☆2019-2-2-기말-수1-대동세무고-공통-등차수열~수학적 귀납법☆

1)첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에서 a_8의 값은? (3.6점)

① 27 ② 31 ③ 35
④ 39 ⑤ 43

2)세 수 3, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 4, a, b는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? (단, $a<b$) (3.6점)

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

3)$1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3$의 값은? (3.7점)

① 384 ② 484 ③ 584
④ 684 ⑤ 784

4)수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$과 같이 귀납적으로 정의될 때, a_{10}의 값은? (3.7점)

① 255 ② 257 ③ 511
④ 513 ⑤ 1205

☆2019-2-2-기말-수1-대동세무고-공통-등차수열~수학적 귀납법☆

5)등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_3 + a_{11} = 40,\ a_{12} - a_8 = 12$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은? (3.8점)

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

6)모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제4항까지의 합이 45, 제5항부터 제8항까지의 합이 720일 때, a_5의 값은? (3.9점)

① 48 ② 54 ③ 60
④ 66 ⑤ 72

7) $\sum_{k=1}^{10} a_k = 6$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(-3a_k + 6b_k - 2)$의 값은? (4.0점)

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

8)수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2 \times 3^{n-3} - 3n$$

을 만족시킬 때, $a_8 - a_4$의 값은? (4.0점)

① 121 ② 174 ③ 212
④ 218 ⑤ 284

9)첫째항이 -28, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n의 값이 최소가 되게 하는 자연수 n의 값은? (4.1점)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

10) $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 값은? (4.1점)

① 1280 ② 1440 ③ 1620
④ 1820 ⑤ 1920

11)자연수 n에 대하여 n^2을 4으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{180} a_k$의 값은? (4.2점)

① 30 ② 60 ③ 90
④ 120 ⑤ 150

12)모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$4S_n = \{a_n\}^2 + 2a_n - 3 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$

가 성립한다. a_7의 값은? (4.3점)

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

☆2019-2-2-기말-수1-대동세무고-공통-등차수열~수학적 귀납법☆

13) $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{4+8+12+\cdots+4k}$ 의 값은? (4.4점)

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{10}{21}$
④ $\frac{20}{21}$ ⑤ $\frac{5}{21}$

14) 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{2n+1} a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

과 같이 귀납적으로 정의될 때, a_7의 값은? (4.5점)

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

15) 모든 자연수 n에 대하여 다음 공식

$$(1^2+1)\times 1! + (2^2+1)\times 2! + \cdots + (n^2+1)n! = n\times(n+1)!$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다. 가, 나에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{g(5)}{f(3)}$ 의 값은? (4.6점)

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변) $=(1^2+1)\times 1! = 2$, (우변) $= 1\times(1+1) = 2$
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$(1^2+1)\times 1! + (2^2+1)\times 2! + \cdots$
$+ (k^2+1)\times k! = k\times(k+1)!$ …… ㉠
㉠의 좌변에 $\{(k+1)^2+1\}\times \boxed{\text{가}}$ 을 더하면
$(1^2+1)\times 1! + (2^2+1)\times 2! + \cdots$
$+ (k^2+1)\times k! + \{(k+1)^2+1\}\times \boxed{\text{가}}$
$= k\times(k+1)! + \{(k+1)^2+1\}\times \boxed{\text{가}}$
$= \{(k+1)(k+2)\}\times(k+1)!$
$= (k+1)\times \boxed{\text{나}}$
위 등식은 주어진 등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

① 90 ② 150 ③ 210
④ 270 ⑤ 330

☆2019-2-2-기말-수1-대동세무고-공통-등차수열~수학적 귀납법☆

16)수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 88$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \geq 65) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n < 65) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값은? (4.8점)

① 365　② 478　③ 596
④ 635　⑤ 747

(서술형 1)

17)수열 $\{a_n\}$이

$a_1 = 4,\ a_2 = 7$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$

과 같이 귀납적으로 정의될 때, a_{10}의 값은? (7점)

(서술형 2)

18)$8^2 + 9^2 + 10^2 + \cdots + 20^2$ 의 값은? (7점)

(서술형 3)

19) 다음은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2^n > n^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=5$일 때,

(1) ____________________

따라서 $n=5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k > k^2$ ……㉠

부등식 ㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1} > 2k^2$ ……㉡

한편

(2) ____________________

____

즉 $2k^2-(k+1)^2>0$이므로 $2k^2>(k+1)^2$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$

위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 밑줄에 들어갈 식은? (8점)

(서술형 4)

20) 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 값은? (8점)

1) (정답) ②
2) (정답) ②
3) (정답) ⑤
4) (정답) ④
5) (정답) ⑤
6) (정답) ①
7) (정답) ①
8) (정답) ②
9) (정답) ⑤
10) (정답) ③
11) (정답) ③
12) (정답) ④
13) (정답) ①
14) (정답) ④
15) (정답) ③
16) (정답) ⑤
17) (정답) 31
18) (정답) 2730
19) (정답) 해설참조

(ⅰ) $n=5$일 때,

(1) (좌변)$=2^5=32>5^2=25=$(우변)

따라서 $n=5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k\geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$ ……㉠

부등식 ㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ ……㉡

한편

(2) $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=k(k-2)-1$

이때 $k\geq 5$이므로 $k(k-2)-1>0$

즉 $2k^2-(k+1)^2>0$이므로 $2k^2>(k+1)^2$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$

위 부등식은 주어진 부등식에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

20) (정답) log21