교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (적분)152~155p_대단원

부정적분 ~ 속도와 거리

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $(3x-1)^3$의 한 부정적분이 $f(x)$일 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.

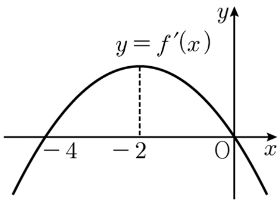
02 함수 $f(x)=\int 3x(x+2)dx$에 대하여 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

03 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 x^4-2x^2+1이고, 함수 $g(x)$의 한 부정적분이 $f(x)$일 때, $f(1)+g(0)$의 값을 구하시오.

04 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $2x+3$이다. 이때 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하시오.

05 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 극솟값이 -2, 극댓값이 2일 때, $a+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{15}{8}$ ⑤ 2

06 정적분 $\int_{0}^{3}(3x^2-1)dx+3\int_{0}^{3}(2x-x^2)dx$의 값을 구하시오.

07 정적분 $\int_{1}^{2}(-3x^2+2kx-2)dx$ 의 값이 3보다 작을 때, 정수 k의 최댓값을 구하시오.

08 정적분
$\int_{4}^{4}(x+2)(3x+1)dx-\int_{-1}^{-2}(y-2)(3y+2)dy$의 값을 구하시오.

09 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $\int_{2}^{4}f(x)dx=7$일 때, $\int_{0}^{2}\{4f(x+2)+5\}dx$의 값을 구하시오.

10 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\int_{-1}^{2}|f(x)|dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (나) $\int_{-4}^{4}f'(x)dx=0$

11 연속함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$을 만족시킬 때, 다음 중 정적분 $\int_{-2}^{1}f(x)dx$와 그 값이 항상 같은 것은?

① $\int_{-2}^{-1}f(x)dx$ ② $\int_{-2}^{2}f(x)dx$
③ $\int_{0}^{4}f(x)dx$ ④ $\int_{1}^{4}f(x)dx$
⑤ $\int_{3}^{5}f(x)dx$

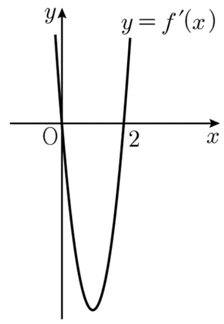
12 [2025년 7월 고3 7번 변형]
다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x) - x^4$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{106}{3}$　② $\frac{107}{3}$　③ 36
④ $\frac{109}{3}$　⑤ $\frac{110}{3}$

13 미분가능한 함수 $f(x)$가
$\int_{1}^{x} (x-t)f(t)dt = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$을 만족할 때,
$f(1)$의 값은?

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

14 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f(0)=0$, $f(1)=-4$일 때, $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\frac{19}{2}$　② $\frac{21}{2}$　③ $\frac{23}{2}$
④ $\frac{25}{2}$　⑤ $\frac{27}{2}$

15 곡선 $y=x(a-x)$ (단, $a>0$)와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 36일 때, 상수 a의 값은?

① 5　② 6
③ 7　④ 8
⑤ 9

16 곡선 $y=x^3+2$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서 접하는 직선을 이 곡선에 그을 때, 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

17 곡선 $y=|x(x+3)|$과 $y=x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

18 [2021년 6월 고3 19번 변형]
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=9t^2-2t+k$이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 1이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 4이다. 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

19 직선 궤도를 $a\,\mathrm{m/s}$의 속도로 달리고 있는 기차가 제동이 걸린 시점으로부터 t초 후의 속도 $v(t)\,\mathrm{m/s}$는 $v(t)=a-8t$ $(0 \leq t \leq 5)$이라고 한다.
이 기차가 제동이 걸린 후부터 정지할 때까지 달린 거리가 $100\,\mathrm{m}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

20 자유 낙하하는 어떤 물체의 t초 후의 속도는 $v(t)=-9.8t\,(\mathrm{m/s})$로 나타낸다. $1960\,\mathrm{m}$의 높이에서 낙하한 물체가 지면에 닿을 때까지 걸리는 시간을 구하시오.

21 정적분 $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+k)^2dx-\int_{1}^{-2}(2+x^2)dx$의 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

22 곡선 $y=x^2-6x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이가 x축에 의하여 이등분될 때, 상수 a에 대하여 $(a+6)^3$의 값을 구하시오.

23 [2016년 11월 고2 이과 14번/4점]

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 6t-2t^2 & (0 \le t < 3) \\ \dfrac{1}{2}(3-t) & (t \ge 3) \end{cases}$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=7$까지 움직인 거리는?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (적분)152~155p_대단원

부정적분 ~ 속도와 거리

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 125	02 ②	03 -4
04 1	05 ④	06 24
07 3	08 9	09 38
10 $\frac{143}{4}$	11 ④	12 ②
13 ④	14 ⑤	15 ②
16 $\frac{27}{4}$	17 27	18 19
19 40	20 20초	21 $\frac{45}{4}$
22 432	23 ③	

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (적분)152~155p_대단원

부정적분 ~ 속도와 거리

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 125

해설 $(3x-1)^3$의 한 부정적분이 $f(x)$이므로

$f'(x)=(3x-1)^3$

$\therefore f'(2)=125$

02 정답 ②

해설 $f(x)=\int 3x(x+2)dx$

$=\int(3x^2+6x)dx$

$=3\int x^2dx+6\int xdx$

$=x^3+3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+2$이므로

$f(1)=1+3+2=6$

03 정답 -4

해설 $\int f(x)dx=x^4-2x^2+1$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=4x^3-4x$

또, $\int g(x)dx=f(x)+C=4x^3-4x+C$이므로

양변을 x에 대하여 미분하면 $g(x)=12x^2-4$

$\therefore f(1)+g(0)=0-4=-4$

04 정답 1

해설 $f'(x)=2x+3$이므로

$f(x)=\int(2x+3)dx$

$=x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$f(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)+C=-1$에서 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+3x+1$

따라서 $f(x)=0$, 즉 $x^2+3x+1=0$의

모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

05 정답 ④

해설 $f'(x)=kx(x+4)$ $(k<0)$로 놓으면

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극솟값을 갖고,

$x=0$에서 극댓값을 갖는다. 이때

$f(x)=\int kx(x+4)dx=\int(kx^2+4kx)dx$

$=\frac{k}{3}x^3+2kx^2+C$

이고 $f(-4)=-2$, $f(0)=2$이므로

$f(-4)=-\frac{64}{3}k+32k+C=\frac{32}{3}k+C=-2$

$f(0)=C=2$

$\therefore k=-\frac{3}{8},\ C=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+2$이므로

$a=-\frac{1}{8},\ b=-\frac{3}{4},\ c=0,\ d=2$

$\therefore a+d=\frac{15}{8}$

06 정답 24

해설 $\int_0^3(3x^2-1)dx+3\int_0^3(2x-x^2)dx$

$\int_0^3(3x^2-1)dx+\int_0^3(6x-3x^2)dx$

$=\int_0^3(3x^2-1+6x-3x^2)dx$

$=\int_0^3(6x-1)dx$

$=\left[3x^2-x\right]_0^3=27-3=24$

07

정답 3

해설 $\int_1^2(-3x^2+2kx-2)dx=\left[-x^3+kx^2-2x\right]_1^2$

$=3k-9$

따라서 $3k-9<3$에서 $k<4$이므로

구하는 정수 k의 최댓값은 3이다.

08

정답 9

해설 $\int_4^4(x+2)(3x+1)dx-\int_{-1}^{-2}(y-2)(3y+2)dy$

$=\int_{-2}^{-1}(y-2)(3y+2)dy$

$=\int_{-2}^{-1}(3y^2-4y-4)dy$

$=\left[y^3-2y^2-4y\right]_{-2}^{-1}$

$=(-1-2+4)-(-8-8+8)$

$=9$

09

정답 38

해설 $y=f(x+2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이므로

$\int_2^4 f(x)dx=7$에서

$\int_0^2 f(x+2)dx=\int_2^4 f(x)dx=7$

$\therefore \int_0^2\{4f(x+2)+5\}dx$

$=4\times\int_0^2 f(x+2)dx+\int_0^2 5dx$

$=4\times7+\left[5x\right]_0^2$

$=28+10=38$

10

정답 $\frac{143}{4}$

해설 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

조건 (나)에서

$\int_{-4}^4(3x^2+a)dx=2\int_0^4(3x^2+a)dx$

$=2\left[x^3+ax\right]_0^4$

$=2(64+4a)=128+8a$

즉, $128+8a=0$이므로

$a=-16$

따라서 $f(x)=x^3-16x=x(x-4)(x+4)$이므로

$|f(x)|=\begin{cases}x^3-16x & (-4\le x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 4)\\ -x^3+16x & (x<-4 \text{ 또는 } 0<x<4)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^2|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0(x^3-16x)dx+\int_0^2(-x^3+16x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+8x^2\right]_0^2$

$=\frac{31}{4}+28=\frac{143}{4}$

11

정답 ④

해설 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+3)$이므로

$\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\cdots$

따라서 정적분 $\int_{-2}^1 f(x)dx$와 그 값이 항상 같은 것은

④이다.

12 정답 ②

해설 $\int_1^x f(t)dt = xf(x)-x^4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^3$

$xf'(x)=4x^3$

$f'(x)=4x^2$

$\therefore f(x)=\frac{4}{3}x^3+C$(단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt = xf(x)-x^4$

$x=1$일 때,

$0=1\cdot f(1)-1$

$\therefore f(1)=1$

$f(1)=\frac{4}{3}+C=1$이므로

$C=-\frac{1}{3}$

$f(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}$

$\therefore f(3)=36-\frac{1}{3}=\frac{107}{3}$

13 정답 ④

해설 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=2x^3-x^2-4x+3$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=2x^3-x^2-4x+3$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2-2x-4$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=6x^2-2x-4$

위 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x-2$

$\therefore f(1)=12-2=10$

14 정답 ⑤

해설 $f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax$에서

$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$(단, C는 적분상수)

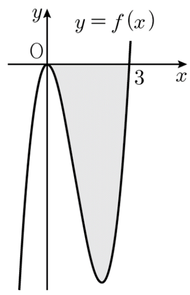
$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(1)=-4$이므로 $\frac{1}{3}a-a+C=-4 \therefore a=6$

$\therefore f(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$

따라서 구하는 넓이 S는

$S=-\int_0^3(2x^3-6x^2)dx=-\left[\frac{1}{2}x^4-2x^3\right]_0^3=\frac{27}{2}$



15 정답 ②

해설 곡선 $y=x(a-x)$ $(a>0)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(a-x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$

한편, 구하는 도형의 넓이가 36이므로

$\int_0^a x(a-x)dx$

$=\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$

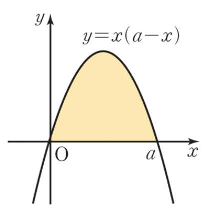
$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{6}a^3$

즉, $\frac{1}{6}a^3=36$이므로 $a^3-216=0$

$(a-6)(a^2+6a+36)=0$

이때, $a^2+6a+36=(a+3)^2+27>0$이므로

$a=6$



16 정답 $\frac{27}{4}$

해설 $f(x)=x^3+2$라 하면 $f'(x)=3x^2$

$\therefore f'(1)=3$

따라서 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1)$

$\therefore y=3x$

곡선 $f(x)=x^3+2$와 직선 $y=3x$의

교점의 x좌표는

$x^3+2=3x$에서 $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3+2)-3x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

17 정답 27

해설 $y=|x(x+3)|=\begin{cases} x(x+3) & (x\le -3 \text{ 또는 } x\ge 0) \\ -x(x+3) & (-3\le x\le 0) \end{cases}$

(ⅰ) $x\le -3$ 또는 $x\ge 0$일 때

곡선 $y=x(x+3)$과 직선 $y=x+8$의 교점의

x좌표는

$x(x+3)=x+8$에서

$x^2+2x-8=0,\ (x+4)(x-2)=0$

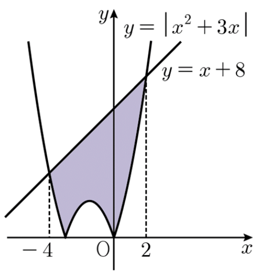
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

(ⅱ) $-3\le x\le 0$일 때

곡선 $y=-x(x+3)$과 x축과의 교점의 x좌표는

$-x(x+3)=0$에서 $x(x+3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

S

$$=\int_{-4}^{2}\{x+8-(x^2+3x)\}dx-2\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^{2}-2\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$$

$=27$

18 정답 19

해설 시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 1이므로

$v(t)=9t^2-2t+k$에서

$x(t)=3t^3-t^2+kt+1$

이때 $x(1)=4$에서

$3+k=4$

$\therefore k=1$

따라서 $x(t)=3t^3-t^2+t+1$이므로

$x(2)=3\cdot 2^3-2^2+2+1$

$=23$

즉, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(2)-x(1)=23-4=19$

19 정답 40

해설 제동이 걸린 후부터 정지할 때까지 걸린 시간은

$a-8t=0$에서 $t=\frac{a}{8}$ $(a>0)$이므로 제동이 걸린

후부터 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_{0}^{\frac{a}{8}}|v(t)|dt=\int_{0}^{\frac{a}{8}}(a-8t)dt=\left[at-4t^2\right]_{0}^{\frac{a}{8}}$$

$$=\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{16}=\frac{a^2}{16}$$

$\frac{a^2}{16}=100$에서 $a^2=1600$

이때 $a>0$이므로 $a=40$

20 정답 20초

해설 a초 후에 물체가 땅에 떨어진다고 하면 그때의 물체의 위치가 0이므로

$$1960+\int_{0}^{a}(-9.8t)dt=0$$

$$1960+\left[-4.9t^2\right]_{0}^{a}=0$$

$1960-4.9a^2=0$

$a^2=400$

$\therefore a=20$ ($\because a>0$)

따라서 물체가 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 20초이다.

21 정답 $\frac{45}{4}$

해설 $\int_{-2}^{1}(x+k)^2dx-\int_{1}^{-2}(2+x^2)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2+2kx+k^2)dx+\int_{-2}^{1}(2+x^2)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2+2kx+k^2+2+x^2)dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x^2+2kx+k^2+2)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+kx^2+(k^2+2)x\right]_{-2}^{1}$

$=\left\{\frac{2}{3}+k+(k^2+2)\right\}-\left\{-\frac{16}{3}+4k-2(k^2+2)\right\}$

$=3k^2-3k+12$

$=3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{45}{4}$

따라서 주어진 정적분은 $k=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{45}{4}$를 갖는다.

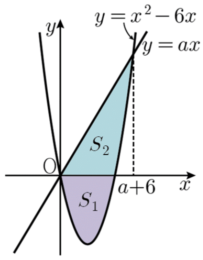
22 정답 432

해설 곡선 $y=x^2-6x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-6x=ax$에서

$x^2-(a+6)x=0$, $x\{x-(a+6)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+6$



위의 그림에서 $S_1=S_2$이고

$S_1=-\int_{0}^{6}(x^2-6x)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{0}^{6}=36$

$S_1+S_2=\int_{0}^{a+6}\{ax-(x^2-6x)\}dx$

$=\int_{0}^{a+6}\{-x^2+(a+6)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+6}{2}x^2\right]_{0}^{a+6}$

$=\frac{1}{6}(a+6)^3$

즉, $\frac{1}{6}(a+6)^3=2\cdot 36$이므로

$(a+6)^3=432$

23 정답 ③

해설 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=7$까지 움직인 거리는

$\int_{0}^{7}|v(t)|dt$

$=\int_{0}^{3}(6t-2t^2)dt+\int_{3}^{7}\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\left[3t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t\right]_{3}^{7}$

$=9+4$

$=13$