		내신 준비	이름

원의 방정식,마플시너지(2025) - 공통수학2 76~88p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

01 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$에 접하고 기울기가 2인 두 직선의 y절편의 곱을 구하시오.

02 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=3x+2\sqrt{10}$이 한 점에서 만날 때, 양수 r의 값을 구하시오.

03 원 $(x-4)^2+y^2=10$과 직선 $y=-3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

04 점 $(2,\ 5)$에서 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=5$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

05 원 $x^2+y^2=25$ 위의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{A}(13,\ 0)$에 대하여 직선 AP의 기울기의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ ② $\dfrac{5}{24}$ ③ $\dfrac{5}{12}$
④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{12}{5}$

06 원 $x^2+y^2=25$ 위를 움직이는 점 P와 점 $\mathrm{A}(8,\ 6)$ 사이의 거리의 최댓값을 α, 최솟값을 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

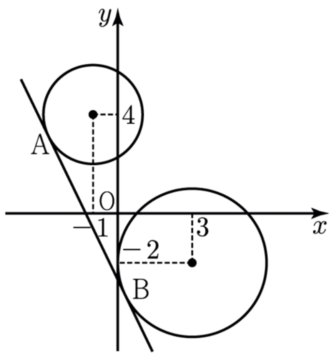
07 [2019년 3월 고2 문과 10번 변형]

좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$와 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

08

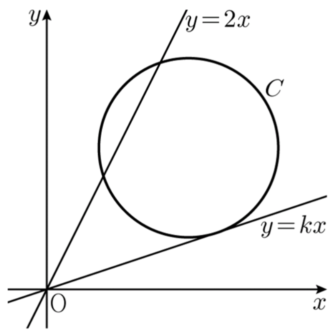
다음 그림과 같이 두 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=4$, $(x-3)^2+(y+2)^2=9$에 동시에 접하는 접선을 그을 때, 두 접점 A, B 사이의 거리는?



① $3\sqrt{5}$　② 7　③ $\sqrt{51}$　④ $3\sqrt{7}$　⑤ 8

09 [2024년 9월 고1 16번/4점]

그림과 같이 좌표평면 위에 원 C: $(x-a)^2+(y-a)^2=10$이 있다. 원 C의 중심과 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이고 직선 $y=kx$가 원 C에 접할 때, 상수 k의 값은? (단, $a>0$, $0<k<1$)



① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{18}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{7}{18}$　⑤ $\frac{4}{9}$

10

원 $(x-3)^2+y^2=5$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

11 원 $x^2+y^2=20$위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선이 점 $(a,\ -6)$을 지날 때, a의 값을 구하시오.

12 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값은?

① 25 ② 35 ③ 45
④ 55 ⑤ 65

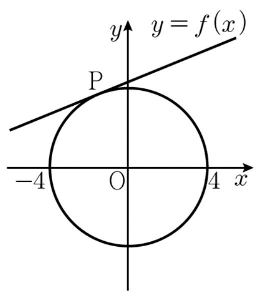
13 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 A와 B라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.

14 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,\ 4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 양수 r의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

15 원 $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ 위를 움직이는 점 P와 원 $(x-4)^2+(y-9)^2=4$ 위를 움직이는 점 Q를 이은 선분 PQ의 길이의 최댓값을 구하시오.

16 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$과 직선 $y=f(x)$가 제2사분면에 있는 원 위의 점 P에서 접할 때, $f(-4)f(4)$의 값을 구하시오.



17 [2024년 10월 고1 26번 변형]
좌표평면에서 두 직선 $y=3x+7$, $y=-3x+7$에 모두 접하고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 서로 다른 두 원의 중심을 각각 O_1, O_2라 할 때, 선분 O_1O_2의 길이를 $\frac{q}{p}$이라 하자. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

18 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 2)$에서의 접선과 점 $\mathrm{Q}(-2,\ 4)$에서의 접선이 만나는 점을 R라 할 때, 사각형 OPRQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

19 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 원 $(x-4)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선이 2개 존재한다. 두 직선의 기울기가 각각 m_1, m_2일 때, m_1m_2의 값을 구하시오.

20 원 $x^2+y^2=4$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B라 할 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은?

① $x-3y=4$
② $3x-y=4$
③ $x+3y=4$
④ $3x+y=4$
⑤ $3x+2y=4$

21 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{5}}{9}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{9}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{5}}{9}$

22 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

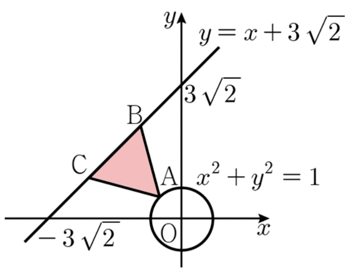
23 [2018년 11월 고1 26번/4점]

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 12)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB의 길이가 3일 때, a^2+b^2의 최댓값을 구하시오.

24 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -12)$로 이루어지는 $\triangle \mathrm{PAB}$의 넓이의 최댓값은?

① $\dfrac{89}{2}$ ② $\dfrac{91}{2}$ ③ $\dfrac{95}{2}$ ④ $\dfrac{97}{2}$ ⑤ $\dfrac{99}{2}$

25 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 A와 직선 $y=x+3\sqrt{2}$ 위의 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는 $p:q$일 때, $9(q-p)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

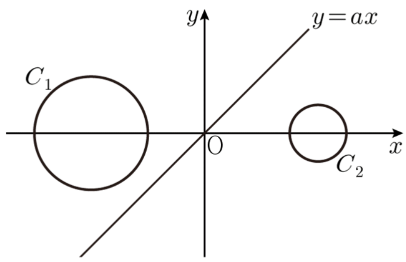


26 [2020년 9월 고1 27번 변형]

좌표평면 위에 두 원

$C_1:(x+4)^2+y^2=4$, $C_2:(x-4)^2+y^2=1$과

두 원 C_1, C_2와 서로 만나지 않는 직선 $l:y=ax\ (a>0)$이 있다. 원 C_1 위의 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H_1, 원 C_2 위의 점 Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H_2라 하자. 선분 $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2$의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $Mm=23$인 a의 값을 구하시오.



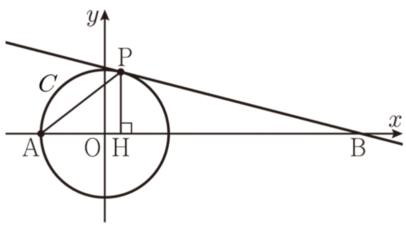
27 [2023년 11월 고1 20번/4점]

실수 $t\ (t>0)$에 대하여 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 4)$, $\mathrm{C}(2t,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ t)$가 있다. 선분 CD 위에 $\angle \mathrm{APB}=90^\circ$인 점 P가 존재하도록 하는 t의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

28 [2020년 11월 고1 20번 변형]

다음 그림과 같이 좌표평면에 원 $C: x^2+y^2=9$와 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$이 있다. 원 C 위의 제1사분면 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $3\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HB}}$일 때, 삼각형 PAB의 넓이는?



① $\dfrac{41\sqrt{15}}{8}$ ② $\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$ ③ $\dfrac{43\sqrt{15}}{8}$
④ $\dfrac{11\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\dfrac{45\sqrt{15}}{8}$

		유형별 학습	이름

원의 방정식,마플시너지(2025) - 공통수학2 76~88p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

정답

01 4	02 2	03 19
04 -1	05 ③	06 ⑤
07 ②	08 ③	09 ③
10 16	11 -2	12 ③
13 12	14 ①	15 17
16 16	17 49	18 ⑤
19 $-\frac{1}{3}$	20 ④	21 ⑤
22 ②	23 256	24 ⑤
25 27	26 1	27 ①
28 ⑤		

		유형별 학습	이름

원의 방정식,마플시너지(2025) - 공통수학2 76~88p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

01 정답 4

해설 접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면
원의 중심 $(3,\ -1)$과 직선 $y=2x+k$, 즉
$2x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot 3-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+7|}{\sqrt{5}}$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면
$\dfrac{|k+7|}{\sqrt{5}}=3,\ |k+7|=3\sqrt{5}$
$\therefore\ k=-7\pm 3\sqrt{5}$
따라서 두 접선의 y절편은 각각 $-7+3\sqrt{5}$,
$-7-3\sqrt{5}$ 이므로 구하는 y절편의 곱은
$(-7+3\sqrt{5})(-7-3\sqrt{5})=4$

02 정답 2

해설 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=3x+2\sqrt{10}$, 즉
$3x-y+2\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2$
원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면
$r=2$

03 정답 19

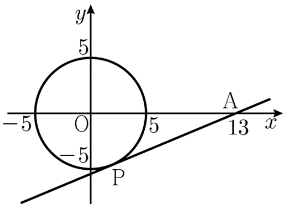
해설 원의 중심 $(4,\ 0)$과 직선 $y=-3x+k$, 즉
$3x+y-k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|12-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|12-k|}{\sqrt{10}}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$\dfrac{|12-k|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10},\ |12-k|<10$
$-10<12-k<10,\ -22<-k<-2$
$\therefore\ 2<k<22$
따라서 정수 k는 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 21$의 19개이다.

04 정답 -1

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-5=m(x-2)$
$\therefore\ mx-y-2m+5=0$
원의 중심의 좌표가 $(-1,\ 4)$이므로 원과 직선이 접하려면
$\dfrac{|-m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$,
$|-3m+1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면
$2m^2-3m-2=0$
$(2m+1)(m-2)=0$
$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=2$
따라서 기울기의 곱은
$-\dfrac{1}{2}\cdot 2=-1$

05 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 직선 AP가 원의 양의 기울기인 접선이 될 때 직선 AP의 기울기가 최대가 된다.



이때 점 P의 좌표를 $P(x_1, y_1)$이라 하면

점 P는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ ⋯ ㉠

점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$ ⋯ ㉡

이 직선이 점 $A(13, 0)$을 지나므로

$13x_1=25$

$\therefore x_1=\dfrac{25}{13}$

㉠에 x_1의 값을 대입하면

$\left(\dfrac{25}{13}\right)^2+y_1{}^2=25$

$\therefore y_1=\pm\dfrac{60}{13}$

㉡에 x_1, y_1의 값을 대입하면

$\dfrac{25}{13}x\pm\dfrac{60}{13}y=25$

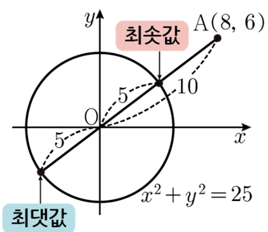
$\therefore y=\dfrac{5}{12}x-\dfrac{65}{12}$ 또는 $y=-\dfrac{5}{12}x+\dfrac{65}{12}$

따라서 직선 AP의 기울기의 최댓값은 $\dfrac{5}{12}$이다.

06 정답 ⑤

해설 원의 중심 O와 점 A 사이의 거리 d는

$d=\sqrt{8^2+6^2}=10$



이때 원의 반지름의 길이 r가 5이므로

$\alpha=d+r=10+5=15$

$\beta=d-r=10-5=5$

$\therefore \alpha+\beta=15+5=20$

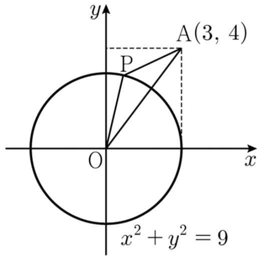
07 정답 ②

해설 점 A의 좌표가 $(3, 4)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

점 P는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$\overline{OP}=3$



이때 위 그림과 같이 임의의 점 P에 대하여

$\overline{OA}\le\overline{OP}+\overline{PA}$가 성립하므로

$\overline{AP}\ge\overline{OA}-\overline{OP}=5-3=2$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 2이다.

08 정답 ③

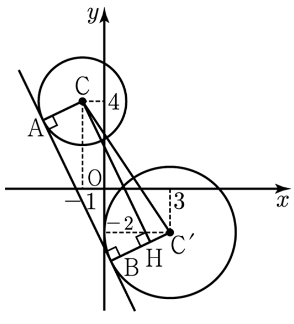
해설 두 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=4$,

$(x-3)^2+(y+2)^2=9$의 중심을 각각

C, C′이라 하면 $C(-1, 4)$, $C'(3, -2)$

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{(3-(-1))^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{13}$

이때 다음과 같이 점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



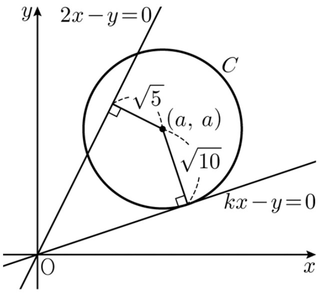
$\overline{C'H}=3-2=1$

따라서 직각삼각형 CC′H에서

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{51}$

09 정답 ③

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원 C의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ a=5$

원 C의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$|5k-5|=\sqrt{10k^2+10}$

$3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

이때 $0<k<1$이므로

$k=\frac{1}{3}$

10 정답 16

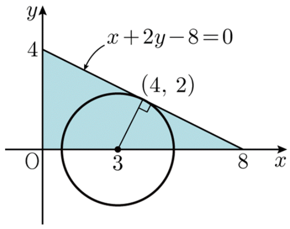
해설 원 $(x-3)^2+y^2=5$ 위의 점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$(4-3)(x-3)+(2-0)(y-0)=5$

$\therefore\ x+2y-8=0$

따라서 다음 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$



[다른 풀이]

원의 중심 $(3,\ 0)$과 점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-0}{4-3}=2$

즉, 점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로

접선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

11 정답 -2

해설 원 $x^2+y^2=20$위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$2x-4y=20$

이 직선이 점 $(a,\ -6)$을 지나므로

$2a+24=20$

$\therefore\ a=-2$

12 정답 ③

해설 점 $(3,\ -1)$에서 원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y+1=m(x-3)$

$mx-y-3m-1=0$ $\cdots$ ㉠

이때 원의 중심에서 ㉠까지의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5$

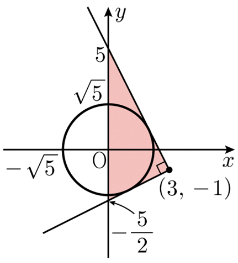
$2m^2+3m-2=0,\ (2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은 ㉠에서

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2},\ y=-2x+5$

이므로 접선의 방정식과 원의 방정식을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 삼각형의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left\{5-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}\cdot 3=\dfrac{45}{4}$

$\therefore\ 4S=45$

13 정답 12

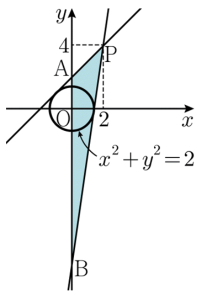
해설 접점을 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=2$

이 직선이 $\mathrm{P}(2,\ 4)$를 지나므로

$2x_1+4y_1=2$

즉, $x_1=1-2y_1$ $\cdots$ ㉠



또한, 점 Q가 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=2$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(1-2y_1)^2+{y_1}^2=2$

$5{y_1}^2-4y_1-1=0$

$(5y_1+1)(y_1-1)=0$

$\therefore\ y_1=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $y_1=1$

$y_1=-\dfrac{1}{5}$일 때 $x_1=\dfrac{7}{5}$, $y_1=1$일 때 $x_1=-1$이므로

접선의 방정식은

$\dfrac{7}{5}x-\dfrac{1}{5}y=2,\ -x+y=2$

두 접선이 y축과 만나는 두 점은

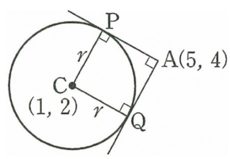
$\mathrm{A}(0,\ -10),\ \mathrm{B}(0,\ 2)$ 또는 $\mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{B}(0,\ -10)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 2=12$

14 정답 ①

해설



원의 중심을 C, 두 접선과 원의 교점을 각각 P, Q라고 하면 □APCQ는 정사각형이므로

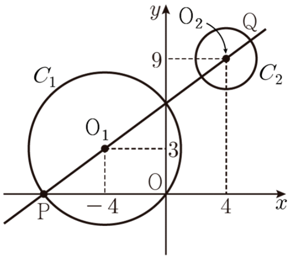
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}\,r$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $2\sqrt{5}=\sqrt{2}\,r$ $\therefore\ r=\sqrt{10}$

15 정답 17

해설 $(x+4)^2+(y-3)^2=25$가 나타내는 원을 C_1,
$(x-4)^2+(y-9)^2=4$가 나타내는 원을 C_2라 하고
두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.
다음 그림과 같이 직선 O_1O_2가 원 C_1과 만나는 두 점 중 원 C_2와의 거리가 더 먼 점을 P, 직선 O_1O_2가 원 C_2와 만나는 두 점 중 원 C_1과의 거리가 더 먼 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는 최대가 된다.



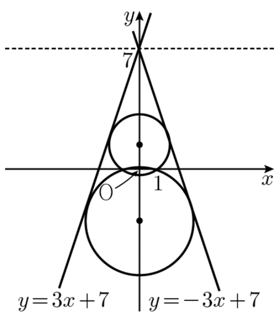
이때 원 C_1의 중심은 $O_1(-4,\ 3)$이고,
원 C_2의 중심은 $O_2(4,\ 9)$이다.
$\therefore$ (선분 PQ의 최댓값)
$=\overline{PO_1}+\overline{O_1O_2}+\overline{O_2Q}$
$=5+\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(9-3)^2}+2$
$=17$

16 정답 16

해설 $f(x)=mx+n$이라 하고 $y=mx+n$을
$x^2+y^2=16$에 대입하면 $x^2+(mx+n)^2=16$
$\therefore\ (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-16=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
원과 직선이 접하므로
$\frac{D}{4}=(mn)^2-(m^2+1)(n^2-16)=0$
$16m^2-n^2+16=0$
$\therefore\ 16m^2-n^2=-16$
$\therefore\ f(-4)f(4)=(-4m+n)(4m+n)$
$=-16m^2+n^2=-(16m^2-n^2)$
$=-(-16)=16$

17 정답 49

해설 두 직선 $y=3x+7$, $y=-3x+7$에 모두 접하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 하자.
점 C와 직선 $3x-y+7=0$ 사이의 거리는 r이고,
점 C와 직선 $3x+y-7=0$ 사이의 거리는 r이므로
$$r=\frac{|3a-b+7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a+b-7|}{\sqrt{3^2+1^2}} \quad \cdots ㉠$$
따라서 $|3a-b+7|=|3a+b-7|$이고,
$3a-b+7=3a+b-7$이면 $b=7$,
$3a-b+7=-(3a+b-7)$이면 $a=0$이다.
중심이 $C(a,\ 7)$이고 두 직선 $y=3x+7$,
$y=-3x+7$에 모두 접하는 원은 $(1,\ 0)$을 지날 수 없으므로 $b\neq 7$
따라서 $a=0$이고, 원의 중심 C의 좌표는 $C(0,\ b)$
점 $C(0,\ b)$에서 점 $(1,\ 0)$까지의 거리가 r이므로 ㉠에 의하여
$$\sqrt{(1-0)^2+(0-b)^2}=\frac{|b-7|}{\sqrt{10}}$$
$$b^2+1=\frac{(b-7)^2}{10}$$
$9b^2+14b-39=0$
$(b+3)(9b-13)=0$
$\therefore\ b=-3$ 또는 $b=\frac{13}{9}$
따라서 두 직선 $y=3x+7$, $y=-3x+7$에 모두 접하는 두 원의 중심 O_1, O_2의 좌표는 $(0,\ -3)$, $\left(0,\ \frac{13}{9}\right)$이므로
선분 O_1O_2의 길이는
$\frac{13}{9}-(-3)=\frac{40}{9}$
따라서 $p=9$, $q=40$이므로
$p+q=49$



18 정답 ⑤

해설 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$4x+2y=20$

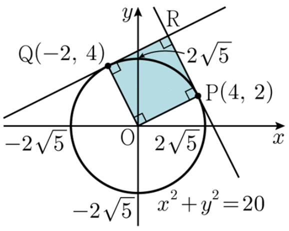
$\therefore\ 2x+y-10=0 \qquad \cdots ㉠$

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+4y=20$

$\therefore\ x-2y+10=0 \qquad \cdots ㉡$

이때 ㉠, ㉡에서 $2\cdot1+1\cdot(-2)=0$이므로 두 접선은 서로 수직이다.



즉, 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$를 한 변으로 하는 정사각형이다.

따라서 구하는 넓이는

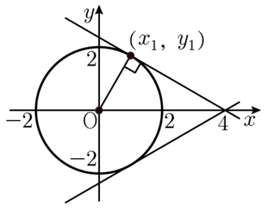
$2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=20$

19 정답 $-\dfrac{1}{3}$

해설 원 $(x-4)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하므로 두 직선은 원의 중심 $(4,\ 0)$을 지난다.

접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4 \qquad \cdots ㉠$



이때 점 $(4,\ 0)$은 직선 ㉠ 위에 있으므로

$4x_1=4$

$\therefore\ x_1=1$

또한, 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$

$x_1=1$을 대입하면 $y_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 두 접점은 $(1,\ \sqrt{3}),\ (1,\ -\sqrt{3})$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ m_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ m_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 또는

$m_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ m_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서

$m_1m_2=-\dfrac{1}{3}$

다른풀이

원 $(x-4)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하므로 두 직선은 원의 중심 $(4,\ 0)$을 지난다.

직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x-4)$, 즉 $mx-y-4m=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $mx-y-4m=0$에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|4m|=2\sqrt{m^2+1},\ 16m^2=4m^2+4$

$\therefore\ m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서

$m_1m_2=-\dfrac{1}{3}$

20 정답 ④

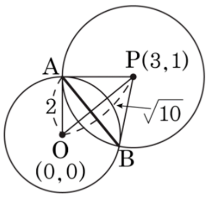
해설 $\overline{AB}$는 주어진 원과 중심 P, 반지름 $\overline{PA}$인 원과의 공통현이다.

$(x-3)^2+(y-1)^2=\overline{PA}^2=6$

따라서 직선 AB의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2-x^2-y^2=6-4$

이것을 정리하면 $3x+y=4$



21 정답 ⑤

해설 접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$ $\cdots$ ㉠

접선 ㉠이 점 $A(3,\ 0)$을 지나므로

$3x_1=4,\ x_1=\dfrac{4}{3}$ $\cdots$ ㉡

또한, 접점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ $\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=\dfrac{4}{3},\ y_1=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ 또는 $x_1=\dfrac{4}{3},\ y_1=-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

즉, $B\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right),\ C\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 또는

$B\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right),\ C\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

$\therefore\ \overline{BC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}-\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\cdot\left(3-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{10\sqrt{5}}{9}$

22 정답 ②

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-ma$이다. 원의 중심 $(3,\ 1)$에서 직선 $y=mx-ma$에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|3m-1-ma|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$\therefore\ |(3-a)m-1|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(3-a)^2m^2-2(3-a)m+1=9m^2+9,$

$(a^2-6a)m^2-2(3-a)m-8=0$

이 이차방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 두 접선이 수직이므로

$m_1m_2=-\dfrac{8}{(a^2-6a)}=-1,\ a^2-6a-8=0$

$a^2-6a-8=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=6$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다.

23 정답 256

해설 원의 성질을 활용하여 문제해결하기

두 점 $A(5,\ 12),\ B(a,\ b)$에 대하여

선분 AB의 길이가 3이므로

$\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}=3$

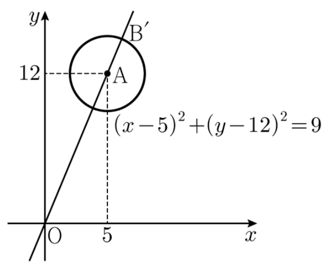
$\therefore\ (a-5)^2+(b-12)^2=9$

점 B는 원 $(x-5)^2+(y-12)^2=9$ 위의 점이다.

원점 O에 대하여 $a^2+b^2=\overline{OB}^2$이므로

$\overline{OB}$의 길이가 최대일 때 a^2+b^2이 최댓값을 갖는다.

직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서 더 멀리 있는 점을 B'라 하면 선분 OB의 길이의 최댓값은 선분 OB'의 길이와 같다.



$\overline{OB'}=\overline{OA}+\overline{AB'}$

$=\sqrt{5^2+12^2}+3$

$=\sqrt{169}+3$

$=13+3$

$=16$

따라서 선분 OB의 길이의 최댓값은 16이므로

a^2+b^2의 최댓값은 $16^2=256$이다.

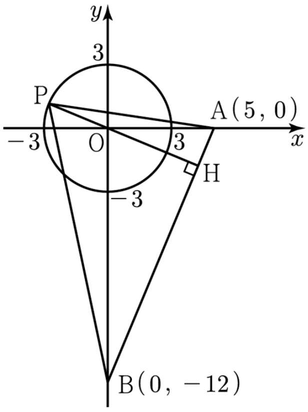
24 정답 ⑤

해설 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$

$\triangle PAB$에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 보면

높이는 원 위의 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리이므로,

높이가 최대가 되는 경우는 다음 그림과 같이 직선 PH가 원의 중심을 지날 때이다.



직선 AB의 방정식이 $12x-5y-60=0$이므로

원의 중심에서 직선에 이르는 거리는

$\dfrac{|-60|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{60}{13}$

따라서 삼각형의 높이는

$\dfrac{60}{13}+3=\dfrac{99}{13}$ 이므로

$\triangle PAB$의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times 13\times\dfrac{99}{13}=\dfrac{99}{2}$

25 정답 27

해설 원점 O와 직선 $y=x+3\sqrt{2}$, 즉 $x-y+3\sqrt{2}=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$

원의 반지름의 길이가 1이므로

정삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 높이는 $3-1=2$

정삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때의 높이는 $3+1=4$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의

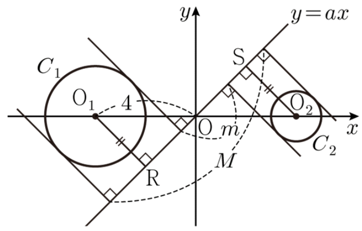
비는 $2^2:4^2$, 즉 $1:4$이다.

따라서 $p=1$, $q=4$이므로

$9(q-p)=9(4-1)=9\cdot 3=27$

26 정답 1

해설



두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.

점 $O_1(-4, 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 R,

점 $O_2(4, 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{O_1O}=\overline{O_2O}=4$이므로 직각삼각형 OO_1R과 OO_2S는

서로 합동이므로

$\overline{OR}=\overline{OS}$

점 $O_2(4, 0)$과 직선 $ax-y=0$ 사이의 거리는

$\overline{O_2S}=\dfrac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OS}=\sqrt{16-\dfrac{16a^2}{a^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{a^2+1}}$

따라서 H_1H_2의 최댓값은

$M=2\overline{OS}+3=\dfrac{8}{\sqrt{a^2+1}}+3$

H_1H_2의 최솟값은

$m=2\overline{OS}-3=\dfrac{8}{\sqrt{a^2+1}}-3$이므로

$Mm=\dfrac{64}{a^2+1}-9=23$, $a^2+1=2$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

27 정답 ①

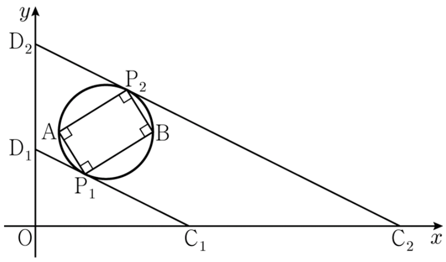
해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

$\angle APB = 90^{\circ}$ 인 점 P는 두 점 $A(1, 4)$, $B(5, 4)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원 C 위의 점이다.

점 P는 중심의 좌표가 $(3, 4)$, 반지름의 길이가 2인 원 C 위의 점이면서 선분 CD 위의 점이므로

직선 $l : y = -\frac{1}{2}x + t$와 원 C가 서로 만날 때

선분 CD 위에 $\angle APB = 90^{\circ}$ 인 점 P가 존재한다.



점 $(3, 4)$와 직선 $l : x + 2y - 2t = 0$ 사이의 거리는

$\frac{|3 + 2 \cdot 4 - 2t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|11 - 2t|}{\sqrt{5}}$ 이므로 직선 l과

원 C가 서로 만나려면

$\frac{|2t - 11|}{\sqrt{5}} \le 2$, $|2t - 11| \le 2\sqrt{5}$

$-2\sqrt{5} \le 2t - 11 \le 2\sqrt{5}$

$\frac{11 - 2\sqrt{5}}{2} \le t \le \frac{11 + 2\sqrt{5}}{2}$

따라서 $M = \frac{11 + 2\sqrt{5}}{2}$, $m = \frac{11 - 2\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$M - m = 2\sqrt{5}$

28 정답 ⑤

해설 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1 x + y_1 y = 9$이므로 점 B의 좌표는

$\left(\frac{9}{x_1}, 0\right)$

이때 점 H의 x좌표는 x_1이고 $3\overline{AH} = \overline{HB}$에서

$3(x_1 + 3) = \frac{9}{x_1} - x_1$

$4x_1^2 + 9x_1 - 9 = 0$

$(x_1 + 3)(4x_1 - 3) = 0$

$x_1 > 0$이므로 $x_1 = \frac{3}{4}$에서

$B(12, 0)$

또, 점 P는 원 C 위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 9$에서

$P\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{45\sqrt{15}}{8}$