한양대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
55문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 함수 f가 실수 전체의 집합에서

$$f(x)=\begin{cases} x-6 & (x \geq 2) \\ -2x & (x < 2) \end{cases}$$

로 정의될 때, $f(5)+f(-2)$의 값은?

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

02 다음 중 함수 $y=\dfrac{1}{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 그래프의 식은?

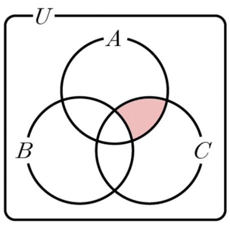
① $y=\dfrac{-4x+2}{2x-1}$　② $y=\dfrac{-4x+3}{2x-2}$
③ $y=\dfrac{4x-3}{2x-2}$　④ $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$
⑤ $y=\dfrac{4x+5}{2x+2}$

03 두 집합 $A=\{2a,\ a+6,\ 3a-1\}$, $B=\{2a+1,\ a+2,\ 8\}$에 대하여 $A\subset B$, $B\subset A$일 때, a의 값을 구하시오.

04 전체집합 U의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $A-B^C=A\cap B$
② $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$
③ $A^C\cap(A\cup B)=A-B$
④ $(A^C\cap B)-A=B\cap A^C$
⑤ $(A-B)^C=A^C\cup B$

05 다음 중 아래 벤다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합인 것은 ?



① $A-(B\cup C)$　② $B-(A\cup C)$
③ $B-(A\cap C)$　④ $(B\cup C)-A$
⑤ $(A\cap C)-B$

06 실수 전체의 집합 U에 대하여 $x \in U$, $y \in U$일 때, 다음 보기 중 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 모든 x에 대하여 $x^2-2x+3 \geq 0$이다.
ㄴ. 어떤 x에 대하여 $x^2-1<0$이다.
ㄷ. 어떤 x, y에 대하여 $x^2+y^2 \leq 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 명제와 그 명제의 역이 모두 참인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, x, y는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $x=2$이면 $x^3-8=0$이다.
ㄴ. $0<x<y$이면 $x^3y<xy^3$이다.
ㄷ. $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 이고 $y=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 집합 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2$이 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. (단, $X \neq \varnothing$)

09 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응의 개수는 a이고, 항등함수의 개수는 b이면 상수함수의 개수는 c이다. 이때 a, b, c에 알맞은 수를 차례대로 적은 것은?

① 6, 3, 3 ② 6, 3, 1 ③ 6, 1, 3
④ 27, 3, 1 ⑤ 27, 1, 3

10 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f\left(\dfrac{x+4}{2}\right)=3x+2$를 만족시킨다. 이때 $f(2)$의 값을 구하시오.

11 실수 전체의 집합에서 f, g가 $f(x)=\begin{cases} 3x & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=-x+5$로 정의될 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(-3)$의 값을 구하시오.

12 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하였다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

13 $x \geq 2$에서 함수 $y=\sqrt{x+2}+a$의 최솟값이 6이고, 그래프가 점 $(b,\ 8)$를 지난다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

14 함수 $y=-\sqrt{9-3x}$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

15 집합 $A=\{2,\ 3\}$에 대하여 $P(A)=\{X\,|\,X\subset A\}$라 할 때, 다음 중 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은?

① $\varnothing$ ② $\{3\}$ ③ $\{2\}$
④ $\{2,\ 3\}$ ⑤ $\{\varnothing\}$

16 30 이하의 자연수 k에 대하여 두 집합
$A=\{x\,|\,x$는 k의 양의 약수$\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
이 있다. $n(A\cap B)=2$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $A\cap B=\{4,\ 5\}$이면 $k=20$이다.
ㄴ. $A\cap B=\{4,\ 6\}$을 만족하는 k의 최댓값은 24이다.
ㄷ. 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되는 모든 k의 값의 합은 36이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 세 부분집합 A, B, X에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$일 때, $(A\cup X)\subset(B\cup X)$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

18 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap B=A$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A-B=\varnothing$　② $B-A=\varnothing$
③ $A\cup B=U$　④ $A\cup B^c=U$
⑤ $A^c\cup B=A^c$

19 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $A\cap C=\varnothing$이고 $n(A)=10$, $n(B)=8$, $n(C)=6$, $n(A\cup B)=14$, $n(B\cup C)=10$일 때, $n(A\cup B\cup C)$의 값을 구하시오.

20 전체집합 $U=\{x\mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$에서의 두 조건 p : x는 4의 약수이다, q : $2x-17\le 0$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset X\subset Q$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

21 [2023년 11월 고1 25번/3점]
정수 k에 대한 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

> p : 모든 실수 x에 대하여
> $x^2+2kx+4k+5>0$이다.
> q : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이다.

22 실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r이 $p: 3\le x<5$, $q: a\le x\le 10$, $r: x\le b$이다. p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 q이기 위한 필요조건일 때, $a-b$의 최댓값을 구하시오.

23 다음은 명제 '자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우
> '자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 $\boxed{(가)}$이면 ab는 $\boxed{(나)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
> a, b가 모두 $\boxed{(가)}$이므로
> $a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때, $ab=2(\boxed{(다)})+1$ 이므로
> ab는 $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① 짝수, 홀수, $2mn+m+n$
② 짝수, 홀수, $2mn-m-n$
③ 홀수, 짝수, $2mn-m-n$
④ 홀수, 홀수, $2mn+m+n$
⑤ 홀수, 홀수, $2mn-m-n$

24 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+2n}$이 무리수임을 증명하는 과정이다.

> $\sqrt{n^2+2n}=\sqrt{(n+1)^2-1}$ 이고
> $\sqrt{(n+1)^2-1}$ 이 유리수라 가정하면
> $\sqrt{(n+1)^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하면
> $(n+1)^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ $\cdots$ ㉠
> ㉠의 좌변은 자연수이고, p와 q는 서로소이므로
> $p^2=\boxed{(가)}$ $\cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
> $(n+1)^2-q^2=1$, $(\boxed{(나)})(n+1-q)=1$
> $\therefore$ $\boxed{(다)}=0$, $n-q=0$ 또는
> $\boxed{(다)}=-2$, $n-q=-2$
> 그런데 이것은 n, q가 자연수라는 가정에 모순이므로
> $\sqrt{n^2+2n}$ 은 무리수이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$n+1+q$	$p-n$
②	1	$n-1+q$	$n+q$
③	1	$n+1+q$	$n+q$
④	2	$n-1+q$	$p-n$
⑤	2	$n+1+q$	$p-n$

25 다음은 임의의 실수 a, b에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$일 때, $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

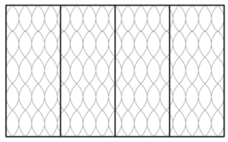
> $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로
> $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+$[가]$+b^2-(a^2+$[나]$+b^2)$
> $=2($[다]$) \geq 0$
> (단, 등호는 [라] ≥ 0일 때 성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab
② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$
③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : ab
④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab
⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

26 양의 실수 x, y에 대하여 $2x+y=1$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은?

① $4\sqrt{6}$ ② $6\sqrt{6}$ ③ $5+2\sqrt{6}$
④ $5+2\sqrt{5}$ ⑤ $8\sqrt{6}$

27 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 이용하여 다음 그림과 같은 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이때 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\,\mathrm{m}^2$ ② $70\,\mathrm{m}^2$ ③ $80\,\mathrm{m}^2$
④ $90\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\,\mathrm{m}^2$

28 a, b, x, y가 실수이고, $a^2+b^2=8$, $x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 16

29 $x \neq 0$인 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2x$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

30 집합 $X=\{x \mid x \le k\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-2x^2+20x-45$가 일대일함수가 되도록 하는 k의 최댓값을 구하시오.

31 두 집합 $X=\{1,\ 3,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중에서 다음을 만족시키는 함수 f의 개수는?

집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.

① 24 ② 48 ③ 72
④ 96 ⑤ 120

32 두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=bx-a$가 $f \circ g = g \circ f$를 만족할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 b의 값에 관계없이 한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, pq의 값을 구하시오. (단, a, b, p, q는 상수이다.)

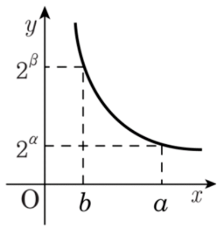
33 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+b & (x \ge 2) \\ x-2 & (x<2) \end{cases}$의 역함수가 존재하도록 실수 a, b를 정할 때, $a+b$의 최댓값을 구하시오.

34 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이고 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) \ne x$이다.
함수 f가 $(f \circ f)(1)=4$를 만족시킬 때, $f^{-1}(4)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하시오.

35 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$일 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(98)$의 값은?

① $\dfrac{99}{48}$ ② $\dfrac{100}{49}$ ③ $\dfrac{101}{50}$
④ $\dfrac{50}{101}$ ⑤ $\dfrac{49}{100}$

36 다음 그림은 함수 $f(x)=\dfrac{4}{x}$의 그래프이다. $f(a)=2^{\alpha}$, $f(b)=2^{\beta}$이고 $ab=8$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?



① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

37 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$이고 $f_2=f\circ f$, $f_3=f\circ f\circ f$, $\cdots$, $f_n=f_{n-1}\circ f$라 정의할 때, $f_{2000}(-1)$의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

38 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-7$에 대하여 대칭일 때, 그 역함수의 그래프는 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 대칭이다. 이때 상수 a, b, c, d에 대하여 $-2a+b-6c+3d$의 값을 구하시오.

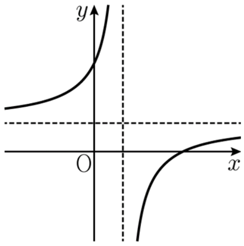
39 다음 보기 중 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프의 성질로 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a는 $a\neq0$인 상수이다.)

〈보 기〉

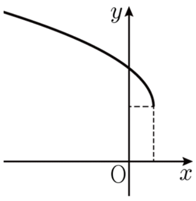
ㄱ. $a<0$일 때, 제2사분면을 지난다.
ㄴ. $|a|$가 클수록 x축에 가까워진다.
ㄷ. 치역은 $\{y|y\geq0\}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

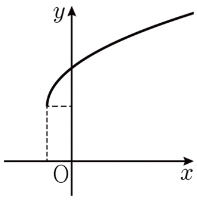
40 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.)



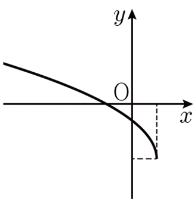
①



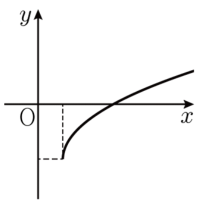
②



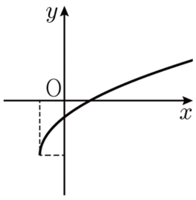
③



④

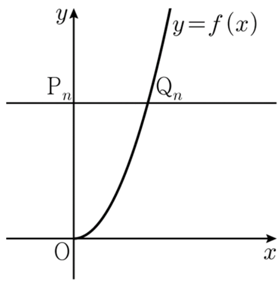


⑤



41 [2016년 3월 고3 문과 13번/3점]

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 3n+1)$인 점을 P_n, 함수 $f(x)=x^2\ (x\geq 0)$이라 하자. 점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n, 점 Q_n의 y좌표를 a_n이라 할 때, $f^{-1}(a_2)\cdot f^{-1}(a_9)$의 값은?



① $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ ② 7 ③ $7\sqrt{2}$
④ $7\sqrt{3}$ ⑤ 14

42 [2019년 7월 고3 문과 15번/4점]

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 할 때, 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,
$B=\{a+k,\ b+k,\ c+k,\ d+k,\ e+k\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 상수 k의 값은?

(가) $S(A)=37$
(나) $A-B=\{2,\ 4,\ 9\}$
(다) $S(A\cup B)=92$

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

43 [2022년 11월 고1 28번/4점]
전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$의
두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 $A\cup B^{C}$의 모든 원소의 합은
집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 6배이다.
(나) $n(A\cup B)=5$

집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.
(단, $2\le n(B-A)\le 4$)

44 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$의 부분집합 A_k를
$A_k=\{x\,|\,x$는 k의 배수, k는 자연수$\}$라 할 때,
$A_m\subset(A_{12}\cap A_{16})\subset A_n$을 만족시키는 자연수 m,
n에 대하여 $m+n$의 최솟값을 구하시오.

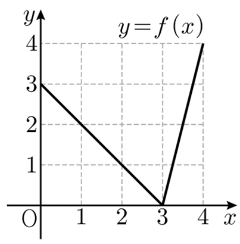
45 어느 학급에서 진로 체험 활동으로 직업 체험과 대학 탐방을 실시하기로 하였다. 이 학급 학생 39명을 대상으로 신청을 받은 결과 직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 9명, 직업 체험과 대학 탐방 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은 4명이다. 또, 직업 체험을 신청한 학생 수는 대학 탐방을 신청한 학생 수의 3배이다. 직업 체험을 신청한 학생 수는?

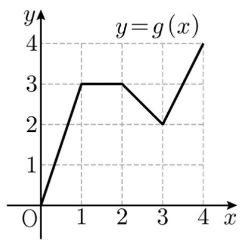
① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

46 이차함수 $f(x)=x^2+2x+a$에 대하여 $f(x)$의 최솟값과 $f(f(x))$의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a\le 0$ ② $a\ge 0$ ③ $a\le 1$
④ $a\ge 1$ ⑤ $a\le 2$

47 $0\le x\le 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.





48 집합 $\{x\,|\,0\le x\le 2\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & (0\le x\le 1)\\[2mm] \dfrac{3}{2}x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라 할 때, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

49 a, b가 양수일 때, $2 \le x \le 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2 \le \dfrac{2x-1}{x-1} \le bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

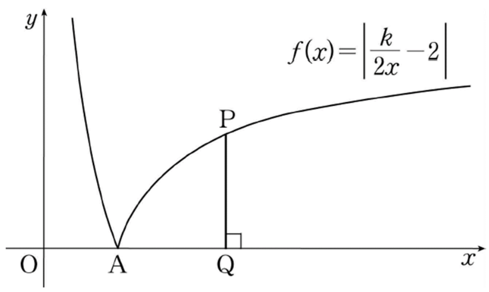
50 [2019년 3월 고3 문과 17번/4점]
자연수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\left|\frac{k}{2x}-2\right| \ (x>0)$$

의 그래프와 x축의 교점을 A, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$이다.
ㄴ. 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 선분 PQ의 길이는 2보다 작다.
ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 삼각형 AQP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 k의 최솟값은 16이다.



① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

51 [2015년 11월 고1 16번/4점]
별에서 단위시간동안 방출되는 복사에너지의 양을 별의 광도라 한다. 별의 표면 온도를 T, 별의 반지름의 길이를 R, 별의 광도를 L이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$T^2=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}$$

(단, σ는 슈테판-볼츠만 상수이다.)
두 별 A, B에 대하여 별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이고, 별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 36배 일 때, 별 A의 광도는 별 B의 광도의 k배이다. k의 값은?

① 49　② 64　③ 81
④ 100　⑤ 121

52 좌표평면에서
두 함수 $f(x)=\dfrac{4}{x+2}-4$, $g(x)=\sqrt{x+2}$의
그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=-2$와 만나지 않는다.
ㄴ. $2 \le x \le 14$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.
ㄷ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=2$, $x=14$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 87이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

53 정의역이 $\{x \mid x$는 $x \ge 2k$인 모든 실수$\}$이고
공역이 $\{y \mid y$는 $y \ge 4$인 모든 실수$\}$인
함수 $f(x)=x^2-4kx+4k^2+4$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{15}{8}$ ③ 2
④ $\dfrac{17}{8}$ ⑤ $\dfrac{9}{4}$

54 전체집합 $U=\{x \mid x$는 60 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족할 때, $n(A)$의 최댓값을 구하시오.

> $x \in A$, $y \in A$인 서로 다른 자연수 x, y에 대하여 $x+y$는 6의 배수가 아니다.

55 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.
> (나) $1 \le x \le 4$일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)-2x$이다.

$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값을 구하시오.

한양대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
55문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 ④	02 ⑤	03 2
04 ③	05 ⑤	06 ⑤
07 ③	08 3	09 ③
10 2	11 14	12 10
13 18	14 ③	15 ⑤
16 ⑤	17 32	18 ①
19 16	20 ④	21 9
22 -7	23 ⑤	24 ③
25 ③	26 ③	27 ④
28 ①	29 1	30 5
31 ①	32 1	33 8
34 7	35 ⑤	36 ②
37 ④	38 -20	39 ④
40 ②	41 ⑤	42 ③
43 22	44 49	45 ④
46 ①	47 $\frac{13}{4}$	48 ①
49 ①	50 ⑤	51 ③
52 ⑤	53 ③	54 22
55 29		

한양대학교사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
55문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 ④

해설 $f(5)=5-6=-1$

$f(-2)=-2\cdot(-2)=4$

$\therefore f(5)+f(-2)=-1+4=3$

02 정답 ⑤

해설 $y=\dfrac{1}{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{1}{2(x+1)}+1+1=\dfrac{1}{2x+2}+2=\dfrac{4x+5}{2x+2}$

03 정답 2

해설 $A=B$이므로 $8\in A$

$2a=8$ 또는 $a+6=8$ 또는 $3a-1=8$

(ⅰ) $2a=8$일 때, $a=4$

$A=\{8,\ 10,\ 11\}$, $B=\{6,\ 8,\ 9\}$

$A\neq B$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $a+6=8$일 때, $a=2$

$A=\{4,\ 5,\ 8\}$, $B=\{4,\ 5,\ 8\}$

$A=B$이므로 조건에 적합.

(ⅲ) $3a-1=8$일 때, $a=3$

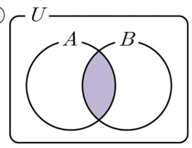
$A=\{6,\ 8,\ 9\}$, $B=\{5,\ 7,\ 8\}$

$A\neq B$이므로 조건에 맞지 않는다.

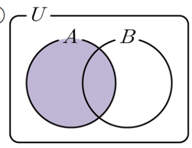
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터 $a=2$

04 정답 ③

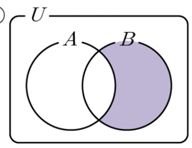
해설 주어진 등식의 좌변의 집합을 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.

①


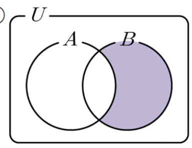
$A-B^C$

②


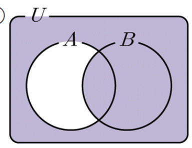
$A\cup(A\cap B)$

③


$A^C\cap(A\cup B)$

④


$(A^C\cap B)-A$

⑤


$(A-B)^C$

이때 $A^C\cap(A\cup B)=B-A\neq A-B$이므로 옳지 않은 것은 ③이다.

05 정답 ⑤

해설 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 $A\cap C$에서 집합 B를 제외한 부분과 같음을 알 수 있다.

따라서 색칠된 부분을 나타내는 집합은

$(A\cap C)-B$

06 정답 ⑤

해설 ㄱ. $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+3\geq 0$이다. (참)

ㄴ. $x=0$이면 $x^2-1<0$이다. (참)

ㄷ. $x=0,\ y=0$이면 $x^2+y^2\leq 0$이다. (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

07 정답 ③

해설 ㄱ. $x=2$이면 $x^3-8=0$이다. (참)

역: $x^3-8=0$ 이면 $x=2$이다. (참)

ㄴ. $0<x<y$ 이면 $x^3y<xy^3$ 이다. (참)

역: $x^3y<xy^3$ 이면 $0<x<y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이고 $y=-3$이면

$x^3y<xy^3$이나 $y<x$

ㄷ. $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (참)

역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (참)

따라서 명제와 명제의 역이 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 정답 3

해설 함수 f가 항등함수이므로 $x^2=x$

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 집합 X는 $\{0, 1\}$의 부분집합 중 공집합을 제외한 집합이므로 $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$의 3개이다.

09 정답 ③

해설 (ⅰ) 일대일대응 $f: X \to X$라 하면

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1, 0, 1$ 중 하나이므로 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 2개

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$, $f(0)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서 일대일대응의 개수는

$3 \cdot 2 \cdot 1=6$

(ⅱ) 항등함수 $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$의 1개

(ⅲ) 상수함수의 개수는 $x \in X$에 대하여

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$의 3개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 a, b, c에 알맞은 수는 차례대로 6, 1, 3이다.

10 정답 2

해설 $f\left(\dfrac{x+4}{2}\right)=3x+2$에서

$\dfrac{x+4}{2}=2$이면 $x=0$이므로

$f(2)=3 \cdot 0+2=2$

11 정답 14

해설 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(-3)$

$=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(-3)$

$=(g^{-1} \circ f)(-3)$ $(\because f \circ f^{-1}=I)$

$=g^{-1}(f(-3))=g^{-1}(-9)$

이때 $g^{-1}(-9)=k$라 하면 $g(k)=-9$

$-k+5=-9$

$\therefore k=14$

$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(-3)=14$

12 정답 10

해설 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-1)+b}+c+2$

$=\sqrt{-ax-a+b}+c+2$

위의 함수의 그래프가

$y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하므로

$-a=-3$, $-a+b=2$, $c+2=4$

따라서 $a=3$, $b=5$, $c=2$이므로

$a+b+c=10$

13 정답 18

해설 함수 $y=\sqrt{x+2}+a$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 $x=2$에서 최솟값 $\sqrt{2+2}+a$를 갖는다.

따라서 $2+a=6$이므로 $a=4$

함수 $y=\sqrt{x+2}+4$의 그래프가 점 $(b, 8)$를 지나므로

$8=\sqrt{b+2}+4$, $\sqrt{b+2}=4$

양변을 제곱하면 $b+2=16$

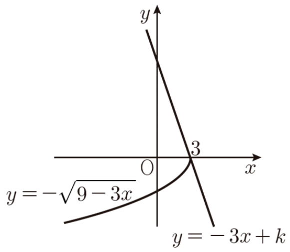
$\therefore b=14$

따라서 $a=4$, $b=14$이므로

$a+b=18$

14 정답 ③

해설 $y=-\sqrt{9-3x}=-\sqrt{-3(x-3)}$ 이므로
이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고,
직선 $y=-3x+k$는 기울기가 -3이고 y절편이 k이다.



직선 $y=-3x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때,
$0=-9+k$ $\qquad\therefore\ k=9$
따라서 함수 $y=-\sqrt{9-3x}$ 의 그래프와
직선 $y=-3x+k$가 만나지 않으려면
$k>9$이어야 하므로 자연수 k의 최솟값은 10이다.

15 정답 ⑤

해설 집합 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는
집합이므로 $P(A)=\{\varnothing,\ \{2\},\ \{3\},\ \{2,\ 3\}\}$
따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 $\{\varnothing\}$이다.

16 정답 ⑤

해설 ㄱ. $A\cap B=\{4,\ 5\}$이면 $4\in A,\ 5\in A$
4와 5가 k의 양의 약수이려면 k는 20의 양의
배수이면서 30 이하의 자연수이어야 하므로
$k=20$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{4,\ 6\}$이면 $4\in A,\ 6\in A$
4와 6이 양의 약수이려면 k는 12의 양의 배수이면서
30 이하의 자연수이면 되므로 k의 최댓값은 24이다.
(참)

ㄷ. (ⅰ) $A\cap B=\{4,\ 5\}$일 때
$k=20$이므로 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$
이때 $A-B$의 모든 원소의 합은 홀수이다.
(ⅱ) $A\cap B=\{4,\ 6\}$일 때
$k=12$ 또는 $k=24$이고
$k=12$일 때 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로
이때 $A-B$의 모든 원소의 합은 짝수이다.
$k=24$일 때
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로 이때
$A-B$의 모든 원소의 합은 짝수이다.
(ⅲ) $A\cap B=\{4,\ 7\}$일 때
$k=28$ 이므로 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$
이때 $A-B$의 모든 원소의 합은 홀수이다.
(ⅳ) $A\cap B=\{5,\ 6\}$일 때
$k=30$이므로
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$
이때 $A-B$의 모든 원소의 합은 홀수이다.
(ⅴ) $A\cap B=\{5,\ 7\}$일 때
이러한 30이하의 자연수 k는 존재하지 않는다.
(ⅵ) $A\cap B=\{6,\ 7\}$일 때
이러한 30이하의 자연수 k는 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 집합 $A-B$의 모든 원소의
합이 짝수가 되는 k의 값은 12, 24이므로 그 합은
$12+24=36$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 정답 32

해설 $(A\cup X)\subset(B\cup X)$를 만족시키는 집합 U의
부분집합 X는 두 집합 $A,\ B$의 공통원소 2, 3, 5를
제외한 집합 A의 나머지 원소 1, 7을 반드시 원소로
가져야 한다.
즉, $\{1,\ 7\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-2}=2^5=32$

18 정답 ①

해설 $[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap B$

$=[(A\cap B)\cup(A\cap B^c)]\cap B$

$=[A\cap(B\cup B^c)]\cap B$

$=(A\cap U)\cap B=A\cap B$

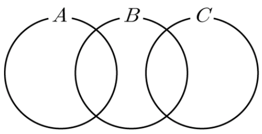
$A\cap B=A$ 이므로 $A\subset B$

따라서 항상 $A\subset B$를 만족하는 것은

① $A-B=\varnothing$ 이다.

19 정답 16

해설 $A\cap C=\varnothing$ 이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$14=10+8-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=4$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서

$10=8+6-n(B\cap C)$

$\therefore n(B\cap C)=4$

또한, $A\cap C=\varnothing$ 이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=10+8+6-4-4-0+0$

$=16$

20 정답 ④

해설 조건의 진리집합 이해하기

전체집합 U에서

$P=\{1,\ 2,\ 4\}$,

$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$P\subset X\subset Q$이므로 집합 X는 집합 Q의 부분집합 중 1, 2, 4를 원소로 가지는 집합이다.

따라서, 집합 X의 개수는 $2^{8-3}=32$ (개)이다.

21 정답 9

해설 '모든', '어떤'을 포함한 명제 이해하기

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로

이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k)^2-4(4k+5)<0$

$4k^2-16k-20=4(k+1)(k-5)<0$

$-1<k<5$

어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이므로 $k-2\geq 0$에서

$k\geq 2$

이때 정수 k에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$P=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

이때 $P\cap Q=\{2,\ 3,\ 4\}$이므로 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 9이다.

22 정답 -7

해설 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,3\leq x<5\}$

$Q=\{x\,|\,a\leq x\leq 10\}$

$R=\{x\,|\,x\leq b\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로

$Q\subset R$

$P\subset Q\subset R$이므로,

$a\leq 3$, $b\geq 10$

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=3$, $b=10$일 때

$3-10=-7$

23 정답 ⑤

해설 주어진 명제의

대우 '자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 $\boxed{\text{홀수}}$ 이면 ab는 $\boxed{\text{홀수}}$ 이다.'가 참임을 보이면 된다.

a, b가 모두 홀수이므로

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $ab=2(\boxed{2mn-m-n})+1$ 이므로 ab는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

24 정답 ③

해설 $\sqrt{n^2+2n}=\sqrt{(n+1)^2-1}$ 이고

$\sqrt{(n+1)^2-1}$ 이 유리수라 가정하면

$\sqrt{(n+1)^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하면

$(n+1)^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ $\cdots$ ㉠

㉠의 좌변은 자연수이고, p와 q는 서로소이므로

$p^2=\boxed{1}$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(n+1)^2-1=q^2$

$(n+1)^2-q^2=1$, $(\boxed{n+1+q})(n+1-q)=1$

따라서 $n+1+q=1$, $n+1-q=1$ 또는

$n+1+q=-1$, $n+1-q=-1$

즉, $\boxed{n+q}=0$, $n-q=0$ 또는

$\boxed{n+q}=-2$, $n-q=-2$

그런데 이것은 n, q가 자연수라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{n^2+2n}$ 은 무리수이다.

25 정답 ③

해설 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$

(단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립)

26 정답 ③

해설 $2x+y=1$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은

$(2x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\right)$의 최솟값과 같다.

따라서 이 식을 전개하면

$2+\dfrac{6x}{y}+\dfrac{y}{x}+3=5+\dfrac{6x}{y}+\dfrac{y}{x}$에서

$\dfrac{6x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2\sqrt{\dfrac{6x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}=2\sqrt{6}$ 이다.

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은

$5+2\sqrt{6}$

27 정답 ④

해설 전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

이때 a, b는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하여 정리하면

$40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=ab\leq 90$

따라서 넓이의 최댓값은 $90\,\mathrm{m}^2$이다.

28 정답 ①

해설 a, b, x, y가 실수이므로

코시−슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$8\cdot 2\geq(ax+by)^2$

$\therefore\ -4\leq ax+by\leq 4$

따라서 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은

$4\cdot(-4)=-16$

29 정답 1

해설 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ $\cdots$ ㉠

또한, $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2x$의 양변에

$x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)=1$ $\cdots$ ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면 $3f(1)=3$

$\therefore f(1)=1$

[다른풀이]

$2f(x)+f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2x$ $\cdots$ ㉠

㉠에 x대신 $\dfrac{1}{2x}$을 대입하여 정리하면

$2f\left(\dfrac{1}{2x}\right)+f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\cdots$ ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면 $3f(x)=4x-\dfrac{1}{x}$

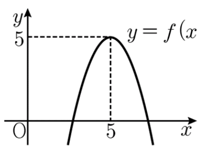
따라서 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{3x}$이므로 $f(1)=1$

30 정답 5

해설 $f(x)=-2x^2+20x-45$

$=-2(x-5)^2+5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 f가 일대일함수가 되려면

$x\le k$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해야 하므로

$k\le 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

31 정답 ①

해설 함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot 3\cdot 2=24$

32 정답 1

해설 $f(g(x))=f(bx-a)=3bx-3a+2$

$g(f(x))=g(3x+2)=3bx+2b-a$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$이므로

$3bx-3a+2=3bx+2b-a$

따라서 $a=1-b$

$g(x)=bx-a$에 $a=1-b$를 대입하면

$g(x)=bx+b-1=b(x+1)-1$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 b의 값에 관계없이

점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

따라서 $p=q=-1$이므로 $pq=1$

33 정답 8

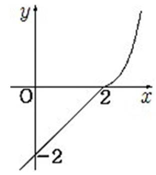
해설 $f(x)$가 역함수를 가지려면 일대일 대응이어야 하므로

$y=x^2-ax+b$의 꼭짓점의 x좌표가 2보다 크지 않아야 한다.

$y=x^2-ax+b$

$=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$ $(x\ge 2)$에서 $\dfrac{a}{2}\le 2$

$\therefore a\le 4$ $\cdots$ ㉠



또, 다음 그림과 같이 치역이 R이어야 하므로

$f(2)=4-2a+b=0$

$\therefore b=2a-4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=2a-4\le 2\cdot 4-4=4$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 $a+b\le 4+4=8$

34 정답 7

해설 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이고 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이므로

$f(1) \neq 1,\ f(2) \neq 2,\ f(3) \neq 3,\ f(4) \neq 4,\ f(5) \neq 5$

(ⅰ) $f(1)=2$일 때,

$(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$이므로

$f^{-1}(4)=2$

(ⅱ) $f(1)=3$일 때,

$(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=4$이므로

$f^{-1}(4)=3$

(ⅲ) $f(1)=4$일 때,

$(f \circ f)(1)=f(4)=4$이므로 모순

(ⅳ) $f(1)=5$일 때,

$(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(5)=4$이므로

$f^{-1}(4)=5$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $f^{-1}(4)$의 최솟값 $m=2$,

최댓값 $M=5$이므로

$m+M=2+5=7$

35 정답 ⑤

해설
$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{x+2-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(98)$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}$$
$$=\frac{49}{100}$$

36 정답 ②

해설 $f(a)=2^{\alpha},\ f(b)=2^{\beta}$에서

$\dfrac{4}{a}=2^{\alpha},\ \dfrac{4}{b}=2^{\beta}$

$\therefore\ a=2^{2-\alpha},\ b=2^{2-\beta}$

두 식을 변끼리 곱하면

$ab=2^{2-\alpha}\cdot 2^{2-\beta}=2^{4-(\alpha+\beta)}=8$

따라서 $4-(\alpha+\beta)=3$이므로

$\alpha+\beta=1$

37 정답 ④

해설
$$f(x)=1-\frac{1}{x}$$
$$f_2(x)=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}$$
$$=\frac{-1}{x-1}$$
$$f_3(x)=(f_2 \circ f)(x)=\frac{-1}{1-\frac{1}{x}-1}=x$$

즉, $f_3=I$ (항등함수)이므로
$$f_{2000}(-1)=f_{3\cdot 666+2}(-1)=f_2(-1)=\frac{-1}{-1-1}=\frac{1}{2}$$

38 정답 -20

해설 두 직선 $y=x+3,\ y=-x-7$의 교점의 좌표는

$x+3=-x-7$

$\therefore\ x=-5,\ y=-2$

즉, $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-5,\ -2)$에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 점 $(-2,\ -5)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(-2,\ -5)$는

두 직선 $y=ax+b,\ y=cx+d$의 교점이므로

$-2a+b=-5,\ -2c+d=-5$

$\therefore\ -2a+b-6c+3d=-2a+b+3(-2c+d)$

$=-20$

39 정답 ④

해설 ㄱ. $a<0$일 때, $y=\sqrt{ax}$의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$이므로 제2사분면을 지난다.

따라서 참.

ㄴ. $y=\sqrt{ax}$에서 $|a|$가 클수록 $|y|$의 값이 커지므로 x축에서 멀어진다.

따라서 거짓.

ㄷ. 근호 안의 값은 음이 될 수 없으므로 $\sqrt{A} \geq 0$

곧, $y=\sqrt{ax} \geq 0$이므로 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$.

따라서 참.

40 정답 ②

해설 주어진 그래프의 모양에서 $b<0$

$y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프에서

점근선의 방정식은 $x=a,\ y=c$이므로

$a>0,\ c>0$

$y=\sqrt{ax-b}+c=\sqrt{a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로

$y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를

x축의 방향으로 $\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼

평행이동한 것이다.

이때 $a>0,\ \dfrac{b}{a}<0,\ c>0$이므로

함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 그래프의 개형은 ②이다.

41 정답 ⑤

해설 거듭제곱근의 성질을 이해하여 식의 값을 구한다.

점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.

$a_n=3n+1$ 이므로

$a_2=7,\ a_9=28$

이때 함수 $y=x^2\ (x\geq 0)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ \ (x\geq 0)$이므로

$f^{-1}(a_2)=\sqrt{7},\ f^{-1}(a_9)=\sqrt{28}$

$$\begin{aligned}\therefore f^{-1}(a_2)\cdot f^{-1}(a_9)&=\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}\\&=\sqrt{7\cdot 28}\\&=\sqrt{196}\\&=14\end{aligned}$$

42 정답 ③

해설 $S(A)=a+b+c+d+e=37$

$S(B)=a+b+c+d+e+5k=37+5k$

$S(B)=S(A\cup B)-S(A-B)$

$37+5k=92-15$

따라서 $k=8$

[참고]

$A=\{2,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12\}$

$B=\{10,\ 12,\ 17,\ 18,\ 20\}$

43 정답 22

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기

집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하자.

$A\cup B^C=\left(A^C\cap B\right)^C=(B-A)^C$이고

조건 (가)에서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로

전체집합 U의 모든 원소의 합은 $7k$이다.

$7k=1+2+4+8+16+32=63$

$\therefore\ k=9$

집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로

$B-A=\{1,\ 8\}$

$A\cap(B-A)=\varnothing$ 이므로

$A\subset(B-A)^C=\{2,\ 4,\ 16,\ 32\}$

$A\cup B=A\cup(B-A)$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$이고

조건 (나)에서 $n(A\cup B)=5$이므로

$n(A)=3$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은

$A=\{2,\ 4,\ 16\}$일 때

$2+4+16=22$

44 정답 49

해설 $A_{12}\cap A_{16}=A_{48}=\{48,\ 96\}$이므로

$A_m\subset(A_{12}\cap A_{16})\subset A_n$에서

$A_m\subset\{48,\ 96\}\subset A_n$

이때 $m=48$ 또는 $m=96$이고, n은 48과 96의

최대공약수인 48의 양의 약수이므로 자연수 $m,\ n$에

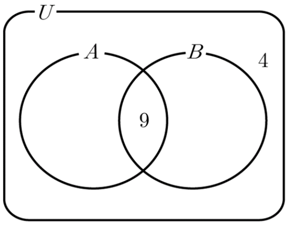
대하여 $m+n$의 최솟값은 $m=48,\ n=1$일 때이다.

$\therefore\ m+n\geq 49$

따라서 $m+n$의 최솟값은 49이다.

45 정답 ④

해설 직업 체험을 신청한 학생의 집합을 A,
대학 탐방을 신청한 학생의 집합을 B라 하자.



직업 체험과 대학 탐방을 모두 신청한 학생은 9명이므로
$n(A\cap B)=9$ … ㉠
직업 체험과 대학 탐방 중 어느 것도 신청하지 않은 학생은
4명이므로 $n((A\cup B)^C)=4$
그러므로
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=39-4=35$ … ㉡
직업 체험을 신청한 학생 수는 대학 탐방을 신청한
학생 수의 3배이므로
$n(A)=3\cdot n(B)$ … ㉢
그런데 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
㉠, ㉡, ㉢에서 $35=3\cdot n(B)+n(B)-9$
$\therefore\ n(B)=11$
따라서 $n(A)=3\cdot 11=33$이므로 직업 체험을 신청한
학생 수는 33

46 정답 ①

해설 $f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 은
$x=-1$ 일 때
최솟값 $a-1$ 을 갖는다.
$\therefore f(x)\geq a-1$
$f(x)=t$ 라면
$f(f(x))=f(t)=t^2+2t+a\ (t\geq a-1)$
이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이
$t\geq a-1$ 에 포함되면
$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1)=a-1$ 이 되어 최솟값과
같아진다.
즉, $-1\geq a-1$ $\quad\therefore a\leq 0$

47 정답 $\dfrac{13}{4}$

해설 $f(x)=\begin{cases}-x+3 & (0\leq x\leq 3)\\ 4x-12 & (3<x\leq 4)\end{cases}$,

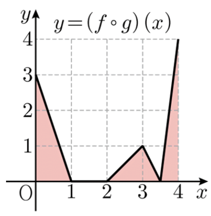
$g(x)=\begin{cases}3x & (0\leq x<1)\\ 3 & (1\leq x<2)\\ -x+5 & (2\leq x<3)\\ 2x-4 & (3\leq x\leq 4)\end{cases}$이므로

$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-g(x)+3 & (0\leq g(x)\leq 3)\\ 4g(x)-12 & (3<g(x)\leq 4)\end{cases}$

(i) $0\leq x<1$일 때, $0\leq g(x)\leq 3$이므로
$(f\circ g)(x)=-3x+3$
(ii) $1\leq x<2$일 때, $g(x)=3$이므로
$(f\circ g)(x)=-3+3=0$
(iii) $2\leq x<3$일 때, $2<g(x)\leq 3$이므로
$(f\circ g)(x)=x-2$
(iv) $3\leq x\leq \dfrac{7}{2}$일 때, $2\leq g(x)\leq 3$이므로
$(f\circ g)(x)=-2x+7$
(v) $\dfrac{7}{2}<x\leq 4$일 때, $3<g(x)\leq 4$이므로
$(f\circ g)(x)=8x-28$
이상에서

$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\leq x<1)\\ 0 & (1\leq x<2)\\ x-2 & (2\leq x<3)\\ -2x+7 & \left(3\leq x\leq \dfrac{7}{2}\right)\\ 8x-28 & \left(\dfrac{7}{2}<x\leq 4\right)\end{cases}$이므로

함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

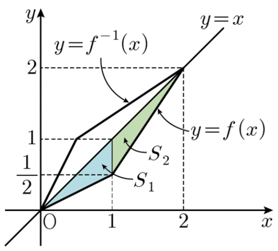


따라서 구하는 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4=\dfrac{13}{4}$

48 정답 ①

해설 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



위 그림에서

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 넓이 S는

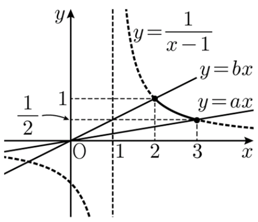
$S=2(S_1+S_2)=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$

49 정답 ①

해설 $\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$ $(2\le x\le 3)$이므로

$ax+2\le 2+\frac{1}{x-1}\le bx+2$

$ax\le\frac{1}{x-1}\le bx$



위의 그래프에 의하여 $a\le\frac{1}{6}$, $b\ge\frac{1}{2}$이다.

$\therefore$ (a의 최댓값)$+$(b의 최솟값)$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

50 정답 ⑤

해설 유리함수의 그래프의 여러 가지 성질을 추론한다.

ㄱ. 함수 $f(x)=\left|\frac{k}{2x}-2\right|$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $0=\left|\frac{k}{2x}-2\right|$에서 $\frac{k}{2x}=2$

즉, $x=\frac{k}{4}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$이다. (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 점 P는 함수 $y=2-\frac{k}{2x}$ $\left(x>\frac{k}{4}\right)$의 그래프 위의 점이다.

직선 $y=2$는 함수 $y=2-\frac{k}{2x}$의 그래프의 한 점근선이므로 점 P의 y좌표는 2보다 작다.

따라서 선분 PQ의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 점 P의 좌표는 $\left(k,\ \frac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 AQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(k-\frac{k}{4}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{9k}{16}$이다.

9와 16은 서로소이므로 $\frac{9k}{16}$가 자연수가 되기 위해서 자연수 k는 16의 배수가 되어야 한다.

그러므로 자연수 k의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 정답 ③

해설 무리식을 활용하여 문제해결하기

별 A, B의 표면 온도를 각각 T_{A}, T_{B}, 반지름의 길이를 각각 R_{A}, R_{B}, 광도를 각각 L_{A}, L_{B}라 하면

$T_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}T_{\mathrm{B}}$이고 $R_{\mathrm{A}}=36R_{\mathrm{B}}$이다.

$L_{\mathrm{A}}=kL_{\mathrm{B}}$라 하면 $T_{\mathrm{A}}^{\ 2}=\frac{1}{R_{\mathrm{A}}}\sqrt{\frac{L_{\mathrm{A}}}{4\pi\sigma}}$ 에서

$\left(\frac{1}{2}T_{\mathrm{B}}\right)^2=\frac{1}{36R_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{kL_{\mathrm{B}}}{4\pi\sigma}}$

$\frac{1}{4}T_{\mathrm{B}}^{\ 2}=\frac{1}{36R_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{kL_{\mathrm{B}}}{4\pi\sigma}}$

$T_{\mathrm{B}}^{\ 2}=\frac{\sqrt{k}}{9}\times\frac{1}{R_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{L_{\mathrm{B}}}{4\pi\sigma}}=\frac{\sqrt{k}}{9}\times T_{\mathrm{B}}^{\ 2}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{k}}{9}=1$

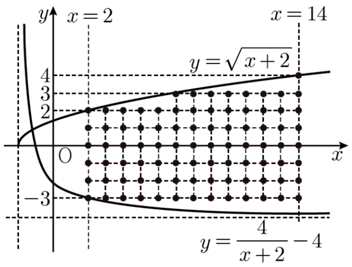
따라서 $k=81$

52 정답 ⑤

해설 ㄱ. 함수 $f(x)=\dfrac{4}{x+2}-4$의 점근선의 방정식은
$x=-2$, $y=-4$이므로 곡선 $y=f(x)$는
직선 $x=-2$와 만나지 않는다. (참)

ㄴ. $2\le x\le 14$일 때, 함수 $g(x)=\sqrt{x+2}$에서
$2\le g(x)\le 4$이므로 y좌표가 정수인 점의 개수는
3이다. (참)

ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{4}{x+2}-4$는
점 $(2,\ -3)$을 지나고, 곡선 $y=\sqrt{x+2}$는
점 $(2,\ 2)$를 지난다.

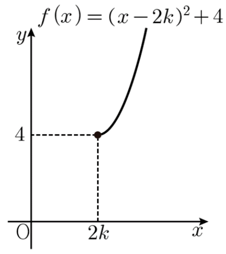


$2\le x\le 14$에서 곡선 $y=\dfrac{4}{x+2}-4$는
$x=2$일 때만 y좌표가 정수이고 곡선 $y=\sqrt{x+2}$는
$x=2,\ 7,\ 14$일 때만 y좌표가 정수이다.
두 곡선 $y=\dfrac{4}{x+2}-4$, $y=\sqrt{x+2}$와
두 직선 $x=2$, $x=14$로 둘러싸인 영역의 내부 또는
그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의
개수는
$x=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때 각각 6
$x=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$일 때 각각 7
$x=14$일 때 8
따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는
$5\cdot 6+7\cdot 7+1\cdot 8=87$ (참)

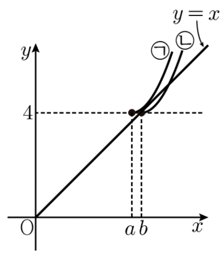
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

53 정답 ③

해설 함수 $f(x)=x^2-4kx+4k^2+4=(x-2k)^2+4$의
정의역은 $\{x\,|\,x$는 $x\ge 2k$인 모든 실수$\}$이고
공역은 $\{y\,|\,y$는 $y\ge 4$인 모든 실수$\}$이다.
즉, 함수 $f(x)$는 증가함수이고 그 그래프의 개형은
다음과 같다.



함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이고 두 함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서
만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로
다른 두 점에서 만난다.
아래 그림에서 ㉠과 같이 접할 때의 $2k$의 값을 a, ㉡일
때의 $2k$의 값을 b라 하자.



$a<2k\le b$일 때, 두 그래프는 서로 다른 두 점에서
만나므로 $2k$의 최댓값은 b이다.
㉡일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4,\ 4)$를 지나므로
$16-8b+b^2+4=4$, $(b-4)^2=0$
$\therefore\ b=4$
따라서 $2k$의 최댓값은 4이므로 k의 최댓값은 2이다.

54 정답 22

해설 전체집합 U의 원소를 6으로 나누었을 때 나머지가
$i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$인 원소의 집합을 A_i라 하면
$U=A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_5$, $n(A_i)=10$,
$A_i\cap A_j=\varnothing$ (단, $i\ne j$)
이때 주어진 조건을 만족하는 집합 중에서 원소의 개수가
최대인 것은 $i\ne j$, $i\ne 0$, $j\ne 0$, $i+j\ne 6$인 i, j에
대하여 $A_i\cup A_j$에 A_0과 A_3의 원소를 한 개씩
추가한 집합이다.
즉, 집합 $A_1\cup A_2$ 또는 $A_1\cup A_4$ 또는 $A_2\cup A_5$
또는 $A_4\cup A_5$ 집합 A_0과 A_3의 원소를 한 개씩 추가한
집합이므로 $n(A)$의 최댓값은 22이다.

55 정답 29

해설 (나)에서 $1 \le x \le 4$이므로 $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$에 $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$를 각각 대입한다.

(ⅰ) $x = 4$를 $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$에 대입하면

$f(f(4)) = f(4) - 8$ $\cdots$ ㉠

함수 f는 X에서 X로의 함수이므로 $1 \le f(4) \le 9$

㉠에서 $1 \le (f \circ f)(4) \le 9$이므로

$1 \le f(4) - 8 \le 9$

$\therefore\ 9 \le f(4) \le 17$

따라서 $f(4) = 9$

㉠에서 $f(f(4)) = f(4) - 8$이고 $f(4) = 9$이므로

$f(f(4)) = f(9) = 9 - 8 = 1$

$\therefore\ f(9) = 1$

(ⅱ) $x = 3$을 $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$에 대입하면

$f(f(3)) = f(3) - 6$ $\cdots$ ㉡

이때 $f(4) = 9,\ f(9) = 1$이다.

(a) $f(3) = 4$이면 ㉡에서 $f(4) = 4 - 6 = -2$이므로 모순이다.

(b) $f(3) = 9$이면 ㉡에서 $f(9) = 9 - 6 = 3$이므로 모순이다.

따라서 $f(3) \ne 4,\ f(3) \ne 9$이므로

$(f \circ f)(3) \ne 9,\ (f \circ f)(3) \ne 1$이다.

또, 조건 (가)에 의하여 함수 f가 일대일대응이므로

$2 \le (f \circ f)(3) \le 8$

즉, $2 \le f(3) - 6 \le 8$이므로 $8 \le f(3) \le 14$

$f(4) = 9$이므로 $f(3) = 8$

㉡에서 $f(f(3)) = f(8) = 8 - 6 = 2$

(ⅲ) $x = 2$를 $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$에 대입하면

$f(f(2)) = f(2) - 4$ $\cdots$ ㉢

$f(4) = 9,\ f(9) = 1,\ f(3) = 8,\ f(8) = 2$이므로

$3 \le (f \circ f)(2) \le 7$

즉, $3 \le f(2) - 4 \le 7$이므로 $7 \le f(2) \le 11$

$f(4) = 9,\ f(3) = 8$이므로 $f(2) = 7$

㉢에서 $f(f(2)) = f(7) = 7 - 4 = 3$

(ⅳ) $x = 1$을 $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$에 대입하면

$f(f(1)) = f(1) - 2$ $\cdots$ ㉣

$f(1) = 4$이면 ㉣에서 $f(4) = 2$이므로 모순이다.

$f(1) = 5$이면 ㉣에서 $f(5) = 3$이므로 모순이다.

따라서 $f(1) = 6$이므로 ㉣에서

$f(f(1)) = f(6) = 6 - 2 = 4$

그러므로 $f(5) = 5$이다.

따라서 $f(2) = 7,\ f(3) = 8,\ f(4) = 9,\ f(5) = 5$이므로

$f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 7 + 8 + 9 + 5 = 29$