

# 개념원리(2025) - 공통수학2 (역함수) 237~246p

함수의 합성 ~ 역함수

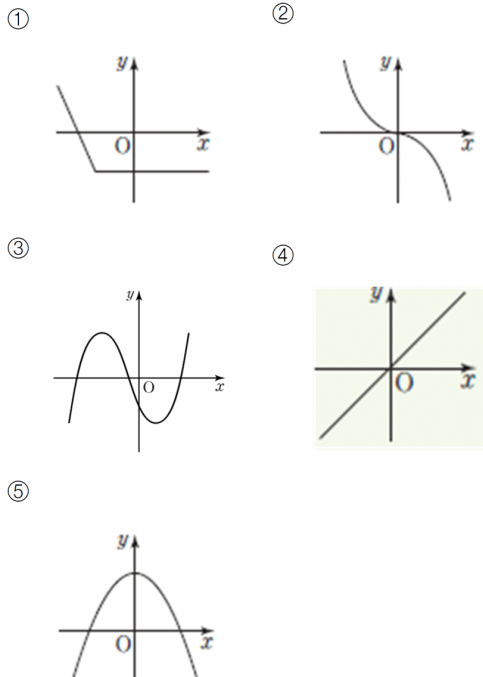
실시일자	-
40문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

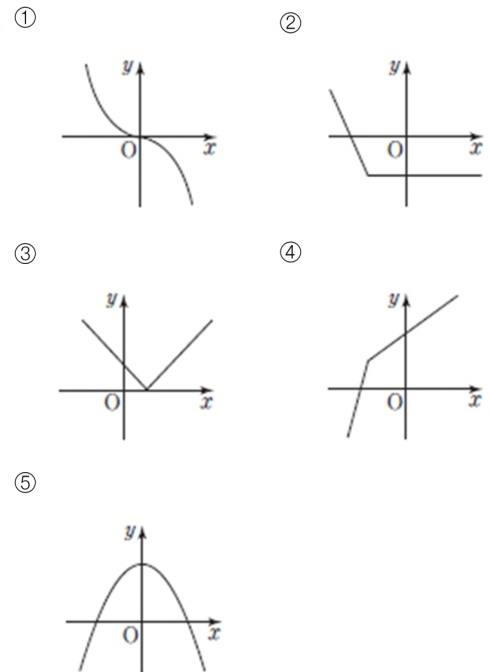
이름

- 01** 함수  $f(x) = -2x + 9$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g(7) + g^{-1}(3)$ 의 값을 구하시오.

- 02** 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면?



- 03** 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면?



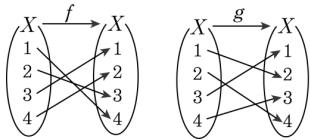
- 04** 함수  $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여  $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 함수  $g(x)$ 는?

- ①  $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$       ②  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$   
 ③  $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$       ④  $g(x) = x - 3$   
 ⑤  $g(x) = 2x + 3$

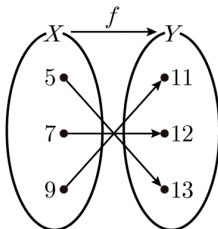
**05** 함수  $f(x)=2x+3$ 에 대하여  $(g \circ f)(x)=x$ 를 만족시키는 함수  $g(x)$ 는?

- ①  $g(x)=\frac{1}{2}x-1$       ②  $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$   
 ③  $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$       ④  $g(x)=x-3$   
 ⑤  $g(x)=2x+3$

**06** 두 함수  $f, g$ 가 각각 다음 그림과 같이 정의될 때,  $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하여라.

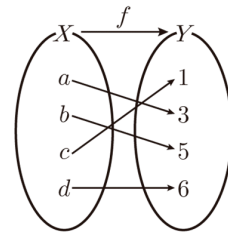


**07** 다음 그림과 같은 함수  $f: X \rightarrow Y$ 에서  $(f^{-1} \circ f)(5)$ 의 값을 구하시오.

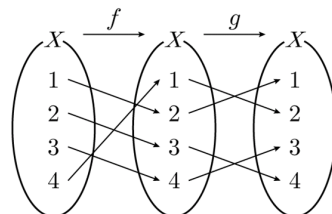


**08**  $f(x)=6x-8$ 에 대하여  $(f^{-1} \circ f)(1)$ 의 값을 구하시오.

**09** 다음 그림과 같이 주어진 함수  $f$ 에 대하여  $(f^{-1})^{-1}(b)$ 를 구하시오.



**10** 두 함수  $f, g$ 가 다음 그림과 같을 때,  $(g \circ f)^{-1}(2) + (f \circ g)^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.



11 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = ax + b$ 에 대하여  $f^{-1}(2) = 1$ ,  $f^{-1}(-4) = -1$ 일 때,  $(a-b)^2$ 의 값을 구하시오.

12 집합  $X = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 함수  $f(x) = x^2 - 4x - 14$ 의 역함수가 존재할 때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오.

13 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$  ( $x \geq 8$ )의 역함수가  $f^{-1}(x) = ax + b$  ( $x \geq c$ )일 때, 상수  $a, b, c$ 에 대하여  $abc$ 의 값을 구하시오.

14 두 함수  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 3x$ 에 대하여  $(g \circ f^{-1})(a) = 4$ 를 만족시키는 상수  $a$ 의 값의 합을 구하여라.

15 함수  $f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -x^2 + 3x & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여  $(f \circ f)(2) + f^{-1}(-4)$ 의 값을 구하시오.

16 [2017년 6월 고3 문과 11번 변형]  
두 함수  $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ ,  $g(x) = 3x + 1$ 에 대하여  $(g^{-1} \circ f)(2)$ 의 값은?

- ① 0                      ② 1                      ③ 2  
④ 3                      ⑤ 4

- 17** 함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 존재하고  $(f \circ f)(x) = x$ ,  $f(5) = 3$ 일 때,  $f^{-1}(5) + f(3)$ 의 값을 구하시오.

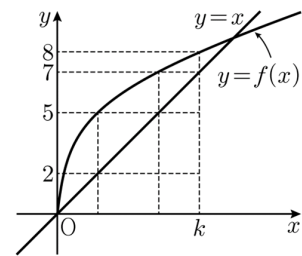
- 18** 함수  $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 함수  $g$ 가  $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족시킬 때,  $f^{-1}(-1) + g^{-1}(3)$ 의 값을 구하시오.

- 19** 다음 중 옳지 않은 것은?

- ①  $(f^{-1})^{-1} = f$
- ②  $g \circ f \neq f \circ g$
- ③  $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- ④  $f \circ f^{-1} = I$
- ⑤  $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

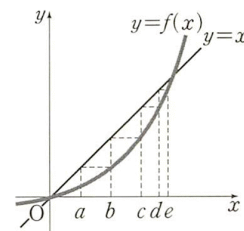
- 20** 일차함수  $f(x) = ax + b$ 의 그래프가 점  $(-1, 3)$ 을 지나고, 그 역함수의 그래프가 점  $(0, 2)$ 를 지날 때, 상수  $a, b$ 에 대하여  $ab$ 의 값을 구하시오.

- 21**  $x \geq 0$ 에서 정의된 두 함수  $y = f(x)$ 와  $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



$f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $(g \circ g)(k)$ 의 값을 구하시오. (단, 모든 점선은  $x$ 축 또는  $y$ 축에 평행하다.)

- 22** 두 함수  $y = f(x)$ 와  $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은? (단, 모든 점선은  $x$ 축 또는  $y$ 축에 평행하다.)



- ①  $a$
- ②  $b$
- ③  $c$
- ④  $d$
- ⑤  $e$

- 23** 함수  $f(x) = -x + 1$ 에 대하여  
 $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ 으로 정의할 때,  
 $f^{99}(a) = 100$ 을 만족시키는 실수  $a$ 의 값을 구하시오.  
 (단,  $n$ 은 자연수이다.)

- 24** 집합  $X = \{1, 2, 5, 6\}$ 에 대하여 함수  $f: X \rightarrow X$ 의  
 역함수가 존재하고,  $f(2) + f(6) = f(5)$ ,  
 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 7$ 을 만족시킬 때,  
 $8 \cdot f(1) + (f \circ f)(5)$ 의 값을 구하시오.

- 25** 실수 전체의 집합  $R$ 에서  $R$ 로의 함수  

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax + b & (x \geq 2) \\ -2x + 3 & (x < 2) \end{cases}$$
  
 의 역함수가 존재하도록 하는 음이 아닌 실수  $a, b$ 에  
 대하여 점  $(a, b)$ 의 자취의 길이를  $l$ 이라 할 때,  
 $16l^2$ 을 구하시오.

- 26** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 에 대하여  
 $f(3x+2) = 6x+5$ 이고 함수  $f(x)$ 의 역함수가  
 $f^{-1}(x) = ax+b$ 이다. 이때 상수  $a, b$ 에 대하여  $4ab$ 의  
 값은?

- ①  $-4$                       ②  $-1$                       ③  $1$   
 ④  $2$                         ⑤  $4$

- 27** [2015년 6월 고2 이과 9번/3점]  
 일차함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  
 함수  $y = f(2x+3)$ 의 역함수를  $g(x)$ 에 대한  
 식으로 나타내면  $y = ag(x) + b$ 이다.  
 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은?

- ①  $-\frac{5}{2}$                       ②  $-2$                       ③  $-\frac{3}{2}$   
 ④  $-1$                       ⑤  $-\frac{1}{2}$

- 28** 함수  $f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 일 때, 함수  $f(3x)$ 의  
 역함수는?

- ①  $g\left(\frac{1}{3}x\right)$                       ②  $g(9x)$                       ③  $g(3x)$   
 ④  $3g(x)$                       ⑤  $\frac{1}{3}g(x)$

**29** 함수  $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ 에 대하여  $(f \circ g)(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ ,  
 $g^{-1}(3) = -1$ 을 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은?  
 (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ①  $-\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{1}{2}$       ③ 1  
 ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

**30** 다음의 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ 와  $g(x) = -2x + 2$ 에  
 대한 설명 중 옳은 것은 무엇인가?

- ①  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $y=x$ 에 대해 대칭이다.  
 ②  $(g \circ g)(x) = 4x + 16$   
 ③  $(f^{-1} \circ g)(x) = -4x + 12$   
 ④  $((g \circ f)^{-1} \circ g)(x) = 2x + 6$   
 ⑤  $(f \circ (g \circ f)^{-1})(x) = -2x + 2$

**31** 두 함수  $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ ,  $g(x) = 4x + a$ 에 대하여  
 $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 가 성립할 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 6      ② 7      ③ 8  
 ④ 9      ⑤ 10

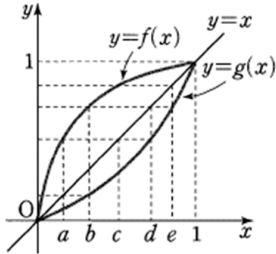
**32** 함수  $f(x) = x^2 - 6$  ( $x \geq 0$ )의 그래프가  $y$ 축과 만나는  
 점을 A라 하고, 함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과  
 만나는 점을 B라고 하자. 또, 두 함수  $y = f(x)$ ,  
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점을 C라고 할 때,  
 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

**33** 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를  $g(x)$ 라  
 할 때, 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의  
 개수는?

- ① 1      ② 2      ③ 3  
 ④ 4      ⑤ 5

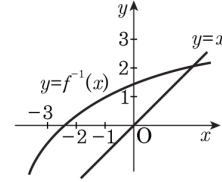
**34** 정의역이  $\{x | x \geq 4\}$ 인 함수  $f(x) = x^2 - 8x + 18$ 의  
 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의  
 좌표를  $(a, b)$ 라 할 때  $ab$ 의 값을 구하시오.

- 35 집합  $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $A$ 로의 함수  $y=f(x)$ 와 함수  $y=g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은?



- ①  $a$                       ②  $b$                       ③  $c$   
④  $d$                       ⑤  $e$

- 36 함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 방정식  $f(x)=0$ 의 해를  $\alpha$ 라고 할 때 다음 중 옳은 것을 고르면?



- ①  $-3 < \alpha < -2$   
②  $-2 < \alpha < -1$   
③  $0 < \alpha < 1$   
④  $1 < \alpha < 2$   
⑤  $2 < \alpha < 3$

- 37 역함수가 존재하는 함수  $f$ 가 임의의 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x+y)=f(x)f(y)$ 를 만족시키고,  $f(1)=3$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ.  $f(0)=0$

ㄴ.  $f(-3)=\frac{1}{27}$

ㄷ. 임의의 두 실수  $a, b$ 에 대하여

$f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ 이다.

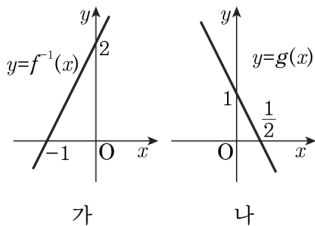
- ① ㄴ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 38** 집합  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 두 함수  $f, g$ 는 각각  $f: A \rightarrow A, g: A \rightarrow A$ 인 일대일대응이다.  
두 함수  $f, g$ 가 다음 세 조건을 만족할 때,  
 $(g \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

- (가)  $f(2)=2, f(4)=1, g(4)=1$   
(나)  $(g \circ f)(4)=4, (f \circ g)(4)=4$   
(다)  $(f \circ g)^{-1}(3)=2$

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

- 39** 다음의 그림 (가)는 함수  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수  $g$ 의 그래프이다.



다음 중 함수  $g$ 의 역함수  $g^{-1}$ 을 함수  $f$ 를 이용하여 나타내면?

- ①  $y = -f(x+1)$   
②  $y = f(x-1)$   
③  $y = -f(x-1)$   
④  $y = f(x+1)$   
⑤  $y = -f(1-x)$

- 40** 음이 아닌 실수  $x$ 에 대하여 함수  $f(x) = \frac{x^2}{4} + a$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자. 방정식  $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수  $a$ 의 값의 범위는?

- ①  $0 \leq a < 1$                       ②  $a \geq 0$   
③  $a < 1$                           ④  $0 < a < 2$   
⑤  $a < 2$

# 개념원리(2025) - 공통수학2 (역함수) 237~246p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ②, ④	03 ①, ④
04 ②	05 ②	06 3
07 5	08 1	09 5
10 6	11 16	12 7
13 - 48	14 - 8	15 7
16 ③	17 8	18 5
19 ③	20 - 2	21 2
22 ④	23 - 99	24 17
25 153	26 ②	27 ④
28 ⑤	29 ⑤	30 ④
31 ③	32 36	33 ③
34 36	35 ③	36 ④
37 ④	38 ②	39 ①
40 ①		

# 개념원리(2025) - 공통수학2 (역함수) 237~246p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

이름

### 01 정답 4

**해설** 함수  $f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이므로  
 $f^{-1}(x) = g(x)$   
 $g(7) = k$ 라 하면  $f(k) = 7$ 이므로  
 $-2k + 9 = 7$   
 $\therefore k = 1$   
 $\therefore g(7) = 1$   
 한편,  $f^{-1}(x) = g(x)$ 이므로  
 $g^{-1}(x) = f(x)$   
 $\therefore g^{-1}(3) = f(3) = 3$   
 $\therefore g(7) + g^{-1}(3) = 4$

### 02 정답 ②, ④

**해설** 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로  
 주어진 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은 ②,  
 ④이다.

### 03 정답 ①, ④

**해설** 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로  
 주어진 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은 ①,  
 ④이다.

### 04 정답 ②

**해설**  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ 이므로  
 $f(x) = g^{-1}(x)$   
 $\therefore g(x) = f^{-1}(x)$   
 즉, 함수  $g(x)$ 는 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로  
 $y = 2x - 3$ 으로 놓고  $x$ 에 대하여 정리하면  
 $2x = y + 3$   
 $\therefore x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$   
 $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$   
 $\therefore g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

### 05 정답 ②

**해설**  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ 이므로  
 $f(x) = g^{-1}(x)$   
 $\therefore g(x) = f^{-1}(x)$   
 즉, 함수  $g(x)$ 는 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로  
 $y = 2x + 3$ 으로 놓고  $x$ 에 대하여 정리하면  
 $2x = y - 3$   
 $\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$   
 $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  
 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$   
 $\therefore g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

### 06 정답 3

**해설** 함수  $f$ 는 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.  
 이 때,  $f(4) = 2$  이므로  $f^{-1}(2) = 4$   
 $\therefore (g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2)) = g(4) = 3$

### 07 정답 5

**해설**  $(f^{-1} \circ f)(5) = f^{-1}(f(5)) = f^{-1}(13) = 5$

### 08 정답 1

**해설** 역함수와 합성함수의 성질에 의하여  
 $(f^{-1} \circ f)(1) = 1$

### 09 정답 5

**해설**  $(f^{-1})^{-1}(b) = f(b) = 5$

## 10 정답 6

**해설**  $(g \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ g^{-1})(2)$   
 $= f^{-1}(g^{-1}(2))$   
 $= f^{-1}(1)$   
 $= 4$   
 $(f \circ g)^{-1}(2) = (g^{-1} \circ f^{-1})(2)$   
 $= g^{-1}(f^{-1}(2))$   
 $= g^{-1}(1)$   
 $= 2$   
 $\therefore (g \circ f)^{-1}(2) + (f \circ g)^{-1}(2) = 4 + 2 = 6$

## 11 정답 16

**해설**  $f^{-1}(2) = 1$ 이므로  $f(1) = 2$   
 $\therefore a + b = 2 \quad \dots \textcircled{㉠}$   
 $f^{-1}(-4) = -1$ 이므로  $f(-1) = -4$   
 $\therefore -a + b = -4 \quad \dots \textcircled{㉡}$   
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면  
 $a = 3, b = -1$   
 $\therefore (a - b)^2 = \{3 - (-1)\}^2 = 16$

## 12 정답 7

**해설**  $f(x) = x^2 - 4x - 14 = (x - 2)^2 - 18$ 이고  
 함수  $f$ 의 역함수가 존재하면  $f$ 는 일대일대응이므로  
 $a \geq 2, f(a) = a$   
 $f(a) = a$ 에서  $a^2 - 4a - 14 = a$   
 $a^2 - 5a - 14 = 0, (a + 2)(a - 7) = 0$   
 $\therefore a = 7 (\because a \geq 2)$

## 13 정답 -48

**해설**  $y = \frac{1}{2}x + 2$ 라 하면  $x \geq 8$ 일 때  $y \geq 6$ 이므로  
 함수  $f(x)$ 는 집합  $\{x | x \geq 8\}$ 에서  
 집합  $\{y | y \geq 6\}$ 으로의 일대일함수이다.  
 이때  $y = \frac{1}{2}x + 2$ 에서  $\frac{1}{2}x = y - 2$   
 $\therefore x = 2y - 4$   
 $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = 2x - 4$   
 $\therefore f^{-1}(x) = 2x - 4 (x \geq 6)$   
 따라서  $a = 2, b = -4, c = 6$ 이므로  $abc = -48$ 이다.

## 14 정답 -8

**해설**  $f^{-1}(a) = k$ 라 하면  
 $(g \circ f^{-1})(a) = g(f^{-1}(a)) = g(k)$   
 $= k^2 + 3k = 4$   
 이므로  $k^2 + 3k - 4 = 0$   
 $(k - 1)(k + 4) = 0 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 1$   
 ----- $\textcircled{㉠}$   
 (i)  $f^{-1}(a) = -4$ 일 때,  
 $a = f(-4) = 2 \cdot (-4) - 1 = -9$   
 (ii)  $f^{-1}(a) = 1$ 일 때,  
 $a = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$   
 ----- $\textcircled{㉡}$   
 따라서 모든 상수  $a$ 의 값의 합은  
 $-9 + 1 = -8$   
 ----- $\textcircled{㉢}$

단계	채점 기준	비율
$\textcircled{㉠}$	$f^{-1}(a) = k$ 에서 상수 $k$ 의 값 구하기	40 %
$\textcircled{㉡}$	상수 $a$ 의 값 구하기	50 %
$\textcircled{㉢}$	모든 상수 $a$ 의 값의 합 구하기	10 %

## 15 정답 7

**해설**  $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 8$   
 한편,  $f^{-1}(-4) = a$ 라 하면  
 $f(a) = -4$   
 (i)  $a \geq 1$ 일 때,  
 $f(a) = 2a$ 이므로  
 $2a = -4$   
 $\therefore a = -2$   
 그런데  $a \geq 1$ 이므로  $a$ 의 값은 존재하지 않는다.  
 (ii)  $a < 1$ 일 때,  
 $f(a) = -a^2 + 3a$ 이므로  
 $-a^2 + 3a = -4$   
 $a^2 - 3a - 4 = 0$   
 $(a + 1)(a - 4) = 0$   
 이때  $a < 1$ 이므로  
 $a = -1$   
 (i), (ii)에 의하여  $a = -1$ 이므로  
 $f^{-1}(-4) = -1$   
 $\therefore (f \circ f)(2) + f^{-1}(-4) = 8 + (-1) = 7$

## 16 정답 ③

**해설**  $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 7$ 이므로  
 $(g^{-1} \circ f)(2) = g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(7)$   
 이때  $g^{-1}(7) = k$ 라 하면  $g(k) = 7$ 이다.  
 즉,  $g(k) = 3k + 1 = 7$ 에서  $k = 2$   
 따라서  $(g^{-1} \circ f)(2) = 2$ 이다.

## 17 정답 8

**해설**  $(f \circ f)(x) = x$ 에서  $f = f^{-1}$ 이므로  
 $f^{-1}(5) = f(5) = 3$ 이고  
 $f^{-1}(5) = 3$ 이므로  
 $f(3) = 5$   
 $\therefore f^{-1}(5) + f(3) = 8$

## 18 정답 5

**해설**  $(g \circ f)(x) = x$ 이므로  
 $f^{-1}(x) = g(x), g^{-1}(x) = f(x)$   
 $f^{-1}(-1) = k$ 라 하면  $f(k) = -1$ 이므로  
 $2k - 1 = -1$   
 $\therefore k = 0$   
 또,  $g^{-1}(3) = f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ 이므로  
 $f^{-1}(-1) + g^{-1}(3) = 0 + 5 = 5$

## 19 정답 ③

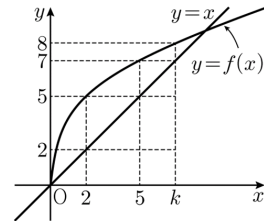
**해설**  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$   
 즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

## 20 정답 -2

**해설**  $y = f(x)$ 의 그래프가 점  $(-1, 3)$ 을 지나므로  
 $-a + b = 3 \quad \dots \textcircled{1}$   
 또  $y = f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점  $(0, 2)$ 를 지나므로  
 $y = f(x)$ 의 그래프는 점  $(2, 0)$ 을 지난다.  
 $\therefore 2a + b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  
 $a = -1, b = 2$   
 $\therefore ab = -2$

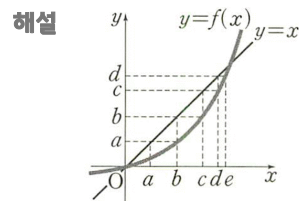
## 21 정답 2

**해설** 직선  $y = x$ 를 이용하여  $x$ 축과 점선이 만나는 점의  $x$ 좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



이때  $k = 7$ 이므로  $(g \circ g)(k) = (g \circ g)(7) = g(g(7))$   
 함수  $f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이므로  
 $g(7) = p$  ( $p$ 는 상수)라 하면  $f(p) = 7$   
 위의 그래프에서  $f(5) = 7$ 이므로  $p = 5$   
 $\therefore g(7) = 5$   
 $\therefore (g \circ g)(k) = (g \circ g)(7) = g(5)$   
 $g(5) = q$  ( $q$ 는 상수)라 하면  $f(q) = 5$   
 위의 그래프에서  $f(2) = 5$ 이므로  $q = 2$   
 $\therefore g(5) = 2$   
 $\therefore (g \circ g)(k) = 2$

## 22 정답 ④



$f^{-1}(b) = k$  ( $k$ 는 상수)라 하면  
 $f^{-1}(b) = k \Leftrightarrow f(k) = b$   
 위 그래프에서  $f(c) = b$ 이므로  $f^{-1}(b) = c$   
 $\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$   
 $= f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$   
 또,  $f^{-1}(c) = p$  ( $p$ 는 상수)라 하면  
 $f^{-1}(c) = p \Leftrightarrow f(p) = c$   
 위의 그래프에서  $f(d) = c$ 이므로  $f^{-1}(c) = d$   
 $\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

## 23 정답 - 99

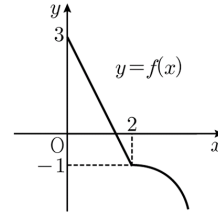
**해설**  $f^1(x) = f(x) = -x + 1$   
 $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 1) = x$   
 $f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x + 1$   
 $\vdots$   
 즉, 자연수  $n$ 에 대하여  
 $f^{2n-1}(x) = -x + 1, f^{2n}(x) = x$   
 따라서  $f^{99}(x) = -x + 1$  이므로  
 $f^{99}(a) = -a + 1 = 100, a = -99$

## 24 정답 17

**해설**  $f(2) + f(6) = f(5)$ 에서  
 $1 + 5 = 5 + 1 = 6$ 이므로  
 $f(5) = 6$   
 $f(2) = 1, f(6) = 5$  또는  $f(2) = 5, f(6) = 1$   
 이고  $f(5) = 6$ 에서  $f^{-1}(6) = 5$   
 (i)  $f(2) = 1, f(6) = 5$ 인 경우  
 $f^{-1}(1) = 2, f^{-1}(5) = 6, f^{-1}(6) = 5$ 이므로  
 $f^{-1}(2) = 1$   
 이때  $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 3$ 이므로 주어진 식을 만족시키지 않는다.  
 (ii)  $f(2) = 5, f(6) = 1$ 인 경우  
 $f^{-1}(5) = 2, f^{-1}(1) = 6, f^{-1}(6) = 5$ 이므로  
 $f^{-1}(2) = 1$   
 이때  $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 7$ 이므로 주어진 식을 만족시킨다.  
 (i), (ii)에서  $f(1) = 2, f(2) = 5, f(5) = 6,$   
 $f(6) = 1$   
 따라서  $(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(6) = 1$ 이므로  
 $8 \cdot f(1) + (f \circ f)(5) = 8 \cdot 2 + 1 = 17$

## 25 정답 153

**해설** 함수  $f(x)$ 가 역함수를 갖기 위해서는 함수  $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수  $y = -x^2 + 2ax + b = -(x-a)^2 + b + a^2$ 의 그래프의 꼭짓점의  $x$ 좌표가 2보다 작거나 같아야 하므로  $a \leq 2$

또한, 치역이  $R$ 이어야 하므로

$$f(2) = -4 + 4a + b = -1$$

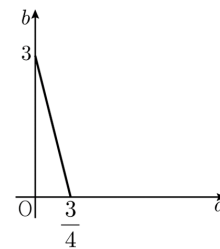
$$\therefore b = -4a + 3$$

이때  $a, b$ 가 음이 아닌 실수이므로

$$b = -4a + 3 \geq 0 \text{에서}$$

$$a \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore b = -4a + 3 \left( 0 \leq a \leq \frac{3}{4} \right)$$



따라서 조건을 만족시키는 점  $(a, b)$ 의 자취의 길이  $l$ 은

$$l = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{153}{16}} = \frac{\sqrt{153}}{4}$$

$$\therefore 16l^2 = 153$$

## 26 정답 ②

**해설**  $3x+2=t$ 로 놓으면  $3x=t-2$   
 $\therefore x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$   
 $x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$ 을  $f(3x+2) = 6x+5$ 에 대입하면  
 $f(t) = 6\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right) + 5 = 2t + 1$   
 $\therefore f(x) = 2x + 1$   
 $y = 2x + 1$ 으로 놓으면  $2x = y - 1$   
 $\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$   
 $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$   
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$   
따라서  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로  
 $4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

## 27 정답 ④

**해설** 역함수 이해하기  
 $y = f(2x+3)$ 에서  $x, y$ 를 서로 바꾸어 쓰면  
 $x = f(2y+3)$ 이다.  
그러므로  
 $2y+3 = g(x)$   
역함수는  $y = \frac{1}{2}g(x) - \frac{3}{2}$ 이다.  
따라서  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ 이다.  
 $\therefore a+b = -1$

## 28 정답 ⑤

**해설**  $h(x) = 3x$ 라 하면  
 $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$   
 $f(3x) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$   
따라서  $f(3x) = (f \circ h)(x)$ 의 역함수는  
 $(f \circ h)(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x)$   
 $= (h^{-1} \circ g)(x)$   
 $= h^{-1}(g(x))$   
 $= \frac{1}{3}g(x)$

## 29 정답 ⑤

**해설**  $g^{-1}(3) = -1$ 이므로  $g(-1) = 3$   
 $f(3) = f(g(-1)) = (f \circ g)(-1) = \frac{3}{2}$

## 30 정답 ④

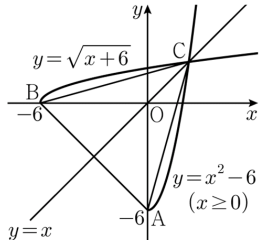
**해설**  $f^{-1}(x) = 2x + 6, g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$   
 $g(g(x)) = 4x - 2$   
④에서  $((g \circ f)^{-1} \circ g)(x)$   
 $= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(x)$   
 $= f^{-1}(x) = 2x + 6$

## 31 정답 ③

**해설**  $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 이므로  
 $(g \circ f)^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 가 성립한다.  
 $\therefore g \circ f = f \circ g$   
이때  
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + a = x - 8 + a$   
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{4}(4x + a) - 2 = x + \frac{1}{4}a - 2$   
이므로  $g \circ f = f \circ g$ 에서  
 $x - 8 + a = x + \frac{1}{4}a - 2$   
이 식이  $x$ 에 대한 항등식이므로  
 $-8 + a = \frac{1}{4}a - 2, \frac{3}{4}a = 6$   
 $\therefore a = 8$

### 32 정답 36

**해설** 함수  $f(x) = x^2 - 6$  ( $x \geq 0$ )의 그래프가  $y$ 축과 만나는 점은  $A(0, -6)$ 이므로 함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 만나는 점은  $B(-6, 0)$ 이다.



두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = x$ 의 그래프의 교점과 같으므로

$$x^2 - 6 = x \text{에서}$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$x \geq 0 \text{이므로 } x = 3$$

따라서 점  $C(3, 3)$

삼각형  $ABC$ 의 넓이는 삼각형  $OAC$ , 삼각형  $OBC$ ,

삼각형  $OAB$ 의 넓이의 합과 같으므로

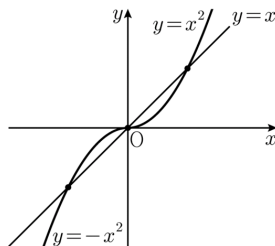
$$\triangle ABC = \triangle OAC + \triangle OBC + \triangle OAB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$

$$= 9 + 9 + 18 = 36$$

### 33 정답 ③

**해설** 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = x$ 의 교점의 개수와 같다. 따라서 다음 그림에서 교점의 개수는 3이다.



### 34 정답 36

**해설** 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = x$ 의 교점과 같다.

$$x^2 - 8x + 18 = x \text{에서}$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0, (x-3)(x-6) = 0$$

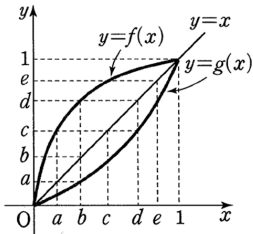
$$\therefore x = 6 (\because x \geq 4)$$

따라서 교점의 좌표는  $(6, 6)$ 이므로  $a = 6, b = 6$

$$\therefore ab = 36$$

### 35 정답 ③

**해설** 주어진 그래프에서  $y = x$ 의 그래프를 이용하여  $y$ 좌표를 나타내면 다음과 같다.



이때  $f^{-1}(d) = x$ 라 하면

$$f(x) = d$$

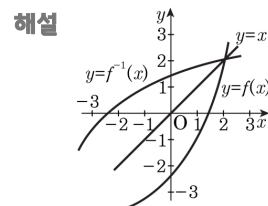
$$\therefore x = b$$

$$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d) = (f(g(f^{-1}(d))))$$

$$= f(g(b))$$

$$= f(a) = c$$

### 36 정답 ④



다음 그림에서와 같이

$y = f(x)$ 의 그래프와  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

직선  $y = x$ 에 대하여 대칭을 이룬다.

따라서  $f(x) = 0$ 의 해는  $y = f(x)$ 의 그래프가

$x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표이므로

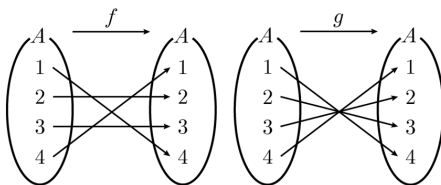
$$1 < \alpha < 2 \text{ 이다.}$$

### 37 정답 ④

**해설**  $f(x+y)=f(x)f(y)$  ... ㉠  
 ㄱ. ㉠에  $x=1, y=0$ 을 대입하면  
 $f(1)=f(1)f(0)$ 에서  $3=3f(0)$ 이므로  
 $f(0)=1$ 이다. (거짓)  
 ㄴ.  $f(1)=3$ 이므로  
 $f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=9$   
 $f(3)=f(2+1)=f(2)f(1)=27$   
 $f(0)=f(3+(-3))=f(3)f(-3)=1$ 이므로  
 $f(-3)=\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{27}$  (참)  
 ㄷ.  $f(x)=a, f(y)=b$ 라 하면  
 $x=f^{-1}(a), y=f^{-1}(b)$ 이다.  
 ㉠에서  $f(x+y)=f(x)f(y)=ab$ 이므로  
 $f^{-1}(ab)=x+y=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ 이다. (참)  
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

### 38 정답 ②

**해설** 조건 (가)에서  $f(2)=2, f(4)=1$   
 (가), (나)에서  $g(4)=1, f(g(4))=4$   
 즉,  $f(1)=4$   
 이때 함수  $f$ 는 일대일대응이므로  $f(3)=3$   
 조건 (가)에서  $g(4)=1$   
 (가), (나)에서  $f(4)=1, g(f(4))=4$   
 즉,  $g(1)=4$   
 (다)에서  $(f \circ g)^{-1}(3)=2, (f \circ g)(2)=3$   
 $f(g(2))=3$ 이므로  $g(2)=3$   
 이때 함수  $g$ 는 일대일대응이므로  $g(3)=2$   
 즉, 두 함수  $f, g$ 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 1]

[그림 2]

$(g \circ f)^{-1}(3)=x$ 라 하면  $(g \circ f)(x)=3$   
 즉,  $g(f(x))=3$ 에서  $f(x)=2, x=2$   
 따라서 구하는 값은 2이다.

### 39 정답 ①

**해설** 그림 (가)의 그래프를  $y$  축에 대칭이동한 후  
 $y$  축의 방향으로  $-1$  만큼 평행이동하면  
 그림 (나)의 그래프와 일치한다.  
 즉,  $y=f^{-1}(x)$ 를  $y$  축에 대칭이동하면  
 $y=f^{-1}(-x)$  ... ㉠이다.  
 ㉠을  $y$  축의 방향으로  $-1$  만큼 평행이동하면  
 $y=f^{-1}(-x)-1$  ... ㉡이다.  
 ㉡의 역함수는  $x=f^{-1}(-y)-1$  ... ㉢이므로  
 ㉢에서  $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.  
 $\therefore y=-f(x+1)$   
 $\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

### 40 정답 ①

**해설** 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 서로 역함수이므로  
 두 함수의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다.  
 이때  $x \geq 0$ 에서 함수  $f(x)$ 가 증가하므로  
 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점은  
 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.  
 따라서  $\frac{x^2}{4}+a=x$ , 즉  $x^2-4x+4a=0$ 이  
 $x \geq 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로  
 이차방정식  $x^2-4x+4a=0$ 의 판별식을  $D$ ,  
 두 실근을  $\alpha, \beta$ 라 하면  
 (i)  $\frac{D}{4}=4-4a > 0$   
 $\therefore a < 1$   
 (ii)  $\alpha+\beta=4 > 0$   
 (iii)  $\alpha\beta=4a \geq 0$   
 $\therefore a \geq 0$   
 (i), (ii), (iii)에 의하여  $0 \leq a < 1$