

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

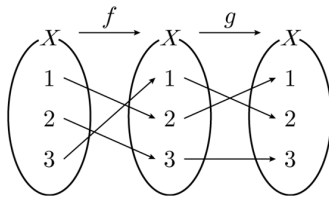
집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

## 유형별 학습

이름

- 01** 두 함수  $f, g$ 의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때,  $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은?

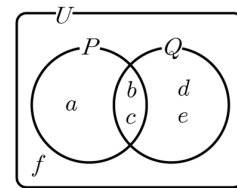


- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

- 02** 집합  $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ①  $\emptyset \in A$                       ②  $\emptyset \subset A$   
③  $\{1\} \in A$                       ④  $\{1, 2\} \in A$   
⑤  $\{1, 2\} \subset A$

- 03** 전체집합  $U$ 에서 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 할 때,  $P, Q$ 의 포함관계가 다음과 같다. 명제  $q \rightarrow \sim p$ 가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 원소를 구한 것은?



- ① 없음                      ②  $a$   
③  $b, c$                       ④  $d, e$   
⑤  $f$

- 04**  $x > 3$ 일 때,  $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

- ① 3                      ② 5                      ③ 12  
④ 15                      ⑤ 17

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

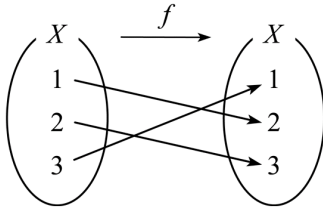
## 집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

05

[2007년 3월 고2 20번]

집합  $X = \{1, 2, 3\}$  에 대하여

함수  $f: X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$$f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 라 할 때,  $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

- ① -2                      ② 2                      ③ -1  
④ 1                        ⑤ 0

06

무리함수  $f(x) = \sqrt{ax+b} - 3$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자. 곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = g(x)$ 가 점  $(3, -2)$ 에서 만날 때,  $g(5)$ 의 값은?

- ① -6                      ② -5                      ③ -4  
④ -3                      ⑤ -2

07

[2015년 6월 고2 이과 9번/3점]

일차함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,

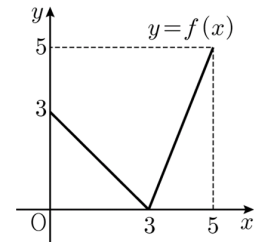
함수  $y = f(2x+3)$ 의 역함수를  $g(x)$ 에 대한 식으로 나타내면  $y = ag(x) + b$ 이다.

두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은?

- ①  $-\frac{5}{2}$                       ② -2                      ③  $-\frac{3}{2}$   
④ -1                        ⑤  $-\frac{1}{2}$

08

$0 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식  $(f \circ f)(x) = f(x) + 1$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 합은?



- ① 5                              ②  $\frac{27}{5}$                       ③  $\frac{29}{5}$   
④  $\frac{31}{5}$                         ⑤  $\frac{33}{5}$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

**09** 함수  $y = \sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선  $y = x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수  $k$ 의 값의 범위는?

- ①  $-2 < k \leq -\frac{7}{4}$       ②  $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$   
 ③  $k > -\frac{7}{4}$       ④  $k \leq -2$   
 ⑤  $k > -2$

**10** 전체집합  $U$ 의 세 부분집합  $A, B, C$ 에 대하여  $A^C$ 과  $B$ 가 서로소이고  $A$ 와  $C^C$ 이 서로소일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㉠.  $A \cap B = B$   
 ㉡.  $(B \cap C)^C \cap A = B$   
 ㉢.  $C \cup (A \cup B)^C = U$

- ① ㉠      ② ㉠, ㉡      ③ ㉠, ㉢  
 ④ ㉡, ㉢      ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

**11** 전체집합  $U$ 에 대하여 서로 다른 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하고,  $r$ 는 ' $p$  이고  $\sim q$ '이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것이 아닌 것은?

- ①  $P \cap R = R$       ②  $(Q - P) \cap R = \emptyset$   
 ③  $R \cap P^C = \emptyset$       ④  $(R \cap Q) \subset P$   
 ⑤  $R \subset (P \cap Q)$

**12** 다음은 임의의 실수  $a, b$ 에 대하여 부등식  $|a+b| \leq |a| + |b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2 \text{ ㉠ } \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a| + |b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a| + |b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 ㉡, 즉} \\ &\text{㉢ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ①  $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$   
 ②  $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$   
 ③  $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$   
 ④  $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$   
 ⑤  $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

**13** 두 곡선  $y = \sqrt{x+4}, y = \sqrt{x}$ 와  $x$ 축 및 직선  $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

## 집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} \frac{8}{3} & \textcircled{2} 3 & \textcircled{3} \frac{10}{3} \\ \textcircled{4} \frac{11}{3} & \textcircled{5} 4 & \end{array}$$

①  $\neg$                       ②  $\neg, \perp$                       ③  $\perp, \perp$   
④  $\neg, \perp$                       ⑤  $\neg, \perp, \perp$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

18

[2019년 3월 고3 문과 17번/4점]

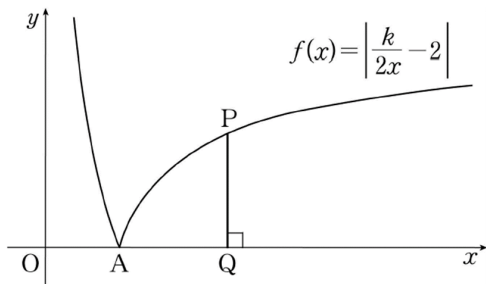
자연수  $k$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right| \quad (x > 0)$$

의 그래프와  $x$ 축의 교점을 A, 곡선  $y = f(x)$  위의 점 P에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. 점 A의 좌표는  $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ 이다.
- ㄴ. 점 P의  $x$ 좌표가 점 A의  $x$ 좌표보다 클 때, 선분 PQ의 길이는 2보다 작다.
- ㄷ. 점 P의  $x$ 좌표가  $k$ 일 때, 삼각형 AQP의 넓이가 자연수가 되도록 하는  $k$ 의 최솟값은 16이다.



- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19

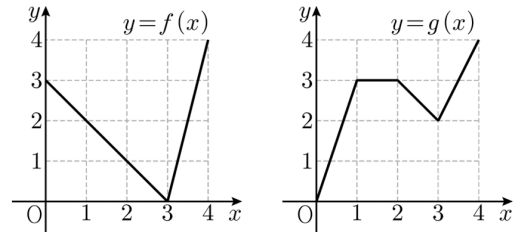
[2016년 10월 고3 문과 26번 변형]

유리함수  $y = \frac{3}{x}$  ( $x > 0$ )의 그래프 위의 점 P( $a$ ,  $b$ )와

직선  $y = -x$  사이의 거리가 4일 때,  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

20

$0 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 함수  $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프와  $x$ 축,  $y$ 축 및 직선  $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



21

세 조건  $p: x > a$ ,  $q: -1 < x \leq 3$  또는  $x > 6$ ,  $r: x > b$ 에 대하여 두 명제  $q \rightarrow p$ ,  $r \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는  $a$ 의 최댓값과  $b$ 의 최솟값의 합을 구하시오.

22

자연수  $n$ 에 대하여 집합  $A(n)$ 을

$$A(n) = \{x \mid x \text{는 } n^k \text{의 일의 자리의 수, } k \text{는 자연수}\}$$

라 하자. 예를 들면  $n = 5$ 일 때,  $5^1 = 5$ ,  $5^2 = 25$ ,  $5^3 = 125$ , ...이므로  $A(5) = \{5\}$ 이다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

<보기>

- ㄱ.  $n(A(2)) = 5$
- ㄴ.  $A(4) \subset A(2)$
- ㄷ.  $A(2^m) = A(2)$ 인 2 이상의 자연수  $m$ 이 존재한다.

23  $x > -2$ 일 때,  $\frac{x+2}{x^2+3x+3}$ 의 최댓값은?

- ①  $\frac{1}{8}$
- ②  $\frac{1}{4}$
- ③  $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

24 함수  $f(x)=\frac{3-2x}{|x|}$ 와 실수  $a$ 에 대하여  $g(a)$ 를  
방정식  $f(x)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수라 할 때,  
함수  $y=g(a)$ 에 대하여 두 집합  $A, B$ 를 다음과  
같이 정의하자.  
 $A = \{(a, y) | y = g(a)\},$   
 $B = \{(a, y) | a^2 + (y-1)^2 = r \text{이고 } r > 0\}$   
이때  $n(A \cap B)=1$ 이 되도록 하는 모든 양의 실수  $r$ 의  
값의 합을 구하시오.

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습
--------

이름

빠른정답

01 ㉓	02 ㉓	03 ㉓
04 ㉓	05 ㉓	06 ㉑
07 ㉔	08 ㉒	09 ㉒
10 ㉓	11 ㉓	12 ㉔
13 8	14 4	15 ㉔
16 ㉑	17 ㉓	18 ㉓
19 26	20 $\frac{13}{4}$	21 5
22 ㄴ, ㄷ	23 ㉔	24 9



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

## 유형별 학습

이름

### 01 정답 ③

**해설**  $f(3)=1, g(2)=1$ 이므로  
 $(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1) = 3$

### 02 정답 ③

**해설** ① 공집합은 집합  $A$ 의 원소이므로  $\emptyset \in A$   
 ② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로  $\emptyset \subset A$   
 ③  $\{1\}$ 은 집합  $A$ 의 원소가 아니므로  $\{1\} \notin A$   
 ④  $\{1, 2\}$ 는 집합  $A$ 의 원소이므로  $\{1, 2\} \in A$   
 ⑤ 1, 2는 집합  $A$ 의 원소이므로  $\{1, 2\}$ 는  $A$ 의 부분집합이다.  
 $\therefore \{1, 2\} \subset A$   
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

### 03 정답 ③

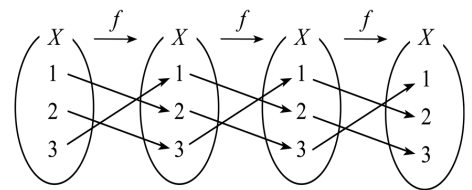
**해설** 명제  $q \rightarrow \sim p$ 가 거짓임을 보이려면 집합  $Q$ 에는 속하지만 집합  $P^C$ 에는 속하지 않는 원소를 찾으려 한다. 이것을 만족시키는 원소로 이루어진 집합은  $P \cap Q = \{b, c\}$ 이다.

### 04 정답 ⑤

**해설**  $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$   
 이때  $x > 3$ 이므로  $3(x-3) > 0, \frac{3}{x-3} > 0$ 이고  
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여  
 $3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$   
 $\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$   
 $= 2 \cdot 3 + 11 = 17$   
 (단, 등호는  $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$ , 즉  $x = 4$ 일 때 성립)  
 따라서 구하는 최소값은 17이다.

### 05 정답 ⑤

**해설** 합성함수의 성질을 이용하여 함수값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면  
 $f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$   
 같은 방법으로  $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.  
 $\therefore f^3(x) = x$   
 $f^{100}(x) = (f^3 \cdot 33 \circ f)(x) = f(x),$   
 $f^{200}(x) = (f^3 \cdot 66 \circ f^2)(x) = f^2(x)$   
 $\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2$   
 $f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$   
 $\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

### 06 정답 ①

**해설** 곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = g(x)$ 가 점  $(3, -2)$ 에서 만나므로  
 $f(3) = -2, g(3) = -2$   
 이때 함수  $g(x)$ 는 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로  
 $g(3) = -2$ , 즉  $f^{-1}(3) = -2$ 에서  $f(-2) = 3$   
 $f(3) = -2$ 에서  $\sqrt{3a+b}-3 = -2$   
 $\therefore 3a+b = 1 \dots \textcircled{1}$   
 $f(-2) = 3$ 에서  $\sqrt{-2a+b}-3 = 3$   
 $\therefore -2a+b = 36 \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  
 $a = -7, b = 22$   
 $\therefore f(x) = \sqrt{-7x+22}-3$   
 $g(5) = k$ , 즉  $f^{-1}(5) = k$ 라 하면  $f(k) = 5$ 이므로  
 $\sqrt{-7k+22}-3 = 5$   
 $\sqrt{-7k+22} = 8, -7k+22 = 64$   
 $\therefore k = -6$   
 $\therefore g(5) = -6$



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 07 정답 ④

**해설** 역함수 이해하기

$y = f(2x+3)$ 에서  $x, y$ 를 서로 바꾸어 쓰면

$x = f(2y+3)$ 이다.

그러므로

$2y+3 = g(x)$

역함수는  $y = \frac{1}{2}g(x) - \frac{3}{2}$ 이다.

따라서  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore a+b = -1$

## 08 정답 ②

**해설** 주어진 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & (0 \leq x \leq 3) \\ \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} & (3 < x \leq 5) \end{cases}$$

방정식  $f(f(x)) = f(x)+1$ 에서  $f(x)=t$  ( $0 \leq t \leq 5$ )라

하면 방정식  $f(t) = t+1$ 에서

$0 \leq t \leq 3$ 일 때,  $-t+3 = t+1$ 이므로  $t = 1$

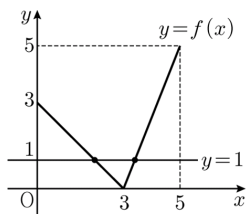
$3 < t \leq 5$ 일 때,  $\frac{5}{2}t - \frac{15}{2} = t+1$ 이므로  $t = \frac{17}{3}$

이때  $0 \leq t \leq 5$ 이므로  $t = 1$ , 즉  $f(x) = 1$ 이다.

방정식  $f(x) = 1$ 의 해는

$0 \leq x \leq 3$ 일 때,  $-x+3 = 1$ 에서  $x = 2$

$3 < x \leq 5$ 일 때,  $\frac{5}{2}x - \frac{15}{2} = 1$ 에서  $x = \frac{17}{5}$



따라서 구하는 서로 다른 실근의 합은

$$2 + \frac{17}{5} = \frac{27}{5}$$

## 09 정답 ②

**해설** (i) 곡선  $y = \sqrt{x-2}$ 와 직선  $y = x+k$ 가 접할 때,

$\sqrt{x-2} = x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$x-2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$$

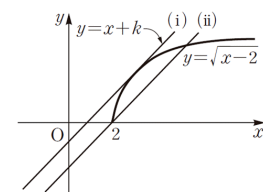
이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2 + 2) = 0$$

$$-4k-7=0 \quad \therefore k = -\frac{7}{4}$$

(ii) 직선  $y = x+k$ 가 점  $(2, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = 2+k \quad \therefore k = -2$$



(i), (ii)에서 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는  $k$ 의 값의 범위는

$$-2 \leq k < -\frac{7}{4}$$

## 10 정답 ③

**해설**  $A^C$ 과  $B$ 가 서로소이므로  $A^C \cap B = B - A = \emptyset$ ,

$$\therefore B \subset A \quad \dots \textcircled{7}$$

$A$ 와  $C^C$ 이 서로소이므로  $A \cap C^C = A - C = \emptyset$ ,

$$\therefore A \subset C \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에 의하여 } B \subset A \subset C \quad \dots \textcircled{9}$$

$\neg \textcircled{9}$ 에 의하여  $B \subset A$ 이므로

$$A \cap B = B \text{ (참)}$$

$$\neg \textcircled{9} \text{에 의하여 } (B \cap C)^C \cap A = B^C \cap A \text{ (}\because \textcircled{9}\text{)}$$

$$= A - B \text{ (거짓)}$$

$$\neg \textcircled{9} \text{에 의하여 } C \cup (A \cup B)^C = C \cup (A^C \cap B^C)$$

$$= (C \cup A^C) \cap (C \cup B^C)$$

이때  $\textcircled{9}$ 에 의해  $B \subset A \subset C$ 이므로

$$C \cup A^C = C \cup B^C = U$$

$$\therefore C \cup (A \cup B)^C = U \text{ (참)}$$

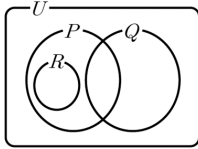
따라서 옳은 것은  $\neg \textcircled{9}$ 이다.

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 11 정답 ⑤

**해설**  $r$ 는 ' $p$  이고  $\sim q$ '이기 위한 충분조건이므로  
 $R \subset (P \cap Q^c)$   
 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.  
 ⑤  $R \subset (P \cap Q)$



## 12 정답 ④

**해설** ㉠:  $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$   
 $= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$   
 $= 2(|ab| - ab)$   
 ㉡: 등호는  $|ab| - ab = 0$  일 때 성립  
 $\rightarrow |ab| = ab$   
 ㉢:  $|ab| = ab$  이려면  $ab \geq 0$  이어야 한다

## 13 정답 8

**해설**  $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는  $y = \sqrt{x+4}$ 의 그래프를  
 $x$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음  
 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 같다.  
  
 따라서 구하는 넓이는 네 점 (0, 0), (4, 0), (4, 2),  
 (0, 2)를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로  
 $4 \cdot 2 = 8$

## 14 정답 4

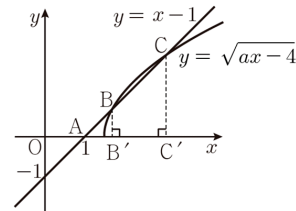
**해설**  $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에  
 의하여  
 $a^2 - 4a + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} = (a-2)^2 + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} - 4$   
 $\geq (a-2)^2 + 2\sqrt{\frac{3a}{b} \cdot \frac{3b}{a}} - 4$   
 $= (a-2)^2 + 2$   
 (단, 등호는  $a = b$ 일 때 성립)  
 이때  $(a-2)^2 + 2$ 는  $a = 2$ 일 때 최소이므로 주어진 식은  
 $a = b = 2$ 일 때 최소이다.  
 $\therefore a + b = 4$

## 15 정답 ④

**해설**  $P(\emptyset) = \{X | X \subset \emptyset\}$ 에서  $\emptyset$ 의 부분집합은  $\emptyset$   
 뿐이므로  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ 이다.  
 또한, 집합  $\{\emptyset\}$ 의 부분집합은  $\emptyset, \{\emptyset\}$ 이므로  
 $P(P(\emptyset)) = \{X | X \subset P(\emptyset)\}$   
 $= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

## 16 정답 ①

**해설**  $a < 0$ 이면 함수  $y = \sqrt{ax-4}$ 의 그래프와  
 직선  $y = x-1$ 가 한 점에서 만나거나 만나지 않으므로  
 $a > 0$ 이다.  
 함수  $y = \sqrt{ax-4}$ 의 그래프와 직선  $y = x-1$ 은 다음  
 그림과 같다.



두 점 B, C에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각  
 $B'(b, 0), C'(c, 0)$ 이라 하자.  
 $A(1, 0)$ 이고 점 B가 선분 AC를 1:2로 내분하므로  
 $\overline{AB'} : \overline{B'C'} = \overline{AB} : \overline{BC} = 1:2$   
 즉,  $b-1 : c-b = 1:2$ 이므로  
 $c-b = 2b-2$   
 $\therefore c = 3b-2 \quad \dots \textcircled{1}$   
 직선  $y = x-1$ 과 함수  $y = \sqrt{ax-4}$ 의 그래프가 서로  
 다른 두 점에서 만나므로  
 $x-1 = \sqrt{ax-4}$ 에서 양변을 제곱하면  
 $x^2 - 2x + 1 = ax - 4$   
 $\therefore x^2 - (2+a)x + 5 = 0$   
 이 이차방정식의 두 근이  $b, c$ 이므로 근과 계수와의 관계에  
 의하여  
 $b+c = 2+a \quad \dots \textcircled{2}$   
 $bc = 5 \quad \dots \textcircled{3}$   
 ㉢에 ㉠을 대입하면  
 $b(3b-2) = 5, 3b^2 - 2b - 5 = 0$   
 $(3b-5)(b+1) = 0$   
 $\therefore b = \frac{5}{3} (\because b > 0)$   
 ㉠에  $b = \frac{5}{3}$ 를 대입하면  $c = 3$ 이므로 ㉡에서  
 $\frac{5}{3} + 3 = 2 + a$   
 $\therefore a = \frac{8}{3}$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 17 정답 ⑤

**해설**  $y = \frac{2x+k+4}{x+2} = 2 + \frac{k}{x+2}$ 에서  $y=0$ 이면

$$x = -2 - \frac{k}{2} \text{이므로 } A\left(-2 - \frac{k}{2}, 0\right)$$

$$x=0 \text{이면 } y = \frac{k}{2} + 2 \text{이므로 } B\left(0, \frac{k}{2} + 2\right)$$

두 점근선의 교점을 R 라 하면  $R(-2, 2)$

이때 선분 BP의 중점이 R 이므로 점 P의 좌표는

$$P\left(-4, 2 - \frac{k}{2}\right) \text{이다.}$$

ㄱ.  $k=-2$ 이면  $P(-4, 3)$  (참)

$$\text{ㄴ. 직선 AB의 기울기는 } \frac{\frac{k}{2} + 2}{2 + \frac{k}{2}} = 1$$

$$\text{직선 AP의 기울기는 } \frac{2 - \frac{k}{2}}{-2 + \frac{k}{2}} = -1$$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이  $-1$ 이므로 서로 수직이다. (참)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서

삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2 \\ &= 8 - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2 \end{aligned}$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 2보다 작으므로,

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2 = 1 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{따라서 방정식 } \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2 = 2 \text{의 해는}$$

$$k = -4 + 2\sqrt{2} \quad (\because -4 < k < 0) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

## 18 정답 ⑤

**해설** 유리함수의 그래프의 여러 가지 성질을 추론한다.

ㄱ. 함수  $f(x) = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right|$ 의 그래프와  $x$ 축의

$$\text{교점의 } x\text{좌표는 } 0 = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right| \text{에서 } \frac{k}{2x} = 2$$

$$\text{즉, } x = \frac{k}{4} \text{이므로 점 A의 좌표는 } \left(\frac{k}{4}, 0\right) \text{이다. (참)}$$

ㄴ. 자연수  $k$ 에 대하여 점 P의  $x$ 좌표가

점 A의  $x$ 좌표보다 클 때, 점 P는

$$\text{함수 } y = 2 - \frac{k}{2x} \quad \left(x > \frac{k}{4}\right) \text{의 그래프 위의 점이다.}$$

$$\text{직선 } y=2 \text{는 함수 } y = 2 - \frac{k}{2x} \text{의 그래프의}$$

한 점근선이므로 점 P의  $y$ 좌표는 2보다 작다.

따라서 선분 PQ의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P의  $x$ 좌표가  $k$ 일 때, 점 P의 좌표는

$$\left(k, \frac{3}{2}\right) \text{이므로 삼각형 AQP의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(k - \frac{k}{4}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{9k}{16} \text{이다.}$$

$$9 \text{와 } 16 \text{은 서로소이므로 } \frac{9k}{16} \text{가 자연수가 되기 위해서}$$

자연수  $k$ 는 16의 배수가 되어야 한다.

그러므로 자연수  $k$ 의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 19 정답 26

**해설** 점  $P(a, b)$ 는 유리함수  $y = \frac{3}{x} \quad (x > 0)$ 의 그래프 위의

$$\text{점이므로 } b = \frac{3}{a} \text{에서 } ab = 3 \quad (a > 0, b > 0)$$

점  $P(a, b)$ 와 직선  $x+y=0$  사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4 \text{에서 } a+b = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3$$

$$= 26$$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

## 집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

20 정답  $\frac{13}{4}$

해설  $f(x) = \begin{cases} -x+3 & (0 \leq x \leq 3) \\ 4x-12 & (3 < x \leq 4) \end{cases}$ ,  
 $g(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < 1) \\ 3 & (1 \leq x < 2) \\ -x+5 & (2 \leq x < 3) \\ 2x-4 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$  이므로

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -g(x)+3 & (0 \leq g(x) \leq 3) \\ 4g(x)-12 & (3 < g(x) \leq 4) \end{cases}$$

(i)  $0 \leq x < 1$  일 때,  $0 \leq g(x) \leq 3$  이므로

$$(f \circ g)(x) = -3x+3$$

(ii)  $1 \leq x < 2$  일 때,  $g(x) = 3$  이므로

$$(f \circ g)(x) = -3+3=0$$

(iii)  $2 \leq x < 3$  일 때,  $2 < g(x) \leq 3$  이므로

$$(f \circ g)(x) = x-2$$

(iv)  $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$  일 때,  $2 \leq g(x) \leq 3$  이므로

$$(f \circ g)(x) = -2x+7$$

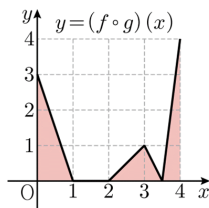
(v)  $\frac{7}{2} < x \leq 4$  일 때,  $3 < g(x) \leq 4$  이므로

$$(f \circ g)(x) = 8x-28$$

이상에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -3x+3 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x < 3) \\ -2x+7 & (3 \leq x \leq \frac{7}{2}) \\ 8x-28 & (\frac{7}{2} < x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

함수  $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{13}{4}$$

21 정답 5

해설 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하면

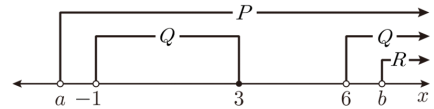
$$P = \{x | x > a\}$$

$$Q = \{x | -1 < x \leq 3 \text{ 또는 } x > 6\}$$

$$R = \{x | x > b\}$$

두 명제  $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이 되려면  $Q \subset P, R \subset Q$

즉,  $R \subset Q \subset P$ 이어야 한다.



다음 그림에서  $a \leq -1, b \geq 6$ 이어야 하므로

$a$ 의 최댓값은  $-1, b$ 의 최솟값은  $6$ 이다.

따라서 그 합은  $-1+6=5$ 이다.

22 정답 ㄴ, ㄷ

해설  $\neg, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32,$

$$2^6=64, \dots \text{이므로 } A(2) = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\therefore n(A) = 4 \text{ (거짓)}$$

ㄴ,  $4^1=4, 4^2=16, 4^3=64, 4^4=256, \dots$ 이므로

$$A(4) = \{4, 6\} \text{ 즉, } A(4) \subset A(2) \text{ (참)}$$

ㄷ,  $m=3$ 이면  $A(2^3) = A(8) = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A(2^3) = A(2)$$

즉,  $A(2^m) = A(2)$ 인 2 이상의 자연수  $m$ 이

존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 23 정답 ④

**해설**  $\frac{x+2}{x^2+3x+3} = \frac{1}{\frac{x^2+3x+3}{x+2}}$

$$= \frac{1}{\frac{(x+1)(x+2)+1}{x+2}}$$

$$= \frac{1}{x+1+\frac{1}{x+2}}$$

$$= \frac{1}{x+2+\frac{1}{x+2}-1} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$x+2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2+\frac{1}{x+2}-1 \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{1}{x+2}}-1=1$$

(단, 등호는  $x=-1$ 일 때 성립한다.)

㉠에서

$$\frac{1}{x+2+\frac{1}{x+2}-1} \leq 1$$

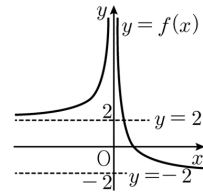
따라서 주어진 식은  $x=-1$ 일 때, 최댓값 1을 갖는다.

## 24 정답 9

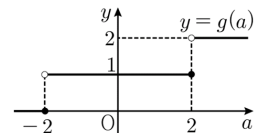
**해설**  $f(x) = \begin{cases} \frac{3-2x}{x} & (x > 0) \\ \frac{3-2x}{-x} & (x < 0) \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{3}{x}-2 & (x > 0) \\ 2-\frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$$

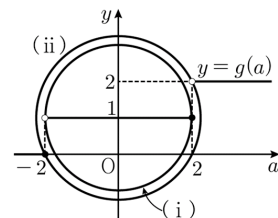
이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식  $f(x)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수는  
두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=a$ 의 그래프의 교점의 개수와 같고,  
이 값이  $g(a)$ 이므로 함수  $y=g(a)$ 의 그래프는 다음  
그림과 같다.



한편,  $n(A \cap B)=1$ 이 되려면 함수  $y=g(a)$ 의 그래프와  
원  $a^2+(y-1)^2=r$ 가 한 점에서 만나야 하므로  
원은 다음 그림과 같이 (i) 또는 (ii)의 경우와 같아야  
한다.



(i) 원  $a^2+(y-1)^2=r$ 가 점  $(2, 1)$ 을 지나므로  
 $r=4$

(ii) 원  $a^2+(y-1)^2=r$ 가 점  $(-2, 0)$ 을 지나므로  
 $4+1=r$   
 $\therefore r=5$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양의 실수  $r$ 의  
값의 합은  $4+5=9$