인수를 찾아 인수분해를 해 본다.

삼차방정식을 이용하여 추론하기

삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$에서

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$

이때 $w\neq 1$이므로 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의

두 허근이 w, $\overline{w}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$w+\overline{w}=2$, $w\overline{w}=2$에서

$w\overline{w}-w=\overline{w}$

$\therefore\ \{w(\overline{w}-1)\}^n=(w\overline{w}-w)^n=\overline{w}^n$

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근은

$1+i$, $1-i$

따라서 $w=1+i$, $\overline{w}=1-i$일 때

$\overline{w}^2=-2i$, $\overline{w}^4=-4$에서

$\overline{w}^{16}=256$

마찬가지로 $w=1-i$, $\overline{w}=1+i$일 때도

$\overline{w}^{16}=256$

$\therefore\ n=16$

[삼차방정식 - ω]

19.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고,

양의 정수 n 에 대하여 $f(n) = \dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$ 이라 정의할 때,

$f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(13)$ 의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 규칙을 찾아 본다.

삼차방정식 이해하기

$x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이다.

$$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$$=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)$$

$$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=-1$$

$$=f(5)=f(8)=f(11)$$

$$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$=f(6)=f(9)=f(12)$$

$\therefore\ f(1)-f(2)+\cdots-f(6)=0$

$\therefore$ (준식)$=f(13)=-1$

[삼차방정식 - ω]

20.내신 킬러 문항

방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때,

$(\omega^2+1)^n=-\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n$을 만족시키는 100 이하의

자연수 n의 개수를 구하시오.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) ω에 관한 문제
(2) 규칙을 찾아 본다.
(3) n이 홀수 조건을 찾아 본다.

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉

$(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고,

ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 한 근이다.

$\therefore\ \omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$(\omega^2+1)^n=-\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n$에서

$(\omega^2+1)^n=\omega^n$,

$\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{\omega-1}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\omega-1}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)^n=\dfrac{1}{\omega^{2n}}$ 이므로

$\omega^n=-\dfrac{1}{\omega^{2n}}$

양변에 ω^{2n}을 곱하면

$\omega^{3n}=-1$, 즉 $(-1)^n=-1$

따라서 자연수 n은 홀수이어야 하므로 조건을

만족시키는 자연수 n은 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 99$의 50개이다.

[삼차방정식 - ω]

21.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하고,

양의 정수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$ 이라 정의할 때,

$f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\cdots+f(13)$의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

풀 이

[핵심포인트!]
(1) $\omega^3 = 1$
(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
(3) 연속된 3항의 합 = 0

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$
한 허근이 ω이므로 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
ㄱ. $\omega^7 = (\omega^3)^2 \times \omega = \omega$
ㄴ. $\overline{\omega}$도 $x^2 + x + 1 = 0$의 허근이므로 $\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} - \frac{\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}}$$
$$= \frac{-1-\omega^2}{1+\omega^2} - \frac{-1-\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}}$$
$$= -1 - (-1) = 0$$

ㄷ. $\omega + \omega^3 + \omega^5 + \omega^7 + \cdots + \omega^{99}$
$$= \omega + \omega^3 + \omega^3 \times \omega^2 + (\omega^3)^2 \times \omega + (\omega^3)^3 + (\omega^3)^3 \times \omega^2 + \cdots + (\omega^3)^{32} \times \omega + (\omega^3)^{33}$$
$$= (\omega + 1 + \omega^2) + (\omega + 1 + \omega^2) + \cdots + \omega + 1$$
$$= \omega + 1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

[삼차방정식 - ω]

22.내신 킬러 문항

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)=-4 \\ x^2+y^2+xy=4 \end{cases}$ 를

만족시키는 x, y를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 구하시오.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 합과 곱을 치환한다.
(2) 치환한 이차 방정식을 푼다.

$\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)=-4 \\ x^2+y^2+xy=4 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} (x+y)^2+xy-4(x+y)=-4 \\ (x+y)^2-xy=4 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+v-4u=-4 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-4$ $\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2+u^2-4-4u=-4$, $2u^2-4u=0$

$u^2-2u=0$, $u(u-2)=0$ $\therefore$ $u=0$ 또는 $u=2$

㉢에서 $u=0$일 때, $v=-4$, $u=2$일 때, $v=0$

다음 페이지 계속

(ⅰ) $u=0$, $v=-4$, 즉 $x+y=0$, $xy=-4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-2)=0$ $\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore x=-2$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=-2$

(ⅱ) $u=2$, $v=0$, 즉 $x+y=2$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-2t=0$의 두 근이므로

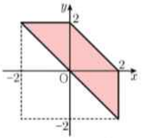
$t(t-2)=0$ $\qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

$\therefore x=0$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

따라서 네 점 $(-2,\ 2)$, $(2,\ -2)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$3\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=6$

DRE-EDU.com

[삼차방정식 - ω]

23.내신 킬러 문항

방정식 $xy+2x=y+6$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 일차식×일차식 = 상수꼴로 바꾼다

$xy+2x=y+6$에서
$xy+2x-y-6=0$, $(x-1)(y+2)=4$
이때 x, y는 정수이므로
(i) $x-1=-4$, $y+2=-1$일 때, $x=-3$, $y=-3$
(ii) $x-1=-2$, $y+2=-2$일 때, $x=-1$, $y=-4$
(iii) $x-1=-1$, $y+2=-4$일 때, $x=0$, $y=-6$
(iv) $x-1=1$, $y+2=4$일 때, $x=2$, $y=2$
(v) $x-1=2$, $y+2=2$일 때, $x=3$, $y=0$
(vi) $x-1=4$, $y+2=1$일 때, $x=5$, $y=-1$
(i)~(vi)에서 xy의 값은 9, 4, 0, -5이므로
xy의 최댓값은 9이다.

[부정방정식]

24.내신 킬러 문항

방정식 $(9x^2+4y^2-73)^2+(3x-2y+11)^2=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 제곱의 합 =0 이면 각 각 0이다.

주어진 식을 변형하면

$(2x-1)(y-2)=6$

이때 주어진 조건에서 x, y가 양의 정수이므로

$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고, $2x-1$은 양의 홀수이다.

따라서 $\begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$ 이므로

$\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

[부정방정식]

25.내신 킬러 문항

방정식 $x^2-4xy+5y^2+6y+9=0$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 완전제곱 꼴이 안되면 실수 조건을 이용하여 판별식을 이용한다.!

x, y 실수이므로 주어진 방정식이 실근을 가져야 한다. 즉 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2y)^2-(5y^2+6y+9)\geq 0$$

$$y^2+6y+9\leq 0,\ (y+3)^2\leq 0$$

이때 y도 실수이므로 $y=-3$

$y=-3$을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+12x+36=0,\quad (x+6)^2=0$$

$$\therefore x=-6$$

$$\therefore x+y=-9$$

DRE-EDU.com

[공통근]

26.내신 킬러 문항

다음 두 이차방정식 $x^2+2kx-(k-1)=0$, $2x^2+kx+k+2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, 상수 k의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
(1) 공통근을 대입하고 빼본다.!

공통근을 α라 하면

$$\begin{cases} 2\alpha^2+4k\alpha-2(k-1)=0 & \cdots ① \\ 2\alpha^2+k\alpha+k+2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①−②하면 $3k\alpha-3k=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 하나의 공통근을 갖지 않으므로 모순

즉, $k\neq0$이므로 $\alpha=1$

이를 ①에 대입하면 $2+4k-2k+2=0$

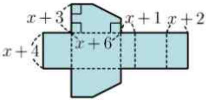
$\therefore\ 2k=-4$

$\therefore\ k=-2$

[삼차방정식의 활용]

27.내신 킬러 문항

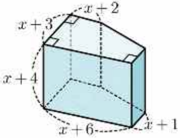
다음 그림과 같은 전개도의 점선을 따라 접어서 만든 오각기둥의 부피가 120일 때, x의 값을 구하시오.



풀 이

[핵심포인트!]
(1) 밑변을 사다리꼴 높이를 (x+4)로 접근한다.

주어진 전개도를 접어 오각기둥을 만들면 다음 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 120이므로

$$\left[(x+1)(x+6)+\frac{1}{2}\{(x+2)+(x+6)\}\times 2\right]\times(x+4)$$

$=120$

다음 페이지 계속

$(x^2+9x+14)(x+4)=120$

$\therefore x^3+13x^2+50x-64=0$

$f(x)=x^3+13x^2+50x-64$이라 하면

$f(1)=1+13+50-64=0$이므로 조립제법을

이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	13	50	-64
		1	14	64
	1	14	64	0

$f(x)=(x-1)(x^2+14x+64)$

즉, $(x-1)(x^2+14x+64)=0$에서

이차방정식 $x^2+14x+64=0$은 실근을 갖지 않으므로

$x=1$