교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제)96~97p_중단원

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 거짓인 명제인 것은?

① π^2은 무리수이다.
② 4.0001은 4에 아주 가까운 수이다.
③ 모든 홀수는 소수이다.
④ $x^2 \geq 2x-1$
⑤ $x+5 \leq x+8$

02 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2-2>0$의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$
③ $\{3,\ 4,\ 5\}$　④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
⑤ U

03 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2-4x-12 \leq 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

04 [2023년 3월 고2 2번/2점]
실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의 진리집합은?

① $\{x\,|\,x<0\}$　② $\{x\,|\,x\leq 0\}$　③ $\{x\,|\,x\neq 0\}$
④ $\{x\,|\,x\geq 0\}$　⑤ $\{x\,|\,x>0\}$

05 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2-3x-18<0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수는?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

06 [2023년 3월 고2 2번 변형]
실수 x에 대한 조건 'x는 양이 아닌 실수이다.'의 진리집합은?

① $\{x\,|\,x<0\}$　② $\{x\,|\,x\leq 0\}$　③ $\{x\,|\,x\neq 0\}$
④ $\{x\,|\,x\geq 0\}$　⑤ $\{x\,|\,x>0\}$

07 다음 중 역이 거짓인 명제는? (단, x, y, z는 실수이다.)

① 두 집합 A, B에 대하여 $B \subset A$이면 $A \cup B = A$이다.
② $x > 0$이고 $y > 0$이면 $x + y > 0$이다.
③ x가 3의 배수이면 x는 9의 배수이다.
④ $xz = yz$이면 $x = y$이다.
⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이다.

08 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \to \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $q \to p$ ③ $q \to \sim p$
④ $\sim q \to p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

09 두 조건 p, q에 대하여 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① q는 p이기 위한 충분조건이다.
② p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
④ $\sim q$는 p이기 위한 충분조건이다.
⑤ $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

10 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건 ② 필요조건 ③ 대우
④ 필요충분조건 ⑤ 아무 조건도 아니다.

11 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$
④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

12 다음 중 참인 명제는?
① 어떤 자연수 x에 대하여 $0 < x < 1$이다.
② 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 0$이다.
③ 모든 자연수 x에 대하여 $x - 3 \geq 0$이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $1 - x^2 > 0$이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)(x+3) = 0$이다.

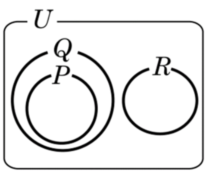
13 다음 조건을 p라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 p가 참인 것을 모두 고르면?

① $|x|=x$
② $x^2=1$
③ $(x-1)(x+1)=x^2-1$
④ $x^2\geq 0$
⑤ $x^2+1>2x$

14 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p\to\sim q$가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?(단, P, Q는 공집합이 아니다.)

① $Q\subset P^C$ ② $P\subset Q^C$
③ $P\cap Q=\varnothing$ ④ $Q^C\cap P=Q^C$
⑤ $Q-P=Q$

15 전체집합 U에서 세 조건 p, q, r를 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계가 아래 그림과 같다. 이때 다음 명제 중 참인 것은?



① $q\to r$ ② $r\to\sim p$
③ (q 또는 r)$\to\sim p$ ④ ($\sim q$이고 r)$\to p$
⑤ $p\to$($\sim q$ 또는 r)

16 두 조건 $p: |x-3|\leq 9,\ q: x^2-9k^2\leq 0$에 대하여 명제 $p\to q$의 역이 참이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

17 다음 중 그 역과 대우가 모두 참인 명제는? (단, x, y는 실수이다.)

① x, y가 홀수이면 $x+y$는 홀수이다.
② $x^2=1$이면 $|x|=1$이다.
③ $x=y$이면 $x^2=y^2$이다.
④ $x=1,\ y=1$이면 $xy=1$이다.
⑤ x^2이 유리수이면 x는 유리수이다.

18 [2018년 11월 고3 문과 11번 변형]
실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: x^2-5x+6\leq 0,$
$q: x>a$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19 [2021년 11월 고1 11번 변형]
실수 x에 대한 두 조건
$p: |x+1| \leq n$, $q: x^2+4x-12 \leq 0$에 대하여
p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

20 두 명제 $p \Rightarrow q$와 $r \Rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $\sim q \Rightarrow \sim p$	㉡ $r \Rightarrow \sim p$
㉢ $r \Rightarrow p$	㉣ $p \Rightarrow r$
㉤ $\sim q \Rightarrow p$	

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢
③ ㉢, ㉣ ④ ㉠, ㉢
⑤ ㉡, ㉣

21 두 명제 $p \rightarrow \sim q$와 $\sim r \rightarrow q$가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? (단, $\sim p$는 p의 부정이다.)

① $q \rightarrow \sim p$ ② $p \rightarrow r$ ③ $q \rightarrow \sim r$
④ $\sim q \rightarrow r$ ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

22 [2022년 3월 고2 17번/4점]
실수 x에 대한 두 조건
$p:\ x^2+2ax+1 \geq 0$, $q:\ x^2+2bx+9 \leq 0$이 있다.
다음 두 문장이 모두 참인 명제가 되도록 하는
정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

- 모든 실수 x에 대하여 p이다.
- p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

23 실수 x에 대한 두 조건
$p: (x+2)^2 \leq 0$, $q: x^2+(k-4)x+4=0$
에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

24 실수 x, y에 대하여
$2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

25 두 실수 x, y에 대하여

$3x^2+2y^2-4x+\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$은 $x=a$, $y=b$일 때,

최솟값 m을 갖는다. 세 상수 a, b, m에 대하여

$a+b+m$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제)96~97p_중단원

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ④	03 6
04 ④	05 ②	06 ②
07 ②	08 ③	09 ③
10 ①	11 ③	12 ④
13 ③ , ④	14 ④	15 ②
16 2	17 ②	18 ③
19 ③	20 ①	21 ③
22 ①	23 ②	24 10
25 ②		

교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제)96~97p_중단원

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 ① 참인 명제이다.
② '가까운'의 기준이 명확하지 않아
참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ [반례] 9는 홀수이지만 소수가 아니다.
따라서 거짓인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
⑤ $x+5 \leq x+8$에서 $5 \leq 8$이므로 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

02 정답 ④

해설 주어진 조건 $x^2-2>0$에
$x=0$을 대입하면 $0-2<0$이므로 거짓이다.
$x=1$을 대입하면 $1-2<0$이므로 거짓이다.
$x=2$를 대입하면 $4-2>0$이므로 참이다.
$x=3$을 대입하면 $9-2>0$이므로 참이다.
$x=4$를 대입하면 $16-2>0$이므로 참이다.
$x=5$를 대입하면 $25-2>0$이므로 참이다.
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$이다.

03 정답 6

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고 조건 p의 진리집합을
P라 하면
$p: x^2-4x-12 \leq 0$에서
$(x+2)(x-6) \leq 0$
$\therefore\ -2 \leq x \leq 6$
$\therefore\ P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 6이다.

04 정답 ④

해설 조건의 진리집합을 이해한다.
실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의
진리집합은 $\{x | x \geq 0\}$이다.

05 정답 ②

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$x^2-3x-18<0$에서
$(x+3)(x-6)<0$
$\therefore\ -3<x<6$
따라서 $P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
조건 p의 진리집합의 원소의 개수는 5이다.

06 정답 ②

해설 실수 x에 대한 조건 'x는 양이 아닌 실수이다.'의
진리집합은 $\{x | x \leq 0\}$이다.

07 정답 ②

해설 ① 역: 두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B=A$이면
$B \subset A$이다. (참)
② 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$, $y=5$이면
$x+y=2>0$이지만 $x<0$
③ 역: x가 9의 배수이면 x는 3의 배수이다. (참)
④ 역: $x=y$이면 $xz=yz$이다. (참)
⑤ 역: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이면 $x^2+y^2 \neq 0$이다. (참)
따라서 역이 거짓인 명제는 ②이다.

08 정답 ③

해설 명제 $p \to \sim q$가 참이므로 항상 참인 명제는 그 대우인
$q \to \sim p$이다.

09 정답 ③

해설 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Rightarrow \sim p$
③ 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로
그 대우인 $p \rightarrow \sim q$도 참이다.
즉, $p \Rightarrow \sim q$이므로
p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

10 정답 ①

해설 정삼각형이면 이등변삼각형이므로
정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한
충분조건이다.

11 정답 ③

해설 $x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

12 정답 ④

해설 ① 0와 1사이에는 자연수가 없으므로 주어진 명제는 거짓이다.

② 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ [반례] $x = 1$이면 $x - 3 \geq 0$가 성립하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x = \frac{1}{2}$ 이면 $1 - x^2 > 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

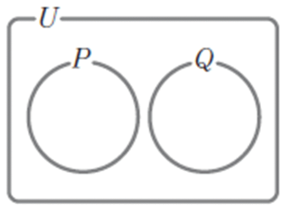
⑤ [반례] $x = 0$이면 $(x-2)(x+3) \neq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

13 정답 ③, ④

해설 ① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
$x \geq q0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
$x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$인 x에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

14 정답 ④

해설 명제 $p \rightarrow \sim q$가 참이므로 $P \subset Q^C$이다. 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다. 따라서 $Q^C \cap P = P$이므로 옳지 않은 것은 ④이다.

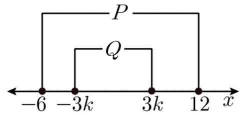


15 정답 ②

해설 ② 주어진 벤 다이어그램에서 $R \subset P^C$이므로
$r \rightarrow \sim p$는 참인 명제이다.

16 정답 2

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$|x-3| \leq 9$에서 $-9 \leq x-3 \leq 9$
$\therefore\ -6 \leq x \leq 12$
$\therefore\ P = \{x | -6 \leq x \leq 12\}$
$x^2 - 9k^2 \leq 0$에서 $(x+3k)(x-3k) \leq 0$
$\therefore\ -3k \leq x \leq 3k$
$\therefore\ Q = \{x | -3k \leq x \leq 3k\}$
이때 명제 $p \rightarrow q$의 역은 $q \rightarrow p$이다.
명제 $q \rightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로
다음 그림에서 $-3k \geq -6$, $3k \leq 12$
$k \leq 2$, $k \leq 4$
$\therefore\ k \leq 2$
따라서 자연수 k의 최댓값은 2이다.



17 정답 ②

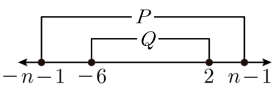
해설 ① 역: $x+y$가 홀수이면 x, y는 홀수이다. (거짓)
명제: (반례) $x=1$, $y=1$일 때, $x+y=2$
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓
② 역: $|x|=1$이면 $x^2=1$이다. (참)
명제: $|x|=1$이면 $x=\pm1$이므로 $x^2=1$
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참
③ 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$일 때, $x^2=y^2=1$
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참
④ 역: $xy=1$이면 $x=1$, $y=1$이다. (거짓)
[반례] $x=\frac{1}{2}$, $y=2$이면 $xy=1$
주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참
⑤ 역: x가 유리수이면 x^2은 유리수이다. (참)
명제: [반례] $x=\sqrt{2}$일 때, $x^2=2$
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ②

18 정답 ③

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이다.
이때
$P=\{x|x^2-5x+6\le 0\}=\{x|2\le x\le 3\}$
$Q^C=\{x|x\le a\}$
따라서 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로
$P\subset Q^C$이어야 한다.
즉, $a\ge 3$이다.
따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

19 정답 ③

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-n-1\le x\le n-1\}$,
$Q=\{x|-6\le x\le 2\}$
이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.



이때 $-n-1\le -6$, $n-1\ge 2$이므로 $n\ge 5$
따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

20 정답 ①

해설 $p\Rightarrow q$와 $r\Rightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $\sim q\Rightarrow \sim p$, $q\Rightarrow \sim r$이 참 $p\Rightarrow q\Rightarrow \sim r$이므로 $p\Rightarrow \sim r$가 참이고 그 대우인 $r\Rightarrow \sim p$가 참

21 정답 ③

해설 두 명제 $p\to\sim q$, $\sim r\to q$가 참이므로 그 대우인
$q\to\sim p$, $\sim q\to r$도 참이다.
즉, 두 명제 $p\to\sim q$, $\sim q\to r$가 참이므로 명제 $p\to r$도 참이고 그 대우인 $\sim r\to\sim p$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

22 정답 ①

해설 이차부등식을 포함한 문장이 참인 명제가 되도록 하는 문제를 해결한다.
실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리 집합을 각각 P, Q라 하자.
'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면
$P=U$이어야 한다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le 0$
$(a+1)(a-1)\le 0$
$\therefore\ -1\le a\le 1$
따라서 정수 a는 -1, 0, 1이다.
이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로
$Q^C=U$이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$
$(b+3)(b-3)<0$
$\therefore\ -3<b<3$
따라서 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.
따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$3\cdot 5=15$

23 정답 ②

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 한다.
$(x+2)^2 \le 0$에서 $x=-2$이므로 $P=\{-2\}$
(ⅰ) $Q=\{-2\}$일 때
$x^2+(k-4)x+4=0$이 $x=-2$를 근으로 가지므로
$4-2(k-4)+4=0$
$\therefore k=8$
이때 방정식 $x^2+4x+4=0$은 오직 $x=-2$만 근으로 가지므로 만족시킨다.
(ⅱ) $Q=\varnothing$일 때
이차방정식 $x^2+(k-4)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k-4)^2-4\cdot1\cdot4<0$
$k^2-8k<0$
$k(k-8)<0$
$\therefore 0<k<8$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 만족시키는 정수 k는
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$이므로 8개다.

24 정답 10

해설 $2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$에서

$$2x^2+2y^2+1+\frac{36}{2x^2+2y^2+1}+y^2-2y-1$$

$$2x^2+2y^2+1+\frac{36}{2x^2+2y^2+1}+(y-1)^2-2$$

이때 모든 실수 x, y에 대하여 $2x^2+2y^2+1>0$,
$\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x^2+2y^2+1+\frac{36}{2x^2+2y^2+1}\ge 2\sqrt{36}=12$$

(단, 등호는 $2x^2+2y^2+1=\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$,
즉 $2x^2+2y^2=5$일 때 성립)
또한, y는 실수이므로
$(y-1)^2\ge0$ (단, 등호는 $y=1$일 때 성립)
따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y=1$일 때,
$12+0-2=10$이다.

25 정답 ②

해설 x, y는 실수이므로 $x^2\ge0$, $y^2\ge0$이다.
따라서 $x^2+2y^2+3>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x^2+2y^2-4x+\frac{16}{x^2+2y^2+3}$$

$$=x^2+2y^2+3+\frac{16}{x^2+2y^2+3}+2x^2-4x-3$$

$$\ge 2\sqrt{(x^2+2y^2+3)\cdot\frac{16}{x^2+2y^2+3}}+2x^2-4x-3 \quad \cdots ㉠$$

$$=2x^2-4x+5$$

$$=2(x-1)^2+3\ge3 \quad \cdots ㉡$$

㉠에서 등호는 $x^2+2y^2+3=\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$에서
$x^2+2y^2=1$일 때 성립하고
㉡에서 이 값은 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.
따라서 $x=1$일 때 $x^2+2y^2=1$에서 $y=0$이므로
$a=1$, $b=0$, $m=3$이다.
$\therefore a+b+m=1+0+3=4$