

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

## 유형별 학습

이름

- 01** 집합  $A = \{\emptyset, 1, 2, \{3, 4\}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ.  $\{1\} \subset A$
- ㄴ.  $\{3, 4\} \not\subset A$
- ㄷ.  $\emptyset \subset A$
- ㄹ.  $\{\emptyset\} \not\subset A$
- ㅁ.  $\{\emptyset, 1, 2, \{3, 4\}\} \subset A$

- ① ㄱ  
③ ㄱ, ㄷ, ㅁ  
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

- ② ㄱ, ㄴ  
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

- 03** 다음 보기 중 실수  $a, b, c, x, y$ 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)의 개수는?

〈보기〉

- (가)  $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (나)  $x^2 - x + 1 > 0$
- (다)  $|a+b| \leq |a| + |b|$
- (라)  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
- (마)  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
- (바)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개  
④ 3개  
② 5개  
⑤ 2개  
③ 4개

- 02** 전체집합  $U$ 의 세 부분집합  $A, B, C$ 에 대하여 다음 중 집합  $(A-B) \cup (A-C)$ 과 항상 같은 집합은?

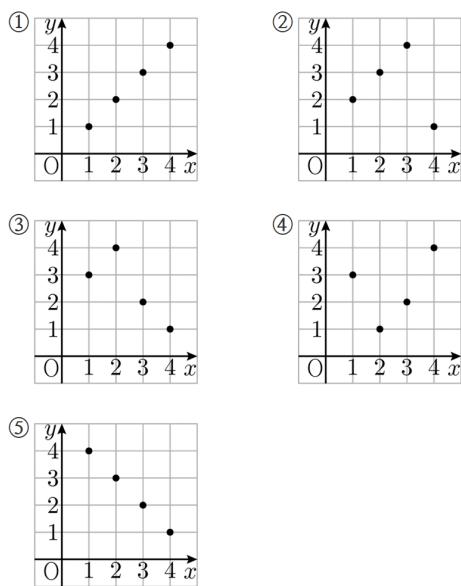
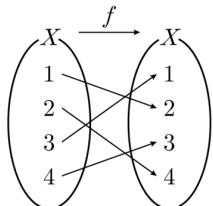
- ①  $(A \cap B) - C$   
②  $(A \cup C) - B$   
③  $A - (B - C)$   
④  $A - (B \cap C)$   
⑤  $A - (B \cup C)$



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 04** 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 의 대응관계가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프로 알맞은 것은?



- 05**  $x > 1$  일 때,  $x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq a$  가 항상 성립하도록 하는 실수  $a$ 의 최댓값을 구하시오.

- 06** 집합  $A$ 에 대하여  $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라 하자.  
 $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  일 때, 다음 보기 중 옳은 것의 개수는?

<보기>

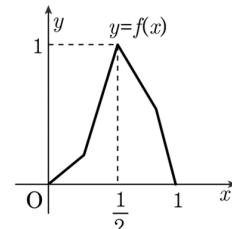
- ㄱ.  $\{\{1, 2\}\} \in P(A)$
- ㄴ.  $\{\{1, 2\}\} \subset P(A)$
- ㄷ.  $\emptyset \in P(A)$
- ㄹ.  $\emptyset \subset P(A)$

- ① 1                  ② 2                  ③ 3  
 ④ 4                  ⑤ 없다.

- 07** 두 실수  $a, b$ 에 대하여 두 집합  $A = \{6, a^2\}$ ,  $B = \{16, b^2 - b\}$ 가 서로 같을 때,  $a+b$ 의 최솟값은?

- ① -8                  ② -6                  ③ -1  
 ④ 2                  ⑤ 6

- 08** 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때,  $0 \leq x \leq 1$  을 만족하는 방정식  $f(f(x)) = \frac{1}{2}$  의 실근의 개수는?



- ① 1                  ② 2                  ③ 3  
 ④ 4                  ⑤ 5

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

09

[2023년 11월 고1 25번/3점]

정수  $k$ 에 대한 두 조건  $p, q$ 가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든  $k$ 의 값의 합을 구하시오.

$p$ : 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x^2 + 2kx + 4k + 5 > 0 \text{이다.}$$

$q$ : 어떤 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 = k - 2$ 이다.

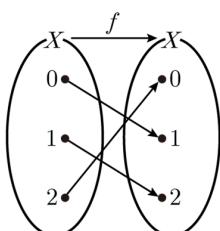
10

실수  $x$ 에 대하여 분수식  $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하시오.

11

집합  $X = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 함수  $f$ 가 다음 그림과 같다.

$f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )으로 정의할 때,  $f^{99}(0) + 2f^{100}(1) + 3f^{101}(2)$ 의 값을 구하시오.



12

세 조건  $p, q, r$ 에 대하여  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이고,  $\sim q$ 는  $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다. 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 할 때,

집합  $\{(Q \cap R^C) \cup P\}^C \cap (Q \cap R)$ 를 간단히 한 것은?  
(단, 집합  $P, Q, R$ 는 전체집합  $U$ 의 부분집합이다.)

①  $P$

②  $Q$

③  $R$

④  $Q - P$

⑤  $R - Q$

13

$f(x-1) = \frac{x+1}{x-1}$  일 때,  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 에 대하여 다음 중  $f^{-1}(p-1)$ 과 같은 것은? (단,  $p \neq 1, p \neq 2$ )

①  $-\frac{2}{p-2}$

②  $-\frac{1}{p-1}$

③  $\frac{1}{p-1}$

④  $\frac{1}{p-2}$

⑤  $\frac{2}{p-2}$

14

함수  $f$ 에 대하여

$f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f^2(x)), \dots$ 로 정의하자.

집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 가 세 조건  $f(1) = 3, f(2) = 1, f^4 = I$  ( $I$ 는 항등함수)를 만족시킨다. 함수  $f$ 의 역함수를  $g$ 라 할 때,

$g^{13}(3) + g^{14}(4)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

**15**

$a, b$ 가 양수일 때,  $2 \leq x \leq 3$ 을 만족하는 임의의 실수  $x$ 에 대하여  $ax+2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq bx+2$ 가 성립할 때,  $a$ 의 최댓값과  $b$ 의 최솟값의 합은?

①  $\frac{2}{3}$

② 1

③  $\frac{4}{3}$

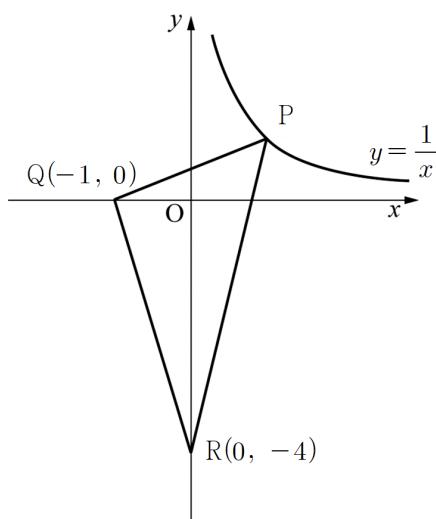
④  $\frac{5}{3}$

⑤ 2

**16**

[2008년 6월 고2 이과 15번]

유리함수  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) 위의 임의의 점 P와 점 Q( $-1, 0$ ), R( $0, -4$ )를 꼭짓점으로 하는  $\triangle PQR$ 의 넓이의 최솟값은?



① 4

④ 10

② 6

⑤ 12

③ 8

**17**

함수  $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와 직선  $y = -kx + 2 + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수  $k$ 의 값의 합은?

①  $-\frac{5}{2}$

④ -1

② -2

⑤  $-\frac{1}{2}$

③  $-\frac{3}{2}$

**18**

세 집합

$$A = \{(x, y) | y = m(x+1)-1, m \text{은 실수}\},$$

$$B = \left\{(x, y) \mid y = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|, x \neq 1 \text{인 실수}\right\},$$

$$C = \{(x, y) | y = 2 - \sqrt{x-n}, x \geq n \text{이고 } n \text{은 실수}\}$$

에 대하여  $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한  $m$ 의 범위는

(가) 이고,  $n(B \cap C) = 0$ 이기 위한  $n$ 의 범위는

(나) 이다. 빈 칸에 들어갈 식을 알맞게 짹지은 것은?

(가)

①  $m > \frac{1}{2}$

(나)

$n \geq 1$

②  $m > \frac{1}{2}$

$n > 1$

③  $m > \frac{2}{3}$

$n \geq \frac{3}{4}$

④  $m > \frac{2}{3}$

$n > \frac{3}{4}$

⑤  $m \geq \frac{2}{3}$

$n > \frac{3}{4}$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

**19**

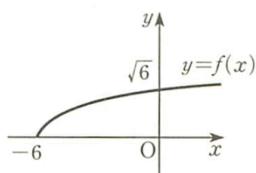
두 조건  $p: 2 < x < 6$ ,  $q: x < 5$  또는  $x > k$ 에 대하여  
명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 정수인 반례가 6뿐이다.  
이때 실수  $k$ 의 값의 범위를 구하시오. (단,  $k > 5$ )

**20**

양수  $a, b$ 에 대하여 다음 식  $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$ 의  
최솟값과 그 때의  $a, b$ 의 값을 차례대로 구하여라.

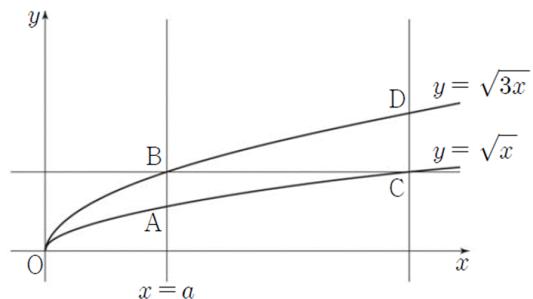
**21**

무리함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  
 $y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점을 P라 하고  
두 그래프  $y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$ 가 각각  $x$ 축,  $y$ 축과  
만나는 점을 A, B라 할 때,  $\triangle ABP$ 의 넓이를 구하시오.



**22**

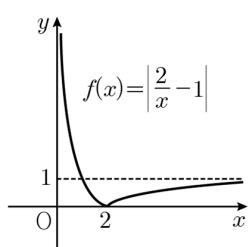
[2016년 11월 고2 문과 27번/4점]  
그림과 같이 양수  $a$ 에 대하여 직선  $x = a$ 와  
두 곡선  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{3x}$ 가 만나는 점을 각각 A, B  
라 하자. 점 B를 지나고  $x$ 축과 평행한 직선이  
곡선  $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고  
 $y$ 축과 평행한 직선이 곡선  $y = \sqrt{3x}$ 와 만나는 점을 D  
라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가  $\frac{1}{4}$  일 때,  
 $a$ 의 값을 구하시오.



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 23** 아래 그림은 함수  $f(x) = \left| \frac{2}{x} - 1 \right|$  ( $x > 0$ )의  
그래프이다.



$0 < a < b$ 인 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $f(a) = f(b)$ 가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

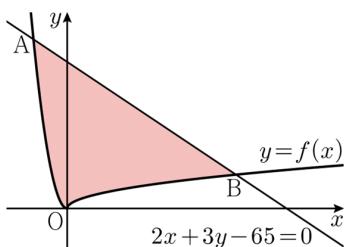
$$\begin{aligned}\neg. f(b) &> 1 \\ \neg. 1 &< a < 2 \\ \neg. f(a)f(b) &= -\frac{(a-2)(b-2)}{ab}\end{aligned}$$

- ①  $\neg$       ②  $\neg$       ③  $\neg, \sqsubset$   
④  $\sqsubset, \sqsubseteq$       ⑤  $\neg, \sqsubset, \sqsubseteq$

- 24** 함수  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 그래프와

직선  $2x + 3y - 65 = 0$ 이

두 점 A(-5, 25), B(25, 5)에서 만난다. 다음 그림과 같이 주어진 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

## 유형별 학습

이름

### 빠른정답

01 ④	02 ③	03 ③
04 ⑤	05 4	06 ④
07 ②	08 ④	09 9
10 5	11 7	12 ④
13 ⑤	14 ①	15 ①
16 ①	17 ⑤	18 ④
19 $6 \leq k < 7$	20 최솟값=7, $a=1, b=2$	
21 36	22 16	23 ④
24 325		



# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

## 유형별 학습

이름

### 01 정답 ④

해설 ㄹ.  $\emptyset \in A$ 이므로  $\{\emptyset\} \subset A$  (거짓)

### 02 정답 ③

$$\begin{aligned} \text{해설 } & (A - B) \cup (A - C^C) \\ &= (A \cap B^C) \cup (A \cap C) \\ &= A \cap (B^C \cup C) \\ &= A \cap (B \cap C^C)^C \\ &= A - (B - C) \end{aligned}$$

### 03 정답 ③

$$\text{해설 } (\text{가}) x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \text{이므로}$$

실수  $x, y$ 에 대하여 항상 성립한다.

$$(\text{나}) x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

실수  $x, y$ 에 대하여 항상 성립한다.

$$\begin{aligned} (\text{다}) & |a+b|^2 - (|a|+|b|)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + 2|ab| + b^2) \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0 \text{ (단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 실수  $a, b$ 에 대하여 항상 성립한다.

$$(\text{라}) [\text{반례}] a = b = -1 \text{인 경우 } a + b = -2, \\ 2\sqrt{ab} = 2 \text{이므로}$$

부등식이 성립하지 않는다.

$$(\text{마}) [\text{반례}] a = b = -1, c = 1 \text{인 경우} \\ (a+b)(b+c)(c+a) = 0, 8abc = 8 \text{이므로}$$

부등식이 성립하지 않는다.

(바) 코시-슈바르츠 부등식은 모든 실수에 대하여 항상 성립한다.

따라서 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식은 (가), (나), (다), (바)의 4개이다.

### 04 정답 ⑤

해설  $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 4$   
 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 3$   
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$   
 $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(3) = 1$   
따라서 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 ⑤이다.

### 05 정답 4

해설  $x > 1$ 이므로  $x - 1 > 0$   
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4 \text{이므로}$$

$a \leq 4$ 이어야 한다.

따라서  $a$ 의 최댓값은 4

### 06 정답 ④

해설  $P(A)$ 는 집합  $A$ 의 부분집합으로 이루어진 집합이므로  
 $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\},$   
 $\{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}\}$   
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 모두 옳다.

### 07 정답 ②

해설  $A = B$ 이므로  
 $a^2 = 16, b^2 - b = 6$   
 $a^2 = 16$ 에서  $a = -4$  또는  $a = 4$   
 $b^2 - b = 6$ 에서  $b^2 - b - 6 = 0$   
 $(b-3)(b+2) = 0$   
 $\therefore b = -2$  또는  $b = 3$   
따라서  $a = -4, b = -2$ 일 때  $a+b$ 의 값은 최소이고 그 값은  $-6$ 이다.

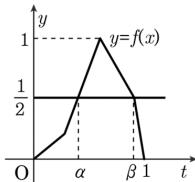


# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 08 정답 ④

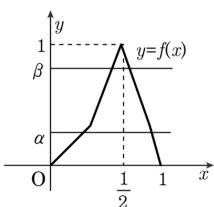
해설  $f(x)=t$  라 하면



$$f(f(x)) = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}$$

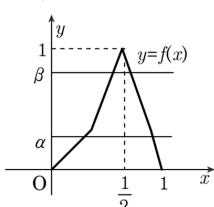
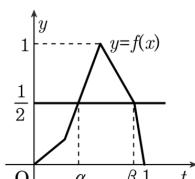
$$t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta \left( 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1 \right)$$



(i)  $t = \alpha$  일 때,  $f(x) = \alpha$  를 만족하는  $x$  는 두 개

(ii)  $t = \beta$  일 때,  $f(x) = \beta$  를 만족하는  $x$  는 두 개

따라서 방정식  $f(f(x)) = \frac{1}{2}$  의 실근의 개수는 4이다.



## 09 정답 9

해설 '모든', '어떤'을 포함한 명제 이해하기

모든 실수  $x$  에 대하여  $x^2 + 2kx + 4k + 5 > 0$  이므로

이차방정식  $x^2 + 2kx + 4k + 5 = 0$  의 판별식을  $D$  라 하면

$$D = (2k)^2 - 4(4k+5) < 0$$

$$4k^2 - 16k - 20 = 4(k+1)(k-5) < 0$$

$$-1 < k < 5$$

어떤 실수  $x$  에 대하여  $x^2 = k-2$  이므로  $k-2 \geq 0$  에서  $k \geq 2$

이때 정수  $k$ 에 대한 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각

$P, Q$ 라 하자.

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}, Q = \{2, 3, 4, \dots\}$$

이때  $P \cap Q = \{2, 3, 4\}$  이므로 두 조건  $p, q$ 가 모두 참인 문제가 되도록 하는 정수  $k$ 의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수  $k$ 의 값의 합은 9이다.

## 10 정답 5

$$\begin{aligned} \text{해설 } \frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1} &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1} \\ &= x^2 + 1 + \frac{4}{x^2 + 1} + 1 \end{aligned}$$

이때 모든 실수  $x$ 에 대하여 항상

$$x^2 + 1 > 0, \frac{4}{x^2 + 1} > 0 \text{ 이므로}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 + 1 + \frac{4}{x^2 + 1} + 1 &\geq 2 \sqrt{(x^2 + 1) \cdot \frac{4}{x^2 + 1}} + 1 \\ &= 4 + 1 = 5 \quad \left( \text{단, 등호는 } x^2 + 1 = \frac{4}{x^2 + 1} \text{ 일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

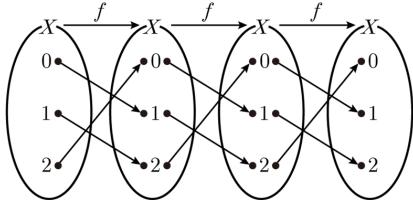
따라서 구하는 최솟값은 5이다.

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 11 정답 7

**해설** 함수  $f$ 를 연속하여 3번 합성하면 다음 그림과 같다.



따라서  $f^3(x) = x$  이므로

$$\begin{aligned} f^{3n}(x) &= x, f^{3n+1}(x) = f(x), f^{3n+2}(x) = f^2(x) \\ \text{이때 } f^{99}(0) &= 0, f^{100}(1) = f(1) = 2, \\ f^{101}(2) &= f^2(2) = f(0) = 1 \text{ 이므로} \\ f^{99}(0) + 2f^{100}(1) + 3f^{101}(2) &= 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

## 12 정답 ④

**해설**  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q$$

$$\therefore P \subset Q$$

또한,  $\sim q$ 는  $\sim r$ 이기 위한 필요조건이므로

$$\sim r \Rightarrow \sim q$$

명제가 참이면 그 대우도 참이므로  $q \Rightarrow r$

$$\therefore Q \subset R$$

즉, 세 집합  $P, Q, R$ 의 포함 관계는

$$\begin{aligned} P \subset Q \subset R, R^C \subset Q^C \subset P^C \\ \therefore \{(Q \cap R^C) \cup P\}^C \cap (Q \cap R) \\ = \{(Q \cap R^C)^C \cap P^C\} \cap (Q \cap R) \\ = (\emptyset^C \cap P^C) \cap (Q \cap R) \\ (\because Q \cap R^C = Q - R = \emptyset) \\ = (U \cap P^C) \cap Q (\because \emptyset^C = U, Q \subset R) \\ = P^C \cap Q \\ = Q - P \end{aligned}$$

## 13 정답 ⑤

**해설**  $x - 1 = t$ 로 놓으면  $x = t + 1$  이므로

$$f(t) = \frac{t+2}{t}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$y = \frac{x+2}{x} \text{에서 } xy = x + 2$$

$$x(y-1) = 2, x = \frac{2}{y-1}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{2}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1}$$

위의 식에  $x$  대신에  $p-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f^{-1}(p-1) &= \frac{2}{(p-1)-1} \\ &= \frac{2}{p-2} \end{aligned}$$

## 14 정답 ①

**해설**  $f(1)=3, f(2)=1$ 이고, 함수  $f$ 가 일대일대응이므로

$$f(3)=2, f(4)=4 \text{ 또는 } f(3)=4, f(4)=2 \text{이다.}$$

(i)  $f(3)=2, f(4)=4$ 이면

$$f(1)=3, f^2(1)=2, f^3(1)=1, f^4(1)=3$$

이므로  $f^4 \neq I$ 가 되어 성립하지 않는다.

(ii)  $f(3)=4, f(4)=2$ 이면

$$f(1)=3, f^2(1)=4, f^3(1)=2, f^4(1)=1$$

$$f(2)=1, f^2(2)=3, f^3(2)=4, f^4(2)=2$$

$$f(3)=4, f^2(3)=2, f^3(3)=1, f^4(3)=3$$

$$f(4)=2, f^2(4)=1, f^3(4)=3, f^4(4)=4$$

이므로  $f^4 = I$ 가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=4, f(4)=2 \text{이므로}$$

$$g(1)=2, g(2)=4, g(3)=1, g(4)=3 \text{이고},$$

$$f^4 = I \text{에서 } g^4 = (f^{-1})^4 = I \text{이다.}$$

따라서  $g^{13} = g^{4 \cdot 3 + 1} = g, g^{14} = g^{4 \cdot 3 + 2} = g^2$ 이므로

$$g^{13}(3) + g^{14}(4) = g(3) + g(g(4))$$

$$= 1 + g(3) = 1 + 1 = 2$$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

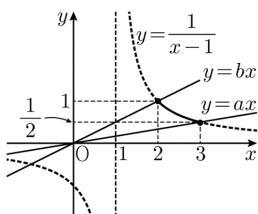
집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 15 정답 ①

**해설**  $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$  ( $2 \leq x \leq 3$ )이므로

$$ax+2 \leq 2 + \frac{1}{x-1} \leq bx+2$$

$$ax \leq \frac{1}{x-1} \leq bx$$



위의 그래프에 의하여  $a \leq \frac{1}{6}$ ,  $b \geq \frac{1}{2}$  이다.

$$\therefore (a\text{의 최댓값}) + (b\text{의 최솟값}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

## 16 정답 ①

**해설** 유리함수와 직선 사이의 최단거리 구하기

직선 QR의 방정식은  $4x+y+4=0$ 이고,

점  $P(a, \frac{1}{a})$ 에서 직선 QR까지의 거리  $h$ 는

$$h = \frac{\left| 4a + \frac{1}{a} + 4 \right|}{\sqrt{17}}$$

$a$ 는 양수이므로  $4a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4$

$$\text{따라서 } h = \frac{\left| 4a + \frac{1}{a} + 4 \right|}{\sqrt{17}} \geq \frac{8}{\sqrt{17}} \text{ 이다.}$$

$\therefore \triangle PQR$ 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{8}{\sqrt{17}} = 4$$

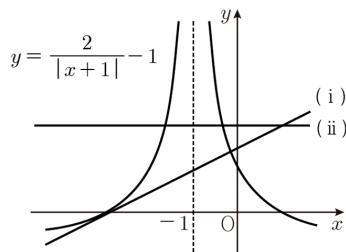
## 17 정답 ⑤

**해설**  $y = \frac{2}{|x+1|} - 1 = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1 & (x > -1) \\ -\frac{2}{x+1} - 1 & (x < -1) \end{cases}$

이고 직선  $y = -kx + 2 + k$ 는  $k$ 의 값에 관계없이

점 (1, 2)를 지나므로 함수  $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와

직선  $y = -kx + 2 + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 함수  $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와

직선  $y = -kx + 2 + k$ 가 접할 때,

$$-\frac{2}{x+1} - 1 = -kx + 2 + k \text{에서}$$

$$kx^2 - 3x - k - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = 3^2 - 4k \cdot (-k - 5) = 0 \text{에서}$$

$$(2k+9)(2k+1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } k = -\frac{1}{2}$$

이때 직선  $y = -kx + 2 + k$ 의  $y$ 절편이 0보다 크므로

$$k = -\frac{1}{2}$$

(ii) 직선  $y = -kx + 2 + k$ 가  $x$ 축에 평행할 때

$$k = 0$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수  $k$ 의 값의 합은

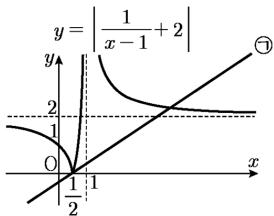
$$-\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

## 18 정답 ④

**해설** (가): 아래 그림과 같이 직선  $y = m(x+1)-1$ 의 기울기가 직선 ①의 기울기보다 클 때 교점이 3개이다.



직선  $y = m(x+1)-1$ 이  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지날 때의 기울기를 구하면

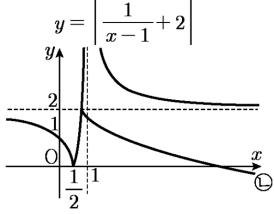
$$0 = m\left(\frac{1}{2}+1\right)-1, \frac{3}{2}m-1=0$$

$$\therefore m = \frac{2}{3}$$

따라서  $m$ 의 범위는  $m > \frac{2}{3}$ 이다.

(나): 무리함수  $y = 2 - \sqrt{x-n}$ 의 정의역은  $x \geq n$ 이고 치역은  $y \leq 2$ 이다.

따라서 아래 그림과 같이 무리함수의 그래프가 ①보다 오른쪽에 있어야 교점이 없다.



$y = 2$  일 때 곡선  $y = \left|\frac{1}{x-1}+2\right|$ 의  $x$ 좌표를

구하면

$$2 = \left|\frac{1}{x-1}+2\right|, \frac{1}{x-1}=-4 \quad \left(\because \frac{1}{x-1} \neq 0\right)$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

즉, 곡선  $y = \left|\frac{1}{x-1}+2\right|$ 는  $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$ 를 지나고

무리함수의 그래프가 이 점보다 오른쪽에 있어야 한다.

따라서  $n$ 의 값의 범위는  $n > \frac{3}{4}$ 이다.

## 19 정답 $6 \leq k < 7$

**해설** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{x \mid 2 < x < 6\}, Q = \{x \mid x < 5 \text{ 또는 } x > k\}$$

이때 명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는

집합  $P^C$ 에는 속하고 집합  $Q^C$ 에는 속하지 않으므로

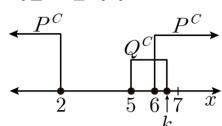
집합  $P^C \cap Q^C$ 의 원소이다.

$$P^C = \{x \mid x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 6\},$$

$$Q^C = \{x \mid 5 \leq x \leq k\} \text{ 이므로}$$

집합  $P^C \cap Q^C$ 의 정수인 원소가 6뿐이려면

다음 그림에서  $6 \leq k < 7$



## 20 정답 최솟값 = 7, $a = 1, b = 2$

$$\text{해설 } a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$$

$$= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \frac{16}{2a+b}$$

$$= -1 + (a-1)^2 + (2a+b + \frac{16}{2a+b}) \quad \cdots \quad ①$$

$$2a+b + \frac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})} = 8 \text{ 에서}$$

등호는  $2a+b = \frac{16}{2a+b}$  일 때 성립하고

이때,  $2a+b=4$  ( $a, b$ 는 양수)  $\cdots \quad ②$

①에서 최소는  $a=1$  일 때이다.

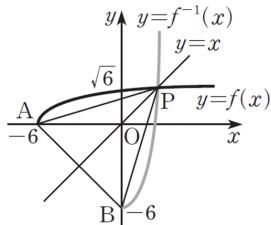
$\therefore$  ②에서  $a=1, b=2$  일 때 최솟값 : 7

# 고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

## 집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

### 21 정답 36

**해설**  $y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$ 는  $y = x$ 에 대하여 대칭인 그래프이므로 점 P는  $y = f(x)$ 와  $y = x$ 의 교점도 된다.



이때  $f(x) = \sqrt{x+6}$  이므로

$$\sqrt{x+6} = x$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because x \geq 0) \text{이므로 교점 } P(3, 3)$$

$$\Delta ABP = 2 \cdot \Delta AOP + \Delta AOB$$

$$= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \\ = 36$$

### 22 정답 16

**해설** 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$$A(a, \sqrt{a}), B(a, \sqrt{3a})$$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$$\sqrt{x} = \sqrt{3a}, x = 3a$$

$$\text{따라서 } C(3a, \sqrt{3a}), D(3a, 3\sqrt{a})$$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

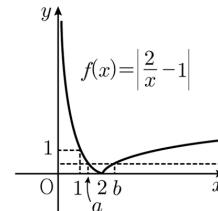
$$\frac{3\sqrt{a} - \sqrt{a}}{3a - a} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} (\because a > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4} \text{이므로 } \sqrt{a} = 4$$

$$\therefore a = 16$$

### 23 정답 ④

**해설** ㄱ.  $0 < a < b$ 인 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $f(a) = f(b)$ 가 성립하므로 다음 그림과 같이  $a < 2 < b$ 이고,



$x > 2$ 일 때  $0 < f(x) < 1$ 이므로  $0 < f(b) < 1$ 이다.  
(거짓)

ㄴ.  $\left| \frac{2}{x} - 1 \right| = 1$ 에서  $x = 1$ 이므로

$1 < a < 2, b > 2$ 이다. (참)

ㄷ.  $f(a) = \left| \frac{2}{a} - 1 \right| = \frac{2}{a} - 1 = \frac{2-a}{a}$

$$f(b) = \left| \frac{2}{b} - 1 \right| = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b} (\because \text{ ㄴ. } \text{이므로})$$

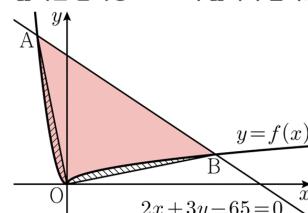
$$f(a)f(b) = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{b-2}{b}$$

$$= -\frac{(a-2)(b-2)}{ab} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

### 24 정답 325

**해설**  $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는  $y = x^2 (x \leq 0)$ 의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.  
이때 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



$$\overline{AB} = \sqrt{(25+5)^2 + (5-25)^2} = 10\sqrt{13}$$

원점과 직선  $2x + 3y - 65 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|-65|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 5\sqrt{13}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{13} \cdot 5\sqrt{13} = 325$$