교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29p_중단원

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $\lim_{x \to 2}(3x+4)$의 값을 구하시오.

02 다음 극한값을 함수의 그래프를 이용하여 구하시오.

$$\lim_{x \to 1}(x^2-3)$$

03 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

$$\lim_{x \to 2}\frac{1}{x-1}$$

04 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \to -3}\frac{1}{|x|}$$

05 다음 극한값을 조사하시오.

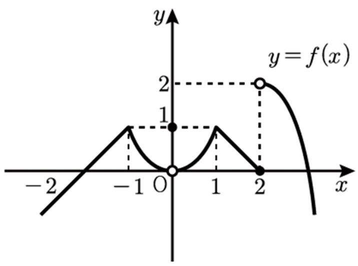
$$\lim_{x \to \infty}\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)$$

06 $\lim_{x \to \infty}\left(4-\frac{3}{x}\right)$의 값을 그래프를 이용하여 구하시오.

07 다음 극한을 조사하시오.

$$\lim_{x\to 0-}\sqrt{-2x}$$

08 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은?



① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

09 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$의 값을 구하시오.

10 $0\le x\le 2$에서 다항함수 $f(x)$가 $6x\le f(x)\le 3x^2+3$을 만족할 때, $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값은?

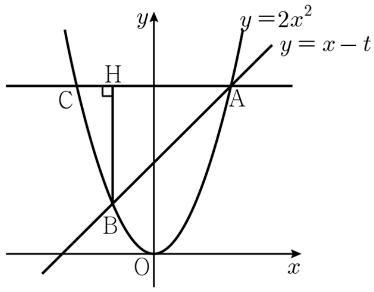
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

11 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1 & (x\ge 1)\\ -x+k & (x<1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

12 어느 도시의 버스 요금은 이용 거리에 따라 다르다고 한다. 이용 거리가 $15\,\text{km}$ 이하이면 1250원이고 $15\,\text{km}$ 초과 $50\,\text{km}$ 이하이면 $5\,\text{km}$마다 100원씩 요금이 추가되고, $50\,\text{km}$ 초과이면 $7\,\text{km}$마다 100원씩 요금이 추가된다. 이용 거리가 $x\,\text{km}$일 때의 요금을 $f(x)$원이라 할 때, $\lim_{x\to 40+}f(x)$의 값을 구하시오.

13 [2022년 9월 고3 12번 변형]

실수 t $(t<0)$에 대하여 직선 $y=x-t$와 곡선 $y=2x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)



① -1　② $-\dfrac{3}{2}$　③ -2　④ $-\dfrac{5}{2}$　⑤ -3

14 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)$$

15 $\lim\limits_{x \to 16} (\sqrt{x}-4)\left(1-\dfrac{4}{x-16}\right)$의 값을 구하시오.

16 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{ax^2+bx}{x+1}=1$이 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

17 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

18 x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-3x^3}{x^2}=4$

(나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

19 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2x+3<f(x)<2x+5$를 만족할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}$의 값을 구하면?

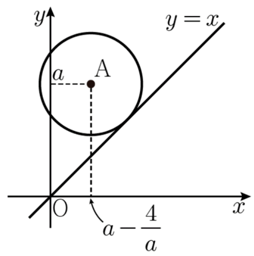
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

20 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}+1}$의 값은?

① $\dfrac{29}{2}$ ② 15 ③ $\dfrac{31}{2}$
④ 16 ⑤ $\dfrac{33}{2}$

21 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2}\{4f(x)+2g(x)\}=3$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4g(x)}{5f(x)+6g(x)}$의 값을 구하시오.

22 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 접하고 중심이 $\mathrm{A}\left(a-\dfrac{4}{a},\ a\right)$ $(a>0)$인 원이 있다. 이 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값을 d라 할 때, $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{d}{a}$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

교과서 (수학 II) - 미래엔 26~29p_중단원

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 10	02 -2	03 1
04 $\frac{1}{3}$	05 -3	06 4
07 0	08 ⑤	09 $-\frac{1}{5}$
10 ④	11 -1	12 1850
13 ③	14 3	15 $-\frac{1}{2}$
16 -2	17 ③	18 -6
19 ⑤	20 ②	21 1
22 ②		

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29p_중단원

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

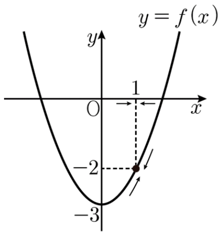
이름

01 **정답** 10

해설 $\lim_{x\to 2}(3x+4)=3\cdot 2+4=10$

02 **정답** -2

해설 $f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



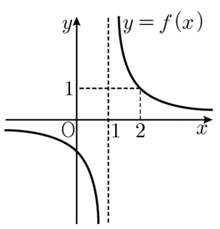
즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-3)=-2$

03 **정답** 1

해설 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$



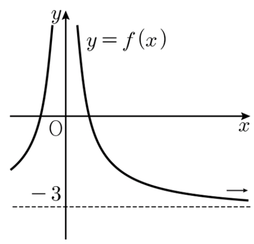
04 **정답** $\dfrac{1}{3}$

해설 $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|-3|}=\dfrac{1}{3}$

05 **정답** -3

해설 $f(x)=-3+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\left(-3+\dfrac{1}{x^2}\right)=-3$

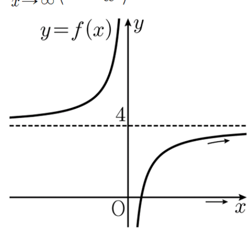


06 **정답** 4

해설 $f(x)=4-\dfrac{3}{x}$으로 놓으면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

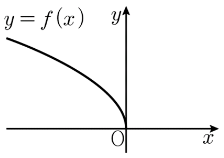
$\lim_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{x}\right)=4$



07 정답 0

해설 $f(x)=\sqrt{-2x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로

$$\lim_{x\to0-}\sqrt{-2x}=0$$



08 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)$

$=1+0+2=3$

09 정답 $-\frac{1}{5}$

해설

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{5}(x+\sqrt{5})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{5}(x+\sqrt{5})}=-\frac{1}{5}$$

10 정답 ④

해설 $0\le x\le2$일 때, $6x\le f(x)\le3x^2+3$에서

$\lim_{x\to1}6x=\lim_{x\to1}(3x^2+3)=6$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=6$

11 정답 -1

해설 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-2x-1)=-2$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+k)=-1+k$

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

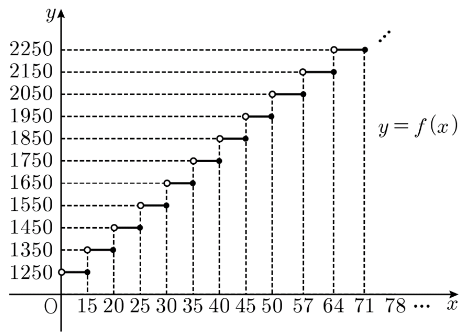
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$-2=-1+k$

$\therefore k=-1$

12 정답 1850

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x\to40+}f(x)=1850$$

13 정답 ③

해설 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ 2a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ 2b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $2x^2-x+t=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=\frac{1}{2},\ ab=\frac{t}{2}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=a-b$

$$=\sqrt{(a-b)^2}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}-2t}$$

또, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a,\ 2a^2)$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=b-(-a)$

$$=b+a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{4}-2t}-\frac{1}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1-8t}-1}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1-8t}-1)(\sqrt{1-8t}+1)}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-8t)-1}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{-8t}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{-4}{\sqrt{1-8t}+1}$$

$$=\frac{-4}{1+1}=-2$$

14 정답 3

해설

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=3$$

15 정답 $-\frac{1}{2}$

해설

$$\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\left(1-\frac{4}{x-16}\right)$$

$$=\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\cdot\frac{x-20}{x-16}$$

$$=\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\cdot\frac{x-20}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$=\lim_{x\to16}\frac{x-20}{\sqrt{x}+4}=\frac{16-20}{4+4}=-\frac{1}{2}$$

16 정답 -2

해설

극한 $\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx}{x+1}$가 1로 수렴하고

$x\to-1$일 때 $x+1\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax^2+bx)=0$ 이다.

$\therefore a=b$

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+ax}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}ax=-a=1$$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+b=2a=-2$

17 정답 ③

해설

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$에서 $x\to1$일 때

(분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1\cdots\cdots$㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to13}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}$$

$$=\frac{1}{a+2}=-1$$

따라서$a=-3$, $b=2$이므로

$b-a=2-(-3)=5$

18 정답 -6

해설

(가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 3, 이차항의 계수가 4인 삼차식임을 알 수 있다.

또, (나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로

$f(x)\to0$에서 $f(0)=0$이다.

즉, $f(x)=3x^3+4x^2+ax$ (a는 상수) 로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(3x^2+4x+a)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(3x^2+4x+a)=a$$

따라서 $a=-1$에서 $f(x)=3x^3+4x^2-x$이므로

$$f(-2)=3\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2+(-1)\cdot(-2)$$

$$=-6$$

19 정답 ⑤

해설

$x>-\frac{3}{2}$이면

$(2x+3)^2<\{f(x)\}^2<(2x+5)^2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2}{x^2+1}\le\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}\le\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2}{x^2+1}=4$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

20

정답 ②

해설 $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}+1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)}$

$= \lim_{x \to -1} (x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$

$= 5 \cdot 3 = 15$

21

정답 1

해설 $4f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면

$2g(x)=h(x)-4f(x)$, $\lim_{x \to 2} h(x)=3$

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{f(x)+4g(x)}{5f(x)+6g(x)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{f(x)+2\{h(x)-4f(x)\}}{5f(x)+3\{h(x)-4f(x)\}}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{-7f(x)+2h(x)}{-7f(x)+3h(x)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{-7+2 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}}{-7+3 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}}$

$=1$

22

정답 ②

해설 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원이 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 접하므로

$r = \frac{\left|\left(a-\frac{4}{a}\right)-a\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$ $(\because a>0)$

이때 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이에서 반지름의 길이를 뺀 것과 같다.

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+a^2} = \sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}}$ 이므로

$d = \overline{\mathrm{OA}}-r = \sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{a}$

$\therefore \lim_{a \to \infty} \frac{d}{a} = \lim_{a \to \infty} \frac{\sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}}-\frac{2\sqrt{2}}{a}}{a}$

$= \lim_{a \to \infty} \left(\sqrt{2-\frac{8}{a^2}+\frac{16}{a^4}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2}\right)$

$= \sqrt{2}$