마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 보기 중 절대부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, x, y는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $x^2 \geq 0$ ㄴ. $x^3 \geq 0$

ㄷ. $|x|+|y|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

02 두 실수 a, b에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $a^2+3b^2 \geq 2ab$

ㄴ. $\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \leq \dfrac{a-b}{2}$

ㄷ. $|a-b| \geq ||a|-|b||$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 다음은 a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$를 증명하는 과정이다.

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$를 정리하면

$\boxed{(가)}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\boxed{(나)}0$

따라서 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \geq 0$이므로

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{2}$	$\leq$
②	$\frac{1}{2}$	$\geq$
③	2	$\leq$
④	2	$\geq$
⑤	2	$=$

04 다음은 실수 a, b에 대하여
부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
> $=2(|ab|-ab) \geq 0$
> 따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$이므로
> $|a|+|b| \geq |a+b|$

위의 증명과정에 사용되지 않은 성질은?

① $|a| \geq a$
② $a \geq b$, $b \geq c$이면 $a \geq c$
③ $|a|^2=a^2$
④ $a-b \geq 0$이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$이면 $a \geq b$

05 $a \geq 0$, $b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

> **증명**
> $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\boxed{(나)}^2}{2}$ 이므로 부등식
> $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다. 이때
> 등호는 $\boxed{(다)}$ 일 때, 성립한다.

① $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
② $\geq$, $a-b$, $a=b=0$
③ $>$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
④ $>$, $a-b$, $a=b$
⑤ $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a \geq b$

06 $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때,
$\left(\dfrac{3a}{2b}+\dfrac{3b}{2c}\right)\left(\dfrac{3b}{2c}+\dfrac{3c}{2a}\right)\left(\dfrac{3c}{2a}+\dfrac{3a}{2b}\right)$의 최솟값은?

① 25　　② 27　　③ 29
④ 31　　⑤ 33

07 a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

08 $x>0$, $y>0$, $z>0$일 때,
$\frac{3y+3z}{2x}+\frac{3z+3x}{2y}+\frac{3x+3y}{2z}$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

09 두 양수 a, b에 대하여 $2a+27b+\frac{8}{a}+\frac{3}{b}$의 최솟값은?

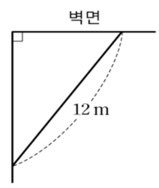
① 10 ② 14 ③ 18
④ 22 ⑤ 26

10 $a>0$, $b>0$이고 $x=2a+\frac{5}{b}$, $y=2b+\frac{5}{a}$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 α, 그때의 a, b의 값을 각각 β, γ라 하자. 이때 $\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 180 ② 190 ③ 200
④ 210 ⑤ 220

11 실수 x, y에 대하여
$2x^2+3y^2-2y+\frac{36}{2x^2+2y^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

12 다음 그림과 같이 수직으로 만나는 두 벽면에 길이가 $12\ \mathrm{m}$인 철망을 이용하여 직각삼각형 모양의 울타리를 만들려고 한다. 이때, 울타리의 넓이의 최댓값은?



① $28\ \mathrm{m}^2$ ② $30\ \mathrm{m}^2$
③ $32\ \mathrm{m}^2$ ④ $34\ \mathrm{m}^2$
⑤ $36\ \mathrm{m}^2$

13 다음 그림과 같이 길이가 $36\ \mathrm{m}$인 철망으로 두 개의 작은 직사각형으로 이루어진 구역을 만들려고 한다. 구역의 전체 넓이가 최대가 되도록 할 때, 넓이의 최댓값은? (단, 철망의 굵기는 무시한다.)

① $48\ \mathrm{m}^2$ ② $54\ \mathrm{m}^2$ ③ $60\ \mathrm{m}^2$ ④ $64\ \mathrm{m}^2$ ⑤ $72\ \mathrm{m}^2$

14 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}=\sqrt{29}$ 일 때, a^2+b^2의 최솟값은?

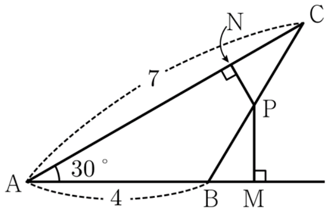
① 81 ② 100 ③ 121 ④ 144 ⑤ 169

15 두 양수 x, y에 대하여 $x^2+27y^2=108$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 의 최댓값을 구하시오.

16 대각선의 길이가 8인 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 M이라 하고, 그때의 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 k라 할 때, $\dfrac{M}{k}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

17 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$, $\angle\mathrm{CAB}=30^\circ$ 인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에서 두 직선 AB, AC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ①	02 ③	03 ②
04 ②	05 ①	06 ②
07 ⑤	08 ④	09 ⑤
10 ③	11 10	12 ⑤
13 ②	14 ②	15 4
16 ④	17 135	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ①

해설 ㄱ. $x^2 \geq 0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다.

ㄴ. [반례] $x=-1$이면 $x^3<0$이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

ㄷ. [반례] $x=0,\ y=0$이면 $|x|+|y|=0$이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ뿐이다.

02 정답 ③

해설 ㄱ. $a^2+3b^2-2ab=(a-b)^2+2b^2 \geq 0$

$a^2+3b^2 \geq 2ab$ (참)

ㄴ. $\left(\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$=\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}-\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{(a+b)^2}{12} \geq 0$

이고 $\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \geq 0$이므로

$\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \geq \dfrac{a-b}{2}$ (거짓)

ㄷ. $(|a-b|)^2-(||a|-|b||)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=-2ab+2|a||b|$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$

이고 $|a-b| \geq 0,\ ||a|-|b|| \geq 0$이므로

$|a-b| \geq ||a|-|b||$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 정답 ②

해설 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$를 정리하면

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

한편, $a,\ b,\ c$가 실수이므로

$(a-b)^2 \geq 0,\ (b-c)^2 \geq 0,\ (c-a)^2 \geq 0$

$\therefore \boxed{\dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \boxed{\ \geq\ } 0$

따라서 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \geq 0$이므로

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\geq$이다.

04 정답 ②

해설 $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$ (③ 사용)

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (① 사용)

따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$이므로 (④ 사용)

$|a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤ 사용)

그러므로 사용되지 않은 성질은 ②이다.

05 정답 ①

해설 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a}{2}-2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}+\dfrac{b}{2}$

$=\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$

이므로 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geq 0$에서 $\dfrac{a+b}{2} \boxed{\geq} \sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$일 때이므로

등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

06 정답 ②

해설 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{3a}{2b}+\frac{3b}{2c}\right)\left(\frac{3b}{2c}+\frac{3c}{2a}\right)\left(\frac{3c}{2a}+\frac{3a}{2b}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{3a}{2b}\cdot\frac{3b}{2c}}\cdot 2\sqrt{\frac{3b}{2c}\cdot\frac{3c}{2a}}\cdot 2\sqrt{\frac{3c}{2a}\cdot\frac{3a}{2b}}$$
$$=8\sqrt{\frac{9a}{4c}}\cdot\sqrt{\frac{9b}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{9c}{4b}}$$

$=27$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 27이다.

07 정답 ⑤

해설
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$
$$=4ab+\frac{1}{ab}+5$$

$a,\ b$가 양수이므로 $ab>0$이고

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4ab=\frac{1}{ab}\text{ 일 때 성립한다.}\right)$

$$\therefore\ \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 4+5=9$$

08 정답 ④

해설 $x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3y+3z}{2x}+\frac{3z+3x}{2y}+\frac{3x+3y}{2z}$$
$$=\frac{3y}{2x}+\frac{3z}{2x}+\frac{3z}{2y}+\frac{3x}{2y}+\frac{3x}{2z}+\frac{3y}{2z}$$
$$=\left(\frac{3y}{2x}+\frac{3x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{3y}{2z}\right)+\left(\frac{3z}{2x}+\frac{3x}{2z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{3y}{2x}\cdot\frac{3x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{3y}{2z}}+2\sqrt{\frac{3z}{2x}\cdot\frac{3x}{2z}}$$

$=3+3+3=9$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다.

09 정답 ⑤

해설 $a>0,\ b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+27b+\frac{8}{a}+\frac{3}{b}=2a+\frac{8}{a}+27b+\frac{3}{b}$$
$$\geq 2\sqrt{2a\cdot\frac{8}{a}}+2\sqrt{27b\cdot\frac{3}{b}}$$
$$=2\sqrt{16}+2\sqrt{81}=2\cdot 4+2\cdot 9$$
$$=26$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=2,\ b=\frac{1}{3}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 26이다.

10 정답 ③

해설 $x^2>0,\ y^2>0,\ a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot y^2}\qquad\cdots\text{㉠}$$
$$=2xy$$
$$=2\left(2a+\frac{5}{b}\right)\left(2b+\frac{5}{a}\right)$$
$$=2\left(4ab+\frac{25}{ab}+20\right)$$
$$\geq 2\left(2\sqrt{4ab\cdot\frac{25}{ab}}+20\right)\qquad\cdots\text{㉡}$$
$$=2\cdot(2\cdot 10+20)$$
$$=80$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=\frac{5}{2}$일 때 성립한다.

$x=y$에서 $2a+\frac{5}{b}=2b+\frac{5}{a}$이므로 $a=b$

또, $ab=\frac{5}{2}$이므로 $a=b=\frac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 $\alpha=80,\ \beta=\frac{\sqrt{10}}{2},\ \gamma=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$\alpha\beta\gamma=200$

11 정답 10

해설 $2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$에서

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+y^2-2y-1$

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+(y-1)^2-2$

이때 모든 실수 x, y에 대하여 $2x^2+2y^2+1>0$,

$\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}\geq 2\sqrt{36}=12$

(단, 등호는 $2x^2+2y^2+1=\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$,

즉 $2x^2+2y^2=5$일 때 성립)

또한, y는 실수이므로

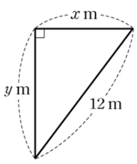
$(y-1)^2\geq 0$ (단, 등호는 $y=1$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y=1$일 때,

$12+0-2=10$이다.

12 정답 ⑤

해설



그림과 같이 직각삼각형의 두 변의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$x^2+y^2=12^2=144$

구하는 울타리의 넓이는 $\dfrac{1}{2}xy$이고,

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$144=x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

(단, 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때 성립한다.)

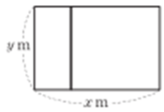
$72\geq xy$

$\therefore \dfrac{1}{2}xy\leq 36$

따라서 울타리의 넓이의 최댓값은 36 m^2이다.

13 정답 ②

해설



위의 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 구역의 전체 넓이는 $xy\text{ m}^2$이고, 철망의 전체 길이가 36 m이므로

$2x+3y=36$

한편, $x>0$, $y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\geq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$

(단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립한다.)

$36\geq 2\sqrt{6xy}$($\because$㉠)

$\therefore xy\leq 54$

이때, 등호는 $2x=3y$ 일 때 성립하므로

$2x+3y=36$에서 $2x=3y=18$

$\therefore x=9$, $y=6$

따라서 가로의 길이가 9 m, 세로의 길이가 6 m일 때, 구역의 전체 넓이 xy는 54 m^2로 최대이다.

14 정답 ②

해설 a, b가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\geq\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}\right)^2$

그런데 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}=\sqrt{29}$ 이므로

$\dfrac{29}{100}(a^2+b^2)\geq 29$

$\therefore a^2+b^2\geq 100$ (단, 등호는 $2a=5b$일 때 성립)

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 100

15 정답 4

해설 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{x^2+(3\sqrt{3}y)^2\right\}\geq(x+3y)^2$$

그런데 $x^2+27y^2=108$이므로

$$\frac{4}{3}\cdot 108\geq(x+3y)^2$$

$$(x+3y)^2\leq 144$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<x+3y\leq 12 \quad \cdots ㉠$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}y\text{, 즉 } x=9y\text{일 때 성립}\right)$

또, 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$\therefore \frac{4}{3}(x+3y)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

㉠에서 $0<\frac{4}{3}(x+3y)\leq 16$이므로

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\leq 16$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 4$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3y}\text{, 즉 } x=9y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값은 4이다.

16 정답 ④

해설 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c ($a>0$, $b>0$, $c>0$)라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=8$이므로 $a^2+b^2+c^2=64 \quad \cdots ㉠$

이 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이다.

이때

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

즉, $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=64$

$2(ab+bc+ca)\leq 128$이므로 $M=128$이다.

등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로

㉠에 대입하면 $3a^2=64$, $a^2=\frac{64}{3}$,

$$a=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

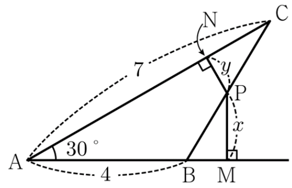
이때 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$k=4(a+b+c)=12a=32\sqrt{3}$이다.

$$\therefore \frac{M}{k}=\frac{128}{32\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

17 정답 135

해설 $\overline{\text{PM}}=x$, $\overline{\text{PN}}=y$라 하면



$\triangle\text{ABC}=\triangle\text{ABP}+\triangle\text{APC}$에서

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot y$$

$$7=2x+\frac{7}{2}y$$

$$\therefore 4x+7y=14 \quad \cdots ㉠$$

한편, $\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}=\frac{4}{x}+\frac{7}{y}$이고,

$$14\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right)=(4x+7y)\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right) \ (\because ㉠)$$
$$=65+\frac{28x}{y}+\frac{28y}{x}$$
$$=65+28\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

이때, $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$14\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right)=65+28\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$
$$\geq 65+28\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$$=65+56=121$$

즉, $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\geq\frac{121}{14}$이므로 $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}$, 즉 $\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{PM}}}+\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PN}}}$의

최솟값은 $\frac{121}{14}$이다.

따라서 $p=14$, $q=121$이므로

$p+q=135$