(5) 행렬을 간단히 하는 요령

❶ $A^2+A+E=O \Rightarrow A^3=E$

(3개 항 반복, 연속된 3개의 항의 합 0)

❷ $A^2-A+E=O \Rightarrow A^3=-E \Rightarrow A^6=E$

(6개 항 반복, 연속된 6개의 항의 합 0)

(6) 행렬의 차수가 높은 경우 차수를 낮추는 요령

(두 식을 만족하는 이차식을 찾는다.)

❶ $\begin{pmatrix} A+B=E \\ AB=O \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A^2-A=O \\ B^2-B=O \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^n=A \\ B^m=B \end{pmatrix} \Rightarrow A^n+B^m=A+B=E$

❷ $\begin{pmatrix} A+B=O \\ AB=-E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A^2=E \\ B^2=E \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^n+B^n=O & (n:\text{홀수}) \\ A^n+B^n=2E & (n:\text{짝수}) \end{pmatrix}$

❸ $\begin{pmatrix} A+B=-E \\ AB=E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A^2+A+E=O \\ B^2+B+E=O \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^3=E \\ B^3=E \end{pmatrix} \Rightarrow A^n+B^n=\begin{pmatrix} -E & (n=3k+1) \\ -E & (n=3k+2) \\ 2E & (n=3k) \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} A^n=E \\ A^m=E \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^k=E$ **(단,** $k:m,\ n$ **최대공약수)**

예) $A^3=E,\ A^5=E \Rightarrow$ **3,5의 최대공약수 1이므로** $A=E$

(8) 행렬식(determinant)의 성질

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad D=ad-bc$

❶ $D(A\pm B)\neq D(A)\pm D(B)$

❷ $D(A\times B)=D(A)\times D(B)$

❸ $D(kA)=k^2D(A)$ (단,$k\neq 0$)

❹ $D(A^{-1})=(D(A))^{-1}$

❺ $D(A^n)=(D(A))^n$

예) 행렬 A,B**의 역행렬이 존재하지 않는다.** $D(AB)=D(A)D(B)=0$

따라서 AB**의 역행렬이 존재하지 않는다.**

예) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$**이고** $P=BAB^{-1}$**일 때,** $P^5=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**라 하면**

$ad-bd$**의 값은? 5**

[notes]

(9) 역행렬의 성질

❶ $(A^{-1})^{-1}=A$

❷ $E^{-1}=E$

❸ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

❹ $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

❺ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$ (n은 양의 정수)

❻ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ ($k\neq 0$인 실수)

❼ $A=A^{-1}$이면 $A^2=E$

❽ $AX=B$이면 $X=A^{-1}B$,

$YA=B$이면 $Y=BA^{-1}$

❾ $A=PBP^{-1}$일 때

$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$이다.

(10) 역행렬과 연립일차방정식

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$를 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 이고, 그 해는

❶ $ad-bc\neq 0$일 때

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ ⇦ 한 쌍의 해

❷ $ad-bc=0$일 때 ⇦ 해가 없다 또는 해가 많다

> ☞ x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
>
> i) $ad-bc\neq 0$일 때 한 쌍의 해($x=0$, $y=0$)
>
> ii) $ad-bc=0$일 때 $x=0$, $y=0$ 이외에도 해

(11) 전치행렬 (transpos matrix)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

❶ $(A^T)^T=A$

❷ $(A\times B)^T=(B)^T\times(A)^T$

❸ $(kA)^T=k(A)^T$ (단, $k\neq 0$)

[notes]

❹ $D(A^T) = (D(A))$

❺ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(12) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad T(A) = a + d$

❶ $T(pA + qB) = pT(A) + qT(B)$

❷ $T(AB) = T(BA)$

❸ $T(A) = 0 \rightarrow A^2 = kE$

예) $AB - BA = A$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **일 때,** $a + d$**의 값은? 0**

(11) $(A - \alpha E), (A - \beta E)$각 각 역행렬이 존재하지 않을 때

$\Rightarrow (A - \alpha E) \times (A - \beta E) = O$

예) 이차 정사각행렬 A**와 이차단위행렬** E**에 대하여** $A - E$**와** $A + 2E$**가 모두 역행렬을 갖지 않을 때,** A^3**을** A**와** E**로 나타내면? 답.** $3A - 2E$

[notes]