

# 개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

이름

**01** 두 함수  $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ ,  $g(x) = |2x + 1|$ 에 대하여  $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하시오.

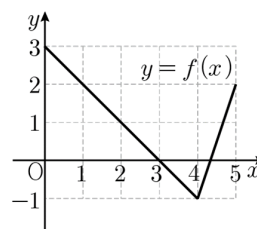
**02** 두 함수  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여  $(f \circ g)(x)$ 는?

- ①  $(f \circ g)(x) = 2x + 5$       ②  $(f \circ g)(x) = 2x + 2$   
 ③  $(f \circ g)(x) = x$       ④  $(f \circ g)(x) = -x + 1$   
 ⑤  $(f \circ g)(x) = 3x - 4$

**03** 세 함수  $f$ ,  $g$ ,  $h$ 에 대하여  $f(x) = x - 1$ ,  $(g \circ h)(x) = 4x + 2$ 일 때,  $(g \circ (h \circ f))(1)$ 의 값은?

- ① -2      ② -1  
 ③ 0      ④ 1  
 ⑤ 2

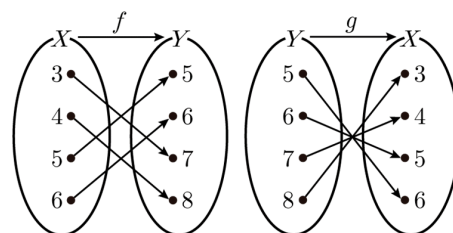
**04**  $0 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하시오.



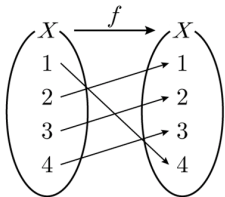
**05** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x \text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때,  $(f \circ f)(3)$ 의 값은?

- ① -1      ② 0      ③ 1  
 ④ 2      ⑤ 3

**06** 두 함수  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$ 가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ g)(6)$ 의 값을 구하시오.

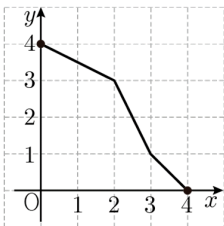


07 [2023년 3월 고2 23번/3점]  
그림은 함수  $f: X \rightarrow X$ 를 나타낸 것이다.

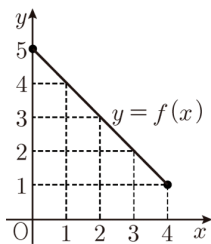


$(f \circ f)(1) + f^{-1}(1)$ 의 값을 구하시오.

08  $0 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ f)(k) = 1$ 을 만족시키는 상수  $k$ 의 값을 구하시오.



09  $0 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(f \circ f)(a) = 1$ 를 만족시키는 상수  $a$ 의 값을 구하시오.



10 [2023년 11월 고1 6번/3점]  
실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x)$ 가 있다. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $(g \circ g)(x) = 3x - 1$ 일 때,  $((f \circ g) \circ g)(a) = a$ 를 만족시키는 실수  $a$ 의 값의 합은?

- ①  $\frac{1}{5}$                       ②  $\frac{3}{5}$                       ③ 1  
④  $\frac{7}{5}$                       ⑤  $\frac{9}{5}$

11 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 일대일대응인 두 함수  $f, g$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(0) + g(0)$ 의 값을 구하시오.

- (가)  $f(1) = g(1) = -1$   
(나)  $(g \circ f)(1) = 1$   
(다)  $(f \circ g)(1) = 0$

12 두 함수  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = x^2 - 3$ 에 대하여  $(g \circ f)(x) = -3$ 을 만족시키는  $x$ 의 값을 구하시오.

- 13** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x \text{는 유리수}) \\ x^2 & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$$
일 때,  $(f \circ f)(\sqrt{2})$ 의 값을 구하시오.

- 14** 두 함수  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = x^2 + x - 1$ 에 대하여  $(f \circ g)(a) = 2$ 일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하시오.

- 15** 두 함수  $f(x) = ax + 3$ ,  $g(x) = bx - 3$ 에 대하여  $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때,  $ab$ 의 최댓값을 구하시오.  
 (단,  $a, b$ 는 양수)

- 16** 두 함수  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + 5$ 에 대하여  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족시키는  $x$ 의 값은?

- ①  $-2$  또는  $-1$                       ②  $0$  또는  $-2$   
 ③  $0$  또는  $2$                           ④  $1$  또는  $2$   
 ⑤  $2$  또는  $3$

- 17** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 가  
 $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x - 2$ 을 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 값은?

- ①  $-2$                                       ②  $-1$   
 ③  $0$                                         ④  $1$   
 ⑤  $2$

- 18** 두 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ,  $g(x) = -x^2 - 2$ 가 있다.  
 모든 실수  $x$ 에 대하여 함수  $h(x)$ 가  
 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 를 만족시킬 때,  $h(3)$ 의 값은?

- ①  $-30$                       ②  $-20$                       ③  $-10$   
 ④  $10$                         ⑤  $20$

19 함수  $f(x) = -x + 2$ 에 대하여  $f^n(x) + f^{n+1}(x)$ 를 간단히 하면?

(단,  $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ ,  $n$ 은 자연수이다.)

- ① 2                      ②  $x$                       ③  $-x + 2$   
④  $nx$                       ⑤  $-nx + 2n$

20 정의역이 자연수 전체의 집합인

$$\text{함수 } f(n) = \begin{cases} 2n+1 & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{n}{2}-1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \text{가}$$

$(f \circ f)(k) = 11$ 을 만족시킬 때, 모든 자연수  $k$ 의 값의 합을 구하시오.

21 임의의 실수  $x, y$ 에 대하여 함수  $f$ 가  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(2) = 4$ 를 만족시킬 때,  $(f \circ f \circ f)(1)$ 의 값을 구하시오.

22 일차함수  $f(x) = ax + b$  ( $a, b$ 는 실수)가 다음 두 조건을 만족시킨다.

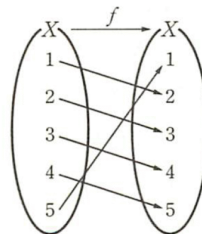
- Ⅰ.  $f(-1) = -1$   
Ⅱ.  $f^3(3) - f^3(2) = -1$

이 때,  $f(4)$ 의 값을 구하시오.

(단,  $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ )

23 두 함수  $f(x) = 3x - 4$ ,  $g(x) = ax + b$ 에 대하여  $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 함수  $y = g(x)$ 의 그래프가  $a$ 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를  $(p, q)$ 라 하자. 이때  $pq$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b, p, q$ 는 상수이다.)

24 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 가 아래 그림과 같고,  $g : X \rightarrow X$ 가  $g(1) = 3$ ,  $f \circ g = g \circ f$ 를 만족할 때,  $g(5)$ 의 값은?



- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

- 25 다음 보기의 함수  $f(x)$  중  $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$  가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{㉠}} \quad & f(x) = x + 1 & \textcircled{\text{㉡}} \quad & f(x) = -x \\ \textcircled{\text{㉢}} \quad & f(x) = -x + 1 \end{aligned}$$

- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉢  
④ ㉠, ㉢                  ⑤ ㉡, ㉢

- 26 두 함수  $f, g$ 가  $f(x) = x - 3, g(x) = 3x - 5$ 일 때,  $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수  $h(x)$ 에 대하여  $h(7)$ 의 값을 구하시오.

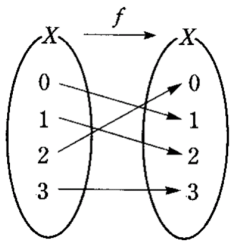
- 27 두 함수  $f(x) = 3x, g(x) = 2x - 1$ 에 대하여  $h \circ g \circ f = f$ 를 만족시키는 일차함수  $h(x)$ 가 있다.  $h(k) = \frac{5}{2}$ 일 때, 상수  $k$ 의 값을 구하시오.

- 28 세 함수  $f, g, h$ 에 대하여  $(g \circ h)(x) = 5x - 3, (g \circ (h \circ f))(x) = x^2 + 2$ 일 때,  $f(5)$ 의 값을 구하시오.

- 29 집합  $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여  $f: A \rightarrow A$ 를  $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 과 같이 정의한다. 이때  $f\left(\frac{1}{2}\right) + f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. (단,  $f^2(x) = (f \circ f)(x)$ )

- 30 함수  $f(x) = x + 1$ 에 대하여  $f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f^2, \dots$   
 $f^{n+1} = f \circ f^n$ 로 정의할 때,  $f^{10}(a) = 30$ 을 만족시키는  $a$ 의 값을 구하시오. (단,  $n$ 은 자연수)

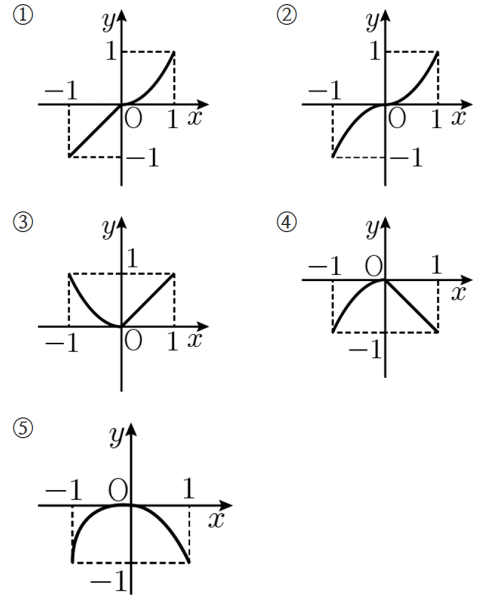
- 31** 집합  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 함수  $f$ 를 다음 그림과 같이 정의하고  
 $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f^2, \dots, f^{n+1} = f \circ f^n$   
 $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 나타내기로 한다.  
 이때  $f^{99}(0) + f^{100}(1)$ 의 값을 구하시오.



- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
 ④ 4                      ⑤ 5

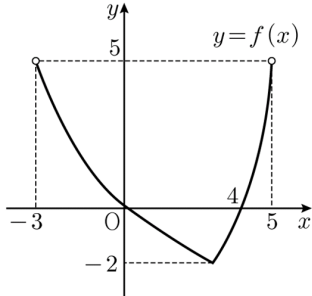
- 32**  $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ -x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$
  
 일 때, 다음 중 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- 33** 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 가  
 일대일대응이고,  $f^{2024}(-1) + f^{2025}(1) = 1$ 을  
 만족시킨다.  $f^{2020}(0) + f^{2021}(1)$ 의 값을 구하시오.  
 (단,  $f^1 = f$ , 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $f^{n+1} = f \circ f^n$ )

- 34**  $-3 < x < 5$ 에서 정의된 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $-3 < x < 4$ 에서 부등식  $f(f(x)) > f(x)$ 의 해는?



- ①  $-3 < x < 0$     ②  $-3 < x < 4$     ③  $0 < x < 4$   
 ④  $0 < x < 5$     ⑤  $4 < x < 5$

- 35** 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

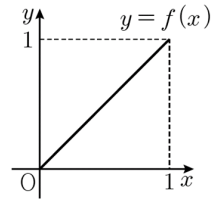
(가)  $f(x), g(x)$ 는 모두 주기가 2인 함수이다.

(나) 임의의 실수  $x$ 에 대하여

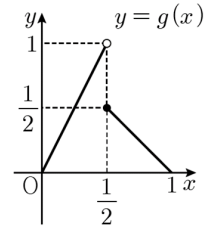
$$f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$$

두 함수  $f(x), g(x)$ 의 그래프의 일부가 그림과 같을 때,

$f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)$ 의 값을 구하시오.



[그림 1]



[그림 2]

개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습
--------

이름

빠른정답

01 21	02 ②	03 ⑤
04 2	05 ③	06 5
07 5	08 2	09 1
10 ①	11 1	12 -2
13 -2	14 1	15 1
16 ③	17 ⑤	18 ②
19 ①	20 62	21 8
22 -6	23 4	24 ②
25 ⑤	26 4	27 4
28 6	29 10	30 20
31 ②	32 ⑤	33 -2
34 ③	35 $\frac{1}{2}$	





# 개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

이름

### 01 정답 21

**해설**  $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = 10$ ,  
 $g(10) = |2 \cdot 10 + 1| = 21$ 이므로  
 $(g \circ f)(2) = g(f(2))$   
 $= g(10) = 21$

### 02 정답 ②

**해설**  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$   
 $= f(2x - 1)$   
 $= (2x - 1) + 3$   
 $= 2x + 2$

### 03 정답 ⑤

**해설** 합성함수는 결합법칙이 성립하므로  
 $(g \circ (h \circ f))(1) = ((g \circ h) \circ f)(1)$   
 $= (g \circ h)(f(1))$   
 $= (g \circ h)(0)$   
 $= 4 \cdot 0 + 2 = 2$

### 04 정답 2

**해설**  $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 2$

### 05 정답 ③

**해설**  $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(-3 + 5)$   
 $= f(2) = 2 \cdot 2 - 3$   
 $= 1$

### 06 정답 5

**해설**  $(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(5) = 5$

### 07 정답 5

**해설** 합성함수와 역함수의 값을 계산한다.  
 $f(1) = 4$ ,  $f(4) = 3$ 이므로  
 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 3$   
또,  $f(2) = 1$ 이므로  
 $f^{-1}(1) = 2$   
 $\therefore (f \circ f)(1) + f^{-1}(1) = 3 + 2 = 5$

### 08 정답 2

**해설**  $f(k) = m$ 이라 하면  
 $(f \circ f)(k) = 1$ 에서  
 $f(f(k)) = f(m) = 1$   
이때 주어진 그래프에서  $f(3) = 1$ 이므로  
 $m = 3$   
 $\therefore f(k) = 3$   
따라서 주어진 그래프에서  $f(2) = 3$ 이므로  
 $k = 2$

### 09 정답 1

**해설**  $f(a) = b$ 라 하면  $(f \circ f)(a) = 1$ 에서  
 $f(f(a)) = f(b) = 1$   
이때 주어진 그래프에서  $f(4) = 1$ 이므로  $b = 4$   
 $\therefore f(a) = 4$   
따라서 주어진 그래프에서  $f(1) = 4$ 이므로  
 $a = 1$

### 10 정답 ①

**해설** 합성함수 이해하기  
 $((f \circ g) \circ g)(a) = (f \circ (g \circ g))(a)$   
 $= f((g \circ g)(a))$   
 $= f(3a - 1)$   
 $= 2(3a - 1) + 1$   
 $= 6a - 1$   
 $6a - 1 = a$ 이므로  
 $a = \frac{1}{5}$

## 11 정답 1

**해설** 조건 (가), (나)에서  
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 1$   
 조건 (가), (다)에서  
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-1) = 0$   
 이때 조건 (가)에서  $f(1) = -1, g(1) = -1$ 이고  
 두 함수  $f, g$ 는 일대일대응이므로  
 $f(0) = 1, g(0) = 0$   
 $\therefore f(0) + g(0) = 1$

## 12 정답 -2

**해설**  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$   
 $= g(x+2)$   
 $= (x+2)^2 - 3$   
 $= x^2 + 4x + 1$   
 $(g \circ f)(x) = -3$ 이므로  $x^2 + 4x + 1 = -3$   
 $x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$   
 $\therefore x = -2$

## 13 정답 -2

**해설**  $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로  
 $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$   
 또, 2는 유리수이므로  
 $f(2) = -2$   
 $\therefore (f \circ f)(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) = f(2) = -2$

## 14 정답 1

**해설**  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$   
 $= f(a^2 + a - 1)$   
 $= 3(a^2 + a - 1) - 1$   
 $= 3a^2 + 3a - 4$   
 $(f \circ g)(a) = 2$ 이므로  $3a^2 + 3a - 4 = 2$ 에서  
 $a^2 + a - 2 = 0$   
 $(a+2)(a-1) = 0$   
 $a = -2$  또는  $a = 1$   
 $\therefore a = 1$  ( $\because a > 0$ )

## 15 정답 1

**해설**  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$   
 $= f(bx - 3)$   
 $= a(bx - 3) + 3$   
 $= abx - 3a + 3$   
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$   
 $= g(ax + 3)$   
 $= b(ax + 3) - 3$   
 $= abx + 3b - 3$   
 $f \circ g = g \circ f$ 이므로  
 $abx - 3a + 3 = abx + 3b - 3, 3a + 3b = 6$   
 $\therefore a + b = 2$   
 이때  $a, b$ 는 양수이므로  
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여  
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}, 2 \geq 2\sqrt{ab}$   
 $\therefore \sqrt{ab} \leq 1$   
 양변을 제곱하면  
 $ab \leq 1$   
 따라서  $ab$ 의 최댓값은 1이다.

## 16 정답 ③

**해설**  $f(x) = 2x - 1, g(x) = x^2 - 3x + 5$ 에 대하여  
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3x + 5)$   
 $= 2(x^2 - 3x + 5) - 1$   
 $= 2x^2 - 6x + 9 \quad \dots \textcircled{㉠}$   
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1)$   
 $= (2x - 1)^2 - 3(2x - 1) + 5$   
 $= 4x^2 - 10x + 9 \quad \dots \textcircled{㉡}$   
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 이므로  
 $2x^2 - 6x + 9 = 4x^2 - 10x + 9$   
 $x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$   
 $\therefore x = 0$  또는  $x = 2$

## 17 정답 ⑤

**해설**  $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x - 2$ 에서  $\frac{x+2}{3} = t$ 로 놓으면  
 $x = 3t - 2$ 이므로  $f(t) = (3t - 2) - 2 = 3t - 4$   
 따라서  $f(x) = 3x - 4$ 이므로  
 $f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$   
 (다른 풀이)  
 $\frac{x+2}{3} = 2$ 일 때,  $x = 4$ 이므로  
 $f(2) = 4 - 2 = 2$

## 18 정답 ②

**해설**  $h(3) = k$ 라 하면  $f(h(3)) = g(3)$ 이므로  
 $f(k) = -11$   
 $f(k) = \frac{1}{2}k - 1$ 이므로  
 $\frac{1}{2}k - 1 = -11 \quad \therefore k = -20$   
 $\therefore h(3) = -20$

## 19 정답 ①

**해설**  $f^2(x) = f(f(x)) = f(-x+2)$   
 $= -(-x+2) + 2 = x$   
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = -x+2$   
 $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(f(x)) = x$   
 $\vdots$   
 $\therefore f^n(x) = \begin{cases} x & (n \text{은 짝수}) \\ -x+2 & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$   
 $\therefore f^n(x) + f^{n+1}(x) = x + (-x+2) = 2$

## 20 정답 62

**해설**  $f(f(k)) = 11$ 에서  $f(k) = a$ 로 놓으면  $f(a) = 11$   
 (i)  $a$ 가 홀수일 때  
 $f(a) = 2a + 1 = 11$   
 $\therefore a = 5$   
 (ii)  $a$ 가 짝수일 때  
 $f(a) = \frac{a}{2} - 1 = 11$   
 $\therefore a = 24$   
 (i), (ii)에 의하여  $f(k) = 5$  또는  $f(k) = 24$   
 (iii)  $f(k) = 5$ 인 경우  
 $k$ 가 홀수이면  $2k + 1 = 5$ 이므로  
 $k = 2$   
 이때  $k$ 는 홀수이어야 하므로 조건에 모순이다.  
 또,  $k$ 가 짝수이면  $\frac{k}{2} - 1 = 5$ 이므로  
 $k = 12$   
 (iv)  $f(k) = 24$ 인 경우  
 $k$ 가 홀수이면  $2k + 1 = 24$ 이므로  
 $k = \frac{23}{2}$   
 이때  $k$ 는 자연수이어야 하므로 조건에 모순이다.  
 또,  $k$ 가 짝수이면  $\frac{k}{2} - 1 = 24$ 이므로  
 $k = 50$   
 (iii), (iv)에 의하여  $(f \circ f)(k) = 11$ 을 만족시키는  
 $k$ 의 값은 12, 50이므로 그 합은  
 $12 + 50 = 62$

## 21 정답 8

**해설**  $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \dots \textcircled{1}$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x = y = 1$ 을 대입하면  
 $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$   
 $f(2) = 4$ 이므로  $f(1) = 2$   
 또,  $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x = y = 2$ 를 대입하면  
 $f(4) = f(2) + f(2) = 8$  ( $\because f(2) = 4$ )  
 $\therefore (f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1)))$   
 $= f(f(2)) = f(4)$   
 $= 8$

## 22 정답 -6

**해설**  $f^3(x) = a(a(ax+b)+b)+b = a^3x + a^2b + ab + b$   
 이므로  $f^3(3) - f^3(2) = a^3 = -1$   
 $\therefore a = -1$   
 $f(-1) = -a + b = -1$ 이므로  $b = -2$   
 $\therefore f(4) = (-1) \times 4 - 2 = -6$

## 23 정답 4

**해설**  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax+b) = 3ax+3b-4$   
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = 3ax-4a+b$   
 이때  $f \circ g = g \circ f$ 이므로  $3b-4 = -4a+b$   
 $\therefore b = -2a+2$   
 따라서  $g(x) = ax-2a+2 = a(x-2)+2$ 이므로  
 $y = g(x)$ 의 그래프는  $a$ 의 값에 관계없이 항상  
 점  $(2, 2)$ 를 지난다.  
 $\therefore p = 2, q = 2$ 이므로  $pq = 4$

## 24 정답 ②

**해설** 주어진 그림에서  
 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=5, f(5)=1$   
 $f \circ g = g \circ f$ 에서  $f(g(x)) = g(f(x)) \dots \dots \textcircled{1}$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=1$ 을 대입하면  
 $f(g(1)) = g(f(1)), f(3)=g(2) \therefore g(2)=4$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=2$ 를 대입하면  
 $f(g(2)) = g(f(2)), f(4)=g(3) \therefore g(3)=5$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=3$ 을 대입하면  
 $f(g(3)) = g(f(3)), f(5)=g(4) \therefore g(4)=1$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=4$ 를 대입하면  
 $f(g(4)) = g(f(4)), f(1)=g(5) \therefore g(5)=2$

## 25 정답 ⑤

**해설**  $\textcircled{1}. (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$   
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$   
 $= (x+2)+1 = x+3$   
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$   
 $\textcircled{2}. (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$   
 $= f(-(-x)) = f(x)$   
 $\textcircled{3}. (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$   
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$   
 따라서  $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은  $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 이다.

## 26 정답 4

**해설**  $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x-3))$   
 $= h(3x-14)$   
 $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 이므로  
 $h(3x-14) = f(x) \dots \dots \textcircled{1}$   
 $3x-14 = 7$ 이라 하면  $x = 7$   
 따라서  $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x = 7$ 을 대입하면  $h(7) = f(7) = 4$

## 27 정답 4

**해설**  $h(x) = ax+b$  ( $a, b$ 는 상수,  $a \neq 0$ )이라 하면  
 $h \circ g \circ f = h(g(f(x)))$   
 $= h(g(3x))$   
 $= h(6x-1)$   
 $= a(6x-1)+b$   
 $= 6ax-a+b$   
 이때  $h \circ g \circ f = f$ 이므로  
 $6ax-a+b = 3x$   
 즉,  $6a = 3, -a+b = 0$ 이므로  
 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$   
 $\therefore h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$   
 따라서  $h(k) = \frac{5}{2}$ 에서  
 $\frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$   
 $\therefore k = 4$

## 28 정답 6

**해설**  $(g \circ (h \circ f))(x) = (g \circ h \circ f)(x)$   
 $= (g \circ h)(f(x))$   
 $= 5f(x)-3$   
 즉,  $5f(x)-3 = x^2+20$ 이므로  
 $5f(x) = x^2+5$   
 $\therefore f(x) = \frac{1}{5}x^2+1$   
 $\therefore f(5) = \frac{25}{5}+1 = 6$

## 29 정답 10

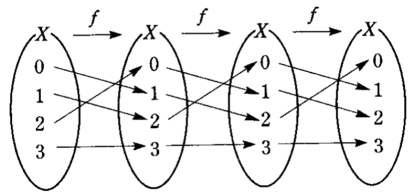
**해설**  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$   
 $f^2(\frac{1}{2}) = f(f(\frac{1}{2}))$   
 $= f(\frac{3}{2})$   
 $= \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$   
 $f^3(\frac{1}{2}) = f(f^2(\frac{1}{2})) = f(\frac{1}{2})$   
 $= \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$   
 $\vdots$   
 $\therefore f(\frac{1}{2}) + f^2(\frac{1}{2}) + \dots + f^{10}(\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{2}$   
 $= 10$

### 30 정답 20

**해설**  $f^1(x) = x + 1$   
 $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$   
 $= f(x + 1)$   
 $= (x + 1) + 1 = x + 2$   
 $f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$   
 $= f(x + 2)$   
 $= (x + 2) + 1 = x + 3$   
 $\vdots$   
 $\therefore f^n(x) = x + n$   
따라서  $f^{10}(x) = x + 10$ 이므로  $f^{10}(a) = a + 10 = 30$   
 $\therefore a = 20$

### 31 정답 ②

**해설**  $X$ 가 원소의 개수  $n$ 개인 유한집합일 때,  
 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이면  $f, f^2, \dots, f^n$  중에  
항등함수인 것이 반드시 있다.  
주어진  $f$ 를 계속해서 합성하면 다음 그림과 같이  
 $f^3$ 이 항등함수  $I$ 가 된다.



$$\begin{aligned} f^{99}(0) &= (f^3 \circ f^3 \circ f^3 \circ \dots \circ f^3)(0) \\ &= (I \circ I \circ I \circ \dots \circ I)(0) \\ &= I(0) = 0 \\ f^{100}(1) &= (f \circ (f^3 \circ f^3 \circ f^3 \circ \dots \circ f^3))(1) \\ &= (f \circ (I \circ I \circ I \circ \dots \circ I))(1) \\ &= (f \circ I)(1) = f(1) = 2 \\ \therefore f^{99}(0) + f^{100}(1) &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

### 32 정답 ⑤

**해설**  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ -x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 에서  
 $(f \circ f)(x) = \begin{cases} -\{f(x)\}^2 & (-1 \leq f(x) < 0) \\ -f(x) & (0 \leq f(x) \leq 1) \end{cases}$   
(i)  $-1 \leq x < 0$ 일 때,  $-1 \leq f(x) < 0$ 이므로  
 $(f \circ f)(x) = -(-x^2)^2 = -x^4$   
(ii)  $0 \leq x \leq 1$ 일 때,  $-1 \leq f(x) \leq 0$ 이므로  
 $(f \circ f)(x) = -(-x)^2 = -x^2$   
(i), (ii)에서  
 $(f \circ f)(x) = \begin{cases} -x^4 & (-1 \leq x < 0) \\ -x^2 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이므로  
함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은  
⑤이다.

### 33 정답 - 2

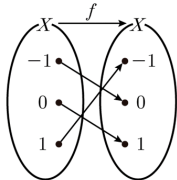
**해설** 함수  $f$ 가 일대일대응이므로

$$f^{2024}(-1)=0, f^{2025}(1)=1 \text{ 또는}$$

$$f^{2024}(-1)=1, f^{2025}(1)=0 \text{이다.}$$

이때  $f(-1)=-1$ 이거나  $f(0)=0$ 이면 위의 조건을 만족시키지 않으므로  $f(-1) \neq -1, f(0) \neq 0$

(i)  $f(-1)=0, f(0)=1$ 인 경우 함수  $f$ 는



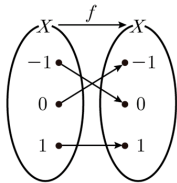
$$f(-1)=0, f^2(-1)=1, f^3(-1)=-1 \text{이므로}$$

$$f^3 = I \text{ (I는 항등함수)이다.}$$

$$f^{2024} = f^{3 \cdot 674 + 2} = f^2, f^{2025} = f^{3 \cdot 675} = I \text{에서}$$

$$f^{2024}(-1) + f^{2025}(1) = f^2(-1) + I(1) = 2$$

(ii)  $f(-1)=0, f(0)=-1$ 인 경우 함수  $f$ 는

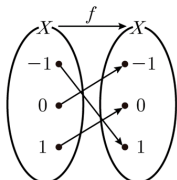


$$f(-1)=0, f^2(-1)=-1 \text{이고 } f(1)=1 \text{이므로}$$

$$f^{2024}(-1)=-1, f^{2025}(1)=1 \text{에서}$$

$$f^{2024}(-1) + f^{2025}(1) = -1 + 1 = 0$$

(iii)  $f(-1)=1$ 인 경우 함수  $f$ 는



$$f(-1)=1, f^2(-1)=0, f^3(-1)=-1 \text{이므로}$$

$$f^3 = I \text{ (I는 항등함수)이다.}$$

$$f^{2024} = f^{3 \cdot 674 + 2} = f^2, f^{2025} = f^{3 \cdot 675} = I \text{에서}$$

$$f^{2024}(-1) + f^{2025}(1) = f^2(-1) + I(1) = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수  $f$ 는 (iii)과 같다.

$$f^{2020} = f^{3 \cdot 673 + 1} = f, f^{2021} = f^{3 \cdot 673 + 2} = f^2 \text{이므로}$$

$$f^{2020}(0) + f^{2021}(1) = f(0) + f^2(1) = -2$$

### 35 정답 $\frac{1}{2}$

**해설** 주어진 그림에서 두 함수  $f(x), g(x)$ 의 식을 각각 구하면

$$f(x)=x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ -x+1 & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

함수  $g(x)$ 는 주기가 2이고,  $g(-x)=-g(x)$ 이므로

$$g\left(-\frac{9}{4}\right)=-g\left(\frac{9}{4}\right)=-g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f(-x)=f(x) \text{이므로}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

### 34 정답 ③

**해설**  $-3 < x < 4$ 일 때,  $f(f(x)) > f(x)$ 에서  $f(x)=t$ 로

놓으면  $-2 \leq t < 5$ 이고,  $f(t) > t$ 를 만족하는

$t$ 의 범위는  $-2 \leq t < 0$

따라서  $-2 \leq f(x) < 0$ 을 만족시키는  $x$ 값의 범위는

$$0 < x < 4$$