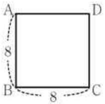
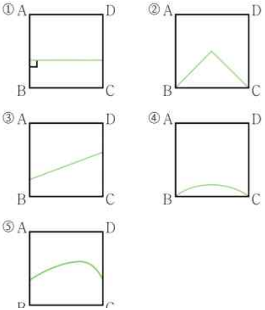
직선의 방정식 - 준킬러_ 기출

잠실여자고등학교-23-기말_13번

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 32$가 성립할 때, 다음 중 점 P의 자취를 나타내는 것은?

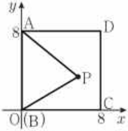




잠실여자고등학교-23-기말_13번_해설

정답 ①

해설 다음 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $A(0, 8)$, $B(0, 0)$이므로

$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 32$에서

$\{x^2 + (y-8)^2\} - (x^2 + y^2) = 32$

$-16y + 64 = 32$

$\therefore y = 2$

따라서 점 P의 자취는 ①과 같다.

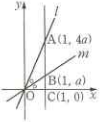
잠실여자고등학교-23-기말_16번

원점을 지나고 기울기가 양인 두 직선 l과 m이 있다.
직선 l의 기울기는 직선 m의 기울기의 4배이고,
직선 m은 x축의 양의 방향과 직선 l이 이루는 각을
이등분한다. 이때 직선 m의 기울기를 구하시오.

잠실여자고등학교-23-기말_16번_해설

정답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



직선 m을 $y=ax$ $(a>0)$라고 하면 직선 l은

$y=4ax$이다.

이때 l과 m이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면 A$(1, 4a)$, B$(1, a)$이다.

그런데 $\angle AOB = \angle BOC$ 이므로

$\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{AB}:\overline{BC}=3a:a=3:1$

$\overline{OC}=1$이므로 $\overline{OA}=3$

따라서 직각삼각형 OAC에서 $(4a)^2+1^2=3^2$

$a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

직선의 방정식 - 준킬러_ 기출

잠실여자고등학교-23-기말_19번

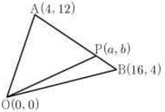
세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(16,\ 4)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 3배일 때, $a-b$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5
④ 7　　⑤ 9

잠실여자고등학교-23-기말_19번_해설

정답 ④

해설 다음 그림에서 $\triangle OAP=3\triangle OBP$ 이려면
점 P는 두 점 A, B를 $3:1$로 내분하여야 한다.



따라서 $P\left(\frac{3\cdot 16+1\cdot 4}{3+1}, \frac{3\cdot 4+1\cdot 12}{3+1}\right)$

즉, $P(13, 6)$이므로

$a=13$, $b=6$

$\therefore a-b=7$

잠실여자고등학교-23-기말_21번

세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-1,\ -2)$, $\mathrm{C}(5,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $mx+y-m-6=0$이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 상수 m값을 구하시오.

잠실여자고등학교-23-기말_21번_해설

정답 5

해설 $mx+y-m-6=0$ 에서

$m(x-1)+(y-6)=0$ $\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 6)$을 지난다.

$A(1, 6)$이므로 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠은 $\overline{BC}$의 중점 $(2, 1)$을 지나야 한다.

따라서 $m-5=0$이므로

$m=5$

잠실여자고등학교-23-기말_22번

포물선 $y=x^2-2x+3$ 위의 점 중에서 직선 $y=2x-2$까지의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

잠실여자고등학교-23-기말_22번_해설

정답 ②

해설 직선 $y=2x-2$에 평행인 직선 $y=2x+k$와

포물선 $y=x^2-2x+3$의 접점이 $(a,\ b)$이다.

$2a+k=a^2-2a+3$, $a^2-4a+(3-k)=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-k)=0$

$4-(3-k)=0$, $1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

$k=-1$을 대입하면 $a^2-4a+4=0$이므로 $a=2$

이때 $y=2x-1$에 $a=2$를 대입하면 $b=4-1=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

잠실여자고등학교-23-기말_25번

좌표평면 위의 한 점 $A(2, 6)$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC의 무게중심이 원점일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는?

① $20\sqrt{3}$ ② $25\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$
④ $35\sqrt{3}$ ⑤ $40\sqrt{3}$

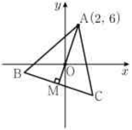
직선의 방정식 - 준킬러_ 해설

잠실여자고등학교-23-기말_25번_해설

정답 ③

해설 다음 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 정삼각형 ABC의 무게중심이 원점 O이므로

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}$



이때 $\overline{AO}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AO}=3\sqrt{10}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변 BC의 길이는

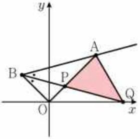
$\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{AM}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{10}=2\sqrt{30}$

이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 120=30\sqrt{3}$

잠실여자고등학교-23-기말_17번

세 점 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서 $\angle B$의 이등분선이 선분 OA와 만나는 점을 P라 하고, 선분 BP의 연장선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이는?



① $\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

④ $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

직선의 방정식 - 준킬러_ 해설

잠실여자고등학교-23-기말_17번_해설

정답 ⑤

해설 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$에서

$\overline{OB}=2$, $\overline{OA}=2\sqrt{3}$, $\overline{AB}=4$

삼각형 OAB에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OP}:\overline{PA}$ 이므로

$\overline{OP}:\overline{PA}=1:2$

즉, 점 P는 $\overline{OA}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{1\cdot\sqrt{6}}{1+2}, \frac{1\cdot\sqrt{6}}{1+2}\right)$

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

한편, 직선 BP의 방정식을 구하면

$$y-\sqrt{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$$

$\therefore y=(-2+\sqrt{3})x-\sqrt{2}+\sqrt{6}$

점 Q의 x좌표가 직선 BP의 x절편이므로

$Q(\sqrt{6}+\sqrt{2}, 0)$

이때 직선 AP의 방정식은 $y=x$, 즉 $x-y=0$이므로

점 $Q(\sqrt{6}+\sqrt{2}, 0)$과 직선 AP 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{6}+\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$$

$$\therefore \triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot(\sqrt{3}+1)=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

세울세종고등학교-23-기말_9번

두 직선

$l : ax+y-3a+2=0$,

$m : 2x-ay+2a-4=0$

에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $a=0$일 때 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

ㄴ. 직선 m은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$를 지난다.

ㄷ. 두 직선 l과 m이 평행이 되기 위한 a의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

세울세종고등학교-23-기말_9번_해설

정답 ③

해설 ㄱ. $a=0$일 때, $l: y=-2$, $m: x=2$이므로
두 직선 l, m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. $2x-ay+2a-4=0$에서
$2(x-2)-a(y-2)=0$
이 등식은 $x=2$, $y=2$일 때 a의 값에 관계없이 항상 성립한다.
즉, 직선 m은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$를 지난다. (참)

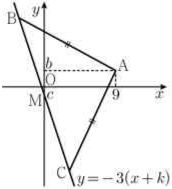
ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에 의해 두 직선 l, m은 서로 수직이다.
$a \neq 0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각
$-a$, $\dfrac{2}{a}$이다. 그런데 $-a=\dfrac{2}{a}$를 만족시키는
실수 a의 값은 존재하지 않으므로 두 직선 l과 m이
평행하기 위한 실수 a의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

직선의 방정식 - 준킬러_ 기출

세울세종고등학교-23-기말_14번

다음 그림과 같이 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(9,\ b)$와 직선 $y=-3(x+k)$ 위의 서로 다른 두 점 B, C가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다. 선분 BC의 중점이 y축 위의 점 $\mathrm{M}(0,\ c)$에 있을 때, $b+3k$의 값은?



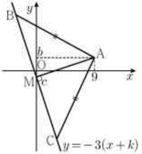
① -3　　② -1　　③ 1

④ 3　　⑤ 5

세울세종고등학교-23-기말_14번_해설

정답 ④

해설 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고
밑변 BC의 중점이 M이므로
두 선분 AM, BC는 서로 수직이다.



점 M은 직선 $y=-3(x+k)$와 y축이 만나는 점이므로
$M(0, -3k)=M(0, c)$
$\therefore c=-3k$ $\cdots$ ㉠
직선 BC의 기울기는 -3이므로
직선 AM의 기울기는 $\frac{1}{3}$, $M(0, c)$에서
직선 AM은 $y=\frac{1}{3}x+c$
점 $A(9, b)$가 이 직선을 지나므로
$\therefore b=3+c$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $b+3k=3$

세울세종고등학교-23-기말_16번

점 $(3,\ -1)$와 직선 $kx+y-3k-4=0$ 사이의 거리는 $k=a$일 때 최댓값 b를 갖는다고 한다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

세울세종고등학교-23-기말_16번_해설

정답 5

해설 점 $(3,\ -1)$와 직선 $kx+y-3k-4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|3k-1-3k-4|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}$$

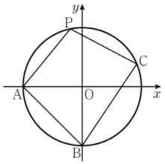
$f(k)$는 $\sqrt{k^2+1}$ 의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0)=\frac{5}{\sqrt{1}}=5$$

따라서 $a=0,\ b=5$이므로 $a+b=5$

세울세종고등학교-23-기말_18번

다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=169$ 위에
세 점 $A(-13,\ 0)$, $B(0,\ -13)$, $C(12,\ 5)$가 있다.
점 B를 포함하지 않는 호 AC 위에 점 P가 있을 때,
다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $3\sqrt{26}$ 이다.

ㄴ. 사각형 PABC의 넓이가 최대일 때, 직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이다.

ㄷ. 사각형 PABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{65}{2}(\sqrt{26}+5)$이다.

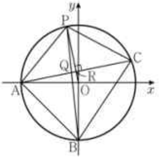
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

직선+원의 방정식- 킬러_ 해설

세울세종고등학교-23-기말_18번_해설(1)

정답 ④

해설 ㄱ. 직선 AC의 방정식은 $x-5y+13=0$이므로
점 B와 직선 AC 사이의 거리는
$$\frac{|-5\cdot(-13)+13|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=3\sqrt{26} \text{ (참)}$$
ㄴ. 원 $x^2+y^2=169$ 위의 점 P에서의 접선이
직선 AC와 평행할 때, 사각형 PABC의 넓이가
최대가 된다.
선분 AC와 두 선분 PB, PO가 만나는 점을 각각
Q, R라 하자.
원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AC는 평행하고,
원의 반지름 OP와 각각 서로 수직이다.
삼각형 PQR에서 $\angle R=90^\circ$, $\angle Q<90^\circ$ 이므로
직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이 아니다. (거짓)



세울세종고등학교-23-기말_18번_해설(2)

ㄷ. 사각형 PABC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACP의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AC}=5\sqrt{26}$ 이고 ㄱ에 의하여

$$\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{26}\cdot 3\sqrt{26}=195 \quad \cdots ㉠$$

삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은 ㄴ에 의하여

$$\overline{OR}=\frac{|1\cdot 0+(-5)\cdot 0+13|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\overline{PR}=13-\overline{OR}=13-\frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{26}\cdot\left(13-\frac{\sqrt{26}}{2}\right)=\frac{65}{2}(\sqrt{26}-1) \quad \cdots ㉡$$

따라서 사각형 PABC의 넓이의 최댓값은

㉠, ㉡에 의하여 $\frac{65}{2}(\sqrt{26}+5)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.