개념원리(2025) - 공통수학2 (명제와 조건)169~179p

명제와 조건

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 명제의 개수를 구하시오.

ㄱ. 1년은 13개월이다. ㄴ. $x^2=1$
ㄷ. 짝수인 소수는 없다. ㄹ. $2+3=6$
ㅁ. 오늘은 날씨가 좋다.

02 조건 '$X \subset A$이고 $X \subset B$'의 부정은?

① $X \not\subset A$이고 $X \not\subset B$ ② $X \subset A$ 또는 $X \subset B$
③ $X \not\subset A$ 또는 $X \subset B$ ④ $X \subset A$ 또는 $X \subset B$
⑤ $X \not\subset A$ 또는 $X \not\subset B$

03 조건 '$x \in A$이고 $x \not\in B$'의 부정은?

① $x \not\in A$이고 $x \not\in B$ ② $x \in A$ 또는 $x \in B$
③ $x \not\in A$ 또는 $x \in B$ ④ $x \in A$ 또는 $x \not\in B$
⑤ $x \not\in A$ 또는 $x \not\in B$

04 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2+3x-10 \leq 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

05 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2-4x-12 \leq 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

06 다음 <보기>의 조건 $'p(x)'$를 만족하는 진리집합 P가 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R이다.)

<보기>

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P=\{1, 2, 3, 6, 12\}$

(2) $p(x)$: $x^2+1=0$
$P=\varnothing$

(3) $p(x)$: $x^2-5x-4=0$
$P=\{1, 4\}$

(4) $p(x)$: $x^2+4x+5>0$
$P=R$

① (1), (2) ② (2), (3)
③ (3), (4) ④ (2), (4)
⑤ (1), (3)

07 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 조건 $x^2-2>0$의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0, 1\}$
③ $\{3, 4, 5\}$ ④ $\{2, 3, 4, 5\}$
⑤ U

08 다음 중 거짓인 명제인 것은?

① $\sqrt{2}$는 무리수이다.
② 0.333333은 0.4에 가까운 수이다.
③ 4는 소수가 아니다.
④ $x^2+1>2x$
⑤ $-2x+1\le-3-2x$

09 다음 중 거짓인 명제인 것은?

① $\sqrt{3}$은 무리수이다.
② 365는 아름다운 수이다.
③ 소수의 제곱은 항상 홀수이다.
④ $x^2+4x+1=0$
⑤ $x^2+2x+4\ge x^2+2x-1$

10 다음 중 참인 명제인 것은?

① 10에 가까운 수는 무수히 많다.
② $\sqrt{-1}$은 실수이다.
③ 수학은 즐거운 학문이다.
④ x는 8의 약수이다.
⑤ 정삼각형의 세 변의 길이는 모두 같다.

11 다음 중 명제 '어떤 실수의 제곱은 음수이다.'의 부정으로 옳은 것은?

① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

12 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $P\cup Q$의 원소의 개수를 구하시오.

p: x는 소수이고, 홀수가 아니다. q: x는 15의 약수이다.

13 전체집합 $U=\{x|x$는 50 이하의 양의 짝수$\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0<x<30$, $r : x^2-10x+24=0$ 일 때, 'p 이고 q이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

① 6　② 8　③ 12
④ 16　⑤ 24

14 전체집합 $U=\{x|-2\leq x\leq 2,\ x$는 정수$\}$에 대하여 두 조건 p, q가 $p: x^2-3x+2=0$, $q: x^3+5x^2+4x=0$일 때, 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합의 모든 원소의 곱을 구하시오.

15 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 두 조건 $p : x^2=3x$, $q : x\geq 2$ 에 대하여 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합은?

① $\{0\}$　② $\{1\}$　③ $\{3\}$
④ $\{0, 1\}$　⑤ $\{3, 5\}$

16 다음 중 참인 명제를 모두 고르면? (정답 2개)

① $x+y$가 유리수이면 x, y가 유리수이다.
② $|x|\leq 1$이면 $2x+1>0$이다.
③ $x^2-2x=0$이면 $x=0$ 또는 $x=2$이다.
④ x가 짝수이면 x^3은 홀수이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+2>0$이다.

17 다음 중에서 명제 `자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40
④ 42 ⑤ 답 없음

18 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \to q$가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P \cap Q = P$ ② $P \cup Q = Q$ ③ $P - Q = \varnothing$
④ $P \subset Q$ ⑤ $Q - P = Q$

19 전체집합 U 에서 두 조건 p , q를 만족시키는 집합을 P , Q 라 하자. 명제「$p \Rightarrow \sim q$」가 참일 때, 다음 중 옳은 것은 ?

① $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{P}$ ② $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{Q}$
③ $\mathrm{P} - \mathrm{Q} = \mathrm{P}$ ④ $\mathrm{P}^c \cup \mathrm{Q} = \mathrm{U}$
⑤ $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}^c = \varnothing$

20 다음 중 참인 명제는?

① 2 는 홀수이다.
② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.
③ 99 는 100 보다 작다.
④ $\varnothing$ 은 무한집합이다.
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

21 다음 중 참인 명제는?
① 어떤 자연수 x에 대하여 $0 < x < 1$이다.
② 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 0$이다.
③ 모든 자연수 x에 대하여 $x - 3 \geq 0$이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $1 - x^2 > 0$이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)(x+3) = 0$이다.

22 다음 중 참인 명제는?
① 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 0$이다.
② 모든 실수 x에 대하여 $(x+2)(x-1) = 0$이다.
③ 모든 자연수 x에 대하여 $x - 2 \geq 0$이다.
④ 어떤 자연수 x에 대하여 $2 < x < 3$이다.
⑤ 어떤 실수 x에 대하여 $4 - x^2 > 0$이다.

23 [2006년 9월 고1 6번]

두 조건 $p: a \leq x \leq 3$, $q: x \geq -2a-6$에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수 a 의 최솟값은?

① -3　② $-\frac{5}{2}$　③ -2　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

24

명제 '$x \leq -1$ 이면 $3x+2 \leq k$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

25

다음 보기 중 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $p: x^2$은 0보다 크다.
　$\sim p: x^2$은 0보다 작거나 같다.
ㄴ. $p: a<0$이고 $b \geq 0$이다.
　$\sim p: a \geq 0$ 또는 $b<0$이다.
ㄷ. $p: ab \neq 0$
　$\sim p: a, b$ 모두 0이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26

정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 조건 $p: f(x)=0$, $q: g(x)=0$을 만족하는 집합을 각각 A, B라 할 때, 조건 $f(x)g(x) \neq 0$을 만족하는 집합은?

① $A^C \cap B$　② $A \cap B^C$　③ $A^C \cap B^C$　④ $A^C \cup B^C$　⑤ $A^C \cup B$

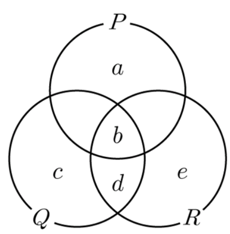
27

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 다음 중 명제 '$\sim p$이면 q이고 $\sim r$이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 반드시 속하는 집합은?

① $(P \cup Q) \cap R$　② $(P \cap Q) \cap R^C$　③ $(P-Q) \cap R$　④ $(Q \cap R^C)-P$　⑤ $(Q^C \cup R)-P$

28

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 아래 그림은 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타낸 것이다. 다음 중 명제 'p이면 q 그리고 r이다.'가 거짓임을 보이는 원소는?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

29 전체집합 U에서 정의된 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때,
$P\cap Q=P$, $Q\cap R^C=\varnothing$인 관계가 성립한다.
다음 명제 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p\rightarrow q$ ② $q\rightarrow r$ ③ $p\rightarrow r$
④ $\sim p\rightarrow\sim r$ ⑤ $\sim r\rightarrow\sim q$

30 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C가
$A=\{x\,|\,f(x)=0\}$, $B=\{x\,|\,g(x)=0\}$,
$C=\{x\,|\,h(x)=0\}$
일 때, 명제 '$f(x)\neq 0$이고 ($g(x)=0$ 또는 $h(x)=0$)'의 부정의 진리집합을 A, B, C로 나타내면?

① $A^C\cap(B\cup C)^C$
② $A^C\cap(B\cap C)^C$
③ $A\cap(B\cup C)^C$
④ $A\cup(B\cup C)^C$
⑤ $A\cup(B^C\cup C^C)$

31 명제 '어떤 실수 x에 대하여
$-x^2-8x-a+2\geq 0$이다.' 의 부정이 참이 되도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하시오.

32 [2023년 11월 고1 25번/3점]
정수 k에 대한 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

> p : 모든 실수 x에 대하여
> $x^2+2kx+4k+5>0$이다.
> q : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이다.

33 다음 명제의 부정이 참일 때, 양수 k의 최솟값을 구하시오.

> 모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx+25>0$이다.

34 [2018년 3월 고3 문과 29번 변형]
전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 두 명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $4x^2-12x+5<0$이다.'
'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'가 있다.
두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오.

35 세 조건 '$p : x \le a$', '$q : -4 < x < 5$ 또는 $x > 8$', '$r : x < b$'에 대하여 두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim r$가 모두 참이 되도록 하는 a의 최솟값과 b의 최댓값의 곱을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

개념원리(2025) - 공통수학2 (명제와 조건)169~179p

명제와 조건

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 3	02 ⑤	03 ③
04 2	05 6	06 ④
07 ④	08 ⑤	09 ③
10 ⑤	11 ④	12 4
13 ①	14 0	15 ①
16 ③, ⑤	17 ②	18 ⑤
19 ③	20 ③	21 ④
22 ⑤	23 ③	24 ⑤
25 ③	26 ③	27 ⑤
28 ①	29 ④	30 ④
31 19	32 9	33 10
34 56	35 -32	

개념원리(2025) - 공통수학2 (명제와 조건)169~179p

명제와 조건

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 3

해설 ㄴ. $x^2=1$은 x의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하므로 명제가 아니다.
ㅁ. 기준이 명확하지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
따라서 보기 중 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이므로 모두 3개다.

02 정답 ⑤

해설 $X \not\subset A$ 또는 $X \not\subset B$

03 정답 ③

해설 $x \notin A$ 또는 $x \in B$

04 정답 2

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$p: x^2+3x-10 \le 0$에서
$(x+5)(x-2) \le 0$
$\therefore -5 \le x \le 2$
$\therefore P=\{1, 2\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 2이다.

05 정답 6

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$p: x^2-4x-12 \le 0$에서
$(x+2)(x-6) \le 0$
$\therefore -2 \le x \le 6$
$\therefore P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 6이다.

06 정답 ④

해설 (1) $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \ge 0$ 이므로 $x^2+1 \ne 0$ $\therefore P=\varnothing$
(3) $P=\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$
(4) 모든 실수 x에 대하여
$x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ 이므로
$P=R$이다.

07 정답 ④

해설 주어진 조건 $x^2-2>0$에
$x=0$을 대입하면 $0-2<0$이므로 거짓이다.
$x=1$을 대입하면 $1-2<0$이므로 거짓이다.
$x=2$를 대입하면 $4-2>0$이므로 참이다.
$x=3$을 대입하면 $9-2>0$이므로 참이다.
$x=4$를 대입하면 $16-2>0$이므로 참이다.
$x=5$를 대입하면 $25-2>0$이므로 참이다.
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$이다.

08 정답 ⑤

해설 ① 참인 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ 참인 명제이다.
④ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
⑤ $-2x+1 \le -3-2x$에서 $1 \le -3$이므로 거짓인 명제이다.

09 **정답** ③

해설 ① 참인 명제이다.
② '아름다운'의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ [반례] 2는 소수이지만 $2^2=4$는 짝수이다.
따라서 거짓인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
⑤ $x^2+2x+4 \geq x^2+2x-1$에서
$4 \geq -1$이므로 참인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

10 **정답** ⑤

해설 ①, ③ 추상적인 문장이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
따라서 명제가 아니다.
② 거짓인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

11 **정답** ④

해설 '어떤'의 부정은 '모든'이고 '음수이다.'의 부정은 '음수가 아니다.'이다.
따라서, '어떤 실수의 제곱은 음수이다.'의 부정은 '모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.'이다.

12 **정답** 4

해설 소수이면서 홀수가 아닌 수는 2뿐이므로
$P=\{2\}$
10 이하의 자연수 중에서 15의 약수는
$1,\ 3,\ 5$이므로
$Q=\{1,\ 3,\ 5\}$
$\therefore P\cup Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
따라서 $P\cup Q$의 원소의 개수는 4이다.

13 **정답** ①

해설 조건 p, q, r를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R라 하면
$\mathrm{P}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48\}$
$\mathrm{Q}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots,\ 28\}$
$\mathrm{R}=\{4,\ 6\}$
`p 이고 q이고 ~r' 를 만족하는 집합은 $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}\cap\mathrm{R}^c$ 이므로 $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}\cap\mathrm{R}^c=\{2,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24\}$

14 **정답** 0

해설 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$이므로
$x=1$ 또는 $x=2$
따라서 조건 p의 진리집합 $P=\{1,\ 2\}$
$x^3+5x^2+4x=0$에서 $x(x+1)(x+4)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-4$
따라서 조건 q의 진리집합 $Q=\{-1,\ 0\}$
이때 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이고
$P^C=\{-2,\ -1,\ 0\}$이므로
$P^C\cap Q=\{-1,\ 0\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 곱은 0

15 **정답** ①

해설 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면
$\mathrm{P}=\{0,\ 3\}$, $\mathrm{Q}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
'p이고 ~q'를 만족하는 집합은 $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}^c$
$\therefore \mathrm{P}\cap\mathrm{Q}^c=\mathrm{P}-\mathrm{Q}=\{0\}$

16 **정답** ③, ⑤

해설 ① [반례] $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$이면 $x+y=0$이므로 거짓이다.
② [반례] $x=-1$이면 $2x+1=-1$이므로 거짓이다.
③ $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=2$이다. 따라서 주어진 명제는 참이다.
④ x가 짝수이면 $x=2n$ (n은 정수)
$x^3=(2n)^3=8n^3=2(4n^3)$이므로 x^3은 짝수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+2>0$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.
따라서 참인 명제는 ③, ⑤이다.

17 **정답** ②

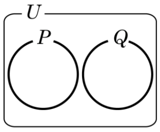
해설 실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

18 **정답** ⑤

해설 명제 $p\rightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$이므로
$P\cap Q=P,\ P\cup Q=Q,\ P-Q=\varnothing$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

19 정답 ③

해설 $\sim q$ 를 만족시키는 집합은 Q^c 이고 $p \Rightarrow \sim q$ 가 참이면 $P \subset Q^c$ 이므로 벤 다이어그램을 그리면 아래의 그림과 같다.



따라서, $P \cap Q = \varnothing$ 이므로 $P - Q = P$ 이다.

20 정답 ③

해설 ③ 99는 100보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

21 정답 ④

해설 ① 0와 1사이에는 자연수가 없으므로 주어진 명제는 거짓이다.

② 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ [반례] $x=1$이면 $x-3 \geq 0$가 성립하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x=\frac{1}{2}$ 이면 $1-x^2>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] $x=0$이면 $(x-2)(x+3) \neq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

22 정답 ⑤

해설 ① 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

② [반례] $x=3$이면 $(x+2)(x-1) \neq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

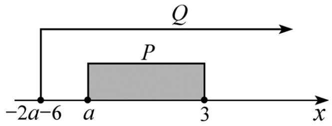
③ [반례] $x=1$이면 $x-2 \geq 0$가 성립하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ 2와 3사이에는 자연수가 없으므로 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ $x=1$이면 $4-x^2>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

23 정답 ③

해설 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.
조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 다음과 같이 수직선으로 나타낼 수 있다.



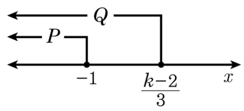
$-2a-6 \leq a$

$\therefore\ a \geq -2$

따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

24 정답 ⑤

해설



$p: x \leq -1$, $q: 3x+2 \leq k$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때 명제 $p \Rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$-1 \leq \frac{k-2}{3}$, $-3 \leq k-2$

$\therefore\ k \geq -1$

25 정답 ③

해설 ㄱ. $\sim p: x^2$은 0보다 작거나 같다.
ㄴ. $\sim p: a \geq 0$ 또는 $b<0$이다.
ㄷ. $\sim p: ab=0$이므로 $a=0$ 또는 $b=0$
따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26 정답 ③

해설 조건 $f(x)g(x) \neq 0$을 만족하는 집합은
$\{x \mid f(x) \neq 0$이고 $g(x) \neq 0\}$
따라서 주어진 조건을 만족하는 집합은 $A^C \cap B^C$이다.

27 정답 ⑤

해설 명제 '$\sim p$이면 q이고 $\sim r$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 P^C에는 속하고 집합 $Q \cap R^C$에는 속하지 않는다.
따라서 구하는 집합은

$$P^C \cap (Q \cap R^C)^C = P^C \cap (Q^C \cup R) = (Q^C \cup R) - P$$

28 정답 ①

해설 명제 ‘p이면 q 그리고 r이다.’가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P-(Q\cap R)$의 원소이므로 구하는 원소는 a이다.

29 정답 ④

해설 $P\cap Q=P$에서 $P\subset Q$이고 $Q^C\subset P^C$
$Q\cap R^C=\varnothing$에서 $Q\subset R$이고 $R^C\subset Q^C$
$\therefore\ P\subset Q\subset R,\ R^C\subset Q^C\subset P^C$
$P\subset Q$이므로 $p\to q$는 참인 명제이다.
따라서 ①은 참이다.
$Q\subset R$이므로 $q\to r$는 참인 명제이다.
따라서 ②도 참이다.
$P\subset R$이므로 $p\to r$는 참인 명제이다.
따라서 ③도 참이다.
$R^C\subset P^C$이므로 $\sim p\to\sim r$는 거짓인 명제이다.
따라서 ④는 거짓이다.
$R^C\subset Q^C$이므로 $\sim r\to\sim q$는 참인 명제이다.
따라서 ⑤는 참이다.

30 정답 ④

해설 명제 ‘$f(x)\neq 0$이고 $(g(x)=0$ 또는 $h(x)=0)$’의 부정은 ‘$f(x)=0$ 또는 $(g(x)\neq 0$이고 $h(x)\neq 0)$’이다.
따라서 구하는 진리집합은
$A\cup(B^C\cap C^C)=A\cup(B\cup C)^C$

31 정답 19

해설 주어진 명제의 부정
‘모든 실수 x에 대하여 $-x^2-8x-a+2<0$이다.’가 참이 되어야 하므로 이차방정식 $-x^2-8x-a+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-4)^2+(-a+2)<0$
$\therefore\ a>18$
따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 19이다.

32 정답 9

해설 ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제 이해하기
모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k)^2-4(4k+5)<0$
$4k^2-16k-20=4(k+1)(k-5)<0$
$-1<k<5$
어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이므로 $k-2\geq 0$에서
$k\geq 2$
이때 정수 k에 대한 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.
$P=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ Q=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$
이때 $P\cap Q=\{2,\ 3,\ 4\}$이므로 두 조건 $p,\ q$가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이다.
따라서 모든 정수 k의 값의 합은 9이다.

33 정답 10

해설 주어진 명제의 부정은
‘어떤 실수 x에 대하여 $x^2+kx+25\leq 0$이다.’
이다.
위의 명제가 참이려면 이차방정식 $x^2+kx+25=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D=k^2-4\cdot 25\geq 0,\ k^2-100\geq 0$
$(k+10)(k-10)\geq 0$
$\therefore\ k\leq -10$ 또는 $k\geq 10$
따라서 양수 k의 최솟값은 10이다.

34 **정답** 56

해설 조건 $4x^2-12x+5<0$을 만족시키는 진리집합을 P라 하면

$(2x-1)(2x-5)<0$에서 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$이므로

$P=\{1, 2\}$

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여

$4x^2-12x+5<0$이다.'가 참이 되기 위해서는

집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

$\therefore\ A=\{1\}, A=\{2\}, A=\{1, 2\}$

'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'이 참이 되기 위해서는 $A\cap B\neq\varnothing$ 이어야 한다.

(i) $A=\{1\}$일 때

집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로

집합 B의 개수는 $2^4=16$

(ii) $A=\{2\}$일 때

집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로

집합 B의 개수는 $2^4=16$

(iii) $A=\{1, 2\}$일 때

집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합은

$2^5=32$이고 1과 2를 모두 포함하지 않은

부분집합은 $2^3=8$이므로

집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합의 개수는

$32-8=24$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$16+16+24=56$

35 **정답** -32

해설 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하면

$P=\{x|x\le a\}$,

$Q=\{x|-4<x<5$ 또는 $x>8\}$,

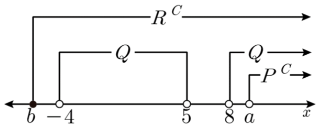
$R=\{x|x<b\}$

두 명제 $\sim p\rightarrow q,\ q\rightarrow\ \sim r$가 모두 참이 되려면

$P^C\subset Q,\ Q\subset R^C$이어야 하고

$P^C=\{x|x>a\},\ R^C=\{x|x\ge b\}$이므로

다음 그림과 같다.



그러므로 $a\ge 8,\ b\le -4$

따라서 a의 최솟값은 8, b의 최댓값은 -4이므로

구하는 곱은 $8\cdot(-4)=-32$

개념원리(2025) - 공통수학2 (명제 충분필요)182~190p

명제의 역과 대우 ~ 충분조건과 필요조건

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 보기 중 대우가 거짓인 명제인 것만 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $ab>4$이면 $a>2$, $b>2$이다.
ㄴ. $a+b>4$이면 $a>2$, $b>2$이다.
ㄷ. $a>3$ 또는 $a \le 1$이면 $a^2-3a+2 \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 $x-3 \ne 0$은 $x^2+ax-12 \ne 0$이기 위한 필요조건일 때, 실수 a의 값은?

① -7 ② -4 ③ -1
④ 1 ⑤ 4

03 명제 '$2x^2-kx-9 \ne 0$이면 $x-k \ne 0$이다.'가 참이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

04 명제 '$x^2+kx-6 \ne 0$이면 $x-2k \ne 0$이다.'가 참이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

05 세 조건 p, q, r에 대하여 다음 추론 중 옳은 것은?

① $p \to q$가 참이고 $\sim r \to q$가 참이면 $\sim p \to r$가 참이다.
② $p \to q$가 참이고 $\sim r \to \sim q$가 참이면 $\sim p \to \sim r$가 참이다.
③ $q \to \sim p$가 참이고 $\sim q \to \sim r$가 참이면 $\sim p \to r$가 참이다.
④ $p \to \sim q$가 참이고 $\sim r \to q$가 참이면 $p \to r$가 참이다.
⑤ $p \to \sim q$가 참이고 $r \to q$가 참이면 $p \to r$가 참이다.

06 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p: $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$
q: $A=B$
r: $A\cup B=B$

이때 조건 p는 조건 q이기 위한 (가) 조건이고, 조건 q는 조건 r이기 위한 (나) 조건이다. (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분　② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요　④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

07 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때 , 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c\cap P^c=Q^c$
② $P-Q=\varnothing$
③ $P\cup Q=Q$
④ $Q-P=\varnothing$
⑤ $P\cap Q=P$

08 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. $P\cap Q^C=$ $\boxed{}$, $P^C\cap Q\neq\phi$이 성립할 때, p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 이 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 것은?

① P　② Q　③ P^C
④ Q^C　⑤ ϕ

09 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim p$가 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P\cap Q=\varnothing$　② $P\subset Q$　③ $Q\subset P$
④ $Q-P=\varnothing$　⑤ $Q^C=P$

10 세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건이고 r는 q이기 위한 충분조건이다. 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?
(단, P, Q, R는 공집합이 아니다.)

① $R\subset(P\cup Q)$　② $R-Q=P$　③ $Q-P=R$
④ $R^C\subset(Q\cup P)$　⑤ $P^C\subset(Q\cap R)$

11 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^C\subset Q$　② $Q\subset P$　③ $Q-P=\varnothing$
④ $P-Q=P$　⑤ $P-Q=\varnothing$

12 두 조건 'p: $-2<x<a-2$', 'q: $x \le 4$'에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

13 두 조건 p : $|x| \le 4$, q : $a+1 \le x \le a+3$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 실수 a의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

14 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r는 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $r \Rightarrow q$ ② $q \Rightarrow \sim p$
③ $s \Rightarrow \sim q$ ④ $\sim s \Rightarrow \sim p$
⑤ $\sim r \Rightarrow p$

15 '명제 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$이면 a, b, c 중에 서로 같은 두 수가 있다.'의 대우는?

① $a=b=c$이면 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$이다.
② $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$이면 a, b, c가 모두 서로 다른 수이다.
③ a, b, c가 모두 서로 다른 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$이다.
④ a, b, c가 모두 서로 같은 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$이다.
⑤ $a \neq b \neq c$이면 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$이다.

16 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R는 각각 세 조건 p, q, r를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \to q$, $r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset R$ ③ $P^C \subset R^C$
④ $P \subset Q^C$ ⑤ $R^C \subset P$

17 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하자. 두 명제 $p \to q$와 $\sim p \to r$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 명제 $\sim q \to r$는 참이다.
ㄴ. $P \subset R$
ㄷ. $(P \cup R^C) \subset Q$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 세 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$, $\sim s \to q$가 모두 참일 때, 다음 보기 중 항상 참인 명제의 개수를 구하시오.

〈보기〉

ㄱ. $p \to r$　　　ㄴ. $q \to r$
ㄷ. $s \to \sim p$　　　ㄹ. $\sim s \to r$

19 세 명의 친구 A, B, C 가 다음과 같이 보충수업을 신청할 때, 다음 중 반드시 참인 명제인 것은?

(가) A가 보충수업을 신청하면 B도 보충수업을 신청한다.
(나) A가 보충수업을 신청하지 않으면 C가 보충수업을 신청한다.

① A가 보충수업을 신청하면 C는 보충수업을 신청하지 않는다.
② A가 보충수업을 신청하지 않으면 B도 보충수업을 신청하지 않는다.
③ B가 보충수업을 신청하면 C도 보충수업을 신청한다.
④ B가 보충수업을 신청하지 않으면 C가 보충수업을 신청한다.
⑤ C가 보충수업을 신청하면 B는 보충수업을 신청하지 않는다.

20 네 조건
p : x는 2의 배수이다.　q : x는 4의 배수이다.
r : x는 6의 배수이다.　s : x는 8의 배수이다.
에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. r는 s이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. (r이고 s)는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. (q 또는 r)는 (s 또는 q)이기 위한 필요조건이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

21 [2023년 11월 고1 13번/3점]
실수 x에 대하여 두 조건
$p : (x+1)(x+2)(x-3)=0$,
$q : x^2+kx+k-1=0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은?

① -18　② -16　③ -14
④ -12　⑤ -10

22 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같을 때 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

$p:\ x^2-10x+21=0,\ q:\ |x-4| \geq 2k$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

23 [2017년 3월 고2 이과 13번 변형]

실수 x 에 대한 두 조건

$p: 4|x-1| < 12+2x$,

$q: a < x < b$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, $b+3a$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24 집합 $S=\{x|x$는 $1 \le x \le 12$인 자연수$\}$의 부분집합 A에 대하여 명제 '$a \in A$이면 $3a \notin A$이다.' 가 참이고 집합 A의 원소의 개수가 2 이상일 때, 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은?

① 68 ② 69 ③ 70 ④ 71 ⑤ 72

25 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \longrightarrow q$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $p \longrightarrow r$ ④ $\sim q \longrightarrow p$ ⑤ $\sim r \longrightarrow p$

개념원리(2025) - 공통수학2 (명제 충분필요)182~190p

명제의 역과 대우 ~ 충분조건과 필요조건

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ④	03 3
04 1	05 ④	06 ④
07 ④	08 ⑤	09 ①
10 ①	11 ④	12 6
13 ①	14 ③	15 ③
16 ③	17 ③	18 3
19 ④	20 ⑤	21 ④
22 ②	23 ②	24 ②
25 ③		

개념원리(2025) - 공통수학2 (명제 충분필요)182~190p

명제의 역과 대우 ~ 충분조건과 필요조건

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 ㄱ. 대우: $a \le 2$ 또는 $b \le 2$이면 $ab \le 4$이다.
[반례] $a=1$이고 $b=5$이면
$a \le 2$이지만 $ab=5>4$ (거짓)
ㄴ. 대우: $a \le 2$ 또는 $b \le 2$이면 $a+b \le 4$이다.
[반례] $a=-1,\ b=6$이면
$a \le 2$이지만 $a+b=5>4$ (거짓)
ㄷ. 대우: $a^2-3a+2<0$이면 $1<a \le 3$이다.
$a^2-3a+2<0$에서 $1<a<2$이므로
$a^2-3a+2<0$이면 $1<a \le 3$이다. (참)
따라서 대우가 거짓인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

02 정답 ④

해설 $x-3 \ne 0$은 $x^2+ax-12 \ne 0$이기 위한 필요조건이므로
명제 '$x^2+ax-12 \ne 0$이면 $x-3 \ne 0$이다.'는 참이다.
따라서 이 명제의 대우
'$x=3$이면 $x^2+ax-12=0$이다.'도 참이다.
즉, $3^2+3a-12=0$
$\therefore a=1$

03 정답 3

해설 주어진 명제가 참이 되려면
그 대우 '$x-k=0$이면 $2x^2-kx-9=0$이다.'도 참이 되어야 한다.
따라서 $x=k$를 $2x^2-kx-9=0$에 대입하면
$2k^2-k \cdot k-9=0,\ k^2=9$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

04 정답 1

해설 주어진 명제가 참이 되려면
그 대우 '$x-2k=0$이면 $x^2+kx-6=0$이다.'도 참이 되어야 한다.
따라서 $x=2k$를 $x^2+kx-6=0$에 대입하면
$(2k)^2+k \cdot (2k)-6=0,\ 6k^2=6,\ k^2=1$
$\therefore k=1\ (\because k>0)$

05 정답 ④

해설 $\sim r \to q$이면 $\sim q \to r$ 이므로
$p \to \sim q$이고 $\sim q \to r$이면 $p \to r$

06 정답 ④

해설 (가) p: $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$에서 $A-B=\varnothing$,
$B-A=\varnothing$이므로 $A=B$
따라서 $p \Leftrightarrow q$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.
(나) r: $A \cup B=B$에서 $A \subset B$
따라서 $q \Rightarrow r$이므로 조건 q는 조건 r이기 위한 충분조건이다.

07 정답 ④

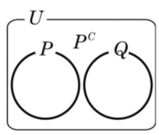
해설 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$
p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $\mathrm{Q} \not\subset \mathrm{P}$
$\therefore \mathrm{Q}-\mathrm{P} \ne \varnothing$

08 정답 ⑤

해설 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니므로
$P \subset Q$
$\therefore P \cap Q^C=\phi$

09 정답 ①

해설 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건을 진리집합으로 나타내면
$P \subset Q^C$에서
$P-Q^C=P \cap Q=\varnothing$



10 **정답** ①

해설 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
r는 q이기 위한 충분조건이므로 $R \subset Q$
따라서 $R \subset Q \subset P$이므로 항상 옳은 것은
$R \subset (P \cup Q)$

11 **정답** ④

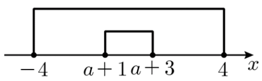
해설 $p \Rightarrow \sim q$에서 $P \subset Q^C$이므로
$P \cap Q^C = P$, 즉 $P - Q = P$

12 **정답** 6

해설 실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이다.
따라서 $a-2 \le 4$, 즉 $a \le 6$이므로 정수 a의 최댓값은 6이다.

13 **정답** ①

해설 $|x| \le 4 \quad \therefore \ -4 \le x \le 4$



p가 q이기 위한 필요조건이므로
$a+1 \ge -4$에서 $a \ge -5$
$a+3 \le 4$에서 $a \le 1$
$\therefore \ -5 \le a \le 1$
따라서 a의 최댓값과 최솟값의 차는 $1-(-5)=6$

14 **정답** ③

해설 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$
r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow r$
s는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $s \Rightarrow \sim r$
$q \Rightarrow r$의 대우는 $\sim r \Rightarrow \sim q$이고
$s \Rightarrow \sim r$, $\sim r \Rightarrow \sim q$이므로 $s \Rightarrow \sim q$

15 **정답** ③

해설 'a, b, c 중에 서로 같은 두 수가 있다.'이면
'$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$'이므로 이것의 부정은
'$a \ne b$이고 $b \ne c$이고 $c \ne a$'이다.
즉, 'a, b, c는 모두 서로 다른 수이다.'
또한, $(a-b)(b-c)(c-a)=0$의 부정은
$(a-b)(b-c)(c-a) \ne 0$이므로 주어진 명제의 대우는
'a, b, c가 모두 서로 다른 수이면
$(a-b)(b-c)(c-a) \ne 0$이다.'

16 **정답** ③

해설 $\sim p \to q$가 참이므로 $P^C \subset Q$
$r \to \sim q$가 참이므로 $R \subset Q^C$
또, $\sim p \to q$와 $r \to \sim q$의 대우인 $q \to \sim r$이 참이므로
$\sim p \to \sim r$이 참이다.
$\therefore P^C \subset R^C$
따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

17 **정답** ③

해설 두 명제 $p \to q$, $\sim p \to r$가 참이므로 $P \subset Q$, $P^C \subset R$이다.
또한, 두 명제의 대우인 $\sim q \to \sim p$, $\sim r \to p$도 참이므로 $Q^C \subset P^C$, $R^C \subset P$이다.
ㄱ. $Q^C \subset P^C$, $P^C \subset R$에서 $Q^C \subset R$이므로
명제 $\sim q \to r$는 참이다. (참)
ㄴ. $P^C \subset R$이므로 $P \not\subset R$ (거짓)
ㄷ. $R^C \subset P$에서 $P \cup R^C = P$이고, $P \subset Q$이므로
$(P \cup R^C) \subset Q$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 **정답** 3

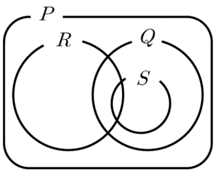
해설 세 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$, $\sim s \to q$가 모두 참이므로
각각의 대우인 $\sim q \to \sim p$, $q \to r$, $\sim q \to s$도 참이다.
또, $p \to q$, $q \to r$가 참이므로 $p \to r$가 참이다.
또한, $\sim s \to q$, $q \to r$가 참이므로 $\sim s \to r$가 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.

19 정답 ④

해설 p : A가 보충수업을 신청한다.
q : B가 보충수업을 신청한다.
r : C가 보충수업을 신청한다.
라 하면 (가)에 의해 $p \Rightarrow q$
(나)에 의해 $\sim p \Rightarrow r$
각각의 대우도 참이므로
$p \Rightarrow q$ 에서 $\sim q \Rightarrow \sim p$
$\sim p \Rightarrow r$ 에서 $\sim r \Rightarrow p$
$\sim r \Rightarrow p$ 이고 $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim r \Rightarrow q$
$\sim r \Rightarrow q$의 대우도 참이므로 $\sim q \Rightarrow r$
즉, 주어진 명제는 다음과 같다.
① $p \rightarrow \sim r$ ② $\sim p \rightarrow \sim q$ ③ $q \rightarrow r$
④ $\sim q \rightarrow r$ ⑤ $r \rightarrow \sim q$
따라서 반드시 참인 명제는 ④이다.

20 정답 ⑤

해설 x가 $4, 6, 8$의 배수이면 x는 2의 배수이므로
네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각
P, Q, R, S라 하면 $Q \subset P, R \subset P, S \subset P$
또한, x가 8의 배수이면 x는 4의 배수이므로 $S \subset Q$
즉, 네 집합 P, Q, R, S의 포함 관계를
벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. r가 s이기 위한 필요조건이라면 $S \subset R$이어야 한다.
그런데 위 그림에서 $S \not\subset R$이므로 r는 s이기 위한 필요조건이 아니다. (거짓)
ㄴ. $S \subset Q$이므로 $(R \cap S) \subset Q$
즉, (r이고 s)는 q이기 위한 충분조건이다. (참)
ㄷ. $Q \cup S = Q$이고 $Q \subset R \cup Q$이므로
$(Q \cup S) \subset (R \cup Q)$
즉, (q 또는 r)는 (s 또는 q)이기 위한 필요조건이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21 정답 ④

해설 필요조건을 이용하여 추론하기
$(x+1)(x+2)(x-3)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$이고,
$x^2+kx+k-1=(x+1)(x+k-1)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=-k+1$이므로
실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-2, -1, 3\}, Q=\{-1, -k+1\}$
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면
$Q \subset P$
$-k+1 \in Q$에서 $-k+1 \in P$이므로
$-k+1=-2$이면 $k=3$,
$-k+1=-1$이면 $k=2$,
$-k+1=3$이면 $k=-2$
따라서 모든 정수 k의 값의 곱은
$3 \cdot 2 \cdot (-2)=-12$

22 정답 ②

해설 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $x^2-10x+21=0$에서
$(x-7)(x-3)=0$
따라서 $x=3$ 또는 $x=7$이므로
$P=\{3, 7\}$
또한, 조건 q의 진리집합을 Q라 하면 조건 q에 대하여
$\sim q : |x-4| < 2k$
이때 k는 자연수이므로
$-2k < x-4 < 2k$
$-2k+4 < x < 2k+4$
즉, $Q^C=\{x \mid -2k+4 < x < 2k+4\}$이므로
p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q^C$이어야 한다.

즉, $-2k+4 < 3$이고 $7 < 2k+4$이어야 한다.
$k > \frac{1}{2}$이고 $k > \frac{3}{2}$이므로
$k > \frac{3}{2}$
따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

23 정답 ②

해설 조건 p에서

(ⅰ) $x \geq 1$일 때,

$x-1 \geq 0$이므로 $4(x-1) < 12+2x$

$2x < 16$, $x < 8$

따라서 부등식의 해는 $1 \leq x < 8$

(ⅱ) $x < 1$일 때,

$x-1 < 0$이므로 $-4(x-1) > 12+2x$

$6x > -8$, $x > -\frac{4}{3}$

따라서 부등식의 해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-\frac{4}{3} < x < 8$

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$a = -\frac{4}{3}$, $b = 8$

따라서 $b+3a = 8+3 \cdot (-\frac{4}{3}) = 4$

24 정답 ②

해설 주어진 조건에 의하여 다음이 성립한다.

$1 \in A$이면 $3 \notin A$이다.
$2 \in A$이면 $6 \notin A$이다.
$3 \in A$이면 $9 \notin A$이다.
$4 \in A$이면 $12 \notin A$이다.

즉, 위의 네 명제의 대우인 다음 명제도 모두 참이다.

$3 \in A$이면 $1 \notin A$이다.
$6 \in A$이면 $2 \notin A$이다.
$9 \in A$이면 $3 \notin A$이다.
$12 \in A$이면 $4 \notin A$이다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 합이 최대이려면 5, 7, 8, 10, 11은 모두 A의 원소이고 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 중 12, 9, 6, 1만 A의 원소이어야 한다.

따라서 집합 A중 모든 원소의 합이 최대인 집합은

$\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

이므로 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은

$1+5+6+7+8+9+10+11+12 = 69$

25 정답 ③

해설 $r \longrightarrow \sim q$ 이므로 $q \longrightarrow \sim r$

$\sim p \longrightarrow q$ 이고 $q \longrightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \longrightarrow \sim r$

$\therefore\ r \longrightarrow p$

따라서, $p \longleftrightarrow r$가 되려면 $r \longrightarrow p$ 이외에 $p \longrightarrow r$ 가 더 필요하다.

개념원리(2025) - 공통수학2 (증며,산술,코시부등식) 192~203p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

01 다음은 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$임을 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 식 또는 기호를 차례대로 나열한 것은?

> $a>0$, $b>0$일 때,
> $\boxed{\text{(가)}}-\boxed{\text{(나)}}$
> $=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$
> $\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
> 그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{\text{(다)}}\ 0$이므로
> $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

	(가)	(나)	(다)
①	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$<$
②	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$>$
③	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$<$
④	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$>$
⑤	$(\sqrt{a+b})^2$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$>$

02 $x>0$, $y>0$일 때, $\dfrac{y}{4x}+\dfrac{9x}{y}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

03 양수 x, y에 대하여 $x+\dfrac{y}{4}=3$일 때, xy의 최댓값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

04 $x\geq 1$일 때, $3x+6+\dfrac{1}{3x-2}$의 최솟값을 m, 그때의 x의 값을 n이라 하자. 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

05 실수 x, y에 대하여 $x+y=2$일 때, x^2+y^2의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$일 때, $2a+3b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 M^2+m^2의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

07 둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하자. $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값을 M이라 할 때, $\sqrt{6}M$의 값을 구하시오.

08 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c에 대하여 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'이므로
> $a^2+b^2=3m+\boxed{(가)}$, $c^2=3n+\boxed{(나)}$
> $\therefore a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수)
> 따라서 대우가 $\boxed{(다)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(다)}$이다.

위 과정에서 (가) ~ (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	0	참
②	1	2	거짓
③	2	1	참
④	2	0	참
⑤	2	1	거짓

09 다음은 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 6의 배수이면 n도 6의 배수이다.'가 참임을 그 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는 'n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.'이다.
> k가 자연수일 때 n을 $\boxed{(가)}$ 또는 $6k-2$ 또는 $6k-3$ 또는 $6k-4$ 또는 $6k-5$라 하면
> (i) $n=\boxed{(가)}$일 때,
> $n^2=6(6k^2-2k)+\boxed{(나)}$
> (ii) $n=6k-2$일 때,
> $n^2=6(6k^2-4k)+4$
> (iii) $n=6k-3$일 때,
> $n^2=6(\boxed{(다)})+3$
> (iv) $n=6k-4$일 때,
> $n^2=6(6k^2-8k+2)+4$
> (v) $n=6k-5$일 때,
> $n^2=6(6k^2-10k+4)+\boxed{(나)}$
> 즉, n^2은 6으로 나누면 나머지가 $\boxed{(나)}$ 또는 3 또는 4인 자연수가 되므로 n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(a)+g(a)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

10 다음은 자연수 m, n에 대하여 명제 'm^2+n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{(가)}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
> mn이 $\boxed{(가)}$이면 m, n이 모두 $\boxed{(가)}$이므로
> $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때 $m^2+n^2=\boxed{(다)}$이므로 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
② 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
③ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
④ 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
⑤ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)+1$

11 다음은 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

[증 명]

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{(가)}}$ 인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{2}p=q$

양변을 제곱하면 $2p^2=q^2$ 이므로

q는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 p는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로 $\boxed{\text{(가)}}$ 에 모순이다.

즉, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 양수, 3의 배수, 짝수
② 음수, 짝수, 홀수
③ 서로소, 홀수, 3의 배수
④ 서로소, 홀수, 홀수
⑤ 서로소, 짝수, 짝수

12 다음은 $\sqrt{5}$ 가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

$\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{(가)}}$ 인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{5}p=q$

양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$ 이므로

q는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 p는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로 $\boxed{\text{(가)}}$ 에 모순이다.

즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	양수	5의 배수	짝수
②	음수	짝수	홀수
③	서로소	홀수	5의 배수
④	서로소	5의 배수	짝수
⑤	서로소	5의 배수	5의 배수

13 다음은 명제 '실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$ 이고 $b=0$이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

<증명>
주어진 명제의 결론을 부정하여
$\boxed{\quad(가)\quad}$이라 가정하면 $a^2>0$이거나
$b^2>0$이므로 $a^2+b^2\boxed{(나)}0$ 이다.
그런데 이것은 $a^2+b^2\boxed{(다)}0$이라는 가정에 모순되므로 $a=0$이고 $b=0$이다.
따라서 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① $a=0$ 이고 $b=0$, $=$, $>$
② $a=0$ 이고 $b=0$, $>$, $=$
③ $a\neq0$ 또는 $b\neq0$, $=$, $=$
④ $a\neq0$ 또는 $b\neq0$, $=$, $>$
⑤ $a\neq0$ 또는 $b\neq0$, $>$, $=$

14 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$ 이 무리수임을 증명한 것이다.

$\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면
$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
로 놓을 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$p^2(n^2+1)=q^2$이다.
p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
$n^2=\boxed{(가)}$이다.
자연수 k에 대하여
(ⅰ) $q=2k$일 때
$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(나)}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(ⅱ) $q=2k+1$일 때
$\boxed{(나)}<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
따라서 $\sqrt{n^2+1}$ 은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값은?

① 30　② 31　③ 32
④ 33　⑤ 34

15 다음은 실수 x, y에 대하여 부등식 $|x|+|y| \geq |x-y|$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
> $=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x-y)^2$
> $=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$
> $=2(\boxed{(가)}) \geq 0$ ($\because$ $|xy| \geq -xy$)
> $\therefore$ $(|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$
> 그런데 $|x|+|y| \geq 0$, $|x-y| \geq 0$이므로
> $|x|+|y| \geq |x-y|$
> (단, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

① $|xy|+xy$, $xy \leq 0$
② $|xy|+xy$, $xy \geq 0$
③ $|xy|-xy$, $xy \leq 0$
④ $|xy|-xy$, $xy \geq 0$
⑤ $|xy|-xy$, $xy=0$

16 두 실수 a, b에 대하여 $ab<0$, $a-3b=8$일 때, $\dfrac{3}{a}-\dfrac{1}{b}$의 최솟값은?

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2　④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 3

17 양수 x, y에 대하여 $5x^2+125y^2=2$일 때, xy는 $x=\alpha$, $y=\beta$에서 최댓값 γ를 갖는다. 이때 $\alpha\beta+\gamma$의 값은?

① $\dfrac{1}{25}$　② $\dfrac{2}{25}$　③ $\dfrac{3}{25}$　④ $\dfrac{4}{25}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

18 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ (단, a는 실수)이 허근을 가질 때, $a+\dfrac{1}{a-4}$의 최솟값을 구하시오.

19 $x>0$, $y>0$일 때, $\left(2y+\dfrac{1}{4x}\right)\left(8x+\dfrac{12}{y}\right)$의 최솟값은?

① $26+4\sqrt{3}$　② $26+8\sqrt{3}$
③ $28+2\sqrt{3}$　④ $28+4\sqrt{3}$
⑤ $28+8\sqrt{3}$

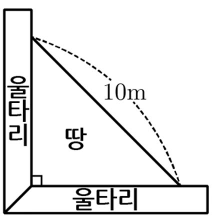
20 두 양수 a, b에 대하여 $(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값은?

① 8　② 16　③ 24　④ 32　⑤ 40

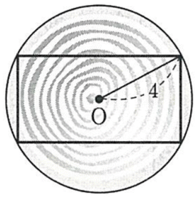
21 세 양수 a, b, c에 대하여 $\frac{2a+2b}{c}+\frac{2b+2c}{a}+\frac{2c+2a}{b}$의 최솟값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

22 다음 그림과 같이 수직인 두 울타리 사이를 길이가 $10\mathrm{m}$인 막대로 막은 삼각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 넓이의 최댓값이 $k\mathrm{m}^2$일 때, k의 값을 구하시오.



23 다음 그림과 같이 단면의 반지름의 길이가 4인 통나무를 가지고 밑면이 직사각형인 사각기둥을 만들려고 한다. 그 밑면의 넓이가 최대가 될 때, 밑면의 넓이를 구하시오.



24 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a^2+b^2=56$, $c^2+d^2=126$일 때, $ab+cd$의 최댓값 p와 $ac+bd$의 최솟값 q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $abcd \neq 0$)

25 원 $x^2+y^2=50$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, $a>0$, $b>0$)

개념원리(2025) - 공통수학2 (증며,산술,코시부등식) 192~203p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ②	03 ③
04 ④	05 ②	06 ②
07 30	08 ③	09 ③
10 ③	11 ⑤	12 ⑤
13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ②	17 ②	18 6
19 ②	20 ④	21 ②
22 25	23 32	24 7
25 50		

개념원리(2025) - 공통수학2 (증며,산술,코시부등식) 192~203p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $a>0,\ b>0$일 때,

$\boxed{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\boxed{(\sqrt{a+b})^2}$

$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{>}\ 0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

02 정답 ②

해설 $x>0,\ y>0$에서 $\dfrac{y}{4x}>0,\ \dfrac{9x}{y}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{y}{4x}+\dfrac{9x}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{y}{4x}\cdot\dfrac{9x}{y}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{y}{4x}=\dfrac{9x}{y},\ \text{즉 } y=6x\text{일 때 성립한다.}\right)$

$=2\sqrt{\dfrac{9}{4}}=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$

따라서 $\dfrac{y}{4x}+\dfrac{9x}{y}$의 최솟값은 3이다.

03 정답 ③

해설 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x+\dfrac{y}{4}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{y}{4}}$

(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{4}$일 때 성립한다.)

$3\geq 2\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{xy}\ \left(\because\ x+\dfrac{y}{4}=3\right)$

$3\geq\sqrt{xy}$

$\therefore\ xy\leq 9$

따라서 xy의 최댓값은 9이다.

04 정답 ④

해설 $x\geq 1$에서 $3x-2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+6+\dfrac{1}{3x-2}=3x-2+\dfrac{1}{3x-2}+8$

$\geq 2\sqrt{(3x-2)\cdot\dfrac{1}{3x-2}}+8$

$=10$

$\left(\text{단, 등호는 } 3x-2=\dfrac{1}{3x-2},\ \text{즉 } x=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x\geq 1$일 때, $3x+6+\dfrac{1}{3x-2}$은 $x=1$에서

최솟값 10을 가지므로 $m=10,\ n=1$

$\therefore\ m+n=10+1=11$

05 정답 ②

해설 $x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

그런데 $x+y=2$이므로

$2(x^2+y^2)\geq 4$

$\therefore\ x^2+y^2\geq 2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 2

06 정답 ②

해설 코시−슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(2a+3b)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$13\geq(2a+3b)^2\ (\because\ a^2+b^2=1)$

$\therefore\ -\sqrt{13}\leq 2a+3b\leq\sqrt{13}$

따라서 $2a+3b$의 최댓값은 $\sqrt{13}$,

최솟값은 $-\sqrt{13}$ 이다.

$\therefore\ M^2+m^2=(\sqrt{13})^2+(-\sqrt{13})^2$

$=13+13=26$

07 정답 30

해설 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$2x+2y=20 \qquad \therefore x+y=10$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2\}\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}$

$\geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$15(x+y) \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

그런데 $x+y=10$이므로

$150 \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$\therefore -5\sqrt{6} \leq \sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{10}} \text{ 일 때 성립}\right)$

이때 $\sqrt{5x}>0$, $\sqrt{10y}>0$이므로

$0<\sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

따라서 $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$ 의 최댓값은 $5\sqrt{6}$ 이므로

$M=5\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{6}M=\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{6}=30$

08 정답 ③

해설 '세 자연수 a, b, c에 대하여 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'의 참, 거짓을 증명하기 위해

$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$이면

$a^2=3(3p^2\pm2p)+1$, $b^2=3(3q^2\pm2q)+1$이므로

$a^2+b^2=3m+\boxed{2}$ (m은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

또, $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$이므로

$c^2=3n+\boxed{1}$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$

따라서 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

09 정답 ③

해설 주어진 명제의 대우는

'n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.'이다.

k가 자연수일 때 n을 $\boxed{6k-1}$ 또는 $6k-2$ 또는 $6k-3$ 또는 $6k-4$ 또는 $6k-5$라 하면

(i) $n=\boxed{6k-1}$일 때, $n^2=6(6k^2-2k)+\boxed{1}$

(ii) $n=6k-2$일 때, $n^2=6(6k^2-4k)+4$

(iii) $n=6k-3$일 때, $n^2=6(\boxed{6k^2-6k+1})+3$

(iv) $n=6k-4$일 때, $n^2=6(6k^2-8k+2)+4$

(v) $n=6k-5$일 때,

$n^2=6(6k^2-10k+4)+\boxed{1}$

즉, n^2은 6으로 나누면 나머지가 $\boxed{1}$ 또는 3 또는 4인 자연수가 되므로 n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$f(k)=6k-1$, $g(k)=6k^2-6k+1$, $a=1$이므로

$f(a)+g(a)=f(1)+g(1)=5+1=6$

10 정답 ③

해설 주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$이므로

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $m^2+n^2=\boxed{2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)}$이므로

m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

11 정답 ⑤

해설 $\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소 인 정수이다.,)

$\therefore \sqrt{2}p=q \quad \therefore 2p^2=q^2$

q^2 은 2의 배수이므로 q도 2의 배수

$q=2k$ (k는 정수)라 하면 $2p^2=4k^2$

$\therefore p^2=2k^2$

따라서 p도 2의 배수

이는 p, q가 서로소인 조건에 모순

따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니라.

(가)서로소 (나)짝수 (다)짝수

12 정답 ⑤

해설 $\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{서로소}}$인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{5}p=q$

양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$이고

q^2 은 5의 배수이므로 q는 $\boxed{5\text{의 배수}}$이다.

$q=5k$ (k는 정수)라 하면

$5p^2=25k^2$

$\therefore p^2=5k^2$

따라서 p도 $\boxed{5\text{의 배수}}$이므로

이는 p, q가 $\boxed{\text{서로소}}$인 조건에 모순이다.

즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.

(가) 서로소 (나) 5의 배수 (다) 5의 배수

13 정답 ⑤

해설 주어진 명제의 결론을 부정하여

$\boxed{a\neq 0 \text{ 또는 } b\neq 0}$라 가정하면 $a^2>0$이거나

$b^2>0$이므로 $a^2+b^2\boxed{>}0$ 이다.

그런데 이것은 $a^2+b^2\boxed{=}0$이라는 가정에

모순되므로 $a=0$이고 $b=0$이다.

따라서 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면

$a=0$이고 $b=0$이다.

14 정답 ②

해설 $\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+1)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로

$p=1$이 되어야 한다.

따라서 $n^2=\boxed{q^2-1}$이다.

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-1=4k^2-1$이고

$(2k-1)^2<4k^2-1<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

그러나 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-1=4k^2+4k$이고

$(2k)^2<4k^2+4k<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

그러나 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$은 무리수이다.

$f(q)=q^2-1$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(4)+g(2)=16-1+16=31$

15 정답 ①

해설 $(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$

$=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x-y)^2$

$=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$

$=2(\boxed{|xy|+xy})\geq 0$ ($\because$ $|xy|\geq -xy$)

$\therefore (|x|+|y|)^2\geq |x-y|^2$

그런데 $|x|+|y|\geq 0$, $|x-y|\geq 0$이므로

$|x|+|y|\geq |x-y|$

(단, 등호는 $|xy|=-xy$, 즉 $\boxed{xy\leq 0}$일 때 성립)

16 정답 ②

해설 $a-3b=8$이므로

$$\frac{3}{a}-\frac{1}{b}=\frac{3b-a}{ab}=-\frac{8}{ab}$$

$ab<0$이므로

$a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$

이때 $a-3b=8$이므로

$a>0,\ b<0$

$a>0,\ -3b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+(-3b)\geq 2\sqrt{a\cdot(-3b)}$$

$$8\geq 2\sqrt{-3ab}$$

$$-ab\leq\frac{16}{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=-3b, \text{ 즉 } a=4,\ b=-\frac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서

$$\frac{3}{a}-\frac{1}{b}=\frac{8}{-ab}$$

$$\geq\frac{8}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{2}$$

이므로 $\frac{3}{a}-\frac{1}{b}$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

17 정답 ②

해설 $x>0,\ y>0$에서 $x^2>0,\ y^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x^2+125y^2\geq 2\sqrt{5x^2\cdot 125y^2}=50xy$$

그런데 $5x^2+125y^2=2$이므로

$$2\geq 50xy$$

$$\therefore xy\leq\frac{1}{25}$$

이때 등호는 $5x^2=125y^2$, 즉 $x=5y$일 때 성립하므로

$xy=\frac{1}{25}$에서 $5y\cdot y=\frac{1}{25},\ y^2=\frac{1}{125}$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{\sqrt{5}}{25}$$

따라서 xy는 $x=\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{\sqrt{5}}{25}$일 때

최댓값 $\frac{1}{25}$을 가지므로

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \beta=\frac{\sqrt{5}}{25},\ \gamma=\frac{1}{25}$$

$$\therefore \alpha\beta+\gamma=\frac{2}{25}$$

18 정답 6

해설 주어진 이차방정식이 허근을 가지므로

$D=16-4a<0$에서 $a-4>0$

$$a-4+\frac{1}{a-4}\geq 2\sqrt{(a-4)\cdot\frac{1}{a-4}}$$

$$=2$$

$$a+\frac{1}{a-4}=a-4+\frac{1}{a-4}+4$$

$$\geq 2+4=6$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-4=\frac{1}{a-4}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $a=5$일 때 최솟값 6을 갖는다.

19 정답 ②

해설 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2y+\frac{1}{4x}\right)\left(8x+\frac{12}{y}\right)=16xy+2+24+\frac{3}{xy}$$

$$\geq 26+2\sqrt{16xy\cdot\frac{3}{xy}}$$

$$=26+8\sqrt{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 16xy=\frac{3}{xy}, \text{ 즉 } xy=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(2y+\frac{1}{4x}\right)\left(8x+\frac{12}{y}\right)$의 최솟값은

$26+8\sqrt{3}$

20 정답 ④

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)=\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}+20$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}+20$$

$$=32$$

(단, 등호는 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$, 즉 $3a=2b$일 때 성립한다.)

따라서 $(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값은 32이다.

21 정답 ②

해설 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2a+2b}{c}+\frac{2b+2c}{a}+\frac{2c+2a}{b}$$
$$=\frac{2a}{c}+\frac{2b}{c}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{b}$$
$$=\left(\frac{2a}{c}+\frac{2c}{a}\right)+\left(\frac{2b}{c}+\frac{2c}{b}\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{2a}{c}\cdot\frac{2c}{a}}+2\sqrt{\frac{2b}{c}\cdot\frac{2c}{b}}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}$$
$$=4+4+4$$
$$=12$$

(단, 등호는
$\frac{2a}{c}=\frac{2c}{a}$, $\frac{2b}{c}=\frac{2c}{b}$, $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,
즉 $a=b=c$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{2a+2b}{c}+\frac{2b+2c}{a}+\frac{2c+2a}{b}$ 의 최솟값은 12이다.

22 정답 25

해설 직각을 낀 두 울타리의 길이를 각각 $x\,\mathrm{m}$, $y\,\mathrm{m}$라 하면
$x^2+y^2=10^2=100$
$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$
그런데 $x^2+y^2=100$이므로
$100\geq 2xy$
$\therefore xy\leq 50$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)
따라서 땅의 넓이는 $\frac{1}{2}xy$이므로
$\frac{1}{2}xy\leq\frac{1}{2}\cdot 50=25$
따라서 땅의 넓이의 최댓값은 $25\,\mathrm{m}^2$이다.
$\therefore k=25$

23 정답 32

해설 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 넓이 S는
$S=xy$
또, 통나무의 단면의 지름의 길이가 8이므로
$x^2+y^2=8^2=64$
이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$
$64\geq 2xy$
$\therefore xy\leq 32$
따라서 S는 $x^2=y^2$일 때, 즉 $x=y=4\sqrt{2}$일 때, 최댓값 32를 갖는다.

24 정답 7

해설 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}$
$\quad=2|ab|$ (단, 등호는 $|a|=|b|$일 때 성립)
$c^2+d^2\geq 2\sqrt{c^2d^2}$
$\quad=2|cd|$ (단, 등호는 $|c|=|d|$일 때 성립)
$a^2+b^2=56$, $c^2+d^2=126$이므로
$56\geq 2|ab|$, $126\geq 2|cd|$
$\therefore -28\leq ab\leq 28$, $-63\leq cd\leq 63$
(단, 등호는 $|a|=|b|=2\sqrt{7}$, $|c|=|d|=3\sqrt{7}$ 일 때 성립)
$-28+(-63)\leq ab+cd\leq 28+63$
$\therefore -91\leq ab+cd\leq 91$
즉, $ab+cd$의 최댓값은 91
a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$이므로
$56\cdot 126\geq(ac+bd)^2$
$\therefore -84\leq ac+bd\leq 84$
(단, 등호는 $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$일 때 성립)
즉, $ac+bd$의 최솟값은 -84
$p=91$, $q=-84$이므로 $p+q=7$

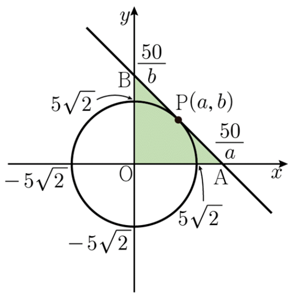
25 **정답** 50

해설 원 $x^2+y^2=50$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=50$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점은 각각

$\mathrm{A}\left(\frac{50}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{50}{b}\right)$



이때 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{a}\cdot\frac{50}{b}=\frac{50^2}{2ab}$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=50$위의 점이므로

$a^2+b^2=50$

$a>0,\ b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

$\therefore\ 50\geq 2ab$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\frac{1}{2ab}\geq\frac{1}{50}$

$\therefore\ \frac{50^2}{2ab}\geq 50$

따라서 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최솟값은 50이다.