✓ 〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

행렬편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

DRE-EDU.com

[행렬]

1.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}를

$a_{ij} = \begin{cases} 3i-2j & (j\text{가 홀수일 때}) \\ i+2j & (j\text{가 짝수일 때}) \end{cases}$로 정의하자. 이때

행렬 A의 모든 성분의 합은?

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

풀이과정)

풀이

풀이법
2차 정사각행렬: i,j=1,2대입

j가 홀수이면 $a_{ij}=3i-2j$이므로

$a_{11}=3\cdot 1-2\cdot 1=1,$

$a_{21}=3\cdot 2-2\cdot 1=4$

j가 짝수이면 $a_{ij}=i+2j$이므로

$a_{12}=1+2\cdot 2=5,$

$a_{22}=2+2\cdot 2=6$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+4+5+6=16$

DRE-EDU.com

[행렬]

2.내신 킬러 문항

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$에 대하여

행렬 A^n+B^n의 모든 성분의 합이 339가 되도록 하는

자연수 n의 값을 구하시오.

풀이과정)

풀이

풀이법
규칙을 찾아본다.!

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&81\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&64\end{pmatrix}$

풀이

풀이법
337를 거듭제곱수로 표현한다.

$$B^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n + B^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3^n + 4^n\end{pmatrix}$$

따라서 $A^n + B^n$의 모든 성분의 합은

$3^n + 4^n + 2$이므로

$3^n + 4^n + 2 = 339$, 즉 $3^n + 4^n = 337$

$3^4 + 4^4 = 81 + 256 = 337$이므로

$n = 4$

DRE-EDU.com

[행렬]

3.내신 킬러 문항

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB+A=O$를 만족시킬 때,

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$이다.

$p^2+q^2+r^2+s^2$의 값을 구하시오.

(단, O는 영행렬이다.)

풀이과정)

풀 이

풀이법

$A^2 = O$ **이면** $A^n = O\ (n \geq 2)$

행렬의 연산을 이해하여 규칙성 추론하기

$AB + A = O$에 대입하여 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & -a+b+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a=1$, $b=-1$이므로

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이고 $A^2 = O$이다.

따라서 $A + A^2 + \cdots + A^{2010} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

이므로

$p=1$, $q=-1$, $r=1$, $s=-1$

따라서 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4$ 이다.

DRE-EDU.com

[행렬]

4.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$이다. $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$일 때,

$p+q$의 값은?

① 6　② 7　③ 8

④ 9　⑤ 10

풀이과정)

풀이

풀이법

$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ 를 $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$와 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$로 나타내본다.

$$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=2A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

따라서 $p=-1$, $q=7$이므로

$p+q=6$

DRE-EDU.com

[행렬]

5.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$일 때, $A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

풀이과정)

풀이

풀이법
문제가 해석되지 않을 때 행렬을 성분으로 나타내 본다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore a=3,\ c=2$ $\cdots$ ㉠

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3a+2b \\ 3c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\therefore 3a+2b=-1,\ 3c+2d=10$ $\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$9+2b=-1,\ 6+2d=10$

$\therefore b=-5,\ d=2$

풀 이

즉, $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{pmatrix}$이므로

$$A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\left\{A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-53\\18\end{pmatrix}$$

따라서 $A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-53+18=-35$