공통수학2_유리함수와 무리함수_내신대비 총정리

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

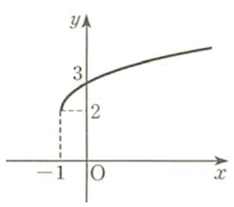
01 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\dfrac{-x-1}{x-1}$의 그래프와 제2사분면에서 만날 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$　② $a<-\dfrac{2}{3}$　③ $a<-\dfrac{1}{3}$　④ $-2<a<-\dfrac{1}{3}$　⑤ $-2<a<-\dfrac{2}{3}$

02 함수 $y=\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $1\le k$　② $k\le\dfrac{5}{4}$　③ $0<k<\dfrac{5}{4}$　④ $1<k\le\dfrac{5}{4}$　⑤ $1\le k<\dfrac{5}{4}$

03 함수 $y=a(x-b)^2+c$ $(x\ge b)$의 역함수의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.



04 다음 중 함수 $y=\sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은?

① -5　② $-\dfrac{37}{8}$　③ $-\dfrac{17}{4}$　④ $-\dfrac{31}{8}$　⑤ $-\dfrac{7}{2}$

05 함수 $y=\sqrt{4-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $a\le k<b$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

06 다음 중 함수 $y=\sqrt{x-4}$ 의 그래프와 직선 $y=x+a$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은?

① $-\dfrac{15}{4}$　② -4　③ $-\dfrac{17}{4}$　④ $-\dfrac{9}{2}$　⑤ $-\dfrac{19}{4}$

07 [2018년 11월 고3 문과 26번/4점]
함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

08 두 함수 $y=\sqrt{3x+9}$, $y=\sqrt{3x-3}$의 그래프와 x축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

09 $a : b = c : d$가 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은?
(단, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$)

〈보 기〉

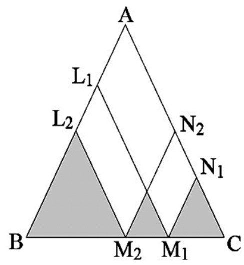
ㄱ. $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$

ㄴ. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{b+d}$

ㄷ. $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{ad+bc}{2bd}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 다음 그림과 같이 변 AB위에 두 점 L_1, L_2를 잡고, 점 L_1, L_2에서 변 AC와 평행한 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하고, 또한, 점 M_1, M_2에서 변 AB와 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 N_1, N_2라 하자. $\overline{AL_1}\cdot\overline{L_2B}=1$이고 어두운 부분 전체의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이 되도록 두 점 L_1, L_2를 잡을 때, $15\overline{L_1L_2}$의 값을 구하시오.



11 서로 다른 네 양수 a, b, c, d에 대하여 $ad=bc$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

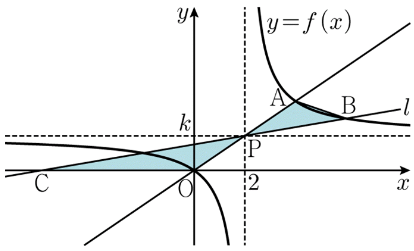
ㄱ. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

ㄴ. $\dfrac{a^2+c^2}{ab+cd}=\dfrac{c}{d}$

ㄷ. $\dfrac{a^3+c^3}{b^2-bd+d^2}=\dfrac{bc^3+c^3d}{d^3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{2k}{x-2}+k\ (k>2)$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ k)$에 대하여 직선 OP와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 점 P를 지나고 원점으로부터 거리가 1인 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 PBA의 넓이를 S_1, 삼각형 PCO의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=S_2$이다. 상수 k에 대하여 $35k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



13 함수 $y=\dfrac{-5x+6}{x-2}$의 그래프는 점 A에 대하여 대칭이다. 직선 $y=mx+2m-1$과 $y=\dfrac{-5x+6}{x-2}$의 두 점근선과의 교점을 각각 B, C라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은? (단, $m>0$이다.)

① 20 ② 26 ③ 32
④ 38 ⑤ 44

14 $x\neq -a$인 모든 실수 x에 대하여 다항함수가 아닌 유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$가 $f(2-x)+f(2+x)=4$와 $f(4)=4$를 만족한다. $-1\le x\le 1$에서 이 함수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $3M-m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15 유리함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}\ (b\neq -3)$에 대하여 $(f\circ f)(a)=a$를 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재할 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

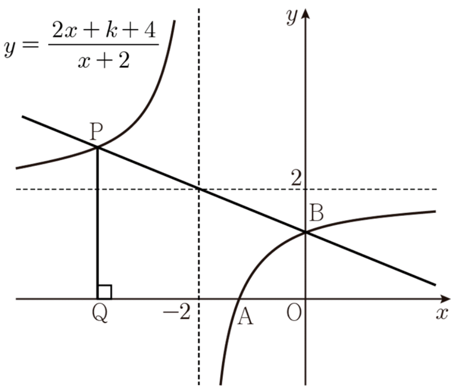
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

16 함수 $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$와 $0<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $0<f(b)<1$
ㄴ. $0<a<\dfrac{2}{3}$
ㄷ. $f(a)f(b)=-\dfrac{(a-1)(b-1)}{ab}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

17 아래 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x+k+4}{x+2}$ $(-4<k<0)$의 그래프와 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $k=-2$일 때, 점 P의 좌표는 $(-4,\ 3)$이다.
ㄴ. $-4<k<0$인 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.
ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, k의 값은 $-4+2\sqrt{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 상수함수가 아닌 유리함수 $f(x)=\dfrac{-2x-a+b}{x-a}$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 정수 a의 개수가 9일 때, 모든 정수 b의 값의 합을 구하시오.

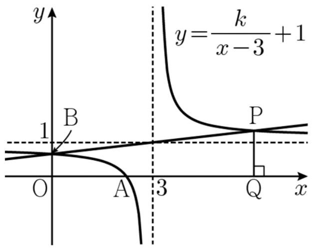
19 [2024년 3월 고2 17번/4점]

두 양수 a, k에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+2,\ f(a+2))$가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은?

(가) 직선 PQ의 기울기는 -1이다.
(나) 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $8\sqrt{5}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

20 아래 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-3}+1\ (0<k<3)$의 그래프와 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $k=2$일 때, 점 P의 좌표는 $\left(6,\ \dfrac{5}{3}\right)$이다.
ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.
ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, k의 값은 $3-\sqrt{6}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21 함수 f에 대하여 $f\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)=6x+12$일 때, 함수 f의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{47}{2}$ ② 24 ③ $\dfrac{49}{2}$
④ 25 ⑤ $\dfrac{51}{2}$

22 집합 $A=\{x\,|\,x>1\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$에 대하여 f^n을 $f^n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{개}}$ (n은 자연수)로 정의한다. $f^{20}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① -19 ② -10 ③ 1
④ 10 ⑤ 19

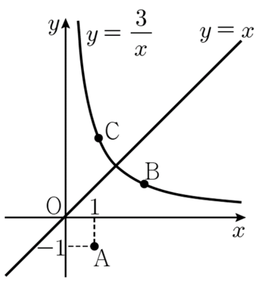
23 함수 $f(x)=\dfrac{2}{1-x}-1$에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의할 때, $f^n(x)=x$를 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

24 아래 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$과 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$ 위의 두 점 B, C가 다음 조건을 만족한다.

(가) 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
(나) 삼각형 ABC의 넓이는 3이다.

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha>\sqrt{3}$)



① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

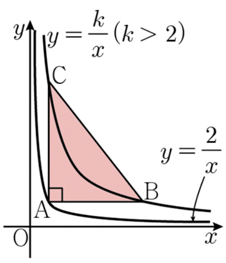
25 함수 $|y|=\dfrac{k}{|x-2|}$ $(k>0)$의 그래프에 접하는 정사각형 ABCD에 대하여 두 점 A, C는 x축 위에 있고, 두 점 B, D는 직선 $x=2$ 위에 있다. 정사각형 ABCD의 넓이가 72일 때, k의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

26 $a,\ b$가 양수일 때, $2\le x\le 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2\le\dfrac{2x-1}{x-1}\le bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

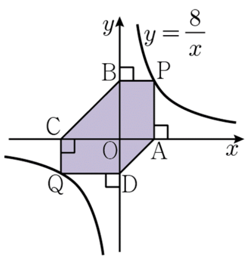
27 다음 그림과 같이 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 한 점 A에서 x축, y축에 평행한 직선을 그어 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 64일 때, 상수 k의 값을 구하시오.



28 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}+2\ (x>3)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 이때 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은?

① $1+2\sqrt{2}$ ② 5
③ $4+\sqrt{13}$ ④ $5+2\sqrt{2}$
⑤ 9

29 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 제1사분면 위에 있는 점을 P, 제3사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값을 구하시오.



30 n이 2이상의 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{-2nx+4}{x-2n}$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.
ㄴ. $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 항상 존재한다.
ㄷ. 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 2개다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31 유리함수 $f(x)=\dfrac{5x-14}{x-3}\ (x>3)$의 그래프 위의 임의의 한 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값을 m, 그때의 점 P의 x좌표를 p라 하자. $m+p$의 값을 구하시오.

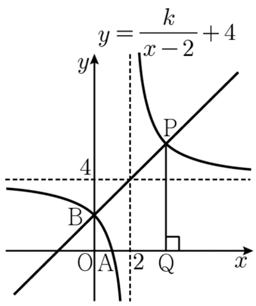
32 좌표평면에서 곡선 $y=\dfrac{1}{3x-9}+5$와 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 내부에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

33 실수 k와 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}+k\ (k\neq 0)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$가 오직 한 점에서만 만날 때, 등식 $k+f^{-1}(0)=a$를 만족시킨다. 모든 실수 a의 값의 곱은?

① $-\dfrac{25}{2}$ ② $-\dfrac{49}{4}$ ③ -16
④ $-\dfrac{47}{4}$ ⑤ $-\dfrac{23}{2}$

34 아래 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+4\ (3<k<8)$의 그래프와 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $k=6$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ 7)$이다.
ㄴ. $3<k<8$인 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.
ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 0과 1사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a-d=0$ ② $a+d=0$
③ $ad=1$ ④ $ad=-1$
⑤ $ad-bc=0$

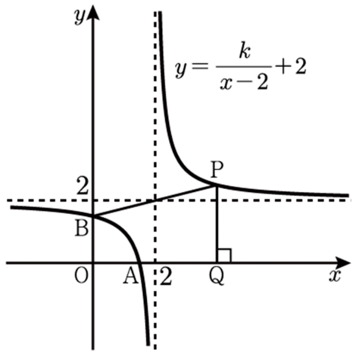
36 [2023년 11월 고1 16번/4점]

유리함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OBCA의 넓이가 24일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

37 [2018년 11월 고3 문과 20번 변형]

다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+2(0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자.



이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.

ㄴ. $0<k<3$인 모든 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 항상 수직이다.

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 $\dfrac{1}{4}$과 $\dfrac{1}{2}$ 사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

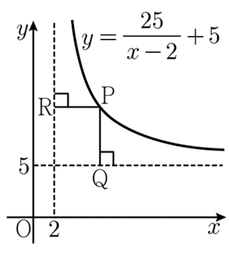
38 $2\le x\le 3$인 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $ax+1\le\dfrac{x+1}{x-1}\le bx+1$이 항상 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하시오.

39 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-2}-3$의 그래프가 좌표평면의 모든 사분면을 지나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-6$ ② $-6\le k<0$ ③ $0\le k<3$
④ $3\le k<6$ ⑤ $k\ge 6$

40 좌표평면 위에 함수 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{x} & (x>0)\\ -\dfrac{27}{x} & (x<0)\end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y=x$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값을 구하시오.

41 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{25}{x-2}+5\ (x>2)$의 그래프 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은?



① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

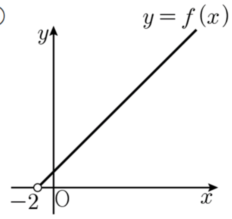
42 함수 $y=\dfrac{1}{x-2}+1\ (x>2)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 이때 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값을 구하시오.

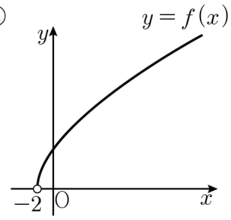
43 좌표평면에서 중심이 점 $(-1,\ 1)$인 원 C와 함수 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만난다.
이 네 점의 좌표를 각각
$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$라 할 때,
$\dfrac{x_1+x_4}{y_2+y_3}=S$이다. $10S^2$의 값을 구하시오.
(단, $x_1<x_2<x_3<x_4$)

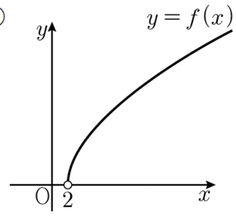
44 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{x+9}+1$이 두 직선 $x=0$, $y=-\dfrac{1}{9}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

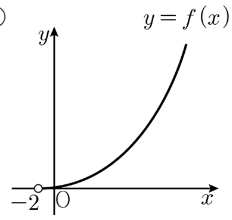
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

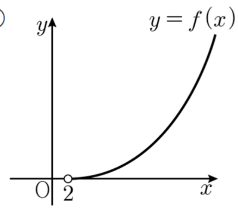
45 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$가 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이를 $f(k)$라 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은?

①


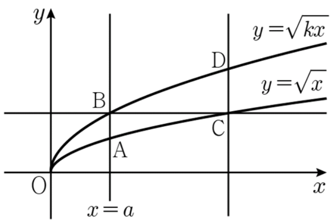
②


③


④


⑤


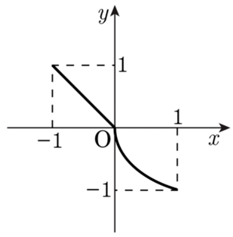
46 다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$ $(k>1)$이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 $2\sqrt{3}$ 배일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

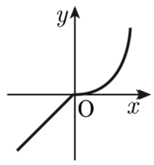


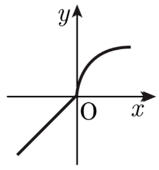
47 $-1\le x\le 1$에서

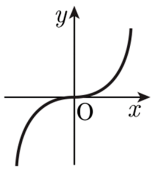
함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (-1\le x\le 0) \\ -\sqrt{x} & (0\le x\le 1) \end{cases}$의 그래프는

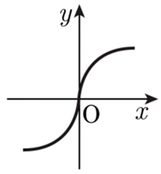
아래 그림과 같다. $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $g^{-1}(x)$의 그래프로 적절한 것은?

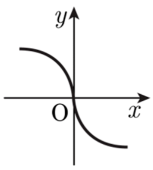


①


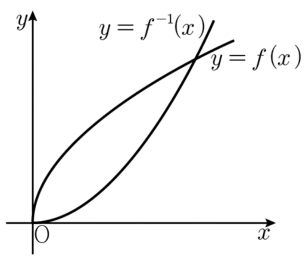
②


③


④


⑤


48 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{10x}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 구하시오.



49 두 함수

$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k\ (x\geq 0)$, $g(x)=\sqrt{4x-2k}$에

대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

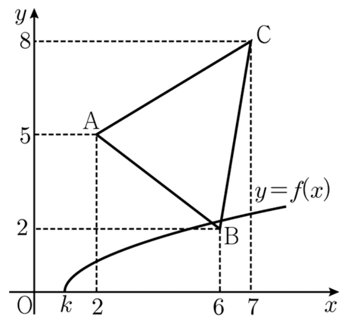
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

50 함수 $f(x)=2\sqrt{x-k}+3$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.

51 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 P라 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A와 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B에 대하여 선분 AB의 길이가 최대일 때의 삼각형 ABP의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

52 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$, $\mathrm{C}(7,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

53 [2019년 6월 고3 문과 12번/3점]

두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

54 [2012년 11월 고1 18번/4점]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-2} & (x>3)\\ \sqrt{3-x}+a & (x\le 3)\end{cases}$$

일 때, 함수 f는 다음 조건을 만족시킨다.

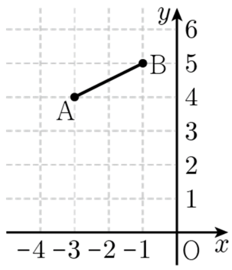
> (가) 함수 f의 치역은 $\{y\,|\,y>2\}$이다.
> (나) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

$f(2)f(k)=40$일 때, 상수 k의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

55 [2018년 3월 고3 문과 16번 변형]

좌표평면에서 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(-1,\ 5)$를 이은 선분 AB와 함수 $y=a\sqrt{-x}+b$의 그래프가 만나도록 하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?



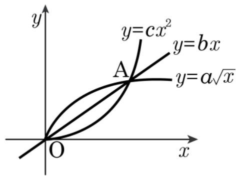
① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

56

두 점 $(4,2)$, $(2,\ 4)$를 이은 선분과 무리함수 $y=\sqrt{mx+2}$ $(m>0)$의 그래프가 만날 때, 상수 m의 값의 범위는?

① $m\le\frac{1}{2}$ ② $m\ge\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}\le m\le 7$
④ $m\le 7$ ⑤ $m\ge 7$

57 양의 상수 a, b, c에 대하여 세 함수 $y=a\sqrt{x}$, $y=bx$, $y=cx^2$의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c 의 관계로 옳은 것은?



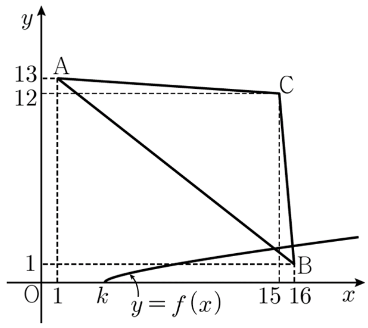
① $a^3=b^2c$　② $a^3=bc^2$
③ $b^3=a^2c$　④ $b^3=ac^2$
⑤ $c^3=a^2b$

58 좌표평면에서 실수 a에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x+a}$가 두 점 $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$를 이은 선분과 만나기 위한 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 30　② 31　③ 32
④ 33　⑤ 34

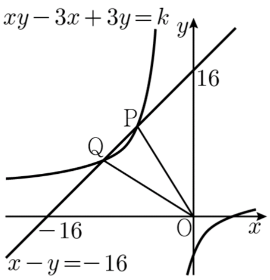
59 $5 \le x \le 8$에서 정의된 두 함수 $y=\dfrac{-3x+9}{x-2}$와 $y=\sqrt{5x}+k$의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

60 무리함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x-k}$에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 13)$, $\mathrm{B}(16,\ 1)$, $\mathrm{C}(15,\ 12)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

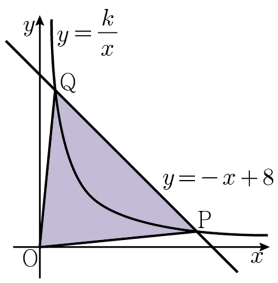


① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

61 그림과 같이 곡선 $xy-3x+3y=k$가 직선 $x-y=-16$과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 60일 때, $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오. (단, $k<0$)



62 그림과 같이 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+8$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{21}{4}$ ② $\dfrac{87}{16}$ ③ $\dfrac{45}{8}$
④ $\dfrac{93}{16}$ ⑤ 6

63 유리함수 $f(x)=\dfrac{5x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 5가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x-4)-4$이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프와 일치한다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

64 [2022년 3월 고2 18번 변형]

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}+b$ $(a \neq 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=|f(x)|$는 직선 $y=3$과 한 점에서만 만난다.
> (나) $f^{-1}(3)=f(3)-2$

$f(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

공통수학2_유리함수와 무리함수_내신대비 총정리

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ⑤	03 2
04 ⑤	05 5	06 ②
07 2	08 12	09 ④
10 15	11 ⑤	12 64
13 ③	14 ④	15 ⑤
16 ④	17 ⑤	18 17
19 ④	20 ③	21 ③
22 ①	23 ②	24 ②
25 ③	26 ①	27 18
28 ④	29 24	30 ⑤
31 14	32 ③	33 ②
34 ①	35 ②	36 ⑤
37 ④	38 $\frac{4}{3}$	39 ①
40 48	41 ②	42 5
43 10	44 ④	45 ②
46 3	47 ③	48 33
49 ①	50 5	51 ③
52 ①	53 ①	54 ⑤
55 ③	56 ③	57 ③
58 ③	59 -7	60 ③
61 136	62 ②	63 ⑤
64 ④		

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를

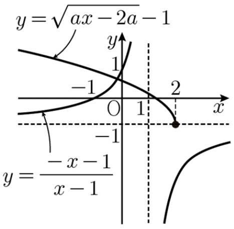
x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼

평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{ax-2a}-1$

한편, $y=\dfrac{-x-1}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-1$이므로

$y=\dfrac{-x-1}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{ax-2a}-1$의 그래프가

함수 $y=\dfrac{-x-1}{x-1}$의 그래프와 제2사분면에서 만나려면

$x=0$일 때 $y=\sqrt{ax-2a}-1<1$이고

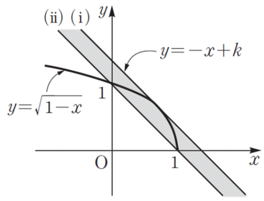
$x=-1$일 때 $y=\sqrt{ax-2a}-1>0$이어야 하므로

$\sqrt{-2a}-1<1,\ \sqrt{-3a}-1>0$

$\therefore\ -2<a<-\dfrac{1}{3}$

02 정답 ⑤

해설 아래 그림과 같이 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 어두운 부분에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 접할 때, $\sqrt{1-x}=-x+k$

양변을 제곱하면 $1-x=x^2-2kx+k^2$

$x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0\qquad \therefore\ k=\dfrac{5}{4}$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

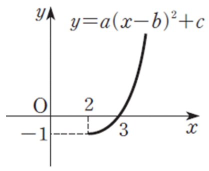
$0=-1+k\qquad \therefore\ k=1$

(i), (ii)에서 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$1\le k<\dfrac{5}{4}$

03 정답 2

해설 주어진 역함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 다음 그림과 같다.



즉, 이 그래프의 식은 $y=a(x-b)^2+c\ (x \geq b)$

위 그림에서 $y=a(x-2)^2-1=a(x-b)^2+c$

$\therefore\ b=2,\ c=-1$

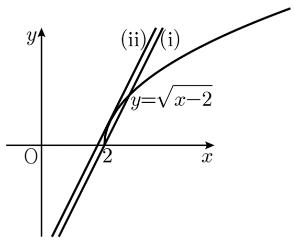
한편, $y=a(x-2)^2-1$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 $0=a(3-2)^2-1$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+b+c=1+2+(-1)=2$

04 정답 ⑤

해설 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=2x+a$는 기울기가 2이고 y절편이 a이므로 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=2x+a$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$0=4+a \qquad \therefore\ a=-4$

(ii) $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 접할 때

$\sqrt{x-2}=2x+a$의 양변을 제곱하면

$x-2=4x^2+4ax+a^2$

$4x^2+(4a-1)x+a^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4a-1)^2-4\cdot 4\cdot(a^2+2)=0$

$-8a-31=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{31}{8}$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

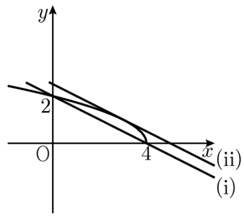
$a<-4$ 또는 $a=-\dfrac{31}{8}$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

05 정답 5

해설 함수 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고

직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 y절편이 k인 직선이므로 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$가 점 $(4,\ 0)$을 지날 때

$0=-2+k \qquad \therefore\ k=2$

(ii) $y=\sqrt{4-x}$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+k$가 접할 때

$\sqrt{4-x}=-\dfrac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$4-x=\dfrac{1}{4}x^2-kx+k^2$

$x^2+4(1-k)x+4k^2-16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1-k)\}^2-(4k^2-16)=0$

$-8k+20=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $2 \leq k < \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ a=2,\ b=\dfrac{5}{2}$이므로 $ab=5$

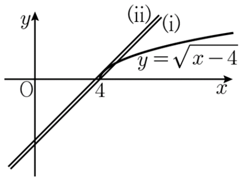
06 정답 ②

해설 $y=\sqrt{x-4}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고,
$y=x+a$는 기울기가 1이고, y절편이 a인 직선이다.

(ⅰ) 직선 $y=x+a$가 $(4,\ 0)$을 지날 때
$0=4+a$
$\therefore\ a=-4$

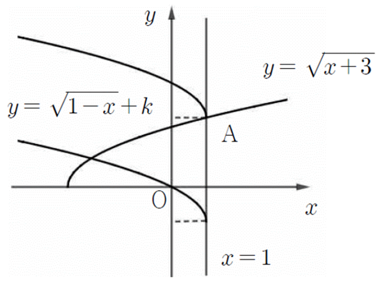
(ⅱ) $y=\sqrt{x-4}$ 의 그래프와 $y=x+a$가 접할 때
$\sqrt{x-4}=x+a$의 양변을 제곱하면
$x-4=x^2+2ax+a^2$
$x^2+(2a-1)x+a^2+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2a-1)^2-4(a^2+4)=0$
$-4a-15=0$
$\therefore\ a=-\dfrac{15}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
a의 값의 범위는 $a<-4$ 또는 $a=-\dfrac{15}{4}$ 이다.
따라서 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은 ②이다.



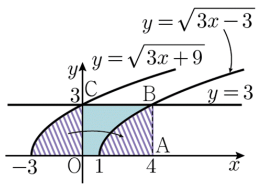
07 정답 2

해설 무리함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값을 구할 수 있는가?
함수 $y=\sqrt{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
한편, 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프는
함수 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
한편, 함수 $y=\sqrt{x+3}$ 의 그래프와 직선 $x=1$의 교점을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로
함수 $y=\sqrt{x+3}$ 의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은
함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지날 때이다.
즉, $2=\sqrt{1-1}+k$에서 $k=2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2



08 정답 12

해설 $y=\sqrt{3x-3}=\sqrt{3(x-4)+9}$ 이므로
$y=\sqrt{3x-3}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{3x+9}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
즉, 두 함수 $y=\sqrt{3x+9}$, $y=\sqrt{3x-3}$ 의 그래프와 직선 $y=3$은 다음 그림과 같다.



이때 빗금친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는
$4\cdot 3=12$

09 정답 ④

해설 조건식이 $a : b = c : d$와 같이 주어지면

$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$이므로 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$라

하고 $a = bk$, $c = dk$를 각 문항의 좌우변에 대입해 본다.

ㄱ. 좌변$= \frac{b}{bk+b} = \frac{1}{k+1}$, 우변$= \frac{dk}{dk+d} = \frac{k}{k+1}$

∴ 좌변≠우변. 따라서 거짓.

ㄴ. 좌변$= \frac{a}{b} = \frac{bk}{b} = k$, 우변$= \frac{bk+dk}{b+d} = k$

∴ 좌변=우변. 따라서 참.

ㄷ. 좌변$= \frac{bk+dk}{b+d} = k$, 우변$= \frac{bdk+bdk}{2bd} = k$

∴ 좌변=우변. 따라서 참.

10 정답 15

해설 $\overline{\mathrm{AL_1}} = a\ (a > 0)$라 하면,

$\overline{\mathrm{N_1M_1}} = \overline{\mathrm{N_1C}} = a$, $\overline{\mathrm{AL_1}} \cdot \overline{\mathrm{L_2B}} = 1$이므로

$\overline{\mathrm{L_2B}} = \frac{1}{a} = \overline{\mathrm{L_2M_2}}$

또한, $\overline{\mathrm{L_1M_1}}$과 $\overline{\mathrm{M_2N_2}}$의 교점을 점 P라 하고,

$\overline{\mathrm{L_1L_2}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{PM_2}} = \overline{\mathrm{PM_1}} = x$

평행선의 성질에 의해 $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{L_2BM_2}$,

$\triangle\mathrm{PM_2M_1}$, $\triangle\mathrm{N_1M_1C}$는 모두 닮음이고

닮음비는 $4 : \frac{1}{a} : x : a$이므로

넓이의 비는 $16 : \frac{1}{a^2} : x^2 : a^2$이다.

삼각형 ABC의 넓이를 S, 어두운 부분 전체의 넓이를 T라 하면 $S = 2T$이므로

$16k = 2\left(\frac{1}{a^2} + x^2 + a^2\right)k$ (k는 비례상수)

$8 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 + x^2$

$8 = (4-x)^2 - 2 + x^2$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 3

$a + \frac{1}{a} = 4 - x$이고 $a > 0$이므로 $4 - x \geq 2$

즉, $0 < x \leq 2$이므로 구하는 $x = 1$

$\therefore 15\overline{\mathrm{L_1L_2}} = 15$

11 정답 ⑤

해설 ㄱ. $ad = bc$이므로 양변을 bd로 나누면

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (참)

ㄴ. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k\ (k > 0)$으로 놓으면

$a = bk$, $c = dk$이므로

$$\frac{a^2+c^2}{ab+cd} = \frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k+d^2k} = k = \frac{c}{d}$$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a = bk$, $c = dk$이므로

$$\frac{a^3+c^3}{b^2-bd+d^2} = \frac{b^3k^3+d^3k^3}{b^2-bd+d^2} = \frac{(b^3+d^3)k^3}{b^2-bd+d^2} = (b+d)k^3 = (b+d)\left(\frac{c}{d}\right)^3 = \frac{bc^3+c^3d}{d^3}$$ (참)

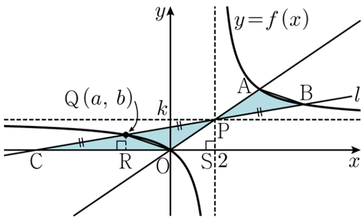
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

12 정답 64

해설 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자.

삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이고,

$S_2=2S_1$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$



이때 $\mathrm{P}(2,\ k)$이므로 두 점 Q, P에서 x축에 내린 수선의 발을 R, S라 하면 $\triangle\mathrm{CQR} \backsim \triangle\mathrm{CPS}$이고 닮음비가 $1:2$이다.

$\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{PS}}=1:2$에서 $b:k=1:2$

$\therefore\ b=\dfrac{k}{2}$

점 Q는 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $b=f(a)$에서

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{2k}{a-2}+k$

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{a-2}+1,\ a-2=4+2a-4$

$\therefore\ a=-2$

즉, $\mathrm{Q}\left(-2,\ \dfrac{k}{2}\right)$

또한, $\overline{\mathrm{CR}}=\overline{\mathrm{RS}}$이므로 $\mathrm{C}(-6,\ 0)$

직선 l은 두 점 $\mathrm{C}(-6,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(-2,\ \dfrac{k}{2}\right)$를 지나므로

직선의 방정식은

$$y-0=\frac{\frac{k}{2}-0}{-2-(-6)}(x+6)$$

$\therefore\ kx-8y+6k=0$

이때 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|6k|}{\sqrt{k^2+(-8)^2}}=1$에서 $\sqrt{k^2+64}=|6k|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$k^2+64=36k^2$

$\therefore\ 35k^2=64$

13 정답 ③

해설 함수 $y=\dfrac{-5x+6}{x-2}=\dfrac{-5(x-2)-4}{x-2}=\dfrac{-4}{x-2}-5$의

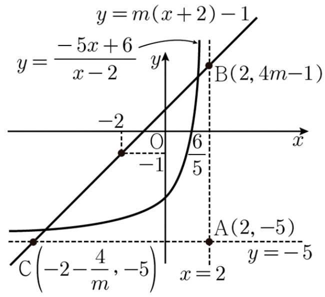
점근선이 $x=2$, $y=-5$이므로 대칭인 점은 $\mathrm{A}(2,\ -5)$

이때 직선 $y=m(x+2)-1$은 점 $(-2,\ -1)$을 지나고

기울기가 $m>0$인 직선이므로

$x=2$와 교점 $\mathrm{B}(2,\ 4m-1)$,

$y=-5$와 교점 $\mathrm{C}\left(-2-\dfrac{4}{m},\ -5\right)$



삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{m}\right)(4m+4)$$
$$=8m+\frac{8}{m}+16$$

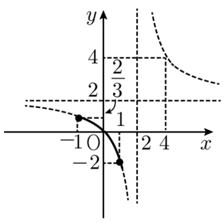
따라서 $m>0$이므로 산술평균과 기하평균에 의하여

$$8m+\frac{8}{m}+16\geq 2\sqrt{8m\cdot\frac{8}{m}}+16=32$$

(단, 등호는 $m=1$일 때 성립)

14 정답 ④

해설 $x \neq a$인 모든 실수 x에 대하여 다항함수가 아닌 유리함수 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$가 $f(2-x)+f(2+x)=4$를 만족시키므로 이 유리함수의 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=2$이므로
$f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)+c-ab}{x+a}=\dfrac{c-ab}{x+a}+b$에서
$-a=2,\ b=2$
$\therefore\ a=-2,\ b=2$
또한, 유리함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$, 즉 $f(x)=\dfrac{2x+c}{x-2}$에 대하여 $f(4)=4$이므로
$\dfrac{8+c}{4-2}=4,\ 8+c=8$
$\therefore\ c=0$
즉, $f(x)=\dfrac{0-(-2)\cdot 2}{x-2}+2=\dfrac{4}{x-2}+2$이므로
이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=2$이고, 점 $(0,\ 0)$을 지난다.
따라서 $-1 \leq x \leq 1$에서 유리함수 $y=\dfrac{2x}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



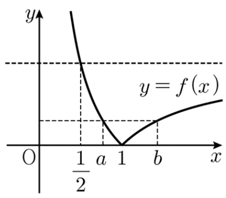
$x=-1$일 때, 최댓값 $M=\dfrac{-2}{-1-2}=\dfrac{2}{3}$,
$x=1$일 때, 최솟값 $m=\dfrac{2}{1-2}=-2$를 갖는다.
$\therefore\ 3M-m=3\cdot\dfrac{2}{3}-(-2)=4$

15 정답 ⑤

해설 $b \neq -3$이면 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.
$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$에서 $f(a)=f^{-1}(a)$이므로
$x=a$는 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
그런데 함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}\ (b\neq-3)$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로
$f(a)=f^{-1}(a)=a$에서
$\dfrac{3a-3}{3a+b}=a$
$3a-3=3a^2+ab$
$\therefore\ 3a^2+(b-3)a+3=0$ $\cdots$ ㉠
이때 조건을 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재한다고 하였으므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(b-3)^2-4\cdot3\cdot3=0$에서
$(b-3)^2=36,\ b-3=\pm6$
$\therefore\ b=9\ (\because\ b\neq-3)$
이것을 ㉠에 대입하면
$3a^2+6a+3=0,\ a^2+2a+1=0$
$(a+1)^2=0$
$\therefore\ a=-1$
$\therefore\ a+b=(-1)+9=8$

16 정답 ④

해설 $x>0$에서 함수 $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $0<a<b$인 $a,\ b$에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립하려면 $\dfrac{1}{2}<a<1$이고 $b>1$이어야 한다.



ㄱ. 위의 그림에서 $0<f(b)<1$이다. (참)
ㄴ. $\dfrac{1}{2}<a<1$ (거짓)
ㄷ. $f(a)=\dfrac{1}{a}-1,\ f(b)=1-\dfrac{1}{b}$이므로
$f(a)f(b)=\dfrac{1-a}{a}\cdot\dfrac{b-1}{b}=-\dfrac{(a-1)(b-1)}{ab}$
(참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 정답 ⑤

해설 $y=\dfrac{2x+k+4}{x+2}=2+\dfrac{k}{x+2}$에서 $y=0$이면

$x=-2-\dfrac{k}{2}$이므로 $\mathrm{A}\left(-2-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=\dfrac{k}{2}+2$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{k}{2}+2\right)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(-2,\ 2)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(-4,\ 2-\dfrac{k}{2}\right)$이다.

ㄱ. $k=-2$이면 $\mathrm{P}(-4,\ 3)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\dfrac{k}{2}+2}{2+\dfrac{k}{2}}=1$

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{2-\dfrac{k}{2}}{-2+\dfrac{k}{2}}=-1$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 서로 수직이다. (참)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{2}+2\right)^2$$

$$=8-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}+2\right)^2$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 2보다 작으므로,

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{2}+2\right)^2=1$이어야 한다.

따라서 방정식 $\left(\dfrac{k}{2}+2\right)^2=2$의 해는

$k=-4+2\sqrt{2}$ ($\because\ -4<k<0$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

18 정답 17

해설 $f(x)=\dfrac{-2x-a+b}{x-a}$

$=\dfrac{-2(x-a)-3a+b}{x-a}$

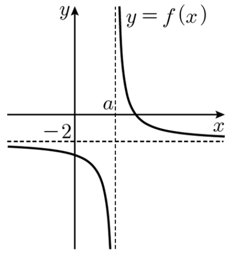
$=\dfrac{-3a+b}{x-a}-2$ (단, $-3a+b\neq 0$)

이므로 점근선의 방정식은 $x=a,\ y=-2$

(i) $-3a+b>0$일 때

$y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같아야 하므로

$a\geq 0$



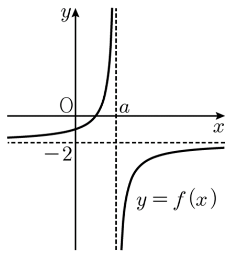
이때 $-3a+b>0$, 즉 $a<\dfrac{b}{3}$이므로

$0\leq a<\dfrac{b}{3}$

(ii) $-3a+b<0$일 때

$y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같아야 하므로

$a>0,\ f(0)\leq 0$



즉, $f(0)=\dfrac{-a+b}{-a}=1-\dfrac{b}{a}$이므로

$1-\dfrac{b}{a}\leq 0,\ \dfrac{b}{a}\geq 1$

$\therefore\ b\geq a$ ($\because\ a>0$)

이때 $-3a+b<0$, 즉 $a>\dfrac{b}{3}$이므로

$\dfrac{b}{3}<a\leq b$

(i), (ii)에서 $0\leq a<\dfrac{b}{3}$ 또는 $\dfrac{b}{3}<a\leq b$ $\cdots$ ㉠

$b=6$일 때, ㉠에서 $0\leq a<2$ 또는 $2<a\leq 6$이므로

이를 만족하는 정수 a는 $0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개

$b=7$일 때, ㉠에서 $0\leq a<\dfrac{7}{3}$ 또는 $\dfrac{7}{3}<a\leq 7$

이므로 이를 만족하는 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 8개

$b=8$일 때, ㉠에서 $0\leq a<\dfrac{8}{3}$ 또는 $\dfrac{8}{3}<a\leq 8$이므로

이를 만족하는 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$의 9개

$b=9$일 때, ㉠에서 $0\leq a<3$ 또는 $3<a\leq 9$이므로

이를 만족하는 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$의 9개

$b\geq 10$일 때, ㉠을 만족하는 정수의 개수는 11개 이상이다.

따라서 구하는 모든 정수 b의 값의 합은

$8+9=17$

19 정답 ④

해설 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a+2,\ \frac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}}{a+2-a}=-1$

$\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}=-2$, $\frac{-2k}{a(a+2)}=-2$

$\therefore\ k=a(a+2)$

$f(a)=\frac{k}{a}=a+2$, $f(a+2)=\frac{k}{a+2}=a$이므로

따라서 점 P의 좌표는 $(a,\ a+2)$, 점 Q의 좌표는 $(a+2,\ a)$

이때 조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a,\ -a-2)$, 점 S의 좌표는 $(-a-2,\ -a)$

따라서 직선 PS의 기울기는 $\frac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)}=1$이고,

직선 RS의 기울기는 $\frac{-a-(-a-2)}{-a-2-(-a)}=-1$,

직선 QR의 기울기는 $\frac{-a-2-a}{-a-(a+2)}=1$이므로

사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{\{-(a+2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}$

$=2\sqrt{2}(a+1)$

즉, 사각형 PQRS의 넓이는

$2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(a+1)=8(a+1)=8\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}-1$이므로

$k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

20 정답 ③

해설 $y=\frac{k}{x-3}+1$에서

$y=0$이면 $x=3-k$이므로 $\mathrm{A}(3-k,\ 0)$

$x=0$이면 $y=-\frac{k}{3}+1$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ -\frac{k}{3}+1\right)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(3,\ 1)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(6,\ 1+\frac{k}{3}\right)$이다.

ㄱ. $k=2$이면 $\mathrm{P}\left(6,\ \frac{5}{3}\right)$이다. (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\frac{k}{3}-1}{3-k}=-\frac{1}{3}$

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{1+\frac{k}{3}}{3+k}=\frac{1}{3}$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 $-\frac{1}{9}$이므로 서로 수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

사각형 PQAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot(3-k)\cdot\left(-\frac{k}{3}+1\right)$

$=6-\frac{1}{6}(3-k)^2$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{3}{2}$보다 작으므로

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\frac{1}{6}(3-k)^2=1$이어야 한다.

따라서 방정식 $\frac{1}{6}(3-k)^2=1$의 해는

$k=3-\sqrt{6}$ ($\because\ 0<k<3$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 정답 ③

해설 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$라 할 때, 두 점 $(0,\ a)$, $(b,\ 0)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=a$, $f(b)=0$이다.

(ⅰ) $f(0)=a$인 a의 값을 구하면

$f\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)=6x+12$에서

$\dfrac{2x-3}{x-1}=0$일 때, $x=\dfrac{3}{2}$이므로

$f(0)=6\cdot\dfrac{3}{2}+12=21$에서 $a=21$

(ⅱ) $f(b)=0$인 b의 값을 구하면

$f\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)=6x+12$에서

$6x+12=0$일 때, $x=-2$이므로

$b=\dfrac{2\cdot(-2)-3}{-2-1}=\dfrac{7}{3}$

따라서 $\mathrm{A}(21,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{7}{3}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 21\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{49}{2}$이다.

22 정답 ①

해설 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

⋮

$\therefore f^n(x)=\dfrac{x}{1-nx}$

따라서 $f^{20}(x)=\dfrac{x}{1-20x}$이므로

$a=1$, $b=0$, $c=-20$

$\therefore a+b+c=1+0+(-20)=-19$

23 정답 ②

해설 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{2}{1-x}-1=\dfrac{1+x}{1-x}$

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{x}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\frac{1+\left(-\frac{1}{x}\right)}{1-\left(-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1+x}{1+x}$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=\frac{1+\frac{-1+x}{1+x}}{1-\frac{-1+x}{1+x}}=x$$

따라서 $f^n(x)=x$를 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은 4이다.

24 정답 ②

해설 조건 (가)에 의하여 점 $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{C}(\beta,\ \alpha)$이고, 직선 BC는 점 $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$를 지나고 기울기가 -1이므로 직선의 방정식은 $x+y-\alpha-\beta=0$이다.

한편, 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)$

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{|1-1-\alpha-\beta|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}$

조건 (나)에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는 3이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(\alpha-\beta)\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}=3$에서

$\alpha^2-\beta^2=6$

또한, 점 B는 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$ 위의 점이므로 $\beta=\dfrac{3}{\alpha}$

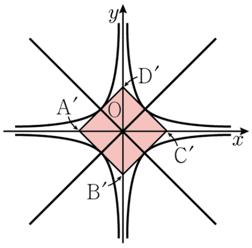
즉, $\alpha\beta=3$이므로

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=6^2+4\cdot3^2=72$$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=6\sqrt{2}$

25 정답 ③

해설 함수 $|y|=\dfrac{k}{|x-2|}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 함수 $|y|=\dfrac{k}{|x|}$의 그래프와 일치한다. 또, 네 점 A, B, C, D를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 각각 A', B', C', D'이라 하면 정사각형 $\mathrm{A'B'C'D'}$은 다음 그림과 같고, 함수 $|y|=\dfrac{k}{|x|}$ $(k>0)$의 그래프에 접하는 정사각형 $\mathrm{A'B'C'D'}$의 넓이도 72이다.



이 함수의 그래프에 접하는 정사각형 $\mathrm{A'B'C'D'}$은 함수 $|y|=\dfrac{k}{|x|}$의 그래프와 직선 $y=x$, $y=-x$의 교점에서 접하므로 네 교점의 좌표를 각각 $(a,\ a)$, $(a,\ -a)$, $(-a,\ a)$, $(-a,\ -a)$라 하자. (단, $a>0$)

함수 $|y|=\dfrac{k}{|x|}$의 그래프가 점 $(a,\ a)$를 지나므로

$a=\dfrac{k}{a}$에서 $k=a^2$이고, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $2\sqrt{2}a$이므로 넓이는 $(2\sqrt{2}a)^2=8a^2=72$에서

$a^2=9$

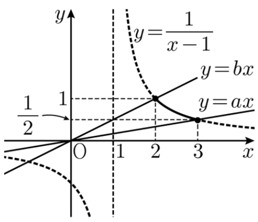
$\therefore\ k=a^2=9$

26 정답 ①

해설 $\dfrac{2x-1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$ $(2\le x\le 3)$이므로

$ax+2\le 2+\dfrac{1}{x-1}\le bx+2$

$ax\le \dfrac{1}{x-1}\le bx$



위의 그래프에 의하여 $a\le\dfrac{1}{6}$, $b\ge\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore$ (a의 최댓값)+(b의 최솟값)$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

27 정답 18

해설 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>0)$라 하면

$\mathrm{B}\left(\dfrac{ak}{2},\ \dfrac{2}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$이고 $k>2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{ak}}{2}-\mathrm{a}=\dfrac{\mathrm{a(k-2)}}{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}}-\dfrac{2}{\mathrm{a}}=\dfrac{\mathrm{k-2}}{\mathrm{a}}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a(k-2)}{2}\cdot\frac{k-2}{a}\\&=\frac{1}{4}(k-2)^2\end{aligned}$$

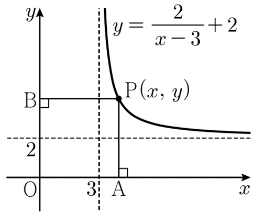
즉, $\dfrac{1}{4}(k-2)^2=64$이므로

$(k-2)^2=256$, $k-2=\pm16$

$\therefore\ k=18$ ($\because\ k>2$)

28 정답 ④

해설 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}+2$ $(x>3)$의 그래프와 점 P를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=y=\dfrac{2}{x-3}+2$, $\overline{\mathrm{PB}}=x$ $(x>3)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}&=\frac{2}{x-3}+2+x\\&=x-3+\frac{2}{x-3}+5\\&\ge 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{2}{x-3}}+5\\&=5+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\dfrac{2}{x-3}\text{일 때 성립}\right)$

29

정답 24

해설 두 점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}\left(a, \frac{8}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b, -\frac{8}{b}\right)$ $(a>0, b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{8}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b, 0)$, $\mathrm{D}\left(0, -\frac{8}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$S=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}$$
$$=a\cdot\frac{8}{a}+b\cdot\frac{8}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{8}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{8}{b}$$
$$=16+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

이때 $a>0, b>0$에서 $\frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=16+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$\geq 16+4\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$
$$=16+4\cdot 2$$
$$=24 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 24이다.

30

정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=\frac{-2nx+4}{x-2n}=\frac{-2n(x-2n)+4-4n^2}{x-2n}$

$$=-2n+\frac{4-4n^2}{x-2n}$$

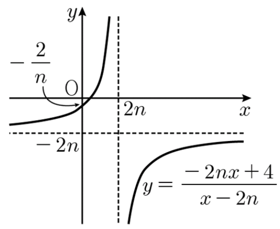
$$\therefore\ f(x)=\frac{4-4n^2}{x-2n}-2n$$

위의 함수의 그래프는 $y=\frac{4-4n^2}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $-2n$만큼

평행이동한 것이다. 또, y절편이 $-\frac{2}{n}$이므로

아래 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다. (참)



ㄴ. $y=\frac{-2nx+4}{x-2n}$의 x와 y를 서로 바꾸면

$$x=\frac{-2ny+4}{y-2n}$$

$xy-2nx=-2ny+4$, $(x+2n)y=2nx+4$

$$\therefore\ y=\frac{2nx+4}{x+2n}$$

즉, 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{2nx+4}{x+2n}$로 항상 존재한다.

(참)

ㄷ. $\frac{-2nx+4}{x-2n}=x$에서

$-2nx+4=x^2-2nx$, $x^2=4$

$\therefore\ x=\pm 2$

즉, $x=2$와 $x=-2$일 때, 2개의 교점을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 정답 14

해설 유리함수 $f(x)=\frac{5x-14}{x-3}$의 그래프 위의 임의의 한 점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{5a-14}{a-3}\right)$ $(a>3)$이라 하면

$\overline{PA}=\frac{5a-14}{a-3}$, $\overline{PB}=a$

$\therefore \overline{PA}+\overline{PB}=\frac{5a-14}{a-3}+a=\frac{5(a-3)+1}{a-3}+a$

$=\frac{1}{a-3}+a+5$

이때 $a>3$이므로

$a-3>0$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a-3}+a+5=\frac{1}{a-3}+a-3+8$

$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-3}\cdot(a-3)}+8$

$=2+8=10$

$\therefore m=10$

이때 등호는 $\frac{1}{a-3}=a-3$일 때 성립하므로

$(a-3)^2=1$, $a-3=\pm1$

$\therefore a=4$ $(\because a>3)$

따라서 $p=4$이므로

$m+p=10+4=14$

32 정답 ③

해설 $y=\frac{1}{3x-9}+5=\frac{1}{3(x-3)}+5$이므로

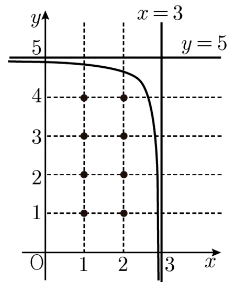
함수 $y=\frac{1}{3x-9}+5$의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=5$

한편, $y=0$을 대입하면

$\frac{1}{3x-9}+5=0$, $\frac{1}{3x-9}=-5$

$3x-9=-\frac{1}{5}$, $x=\frac{44}{15}$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2이다.



(ⅰ) $x=1$일 때, $y=-\frac{1}{6}+5=\frac{29}{6}$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)

(ⅱ) $x=2$일 때, $y=-\frac{1}{3}+5=\frac{14}{3}$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $4+4=8$

33 정답 ②

해설 $f(x)=\frac{2}{x}+k=0$에서

$\frac{2}{x}=-k,\ x=-\frac{2}{k}$

즉, $f\left(-\frac{2}{k}\right)=0$이므로

$f^{-1}(0)=-\frac{2}{k}$

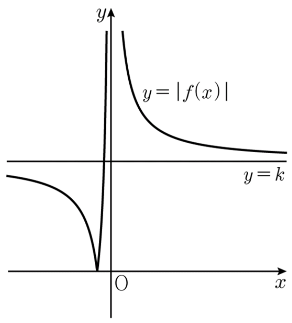
그러므로 $a=k+f^{-1}(0)=k-\frac{2}{k}$

함수 $f(x)=\frac{2}{x}+k$에서 점근선의 방정식은

$x=0,\ y=k$이므로

곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=4$가 오직 한 점에서만 만나려면

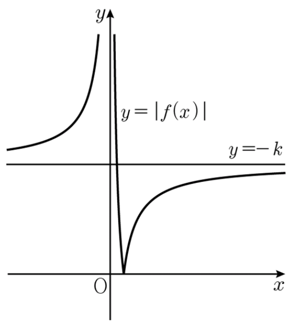
(i) $k>0$일 때



직선 $y=k$가 곡선 $y=|f(x)|$의 점근선이므로 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=4$가 한 점에서만 만나려면 $k=4$

$a=k-\frac{2}{k}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

(ii) $k<0$일 때



직선 $y=-k$가 곡선 $y=|f(x)|$의 점근선이므로

$-k=4,\ k=-4$

$\therefore\ a=k-\frac{2}{k}=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은

$\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{4}$

34 정답 ①

해설 $y=\frac{k}{x-2}+4$에서 $y=0$이면 $x=2-\frac{k}{4}$이므로

$A\left(2-\frac{k}{4},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=-\frac{k}{2}+4$이므로 $B\left(0,\ -\frac{k}{2}+4\right)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $R(2,\ 4)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$P\left(4,\ 4+\frac{k}{2}\right)$

ㄱ. $k=6$이면 $P(4,\ 7)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\frac{k}{2}-4}{2-\frac{k}{4}}=-2$

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{4+\frac{k}{2}}{2+\frac{k}{4}}=2$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 -4이므로 서로 수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4-\frac{1}{16}\cdot(8-k)^2$

$=16-\frac{1}{16}(8-k)^2$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 4보다 작고,

$3<k<8$이므로 $\frac{1}{16}(8-k)^2$는 $\frac{25}{16}$보다 작다.

따라서 S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\frac{1}{16}(8-k)^2=1$이어야 한다.

따라서 방정식 $\frac{1}{16}(8-k)^2=1$의 해는

$k=4\ (\because\ 3<k<8)$

즉, 직선 BP의 기울기는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

35 정답 ②

해설 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+b)-\frac{ab}{c}+b}{cx+d}$

$=\dfrac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d}+\dfrac{a}{c}=\dfrac{b(c-a)}{c(cx+d)}+\dfrac{a}{c}$

주어진 분수함수의 점근선은

$x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c}=-\dfrac{d}{c}$, $a=-d$

$\therefore\ a+d=0$

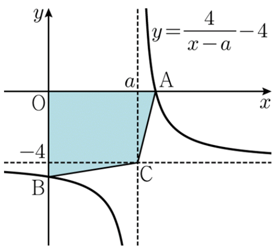
36 정답 ⑤

해설 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

유리함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$의 그래프의 두 점근선은 $x=a$, $y=-4$이고,

$\mathrm{A}(a+1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{4}{a}-4\right)$, $\mathrm{C}(a,\ -4)$이다.

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이를 S라 하면 S는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{CE}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(a+1)\cdot 4+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{a}+4\right)\cdot a$

$=4a+4$

$4a+4=24$에서

$a=5$

37 정답 ④

해설 $y=\dfrac{k}{x-2}+2$에서 $y=0$이면

$x=2-\dfrac{k}{2}=\dfrac{4-k}{2}$ 이므로 $\mathrm{A}\left(\dfrac{4-k}{2},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=2-\dfrac{k}{2}=\dfrac{4-k}{2}$ 이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4-k}{2}\right)$

또, 두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(2,\ 2)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{0+a}{2}=2$에서 $a=4$이고,

$\dfrac{\frac{4-k}{2}+b}{2}=2$에서 $b=2+\dfrac{k}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(4,\ 2+\dfrac{k}{2}\right)$

ㄱ. $k=1$이면 $\mathrm{P}\left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$ (거짓)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-\frac{4-k}{2}}{\frac{4-k}{2}}=-1$이고,

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{-2-\frac{k}{2}}{\frac{4-k}{2}-4}=\dfrac{\frac{-4-k}{2}}{\frac{-4-k}{2}}=1$

따라서 두 기울기의 곱은 $-1\cdot 1=-1$이므로 직선 AB와 직선 AP는 항상 수직이다. (참)

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이는 사각형 PBOQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 빼면 된다.

(□PBAQ의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left\{\left(\dfrac{4-k}{2}\right)+\left(\dfrac{4+k}{2}\right)\right\}\cdot 4-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4-k}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{4-k}{2}\right)$

$=8-\dfrac{(4-k)^2}{8}$

이때 삼각형 OAB의 넓이는 2보다 작고, 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로 삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

$\dfrac{(4-k)^2}{8}=1$에서 $k=4-2\sqrt{2}$

$2<2\sqrt{2}<3$이므로 $1<k<2$이다.

한편, 직선 BP의 기울기는

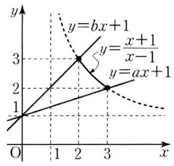
$\dfrac{\left(2+\frac{k}{2}\right)-\left(\frac{4-k}{2}\right)}{4-0}=\dfrac{k}{4}$

따라서 직선 BP의 기울기는 $\dfrac{1}{4}$과 $\dfrac{1}{2}$ 사이의 값이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38 정답 $\frac{4}{3}$

해설 $y=\frac{x+1}{x-1}$ $(2 \le x \le 3)$의 그래프는 다음 그림의 곡선 중 실선 부분이다.

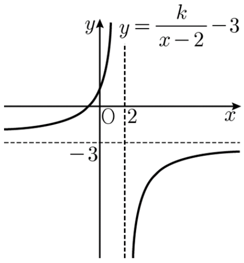


두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b에 관계없이 $(0,\ 1)$을 지나므로 $2 \le x \le 3$에서 주어진 부등식이 항상 성립하려면 다음 그림에서 $a \le \frac{1}{3}$, $b \ge 1$이어야 함을 알 수 있다.

a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은 $\frac{4}{3}$

39 정답 ①

해설 유리함수 $y=\frac{k}{x-2}-3$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이고, 이 그래프가 모든 사분면을 지나기 위해서는 다음 그림과 같이 $x=0$일 때의 함숫값이 양수이어야 한다.



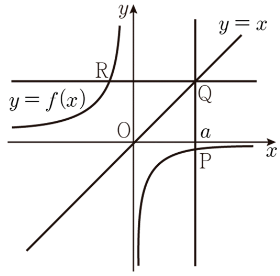
$\frac{k}{0-2}-3>0$, $k+6<0$

$\therefore\ k<-6$

40 정답 48

해설 점 P의 x좌표를 a라 하자.

(i) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(a,\ -\frac{3}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\frac{27}{a},\ a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\frac{3}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\frac{27}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}&=\left(a+\frac{3}{a}\right)\left(a+\frac{27}{a}\right)\\&=a^2+\frac{81}{a^2}+30\\&\ge 2\sqrt{a^2\cdot\frac{81}{a^2}}+30\\&=48\end{aligned}$$

등호가 성립하는 경우는 $a^2=\frac{81}{a^2}$, 즉 $a=3$일 때이다. 따라서 $a=3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 48을 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(a,\ -\frac{27}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\frac{3}{a},\ a\right)$이므로

(i)에서와 같이 $a=-3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 48을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 48

41 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \frac{25}{k-2}+5\right)$ $(k>2)$라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 5)$, $\mathrm{R}\left(2,\ \frac{25}{k-2}+5\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{25}{k-2}+5\right)-5=\frac{25}{k-2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=k-2$이고

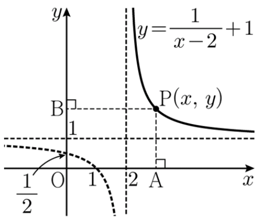
$k>2$에서 $k-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\frac{25}{k-2}+k-2$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{25}{k-2}\cdot(k-2)}$$
$$=2\cdot 5$$
$$=10 \text{ (단, 등호는 } k=7\text{일 때 성립)}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 10이다.

42 정답 5

해설 함수 $y=\frac{1}{x-2}+1$ $(x>2)$의 그래프와 점 P를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=y=\frac{1}{x-2}+1$, $\overline{\mathrm{PB}}=x$ $(x>2)$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\frac{1}{x-2}+1+x$$
$$=x-2+\frac{1}{x-2}+3$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+3$$
$$=5$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x-2=\frac{1}{x-2}\text{일 때 성립}\right)$$

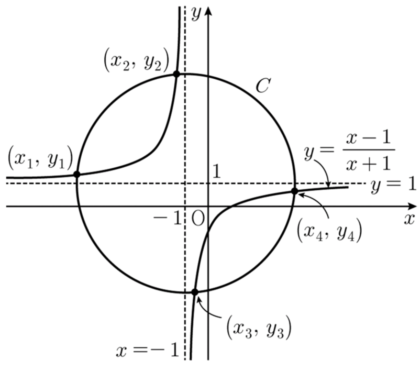
43 정답 10

해설 $y=\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=-\frac{2}{x+1}+1$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$이고, x절편은 1, y절편은 -1이다.

따라서 중심이 $(-1,\ 1)$인 원 C와

유리함수 $y=\frac{x-1}{x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 유리함수의 그래프는 점근선의 교점에 대하여 대칭이므로 주어진 유리함수 $y=\frac{x-1}{x+1}$의 그래프는 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\frac{x_1+x_4}{2}=-1$, $\frac{y_2+y_3}{2}=1$이므로

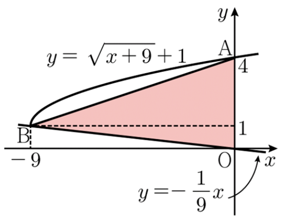
$x_1+x_4=-2$, $y_2+y_3=2$

$\therefore\ S=\frac{x_1+x_4}{y_2+y_3}=-1$

$\therefore\ 10S^2=10$

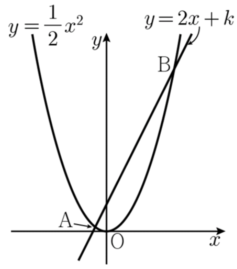
44 정답 ④

해설 무리함수 $y=\sqrt{x+9}+1$의 그래프가
직선 $x=0$과 만나는 점이 A이므로
$\mathrm{A}(0,\ 4)$
또한, 무리함수 $y=\sqrt{x+9}+1$의 그래프가
직선 $y=-\dfrac{1}{9}x$와 만나는 점이 B이므로
점 B의 x좌표는
방정식 $-\dfrac{1}{9}x=\sqrt{x+9}+1$의 실근이다.
$-\dfrac{1}{9}x-1=\sqrt{x+9}$의 양변을 제곱하면
$\dfrac{1}{81}x^2+\dfrac{2}{9}x+1=x+9$
$x^2+18x+81=81x+729$
$x^2-63x-648=0,\ (x+9)(x-72)=0$
$\therefore\ x=-9$ 또는 $x=72$
즉, $\mathrm{B}(-9,\ 1)$ 또는 $\mathrm{B}(72,\ -8)$
그런데 무리함수 $y=\sqrt{x+9}+1$의
정의역은 $\{x\,|\,x\geq-9\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq 1\}$이므로
$\mathrm{B}(-9,\ 1)$
따라서 삼각형 OAB는 다음 그림과 같으므로
구하는 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot9=18$

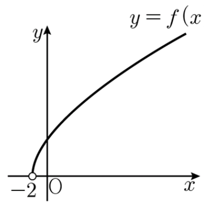


45 정답 ②

해설 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$가 두 점에서 만나므로
이차방정식 $\dfrac{1}{2}x^2=2x+k$, 즉 $x^2-4x-2k=0$의
판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=4+2k>0$에서 $k>-2$이다.



방정식 $x^2-4x-2k=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-2k$ $\cdots$ ㉠
두 점 A, B의 좌표가 $(\alpha,\ 2\alpha+k),\ (\beta,\ 2\beta+k)$이므로
선분 AB의 길이는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}$
$=\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$ $\cdots$ ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{5(16+8k)}$
즉, $f(k)=\sqrt{5(16+8k)}=\sqrt{40(k+2)}\ (k>-2)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과
같다.

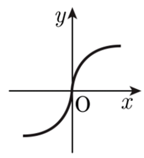


46 정답 3

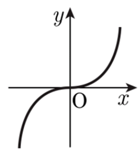
해설 양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$가 각각 만나는 두 점 A, B의 좌표는
$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a})$, $\mathrm{B}(a,\ \sqrt{ka})$이다.
점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로
점 C의 x좌표는 $\sqrt{ka}=\sqrt{x}$에서
$x=ka$
따라서 점 C의 좌표는 $(ka,\ \sqrt{ka})$이다.
점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표와 같으므로
점 D의 y좌표는
$y=\sqrt{k\cdot ka}=k\sqrt{a}$
이므로 점 D의 좌표는 $(ka,\ k\sqrt{a})$이다.
삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot a\cdot(\sqrt{ka}-\sqrt{a})=\frac{1}{2}a\sqrt{a}(\sqrt{k}-1)$
삼각형 BCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot(ka-a)\cdot(k\sqrt{a}-\sqrt{ka})$
$=\frac{1}{2}a\sqrt{a}(\sqrt{k}-1)\cdot\sqrt{k}(k-1)$
삼각형 BCD의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 $2\sqrt{3}$배이므로 $\sqrt{k}(k-1)=2\sqrt{3}$
양변을 제곱하면
$k(k-1)^2=12$
$k^3-2k^2+k-12=0$
$(k-3)(k^2+k+4)=0$
$\therefore\ k=3$

47 정답 ③

해설 $-1\le x\le 0$일 때, $f(x)=-x\ \ge 0$이므로
$g(x)=f(f(x))$
$\quad=f(-x)=-\sqrt{-x}$
또, $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=-\sqrt{x}\le 0$이므로
$g(x)=f(f(x))=f(-\sqrt{x})$
$\quad=-(-\sqrt{x})=\sqrt{x}$
따라서 $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & (-1\le x\le 0)\\ \sqrt{x} & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로
$y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

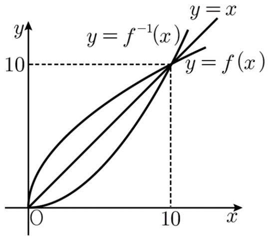


이때 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



48 정답 33

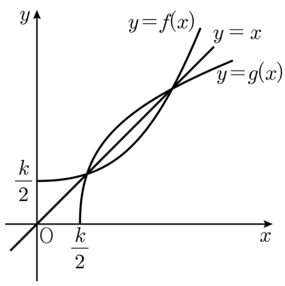
해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$\sqrt{10x}=x$에서
$10x=x^2$, $x(x-10)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=10$
따라서 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$ 위에 있는 점은
$(1, 1), (2, 2), \cdots, (9, 9)$의 9개이고,
직선 $y=x$보다 위에 있는 점은
$f(1)=\sqrt{10}<4$에서
$(1, 2), (1, 3)$
$f(2)=\sqrt{20}<5$에서
$(2, 3), (2, 4)$
$f(3)=\sqrt{30}<6$에서
$(3, 4), (3, 5)$
$f(4)=\sqrt{40}<7$에서
$(4, 5), (4, 6)$
$f(5)=\sqrt{50}<8$에서
$(5, 6), (5, 7)$
$f(6)=\sqrt{60}<8$에서
$(6, 7)$
$f(7)=\sqrt{70}<9$에서
$(7, 8)$
의 12개이다.
이때 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$보다 아래에 있는 점의 개수는 직선 $y=x$보다 위에 있는 점의 개수와 같으므로
구하는 점의 개수는
$9+2\cdot 12=33$

49 정답 ①

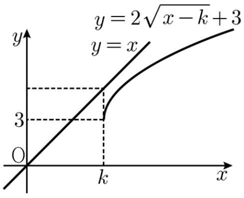
해설 함수 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k\ (x\geq 0)$은 집합 $\{x|x\geq 0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\geq\frac{1}{2}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k$라 하면
$\frac{1}{4}x^2=y-\frac{1}{2}k$
$x^2=4y-2k$
$\therefore\ x=\sqrt{4y-2k}\ (\because\ x\geq 0)$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{4x-2k}$
즉, 함수 $g(x)=\sqrt{4x-2k}$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k=x$에서 $x^2-4x+2k=0$
이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-2k>0$
또한 이차방정식의 두 실근의 곱은 음이 아닌 실수이므로
$2k\geq 0$
$\therefore\ 0\leq k<2$
따라서 정수 k의 개수는 0, 1로 2이다.

50 정답 5

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않으려면 다음과 같이 $f(x)=2\sqrt{x-k}+3$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나지 않아야 한다.



$f(x)=2\sqrt{x-k}+3$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나지 않아야 하므로

$2\sqrt{x-k}+3=x$, $2\sqrt{x-k}=x-3$

$4(x-k)=(x-3)^2$, $x^2-10x+9+4k=0$

$x^2-10x+9+4k=0$이 허근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=25-(9+4k)<0$, $16-4k<0$

$\therefore k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5

51 정답 ③

해설 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 교점 P의 x좌표는 방정식 $\sqrt{2x+3}=x$의 실근이므로 양변을 제곱하면

$2x+3=x^2$

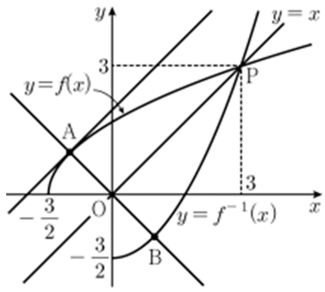
$x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\geq 0$)

즉, 점 P의 x좌표가 3이므로

P$(3, 3)$

한편, 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 선분 AB의 길이가 최대가 되려면 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 기울기가 1인 직선이 점 A에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 한다.



이 직선의 방정식을 $y=x+a$ (a는 상수)라 하면

접점의 x좌표는 방정식 $x+a=\sqrt{2x+3}$의 실근이므로 양변을 제곱하면

$x^2+2ax+a^2=2x+3$

$\therefore x^2+2(a-1)x+a^2-3=0$ $\cdots㉠$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-3)=0$

$-2a+4=0$

$\therefore a=2$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

즉, A$(-1, 1)$, B$(1, -1)$이므로 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$

또한, 직선 AB의 방정식은

$y-1=-(x+1)$

$\therefore x+y=0$

점 P$(3, 3)$과 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는

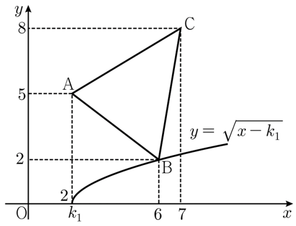
$\frac{|3+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

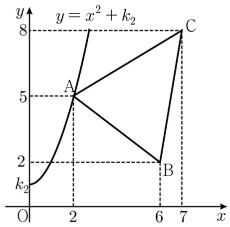
$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}}=6$

52 정답 ①

해설 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 점 B에서 만날때의 k의 값을 k_1이라 하면
$y=\sqrt{x-k_1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



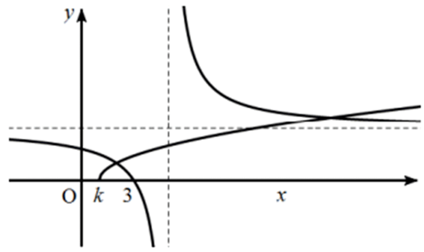
이때 $f(x)=\sqrt{x-k}$에서 $k>k_1$이면
곡선 $y=f(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.
즉, k는 곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 최대이고 최댓값은 k_1이다.
곡선 $y=\sqrt{x-k_1}$이 점 B$(6, 2)$를 지나므로
$2=\sqrt{6-k_1}$, $6-k_1=4$
$\therefore k_1=2$
또한, 곡선 $y=f(x)$가 점 C$(7, 8)$ 지날 때 최소이므로
$8=\sqrt{7-k}$, $64=7-k$
$\therefore k=-57$
따라서 $-57\le k\le 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만난다. $\cdots$ ㉠
한편, $y=\sqrt{x-k}$에서
$y^2=x-k$, $x=y^2+k$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=x^2+k$
즉, 함수 $y=f(x)$의 역함수는
$f^{-1}(x)=x^2+k\ (x\ge 0)$
같은 방법으로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 점 A에서 만날 때의 k의 값을 k_2라 하면
$y=x^2+k_2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f^{-1}(x)=x^2+k$에서 $k>k_2$이면
곡선 $y=f^{-1}(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.
즉, k는 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 A를 지날 때 최대이고 최댓값은 k_2이다.
곡선 $y=x^2+k_2$가 점 A$(2, 5)$를 지나므로
$5=2^2+k_2$
$\therefore k_2=1$
또한 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 C$(7, 8)$을 지날 때 최소이므로
$8=49+k$
$\therefore k=-41$
따라서 $-41\le k\le 1$일 때,
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만난다. $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 동시에 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-41\le k\le 1$이므로 구하는 최댓값은 1이다.

53 정답 ①

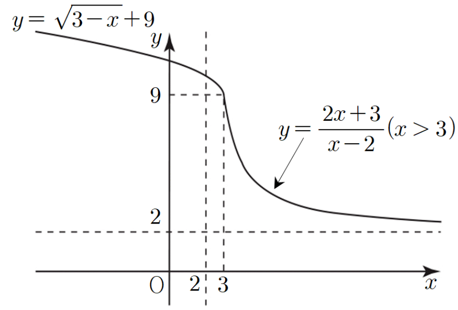
해설 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 점근선은 두 직선 $x=5$, $y=3$
$y=0$일 때 $x=3$이므로 그래프는 다음과 같다.



위 그림에서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k\le 3$이어야 한다.
따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3

54 정답 ⑤

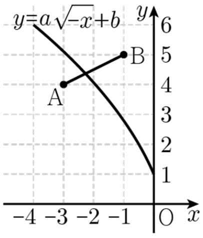
해설 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질을 알고 문제해결하기
(가)에서 치역이 $\{y\mid y>2\}$이고,
(나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.



$f(3)=9$이므로 $a=9$
$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$
$f(2)f(k)=10f(k)=40$
$\therefore f(k)=4$
$\dfrac{2k+3}{k-2}=4$
$2k+3=4k-8$
따라서 $k=\dfrac{11}{2}$

55 정답 ③

해설 a, b는 자연수이므로 함수 $y=a\sqrt{-x}+b$의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



(ⅰ) $a=1$인 경우

함수 $f(x)=\sqrt{-x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는

$f(-1)\le 5$이고 $f(-3)\ge 4$이어야 하므로

$\sqrt{1}+b\le 5,\ \sqrt{3}+b\ge 4$

따라서 $4-\sqrt{3}\le b\le 4$

이를 만족시키는 자연수 b는 3, 4이므로

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$

(ⅱ) $a=2$인 경우

함수 $f(x)=2\sqrt{-x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는

$f(-1)\le 5$이고 $f(-3)\ge 4$이어야 하므로

$2\sqrt{1}+b\le 5$, $2\sqrt{3}+b\ge 4$

따라서 $4-2\sqrt{3}\le b\le 3$

이를 만족시키는 자연수 b는 1, 2, 3이므로

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$

(ⅲ) $a=3$인 경우

함수 $f(x)=3\sqrt{-x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는

$f(-1)\le 5$이고 $f(-3)\ge 4$이어야 하므로

$3\sqrt{1}+b\le 5$, $3\sqrt{3}+b\ge 4$

따라서 $4-3\sqrt{3}\le b\le 2$

이를 만족시키는 자연수 b는 1, 2이므로

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$

(ⅳ) $a=4$인 경우

함수 $f(x)=4\sqrt{-x}+b$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는

$f(-1)\le 5$이고 $f(-3)\ge 4$이어야 하므로

$4\sqrt{1}+b\le 5$, $4\sqrt{3}+b\ge 4$

따라서 $4-4\sqrt{3}\le b\le 1$

이를 만족시키는 자연수 b는 1이므로

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ 1)$

(ⅴ) $a\ge 5$인 경우 $f(-1)=a+b>5$이므로

함수 $f(x)=a\sqrt{-x}+b$의 그래프는 선분 AB와 만나지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$2+3+2+1=8$

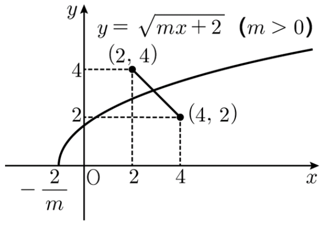
56 정답 ③

해설 무리함수 $y=\sqrt{mx+2}=\sqrt{m\left(x+\dfrac{2}{m}\right)}$ $(m>0)$의

그래프는 함수 $y=\sqrt{mx}$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{2}{m}$만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.



이때 두 점 $(4,\ 2)$, $(2,\ 4)$를 이은 선분과 무리함수

$y=\sqrt{mx+2}$의 그래프가 만나려면 점 $(2,\ 4)$가

무리함수 $y=\sqrt{mx+2}$의 그래프 위의 점이거나

위쪽에 있어야 하고, 점 $(4,\ 2)$가

무리함수 $y=\sqrt{mx+2}$의 그래프 위의 점이거나

아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore\ \sqrt{2m+2}\le 4,\ \sqrt{4m+2}\ge 2$

(ⅰ) $\sqrt{2m+2}\le 4$에서

$2m+2\le 16$

$2m\le 14$

$\therefore\ 0<m\le 7\ (m>0)$

(ⅱ) $\sqrt{4m+2}\ge 2$에서

$4m+2\ge 4$

$4m\ge 2$

$\therefore\ m\ge \dfrac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 값의 범위는

$\dfrac{1}{2}\le m\le 7$

57 정답 ③

해설 곡선 $y=cx^2$ 과 $y=bx$의 교점의 x 좌표 (단, $x\neq 0$)는 $cx^2=bx$ $\therefore\ x=\dfrac{b}{c}$

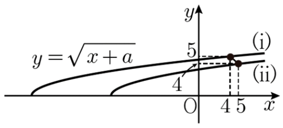
곡선 $y=a\sqrt{x}$ 와 $y=bx$의 교점의 x 좌표(단, $x\neq 0$)는 $a\sqrt{x}=bx$ $\therefore\ x=\dfrac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3=a^2c$

58 정답 ③

해설 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.



(ⅰ) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(4,\ 5)$를 지날 때

$5=\sqrt{4+a}$, $25=4+a$

$\therefore\ a=21$

(ⅱ) $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(5,\ 4)$를 지날 때

$4=\sqrt{5+a}$, $16=5+a$

$\therefore\ a=11$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $11\le a\le 21$이므로

$M=21$, $m=11$

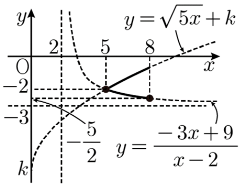
$\therefore\ M+m=32$

59 정답 -7

해설 $y=\dfrac{-3x+9}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}-3$이므로

함수 $y=\dfrac{-3x+9}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $5\le x\le 8$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{-3x+9}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{5x}+k$가 점 $(5,\ -2)$를 지날 때 k의 값이 최대이다.



즉, $-2=\sqrt{5\cdot 5}+k$

$\therefore\ k=-7$

따라서 k의 최댓값은 -7이다.

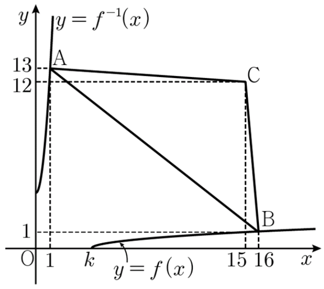
60 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 k의 값이 증가하면

곡선 $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{x-k}$는 점 B를 지난 이후에 삼각형과 만나지 않고,

곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 $1=\dfrac{1}{3}\sqrt{16-k}$이므로

k는 7이다.



즉, $k>7$이면 곡선 $y=f(x)$와 삼각형은 만나지 않는다.

또, $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{x-k}$의 역함수를 구하면

$y=9x^2+k\ (x\ge 0)$

마찬가지로 k의 값이 증가하면 곡선 $y=9x^2+k$가 점 A를 지난 이후 삼각형과 만나지 않고,

곡선 $y=9x^2+k$가 점 A를 지날 때

$13=9\cdot 1^2+k$이므로 k는 4이다.

즉, $k>4$이면 곡선 $y=9x^2+k$와 삼각형은 만나지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형과 동시에 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 4이다.

61 정답 136

해설 $xy-3x+3y=k$ $\cdots$ ㉠

곡선 ㉠과 직선 $x-y=-16$의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하고, $y=x+16$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+16x+(48-k)=0$ $\cdots$ ㉡

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=48-k=60$

$\therefore\ k=-12$

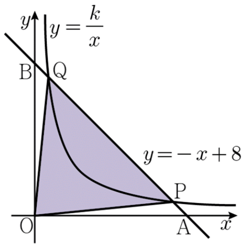
$k=-12$를 ㉡에 대입하여 풀면 $x=-6$ 또는 $x=-10$

$\therefore\ \mathrm{P}(-6,\ 10)$, $\mathrm{Q}(-10,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}^2=6^2+10^2=136$

62 정답 ②

해설 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A$(8,\ 0)$, B$(0,\ 8)$



삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26이므로

$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\frac{1}{2}(32-26)=3$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot b=3$에서 $b=\frac{3}{4}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8=\frac{3}{4}$에서 $a=\frac{29}{4}$이다.

또, 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\frac{29}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{87}{16}$

63 정답 ⑤

해설 $f(x)=\frac{5x+b}{x-a}=\frac{5(x-a)+5a+b}{x-a}=\frac{5a+b}{x-a}+5$

이므로 $f(x)=\frac{5x+b}{x-a}$의 그래프는 $y=\frac{5a+b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

즉, 조건 (나)에서

$5a+b=10$ $\cdots$ ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=5$이고 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 5)$이다.

또한, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점과 일치하므로 점 $(5,\ a)$이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4,\ 1)$이다.

점 $(5,\ a)$와 점 $(a+4,\ 1)$이 같으므로

$a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$5+b=10$ $\therefore b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

64 **정답** ④

해설 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와 직선 $y=-3$과 만나는 점의 개수의 합은 1이다.
곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=3$, $y=-3$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.
이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로
$b=3$ 또는 $b=-3$ ⋯ ㉠
$f(x)=\frac{a}{x}+b$, 즉 $y=\frac{a}{x}+b$에서
$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$
이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$
$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$
조건 (나)에서 $f^{-1}(3)=f(3)-2$이므로
$\frac{a}{3-b}=\frac{a}{3}+b-2$ ⋯ ㉡
㉡에서 $b\neq3$이므로 ㉠에서 $b=-3$이다.
㉡에 $b=-3$을 대입하면
$\frac{a}{6}=\frac{a}{3}-5$
$\therefore\ a=30$
따라서 $f(x)=\frac{30}{x}-3$이므로
$f(5)=\frac{30}{5}-3=3$