1. 집합 $X=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(8)=4$
ㄴ. $a\in X$, $b\in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$
ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=682$

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 전체집합 $U=\{x|x$는 21 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X\cup Y)=17$, $n(X\cap Y)=1$
(나) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소는 서로 나누어떨어지지 않는다.

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$, 집합 Y의 모든 원소의 합을 $S(Y)$라 할 때, $S(X)-S(Y)$의 최댓값은? (단, $n(X)\geq 2$)

① 140
② 144
③ 148
④ 152
⑤ 156

3. 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합
$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$
에 대하여 집합 U의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은?

(가) $n(X)=6$
(나) $A-X=B-X$
(다) $(X-A)\cap(X-B)\neq\varnothing$

① 26
② 27
③ 28
④ 29
⑤ 30

4. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

(가) $A=\{3, 4, 5\}$, $A^C\cup B^C=\{1, 2, 4\}$
(나) $X\subset U$이고 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 1이다.

5. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 6배이다. (나) $n(A\cup B)=5$

집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.
(단, $2\le n(B-A)\le 4$)

6. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 20 이하의 자연수$\}$의 부분집합

$A_k=\{x|x(y-k)=30,\ y\in U\}$

$B=\left\{x\middle|\dfrac{30-x}{5}\in U\right\}$

에 대하여 $n(A_k\cap B^C)=1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 3
② 5
③ 7
④ 9
⑤ 11

7. $n(U)=5$인 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$n(B\cap C)=2$, $n(B-A)=1$, $n(C-A)=2$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >
ㄱ. $n(A\cap B\cap C)\neq 0$ ㄴ. $n(A\cap B\cap C)=2$이면 $n(C)=4$이다. ㄷ. $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은 42이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
방정식 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$의 모든 실근의 집합을 A라 하고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 집합을 B라 하면 두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여

$A=\{\alpha,\ \beta\}$, $B=\{\alpha,\ \beta+3\}$이다. 상수 k에 대하여 방정식

$\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 이 세 실근의 합이 12일 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오.

9. 9 이하의 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$A_k=\{x \mid k-1 \le x \le k+1,\ x$는 실수$\}$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$

ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다.

ㄷ. 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 4이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 1보다 큰 자연수 k에 대하여 전체집합

$U=\{x \mid x$는 k이하의 자연수$\}$

의 두 부분집합

$A=\{x \mid x$는 k이하의 짝수$\}$, $B=\{x \mid x$는 k의 약수$\}$

가 $n(A) \times n((A \cup B)^C) = 15$를 만족시킨다.

집합 $(A \cup B)^C$의 모든 원소의 곱을 구하시오.

11. $1 \le a < b$인 두 상수 a, b에 대하여 세 집합

$$A=\left\{(x,y) \mid y=\frac{4}{3}x\text{이고 } (x+2)^2+(y+1)^2=1\right\},$$

$$B=\left\{(x,y) \mid y=\frac{4}{3}x\text{이고 } (x-a-1)^2+(y-a)^2=a^2\right\},$$

$$C=\left\{(x,y) \mid y=\frac{4}{3}x\text{이고} (x-b-1)^2+(y-b)^2=b^2\right\}$$

이 있다. $n(A \cup B \cup C)=3$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{14}{5}$
② 3
③ $\frac{16}{5}$
④ $\frac{17}{5}$
⑤ $\frac{18}{5}$

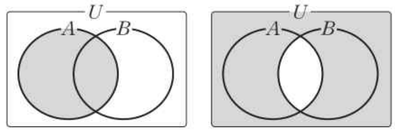
[공통수학2 집합_내신대비 기말고사 정답 및 해설]

1. [정답] 3번
집합 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 가지려면 n보다 작은 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 원소로 갖지 않고 n을 반드시 원소로 가져야 하므로
$f(n)=2^{10-(n-1)-1}=2^{10-n}$
ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$ (참)
ㄴ. [반례] $a=9$, $b=10$이면 $9\in X$, $10\in X$이고 $9<10$이지만
$f(9)=2^{10-9}=2^1=2$, $f(10)=2^{10-10}=2^0=1$이므로
$f(9)>f(10)$ (거짓)
ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$
$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$
$=2^9+2^7+2^5+2^3+2^1$
$=512+128+32+8+2=682$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

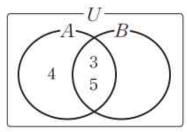
2. [정답] 2번
$S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소일 때, $S(X)-S(Y)$는 최댓값을 갖는다.
조건 (나)에서 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어떨어지지 않으려면 $k\in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.
11, 12, 13, $\cdots$, 21은 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면 집합 X는 11, 12, 13, $\cdots$, 21을 원소로 가져야 한다.
이때 1, 3, 7은 21의 약수이고, 2, 4, 5, 10은 20의 약수, 6, 9는 18의 약수, 8은 16의 약수이므로 1, 2, 3, $\cdots$, 10은 집합 X의 원소가 될 수 없다.
조건 (가)에서 $n(X\cap Y)=1$이므로 $S(Y)$가 최솟값을 가지려면 집합 Y는 집합 X의 원소 중 가장 작은 값인 11을 원소로 가져야 한다.
또한, $n(X\cup Y)=17$이므로 집합 Y는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11을 원소로 가져야 한다.
따라서 X={11, 12, 13, $\cdots$, 21}, Y={1, 2, 3, 4, 5, 6, 11}일 때, $S(X)-S(Y)$가 최댓값을 가지고, 그 최댓값은
(11+12+13+$\cdots$+20+21)-(1+2+3+4+5+6+11) =176-32=144

3. [정답] 2
$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고,
조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로
$A-X=B-X\subset A\cap B$={3, 4, 5}
$A-X\subset$ {3, 4, 5}에서 {1, 2}$\subset X$이고
$B-X\subset$ {3, 4, 5}에서 {6, 7}$\subset X$이므로
{1, 2, 6, 7}$\subset X$ . . . . . . ㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)=X\cap(A\cup B)^C$
$=X\cap\{8,\ 9,\ 10\}\neq\varnothing$ . . . . . . ㉡
조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여
$n(X\cap$ {3, 4, 5, 8, 9, 10})=2 . . . . . . ㉢
㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.
집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고 ㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$
따라서 X={1, 2, 3, 6, 7, 8}일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
1+2+3+6+7+8=27

4. [정답] 11
조건 (가)에 의하여
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$={1, 2, 4}
두 집합 A, $(A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



두 집합 A, $(A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이므로
$A-B$={4}



또, $A\cap B=A-(A-B)$={3, 5}이고
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C$={1, 2, 3, 4, 5}
이때 $4\notin B$이고 $3\in B$, $5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여
$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$
$=(A-B)\cup(X-B)=\{4\}\cup(X-B)$
집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면 집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 {4}가 되어야 한다.
(ⅰ) X={1}, X={2}, X={3}, X={5}일 때
모든 집합 X에 대하여 집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로 1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.
(ⅱ) X={4}일 때
$X-B$={4}이므로 집합 {4}$\cup(X-B)$는 집합 {4}가 되어 조건을 만족시킨다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 B={1, 2, 3, 5}
따라서 B={1, 2, 3, 5}이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
1+2+3+5=11

5. [정답] 22
집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하자.
$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이고, 조건 (가)에서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로 전체집합 U의 모든 원소의 합은 $7k$이다.
$7k=1+2+4+8+16+32=63$, $k=9$
집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로
$B-A$={1, 8}
$A\cap(B-A)=\varnothing$이므로

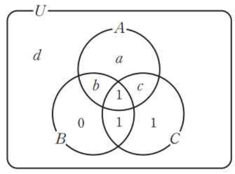
$A \subset (B-A)^C$={2, 4, 16, 32}
$A \cup B = A \cup (B-A)$
$n(A \cup B) = n(A) + n(B-A)$
이고, 조건 (나)에서 $n(A \cup B) = 5$이므로 $n(A) = 3$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은
A={2, 4, 16}일 때, 2+4+16=22이다.

6. [정답] 2
집합 B를 구한 후 집합 $A_k \cap B^C$에 속하는 원소를 생각한다.
{STEP 1} 집합 A_k의 포함 관계와 집합 B를 구한다.
집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로 x는 20 이하의 자연수이다.
또한, 집합 A_k에서 $x(y-k) = 30$이므로 $y-k$는 30의 약수이다.
$y \in U$이므로 $y-k < 30$이고 $x \neq 1$
$x \in U$이므로 $x \neq 30$
$y-k$와 x사이의 관계는 다음 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

즉, $A_k \subset$ {2, 3, 5, 6, 10, 15}
집합 B에서 $\dfrac{30-x}{5} \in U$이므로 $30-x$는 5의 배수이다.
즉, B={5, 10, 15, 20}
{STEP 2} 집합 $A_k \cap B^C$에 속하는 원소에 따라 k의 값의 범위를 구한다.
$(A_k \cap B^C) \subset$ {2, 3, 6}이고 $n(A_k \cap B^C) = 1$이므로
다음과 같은 경우로 나누어 생각해 보자.
(ⅰ) $2 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x = 2$, $y-k = 15$이고 $y = 15 + k \leq 20$
$k \leq 5$
(ⅱ) $3 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x = 3$, $y-k = 10$이고 $y = 10 + k \leq 20$
$k \leq 10$
(ⅲ) $6 \in (A_k \cap B^C)$일 때
$x = 6$, $y-k = 5$이고 $y = 5 + k \leq 20$
$k \leq 15$
{STEP 3} $n(A_k \cap B^C) = 1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구한다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
$k \leq 5$일 때, $A_k \cap B^C$={2, 3, 6}
$5 < k \leq 10$일 때, $A_k \cap B^C$={3, 6}
$10 < k \leq 15$일 때, $A_k \cap B^C$={6}
즉, $n(A_k \cap B^C) = 1$이 되도록 하는 k의 값의 범위는 $10 < k \leq 15$
따라서 자연수 k의 값은 11, 12, 13, 14, 15이므로 그 개수는 5이다.

7. [정답] 5
집합의 연산과 집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 참, 거짓을 추론한다.
{STEP 1} $n(A \cap B \cap C) = 0$인 경우를 생각해 본다.
ㄱ. $n(A \cap B \cap C) = 0$이면
$n(B \cap C) = 2$에서 $n(A^C \cap B \cap C) = 2$
$n(B-A) \geq n(A^C \cap B \cap C) = 2$이므로 $n(B-A) = 1$을 만족시키지 않는다.
따라서 $n(A \cap B \cap C) \neq 0$ (참)
{STEP 2} 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 집합 C의 원소의 개수를 구한다.
ㄴ. $n(A \cap B \cap C) = 2$이면
$n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) + n(A^C \cap B \cap C) = 2$
이므로 $n(A^C \cap B \cap C) = 0$
$n(B-A) = n(A^C \cap B \cap C) + n(A^C \cap B \cap C^C) = 1$
이므로 $n(A^C \cap B \cap C^C) = 1$
$n(C-A) = n(A^C \cap B \cap C) + n(A^C \cap B^C \cap C) = 2$
이므로 $n(A^C \cap B^C \cap C) = 2$
$n(A \cap B \cap C) + n(A^C \cap B \cap C^C) + n(A^C \cap B^C \cap C) = 5 = n(U)$
따라서 $n(C) = n(A \cap B \cap C) + n(A^C \cap B^C \cap C) = 4$ (참)
{STEP 3} $n(A \cap B \cap C) = 1$인 경우와 $n(A \cap B \cap C) = 2$인 경우로 나누어 생각한다.
ㄷ. $n(B \cap C) = 2$이므로 ㄱ에 의하여
$n(A \cap B \cap C) = 1$또는 $n(A \cap B \cap C) = 2$
(ⅰ) $n(A \cap B \cap C) = 2$일 때
ㄴ에 의하여
$n(A) = n(A \cap B \cap C) = 2$
$n(B) = n(A \cap B \cap C) + n(A^C \cap B \cap C^C) = 3$
$n(A) \times n(B) \times n(C) = 2 \times 3 \times 4 = 24$
(ⅱ) $n(A \cap B \cap C) = 1$일 때
$n(B \cap C) = 2$에서 $n(A^C \cap B \cap C) = 1$
$n(B-A) = 1$에서 $n(A^C \cap B \cap C^C) = 0$
$n(C-A) = 2$에서 $n(A^C \cap B^C \cap C) = 1$
각 집합의 원소의 개수를 나타내면 다음 그림과 같다.



$n(A) = a+b+c+1$, $n(B) = b+2$, $n(C) = c+3$ 이고 $a+b+c+d = 2$이다.
$n(A) \times n(B) \times n(C)$의 값이 최소가 되기 위해서는
$a = b = c = 0$, $d = 2$
이때 $n(A) \times n(B) \times n(C) = 1 \times 2 \times 3 = 6$
$n(A) \times n(B) \times n(C)$의 값이 최대가 되기 위해서는
$a = d = 0$, $b + c = 2$
ⓐ $b = 2$, $c = 0$일 때
$n(A) \times n(B) \times n(C) = 3 \times 4 \times 3 = 36$
ⓑ $b = 1$, $c = 1$일 때
$n(A) \times n(B) \times n(C) = 3 \times 3 \times 4 = 36$
ⓒ $b = 0$, $c = 2$일 때
$n(A) \times n(B) \times n(C) = 3 \times 2 \times 5 = 30$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값은 36, 최솟값은 6이다.

따라서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은 42이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. [정답] 50

집합의 원소가 방정식의 실근임을 이용한다.

{STEP 1} 주어진 집합을 이용하여 방정식 $f(x)=1$, $g(x)=1$의 실근의 집합을 구한다.

$\alpha\in A$, $\alpha\in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$

또한 $\beta\in A$, $\beta\notin B$이므로

$f(\beta)=1$, $g(\beta)\neq 1$또는 $f(\beta)\neq 1$, $g(\beta)=1$

즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C, 방정식 $g(x)=1$의 모든 실근의 집합을 D라 하면

$C=\{\alpha,\ \beta\}$, $D=\{\alpha\}$또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha,\ \beta\}$

{STEP 2} 경우를 나누어 조건을 만족시키는 것을 찾는다.

(ⅰ) $C=\{\alpha,\ \beta\}$, $D=\{\alpha\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$, $g(x)=(x-\alpha)^2+1$ . . . . . . ㉠

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

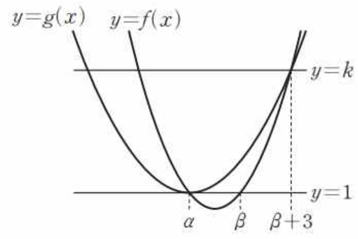
$2(\beta+3-\alpha)\times 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$

$\beta+3-\alpha=0$또는 $\beta+3-\alpha=6$

즉, $\beta-\alpha=-3$또는 $\beta-\alpha=3$

$\alpha<\beta$이므로 $\beta-\alpha=3$ . . . . . . ㉡

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=1$은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

[그림 1]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값은

$k=g(\beta+3)$ . . . . . . ㉢

곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $\alpha-3$, $\beta+3$이다.

이때 ㉡에 의하여

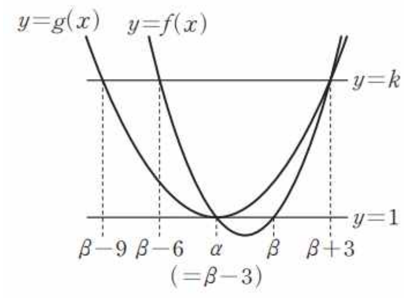
$\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$

또한, 곡선 $y=g(x)$의 축의 방정식은 $x=\alpha$이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$이다.

이때 ㉡에 의하여

$2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3$

$=\beta-9$



[그림 2]

[그림 2]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근은

$\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$이고 그 합이 12이므로

$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$, $\beta=8$ ㉡에서 $\alpha=5$

㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$, $g(x)=(x-5)^2+1$

㉢에서 $k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ⅱ) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha,\ \beta\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha)\times 3+1$

$\beta+3-\alpha=0$또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$

즉, $\beta-\alpha=-3$또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$

이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$라는 조건을 만족시키지 않는다.

{STEP 3} $\alpha+\beta+k$의 값을 구한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$

따라서 $\alpha+\beta+k=5+8+37=50$

9. [정답] 3

두 집합 A_l, A_m이 서로소가 아니면 $A_l\cap A_m\neq\varnothing$임을 이용한다.

{STEP 1} 세 집합 A_1, A_2, A_3을 각각 구하여 공통된 원소를 찾아 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A_1\cap A_2\cap A_3$

$=\{x\,|\,0\le x\le 2\}\cap\{x\,|\,1\le x\le 3\}\cap\{x\,|\,2\le x\le 4\}$

$=\{2\}$ (참)

{STEP 2} $l\le m$이라 하고 $|l-m|=0$, $|l-m|=1$, $|l-m|=2$일 때 집합 $A_l\cap A_m$를 구해 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $|l-m|\le 2$를 만족시키는 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $l\le m$이라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

(ⅰ) $|l-m|=0$일 때, $m=l$이고

$A_l\cap A_m=A_l\neq\varnothing$

(ⅱ) $|l-m|=1$일 때, $m=l+1$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+1}=\{x\,|\,l\le x\le l+1\}\neq\varnothing$

(ⅲ) $|l-m|=2$일 때, $m=l+2$이고

$A_l\cap A_m=A_l\cap A_{l+2}=\{l+1\}\neq\varnothing$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m|\le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

{STEP 3} 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합을 구해 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 9 이하인 자연수 n에 대하여 집합 $\{p\}(n-1 \le p \le n+1)$이 $\{p\} \cap A_n \ne \varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

8 이하인 자연수 n에 대하여 $A_n \cap A_{n+1} = \{x | n \le x \le n+1\}$이고, 집합 $\{p\}(n \le p \le n+1)$이 $\{p\} \cap \{A_n \cap A_{n+1}\} \ne \varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

7 이하인 자연수 n에 대하여

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\}$이고

$\{n+1\} \cap (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}) \ne \varnothing$이므로 집합 $\{n+1\}$은 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}와 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

6 이하인 자연수 n에 대하여

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} = \varnothing$이므로

A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}과 서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 1인 집합은 존재하지 않는다.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$, $A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{3\}$,

$A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{4\}$, $\cdots$,

$A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \{8\}$

X={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}이라 하면 집합 X는 모든 A_k와 서로소가 아니다.

모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합을 B라 하면 $B \subset X$

$2 \notin B$이면 $A_1 \cap B = \varnothing$이므로 $2 \in B$이어야 한다.

$8 \notin B$이면 $A_9 \cap B = \varnothing$이므로 $8 \in B$이어야 한다.

$\{2, 8\} \cap A_4 = \varnothing$, $\{2, 8\} \cap A_5 = \varnothing$, $\{2, 8\} \cap A_6 = \varnothing$이고

$A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{5\}$이므로 $5 \in B$이어야 한다.

B={2, 5, 8}에 대하여 집합 B의 원소의 개수는 3이고 집합 B는 모든 A_k와 서로소가 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10. [정답] 189

주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

{STEP 1} 집합의 원소의 개수는 자연수임을 이용하여 $n(A)$의 값을 추론한다.

$n(A) \times n((A \cup B)^C) = 15$에서 $n(A)$는 15의 양의 약수이다.

{STEP 2} $n(A)$의 값이 1, 3, 5, 15인 경우 조건을 만족시키는 집합 U, A, B를 각각 구한다.

(ⅰ) $n(A) = 1$일 때

$A = \{2\}$이므로 $k = 2$또는 $k = 3$

$k = 2$이면 U={1, 2}, B={1, 2}에서

$(A \cup B)^C = \varnothing$, $n((A \cup B)^C) = 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k = 3$이면 U={1, 2, 3}, B={1, 3}에서

$(A \cup B)^C = \varnothing$, $n((A \cup B)^C) = 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n(A) = 3$일 때

A={2, 4, 6}이므로 $k = 6$또는 $k = 7$

$k = 6$이면 U={1, 2, 3, ⋯, 6}, B={1, 2, 3, 6}에서

$(A \cup B)^C = \{5\}$, $n((A \cup B)^C) = 1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k = 7$이면 U={1, 2, 3, ⋯, 7}, B={1, 7}에서

$(A \cup B)^C = 3, 5$, $n((A \cup B)^C) = 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $n(A) = 5$일 때

A={2, 4, 6, 8, 10}이므로 $k = 10$또는 $k = 11$

$k = 10$이면 U={1, 2, 3, ⋯, 10}, B={1, 2, 5, 10}에서

$(A \cup B)^C$={3, 7, 9}, $n((A \cup B)^C) = 3$이므로 조건을 만족시킨다.

$k = 11$이면 U={1, 2, 3, ⋯, 11}, B={1, 11}에서

$(A \cup B)^C$={3, 5, 7, 9}, $n((A \cup B)^C) = 4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $n(A) = 15$일 때

A={2, 4, 6, ⋯, 30}이므로 $k = 30$또는 $k = 31$

$k = 30$이면

U={1, 2, 3, ⋯, 30}, B={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}에서

$(A \cup B)^C$={7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29},

$n((A \cup B)^C) = 11$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k = 31$이면 U={1, 2, 3, ⋯, 31}, B={1, 31}에서

$(A \cup B)^C$={3, 5, 7, ⋯, 29}, $n((A \cup B)^C) = 14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 두 집합 A, B가 조건을 만족시키도록 하는 k는 $k = 10$이고

U={1, 2, 3, ⋯, 10}, A={2, 4, 6, 8, 10}, B={1, 2, 5, 10}

{STEP 3} 집합 $(A \cap B)^C$의 모든 원소의 곱을 구한다.

따라서 $(A \cup B)^C$={3, 7, 9}이므로 집합 $(A \cap B)^C$의 모든 원소의 곱은

3×7×9=189

11. [정답] 5

각 집합의 원소의 의미를 파악한다.

{STEP 1} 주어진 집합의 의미를 파악하여 세 원의 관계를 파악한다.

세 원

$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$, $(x-a-1)^2 + (y-a)^2 = a^2$,

$(x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2$을 차례로 O_1, O_2, O_3이라 하자.

집합 A, B, C는 좌표평면에서 직선 $y = \frac{4}{3}x$가 세 원 O_1, O_2, O_3과 각각 만나는 점의 집합이다.

원 O_1의 중심 (-2, -1)과 직선 $y = \frac{4}{3}x$사이의 거리가

$\frac{|-8+3|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1$이고 원 O_1의 반지름의 길이가 1이므로

원 O_1과 직선 $y = \frac{4}{3}x$는 한 점에서 만난다.

그러므로 $n(A) = 1$

세 원 O_1, O_2, O_3은 모두 x축에 접하고 원 O_1의 중심은 제3사

분면, 두 원 O_2, O_3의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 원 O_1은 두 원 O_2, O_3과 만나지 않는다.

{STEP 2} $n(A \cup B \cap C) = 3$인 조건을 만족시키는 집합 B를 구한다.

그러므로 $A \cap (B \cap C) = \varnothing$

$n(A) = 1$, $A \cap (B \cap C) = \varnothing$이므로

$n(A \cup B \cap C) = 3$이려면 $n(B \cap C) = 2$ . . . . . . ㉠

두 원 O_2, O_3의 중심 $(a+1,\ a)$, $(b+1,\ b)$는 모두 직선 $y = x-1$위의 점이다.

직선 $y = x-1$위의 점 $(k+1,\ k)\ (k \geq 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원에 대하여 원의 중심 $(k+1,\ k)$와 직선 $y = \frac{4}{3}x$사이의 거리는

$\frac{|4k+4-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{k+4}{5}$

이므로 점 $(k+1,\ k)\ (k \geq 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 직선 $y = \frac{4}{3}x$는 $k = 1$이면 $k = \frac{k+4}{5}$이므로 서로 접하고 $k > 1$이면 $k > \frac{k+4}{5}$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

$1 \leq a < b$에서

$a \geq 1$이므로 $n(B) \geq 1$

$b > 1$이므로 $n(C) = 2$ . . . . . . ㉡

㉠, ㉡에서 $B \subset C$이고 $a \neq b$이면 $B \neq C$이므로

$n(B) < n(C) = 2$

$1 \leq n(B) < 2$에서 $n(B) = 1$

원 O_2와 직선 $y = \frac{4}{3}x$는 서로 접하므로 $a = 1$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$에 $y = \frac{4}{3}x$를 대입하면

$(x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}x - 1\right)^2 = 1$

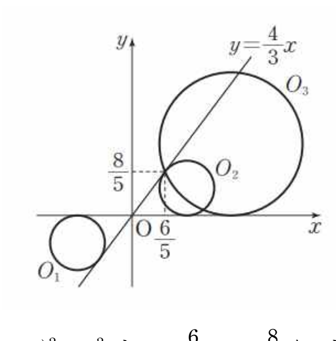
$\frac{25}{9}x^2 - \frac{20}{3}x + 4 = 0$, $\left(\frac{5}{3}x - 2\right)^2 = 0$

$x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{8}{5}$이므로 $B = \left\{\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)\right\}$

{STEP 3} 집합 B와 C의 포함 관계를 이용하여 a, b의 값을 구하고 $a+b$의 값을 구한다.

$B \subset C$이므로 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right) \in C$

점 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$이 원 O_3위의 점이어야 하므로 세 원 O_1, O_2, O_3과 직선 $y = \frac{4}{3}x$는 그림과 같다.



$(x-b-1)^2 + (y-b)^2 = b^2$에 $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{8}{5}$을 대입하면

$\left(\frac{6}{5} - b - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - b\right)^2 = b^2$

$b^2 - \frac{18}{5}b + \frac{13}{5} = 0$, $(b-1)\left(b - \frac{13}{5}\right) = 0$

$b = 1$또는 $b = \frac{13}{5}$

$b > a$이므로 $b = \frac{13}{5}$

따라서 $a + b = 1 + \frac{13}{5} = \frac{18}{5}$