개념원리(2025) - 공통수학2 (무리함수)277~291p

무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
45문제 / DRE수학			

01 [2008년 3월 고2 1번]

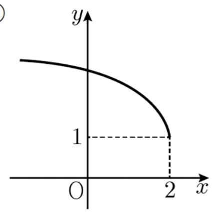
$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$의 값은?

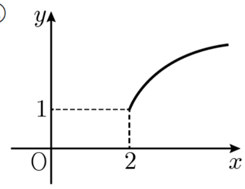
① 3　② 4　③ $2(\sqrt{2}+1)$
④ $4\sqrt{2}$　⑤ 6

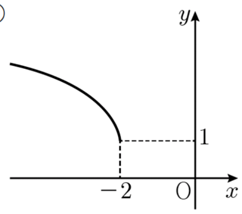
02 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

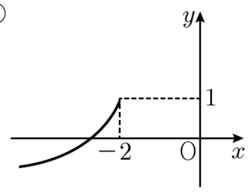
① $\{y\,|\,y\le -3\}$　② $\{y\,|\,y\ge -3\}$　③ $\{y\,|\,y\le 3\}$
④ $\{y\,|\,y\ge 3\}$　⑤ $\{y\,|\,y\le 9\}$

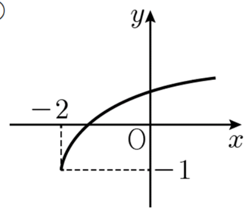
03 함수 $y=2\sqrt{-3x+6}+1$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


04 $2\le x\le 7$에서 함수 $y=\sqrt{x+2}-2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

05 무리식 $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x+2}}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

06 $\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

07 함수 $y=\sqrt{5x+2}$ 의 정의역을 A, 함수 $y=\sqrt{16-4x}$ 의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

08 함수 $y=\sqrt{-3x+2a}+b$ 의 정의역이 $\{x\,|\,x\le 2\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge 3\}$ 일 때, 상수 a, b의 곱 ab 의 값은?

① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

09 무리함수 $y=-\sqrt{1-x}-2$의 정의역이 $\{x|x\le a\}$, 치역이 $\{y|y\le b\}$일 때, ab의 값을 구하시오.

10 [2017년 11월 고1 4번 변형]
무리함수 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에 대하여 $f(-2)=3$일 때, 상수 k의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

11 함수 $y=-\sqrt{4-x}+1$에 대하여 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 정의역은 $\{x|x \le 4\}$이다.
ㄴ. 치역은 $\{y|y \le 1\}$이다.
ㄷ. 그래프는 제2사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 [2017년 11월 고1 4번/3점]
무리함수 $f(x)=\sqrt{x+k}$에 대하여 $f(-1)=2$일 때, 상수 k의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

13 [2014년 3월 고2 이과 3번/2점]
무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+3}$에 대하여 $f(2)=5$일 때, 상수 a의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

14 함수 $y=\sqrt{6-3x}+1$에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x|x \le 2\}$이다.
② 치역은 $\{y|y \ge 1\}$이다.
③ 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지난다.
④ 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제2사분면을 지난다.

15 함수 $y=\sqrt{3x-2}-6$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프가 점 $(-6,\ k)$를 지날 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

16 무리함수 $y=\sqrt{2-x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 일치한다. 이때 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

17 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 함수 $y=\sqrt{ax+1}+b$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다. 이때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 곱 $abcd$의 값은?

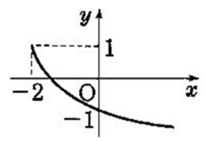
① -20 ② -16 ③ -12
④ -8 ⑤ -4

18 함수 $y=\sqrt{8-4x}$의 정의역을 A, 함수 $y=\sqrt{3x+9}$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$의 원소 중에서 정수의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

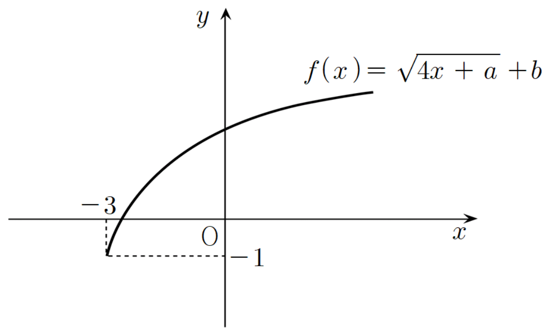
19 $0\le x\le 3$일 때, 함수 $y=4\sqrt{x+1}+k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=30$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

20 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 아래 그림과 같을 때 abc의 값은?



① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

21 [2013년 3월 고2 문과 23번/3점]
무리함수 $f(x)=\sqrt{4x+a}+b$의 그래프가 그림과 같다.



이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

22 함수 $y=\sqrt{3x+b}-4$의 정의역이 $\{x|x \geq a\}$이고 그래프가 점 $(4, -1)$을 지날 때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

23 두 함수 $y=\sqrt{x+1}+2$, $y=mx$의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위는 $a<m \leq b$이다. 이때 $a+b$의 값은?

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

24 이차함수 $y=ax^2-bx+7\ (x \geq 2)$의 역함수가 $y=\sqrt{x-3}+2$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

25 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x-1}+2$에 대하여 $(f \circ g)(2)+(g \circ f)(2)$의 값은?

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

26 무리함수 $y=-\sqrt{2x-4}+1$에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y|y \leq 1\}$이다.
③ 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
④ 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.
⑤ 역함수는 $y=\frac{1}{2}x^2-x+5\ (x \leq 1)$이다.

27 함수 $y=\sqrt{x-3}+a$의 정의역이 $\{x|x \geq b\}$, 치역이 $\{y|y \geq 2\}$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -6　② -2　③ 1
④ 2　⑤ 6

28 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이다. 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

29 함수 $y=a\sqrt{x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 제4사분면에서 만날 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$
② $a<-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$
③ $a<-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$
④ $-2<a<-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$
⑤ $-2<a<-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

30 $f(x)=\sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$와 $f(x)$와 $g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x)=x^2-2x+2$ $(x\geq 1)$, $\sqrt{3}$
② $g(x)=x^2-2x+2$ $(x\geq 1)$, $\sqrt{2}$
③ $g(x)=x^2-2x+1$ $(x\geq 1)$, $\sqrt{2}$
④ $g(x)=x^2-2x+1$ $(x\geq 1)$, $\sqrt{3}$
⑤ $g(x)=x^2-2x+1$ $(x\geq 1)$, $\sqrt{5}$

31 함수 $f(x)=\sqrt{10x-21}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점 사이의 거리는?

① 1
② $2\sqrt{3}$
③ 3
④ $4\sqrt{2}$
⑤ 5

32 함수 $f(x)=\sqrt{2x-2}+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때 선분 PQ의 길이는?

① $\sqrt{2}$
② $\sqrt{5}$
③ $2\sqrt{2}$
④ 3
⑤ $4\sqrt{2}$

33 함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+4$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은? (단, a는 상수이다.)

① $\{y\,|\,y\leq -2\}$
② $\{y\,|\,y\geq -2\}$
③ $\{y\,|\,y\leq 1\}$
④ $\{y\,|\,y\geq 2\}$
⑤ $\{y\,|\,y\leq 2\}$

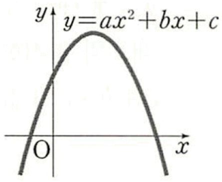
34 두 함수 $y=\sqrt{4x+16}$, $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 x축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

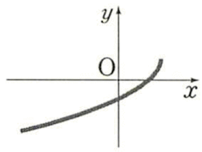
35 두 함수 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$, $g(x)=\sqrt{2x-1}+4$에 대하여 $(g^{-1}\circ f)(4)$의 값은?

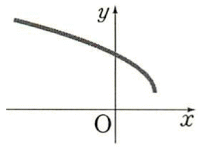
① 24　② 25　③ 26　④ 27　⑤ 28

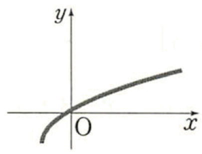
36 정의역이 $\{x\,|\,x\geq -k^2\}$인 함수 $y=\sqrt{x+k^2}-k^2+6$의 그래프가 제4사분면만 지나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a<k<b$ 또는 $c<k<d$일 때, $(ad+bc)^2$의 값을 구하시오. (단, $b<c$)

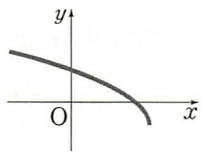
37 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

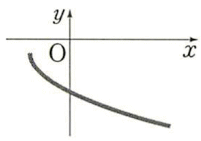


①


②


③


④


⑤


38 [2019년 11월 고3 문과 10번/3점]

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

39 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(3,\ 5)$를 지나고, 그 역함수의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값을 구하시오.

40 함수 $f(x)=\sqrt{a-x}+b$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le -3\}$이고, $g(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -7\}$이다. 상수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값을 구하시오.

41 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $f(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$는 상수)

42 무리함수 $y=2\sqrt{|2x-1|}$의 그래프가 직선 $y=kx$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

43 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$와 $x=\sqrt{y+2}$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ $\frac{7}{5}$

44 두 함수
$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k\ (x\ge 0)$, $g(x)=\sqrt{4x-2k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

45 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ 에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A,
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B,
두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $3\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ ② $2\sqrt{3}-1$ ③ $3\sqrt{2}-1$
④ $2\sqrt{3}-\frac{3}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}-\frac{3}{2}$

개념원리(2025) - 공통수학2 (무리함수)277~291p

무리함수의 그래프

실시일자	-
45문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ③	03 ①
04 ③	05 14	06 ④
07 ②	08 ⑤	09 -2
10 ③	11 ③	12 ①
13 ①	14 ③	15 ⑤
16 -4	17 ②	18 ⑤
19 9	20 ⑤	21 11
22 -2	23 ③	24 5
25 ④	26 ⑤	27 ⑤
28 -8	29 ②	30 ②
31 ④	32 ③	33 ⑤
34 24	35 ②	36 225
37 ②	38 ③	39 52
40 21	41 -30	42 ①
43 ④	44 ①	45 ④

개념원리(2025) - 공통수학2 (무리함수)277~291p

무리함수의 그래프

실시일자	-
45문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ⑤

해설 무리식을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

02 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지나므로

$a=-\sqrt{-a+a}-a+6,\ 2a=6$

$\therefore\ a=3$

따라서 $y=-\sqrt{x+3}-3+6$, 즉

$y=-\sqrt{x+3}+3$이므로 이 함수의 치역은

$\{y|y\le 3\}$이다.

03 정답 ①

해설 $y=2\sqrt{-3x+6}+1$

$\quad=2\sqrt{-3(x-2)}+1$

주어진 함수는 점 $(2,\ 1)$에서 시작하여

정의역이 $x\le 2$이고 치역이 $y\ge 1$이므로 그래프는

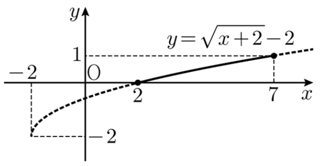
①이다.

04 정답 ③

해설 함수 $y=\sqrt{x+2}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼

평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $2\le x\le 7$에서 이 함수는 $x=2$일 때 최솟값 0,

$x=7$일 때 최댓값 1을 가지므로 $M=1,\ m=0$이다.

$\therefore\ M+m=1+0=1$

05 정답 14

해설 $5-x\ge 0$이므로

$x\le 5$ $\quad\cdots$ ㉠

$x+2>0$이므로 $x>-2$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\le 5$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3+4+5=14$

06 정답 ④

해설 $x+4\ge 0$에서 $x\ge -4$

$5-2x>0$에서 $x<\frac{5}{2}$

$\therefore\ -4\le x<\frac{5}{2}$를 만족시키는 정수 x는

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 7개이다.

07 정답 ②

해설 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역은

$5x+2\ge 0$에서 $x\ge -\frac{2}{5}$ 이므로

$\left\{x\ \middle|\ x\ge -\frac{2}{5}\right\}$ 이다.

$\therefore A=\left\{x\ \middle|\ x\ge -\frac{2}{5}\right\}$

함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역은

$16-4x\ge 0$에서 $x\le 4$이므로 $\{x\mid x\le 4\}$이다.

따라서 $A\cap B=\left\{x\ \middle|\ -\frac{2}{5}\le x\le 4\right\}$이므로 $A\cap B$에

속하는 정수는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 5개이다.

08 정답 ⑤

해설 함수 $y=\sqrt{-3x+2a}+b$의 정의역은

$-3x+2a\geq 0$에서 $x\leq\frac{2a}{3}$ 이므로

$\left\{x\middle|x\leq\frac{2a}{3}\right\}$ 이다.

이때, 이 함수의 정의역이 $\{x\mid x\leq 2\}$ 이므로

$\frac{2a}{3}=2$ $\quad\therefore a=3$

또한 이 함수의 치역은

$\sqrt{-3x+2a}\geq 0$에서

$y=\sqrt{-3x+2a}+b\geq 0+b=b$, 즉 $y\geq b$이므로

$\{y\mid y\geq b\}$이다.

이때, 이 함수의 치역이 $\{y|y\geq 3\}$이므로 $b=3$

$\therefore ab=3\cdot 3=9$

09 정답 -2

해설 주어진 무리함수의 정의역은 $1-x\geq 0$에서

$x\leq 1$이므로 $\{x|x\leq 1\}$

$\therefore a=1$

이때 $-\sqrt{1-x}\leq 0$이므로 치역은 $\{y|y\leq -2\}$

$\therefore b=-2$

$\therefore ab=-2$

10 정답 ③

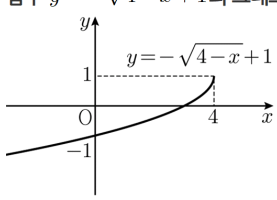
해설 $f(-2)=3$이므로 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에서

$\sqrt{-4+k}=3$

$\therefore k=13$

11 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{4-x}+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$이다. (참)

ㄴ. 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다. (참)

ㄷ. 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 정답 ①

해설 무리함수 이해하기

$f(-1)=2$이므로

$f(x)=\sqrt{x+k}$에서 $\sqrt{-1+k}=2$

따라서 $k=5$

13 정답 ①

해설 함숫값을 이용하여 무리함수를 구한다.

$f(2)=5$이므로

$\sqrt{2a+3}=5$

양변을 제곱하면 $2a+3=25$

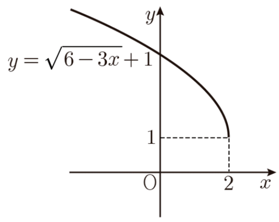
$2a=22$

$\therefore a=11$

14 정답 ③

해설 $y=\sqrt{6-3x}+1=\sqrt{-3(x-2)}+1$이므로

함수 $y=\sqrt{6-3x}+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프는 점 $(2,\ 1)$을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ③

15 정답 ⑤

해설 $y=\sqrt{3x-2}-6$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{3(-x)-2}-6$

$\therefore y=-\sqrt{-3x-2}+6$

이 함수의 그래프가 점 $(-6,\ k)$를 지나므로

$k=-\sqrt{-3\cdot(-6)-2}+6$

$=-4+6=2$

16 정답 -4

해설 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\sqrt{2-(x+4)}$

$\therefore y=\sqrt{-x-2}-3$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭 이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(-x)-2}-3$

$\therefore y=\sqrt{x-2}-3$

따라서 $\sqrt{x-2}-3=\sqrt{ax+b}+c$이므로

$a=1,\ b=-2,\ x=-3$

$\therefore a+b+c=-4$

17 정답 ②

해설 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-3(x-c)}+d=\sqrt{-3x+3c}+d$

즉, $y=\sqrt{ax+1}+b=\sqrt{-3x+3c}+d$이므로

$a=-3,\ 3c=1,\ d=b$

$\therefore a=-3,\ c=\dfrac{1}{3},\ d=b$

$\therefore y=\sqrt{-3x+1}+b$

이 함수의 그래프가 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\sqrt{3+1}+b,\ 2+b=-2$

$\therefore b=d=-4$

$\therefore abcd=(-3)\cdot(-4)\cdot\dfrac{1}{3}\cdot(-4)=-16$

18 정답 ⑤

해설 $8-4x\geq 0$이므로 $4x\leq 8$ $\quad\therefore x\leq 2$

$\therefore A=\{x\,|\,x\leq 2\}$

$3x+9\geq 0$이므로 $3x\geq -9$ $\therefore x\geq -3$

$\therefore B=\{x\,|\,x\geq -3\}$

따라서 $A\cap B=\{x\,|\,-3\leq x\leq 2\}$이므로

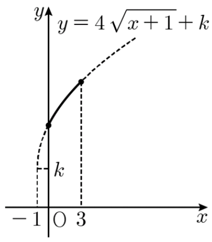
집합 $A\cap B$의 원소 중에서 정수는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 6개이다.

19 정답 9

해설 $y=4\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 $y=4\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\leq x\leq 3$에서 $y=4\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최댓값 $4\sqrt{3+1}+k=8+k$,

$x=0$일 때 최솟값 $4\sqrt{0+1}+k=4+k$

를 갖는다.

즉, $M=8+k,\ m=4+k$이므로 $M+m=30$에서

$(8+k)+(4+k)=30$

$2k=18 \qquad \therefore k=9$

20 정답 ⑤

해설 주어진 그래프는 시작점이 $(-2,\ 1)$이고, 정의역이 $\{x\,|\,x\geq -2\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이므로 구하는 식은 $y=-\sqrt{a(x+2)}+1$ ⋯⋯㉠의 꼴이다.

그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 ㉠에 대입하면

$-1=-\sqrt{2a}+1 \quad \therefore a=2$

$\therefore y=-\sqrt{2(x+2)}+1=-\sqrt{2x+4}+1$

$y=-\sqrt{ax+b}+c$와 비교하면

$b=4,\ c=1 \quad \therefore abc=8$

21 정답 11

해설 무리함수 이해하기

$f(x)=\sqrt{4(x+3)}-1$

$\quad\ =\sqrt{4x+12}-1$

$a=12,\ b=-1$이므로 $a+b=11$

22 정답 -2

해설 $y=\sqrt{3x+b}-4$의 그래프가 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$-1=\sqrt{b+12}-4$, , $\sqrt{b+12}=3$

$\therefore b=-3$

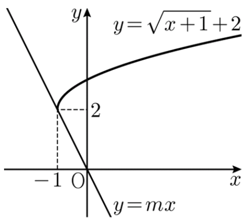
즉, 함수 $y=\sqrt{3(x-1)}-4$의 정의역은 $\{x|x\geq 1\}$

따라서 $a=1$, $b=-3$

$\therefore a+b=-2$

23 정답 ③

해설 다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면 m의 값의 범위는 $-2<m\leq 0$이어야 한다.



따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$a+b=-2$

24 정답 5

해설 이차함수 $y=ax^2-bx+7\ (x\geq 2)$의 역함수가

$y=\sqrt{x-3}+2$일 때, 함수 $y=\sqrt{x-3}+2$의 역함수도

$y=ax^2-bx+7\ (x\geq 2)$이다.

따라서 $y=\sqrt{x-3}+2$에서

$y-2=\sqrt{x-3}$, $x-3=(y-2)^2$

$x=y^2-4y+7$

이때 x, y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=x^2-4x+7\ (x\geq 2)$

따라서 $a=1$, $b=4$이므로

$a+b=5$

25 정답 ④

해설 $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=10$

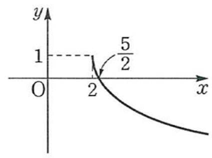
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(5)=4$

$\therefore (f\circ g)(2)+(g\circ f)(2)=10+4=14$

26 정답 ⑤

해설 $y=-\sqrt{2x-4}+1=-\sqrt{2(x-2)}+1$

이므로 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$이다. (참)

② 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다. (참)

③ $y=-\sqrt{2x-4}+1$의 그래프는

$y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)

④ 그래프는 제1, 4사분면을 지난다. (참)

⑤ $y=-\sqrt{2x-4}+1$에서

$y-1=-\sqrt{2x-4}$

양변을 제곱하면 $(y-1)^2=2x-4$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}(y-1)^2+2=\frac{1}{2}y^2-y+\frac{5}{2}$

따라서 역함수는 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}\ \ (x\leq 1)$

(거짓)

27 정답 ⑤

해설 $x-3\geq 0$이므로 $x\geq 3$

즉, 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\geq 3\}$이므로

$b=3$

또, 함수 $y=\sqrt{x-3}+a$에서 $\sqrt{x-3}\geq 0$이므로

치역은 $\{y|y\geq a\}$

$\therefore a=2$

$\therefore ab=6$

28 정답 -8

해설 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이므로

$\sqrt{8a}=8$, $8a=64$ $\therefore\ a=8$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{8x+b}$의 그래프가

직선 $y=x$에 접하므로 $\sqrt{8x+b}=x$의 양변을 제곱하면

$8x+b=x^2$ $\qquad\therefore\ x^2-8x-b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(-b)=0$

$16+b=0$ $\qquad\therefore\ b=-16$

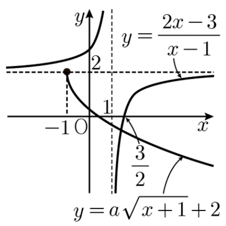
$\therefore\ a+b=-8$

29 정답 ②

해설 함수 $y=a\sqrt{x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a\sqrt{x+1}+2$

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=2-\dfrac{1}{x-1}$ 이므로

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=a\sqrt{x+1}+2$의 그래프가

함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 제4사분면에서 만나려면

$x=\dfrac{3}{2}$일 때 $y=a\sqrt{x+1}+2<0$이어야 하므로

$a\sqrt{\dfrac{3}{2}+1}+2<0$, $a\sqrt{\dfrac{5}{2}}<-2$

$\therefore\ a<-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

30 정답 ②

해설 $f(x)=\sqrt{x-1}+1$에 대하여

$y=\sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면

$y-1=\sqrt{x-1}$ $\cdots$ ㉠

㉠을 제곱하면

$(y-1)^2=x-1$

$y^2-2y+1=x-1$

$x=y^2-2y+2$

$\therefore\ g(x)=x^2-2x+2\ (x\geq 1)$

이때 $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은

$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$와 $y=x$의 교점을 구하면 된다.

$g(x)=x$에서 $x^2-2x+2=x$

$x^2-3x+2=0$, $(x-2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=1$

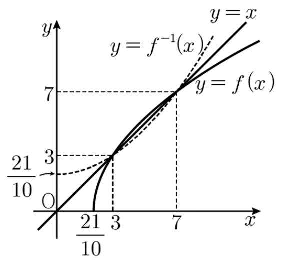
즉, $x=2$일 때, $y=2$이고, $x=1$일 때, $y=1$이다.

따라서 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

31 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\sqrt{10x-21}$에 대하여 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $f(x)=\sqrt{10x-21}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$y=\sqrt{10x-21}$과 $y=x$를 연립하면

$\sqrt{10x-21}=x$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-10x+21=0$, $(x-3)(x-7)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=7$

따라서 두 교점은 $(3,\ 3)$, $(7,\ 7)$이고,

두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(7-3)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{2}$

32 정답 ③

해설 두 함수 $y=f(x)$와 $f^{-1}(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x-2}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{2x-2}+1=x$, $\sqrt{2x-2}=x-1$

양변을 제곱하면

$2x-2=x^2-2x+1$

$x^2-4x+3=0$, $(x-3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점 P, Q의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(3,\ 3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

33 정답 ⑤

해설 $y=-\sqrt{x-a}+a+4$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로 $-a=a+4$

$\therefore\ a=-2$

따라서 함수 $y=-\sqrt{x+2}+2$의 치역은

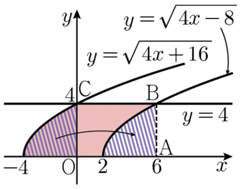
$\{y\,|\,y\leq 2\}$이다.

34 정답 24

해설 $y=\sqrt{4x-8}=\sqrt{4(x-6)+16}$ 이므로

$y=\sqrt{4x-8}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{4x+16}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

즉, 두 함수 $y=\sqrt{4x+16}$, $y=\sqrt{4x-8}$ 의 그래프와 직선 $y=4$는 다음 그림과 같다.



이때 빗금친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$6\cdot 4=24$

35 정답 ②

해설 $f(4)=\dfrac{3\cdot 4-1}{4-3}=11$이므로

$(g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))=g^{-1}(11)$

이때 $g^{-1}(11)=a$ (a는 상수)라 하면 $g(a)=11$이므로

$g(a)=\sqrt{2a-1}+4=11$

$\sqrt{2a-1}=7,\ 2a-1=49$

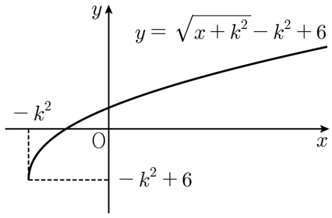
$\therefore\ a=25$

$\therefore\ (g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))=g^{-1}(11)=a=25$

36 정답 225

해설 정의역이 $\{x\,|\,x\geq -k^2\}$인

함수 $y=\sqrt{x+k^2}-k^2+6$의 그래프가 제4사분면만 지나지 않으려면 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



$k=0$일 때 $y=\sqrt{x}+6$으로 제1사분면만 지난다.

$k\neq 0$일 때 꼭짓점 $(-k^2,\ -k^2+6)$은 제3사분면에 위치해야 하므로

$-k^2+6<0$

$\therefore\ k<-\sqrt{6}$ 또는 $k>\sqrt{6}$ $\cdots$ ㉠

함수 $y=\sqrt{x+k^2}-k^2+6$의 그래프가 제4사분면만 지나지 않으려면 y절편이 0보다 커야 하므로

$|k|-k^2+6>0$

$(|k|-3)(|k|+2)<0$

$\therefore\ -3<k<3$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$-3<k<-\sqrt{6}$ 또는 $\sqrt{6}<k<3$

$a=-3,\ b=-\sqrt{6},\ c=\sqrt{6},\ d=3$

$ad+bc=-9-6=-15$

$\therefore\ (ad+bc)^2=225$

37 정답 ②

해설 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 모양이 위로 볼록하므로 $a<0$이고, 축의 방정식 $x=-\frac{b}{2a}$에서

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$, $\frac{b}{a}<0$

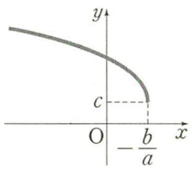
$\therefore b>0$ ($\because a<0$)

또, y절편이 양수이므로 $c>0$

이때 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$이므로

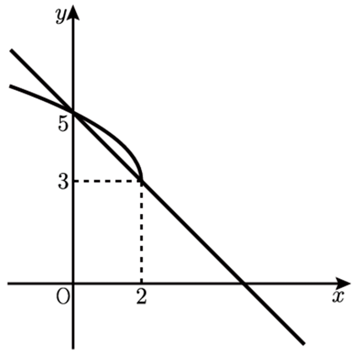
이 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a<0$, $-\frac{b}{a}>0$, $c>0$이므로 그래프의 개형은 다음 그림과 같고, 개형으로 적당한 것은 ②이다.



38 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?
함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로
함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와
직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한
필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와
직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 3)$을 지날 때,
조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.
따라서 구하는 k의 최솟값은
$3=-2+k$
$\therefore k=5$

39 정답 52

해설 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로
$\sqrt{3a+b}=5$
$\therefore 3a+b=25 \quad \cdots ㉠$
역함수의 그래프가 점 $(3, -1)$을 지나므로
$y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(-1, 3)$을 지난다.
즉, $\sqrt{-a+b}=3$이므로
$-a+b=9 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=13$
$\therefore ab=52$

40 정답 21

해설 $a-x\geq 0$이므로 $a\geq x$
즉, $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\leq a\}$이므로 $a=-3$
따라서 $f(x)=\sqrt{-3-x}+b$에서
$\sqrt{-3-x}\geq 0$이므로 치역은 $\{y|y\geq b\}$
한편, $y=g(x)$의 정의역이 $\{x|x\geq -7\}$이므로
$y=f(x)$의 치역은 $\{x|x\geq -7\}$이다.
$\therefore b=-7$
$\therefore ab=-3\cdot(-7)=21$

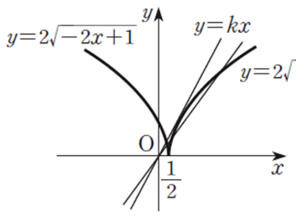
41 정답 -30

해설 $f(1)=4$이므로 $\sqrt{a+b}=4$
$\therefore a+b=16 \quad \cdots ㉠$
$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로
$\sqrt{2a+b}=3$
$\therefore 2a+b=9 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-7, b=23$
$\therefore a-b=-30$

42 정답 ①

해설 $y=2\sqrt{|2x-1|}=\begin{cases}2\sqrt{2x-1} & \left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)\\ 2\sqrt{-2x+1} & \left(x<\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$ 의

그래프는 아래와 같다.



먼저 $y=kx$와 $y=2\sqrt{2x-1}$ 이 접할 때의 k의 값을 구하자.

$kx=2\sqrt{2x-1}$

양변을 제곱하면

$k^2x^2=4(2x-1),\quad k^2x^2-8x+4=0$

$\dfrac{D}{4}=16-4k^2=0,\qquad \therefore k=\pm 2$

(기울기)>0이므로 $k=2$

$y=kx$와 $y=2\sqrt{2x-1}$ 이 세 점에서 만나기 위해서는

$y=kx$가 x축과 $y=2x$사이에 있어야 한다.

$\therefore 0<k<2$

따라서 부등식을 만족하는 정수 k의 개수는 1이다.

43 정답 ④

해설 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$ 와 $x=\sqrt{y+2}$ 의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 교점은 함수 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프와 직선 $y=x$와의 교점이다.

$\sqrt{x+2}=x$에서 양변을 제곱하면

$x+2=x^2$

$x^2-x-2=0,\ (x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 $x\ge 0$이므로 $a=2,\ b=\sqrt{2+2}=2$

$\therefore a+b=4$

44 정답 ①

해설 함수 $y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}k\ (x\ge 0)$은 집합 $\{x\,|\,x\ge 0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\ge\dfrac{1}{2}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}k$라 하면

$\dfrac{1}{4}x^2=y-\dfrac{1}{2}k$

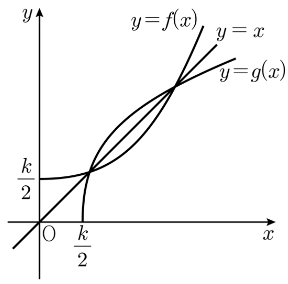
$x^2=4y-2k$

$\therefore x=\sqrt{4y-2k}\ (\because x\ge 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{4x-2k}$

즉, 함수 $g(x)=\sqrt{4x-2k}$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}k=x$에서 $x^2-4x+2k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2k>0$

또한 이차방정식의 두 실근의 곱은 음이 아닌 실수이므로

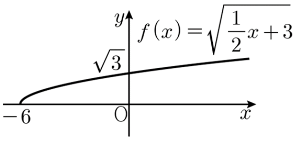
$2k\ge 0$

$\therefore 0\le k<2$

따라서 정수 k의 개수는 $0,\ 1$로 2이다.

45 **정답** ④

해설 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ 의 그래프는 다음과 같다.

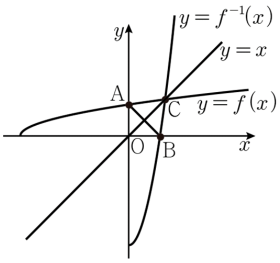


$x=0$일 때 함숫값이 $\sqrt{3}$ 이므로 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$이다.
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하는 형태이므로 함수의 그래프가 역함수의 그래프와 만나는 교점은 직선 $y=x$와의 교점과 같다.
$\sqrt{\frac{1}{2}x+3}=x$에서 양변을 각각 제곱하면

$\frac{1}{2}x+3=x^2,\ 2x^2-x-6=0,$

$(2x+3)(x-2)=0$이므로 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

이때 점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이 아니므로 $\mathrm{C}(2,\ 2)$이다.



한편, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
점 H는 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6},\ \overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=2\sqrt{3}-\frac{3}{2}$ 이다.