공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-1회

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 서로 다른 세 실수로 이루어진 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 $\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in A,\ x\neq y\}=\{11,\ 13,\ 16\}$일 때, 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

02 집합 $A=\{2,\ 3\}$에 대하여 $P(A)=\{X\,|\,X\subset A\}$라 할 때, 다음 중 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은?

① $\varnothing$ ② $\{3\}$ ③ $\{2\}$
④ $\{2,\ 3\}$ ⑤ $\{\varnothing\}$

03 집합 $\mathrm{A}=\{1,2,3,6\}$, $\mathrm{B}=\{1,2,a^2+2,a^2+a+6\}$일 때, $\mathrm{A}=\mathrm{B}$를 만족시키는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 두 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c},\ \sqrt{d}\}$에 대하여 A와 B의 모든 원소들이 자연수이고, $A\cap B=\{a,\ b\}$라고 한다. $a+b=13$일 때, $c+d$의 값을 구하시오.

05 우리 반 학생 40명 중에서 영어 학원을 다니는 학생이 25명, 수학 학원을 다니는 학생이 21명일 때, 두 과목 모두 학원을 다니는 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

06 전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 $p: a(x-2)(x-5)>0$, $q: x<b$이다. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수)

〈보기〉

ㄱ. $a=0$일 때, $P\subset Q$이다.
ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때, $P\subset Q$이다.
ㄷ. $a<0$, $b=2$일 때, 명제 'p이면 $\sim q$이다'는 참이다.

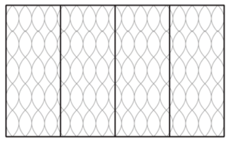
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $\sim q \Rightarrow \sim p$일 때, 다음 중에서 항상 옳은 것은?

① $P\cap Q=Q$　② $P\cup Q=P$
③ $P-Q=\varnothing$　④ $P\cup Q^C=U$
⑤ $P^C\cap Q^C=\varnothing$

08 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하시오.

09 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 이용하여 다음 그림과 같은 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이때 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\,\mathrm{m}^2$　② $70\,\mathrm{m}^2$　③ $80\,\mathrm{m}^2$
④ $90\,\mathrm{m}^2$　⑤ $100\,\mathrm{m}^2$

10 집합 $X=\{x\,|\,0\le x\le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b-1 & (0\le x<3) \\ -2x+10 & (3\le x\le 4)\end{cases}$가 일대일대응일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{7}{9}$　③ $\frac{8}{9}$
④ 1　⑤ $\frac{10}{9}$

11 [2023년 3월 고2 13번/3점]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h가 다음 조건을 만족시킨다.

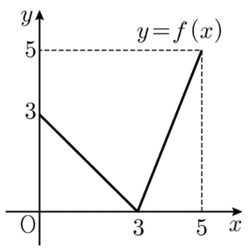
(가) f는 항등함수이고 g는 상수함수이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+g(x)+h(x)=7$이다.

$g(3)+h(1)$의 값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

12 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f:\ X \to Y$ 중 '$x_1 \neq x_2(x_1,\ x_2 \in X)$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'인 함수들의 집합을 A, $f(0)=3$을 만족시키는 함수들의 집합을 B라 할 때, $n(A \cup B)$의 값을 구하시오.

13 $0 \leq x \leq 5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)+1$을 만족시키는 서로 다른 실근의 합은?



① 5 ② $\frac{27}{5}$ ③ $\frac{29}{5}$
④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{33}{5}$

14 $X=\{x \mid x \geq k\}$를 정의역으로 하는 함수 $f(x)=|x^2-1|$의 역함수가 존재할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오.

15 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 가 $(f \circ g)(x)=-6x+17$, $h(x)=2x+4$ 를 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

16 함수 $f(x)=x^2+2x+k\,(x \geq -1)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 점 $(4,\ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

17 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 두 점

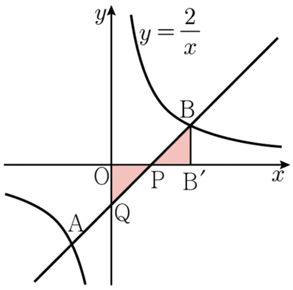
$\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선이

x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서

x축에 내린 수선의 발을 B′이라 할 때,

두 삼각형 POQ, PB′B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

$\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $2\sqrt{2}+2$ ⑤ $2\sqrt{2}-2$

18 함수 $y=\dfrac{8x+k+19}{x+3}$의 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

19 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-3}+b$에 대하여

함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여

대칭일 때, $a+f(b)$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

20 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나고, 그 역함수의 그래프가 점 $(6,\ -7)$을 지날 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

21 정의역이 $\{x\,|\,x>2\}$인

두 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{x-2}+2$에 대하여

$(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

22 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 3)$에서 만날 때, $g(4)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

23 [2024년 3월 고2 30번 변형]
두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}+b$라 하자.
함수 $g(x)=\begin{cases} |f(x)|-b & (x \geq a) \\ -f(-x+2a)+|b| & (x<a) \end{cases}$와
두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면 $h(\alpha)\cdot h(\beta)=4$
> (나) 방정식 $\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 최솟값은 -22, 최댓값은 103이다.

$g(12)$의 값을 구하시오.

24 [2020년 3월 고2 30번/4점]
함수 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(a \geq \frac{3}{2}\right)$에 대하여
집합 $\{x\,|\,x \geq 2\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x) \geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$$ 가 있다.

자연수 n에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(n)$이라 하자. $h(1)=h(3)<h(2)$일 때, $g(4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-1회

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 ②	02 ⑤	03 ②
04 97	05 27	06 ③
07 ③	08 9	09 ④
10 ③	11 ⑤	12 34
13 ②	14 1	15 ③
16 ⑤	17 ⑤	18 400
19 ⑤	20 -45	21 8
22 ①	23 7	24 13

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-1회

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 ②

해설 집합 $A=\{a, b, c\}$에 대하여 $a<b<c$라 하자.
이때 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면
$\{a+b, b+c, c+a\}$이다.
$a+b<a+c<b+c$이므로
$a+b=11$ … ㉠
$a+c=13$ … ㉡
$b+c=16$ … ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$2(a+b+c)=40$
$\therefore a+b+c=20$ … ㉣
㉣−㉠을 하면
$c=9$
따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 9이다.

02 정답 ⑤

해설 집합 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A)=\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 $\{\varnothing\}$이다.

03 정답 ②

해설 $\mathrm{A}=\{1, 2, 3, 6\}$이고 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$이므로
$a^2+2=3$ 또는 $a^2+2=6$
(i) $a^2+2=3$ 일 때 $a^2=1$
$\therefore a=\pm1$
$a=1$ 이면 $a^2+a+6=8$ 이므로
$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$
$a=-1$ 이면 $a^2+a+6=6$ 이므로
$\mathrm{A}=\mathrm{B}$
(ii) $a^2+2=6$ 일 때 $a^2=4$
$\therefore a=\pm2$
$a=2$ 이면 $a^2+a+6=12$ 이므로
$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$
$a=-2$ 이면 $a^2+a+6=8$ 이므로
$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$
따라서 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$를 만족시키는 $a=-1$이다.

04 정답 97

해설 $a+b=13$ 이고, a, b는 자연수이며 집합 B의 원소가 모두 자연수이므로 a, b, c, d는 모두 완전제곱수이다.
$\therefore a=4, b=9$ (또는 $a=9, b=4$)
$\therefore \{a, b\}=\{4, 9\}$
이때 집합 A, B는
$A=\{4, 9, c, d\}, B=\{2, 3, \sqrt{c}, \sqrt{d}\}$이다.
그런데 $A\cap B=\{a, b\}=\{4, 9\}$로부터
$\{\sqrt{c}, \sqrt{d}\}=\{4, 9\}$이므로
$c=16, d=81$
$\therefore c+d=16+81=97$

05 정답 27

해설 학생 전체의 집합을 U, 영어 학원을 다니는 학생의 집합을 A, 수학 학원을 다니는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40, n(A)=25, n(B)=21$
두 과목 모두 학원을 다니는 학생의 집합은 $A\cap B$이고
$B\subset A$일 때 $n(A\cap B)$가 최대이므로 최댓값은
$n(A\cap B)=n(B)=21$
한편, $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로
최솟값은 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=25+21-40$
$=6$
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$21+6=27$

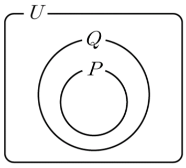
06 정답 ③

해설 ㄱ. $a=0$이면 $0\cdot(x-2)(x-5)>0$이 되어 이 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$P=\varnothing$이다. 따라서 $P\subset Q$이다.
ㄴ. $a>0, b=0$이면
$P=\{x|x<2$ 또는 $x>5\}, Q=\{x|x<0\}$이므로
$Q\subset P$이다.
ㄷ. $a<0, b=2$이면
$P=\{x|2<x<5\}, Q=\{x|x<2\}$이다.
이때 $Q^C=\{x|x\geq2\}$이므로 $P\subset Q^C$이다.
따라서 명제 'p이면 $\sim q$이다'는 참이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 정답 ③

해설 $\sim q \Rightarrow \sim p$이므로 명제 $\sim q \to \sim p$의 대우 $p \to q$가 참이다.

즉, $P \subset Q$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $P \cap Q = P$

② $P \cup Q = Q$

③ $P - Q = \varnothing$

④ $P \cup Q^C$는 항상 U라고 할 수 없다.

⑤ $P^C \cap Q^C = Q^C$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

08 정답 9

해설 $a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4$$
$$\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$$
$$=5+4=9$$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉, $b=2a$일 때 성립)

09 정답 ④

해설 전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

이때 a, b는 양수이므로

$60=2a+5b \geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하여 정리하면

$40ab \leq 60^2$

$\therefore\ ab \leq 90$

한편, 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=ab \leq 90$

따라서 넓이의 최댓값은 $90\,\mathrm{m}^2$이다.

10 정답 ③

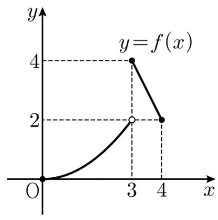
해설 집합 $\{x|3 \leq x \leq 4\}$에서 정의된 함수 $y=-2x+10$의 치역은 $\{y|2 \leq y \leq 4\}$이므로

함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는

집합 $\{x|0 \leq x < 3\}$에서 정의된 함수

$y=ax^2+b-1$의 치역이 $\{y|0 \leq y < 2\}$이어야 하고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+b-1$이라 할 때

$g(0)=0,\ g(3)=2$

이때 $g(0)=0$에서 $b-1=0$

$\therefore\ b=1$

또, $g(3)=2$에서 $9a+b-1=2$

$\therefore\ a=\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x^2 & (0 \leq x < 3)\\ -2x+10 & (3 \leq x \leq 4)\end{cases}$이므로

$f(2)=\frac{2}{9}\cdot 2^2=\frac{8}{9}$

11 정답 ⑤

해설 함수의 정의를 이해하여 식의 값을 구한다.

조건 (가)에서 f는 항등함수이므로

$f(x)=x$

조건 (가)에서 g는 상수함수이므로 집합 X의 원소 중 하나를 k라 할 때, $g(x)=k$

조건 (나)에서

$f(x)+g(x)+h(x)=x+k+h(x)=7$이므로

$h(x)=-x+7-k$

$x \in X$에서 $1 \leq x \leq 5$이므로

$2-k \leq -x+7-k \leq 6-k$

이때 $1 \leq h(x) \leq 5$이어야 하므로

$2-k \geq 1$이고 $6-k \leq 5$에서 $k=1$

따라서 $g(x)=1,\ h(x)=-x+6$이므로

$g(3)+h(1)=1+5=6$

12 정답 34

해설 집합 A의 원소는 $X \to Y$인 일대일함수이다.

$\therefore n(A)=24$

집합 B의 원소는 $\{1,\ 2\}$에서 $Y=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$로 가는 함수의 개수이다.

$\therefore n(B)=16$

집합 $A\cap B$의 원소는 $\{1,\ 2\}$에서 $\{4,\ 5,\ 6\}$로 가는 일대일함수의 개수이다.

$\therefore n(A\cap B)=6$

$$\begin{aligned}\therefore n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=24+16-6=34\end{aligned}$$

13 정답 ②

해설 주어진 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & (0\le x\le 3)\\ \dfrac{5}{2}x-\dfrac{15}{2} & (3<x\le 5)\end{cases}$$

방정식 $f(f(x))=f(x)+1$에서 $f(x)=t$ $(0\le t\le 5)$라 하면 방정식 $f(t)=t+1$에서

$0\le t\le 3$일 때, $-t+3=t+1$이므로 $t=1$

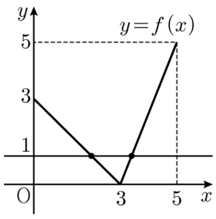
$3<t\le 5$일 때, $\dfrac{5}{2}t-\dfrac{15}{2}=t+1$이므로 $t=\dfrac{17}{3}$

이때 $0\le t\le 5$이므로 $t=1$, 즉 $f(x)=1$이다.

방정식 $f(x)=1$의 해는

$0\le x\le 3$일 때, $-x+3=1$에서 $x=2$

$3<x\le 5$일 때, $\dfrac{5}{2}x-\dfrac{15}{2}=1$에서 $x=\dfrac{17}{5}$



따라서 구하는 서로 다른 실근의 합은

$2+\dfrac{17}{5}=\dfrac{27}{5}$

14 정답 1

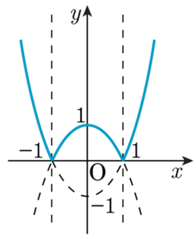
해설 $x^2-1\ge 0$이면 $x\le -1,\ x\ge 1$이고

$x^2-1<0$이면 $-1<x<1$이다.

따라서 $f(x)=|x^2-1|$

$$=\begin{cases}x^2-1 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ 1-x^2 & (-1<x<1)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해 일대일 대응이 되는 정의역은 $\{x|x\ge 1\}$ 또는 $\{x|x\le -1\}$ 또는 $\{x|-1\le x\le 0\}$ 또는 $\{x|0\le x\le 1\}$이다.

문제에서 주어진 $X=\{x|x\ge k\}$를 정의역으로 하기 위해서는 위의 4가지 중 $\{x|x\ge 1\}$이며, k의 최솟값은 1이다.

15 정답 ③

해설 $(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(5)$

$=h^{-1}\circ(f\circ g)^{-1}(5)$

$(f\circ g)(x)=-6x+17$

$\longrightarrow\ y=-6x+17$

$\longrightarrow\ x=-6y+17$

$\longrightarrow\ y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{17}{6}\cdots(f\circ g)^{-1}(x)$

$h(x)=2x+4,\ y=2x+4$

$\longrightarrow\ x=2y+4$

$\longrightarrow\ y=\dfrac{1}{2}x-2\cdots h^{-1}(x)$

$\therefore\ h^{-1}\circ(f\circ g)^{-1}(5)=h^{-1}(2)=-1$

16 정답 ⑤

해설 점 $(4,\ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(-1,\ 4)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

즉, $f(-1)=4$이므로 $1-2+k=4$

$\therefore\ k=5$

17 정답 ⑤

해설 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{2}{a}-(-2)}{a-(-1)}=\frac{\frac{2}{a}+2}{a+1}=\frac{\frac{2a+2}{a}}{a+1}=\frac{2}{a}$$ 이므로

직선의 방정식은

$$y=\frac{2}{a}(x+1)-2=\frac{2}{a}x+\frac{2}{a}-2$$

즉, 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(a-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{2}{a}-2\right)$

$\overline{\mathrm{OP}}=a-1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=2-\frac{2}{a}$, $\overline{\mathrm{PB'}}=a-(a-1)=1$,

$\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{2}{a}$ 이므로

$$\mathrm{S}_1=\frac{1}{2}\cdot(a-1)\cdot\left(2-\frac{2}{a}\right)=\frac{a^2-2a+1}{a}$$
$$=a-2+\frac{1}{a}$$

$$\mathrm{S}_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2=a-2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=a+\frac{2}{a}-2$
$$\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}-2$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

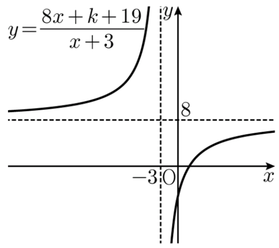
이므로 최솟값은 $2\sqrt{2}-2$

(단, 등호는 $a=\sqrt{2}$ 일 때 성립)

18 정답 400

해설 $$y=\frac{8x+k+19}{x+3}=\frac{8(x+3)+k-5}{x+3}=\frac{k-5}{x+3}+8$$

이므로 함수 $y=\frac{8x+k+19}{x+3}$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $k-5<0$이어야 하므로 $k<5$

(ⅱ) $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$$\frac{k+19}{3}<0$$
$$\therefore\ k<-19$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k<-19$이므로 정수 k의 최댓값은 -20

따라서 $M=-20$이므로 $M^2=400$

19 정답 ⑤

해설 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\frac{a}{x-3}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=b$이므로

$y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-a$, $y=b+\frac{a}{3}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{x-3}-1$이므로

$f(b)=f(-1)=\frac{3}{-4}-1=-\frac{7}{4}$

$\therefore a+f(b)=3+\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}$

20 정답 -45

해설 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$\sqrt{2a+b}=3$

$\therefore 2a+b=9 \quad \cdots ㉠$

역함수의 그래프가 점 $(6, -7)$을 지나므로

$y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-7, 6)$을 지난다.

즉, $\sqrt{-7a+b}=6$이므로

$-7a+b=36 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=15$

$\therefore ab=-45$

21 정답 8

해설 $g(3)=\sqrt{3-2}+2=3$이므로

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$에서

$\frac{2k-1}{k-2}=3$, $2k-1=3k-6$

$\therefore k=5$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(3)=5$

$f(5)=\frac{10-1}{5-2}=3$이므로

$(g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(f(5))=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=l$이라 하면 $g(l)=3$에서

$\sqrt{l-2}+2=3$, $\sqrt{l-2}=1$

$\therefore l=3$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(3)=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(5)=5+3=8$

22 정답 ①

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2, 3)$에서 만나므로

$f(2)=3$, $g(2)=3$

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(2)=3$, 즉 $f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$

$f(2)=3$에서 $\sqrt{2a+b}+1=3$

$\therefore 2a+b=4 \quad \cdots ㉠$

$f(3)=2$에서 $\sqrt{3a+b}+1=2$

$\therefore 3a+b=1 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=10$

$\therefore f(x)=\sqrt{-3x+10}+1$

$g(4)=k$, 즉 $f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\sqrt{-3k+10}+1=4$

$\sqrt{-3k+10}=3$, $-3k+10=9$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

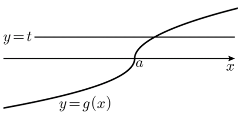
$\therefore g(4)=\frac{1}{3}$

23 정답 7

해설 (ⅰ) $b \geq 0$일 때

$g(x)=\begin{cases} \sqrt{x-a} & (x \geq a) \\ -\sqrt{-x+a} & (x<a) \end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



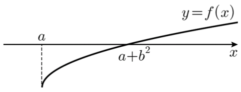
위 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 항상 1이므로 $h(t)=1$

따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b<0$일 때

$0=\sqrt{x-a}+b$에서 $x=a+b^2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$x \geq a+b^2$이면 $f(x) \geq 0$이므로

$g(x)=|f(x)|-b=f(x)-b=\sqrt{x-a}$

$a \leq x < a+b^2$이면 $f(x)<0$이므로

$g(x)=|f(x)|-b$

$=-f(x)-b=-\sqrt{x-a}-2b$

$x<a$일 때

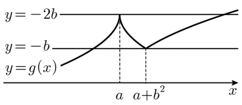
$g(x)=-f(-x+2a)+|b|$

$=-\sqrt{(-x+2a)-a}-b+|b|$

$=-\sqrt{-x+a}-2b$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$g(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x+a}-2b & (x<a) \\ -\sqrt{x-a}-2b & (a \leq x < a+b^2) \\ \sqrt{x-a} & (x \geq a+b^2) \end{cases}$



이때 $h(t) \leq 3$이고 $h(\alpha) \cdot h(\beta)=4$에서

$h(\alpha)=h(\beta)=2$이므로 조건 (가)를 만족시키는 실수 α, β의 값은 $\alpha=-b$, $\beta=-2b$이다.

조건 (나)에서 x에 대한 방정식

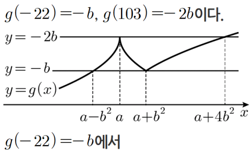
$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\alpha$, $y=\beta$의 교점의 x좌표이므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

따라서 x에 대한 방정식

$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근 중 최댓값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-2b$의 교점의 x좌표 중 a가 아닌 값이고, 최솟값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-b$의 교점의 x좌표 중 $a+b^2$이 아닌 값이다.

즉, $-22<a<a+b^2<103$이고,

$g(-22)=-b$, $g(103)=-2b$이다.



$g(-22)=-b$에서

$-\sqrt{22+a}-2b=-b$, $22+a=b^2$

$a-b^2=-22$ $\cdots$ ㉠

$g(103)=-2b$에서

$\sqrt{103-a}=-2b$, $103-a=4b^2$

$a+4b^2=103$ $\cdots$ ㉡

이므로 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=3$, $b=-5$이고

$g(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x+3}+10 & (x<3) \\ -\sqrt{x-3}+10 & (3 \leq x < 28) \\ \sqrt{x-3} & (x \geq 28) \end{cases}$

$\therefore g(12)=-\sqrt{12-3}+10=7$

24 정답 13

해설 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(a \geq \dfrac{3}{2}\right)$에서

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}(x-2)^2+\dfrac{3}{a}(x \geq 2)$이다.

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x) \geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$는

$x \geq 2$인 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이다.

$f(x)<f^{-1}(x)$인 경우 자연수 n에 대하여

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1이다.

따라서 $f(x) \geq f^{-1}(x)$일 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수와 이에 따른 $h(n)$은 다음과 같다.

(ⅰ) 교점의 개수가 1인 경우

(a) 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하는 경우

$\dfrac{1}{a}(x-2)^2+\dfrac{3}{a}=x-n$에서

$x^2-(a+4)x+an+7=0$

x에 대한 이차방정식

$x^2-(a+4)x+an+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4(an+7)=0$

$a^2+8a-12-4an=0$이므로

$n=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$

(b) 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2, \dfrac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 아랫부분에 있는 경우,

x좌표가 2일 때 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\dfrac{3}{a}$보다 크므로 $\dfrac{3}{a}<2-n$,

$n<2-\dfrac{3}{a}$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1인 자연수 n의 값의 범위는 $n=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ 또는 $n<2-\dfrac{3}{a}$이고 $h(n)=2$

(ⅱ) 교점의 개수가 2인 경우, 즉 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 윗부분에 있고, 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2, \dfrac{3}{a}\right)$을 지나거나 점 $\left(2, \dfrac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$의 y절편인 $-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 작으므로

$-n>-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$, $n<2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2인 자연수 n의 값의 범위는

$2-\dfrac{3}{a} \leq n < 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$이고

이때 $h(n)=3$이다.

(ⅲ) 교점이 없는 경우, 즉 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 아랫부분에 있는 경우

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$의 y절편인 $-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 크므로 $-n<-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$,

$n>2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 점이 없는 자연수 n의 값의 범위는 $n>2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$이고 이때 $h(n)=1$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$h(n)=\begin{cases} 2 & \left(0<n<2-\dfrac{3}{a}\right) \\ 3 & \left(2-\dfrac{3}{a} \leq n < 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \\ 2 & \left(n=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \\ 1 & \left(n>2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \end{cases}$

$h(1)=h(3)<h(2)$를 만족시키려면 $h(1)=2$, $h(3)=2$, $h(2)=3$이어야 한다.

즉, $0<1<2-\dfrac{3}{a}$ $\cdots$ ㉠

$2-\dfrac{3}{a} \leq 2 < 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ $\cdots$ ㉡

$3=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ $\cdots$ ㉢

㉢에서 $\dfrac{a}{4}-\dfrac{3}{a}-1=0$, $a^2-4a-12=0$, $a=-2$ 또는 $a=6$

이때 $a \geq \dfrac{3}{2}$이므로 $a=6$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면

$0<1<2-\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{2}$이므로 ㉠을 만족시키고, ㉡에 대입하면 $2-\dfrac{3}{6} \leq 2 < 2-\dfrac{3}{6}+\dfrac{6}{4}$, $\dfrac{3}{2} \leq 2 < 3$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는 $a=6$일 때인

$g(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-3} & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ \dfrac{1}{6}(x-2)^2 & (f(x) \geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$ 이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$\dfrac{1}{6}(k-2)^2+\dfrac{1}{2}=k$, $k^2-10k+7=0$

$k>2$이므로 $k=5+3\sqrt{2}$

따라서 함수 $g(x)$는

$g(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-3}+2 & (x>5+3\sqrt{2}) \\ \dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2} & (2 \leq x \leq 5+3\sqrt{2}) \end{cases}$

이므로 $g(4)=\dfrac{1}{6}(4-2)^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{6}$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로 $p+q=13$