단국대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 집합 $A=\{x \mid x$는 1보다 작은 자연수$\}$에 대하여 $n(A)$를 구하시오.

02 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\},\ \varnothing\}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in A$ ② $\varnothing \subset A$ ③ $\{1,\ 2\} \subset A$
④ $\{1,\ 2\} \in A$ ⑤ $\{2\} \in A$

03 [2018년 11월 고3 문과 2번/2점]
두 집합

$$A=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\},\ B=\{3,\ 7\}$$

에 대하여 $A-B=\{a,\ 9\}$일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 두 집합 $A,\ B$에 대하여 $n(A)=21,\ n(B)=14,$ $n(A \cup B)=29$일 때, $n(A \cap B)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

05 다음 중 분수식이 아닌 것은? (정답 2개)

① $\dfrac{1}{5-x}$ ② $\dfrac{x+1}{3}$ ③ $\dfrac{x-1}{2x}$
④ $\dfrac{2x^2+1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5x}{x(x+2)}$

06 $-1 \le x \le 4$ 에서 함수 $y=4-\sqrt{3x+4}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

07 두 집합 $A=\{3,\ -4a-8\}$, $B=\{4,\ 8,\ a^2-6\}$에 대하여 $A\cap B=A$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

08 두 집합 $X=\{-1,\ 1\}$, $Y=\{-3,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 $f(x)=ax-b$, $g(x)=x^3+x-1$이 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=x^2-2\ (x\geq 0)$, $g(x)=x+3$에 대하여 $(g\circ f)^{-1}(1)$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

10 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$을 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 곡선을 다음 보기 중에서 모두 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

ㄴ. $y=\dfrac{2x}{2x-1}$

ㄷ. $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

11 $3\leq x\leq 6$에서 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 5 ② $\dfrac{21}{4}$ ③ $\dfrac{11}{2}$
④ $\dfrac{23}{4}$ ⑤ 6

12 집합 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n\}$에 대하여 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16\}\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X의 개수가 16일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

13 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 5\}$ 에 대하여
$(A\cup B)^c\subset X$, $(A-B)^c\cap X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개
④ 16 개　⑤ 32 개

14 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.
$p: 3x-a<0$, $q: x^2-6x-7\geq 0$
p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

15 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

16 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하시오.

17 [2008년 6월 고2 이과 11번]
함수 $f(x)$가 음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(0)=0$, $f(10n+p)=f(n)+p$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, p는 9이하의 음이 아닌 정수)

<보기>
ㄱ. $f(12)=3$
ㄴ. $f(8\times 123)=8f(123)$
ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(100c+10b+a)$
(단, a, b, c는 9 이하의 음이 아닌 정수)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 두 집합
$X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f: X\to Y$의 개수를 구하시오.

(i) $f(2)=10$
(ii) 집합 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

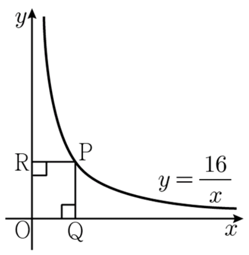
19 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(5x-9)=10x+1$이다. $f^{-1}(x)=ax+b$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

20 [2007년 3월 고2 25번]
실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=5x+20,\ g(x)=\begin{cases} 2x & (x<25) \\ x+25 & (x \geq 25) \end{cases}$$

에 대하여 $f(g^{-1}(40))+f^{-1}(g(40))$의 값을 구하시오.
(단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g 의 역함수이다.)

21 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{16}{x}$ $(x>0)$의 그래프 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)



22 두 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+1$, $y=m(x-1)+1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

23 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, 점근선의 방정식이 $x=d$, $y=2$이다. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$일 때, 상수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

24 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}}=-\sqrt{\dfrac{a-2}{b+2}}$ 가 성립할 때, $|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 한 것은?

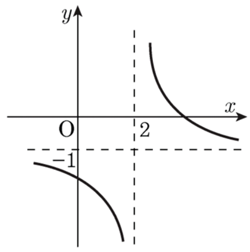
① 0 ② $2a-4$ ③ $4b$
④ -4 ⑤ $-2a+2b$

25 $x > y > 0$인 x, y에 대하여 $x+y=5$, $xy=4$일 때, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=k$라 하자. 상수 k 에 대하여 $3k+1$의 값을 구하시오.

26 다음 중 무리함수 $y=-\sqrt{ax-2a}+3$ $(a \neq 0)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 3\}$이다.
③ $y=\sqrt{ax-2a}+3$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
④ $y=-\sqrt{ax-2a}-3$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.
⑤ $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

27 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제 1 사분면
② 제 2사분면
③ 제 3사분면
④ 제 4사분면
⑤ 제 1, 2사분면

28 집합
$U=\{x \mid x$는 4의 배수가 아닌 40 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A에 대하여 $n(A)=4$이고
집합 A의 모든 원소의 합은 140이다. 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구하시오.

29 어느 반 학생들을 대상으로 이동통신에 가입한 학생 수를 조사하였다. K, S, L회사의 이동통신에 가입한 학생은 각각 23, 18, 27명이고, K, S, L회사의 이동통신에 모두 가입한 학생은 7명, K, L회사의 이동통신에 모두 가입한 학생은 20명이었다. S회사 이동통신에만 가입한 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 4　② 7　③ 10　④ 13　⑤ 16

30 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 이때 옳은 것은?

ㄱ. 첫 번째 구슬은 빨간색이 아니다.
ㄴ. 두 번째 구슬은 파란색이 아니다.
ㄷ. 세 번째 구슬은 파란색이다.

① 첫 번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫 번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

31 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는
$p: a^2+b^2=0$, $q: a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$,
$r: |2a+b|=|2a-b|$이다. 다음 보기 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. p는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. p는 q이고 r이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

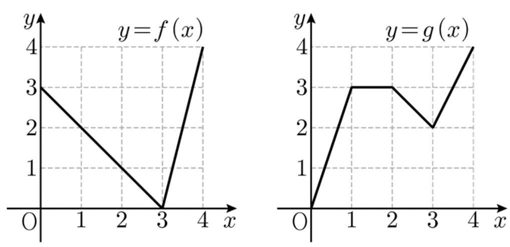
32 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(3-x)$를 만족하고, $f(x)=0$이 서로 5개의 실근을 가질 때, 모든 근의 합은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

33 세 집합
$X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Z=\{1,\ 2\}$에 대하여 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$가 있다.
함수 f가 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z가 되도록 하는 두 함수 f, g의 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는?

① 240　② 280　③ 320　④ 360　⑤ 400

34 $0 \leq x \leq 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 함수 $y=(f \circ g)(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



35 함수 $f(x)=x^2-4x+k\ (x\geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0<k<\frac{25}{4}$
② $k<\frac{25}{4}$
③ $6\leq k\leq\frac{25}{4}$
④ $6<k\leq\frac{25}{4}$
⑤ $6\leq k<\frac{25}{4}$

36 [2024년 3월 고2 17번 변형]
두 양수 a, k에 대하여 함수 $f(x)=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+3,\ f(a+3))$이 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은?

(가) 직선 PQ의 기울기는 -1이다.
(나) 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $18\sqrt{2}$이다.

① $\frac{5}{4}$
② $\frac{7}{4}$
③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{11}{4}$
⑤ $\frac{13}{4}$

37 함수 $f(x)=x^2+5(x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은?(단, k는 상수이다.)

① $\frac{15\sqrt{2}}{4}$
② $4\sqrt{2}$
③ $\frac{17\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\frac{19\sqrt{2}}{4}$

38 9 이하의 자연수 k에 대하여 집합 A_k를
$A_k=\{x\,|\,k-1\leq x\leq k+2,\ x$는 실수$\}$라 하자.
다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{3\}$
ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m|\leq 3$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다.
ㄷ. 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 3이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39 [2022년 3월 고2 19번/4점]

두 자연수 k, m $(k \geq m)$에 대하여 전체집합 $U=\{x \mid x$는 k 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x \mid x$는 m의 약수$\}$, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $B-A=\{4,\ 7\}$, $n(A \cup B^C)=7$
> (나) 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은?

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

40 [2021년 11월 고1 20번/4점]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 집합 U의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은?

> (가) $n(X)=6$
> (나) $A-X=B-X$
> (다) $(X-A)\cap(X-B) \neq \varnothing$

① 26　② 27　③ 28
④ 29　⑤ 30

41 [2019년 11월 고1 21번 변형]

전체집합 $U=\{x \mid x$는 30 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A_k=\{x \mid x(y-k)=40,\ y \in U\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{40-x}{5} \in U\right\}$에 대하여 $n(A_k \cap B^C)=2$가 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5　② 10　③ 15
④ 20　⑤ 25

42

$3 \leq a < b$인 두 상수 a, b에 대하여 세 집합

$$A=\left\{(x,\ y) \,\middle|\, y=\frac{15}{8}x,\ (x+5)^2+(y+3)^2=9\right\}$$

$$B=\left\{(x,\ y) \,\middle|\, y=\frac{15}{8}x,\ (x-a-2)^2+(y-a)^2=a^2\right\}$$

$$C=\left\{(x,\ y) \,\middle|\, y=\frac{15}{8}x,\ (x-b-2)^2+(y-b)^2=b^2\right\}$$

이 있다. $n(A \cup B \cup C)=3$일 때, $a+b$의 값은?

① $\dfrac{158}{17}$　② $\dfrac{162}{17}$　③ $\dfrac{166}{17}$
④ 10　⑤ $\dfrac{174}{17}$

43 [2017년 3월 고3 문과 20번/4점]

실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2-x-6<0$

$q : x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8 \geq 0$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a의 값의 합은?

① 3　② 5　③ 7
④ 9　⑤ 11

44 [2019년 3월 고2 문과 30번/4점]
두 함수

$$f(x)=x^2-2x+6,$$
$$g(x)=-|x-t|+11 \ (t\text{는 실수})$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

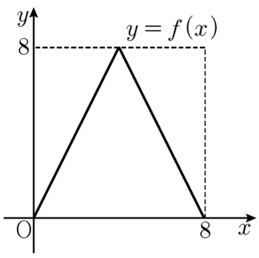
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<g(x)) \\ g(x) & (f(x)\ge g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 명제

'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'

가 참이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

45 함수 $f(x)=-|2x-8|+8\ (0\le x\le 8)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $f(f(4))=0$
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 16이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=ax+3,\ (g\circ f)(x)=x^2-2x-3$$

을 만족할 때, 부등식 $g(x)\le 0$의 정수해의 개수가 10 이하가 되도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

47 [2019년 3월 고2 문과 21번/4점]
최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} -x+4 & (x<-2) \\ f(x) & (-2\le x\le 1) \\ -x-2 & (x>1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재할 때,〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(-2)+f(1)=3$
ㄴ. $g(0)=-1$, $g(1)=-3$이면 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면 $g^{-1}(1)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48 함수 $f(x)=x^3+2x^2+6x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $F(x)=g(x)-\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$이다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $a=14$일 때, $F(28)=0$이다.
ㄴ. $a=4$일 때, 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 교점의 개수는 3이다.
ㄷ. 함수 $y=F(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $5<a<6$ 또는 $a>6$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

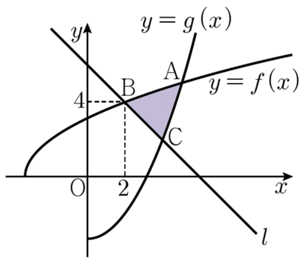
49 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=-\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만나고, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(4)+f(6)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

50 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-2}$
(나) $f(x)=f(-x)$
(다) $f(x)=f(x+2)$

함수 $g(x)=\dfrac{1}{7}|x|$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수를 구하시오.

51 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{3x+10}$의 그래프와 함수 $g(x)=\dfrac{1}{3}(x^2-10)$ $(x \ge 0)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선 l이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



52 [2025년 3월 고2 30번/4점]

실수 a $(a \neq 0)$과 2보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid x \neq 2$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x \geq n) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $\dfrac{3}{2}n$ 이다.

(나) $g(|f(5)|) \cdot g(n)=6$

단국대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 0	02 ⑤	03 ⑤
04 ②	05 ②, ④	06 ④
07 ①	08 3	09 ⑤
10 ③	11 ②	12 8
13 ②	14 21	15 ②
16 9	17 ③	18 24
19 10	20 129	21 16
22 ⑤	23 $\frac{7}{3}$	24 ②
25 2	26 ②	27 ②
28 12	29 ③	30 ③
31 ⑤	32 ⑤	33 ③
34 $\frac{13}{4}$	35 ⑤	36 ③
37 ⑤	38 ⑤	39 ⑤
40 ②	41 ②	42 ②
43 ②	44 26	45 ⑤
46 2	47 ⑤	48 ③
49 89	50 14	51 4
52 68		

단국대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 0

해설 1보다 작은 자연수는 없으므로 $A=\varnothing$

$\therefore n(A)=0$

02 정답 ⑤

해설 $\{2\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 정답 ⑤

해설 집합의 연산에서 미지수의 값을 구할 수 있는가?

$A-B=\{5, 9\}$이므로 $a=5$

04 정답 ②

해설 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$29=21+14-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=6$

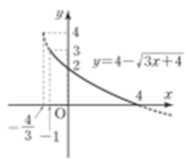
05 정답 ②, ④

해설 분모에 미지수 x가 포함되지 않은

② $\frac{x+1}{3}$, ④ $\frac{2x^2+1}{2}$는 다항식이므로 분수식이 아니다.

06 정답 ④

해설 함수 $y=4-\sqrt{3x+4}=-\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $-1\le x\le 4$에서 이 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 3, $x=4$일 때 최솟값 0 을 가지므로

$M=3,\ m=0$ $\therefore Mm=3\cdot 0=0$

07 정답 ①

해설 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

즉, $3\in B$이어야 하므로

$a^2-6=3,\ a^2=9$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(ⅰ) $a=-3$일 때

$A=\{3, 4\}$, $B=\{3, 4, 8\}$이므로 $A\subset B$

(ⅱ) $a=3$일 때

$A=\{-20, 3\}$, $B=\{3, 4, 8\}$이므로 $A\not\subset B$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-3$

08 정답 3

해설 두 함수가 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1),\ f(1)=g(1)$

이를 주어진 함수식에 대입하면

$-a-b=-3,\ a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

$\therefore a+b=3$

09 정답 ⑤

해설 $(g\circ f)^{-1}(1)=k$라 하면 $(g\circ f)(k)=1$

$(g\circ f)(k)=g(f(k))=g(k^2-2)$

$=(k^2-2)+3=k^2+1$

이므로 $k^2+1=1$에서 $k^2=0$

$\therefore\ k=0$

$\therefore\ (g\circ f)^{-1}(1)=0$

10 정답 ③

해설 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$에서 $|k|$가 같으면

평행이동 또는 대칭이동으로 겹칠 수 있다.

ㄱ. $y=\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$

ㄴ. $y=\dfrac{2x}{2x-1}=\dfrac{x}{x-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$

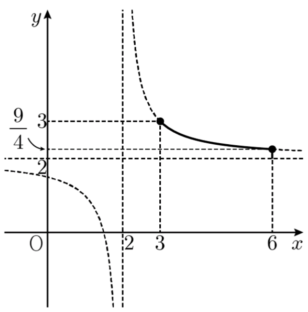
ㄷ. $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}=1+\dfrac{-2}{2x+1}=1+\dfrac{-1}{x+\frac{1}{2}}$

따라서 겹칠 수 있는 것은 ㄷ뿐이다.

11 정답 ②

해설 $y=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$이므로

함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$은 $x=3$일 때 최댓값 $M=3$,

$x=6$일 때 최솟값 $m=\dfrac{9}{4}$를 갖는다.

$\therefore\ M+m=\dfrac{21}{4}$

12 정답 8

해설 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n\}$에서 $n(A)=n$

$\{2,\ 4,\ 8,\ 16\}\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X는

집합 A의 부분집합 중 2, 4, 8, 16을 반드시 원소로 갖는

부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{n-4}=16=2^4$

$n-4=4$

$\therefore\ n=8$

13 정답 ②

해설 $(A\cup B)^c=\{4\}$, $(A-B)^c=\{2,\ 4,\ 5\}$

$(A\cup B)^c\subset X\subset (A-B)^c$, 즉 $\{4\}\subset X\subset\{2,\ 4,\ 5\}$

이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2\times2=4$(개) 이다.

14 정답 21

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$3x-a<0$에서 $x<\dfrac{a}{3}$

$\therefore\ P=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{a}{3}\right\}$

$x^2-6x-7\geq0$에서 $(x+1)(x-7)\geq0$

$\therefore\ x\leq-1$ 또는 $x\geq7$

즉, $Q=\{x|x\leq-1$ 또는 $x\geq7\}$이므로

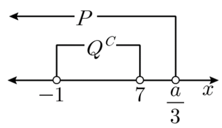
$Q^C=\{x|-1<x<7\}$

이때 p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로

$\sim q\Rightarrow p$

따라서 $Q^C\subset P$이므로 다음 그림에서

$7\leq\dfrac{a}{3}$ $\qquad\therefore\ a\geq21$



즉, 실수 a의 최솟값은 21이다.

15 정답 ②

해설 $a^2>$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1\geq 2ab$

$\therefore ab\leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$

$\frac{2}{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

16 정답 9

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4$

$\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉, $b=2a$일 때 성립)

17 정답 ③

해설 함수의 성질 이해하기

ㄱ. $f(12)=f(10\times1+2)=f(1)+2$
$=f(10\times0+1)+2=f(0)+1+2$
$=1+2=3$ (참)

ㄴ. $f(8\times123)=f(984)=21$,
$8f(123)=8(1+2+3)=48$ (거짓)

ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(10a+b)+c$
$=a+b+c$
$f(100c+10b+a)=f(10c+b)+a$
$=c+b+a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 정답 24

해설 $f(0)$, $f(1)$은 2, 4, 6, 8 중에서 하나의 값을 가져야 하고, $f(0)<f(1)$이므로
2, 4, 6, 8에서 뽑은 2개의 수 중 작은수는 $f(0)$, 큰 수는 $f(1)$이다.
따라서 $f(0)$, $f(1)$을 정하는 방법의 수는

$\frac{4\cdot3}{2!}=6$(가지)이다.

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 12, 14, 16, 18에서 뽑은 3개의 수 중 작은 순서대로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$이다.

$\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}=4$(가지)이다.

그러므로 조건을 만족하는 함수의 개수는 $6\cdot4=24$이다.

19 정답 10

해설 $5x-9=t$로 놓으면

$x=\frac{t+9}{5}$

따라서 $f(t)=10\cdot\frac{t+9}{5}+1=2t+19$

$\therefore f(x)=2x+19$

$y=2x+19$라 하면

$2x=y-19$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{19}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x-\frac{19}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{19}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{19}{2}$ 이므로

$a-b=10$

20 정답 129

해설 합성함수와 역함수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
$f(x)=5x+20$에서 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x-4$

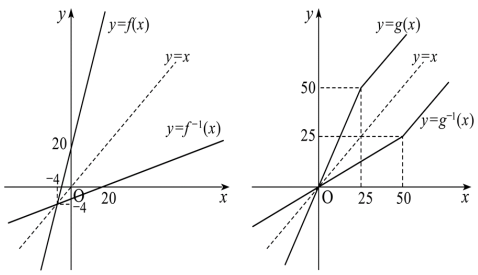
$g(x)=\begin{cases} 2x & (x<25) \\ x+25 & (x\geq 25)\end{cases}$에서 $g(x)$의 역함수는

$g^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (x<50) \\ x-25 & (x\geq 50)\end{cases}$

$\therefore\ f(g^{-1}(40))+f^{-1}(g(40))$

$=f\left(\frac{1}{2}\cdot 40\right)+f^{-1}(40+25)$

$=f(20)+f^{-1}(65)=120+9=129$



21 정답 16

해설 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{16}{k}\right)$ $(k>0)$라 하면

$Q(k,\ 0)$, $R\left(0,\ \frac{16}{k}\right)$

사각형 OQPR의 둘레의 길이는

$2\overline{PR}+2\overline{PQ}=2k+\frac{32}{k}$

이때 $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2k+\frac{32}{k}\geq 2\sqrt{2k\cdot\frac{32}{k}}$

$=2\cdot 8$

$=16$ (단, 등호는 $k=4$일 때 성립)

따라서 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

22 정답 ⑤

해설 분수함수 $y=\frac{1}{x-1}+1$ 의 그래프는

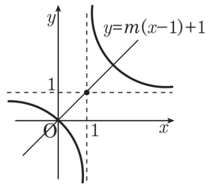
점근선이 $x=1,\ y=1$ 이고,

점 $(0,\ 0)$ 을 지난다.

$y=m(x-1)+1$ 의 그래프는 점 $(1,\ 1)$ 을 지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한 실수 m 의 값의 범위는

다음 그림에서 $m>0$ 이다.

따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤ 이다.



23 정답 $\frac{7}{3}$

해설 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\frac{a+b}{1+c}=1$ $\cdots$ ㉠

$f(x)=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$에서 점근선의 방정식은 $x=-c,\ y=a$이므로

$d=-c,\ a=2$ $\cdots$ ㉡

$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=0$이므로 $f(0)=\frac{1}{4}$에서 $\frac{b}{c}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ c=4b$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=\frac{1}{3},\ c=\frac{4}{3},\ d=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a+b+c+d=\frac{7}{3}$

24 정답 ②

해설 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}}=-\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 가 성립하려면

$a-2\geq 0,\ b+2<0$

$\therefore\ a\geq 2,\ b<-2,\ b<a$

$\therefore\ |a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$

$=(a-2)+(b-2)-(b-a)$

$=a-2+b-2-b+a$

$=2a-4$

25 정답 2

해설 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=9$이므로

$x-y=3$ ($\because x>y$)

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{5-2\sqrt{4}}{3}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $k=\dfrac{1}{3}$이므로 $3k+1=2$

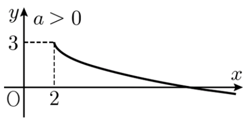
26 정답 ②

해설 $y=-\sqrt{ax-2a}+3=-\sqrt{a(x-2)}+3$

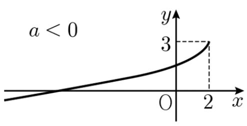
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 a의 부호에 따라

무리함수 $y=-\sqrt{ax-2a}+3$의 그래프는 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

① 그림에서 a의 값에 따라 정의역은
$\{x|x\geq 2\}$ 또는 $\{x|x\leq 2\}$ (거짓)

② 그림에서 치역은 $\{y|y\leq 3\}$이다. (참)

③ $y=-\sqrt{ax-2a}+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{ax-2a}-3$ (거짓)

④ $y=-\sqrt{ax-2a}+3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=-\sqrt{-ax-2a}+3$ (거짓)

⑤ 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ②이다.

27 정답 ②

해설 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a$, $y=c$

그림에서 $-a>0$, $c<0$, $b>0$

$\therefore a<0,\ b>0,\ c<0$ $\cdots$ ㉠

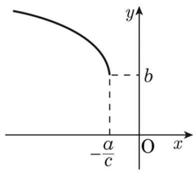
한편, $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로

$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\geq 0$, 이때 $c<0$이므로 $x\leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$

또, $y=\sqrt{cx+a}+b\geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이 제 2사분면만을 지난다.

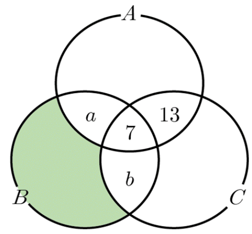


28 정답 12

해설 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 37,\ 38,\ 39\}$
집합 A의 모든 원소의 합이 140이므로 집합 A는
35 이상인 원소를 적어도 2개 가져야 한다.
(ⅰ) 35 이상인 원소가 2개일 때
35보다 작은 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은
$33+34=67$이므로 네 원소의 합이 140이 되려면
35 이상인 두 원소의 합이 73 이상이 되어야 한다.
① 35, 38을 원소로 갖는 경우
$A=\{33,\ 34,\ 35,\ 38\}$
$x_4-x_3+x_2-x_1=4$
② 35, 39를 원소로 갖는 경우
$x_1+x_2=66$이 되어야 한다.
그러나 만족하는 35 미만의 서로 다른 두 자연수
x_1, x_2는 존재하지 않는다.
③ 37, 38을 원소로 갖는 경우
$A=\{31,\ 34,\ 37,\ 38\}$
$x_4-x_3+x_2-x_1=4$
④ 37, 39를 원소로 갖는 경우
$A=\{30,\ 34,\ 37,\ 39\}$일 때
$x_4-x_3+x_2-x_1=6$
$A=\{31,\ 33,\ 37,\ 39\}$일 때
$x_4-x_3+x_2-x_1=4$
⑤ 38, 39를 원소로 갖는 경우
$A=\{29,\ 34,\ 38,\ 39\}$일 때
$x_4-x_3+x_2-x_1=6$
$A=\{30,\ 33,\ 38,\ 39\}$일 때
$x_4-x_3+x_2-x_1=4$
(ⅱ) 35 이상인 원소가 3개일 때
① 35, 37, 38을 원소로 갖는 경우
$A=\{30,\ 35,\ 37,\ 38\}$
$x_4-x_3+x_2-x_1=6$
② 35, 37, 39를 원소로 갖는 경우
$A=\{29,\ 35,\ 37,\ 39\}$
$x_4-x_3+x_2-x_1=8$
③ 35, 38, 39를 원소로 갖는 경우
$140-(35+38+39)=28$이므로 만족하지
않는다.
④ 37, 38, 39를 원소로 갖는 경우
$A=\{26,\ 37,\ 38,\ 39\}$
$x_4-x_3+x_2-x_1=12$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값은
12이다.

29 정답 ③

해설 K, S, L회사의 이동통신에 가입한 학생들의 집합을 각각
A, B, C라 하면 주어진 조건에 의하여
$n(A)=23$, $n(B)=18$, $n(C)=27$,
$n(A\cap B\cap C)=7$, $n(A\cap C)=20$
집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램으로 나타내면
다음 그림과 같다.



S회사의 이동통신에만 가입한 학생의 집합은 색칠한
부분과 같고, $n(B)=18$이므로 색칠한 부분에 속하는
학생 수는 $a+b$가 최대일 때 최소이고, $a+b$가 최소일 때
최대이다.
$a+7+13\le n(A)=23$에서 $a\le 3$이고
$b+7+13\le n(C)=27$에서 $b\le 7$이므로
$0\le a\le 3,\ 0\le b\le 7$
(ⅰ) $a=0,\ b=0$일 때, $a+b=0$으로 최소이므로
구하는 최댓값은
$M=n(B)-7-0=11$
(ⅱ) $a=3,\ b=7$일 때, $a+b=10$으로 최대이므로
구하는 최솟값은
$m=n(B)-7-10=1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $M-m=11-1=10$

30 정답 ③

해설 ㄷ이 참이면 ㄴ도 참이 되어 모순
ㄱ이 거짓이고 ㄴ이 참이면 ㄷ이 참이 되어 모순
따라서 ㄱ의 참이고 ㄴ, ㄷ이 거짓이다.
즉, 첫 번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째
구슬이 빨간색이다.

31 정답 ⑤

해설 $p: a^2+b^2=0$에서 $a=0,\ b=0$

$q: a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$에서

$(a-b)^3=0 \qquad \therefore a=b$

$r: |2a+b|=|2a-b|$에서

$2a+b=2a-b$ 또는 $2a+b=-(2a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Rightarrow r,\ r \not\Rightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p: a \neq 0$ 또는 $b \neq 0,\ \sim q: a \neq b$

따라서 $\sim p \not\Rightarrow \sim q,\ \sim q \Rightarrow \sim p$이므로

$\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. q이고 r는 $a=b=0$

따라서 $p \Leftrightarrow (q$이고 $r)$이므로 p는 q이고 r이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

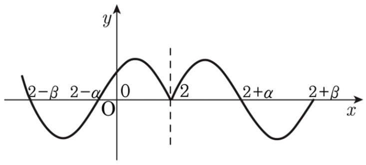
32 정답 ⑤

해설 $f(1+x)=f(3-x)$에서 x에 $x+1$을 대입하면

$f(2+x)=f(2-x)$

즉, $f(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이다.

이때 다음 그림과 같이 $f(x)=0$이 5개의 실근을 가지려면 $f(2)=0$이고, $2+\alpha$가 근일 때 $2-\alpha$도 근이어야 한다.



$\therefore 2+(2+\alpha)+(2-\alpha)+(2+\beta)+(2-\beta)=10$

33 정답 ③

해설 (ⅰ) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개

따라서 함수 f의 개수는 $5 \cdot 4=20$

(ⅱ) $Y'=\{f(1),\ f(2)\}$라 하면 Y'에서 Z로의 함수의 개수는 $2 \cdot 2=4$

그런데 합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z가 되려면 Y'에서 Z로의 함수 중 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수 2개는 제외되어야 한다.

또, 집합 $Y-Y'$의 원소에는 1 또는 2가 대응된다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 g의 개수는

$(4-2) \cdot 2^3=16$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는

$20 \cdot 16=320$

34 정답 $\dfrac{13}{4}$

해설 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0 \le x \le 3) \\ 4x-12 & (3 < x \le 4) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} 3x & (0 \le x < 1) \\ 3 & (1 \le x < 2) \\ -x+5 & (2 \le x < 3) \\ 2x-4 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$이므로

$(f \circ g)(x)=\begin{cases} -g(x)+3 & (0 \le g(x) \le 3) \\ 4g(x)-12 & (3 < g(x) \le 4) \end{cases}$

(ⅰ) $0 \le x < 1$일 때, $0 \le g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=-3x+3$

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $g(x)=3$이므로

$(f \circ g)(x)=-3+3=0$

(ⅲ) $2 \le x < 3$일 때, $2 < g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=x-2$

(ⅳ) $3 \le x \le \dfrac{7}{2}$일 때, $2 \le g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=-2x+7$

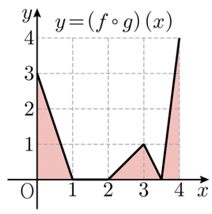
(ⅴ) $\dfrac{7}{2} < x \le 4$일 때, $3 < g(x) \le 4$이므로

$(f \circ g)(x)=8x-28$

이상에서

$(f \circ g)(x)=\begin{cases} -3x+3 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x < 2) \\ x-2 & (2 \le x < 3) \\ -2x+7 & \left(3 \le x \le \dfrac{7}{2}\right) \\ 8x-28 & \left(\dfrac{7}{2} < x \le 4\right) \end{cases}$이므로

함수 $y=(f \circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

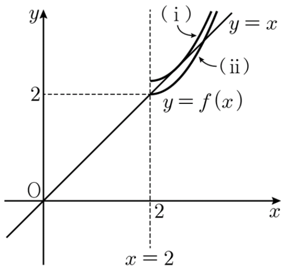


따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3+\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 1+\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4=\dfrac{13}{4}$

35 정답 ⑤

해설 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=x$ 위에 있다.
따라서 조건을 만족하려면
$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4\ (x \geq 2)$
의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(i) $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$가 접할 때,
$x^2-4x+k=x,\ x^2-5x+k=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라하면
$D=5^2-4k=0$
$\therefore\ k=\dfrac{25}{4}$

(ii) $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때,
$2^2-4\cdot 2+k=2$
$\therefore\ k=6$

(i), (ii)에서 $6 \leq k < \dfrac{25}{4}$

36 정답 ③

해설 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right),\ \mathrm{Q}\left(a+3,\ \dfrac{k}{a+3}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\dfrac{k}{a+3}-\dfrac{k}{a}}{a+3-a}=-1$$

$\dfrac{k}{a+3}-\dfrac{k}{a}=-3,\ \dfrac{-3k}{a(a+3)}=-3$

$\therefore\ k=a(a+3)$

$f(a)=\dfrac{k}{a}=a+3,\ f(a+3)=\dfrac{k}{a+3}=a$이므로

따라서 점 P의 좌표는 $(a,\ a+3)$, 점 Q의 좌표는 $(a+3,\ a)$

이때 조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a,\ -a-3)$, 점 S의 좌표는 $(-a-3,\ -a)$

따라서 직선 PS의 기울기는 $\dfrac{a+3-(-a)}{a-(-a-3)}=1$이고,

직선 RS의 기울기는 $\dfrac{-a-(-a-3)}{-a-3-(-a)}=-1,$

직선 QR의 기울기는 $\dfrac{a-(-a-3)}{a+3-(-a)}=1$이므로

사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+3-a)^2+\{a-(a+3)\}^2}=3\sqrt{2}$

$\quad\ \overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{\{-(a+3)-a\}^2+\{-a-(a+3)\}^2}$

$\quad\quad\ =\sqrt{2}(2a+3)$

즉, 사각형 PQRS의 넓이는

$3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(2a+3)=6(2a+3)=18\sqrt{2}$

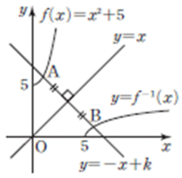
따라서 $a=\dfrac{3\sqrt{2}-3}{2}$이므로

$k=a(a+3)$

$\quad=\dfrac{3\sqrt{2}-3}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}=\dfrac{9}{4}$

37 정답 ⑤

해설



위의 그림과 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 선분 AB의 길이의 최솟값은 함수 $f(x)=x^2+5\ (x\geq 0)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 최솟값의 2배이다.

점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+5)\ (a>0)$라 하면 점 P와 직선 $y=x$, 즉 $-x+y=0$ 사이의 거리 d는

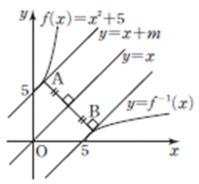
$$d=\frac{|-a+a^2+5|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

이므로 d의 최솟값은 $\frac{19\sqrt{2}}{8}$이다.

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{19\sqrt{2}}{8}=\frac{19\sqrt{2}}{4}$$

(다른 풀이)



위의 그림과 같이 직선 $y=x$와 평행하고, 함수 $f(x)=x^2+5$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 $y=x+m$이라 하면 이차방정식 $x^2+5=x+m$, 즉 $x^2-x+5-m=0$의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-1)^2-4(5-m)=0$$

$$4m-19=0 \qquad \therefore m=\frac{19}{4}$$

이때, 두 직선 $y=x$와 $y=x+\frac{19}{4}$는 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+\frac{19}{4}$, 즉 $4x-4y+19=0$ 사이의 거리와 같으므로 거리 d는

$$d=\frac{|19|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{19}{4\sqrt{2}}=\frac{19\sqrt{2}}{8}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2\cdot\frac{19\sqrt{2}}{8}=\frac{19\sqrt{2}}{4}$$

38 정답 ⑤

해설 ㄱ. $A_1=\{x|0\leq x\leq 3\}$

$A_2=\{x|1\leq x\leq 4\}$

$A_3=\{x|2\leq x\leq 5\}$

$A_4=\{x|3\leq x\leq 6\}$

따라서 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{3\}$ (참)

ㄴ. $|l-m|\leq 3$을 만족시키는 9 이하의 자연수 l, m에 대하여 $l\leq m$이라 하자.

(ⅰ) $|l-m|=0$일 때

$m=l$이고 $A_l\cap A_m=A_l\neq\varnothing$

(ⅱ) $|l-m|=1$일 때

$m=l+1$이고

$A_l\cap A_m$

$=A_l\cap A_{l+1}=\{x|l\leq x\leq l+2\}\neq\varnothing$

(ⅲ) $|l-m|=2$일 때

$m=l+2$이고

$A_l\cap A_m$

$=A_l\cap A_{l+2}=\{x|l+1\leq x\leq l+2\}\neq\varnothing$

(ⅳ) $|l-m|=3$일 때

$m=l+3$이고

$A_l\cap A_m$

$=A_l\cap A_{l+3}=\{l+2\}\neq\varnothing$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 9 이하의 자연수 l, m에 대하여 $|l-m|\leq 3$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

ㄷ. 자연수 n에 대하여 경우를 나누어 생각해보면

(ⅰ) 9 이하의 자연수 n

집합 $\{p\}$ $(n-1\leq p\leq n+2)$가 $\{p\}\cap A_n\neq\varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(ⅱ) 8 이하의 자연수 n

$A_n\cap A_{n+1}=\{x|n\leq x\leq n+2\}$

집합 $\{p\}$ $(n\leq p\leq n+2)$가 $\{p\}\cap(A_n\cap A_{n+1})\neq\varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(ⅲ) 7 이하의 자연수 n

$A_n\cap A_{n+1}\cap A_{n+2}$

$=\{x|n+1\leq x\leq n+2\}$

집합 $\{p\}$ $(n+1\leq p\leq n+2)$가 $\{p\}\cap(A_n\cap A_{n+1}\cap A_{n+2})\neq\varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}와 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(ⅳ) 6 이하의 자연수 n

$A_n\cap A_{n+1}\cap A_{n+2}\cap A_{n+3}=\{n+2\}$

집합 $\{p\}$ $(p=n+2)$가

$\{p\}\cap(A_n\cap A_{n+1}\cap A_{n+2}\cap A_{n+3})\neq\varnothing$을

만족시키므로
집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}과
서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(ⅴ) 5 이하의 자연수 n
$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} \cap A_{n+4} = \varnothing$
따라서 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, A_{n+4}와
서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 1인 집합은
존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에 따라 $X=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$로 두면
집합 X는 모든 A_k와 서로소가 아니다.
모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중
원소의 개수가 최소인 집합을 B라 하면 $B \subset X$
$3 \notin B$이면 $A_1 \cap B = \varnothing$이므로
$3 \in B$이어야 하고,
$8 \notin B$이면 $A_9 \cap B = \varnothing$이므로
$8 \in B$이어야 한다.
이때 $\{3, 8\} \cap A_5 = \varnothing$이고
$A_5 = \{x \mid 4 \le x \le 7\}$이므로
$q \in A_5$ $(4 \le q \le 7)$에 대하여 $q \in B$이어야 한다.
따라서 $B = \{3, q, 8\}$이고
B의 원소의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 정답 ⑤

해설 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

드모르간의 법칙에 의하여
$A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = (B-A)^C$ 이므로
조건 (가)에서
$n(A \cup B^C) = n((B-A)^C) = 7$
$B-A = \{4, 7\}$에서 $n(B-A) = 2$
$(B-A) \cup (B-A)^C = U$,
$(B-A) \cap (B-A)^C = \varnothing$ 이므로

$$\begin{aligned} n(U) &= n(B-A) + n((B-A)^C) \\ &= n(B-A) + n(A \cup B^C) \\ &= 2+7=9 \end{aligned}$$

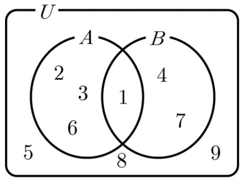
그러므로 $k=9$이고 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서
집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이
서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.
따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고,
모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로
m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(ⅰ) $m=6$일 때
집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.
이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의
원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $m=9$일 때
집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.
이때 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는
존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=6$이고 이때 $B=\{1, 4, 7\}$이다.

$$\begin{aligned} \therefore A \cup B &= \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \end{aligned}$$



$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5, 8, 9\}$이므로
집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은
$5+8+9=22$

40 정답 ②

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고

조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로

$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$

$A-X=\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{1,\ 2\}\subset X$이고,

$B-X=\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{6,\ 7\}\subset X$이므로

$\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}\subset X$ $\cdots$ ㉠

조건 (다)에서

$(X-A)\cap(X-B)=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$

$=X\cap(A^C\cap B^C)$

$=X\cap(A\cup B)^C$

$=X\cap\{8,\ 9,\ 10\}\neq\varnothing$ $\cdots$ ㉡

조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여

$n(X\cap\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\})=2$ $\cdots$ ㉢

㉡에 의하여 세 원소 $8,\ 9,\ 10$ 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.

집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고

㉢에 의하여 다섯 원소 $3,\ 4,\ 5,\ 9,\ 10$ 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로

$3\in X$

따라서 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+3+6+7+8=27$

41 정답 ②

해설 집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로

x는 30 이하의 자연수이고 $y-k$는 40의 약수이다.

$y\in U$이므로 $y-k<40$이고

$x\neq 1$

또한, $x\in U$이므로

$x\neq 40$

$y-k$와 x 사이의 관계는 다음 표와 같다.

$y-k$	2	4	5	8	10	20
x	20	10	8	5	4	2

$A_k\subset\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 20\}$

이때 $\dfrac{40-x}{5}\in U$에서 $40-x$는 5의 배수이므로

$B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

$(A_k\cap B^C)\subset\{2,\ 4,\ 8\}$

(i) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=2$, $y-k=20$이고 $y=20+k\leq 30$이므로

$k\leq 10$

(ii) $4\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=4$, $y-k=10$이고 $y=10+k\leq 30$이므로

$k\leq 20$

(iii) $8\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=8$, $y-k=5$이고 $y=5+k\leq 30$이므로

$k\leq 25$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$k\leq 10$일 때 $A_k\cap B^C=\{2,\ 4,\ 8\}$

$10<k\leq 20$일 때 $A_k\cap B^C=\{4,\ 8\}$

$20<k\leq 25$일 때 $A_k\cap B^C=\{8\}$

이때 $n(A_k\cap B^C)=2$이므로

$10<k\leq 20$

따라서 모든 자연수 k의 개수는 10이다.

42 정답 ②

해설 $(x+5)^2+(y+3)^2=9$

$(x-a-2)^2+(y-a)^2=a^2$

$(x-b-2)^2+(y-b)^2=b^2$

각각을 차례로 O_1, O_2, O_3이라 하자.

집합 A, B, C는 좌표평면에서 직선 $y=\dfrac{15}{8}x$가 세 원 O_1, O_2, O_3과 각각 만나는 점의 집합이다.

원 O_1의 중심 $(-5,\ -3)$과 직선 $y=\dfrac{15}{8}x$

즉, $15x-8y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-75+24|}{\sqrt{15^2+8^2}}=3$

이때 원 O_1의 반지름의 길이가 3이므로

원 O_1과 직선 $y=\frac{15}{8}x$는 한 점에서 만난다.

$\therefore\ n(A)=1$

세 원 O_1, O_2, O_3은 모두 x축에 접하고 원 O_1의 중심은 제3사분면, 두 원 O_2, O_3의 중심은 제1사분면에 있으므로 원 O_1은 두 원 O_2, O_3과 만나지 않는다.

$\therefore\ A\cap(B\cup C)=\varnothing$

따라서 $n(A)=1$, $A\cap(B\cup C)=\varnothing$ 이므로

$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키기 위해

$n(B\cup C)=2 \quad \cdots ㉠$

두 원 O_2, O_3의 중심 $(a+2,\ a)$, $(b+2,\ b)$는 모두 직선 $y=x-2$ 위의 점이다.

직선 $y=x-2$ 위의 점 $(k+2,\ k)$ $(k\geq 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원에 대하여 원의 중심 $(k+2,\ k)$와 직선 $y=\frac{15}{8}x$ 사이의 거리는

$\frac{|15(k+2)-8k|}{\sqrt{15^2+8^2}}=\frac{7k+30}{17}$

따라서 점 $(k+2,\ k)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 직선 $y=\frac{15}{8}x$는 $k=3$이면

$k=\frac{7k+30}{17}$ 이므로

서로 접하고,

$k>3$이면 $k>\frac{7k+30}{17}$ 이므로

서로 다른 두 점에서 만난다.

$3\leq a<b$에서 $a\geq 3$이므로

$n(B)\geq 1 \quad \cdots ㉡$

$3\leq a<b$에서 $b>3$이므로

$n(C)=2 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $B\subset C$이고, $a<b$에서 $B\neq C$이므로

$n(B)=1$

따라서 원 O_2와 직선 $y=\frac{15}{8}x$는 서로 접하고

$a=3$이다.

$O_2:(x-5)^2+(y-3)^2=9$에 $y=\frac{15}{8}x$를 대입하면

$(x-5)^2+(y-3)^2=9$

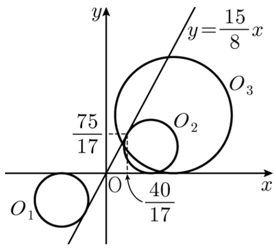
$(x-5)^2+\left(\frac{15}{8}x-3\right)^2=9$

$\frac{289}{64}x^2-\frac{170}{8}x+25=0$

$\left(\frac{17}{8}x-5\right)^2=0$

$\therefore\ x=\frac{40}{17},\ y=\frac{75}{17}$

즉, 원 O_2와 직선 $y=\frac{15}{8}x$의 교점은 $\left(\frac{40}{17},\ \frac{75}{17}\right)$이다.



이때 $B\subset C$이므로

$\left(\frac{40}{17},\ \frac{75}{17}\right)\in C$

따라서 $\left(\frac{40}{17},\ \frac{75}{17}\right)$가 원 O_3 위의 점이어야 하므로

$O_3:(x-b-2)^2+(y-b)^2=b^2$에

$x=\frac{40}{17},\ y=\frac{75}{17}$를 대입하면

$\left(\frac{40}{17}-b-2\right)^2+\left(\frac{75}{17}-b\right)^2=b^2$

$\left(\frac{6}{17}-b\right)^2+\left(\frac{75}{17}-b\right)^2=b^2$

$b^2-\frac{162}{17}b+\frac{5661}{289}=0$

$(b-3)\left(b-\frac{111}{17}\right)=0$

$\therefore\ b=\frac{111}{17}$ $(\because\ b>a=3)$

따라서 $a=3,\ b=\frac{111}{17}$ 이므로

$a+b=3+\frac{111}{17}=\frac{162}{17}$

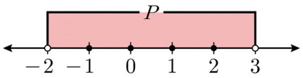
43 정답 ②

해설 연립부등식을 활용하여 조건이 참이 되도록 하는 문제를 해결한다.

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)<0$이므로

조건 p : $x^2-x-6<0$의 진리집합 P는

$P=\{x\,|\,-2<x<3\}$



$x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8$

$=x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4)$

$=(x-2a+2)(x-a+4)$이므로

조건 q : $x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq 0$의 진리집합 Q는 a의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

(ⅰ) $2a-2<a-4$일 때 즉, $a<-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\leq 2a-2$ 또는 $x\geq a-4\}$

(ⅱ) $2a-2=a-4$일 때 즉, $a=-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\neq -6$인 모든 실수$\}$

(ⅲ) $2a-2>a-4$일 때 즉, $a>-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\leq a-4$ 또는 $x\geq 2a-2\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\leq -2$일 때

$P\cap Q=\{x\,|\,-2<x<3\}$이므로

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

(ⅲ)에서 $a>-2$일 때

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면

$1<2a-2\leq 2$이거나 $-1\leq a-4<0$이다.

따라서 $\frac{3}{2}<a\leq 2$ 또는 $3\leq a<4$이므로

가능한 정수 a는 2 또는 3이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 5이다.

44 정답 26

해설 $f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$이므로

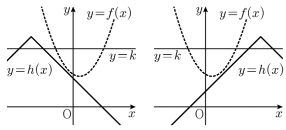
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

한편, $-|x-t|+11=\begin{cases} x-t+11 & (x<t) \\ -x+t+11 & (x\geq t)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여 대칭이다.

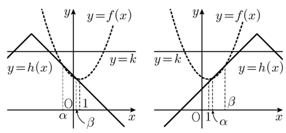
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지로 나타난다.

(ⅰ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

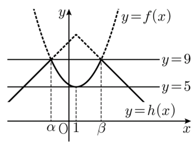
(ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<\beta\leq 1$ 또는 $1\leq\alpha<\beta$)일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<1<\beta$)일 때,

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=1$일 때,



두 교점은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

이때 β의 값을 구하면

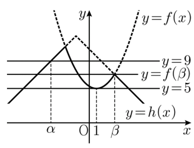
$x^2-2x+6=-x+12$, $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$, $x=-2$ 또는 $x=3$

$\beta>1$이므로 $\beta=3$, $g(3)=-|3-1|+11=9$

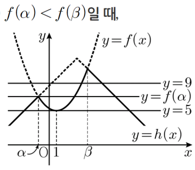
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5뿐이다.

② $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\beta)$ $(5<f(\beta)<9)$

③ $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\alpha)$ $(5<f(\alpha)<9)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 명제 '어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $5\leq k<9$

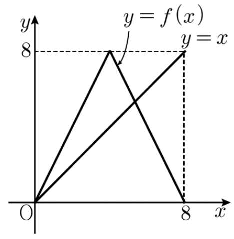
따라서 자연수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$5+6+7+8=26$

45 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(f(4))=f(8)=0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같으므로 다음 그림에서 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면
$f(t)=t$이므로 $-|2t-8|+8=t$
$-2t+16=t$ 또는 $2t=t$
$\therefore\ t=\dfrac{16}{3}$ 또는 $t=0$

(ⅰ) $f(x)=\dfrac{16}{3}$일 때,
$-|2x-8|+8=\dfrac{16}{3}$이므로
$-2x+16=\dfrac{16}{3}$ 또는 $2x=\dfrac{16}{3}$
$\therefore\ x=\dfrac{16}{3}$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

(ⅱ) $f(x)=0$일 때,
$-|2x-8|+8=0$이므로
$-2x+16=0$ 또는 $2x=0$
$\therefore\ x=8$ 또는 $x=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 $\dfrac{16}{3}+\dfrac{8}{3}+0+8=16$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46 정답 2

해설 $f(x)=ax+3$에서 $ax+3=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t-3}{a}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2-2x-3$에서

$$g(t)=\left(\frac{t-3}{a}\right)^2-2\left(\frac{t-3}{a}\right)-3$$
$$=\frac{t^2-6t+9}{a^2}-2\left(\frac{t-3}{a}\right)-3$$
$$=\frac{t^2-2(a+3)t-3a^2+6a+9}{a^2}$$
$$\therefore\ g(x)=\frac{x^2-2(a+3)x-3a^2+6a+9}{a^2}$$

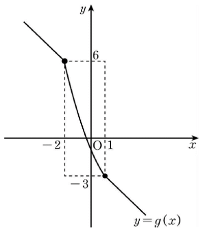
이때 $a^2>0$이므로 부등식 $g(x)\le 0$을 만족시키려면
$x^2-2(a+3)x-3a^2+6a+9\le 0$이어야 한다.
즉, $x^2-2(a+3)x-3a^2+6a+9\le 0$에서
$(x+a-3)(x-3a-3)\le 0$
$3-a\le x\le 3a+3$ ($\because$ a는 자연수)
위의 x의 값의 범위를 만족시키는 정수해의 개수가 10 이하가 되려면 $(3a+3)-(-a+3)+1\le 10$
$\therefore\ a\le\dfrac{9}{4}$
따라서 자연수 a의 최댓값은 2이다.

47 정답 ⑤

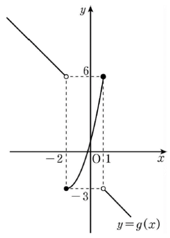
해설 ㄱ. 함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때,



(ⅱ) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때,



(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(-2)+f(1)=3$ (참)

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$에서 $f(x)=ax^2+bx-1$

(a는 양의 상수, b는 상수)로 놓을 수 있다.

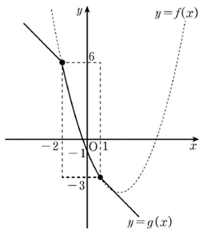
$g(1)=f(1)=-3$이면 $f(-2)=6$이어야 하므로

$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$

연립방정식 $\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a-2b=7 \end{cases}$을 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$이므로

곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)



ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로

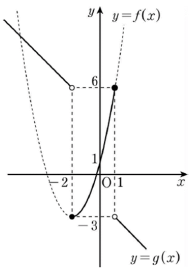
$f(x)=a(x+2)^2+p$ (a는 양의 상수, p는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 함수 $g(x)$가 일대일대응이므로

$f(-2)=-3$, $f(1)=6$

$p=-3$, $9a+p=6$에서 $a=1$이므로 $f(x)=(x+2)^2-3$

따라서 $g(0)=f(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

48 정답 ③

해설 ㄱ. $a=14$일 때, $F(x)=g(x)-\frac{x}{14}$

$F(28)=g(28)-2$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^3+2x^2+6x$의 역함수이므로 $g(28)=k$라 하면

$f(k)=28$, $k^3+2k^2+6k=28$

$k^3+2k^2+6k-28=0$

위의 방정식에 $k=2$를 대입하면 성립하므로 다음 그림과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	2	6	-28
		2	8	28
	1	4	14	0

$(k-2)(k^2+4k+14)=0$

이때 이차방정식 $k^2+4k+14=0$이 실근을 갖지 않으므로 $k=2$

즉, $g(28)=2$이므로

$F(28)=g(28)-2=2-2=0$ (참)

ㄴ. $a=4$일 때, $F(x)=g(x)-\frac{x}{4}$

함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점의 개수는 방정식 $F(x)=\frac{3}{4}x$, 즉 $g(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

또한, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 방정식 $g(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x$에서

$x^3+2x^2+6x=x$, $x^3+2x^2+5x=0$

$x(x^2+2x+5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x^2+2x+5=0$

그런데 이차방정식 $x^2+2x+5=0$이 실근을 갖지 않으므로 방정식 $f(x)=x$의 실근은 $x=0$뿐이다.

따라서 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=F(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 방정식 $F(x)=g(x)-\frac{x}{a}=0$, 즉 $g(x)=\frac{x}{a}$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

한편, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고, 직선 $y=\frac{x}{a}$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=ax$이므로 방정식 $g(x)=\frac{x}{a}$의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $f(x)=ax$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=ax$에서

$x^3+2x^2+6x=ax$

$x^3+2x^2+(6-a)x=0$,

$x\{x^2+2x+(6-a)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x^2+2x+6-a=0$

방정식 $f(x)=ax$의 실근의 개수가 3이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+6-a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $x^2+2x+6-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(6-a)>0$에서

$a>5$

또한, 이차방정식 $x^2+2x+6-a=0$이 $x=0$을 근으로 갖지 않으므로 $6-a\neq 0$

$\therefore\ a\neq 6$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$5<a<6$ 또는 $a>6$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

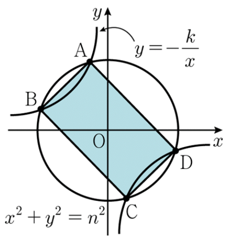
49 정답 89

해설 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=-\dfrac{k}{x}$가

두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이므로
원과 곡선의 교점은 서로 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$에
대하여 대칭이다.
즉, 네 점의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{A}\left(-a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{k}{a},\ a\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ -\dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{k}{a},\ -a\right)$

$\left(\text{단, } 0<a<\dfrac{k}{a}\right)$



직사각형의 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2 배가
되려면 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$이므로

$$2\sqrt{\left(-a+\frac{k}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{a}-a\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{k}{a}+a\right)^2+\left(-a-\frac{k}{a}\right)^2}$$

$$2\sqrt{2}\left|\frac{k}{a}-a\right|=\sqrt{2}\left|a+\frac{k}{a}\right|$$

$$2\left(\frac{k}{a}-a\right)=a+\frac{k}{a}\quad\left(\because\ 0<a<\frac{k}{a}\right)$$

$$\frac{2k}{a}-2a=a+\frac{k}{a}$$

$\therefore\ k=3a^2$ $\cdots$ ㉠

$\mathrm{A}\left(-a,\ \dfrac{k}{a}\right)$는 원 $x^2+y^2=n^2$ 위의 점이므로

$$a^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2=n^2$$

위 식에 ㉠을 대입하면

$$a^2+\frac{9a^4}{a^2}=n^2$$

$$\therefore\ a^2=\frac{n^2}{10}$$

㉠에서 $a^2=\dfrac{k}{3}$ 이므로 $k=\dfrac{3n^2}{10}$

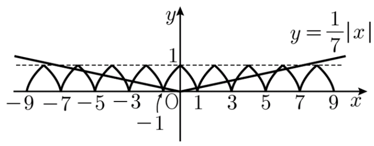
$$\therefore\ f(n)=\frac{3n^2}{10}$$

$$\therefore\ f(2)+f(4)+f(6)=\frac{12}{10}+\frac{48}{10}+\frac{108}{10}=\frac{84}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=84$ 이므로
$p+q=89$

50 정답 14

해설 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여
대칭이다.
또한, 조건 (다)에서 함수 $f(x)$의 그래프는
$-1\le x\le 1$에서의 개형이 반복적으로 나타나는
형태이다.
즉, 주어진 조건을 만족하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는
아래 그림과 같다.



따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)=\dfrac{1}{7}|x|$의 그래프의 교점의
개수가 14이므로
구하는 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수는 14이다.

51 정답 4

해설 $y=\sqrt{3x+10}$ 으로 놓고 양변을 제곱하면
$y^2=3x+10$

x에 대하여 풀면 $x=\dfrac{y^2-10}{3}$ $(y\ge 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{x^2-10}{3}$ $(x\ge 0)$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{3}(x^2-10)$ $(x\ge 0)$

즉, 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로
두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=g(x)$의 그래프와
직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\dfrac{1}{3}(x^2-10)=x$에서 $x^2-10=3x$

$x^2-3x-10=0$, $(x+2)(x-5)=0$

$\therefore\ x=5$ $(\because\ x\ge 0)$

따라서 두 함수의 그래프의 교점 A의 좌표는 $(5,\ 5)$이다.
또, 점 C는 점 $\mathrm{B}(2,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동한 점과 같으므로 $\mathrm{C}(4,\ 2)$
점 $\mathrm{B}(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선 l의 방정식은
$y-4=-(x-2)$
$\therefore\ x+y-6=0$
점 $\mathrm{A}(5,\ 5)$에서 직선 $l:x+y-6=0$에 내린
수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|1\cdot 5+1\cdot 5-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

두 점 $\mathrm{B}(2,\ 4)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-4)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$$

52 정답 68

해설 함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

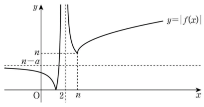
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\ge n)\end{cases}$$

$$\frac{ax-an}{x-2}-n=\frac{a(x-2)+2a-an}{x-2}-n$$
$$=\frac{a(2-n)}{x-2}+a-n$$

이므로

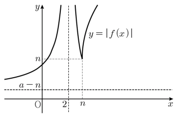
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-n)}{x-2}+a-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\ge n)\end{cases}$$

(ⅰ) $0<a<n$인 경우



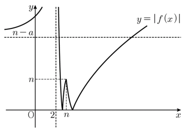
$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,
$g(0)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a>n$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,
$g(0)=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a<0$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, 이때

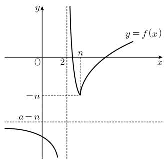
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } n<t\le n-a)\\ 3 & (t=n \text{ 또는 } t>n-a)\\ 4 & (0<t<n)\end{cases} \quad \cdots ㉠$$

$g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $n-a$이다. 조건 (가)에서

$n-a=\dfrac{3}{2}n$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}n$이고

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{n^2-2n}{2x-4}-\dfrac{3}{2}n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n)\\ \dfrac{1}{2}n\sqrt{x-n}-n & (x\ge n)\end{cases}$$

조건 (나)에서 $g(n)=3$이므로 $g(|f(5)|)=2$



$f(5)<0$인 경우 $-n<f(5)<0$이므로 ㉠에서 $g(|f(5)|)=4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ f(5)\ge 0$

즉, ㉠에서 $f(5)=0$ 또는 $n<f(5)\le\dfrac{3}{2}n$

(a) $f(5)=0$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n=0$

$2n=n\sqrt{5-n}$

$2=\sqrt{5-n}$

$n=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n=\dfrac{1}{6}n(n-11)=0$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 11이다.

(b) $n<f(5)\le\dfrac{3}{2}n$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n$이므로

$n<\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n\le\dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\le\dfrac{3}{2}$

$4<\sqrt{5-n}\le 5$

그런데 $2<n\le 5$에서 $\sqrt{5-n}<\sqrt{3}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n$
$\quad=\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n$

$n<\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n\le\dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{6}n-\dfrac{11}{6}\le\dfrac{3}{2}$

$6<n-11\le 9$

$17<n\le 20$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 $18,\ 19,\ 20$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값은 $11,\ 18,\ 19,\ 20$이고 그 합은

$11+18+19+20=68$