실시일자	-	# 유형별 학습	이름
140문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 10~120p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

01 **정답** ④

해설 $b-1=3a-12$, 즉 $3a-b=11$

$a-b+2=3$, 즉 $a-b=1$

이 두 식을 연립하여 풀면, $a=5$, $b=4$

따라서 $a+b=5+4=9$

02 **정답** ①

해설 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 대각선의 중점이 서로 일치한다.

즉, $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치하므로

$\frac{a-3}{2}=\frac{2-2}{2}$, $\frac{4+b}{2}=\frac{4+2}{2}$

$a-3=0$, $4+b=6$

$\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$

03 **정답** ③

해설 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -4)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식과 같다.

두 점을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{6-0}=1$이므로

선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -1이다.

또한 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB의 중점 $(3,\ -1)$을 지나므로 수직이등분선의 방정식은

$y-(-1)=-1(x-3)$　　$\therefore y=-x+2$

04 **정답** ②

해설 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)=(1,\ 4)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$

$\therefore y=2x+2$

05 **정답** ⑤

해설 두 점 $(-2,\ 3)$, $(1,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{a-3}{1-(-2)}(x+2)$

$\therefore y=\frac{a-3}{3}x+\frac{2a+3}{3}$

이 직선이 점 $(0,\ 7)$을 지나므로

$7=\frac{2a+3}{3}$

$2a+3=21$

$\therefore a=9$

06 **정답** -4

해설 $ax-y+b=0$에서 $y=ax+b$

직선 $y=ax+b$의 기울기는 a이고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$a=\tan 45^\circ=1$

즉, 직선 $y=x+b$가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2=3+b$

$\therefore b=-5$

$\therefore a+b=-4$

07 **정답** ①

해설 x절편이 2, y절편이 5인 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$

이 직선이 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$\frac{4}{2}+\frac{a}{5}=1$, $\frac{a}{5}=-1$

$\therefore a=-5$

08 **정답** ④

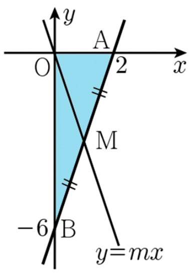
해설 세 점이 일직선 위에 있으면 기울기가 일치한다.

$\frac{2-4}{-1-1}=\frac{a-2}{4-(-1)}$

$\longrightarrow$　$\therefore a=7$

09 정답 ③

해설 직선 $\frac{x}{2}-\frac{y}{6}=1$은 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, -6)$을 지나므로 다음 그림의 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx$는 선분 AB의 중점 $M(1, -3)$을 지난다.



$\therefore m=-3$

10 정답 ②

해설 $x-2y+1=0$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

이 직선과 수직이므로 기울기는 -2

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+5$

11 정답 2

해설 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$x+2y+1=0 \quad \cdots ㉠$

$2x+y-1=0 \quad \cdots ㉡$

$y=ax-3 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡의 교점이 ㉢ 위에 있으면 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$

따라서 두 직선의 교점 $(1, -1)$이 직선 $y=ax-3$을 지나야 하므로

$-1=a-3$

$\therefore a=2$

12 정답 ②

해설 두 점 $A(-4, 3)$, $B(2, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-3}{2-(-4)}=-\frac{2}{3}$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

또한 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB의 중점 $(-1, 1)$을 지나므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{2}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{2}$ 이므로

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

13 정답 3

해설 두 직선 $2x-y-5=0$, $x+y-4=0$의 교점을 지나는 직선은 $(2x-y-5)+k(x+y-4)=0$으로 나타낼 수 있다.

이 직선이 $(1, 0)$을 지나므로

$(-3)+k(-3)=0 \qquad \therefore k=-1$

$(2x-y-5)+(-1)(x+y-4)=0$을 정리하면

$x-2y-1=0$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로

$a-b=1-(-2)=3$

14 정답 ①

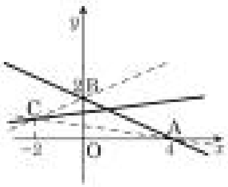
해설 $y=-\frac{1}{2}x+2\cdots㉠$

$y=kx+2k+1\cdots㉡$

㉡ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로

k 의 값에 관계없이 정점 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$ 을 지난다.



㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

$\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$보다 커야하고

$\frac{1}{2}$보다 작아야 제 1사분면에서 만난다.

$\therefore -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

15 정답 ⑤

해설 두 직선이 평행하므로 직선 $3x+y=8$ 위의 한 점 $(0,\ 8)$과 직선 $3x+y=k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이다.

즉 $\frac{|8-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$ 이므로 $|8-k|=10$

$8-k=\pm 10$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=18$

이때 k는 양수이므로 $k=18$

16 정답 14

해설 원 $(x-7)^2+(y+3)^2=1$의 중심의 좌표는 $(7,\ -3)$이므로 이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-7)^2+(y+3)^2=r^2$

이 원이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$r^2=9+36=45$

$\therefore (x-7)^2+(y+3)^2=45$

이 원이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$(a-7)^2+9=45,\ (a-7)^2=36,\ a-7=\pm 6$

$\therefore a=1$ 또는 $a=13$

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+13=14$

17 정답 ④

해설 원의 중심은 두 점 A, B의 중점이므로

$\left(\frac{1+(-3)}{2},\ \frac{5+(-1)}{2}\right)=(-1,\ 2)$이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

18 정답 26

해설 원 $(x-8)^2+(y+4)^2=9$의 중심을 $\mathrm{C}(8,\ -4)$, 반지름의 길이를 r라 하면

$r=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(8-3)^2+(-4-8)^2}=13$

따라서 선분 AP의 길이의 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=\overline{\mathrm{AC}}+r=13+3=16$

$m=\overline{\mathrm{AC}}-r=13-3=10$

$\therefore M+m=26$

19 정답 8

해설 $x^2+y^2-2x+6y-7+k=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=17-k$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{17-k}$ 이므로

$\sqrt{17-k}=3$

양변을 제곱하면

$17-k=9$

$\therefore k=8$

20 정답 ②

해설 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=10$이므로
$\angle ABC=90^\circ$ 이다.
따라서 원의 중심은 선분 AC의 중점이므로
$p=\dfrac{-6+2}{2}=-2$, $q=\dfrac{0+6}{2}=3$
$\therefore\ p^2+q^2=13$

21 정답 ③

해설 점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.
— 내분점은 $\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1},0\right)=(3,0)$
— 외분점은 $\left(\dfrac{2\times4-1\times1}{2-1},0\right)=(7,0)$
$\therefore$ 중심은 $(5,\ 0)$ 이고, 반지름은 2 인 원
— 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

22 정답 ③

해설 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$(x^2+y^2-8x+2y-5)+k(x^2+y^2+2x-4y+2)$
$=0\ (k\neq-1)$ $\quad\cdots$ ㉠
으로 놓으면 이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$3+2k=0$
$\therefore\ k=-\dfrac{3}{2}$
$k=-\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+y^2+22x-16y+16=0$
$\therefore\ (x+11)^2+(y-8)^2=169$
따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-11,\ 8)$이다.

23 정답 ①

해설 $x^2+y^2=1$에서 $x^2+y^2-1=0$
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$k\neq-1$인 실수 k에 대하여
$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$ $\cdots$ ㉠
이고
㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$(1+1-1)+k(1+1-2-2+1)=0$
$1-k=0$, $\quad\therefore\ k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면
$(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$
$\therefore\ x^2+y^2-x-y=0$
따라서 $A=-1$, $B=-1$, $C=0$이므로
$A+B+C=-2$

24 정답 ①

해설 원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,6)$ 을 지나므로
$6a+6b=9$ $\qquad\therefore a+b=\dfrac{3}{2}$
또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서
$9=\dfrac{9}{4}-2ab$ $\qquad\therefore ab=-\dfrac{27}{8}$

25 정답 3

해설 점 $(-4,\ 1)$을 x축의 방향으로 9만큼 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(5,\ -2)$
이 점이 직선 $y=ax-17$ 위에 있으므로
$-2=5a-17$
$\therefore\ a=3$

26 **정답** 5

해설 $3x+2y+k=0$에 x대신 $x+2$, y 대신 $y-5$를
대입하면
$3(x+2)+2(y-5)+k=0$
$\therefore 3x+2y-4+k=0$
이 직선이 점 $(-3, 4)$를 지나므로
$-9+8-4+k=0$
$\therefore k=5$

27 **정답** ③

해설 ㄱ. $x^2+y^2-2x=0$에서 $(x-1)^2+y^2=1$
따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.
ㄴ. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.
ㄷ. $x^2+y^2+4x-2y+2=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=3$
따라서 반지름의 길이가 다르므로 평행이동하여 겹쳐지지 않는다.
이상에서 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28 **정답** ①

해설 포물선 $y=x^2+2$를 x축의 방향으로 m만큼,
y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$y-n=(x-m)^2+2$
$\therefore y=x^2-2mx+m^2+2+n$
이 포물선의 방정식이 $y=x^2-4x+5$이므로
$-2m=-4$, $m^2+2+n=5$
따라서 $m=2$, $n=-1$이므로
$m+n=2+(-1)=1$

29 **정답** 2

해설 점 $(-4, 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(4, -1)$
이 점이 직선 $ax+3y-5=0$ 위에 있으므로
$4a-3-5=0$
$\therefore a=2$

30 **정답** ②

해설 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a, b)$
이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$(b, -a)$이다.
이때 점 $(b, -a)$가 제2사분면 위의 점이므로
$b<0$, $-a>0$
ㄱ. $a<0$, $b<0$이다. (거짓)
ㄴ. $a<0$, $b<0$이므로 $ab>0$이다. (참)
ㄷ. [반례] $a=-1$, $b=-2$이면
$\frac{b}{a}=2$, $a-b=1$이므로 점 $(2, 1)$은 제1사분면 위의 점이다. (거짓)

31 **정답** ④

해설 직선 $2x+y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한
직선 $-2x-y+a=0$이 점 $(4, -2)$를 지나므로
$-8+2+a=0$
$\therefore a=6$

32 **정답** ②

해설 점 $(-1, 2)$를 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow (1, -2)$
평행이동 $(x, y)\to(x+a, y+b)$에 의하여 이동
$\Rightarrow (1+a, -2+b)$
x축에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow (1+a, 2-b)=(-1, 2)$
$\therefore a+b=-2+0=-2$

33 **정답** ②

해설 직선 $7x+8y=9$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$7y+8x=9$
또 이 직선을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$7(y-2)+8(x+3)=9$
$\therefore 8x+7y=-1$

34 정답 ①

해설 두 점 $(a, 3)$, $(0, b)$의 중점은 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

이 점과 $(1, 1)$이 같으므로

$\frac{a}{2}=1$, $\frac{3+b}{2}=1$

$\therefore a=2, b=-1$

$\therefore a+b=1$

35 정답 $\frac{5}{2}$

해설 두 점 $(2, -3)$, $(-4, 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $(-1, 1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$위의 점이므로

$1=-a+b$ $\cdots$ ㉠

또, 두 점 $(2, -3)$, $(-4, 5)$를 지나는 직선이

직선 $y=ax+b$ 와 수직이므로

$\frac{5-(-3)}{-4-2}\cdot a=-1$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{7}{4}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

36 정답 ⑤

해설 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a-3)^2+3^2=(a-1)^2+(-1)^2$

$a^2-6a+18=a^2-2a+2$

$4a=16$

$\therefore a=4$

$\therefore \mathrm{P}(4, 0)$

또한, 점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(0, b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$(-3)^2+(b+3)^2=(-1)^2+(b-1)^2$

$b^2+6b+18=b^2-2b+2$

$8b=-16$

$\therefore b=-2$

$\therefore \mathrm{Q}(0, -2)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

37 정답 ③

해설 $y=x-1$ 위에 있는 점 P는 $(\alpha, \alpha-1)$로 나타낼 수 있다. $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha-1)^2+(\alpha-1)^2=(\alpha-3)^2+(\alpha-3)^2$

$\therefore \alpha=2$

$\therefore \mathrm{P}(2, 1)$

$\therefore a^2+b^2=5$

38 정답 5

해설 $\mathrm{P}(a, 0)$, $\mathrm{Q}(0, b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2$ $\cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2$ $\cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심을 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$\therefore -10x+25=0, -10y+25=0$

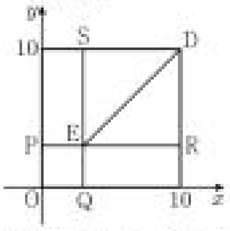
$\therefore x=y=\frac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore x+y=5$

39 정답 ②

해설 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축 위에 오도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면 다음 그림과 같다.



점 $E(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라고 하면

$\overline{EP}=a$, $\overline{EQ}=b$이고 $a+b=6$이므로

$$\begin{aligned}&\overline{ER}+\overline{ES}+\overline{ED}\\&=(10-a)+(10-b)+\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}\\&=20-(a+b)+\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}\\&=14+\sqrt{(10-a)^2+\{10-(6-a)\}^2}\\&=14+\sqrt{(10-a)^2+(a+4)^2}\\&=14+\sqrt{a^2-20a+100+a^2+8a+16}\\&=14+\sqrt{2a^2-12a+116}\\&=14+\sqrt{2(a-3)^2+98}\end{aligned}$$

이때 $0<a<10$이므로

$2(a-3)^2+98$은 $a=3$에서 최솟값 98을 가진다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{ER}+\overline{ES}+\overline{ED}&=14+\sqrt{2(a-3)^2+98}\\&\geq 14+\sqrt{98}\\&=14+7\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{ER}+\overline{ES}+\overline{ED}$의 최솟값은 $14+7\sqrt{2}$이다.

40 정답 ③

해설 점 C의 좌표는 $(c,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2\\&=2a^2+2b^2+2c^2\\&=2\boxed{(a^2+b^2+c^2)}\\&=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)\end{aligned}$$

41 정답 100

해설 점 M이 변 BC의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

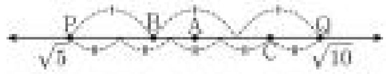
$16^2+12^2=2(\overline{AM}^2+10^2)$

$200=\overline{AM}^2+100$

$\therefore\ \overline{AM}^2=100$

42 정답 ③

해설 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 $1:2$로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 $4:1$로 내분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.

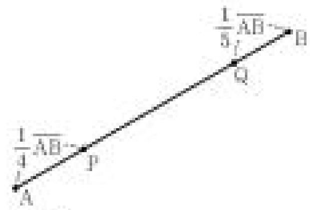
43 정답 ⑤

해설 점 P가 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{AP}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$

점 Q가 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{QB}=\dfrac{1}{5}\overline{AB}$



따라서

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\overline{AB}-(\overline{AP}+\overline{QB})\\&=\overline{AB}-\left(\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{1}{5}\overline{AB}\right)\\&=\frac{11}{20}\overline{AB}\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{11}{20}$$

44 정답 ③

해설 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3a}{1+3},\ \dfrac{9}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3a}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$

이 점이 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$\dfrac{3a}{4}=\dfrac{9}{4}$, $3a=9$

$\therefore\ a=3$

45 정답 3

해설 $\overline{PQ}$를 $k:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k\times6+1\times(-2)}{k+1}, \frac{k\times0+1\times8}{k+1}\right)$$

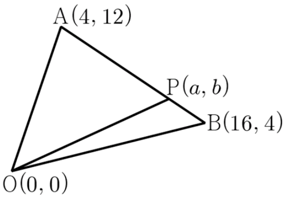
$$=\left(\frac{6k-2}{k+1}, \frac{8}{k+1}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x-6$ 위에 있으므로

$$\frac{8}{k+1}=2\times\frac{6k-2}{k+1}-6,\ k=3$$

46 정답 ④

해설 다음 그림에서 $\triangle OAP=3\triangle OBP$이려면
점 P는 두 점 A, B를 $3:1$로 내분하여야 한다.



따라서 $P\left(\frac{3\cdot16+1\cdot4}{3+1}, \frac{3\cdot4+1\cdot12}{3+1}\right)$

즉, $P(13, 6)$이므로

$a=13,\ b=6$

$\therefore\ a-b=7$

47 정답 ②

해설 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비는 $2:1$이므로

$\overline{BO}:\overline{OA}=2:1$

점 O는 선분 BA를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$0=\frac{a+10}{3}$에서 $a=-10$

또, $0=\frac{b+4}{3}$에서 $b=-4$

$\therefore\ a+b=(-10)+(-4)=-14$

48 정답 ②

해설 직선의 방정식을 활용한 추론하기

점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$

직선 AQ의 방정식은

$y=-(n+1)x+1$ … ㉠

직선 BP의 방정식은

$y=\boxed{-\frac{1}{n+1}}\cdot x+\frac{1}{n+1}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 점 R의 x좌표는 $\boxed{\frac{1}{n+2}}$이고

삼각형 POR의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\boxed{\frac{1}{n+2}}$이다.

두 삼각형 POR와 삼각형 QOR는 합동이고
사각형 POQR의 넓이는 삼각형 POR의 넓이의
2배이므로

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}=\frac{1}{42}$에서 $n=\boxed{5}$이다.

따라서 $f(n)=-\frac{1}{n+1}$, $g(n)=\frac{1}{n+2}$, $k=5$이므로

$\frac{g(5)}{f(5)}=-\frac{6}{7}$

49 정답 ②

해설 $\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로 점 C는 점 B의 방향으로 그은
선분 AB의 연장선 위에 있다.

$\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:1$

즉, 점 B는 선분 AC의 중점이므로 점 C의 좌표를
$C(a, b)$라 하면 중점은 $B(3, 5)$이므로

$B\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)=B(3, 5)$

$\frac{2+a}{2}=3,\ \frac{-1+b}{2}=5$

$\therefore\ a=4,\ b=11$

따라서 점 C의 좌표는 $C(4, 11)$이다.

50 정답 ①

해설 $\triangle ABC$의 무게중심은 $\triangle PQR$의 무게중심과 일치하게
되므로

$$\left(\frac{-1+3+1}{2}, \frac{a+3+6}{3}\right)=\left(b, \frac{10}{3}\right)$$

$b=1,\ \frac{a+9}{3}=\frac{10}{3}$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $ab=1$

51 정답 ①

해설 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표는

$\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{2+b}{2}$ $\quad\therefore\ b=a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}$이므로 $\overline{\text{AB}}^2=\overline{\text{BC}}^2$

$(2-a)^2+(4-1)^2=(5-2)^2+(1-4)^2$

$a^2-4a-5=0,\ (a+1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a\neq5)\ \rightarrow\ a=5$이면

A$(5,\ 1)$이므로 사각형 ABCD가 만들어지지 않는다.

$a=-1$을 ㉠을 대입하면 $b=2$

$\therefore\ a+b=1$

52 정답 ④

해설 두 삼각형 $\triangle$ABD, $\triangle$ACD의 넓이비는 $\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}$이고 각의 이등분선 정리에 의하여

$\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}$

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{\text{AC}}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \triangle\text{ABD}:\triangle\text{ACD}=10:5=2:1$

53 정답 ④

해설 구하는 점을 P$(x,\ y)$라 하면 $\overline{\text{PA}}^2-\overline{\text{PB}}^2=5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$ 정리하면

$-6x+4y=0$

$\therefore\ -3x+2y=0$

54 정답 -24

해설 $3x-2y+6=0$에서 $y=\dfrac{3}{2}x+3$

따라서 기울기가 $\dfrac{3}{2}$이고 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의

방정식은 $y-(-1)=\dfrac{3}{2}(x-2)$,

$y=\dfrac{3}{2}x-4$

$\therefore\ 3x-2y-8=0$

따라서 $a=3,\ b=-8$이므로

$ab=-24$

55 정답 12

해설 직선 CD의 기울기는 음수이므로

$\dfrac{q-p}{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}<0$에서

$q-p<0$

$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CD}}$에서 $4=\sqrt{(4\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2+(q-p)^2}$

$4^2=(2\sqrt{3})^2+(q-p)^2$

$4=(q-p)^2$

$q-p<0$에서 $q-p=-2$, 즉 $q=p-2$

$\overline{\text{AD}}\,/\!/\,\overline{\text{BC}}$에서 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같으므로

$\dfrac{q-1}{4\sqrt{3}-0}=\dfrac{p-5}{2\sqrt{3}-0}$

$q-1=2p-10$ $\quad\cdots$ ㉠

$q=p-2$를 ㉠에 대입하면

$p-3=2p-10$

$\therefore\ p=7$

따라서 $p=7,\ q=5$이므로

$p+q=12$

56 정답 -8

해설 x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 x절편을 $a\ (a\neq0)$이라 하면 y절편은 $-a$이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$ $\qquad\therefore\ y=x-a$

이 직선이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로

$5=-3-a$ $\qquad\therefore\ a=-8$

57 정답 ①

해설 주어진 식의 양변을 $3a$로 나누면

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{3}=1$

즉, x절편이 a, y절편이 3이므로 직선 $3x+ay=3a$와 x축, y축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot3=3$

$\therefore\ a=2$

58 정답 ①

해설 $b \neq 0$이므로 $ax-by+c=0$에서

$y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$이므로 a, b의 부호가 서로 다르므로

$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로 직선의 개형은 ①이다.

59 정답 16

해설 세 점 $\mathrm{A}(2,\ k-1)$, $\mathrm{B}(k+1,\ 6)$, $\mathrm{C}(6,\ 10)$이 일직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{10-(k-1)}{6-2}=\frac{10-6}{6-(k+1)}$

즉, $\frac{11-k}{4}=\frac{4}{5-k}$

$(11-k)(5-k)=16$, $k^2-16k+39=0$

$(k-3)(k-13)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=13$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$3+13=16$

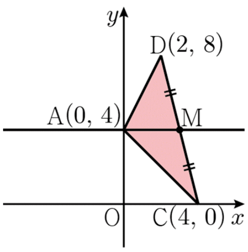
60 정답 ①

해설 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\mathrm{D}(2,\ 8)$

이때 점 A는 직선 l의 y절편이므로 $\mathrm{A}(0,\ 4)$

또, 점 C는 직선 m의 x절편이므로 $\mathrm{C}(4,\ 0)$

따라서 점 A를 지나면서 $\triangle\mathrm{ACD}$의 넓이를 이등분하는 직선 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 지난다.



이때 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{8+0}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 4)$

따라서 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{M}(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=4$이다.

61 정답 $\frac{7}{8}$

해설 두 직사각형의 각각의 대각선의 교점을 동시에 지나는 직선이 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\frac{-1-3}{2},\ \frac{-2-3}{2}\right)=\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$,

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)=(2,\ 2)$이므로

두 점 $\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+\frac{5}{2}=\frac{2-\left(-\frac{5}{2}\right)}{2-(-2)}(x+2)$

$\therefore y=\frac{9}{8}x-\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{9}{8}$ $b=-\frac{1}{4}$이므로

$a+b=\frac{7}{8}$

62 정답 3

해설 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ -2)$를 이은 선분의 중점이므로

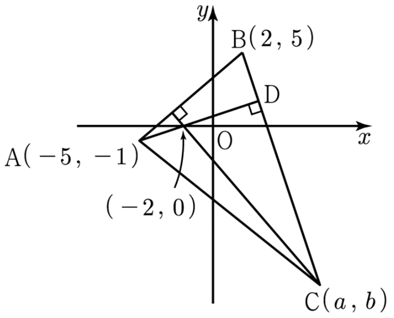
$\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

따라서 직선 $kx-5y-7=0$이 점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나야 하므로 $\frac{3}{2}k+\frac{5}{2}-7=0$

$\therefore k=3$

63 정답 11

해설



위 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 BC의 기울기는 $\frac{5-b}{2-a}$이고, 직선 AD의 기울기는 $\frac{0-(-1)}{-2-(-5)}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{5-b}{2-a}\times\frac{1}{3}=-1$, $5-b=3(a-2)$

$\therefore 3a+b=11$

64 정답 ②

해설 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y)k+(x+2y-4)=0$ $\cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 k에 대하여 성립해야 하므로

$2x-y=0$, $x+2y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{8}{5}$

따라서 점 P의 좌표는 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$이고, 직선 ㉠은 임의의 실수 k에 대하여 항상 점 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$을 지나므로

점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

65 정답 10

해설 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-y-5+k(-x-3y+15)=0$ (k는 실수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 이 직선이 점 $(-3, 12)$를 지나므로

$-9-12-5+k(3-36+15)=0$

$-26-18k=0$

$\therefore k=-\frac{13}{9}$

$k=-\frac{13}{9}$을 ㉠에 대입하면

$3x-y-5-\frac{13}{9}(-x-3y+15)=0$

$\therefore 4x+3y-24=0$

따라서 $A(6, 0)$, $B(0, 8)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(0-6)^2+(8-0)^2}=\sqrt{100}=10$

66 정답 ①

해설 $y=k(x+2)+2$, $k(x+2)+2-y=0$은

k에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$의 교점

즉, $(-2, 2)$를 지난다.

이 점을 C라 하면 선분 AB와 직선 l이 만나려면 그림에서 l의 기울기 k가

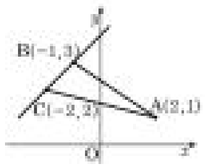
l_2의 기울기보다 작거나 같아야하고,

l_3의 기울기보다 크거나 같아야한다.

$\beta=(l_2$의 기울기$)=\frac{2-3}{-2-(-1)}=1$

$\alpha=(l_3$의 기울기$)=\frac{2-1}{-2-2}=-\frac{1}{4}$

$\therefore \alpha+\beta=1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$



67 정답 5

해설 $mx+y-m-6=0$ 에서

$m(x-1)+(y-6)=0$ $\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 6)$을 지난다.

$\mathrm{A}(1, 6)$이므로 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $(2, 1)$을 지나야 한다.

따라서 $m-5=0$이므로

$m=5$

68 정답 ①

해설 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(8, 4)$, $\mathrm{B}(7, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{0+8+7}{3}, \dfrac{0+4+a}{3}\right)$, 즉 $\left(5, \dfrac{4+a}{3}\right)$이므로

$b=\dfrac{4+a}{3}$ $\cdots$ ㉠

한편, 직선 OA의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$

점 $\mathrm{G}(5, b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$\dfrac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$|5-2b|=5$

$5-2b=5$ 또는 $5-2b=-5$

$\therefore b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$이다.

따라서 $b=5$, $a=11$ 이므로

$a+b=16$

69 정답 5

해설 점 $(3, -1)$와 직선 $kx+y-3k-4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$f(k)=\dfrac{|3k-1-3k-4|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{k^2+1}}$

$f(k)$는 $\sqrt{k^2+1}$ 의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$일 때 최대이므로 최댓값은

$f(0)=\dfrac{5}{\sqrt{1}}=5$

따라서 $a=0$, $b=5$이므로 $a+b=5$

70 정답 ⑤

해설 두 직선이 평행하므로

$\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{a-1}\neq\dfrac{-1}{-1}$에서 $a(a-1)=12$

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=4$

$a=4$이면 두 직선이 일치하므로

$a=-3$

즉, 두 직선의 방정식은

$3x-3y+1=0$, $4x-4y-1=0$

따라서 $3x-3y+1=0$ 위의 한 점 $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$과

직선 $4x-4y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|4\cdot 0-4\cdot\dfrac{1}{3}-1\right|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\dfrac{\left|-\dfrac{7}{3}\right|}{4\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{24}$

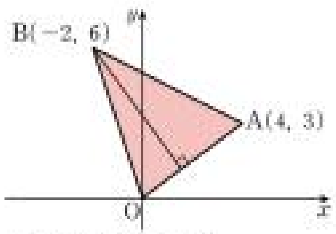
71 정답 ④

해설 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이고 직선 OA의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$이므로 점 $\mathrm{B}(-2, 6)$과

직선 OA 사이의 거리는

$\dfrac{|3\cdot(-2)-4\cdot 6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{30}{5}=6$



따라서 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$

72 정답 ⑤

해설 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+3y+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|3x+y+16|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$|x+3y+4|=|3x+y+16|$

$x+3y+4=\pm(3x+y+16)$

$\therefore x-y+6=0$ 또는 $x+y+5=0$

이 중 기울기가 양수인 것은 $x-y+6=0$이다.

73 정답 ①

해설 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2+(y+1)^2=(x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1$

$=x^2-8x+16+y^2-6y+9$

$4x+8y-20=0$

$\therefore\ x+2y-5=0$

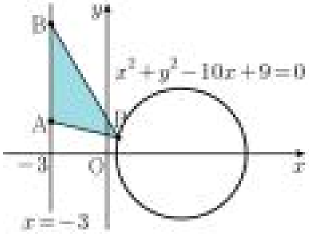
따라서 직선 $x+2y-5=0$과 점 $(2,\ -1)$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot 2+2\cdot(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

74 정답 48

해설 두 점 A, B는 직선 $x=-3$ 위에 있다.

따라서 삼각형 PAB에서 선분 AB를 밑변으로 하면 높이는 점 P에서 직선 $x=-3$까지의 거리가 된다.



밑변의 길이가 고정되어 있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이가 최대, 높이가 최소일 때 삼각형의 넓이가 최소가 된다.

따라서 점 P가 $(9,\ 0)$일 때 높이가 최대, $(1,\ 0)$일 때 높이가 최소이므로 삼각형의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\{9-(-3)\}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 12=36$

최솟값은

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\{1-(-3)\}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$36+12=48$

75 정답 ①

해설 두 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$, $\mathrm{B}(r,\ s)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$p^2+q^2=1$ $\cdots$ ㉠

$r^2+s^2=1$ $\cdots$ ㉡

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(r-p)^2+(s-q)^2=2-2\cdot(\boxed{pr+qs})=2$

이므로

$\boxed{pr+qs}=0$ $\cdots$ ㉢

㉢을 q에 대하여 정리하여 ㉠에 대입하면

$p^2+q^2=p^2\left(\boxed{1+\dfrac{r^2}{s^2}}\right)=1$이므로

$p^2=s^2$이 성립한다.

따라서 $p^2+r^2=q^2+s^2=1$이므로

두 점 $\mathrm{C}(p,\ r)$, $\mathrm{D}(q,\ s)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있다.

$\overline{\mathrm{CD}}^2=(q-p)^2+(s-r)^2=2-2(\boxed{pq+rs})$

㉢과 $p^2=s^2$에 의하여 $\boxed{pq+rs}=0$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$

76 정답 ③

해설 각 원의 넓이를 이등분하는 직선은 각 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$

이므로 중심은 $(0,\ 1)$

$3x^2+3y^2+x+5y=1$에서

$\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{19}{18}$

이므로 중심은 $\left(-\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{5}{6}\right)$

따라서 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(-\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{5}{6}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{-\dfrac{5}{6}-1}{-\dfrac{1}{6}-0}(x-0)$, $y-1=11x$

$\therefore\ 11x-y+1=0$

77 정답 ①

해설 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a-3)^2+(b-3)^2=(a+3)^2+(b-3)^2$에서

$-12a=0$

$\therefore\ a=0 \qquad \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b-7)^2$에서

$2a+b=7 \qquad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $b=7$

즉, 원의 중심은 $\mathrm{P}(0,\ 7)$이고, 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(0-3)^2+(7-3)^2}=5$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-7)^2=25$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0,\ 7)$이다.

ㄴ. $6^2+(8-7)^2=37\neq 25$이므로 주어진 원은 점 $(6,\ 8)$을 지나지 않는다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 넓이는 $\pi\cdot(5)^2=25\pi$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

78 정답 ③

해설 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 에 접하는

접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점은

원의 중심으로부터의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다.

따라서 점 P의 자취는 $6\sqrt{2}\,\pi$

79 정답 ③

해설 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$를 만족하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:\sqrt{x^2+(y-3)^2}=1:2$

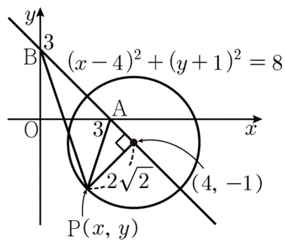
$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+(y-3)^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-8x+2y+9=0$

$\therefore\ (x-4)^2+(y+1)^2=8$



즉, 위 그림과 같이 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(4,\ -1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이고,

점 P가 직선 AB로부터 원의 반지름의 길이만큼 떨어져 있을 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되므로 구하는 삼각형 PAB의 최대 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=6$

80 정답 -6

해설 $x^2+y^2+8x+4ay+8-b=0$에서

$(x+4)^2+(y+2a)^2=4a^2+b+8$

이 원의 중심의 좌표가 $(-4,\ -2a)$이고

x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-4|=|-2a|=\sqrt{4a^2+b+8}$

$|-4|=|-2a|$에서 $a=2$ ($\because\ a>0$)

$|-4|=\sqrt{4a^2+b+8}$ 의 양변을 제곱하면

$16=4a^2+b+8$

$a=2$를 위의 식에 대입하면 $16=16+b+8$

$\therefore\ b=-8$

$\therefore\ a+b=2+(-8)=-6$

81 정답 3

해설 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+y-1-(x^2+y^2-x+ay+1)=0$

$\therefore\ (a+1)x+(1-a)y-2=0$

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$2(a+1)+3(1-a)-2=0$

$-a+3=0$

$\therefore\ a=3$

82 정답 ④

해설 두 원 $x^2+y^2-4=0$,

$x^2+y^2-8x-16y+12=0$의 두 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-8x-16y+12)=0$

$\therefore\ x+2y-2=0 \quad \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때, 두 원의 교점을 A, B라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로

$x^2+y^2=4$의 반지름의 길이

삼각형 AOH에서 피타고라스의 정리에 의하여

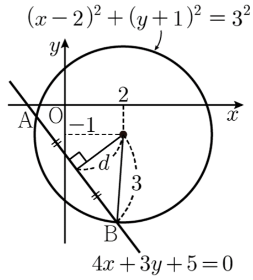
$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 두 교점 사이의 거리는 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$이다.

83 정답 ③

해설 원의 방정식 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$을 표준형으로 나타내면 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$이므로 중심이 $(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.



위의 그림과 같이 원의 중심에서 직선 $4x+3y+5=0$까지의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

따라서 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$

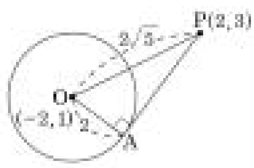
84 정답 ③

해설 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 을 표준형으로 고치면,

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}}$ 가 원 O 의 접선이므로

$\angle\mathrm{OAP}=90^\circ$ 이다.



점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$ 과 원의 중심 $\mathrm{O}(-2,\ 1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서 접선의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}\\&=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}\\&=\sqrt{16}=4\end{aligned}$$

85 정답 ③

해설 두 원 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$,
$(x-2)^2+(y-4)^2=4$의 중심을 각각
C, C′이라 하면 C$(2,\ -2)$, C′$(2,\ 4)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{CC'}}=6$
두 접점을 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{\mathrm{C'B}}$의 연장선에
내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{C'H}}=1+2=3$
따라서 구하는 공통내접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

86 정답 9

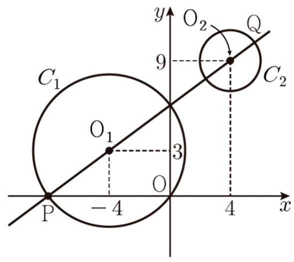
해설 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=16$
원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+14=0$
사이의 거리는
$\dfrac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$
원의 반지름의 길이가 4이므로
$M=5+4=9,\ m=5-4=1$
$\therefore\ Mm=9$

87 정답 5

해설 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(a,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$ax+3y=10$
이 접선이 점 $(b,\ 2)$를 지나므로
$ab+6=10 \qquad \therefore\ ab=4 \qquad \cdots ㉠$
또, 점 $(a,\ 3)$은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로
$a^2+9=10,\ a^2=1 \qquad \therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=4$
$\therefore\ a+b=5$

88 정답 17

해설 $(x+4)^2+(y-3)^2=25$가 나타내는 원을 C_1,
$(x-4)^2+(y-9)^2=4$가 나타내는 원을 C_2라 하고
두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.
다음 그림과 같이 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$가 원 C_1과 만나는 두 점 중
원 C_2와의 거리가 더 먼 점을 P, 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$가 원 C_2와
만나는 두 점 중 원 C_1과의 거리가 더 먼 점을 Q라 할 때,
선분 PQ의 길이는 최대가 된다.



이때 원 C_1의 중심은 $\mathrm{O}_1(-4,\ 3)$이고,
원 C_2의 중심은 $\mathrm{O}_2(4,\ 9)$이다.
$\therefore$ (선분 PQ의 최댓값)
$=\overline{\mathrm{PO_1}}+\overline{\mathrm{O_1O_2}}+\overline{\mathrm{O_2Q}}$
$=5+\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(9-3)^2}+2$
$=17$

89 정답 8

해설 점 A$(0,\ -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로
5만큼 평행이동한 점 B의 좌표는 $(0+a,\ -3+5)$,
즉 $(a,\ 2)$
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$OAB의
넓이가 12이므로
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}=12$
$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot |a|=12 \quad |a|=8$
$\therefore\ a=8\ (\because\ a>0)$

90 정답 ①

해설 점 $A(-5, 8)$이 점 $A'(4, 10)$으로 이동하였으므로
$\triangle A'B'C'$은 $\triangle ABC$를 x축의 방향으로 9만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이다.
두 점 $B(1, 1)$, $C(3, 4)$를 평행이동하면
$B'(10, 3)$, $C(12, 6)$
따라서 두 점 B', C'을 지나는 직선의 방정식은
$y-3=\dfrac{6-3}{12-10}(x-10)$, 즉 $3x-2y=24$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$a+b=1$

91 정답 13

해설 점 $(3, -2)$를 점 $(-1, a)$로 옮기는 평행이동에 의하여
좌표평면 위의 점은 x축의 방향으로 -4만큼,
y축의 방향으로 $a+2$만큼 옮겨진다.
$x^2+y^2-4x+10y+25=0$에서
$(x-2)^2+(y+5)^2=4$ ⋯ ㉠
$x^2+y^2+bx-4y+c=0$에서
$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y-2)^2=4-c+\dfrac{b^2}{4}$ ⋯ ㉡
㉠의 원의 중심 $(2, -5)$가 평행이동에 의하여
㉡의 원의 중심 $\left(-\dfrac{b}{2}, 2\right)$로 옮겨지므로
$a=5$, $b=4$
평행이동을 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로
$4=4-c+\dfrac{16}{4}$
$\therefore\ c=4$
따라서 $a+b+c=13$

92 정답 3

해설 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$에서
꼭짓점의 좌표는 $(2, a-4)$이고,
포물선 $y=x^2-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -1)$이므로
주어진 조건을 만족시키는 평행이동은
$(x, y) \to (x-2, y+3-a)$
이 평행이동에 의하여 직선 $3x-2y-3=0$이 옮겨지는
직선의 방정식은 $3(x+2)-2(y-3+a)-3=0$
$\therefore\ 3x-2y-2a+9=0$
이 직선이 $3x-2y+a=0$과 일치하므로 $-2a+9=a$
$\therefore\ a=3$

93 정답 ②

해설 $Q(a, -b)$, $R(-a, b)$, $S(-a, -b)$이므로
네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가
10이므로
$2|a|\cdot 2|b|=10$ $\therefore\ 2|ab|=5$

94 정답 ③

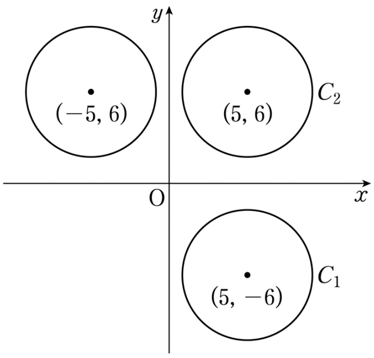
해설 직선 $y=3x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의
방정식은
$-y=3(-x)+k$
$\therefore\ 3x-y-k=0$
이 직선이 원 $x^2+y^2=5$에 접하므로
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의
길이 $\sqrt{5}$과 같다.
즉, $\dfrac{|-k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ 이므로
$|k|=5\sqrt{2}$
$\therefore\ k=5\sqrt{2}$ ($\because\ k>0$)

95 정답 ②

해설 직선 $x-y=7$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한
도형의 방정식은
$y-x=7$
$\therefore\ x-y+7=0$
이 직선이 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=k$에 접하므로
원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $x-y+7=0$ 사이의
거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{k}$와 같다. 즉,
$\dfrac{|-2-1+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$
$\sqrt{k}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ k=8$

96 정답 56

해설 도형의 대칭이동을 이해하여 원의 중심의 좌표를 구한다.
원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$은
$(x+5)^2+(y-6)^2=16$이므로
중심의 좌표는 $(-5, 6)$이다.
원 C_1의 중심의 좌표는 점 $(-5, 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5, -6)$이다.
원 C_2의 중심의 좌표는 점 $(5, -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5, 6)$이다.
$a=5$, $b=6$이므로
$10a+b=50+6=56$



97 정답 $\frac{2}{3}$

해설 포물선 $y=x^2-6ax+3$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$y=(-x)^2-6a(-x)+3$
$=x^2+6ax+3$
$=(x+3a)^2-9a^2+3$
이때 포물선의 꼭짓점 $(-3a, -9a^2+3)$이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로
$-9a^2+3=-3a+1$, $9a^2-3a-2=0$
$(3a-2)(3a+1)=0$
$\therefore a=\frac{2}{3}$ ($\because a>0$)

98 정답 ③

해설 점 $(-a, 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, a)$
이 점을 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(5, a+4)$
이 점이 점 $(5, b)$와 일치하므로
$a+4=b$
$\therefore b-a=4$

99 정답 5

해설 원 $(x-5)^2+(y-b)^2=7$을 x축 방향으로 -7만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+7-5)^2+(y-a-b)^2=7$
이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y+7-5)^2+(x-a-b)^2=7$
$\therefore (x-a-b)^2+(y+2)^2=7$
이 원의 중심 $(a+b, -2)$가 점 $(2, a+5b)$과 일치하므로
$a+b=2$, $-2=a+5b$
두 식을 연립하면 $\therefore a=3, b=-1$
$\therefore 2a+b=5$

100 정답 -2

해설 포물선 $y=x^2+2x+4$, 즉 $y=(x+1)^2+3$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 3)$
포물선 $y=-x^2+4x-12$, 즉 $y=-(x-2)^2-8$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -8)$
두 꼭짓점 $(-1, 3)$, $(2, -8)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로
$a=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3-8}{2}=-\frac{5}{2}$
$\therefore a+b=-2$

101 정답 ⑤

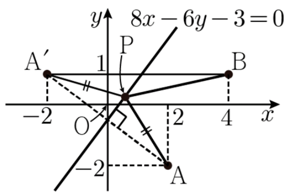
해설 점 B의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을
$B'(a, b)$라고 하면 $\overline{BB'}$의 중점은
직선 $x+y+1=0$위의 점이므로
$\frac{a+2}{2}+\frac{b+3}{2}+1=0$
$\therefore a+b+7=0 \cdots$ ㉠
또, $\overline{BB'} \perp$ (직선 $x+y+1=0$)이므로
$\frac{b-3}{a-2}=1$에서 $b=a+1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-4, b=-3$
$\therefore B'(-4, -3)$
$\therefore \overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'} \geq \overline{AB'}=13$

102 정답 $\frac{27}{4}$

해설 점 A를 직선 $8x-6y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하자.
두 점 $A(2, -2)$, $A'(a, b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$가 직선 $8x-6y-3=0$ 위의 점이므로
$8 \cdot \frac{a+2}{2}-6 \cdot \frac{b-2}{2}-3=0$
$\therefore 4a-3b=-11 \quad \cdots$ ㉠
두 점 $A(2, -2)$, $A'(a, b)$를 지나는 직선이
직선 $8x-6y-3=0$, 즉 $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}$과 수직이므로
$\frac{b+2}{a-2} \cdot \frac{4}{3}=-1$
$\therefore 3a+4b=-2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$
따라서 점 A'의 좌표는 $(-2, 1)$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AP}+\overline{PB} &= \overline{A'P}+\overline{PB} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(4+2)^2+(1-1)^2} \\ &= 6\end{aligned}$$

$\therefore k=6$



이때 직선 $A'B$의 방정식은
$y-1=\frac{1-1}{4+2}(x+2) \qquad \therefore y=1$
$y=1$을 $8x-6y-3=0$에 대입하면 $x=\frac{9}{8}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최소일 때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{8}, 1\right)$이므로
$s=\frac{9}{8}$, $t=1$
$\therefore kst=6 \cdot \frac{9}{8} \cdot 1=\frac{27}{4}$

103 정답 1

해설 $x^2-6=x$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

포물선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$가 만나는 두 점이 A, B이므로 $\mathrm{A}(-2,\ -2)$, $\mathrm{B}(3,\ 3)$이라 하자.

한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 포물선 $y=x^2-6$ 위의 점이므로

$b=a^2-6$

$\therefore \mathrm{P}(a,\ a^2-6)$

삼각형 APB가 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+2)^2+(a^2-4)^2=(a-3)^2+(a^2-9)^2$

$10a^2+10a-70=0$

$\therefore a^2+a-7=0$

이차방정식 $a^2+a-7=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-7)=29>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 -1이다.

$\therefore \alpha=-1,\ |\alpha|=1$

104 정답 ③

해설 좌표평면에서 물류 창고를 점 P라 하면 물류비는

$k\left(\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2\right)$ ($k>0$인 상수)라 할 수 있다.

이때 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

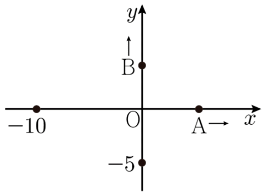
$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2\\&=\{(x-0)^2+(y-0)^2\}+\{(x-2)^2+(y-5)^2\}\\&\qquad+\{(x-3)^2+(y-6)^2\}\\&=x^2+y^2+x^2-4x+4+y^2-10y+25\\&\qquad+x^2-6x+9+y^2-12y+36\\&=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{76}{3}\end{aligned}$$

즉, $x=\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{11}{3}$일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$은 최솟값을 가진다.

따라서 물류비가 가장 적게 드는 물류 창고의 위치를 나타내는 좌표는 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$이다.

105 정답 ④

해설 O 지점을 원점으로 하여 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



A는 초속 $3\mathrm{m}$로 움직이므로 t초 동안 움직인 거리는 $3t(\mathrm{m})$

B는 초속 $4\mathrm{m}$로 움직이므로 t초 동안 움직인 거리는 $4t(\mathrm{m})$

A와 B의 처음 위치가 각각

$\mathrm{A}(-10,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -5)$이므로

A와 B가 출발한지 t초 후의 A와 B의 위치는

$\mathrm{A}(3t-10,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4t-5)$

이때 두 사람 A와 B 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{\{-(3t-10)\}^2+(4t-5)^2}\\&=\sqrt{9t^2-60t+100+16t^2-40t+25}\\&=\sqrt{25(t-2)^2+25}\end{aligned}$$

즉, $t=2$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 최소이므로

($\overline{\mathrm{AB}}$의 최솟값)$=\sqrt{25}=5$

따라서 두 사람이 가장 가까이 있을 때의 거리의 $5\mathrm{m}$이다.

106 정답 ④

해설 동서를 x축, 남북을 y축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -4)$이다.

이때 t시간 후의 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(6-4t,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -4+2t)$로 나타낼 수 있다.

따라서 t시간 후의 A, B 사이의 거리 s는

$$\begin{aligned}s&=\sqrt{\{0-(6-4t)\}^2+(-4+2t-0)^2}\\&=\sqrt{20t^2-64t+52}\\&=\sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

따라서 s는 $t=\dfrac{8}{5}$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 1.6시간 후에 A, B 사이의 거리가 가장 짧아진다.

107 정답 8

해설 $\mathrm{P}(0,\ a)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=5^2+(1-a)^2+(-3)^2+(7-a)^2$
$=2(a^2-8a+16-16)+84$
$=2(a-4)^2+52$

따라서 $a=4$일 때 주어진 식의 값이 최소이고 이때의 점 P의 좌표는 $(0,\ 4)$

즉, 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$는 직선 $3x-2y+k=0$ 위의 점이므로

$k-8=0$

$\therefore k=8$

108 정답 ③

해설 $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이

변 BC 와 만나는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{CP}}$ 가 성립한다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-6)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(4-2)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{CP}}=2:1$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 는 변 BC 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

$\therefore a=\dfrac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$,

$b=\dfrac{2\cdot4+1\cdot2}{2+1}=\dfrac{10}{3}$

$\therefore 3ab=3\cdot2\cdot\dfrac{10}{3}=20$

109 정답 ②

해설 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(8-3)^2+(-8-4)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$\angle$BAC 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 $\mathrm{D}(x, y)$ 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=5:13$

따라서, 점 $\mathrm{D}(x, y)$는 선분 BC 를 $5:13$ 으로 내분하는 점이므로

$x=\dfrac{5\cdot8+13\cdot0}{5+13}=\dfrac{20}{9}$,

$y=\dfrac{5\cdot(-8)+13\cdot0}{5+13}=-\dfrac{40}{18}=-\dfrac{20}{9}$

$\therefore \mathrm{D}\left(\dfrac{20}{9},-\dfrac{20}{9}\right)$

110 정답 4

해설 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $4x-y+7=0$, $ax+4y-5=0$이 평행하려면

$\dfrac{4}{a}=\dfrac{-1}{4}\neq\dfrac{7}{-5}$

$\therefore a=-16$

두 직선 $4x-y+7=0$, $x+by-9=0$이 평행하려면

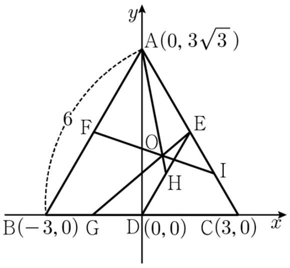
$\dfrac{4}{1}=\dfrac{-1}{b}\neq\dfrac{7}{-9}$

$\therefore b=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore ab=4$

111 정답 6561

해설 다음 그림과 같이 점 D를 원점, 직선 BC를 x축, 직선 AD를 y축으로 하여 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표는 $A(0, 3\sqrt{3})$, $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$이다.



두 점 E, F는 각각 두 변 CA, AB의 중점이므로

$E\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

세 점 G, H, I는 세 선분 BD, DE, CE의 중점이므로

$G\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $H\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $I\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

이때 직선 AH를 나타내는 방정식은

$y=\boxed{-3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}}$ $\cdots$ ㉠

직선 EG를 나타내는 방정식은

$y=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ $\cdots$ ㉡

직선 FI를 나타내는 방정식은

$y=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{5}x+\frac{6\sqrt{3}}{5}}$ $\cdots$ ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 구하면

$\frac{7\sqrt{3}}{2}x=\frac{9\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{9}{14}$

$x=\frac{9}{14}$를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{15\sqrt{3}}{14}$ 이므로

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $\left(\frac{9}{14}, \frac{15\sqrt{3}}{14}\right)$이고,

이 점은 직선 ㉢도 지난다.

따라서 세 직선 AH, EG, FI는 한 점 $O\left(\frac{9}{14}, \frac{15\sqrt{3}}{14}\right)$에서 만난다.

따라서 $f(x)=-3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$,

$g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $h(x)=-\frac{\sqrt{3}}{5}x+\frac{6\sqrt{3}}{5}$이고

$a=\frac{9}{14}$, $b=\frac{15\sqrt{3}}{14}$이므로

$392abf(0)g(0)h(0)$

$=392\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{15\sqrt{3}}{14}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{5}$

$=6561$

112 정답 $\frac{1}{2}$

해설 (ⅰ) 세 직선 중 어느 두 직선이 평행한 경우

세 직선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{3}$, 3, $-a$이므로

두 직선이 평행하려면

$a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=-3$

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

두 직선 $x+3y=5$, $3x-y=5$의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이다. 점 $(2, 1)$이 직선 $ax+y=0$ 위에 있어야 하므로 $2a+1=0$에서

$a=-\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 상수 a의 값의 곱은

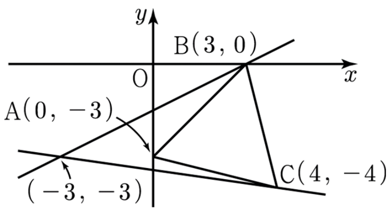
$\frac{1}{3}\cdot(-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

113 정답 $-\frac{7}{2}$

해설 $mx-y+3m-3=0$ 에서 $m(x+3)-(y+3)=0$

즉 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -3)$을 지나므로

이 직선이 $\overline{BC}$와 만날 때, 삼각형과 만난다.



(ⅰ) 점 B를 지날 때, $6m-3=0$, $m=\frac{1}{2}$

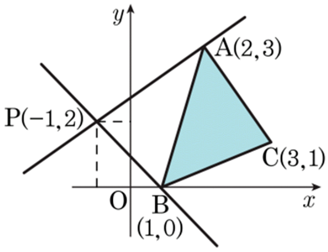
(ⅱ) 점 C를 지날 때, $7m+1=0$, $m=-\frac{1}{7}$

따라서 $-\frac{1}{7}\le m\le\frac{1}{2}$일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{p}{q}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{7}}=-\frac{7}{2}$

114 **정답** ③

해설 직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$,
$m(x+1)+y-2=0$ 이므로 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$를 지난다.



따라서 직선 $y=-mx-m+2$이 삼각형 ABC를 지나기 위한 기울기 $-m$의 범위는
(직선 PB의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA의 기울기)

직선 PB의 기울기 $=\dfrac{2-0}{-1-1}=-1$

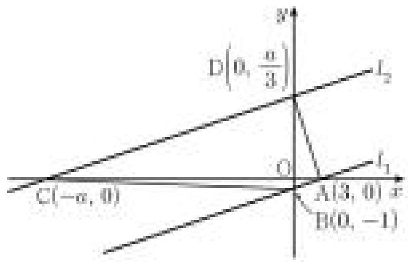
직선 PA의 기울기 $=\dfrac{2-3}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3} \le m \le 1$

115 **정답** 90

해설



두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하므로
$l_2 : x-3y+a=0\ (a>0)$
(사각형 ADCB의 넓이)
=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot(a+3)\cdot\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot(a+3)\cdot 1$

$=\dfrac{1}{2}(a+3)\left(\dfrac{a}{3}+1\right)$

$=\dfrac{a^2}{6}+a+\dfrac{3}{2}=150$

$a^2+6a-891=0$
$(a+33)(a-27)=0$
$\therefore\ a=-33$ 또는 $a=27$
이때 $a>0$이므로
$a=27$
두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$과 직선 $l_2 : x-3y+27=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\dfrac{|3+27|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=3\sqrt{10}$

$\therefore\ d^2=90$

116 정답 ③

해설 $\overline{AB}=\sqrt{(3+4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{58}$

두 점 A$(-4,\ 3)$, B$(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{0-3}{3+4}(x+4)$, $y=-\dfrac{3}{7}x+\dfrac{9}{7}$

$3x+7y-9=0$

점 C$(1,\ k)$와 직선 $3x+7y-9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+7k-9|}{\sqrt{3^2+7^2}}=\dfrac{|7k-6|}{\sqrt{58}}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 11이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{58}\cdot\dfrac{|7k-6|}{\sqrt{58}}=11$

$|7k-6|=22$

$7k-6=-22$ 또는 $7k-6=22$

$k=-\dfrac{16}{7}$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-\dfrac{16}{7}+4=\dfrac{12}{7}$

117 정답 5

해설 $x^2+y^2+6x-2y+4a^2-4a-14=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=-4a^2+4a+24$

이 방정식이 원을 나타내므로

$-4a^2+4a+24>0,\ a^2-a-6<0$

$(a-3)(a+2)<0$

$\therefore\ -2<a<3$

이때 원의 넓이가 최대가 되려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로

$-4a^2+4a+24=-4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+25$

따라서 $-2<a<3$에서 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 반지름의 길이는 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{25}=5$이다.

118 정답 4

해설 $x^2+y^2-10ax+6ay+32a^2+12a-34=0$에서

$(x-5a)^2+(y+3a)^2=2a^2-12a+34$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(5a,\ -3a)$이고 반지름의 길이는

$\sqrt{2a^2-12a+34}$ 이다.

반지름의 길이가 최소일 때 원의 넓이도 최소이다.

$2a^2-12a+34=2(a-3)^2+16$에서

$a=3$일 때, 반지름의 길이가 최소이므로

구하는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{16}=4$

119 정답 ②

해설 주어진 조건에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$ 이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$

$\therefore\ \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 로 놓으면

$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$

따라서 점 P는 중심이 $(3,\ 1)$ 이고

반지름의 길이가 2 인 원 위를 움직이므로

$\angle$PAB 가 최대가 되는 것은

그림과 같이 직선 AP 가 원에 접할 때이다.

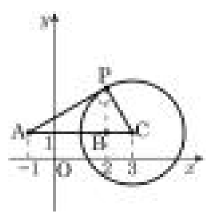
원의 중심을 C 라 하면

$\triangle$PAC 에서

$\angle$APC $=90^\circ$ 이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}$

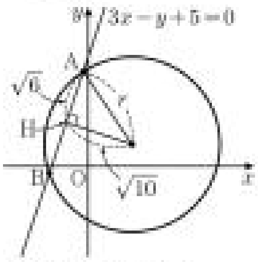
$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$



120 정답 ⑤

해설 원 $x^2+y^2-4x-2y+k=0$의 방정식을 변형하면
$(x-2)^2+(y-1)^2=5-k$
원의 중심을 C, 반지름을 r라 하면
C$(2,\ 1)$이고, $r^2=5-k$이다.
점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{AB}}=2\sqrt{6}$ 이므로
$\overline{\text{AH}}=\overline{\text{BH}}=\sqrt{6}$
점 C$(2,\ 1)$과 직선 $3x-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\text{CH}}=\frac{|3\cdot 2-1\cdot 1+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

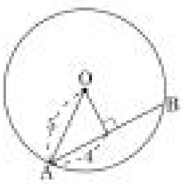


직각삼각형 CAH에서
$r^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{6})^2=10+6=16$
$r^2=5-k$이므로 $16=5-k$
$k=-11$

121 정답 ③

해설 $\begin{cases} y=x+k \cdots ㉠ \\ x^2+(y+3)^2=25 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면
$\overline{\text{AB}}=8$, $\overline{\text{OA}}=5$ 이므로
점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



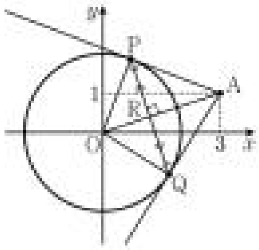
$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{1+1}}=3$, $k^2+6k-9=0$
k 값의 합 $\rightarrow -6$

122 정답 ②

해설 $\overline{\text{OP}}=3$, $\overline{\text{OA}}=1$이므로 직각삼각형 OAP에서
$\overline{\text{AP}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
따라서 사각형 OAPB의 넓이는
$2\cdot\triangle\text{OAP}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1\right)=2\sqrt{2}$

123 정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 원의 중심이 O$(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 2이므로
$\overline{\text{OP}}=2$, $\overline{\text{OA}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$



직각삼각형 OAP에서
$$\overline{\text{AP}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OP}}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$$
선분 OA와 선분 PQ의 교점을 R라 하면
$\overline{\text{OA}}\perp\overline{\text{PR}}$이므로
$\dfrac{1}{2}\overline{\text{AP}}\cdot\overline{\text{OP}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{OA}}\cdot\overline{\text{PR}}$
$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{\text{PR}}$
따라서 $\overline{\text{PR}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$이므로
$\overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{PR}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

124 정답 ③

해설 점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서 접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면.

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면. 두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

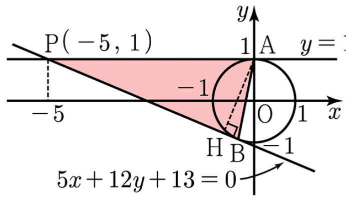
$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0$, $(a-7)(a+1)=0$

$\therefore a=7(\because a>0)$

125 정답 $\dfrac{125}{26}$

해설 점 P를 지나는 원 $x^2+y^2=1$의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x+5)+1$, 즉 $mx-y+5m+1=0$



원과 직선이 접하려면

$$\frac{|5m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |5m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $25m^2+10m+1=m^2+1$

$24m^2+10m=0$, $2m(12m+5)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\dfrac{5}{12}$

따라서 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $5x+12y+13=0$이다.

점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에서 직선 $5x+12y+13=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

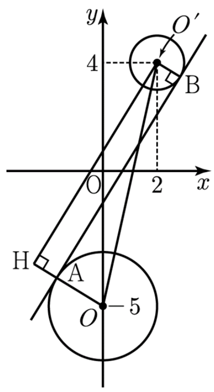
$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|12+13|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{25}{13}$$

이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}=5$이므로

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{ABP}&=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BP}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\\&=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{25}{13}\\&=\frac{125}{26}\end{aligned}$$

126 정답 ①

해설



두 원 $O: x^2+(y+5)^2=4$,

$O': (x-2)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심 O, O′의

좌표는 $\mathrm{O}(0,\ -5)$, $\mathrm{O}'(2,\ 4)$

$\therefore \overline{\mathrm{OO}'}=\sqrt{(4-(-5))^2+(0-2)^2}=\sqrt{85}$

점 O′에서 $\overline{\mathrm{OA}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=r+1$

직각삼각형 OHO′에서

$r+2=\sqrt{(\sqrt{85})^2-(2\sqrt{19})^2}=3$

$\therefore r=1$

127 정답 ⑤

해설 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$4x+2y=20$

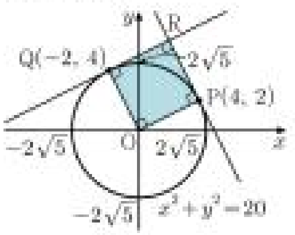
$\therefore 2x+y-10=0$ $\quad\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+4y=20$

$\therefore x-2y+10=0$ $\quad\cdots$ ㉡

이때 ㉠, ㉡에서 $2\cdot1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 접선은 서로 수직이다.



즉, 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$를 한 변으로 하는 정사각형이다.

따라서 구하는 넓이는

$2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=20$

128 정답 ③

해설 ㄱ. 직선 AC의 방정식은

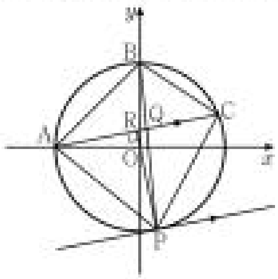
$y=\dfrac{0-5}{-13-12}\{x-(-13)\}$

$\therefore x-5y+13=0$

따라서 점 B와 직선 AC 사이의 거리는

$\dfrac{|0-5\cdot13+13|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\dfrac{|-52|}{\sqrt{26}}=2\sqrt{26}$ (참)

ㄴ. □PABC$=\triangle$ABC$+\triangle$PAC이므로 □PABC의 넓이는 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=169$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AC와 평행할 때 최대이다.



$\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$가 만나는 점을 Q, $\overline{\mathrm{AC}}$와 직선 PO가 만나는 점을 R이라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$이므로

$\triangle$PQR에서 $\angle\mathrm{PQR}<90^\circ$

따라서 직선 PB와 직선 AC는 수직이 아니다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-13-12)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{26}$이고

ㄱ에서 점 B와 직선 AC 사이의 거리가 $2\sqrt{26}$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot5\sqrt{26}\cdot2\sqrt{26}=130$

$\triangle$PAC의 넓이가 최대일 때,

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OR}}$

이때 $\overline{\mathrm{OR}}$은 원점 O와 직선 AC 사이의 거리이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=13+\dfrac{|0-5\cdot0+13|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=13+\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

이므로

$\triangle$PAC의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot5\sqrt{26}\cdot\left(13+\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)=\dfrac{130(1+\sqrt{26})}{4}$

따라서 □PABC의 넓이의 최댓값은

$130+\dfrac{130(1+\sqrt{26})}{4}=\dfrac{130(5+\sqrt{26})}{4}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

129 정답 80

해설 점 $P(-1, 21)$을 평행이동 $(x, y) \to \left(x+\frac{2}{3}, y\right)$에 의하여 m번 평행이동한 점 Q의 좌표는

$Q\left(-1+\frac{2}{3}m, 21\right)$

점 Q를 평행이동 $(x, y) \to \left(x, y-\frac{3}{4}\right)$에 의하여 n번 평행이동한 점 R의 좌표는

$R\left(-1+\frac{2}{3}m, 21-\frac{3}{4}n\right)$

이때 점 R의 좌표가 $R(31, -3)$이므로

$-1+\frac{2}{3}m=31, 21-\frac{3}{4}n=-3$

따라서 $m=48$, $n=32$ 이므로

$m+n=48+32=80$

130 정답 ③

해설 두 점 A′, B′은 각각 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, b)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이므로

$A'(a+m, -2)$, $B'(m, b-2)$

선분 A′B′을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(3, 2)$이므로

$\frac{2\cdot m+1\cdot(a+m)}{2+1}=m+\frac{a}{3}=3$ …… ㉠

$\frac{2\cdot(b-2)+1\cdot(-2)}{2+1}=\frac{2b-6}{3}=2$ …… ㉡

㉠에서 $m=3-\frac{a}{3}$

㉡에서 $b=6$

또, 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{6}=1$ …… ㉢

점 $A'(a+m, -2)$, 즉 $A'\left(3+\frac{2}{3}a, -2\right)$가 직선 ㉢ 위의 점이므로

$\frac{3+\frac{2}{3}a}{a}+\frac{-2}{6}=1$

$\frac{3}{a}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$, $\frac{3}{a}=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

따라서 $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, $B(0, 6)$이고

$m=3-\frac{a}{3}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$m\cdot\frac{3}{a}+b=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+6=7$

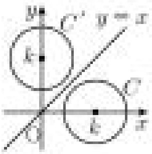
131 정답 ③

해설 원 $C:(x-k)^2+y^2=n$은 중심의 좌표가 $(k,\ 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{n}$ 인 원이고 두 원 $C,\ C'$이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
두 원 $C,\ C'$이 만나는 서로 다른 점의 개수 $f(n)$은 원 C와 직선 $y=x$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
원 C의 중심인 점 $(k,\ 0)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|k-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{2}}=\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$
이므로 $\sqrt{n}$과 $\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$의 대소관계에 따라 $f(n)$은 다음과 같다.

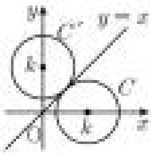
$\sqrt{n}<\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$, 즉 $n<\dfrac{k^2}{2}$일 때
원 C와 직선 $y=x$가 만나지 않으므로
$f(n)=0$

$\sqrt{n}=\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$, 즉 $n=\dfrac{k^2}{2}$일 때
원 C와 직선 $y=x$가 접하므로 $f(n)=1$

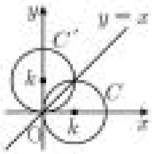
$\sqrt{n}>\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$, 즉 $n>\dfrac{k^2}{2}$일 때
원 C와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로
$f(n)=2$



[$\sqrt{n}<\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$일 때]



[$\sqrt{n}=\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$일 때]



[$\sqrt{n}>\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$일 때]

모든 자연수 n에 대하여
$f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$
이고 $f(n)\leq f(n+1)$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(21)=7$이려면
$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(17)=0$
$f(18)=1$
$f(19)=f(20)=f(21)=2$이어야 한다.
따라서 $f(18)=1$이므로
$\sqrt{18}=\dfrac{k}{2}\sqrt{2}$
$\therefore\ k=6$

132 정답 -5

해설 원 $(x-2a)^2+(y+5)^2=16$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x-2a)^2+(y+5)^2=16$
$\therefore\ (x+2a)^2+(y+5)^2=16$
이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y+2a)^2+(x+5)^2=16$
$\therefore\ (x+5)^2+(y+2a)^2=16$
이때 이 원의 넓이가 직선 $4x+3y-10=0$에 의하여 이등분되려면 이 직선이 원의 중심 $(-5,\ -2a)$를 지나야 하므로
$-20-6a-10=0,\ 6a=-30$
$\therefore\ a=-5$

133 정답 ①

해설 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $f(x-2,\ y+1)=0$
이 방정식이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면
$f(x-2,\ -y+1)=0$, 즉 $f(x-2,\ 1-y)=0$
따라서 방정식 $f(x-2,\ 1-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ①이다.

134 정답 ⑤

해설 그림 (가)의 도형이 y 축에 대해 대칭되고
x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 이동되었으므로
그림 (나)의 도형의 방정식은
$f(-x+1,\ y+2)=0$ 이 된다.

135 정답 ④

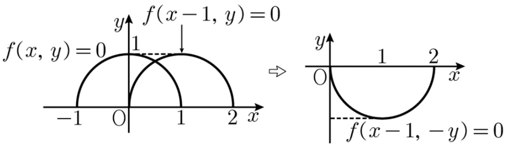
해설 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(x-1,\ y)=0$ $\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

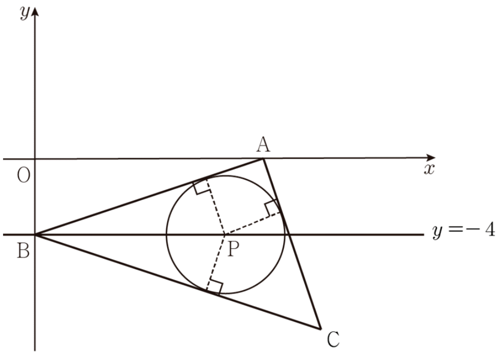
$f(x-1,\ -y)=0$ $\cdots$ ㉡

따라서 방정식 ㉡이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



136 정답 ③

해설



직선 AB를 l이라 하면 $l : y=\frac{1}{3}x-4$

직선 BC를 m이라 하면 $m : y=-\frac{1}{3}x-4$

직선 AC를 n이라 하면 $n : y=-3x+36$

따라서 직선 $y=-4$는 각 B의 이등분선이므로

삼각형 ABC의 내접원의 중심 P는 $y=-4$ 위의 점이다.

이때 $0<a<15$에 대하여 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ -4)$라 하자.

점 P와 직선 l 사이의 거리와 점 P와 직선 n 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|a+12-12|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-4-36|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$|a|=|3a-40|$

$\therefore\ a=20$ 또는 $a=10$

이때 $0<a<15$이므로 $a=10$

$\therefore\ \mathrm{P}(10,\ -4)$

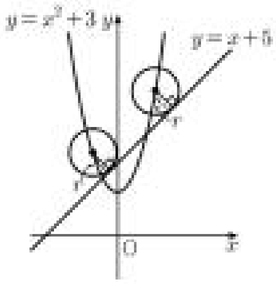
따라서 선분 OP의 길이는

$\sqrt{10^2+(-4)^2}=2\sqrt{29}$

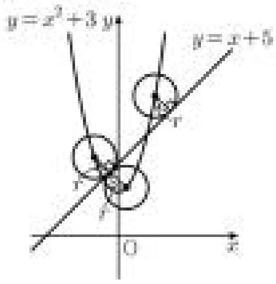
137 정답 ④

해설 반지름의 길이가 r이고 중심이 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프 위에 있는 원 중에서 직선 $y=x+5$에 접하는 원의 개수 m은 반지름 r의 길이에 따라 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

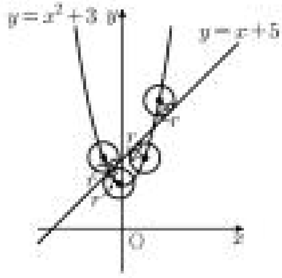
(ⅰ) $m=2$일 때



(ⅱ) $m=3$일 때

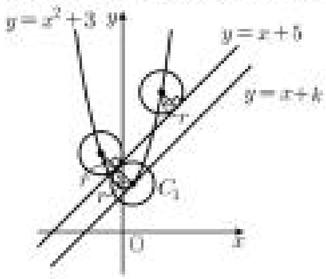


(ⅲ) $m=4$일 때



이 중 m이 홀수인 경우는 $m=3$일 때이므로

직선 $y=x+5$에 접하는 원 중 직선 $y=x+5$의 아래쪽에 위치한 원이 한 개일 때이다.



이 원을 C_1이라 하면 원 C_1의 반지름의 길이 r는 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y=x^2+3$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선을 $y=x+k$라 하면 이차방정식 $x^2+3=x+k$가

중근을 가져야 하므로 $x^2-x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(3-k)=0$에서 $k=\frac{11}{4}$

두 직선 $y=x+5$와 $y=x+\frac{11}{4}$ 사이의 거리는

직선 $y=x+\frac{11}{4}$ 위의 점 $\left(0,\ \frac{11}{4}\right)$과

직선 $y=x+5$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|-\frac{11}{4}+5\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8} \qquad \therefore r=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

직선 $y=x$와 직선 $y=x+\frac{11}{4}$ 사이의 거리는

직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+\frac{11}{4}$ 사이의

거리와 같으므로 $\frac{\left|\frac{11}{4}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{11\sqrt{2}}{8}$

이때 $r=\frac{9\sqrt{2}}{8}<\frac{11\sqrt{2}}{8}$이므로 $n=0$

$\therefore m+n+32r^2=3+0+32\cdot\frac{81}{32}=84$

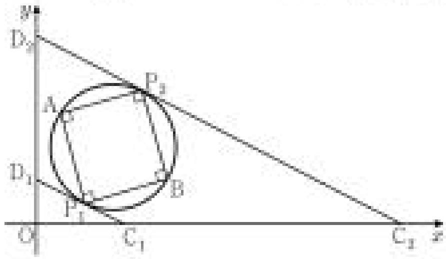
138 정답 ①

해설 $\angle APB=90°$ 인 점 P는 두 점 $A\left(1,\ \frac{9}{2}\right)$, $B\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원 C 위의 점이다.

점 P는 중심의 좌표가 $(3,\ 3)$, 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 원 C 위의 점이면서 선분 CD 위의 점이므로

직선 $l : y=-\frac{1}{2}x+\frac{t}{2}$와 원 C가 서로 만날 때

선분 CD 위에 $\angle APB=90°$ 인 점 P가 존재한다.



점 $(3,\ 3)$과 직선 $l : x+2y-t=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2\cdot3-t|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|9-t|}{\sqrt{5}}$이므로 직선 l과

원 C가 서로 만나려면

$\frac{|t-9|}{\sqrt{5}}\le\frac{5}{2}$, $|t-9|\le\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$-\frac{5\sqrt{5}}{2}\le t-9\le\frac{5\sqrt{5}}{2}$

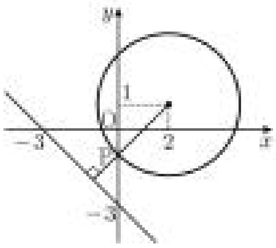
$9-\frac{5\sqrt{5}}{2}\le t\le 9+\frac{5\sqrt{5}}{2}$

따라서 $M=9+\frac{5\sqrt{5}}{2}$, $m=9-\frac{5\sqrt{5}}{2}$이므로

$M+m=18$

139 정답 ①

해설 $2\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
$P(x,\ y)$라 하면
$4\{(x-3)^2+(y-2)^2\}=(x-6)^2+(y-5)^2$
$x^2+y^2-4x-2y-3=0$
$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=8$
따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원 위를 움직인다.
이때 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$ 이므로
점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은
$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$



140 정답 ④

해설 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면
원 C위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=4$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{x_1},\ 0\right)$
점 H의 x의 좌표는 x_1이고 $2\overline{AH}=\overline{HB}$에서
$2(x_1+2)=\dfrac{4}{x_1}-x_1$
$3x_1{}^2+4x_1-4=0$
$(x_1+2)(3x_1-2)=0$
이때 $x_1>0$이므로 $x_1=\dfrac{2}{3}$에서 $B(6,\ 0)$
점 P는 원 C위의 점이므로
$x_1{}^2+y_1{}^2=4$에서 $P\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$
따라서 삼각형 PAB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$