교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수) 137~139p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
29문제 / DRE수학	

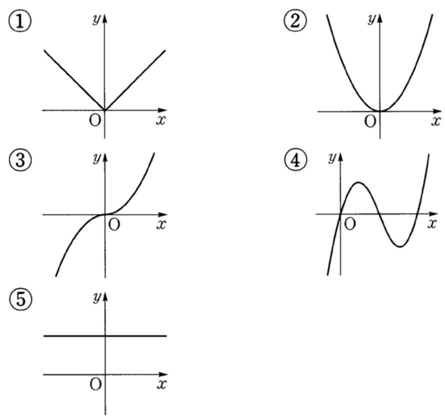
유형별 학습

이름

01 집합 $X=\{a, b\}$에서 실수 전체의 집합으로의 두 함수 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=4x+4$에 대하여 $f=g$가 성립한다. 이때 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

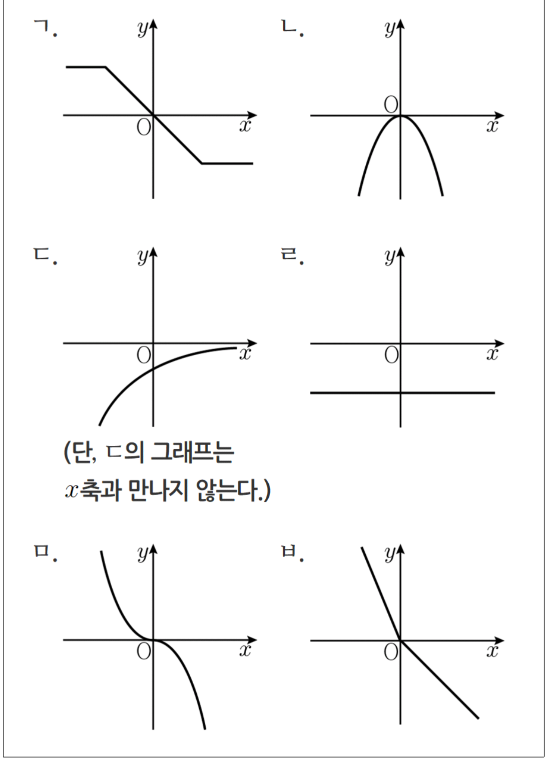
02 정의역이 집합 X인 두 함수 $f(x)=x^3+2$, $g(x)=2x^2+x$가 서로 같은 함수일 때, X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오.

03 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수의 그래프 중 일대일 대응의 그래프인 것은?



04 다음 보기의 함수의 그래프 중 일대일함수인 것의 개수를 a, 일대일대응인 것의 개수를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.
(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

〈보기〉



05 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $a=1$ 또는 $b=c$　② $a=1$
③ $b=c$　④ $a=0$ 또는 $b=c$
⑤ $a=0$

06 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$는 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x<2)\\ -2x+6 & (x\geq 2)\end{cases}$이다. 함수 $g:X\to X$에 대하여 $g\circ f$가 항등함수일 때, $g(0)+g(3)$의 값을 구하시오.

07 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=3x-10$, $g(x)=\begin{cases}x & (x<15)\\ 2x-15 & (x\geq 15)\end{cases}$에 대하여 $f(g^{-1}(10))+f^{-1}(g(30))$의 값을 구하시오.

08 함수 $f(x)=ax-1$의 역함수가 $f^{-1}(x)=bx+c$이고, $f^{-1}(5)=3$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-2b+4c$의 값을 구하시오.

09 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 함수 $f(3x)$의 역함수는?

① $g\left(\frac{1}{3}x\right)$ ② $g(9x)$ ③ $g(3x)$

④ $3g(x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

10 두 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & (x<2) \\ x^2-1 & (x \geq 2) \end{cases}$, $g(x)=-3x+4$에 대하여 $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(a)=-2$를 만족시키는 a의 값을 구하시오.

11 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$의 값을 구하시오.

12 [2019년 6월 고3 문과 23번 변형]

함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지난다. a의 값을 구하시오.

13 $y=\frac{2x}{2x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프는?

① $y=2-\frac{2x}{2x-5}$

② $y=2+\frac{2x}{2x-5}$

③ $y=3-\frac{1}{2x-5}$

④ $y=2+\frac{x}{2x-5}$

⑤ $y=3+\frac{3x}{2x-5}$

14 [2016년 10월 고3 문과 10번 변형]

유리함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에 대하여 다음 보기 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역과 치역이 서로 같다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 함수 $y=\dfrac{x+1}{2x-4}$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=\dfrac{1}{2}$ 이다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$,
치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.

③ 모든 사분면을 지난다.

④ $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 점 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

16 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x-a}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{cx+b}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } a\neq\dfrac{1}{3}\right)$

17 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

18 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 점 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$을 지난다.

② 정의역은 $\{x\,|\,x\leq -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y\,|\,y\geq -2\}$ 이다.

④ $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 제2사분면을 지나지 않는다.

19 다음 세 함수의 그래프가 모두 지나지 않는 사분면은?

$y=\sqrt{x}-2,\ y=-\sqrt{x}+2,\ y=\sqrt{-x+2}-1$

① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제3, 4사분면

20 점 $(1,\ 2)$가 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}\ (a\neq 0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

21 함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$과 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 P라 할 때, 원점과 점 P 사이의 거리는?

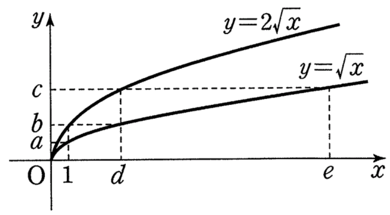
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

22 정의역이 $\{x|x>2\}$인
두 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{3x-6}+2$에 대하여
$(f^{-1}\circ g)(5)+(g^{-1}\circ f)(3)$의 값을 구하시오.

23 [2019년 3월 고3 문과 12번 변형]
$x\geq 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+2$와
$x\geq 2$에서 정의된 함수 $g(x)=(x-2)^2+1$에 대하여
$(g\circ f\circ f)(17)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

24 두 무리함수 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $d+e$의 값을 구하시오.



25 곡선 $y=\sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y=x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

① $-2<a<-\frac{3}{2}$

② $-2\le a<-\frac{3}{2}$

③ $a<-\frac{3}{2}$

④ $a\le-\frac{3}{2}$

⑤ $a>-\frac{3}{2}$

26 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f:X\to X$가 $f=f^{-1}$, $f(5)-f(2)=3$을 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오.

27 집합 $X=\{x\,|\,x\ge 4\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 $f(x)=x^2-4x+4$이다. 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

28 함수 $y=\frac{3x+1}{x-1}$의 그래프가 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$에 대하여 대칭일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수)

① -3　② 0　③ 3
④ 6　⑤ 9

29 함수 $y=\frac{ax+2b}{4x+c}$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이고 점 $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오.

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수) 137~139p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
29문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 3	02 3	03 ③
04 6	05 ①	06 4
07 $\frac{115}{3}$	08 3	09 ⑤
10 -5	11 2	12 1
13 ③	14 ④	15 ④
16 4	17 ①	18 ⑤
19 ③	20 ④	21 ⑤
22 $\frac{32}{3}$	23 ③	24 20
25 ②	26 5	27 ①
28 ④	29 1	

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수) 137~139p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
29문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 3

해설 $f(a)=g(a)$이므로 $a^2+a=4a+4$에서

$a^2-3a-4=0$ $\cdots$ ㉠

$f(b)=g(b)$이므로 $b^2+b=4b+4$

$b^2-3b-4=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 a, b는 이차방정식 $x^2-3x-4=0$의 해이므로

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 $a=-1$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=-1$이므로

$a+b=3$

02 정답 3

해설 $f(x)=g(x)$에서 $x^3+2=2x^2+x$

$x^3-2x^2-x+2=0$,

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 따라서 정의역 X는 집합 $\{1,\ 2\}$일 대, 원소의 합은 최대이고, 최댓값은 3이다.

03 정답 ③

해설 치역과 공역이 같고, 치역의 각 원소 a에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=a$와 오직 한 점에서 만나야 하므로 일대일 대응의 그래프인 것은 ③이다.

04 정답 6

해설 ㄱ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ. 음수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄷ. 음수 k에 대하여 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y|y<0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 음수k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㅁ, ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

따라서 그래프가 일대일함수인 것은 ㄷ, ㅁ, ㅂ의 3개, 일대일대응인 것은 ㅁ, ㅂ의 2개이다.

즉, $a=3$, $b=2$이므로

$ab=6$

05 정답 ①

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+c)$

$=a(ax+c)+b=a^2x+ac+b$

같은 방법으로

$(g\circ f)(x)=a^2x+ab+c$

$f\circ g=g\circ f$가 성립하므로

$ac+b=ab+c$

$(a-1)(b-c)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $b=c$

06 정답 4

해설 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x<2)\\ -2x+6 & (x\geq 2)\end{cases}$에서

$f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=0$

$g\circ f$가 항등함수이므로 $g(f(x))=x$

$g(f(0))=g(1)=0$, $g(f(1))=g(3)=1$,

$g(f(2))=g(2)=2$, $g(f(3))=g(0)=3$

$\therefore\ g(0)+g(3)=3+1=4$

07 정답 $\frac{115}{3}$

해설 $g^{-1}(10)=k$라 하면 $g(k)=10$

(ⅰ) $k<15$일 때, $g(k)=k$이므로

$\therefore k=10$

(ⅱ) $k\geq 15$일 때, $g(k)=2k-15$이므로

$2k-15=10$

$\therefore k=\frac{25}{2}$

그런데 $k\geq 15$이므로 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=10$, 즉 $g^{-1}(10)=10$이므로

$f(g^{-1}(10))=f(10)=3\cdot 10-10=20$

또, $f^{-1}(45)=l$이라 하면 $f(l)=45$이므로

$3l-10=45$

따라서 $l=\frac{55}{3}$이므로

$f^{-1}(45)=\frac{55}{3}$

즉, $f^{-1}(g(30))=f^{-1}(45)=\frac{55}{3}$에서

$f(g^{-1}(10))+f^{-1}(g(30))=20+\frac{55}{3}=\frac{115}{3}$

08 정답 3

해설 $f^{-1}(5)=3$에서 $f(3)=5$이므로

$f(3)=3a-1=5$

$\therefore a=2$

$f(x)=2x-1$에서 $y=2x-1$을 x에 대하여 정리하면

$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore a-2b+4c&=2-2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\\&=2-1+2\\&=3\end{aligned}$$

09 정답 ⑤

해설 $h(x)=3x$라 하면

$h^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$

$f(3x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

따라서 $f(3x)=(f\circ h)(x)$의 역함수는

$$\begin{aligned}(f\circ h)(x)&=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)\\&=(h^{-1}\circ g)(x)\\&=h^{-1}(g(x))\\&=\frac{1}{3}g(x)\end{aligned}$$

10 정답 -5

해설 $(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(a)=-2$에서

$g((f^{-1}\circ g^{-1})(a))=-2$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(a)=k$라 하면

$g(k)=-2$에서 $g(k)=-3k+4=-2$

$\therefore k=2$

$(f^{-1}\circ g^{-1})(a)=2$에서 $(g\circ f)^{-1}(a)=2$

역함수의 성질에 의하여

$(g\circ f)(2)=a$

$\therefore a=g(f(2))=g(3)=-5$

11 정답 2

해설
$$\begin{aligned}f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f&=f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f\\&=(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}\circ f\\&=I\circ g^{-1}\circ f\\&=g^{-1}\circ f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)&=(g^{-1}\circ f)(3)\\&=g^{-1}(f(3))\\&=g^{-1}(5)\end{aligned}$$

$g^{-1}(5)=k\Leftrightarrow g(k)=5$

$3k-1=5$에서 $k=2$

$\therefore g^{-1}(5)=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=2$

12 정답 1

해설 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프는

함수 $y+2=\dfrac{3}{x}$, 즉 함수 $y=\dfrac{3}{x}-2$의 그래프와 같다.

이 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=\dfrac{3}{1}-2=3-2=1$

13 정답 ③

해설 $x \Rightarrow x-3,\ y \Rightarrow y-2$를 식에 대입하면

$$y=\frac{2x}{2x+1}=\frac{2(x-3)}{2(x-3)+1}+2$$
$$=\frac{2x-6}{2x-5}+2$$
$$=\frac{(2x-5)-1}{2x-5}+2$$
$$=3-\frac{1}{2x-5}$$

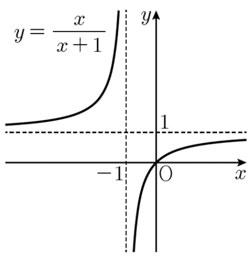
14 정답 ④

해설 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역은 -1이 아닌 모든 실수이고 치역은 1이 아닌 모든 실수이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다. (참)

ㄷ. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다. (참)

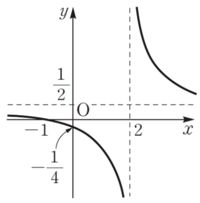


15 정답 ④

해설

$$y=\frac{x+1}{2x-4}=\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+3}{2x-4}=\frac{3}{2(x-2)}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}}{x-2}+\frac{1}{2}$$

③ 주어진 함수의 그래프는 아래 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



④ $y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 두 점근선의 교점 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

16 정답 4

해설 $y=\dfrac{-3x+1}{x-a}$로 놓으면

$y(x-a)=-3x+1$, $(y+3)x=ay+1$

$\therefore\ x=\dfrac{ay+1}{y+3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+1}{x+3}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{ax+1}{x+3}$

따라서 $\dfrac{ax+1}{x+3}=\dfrac{2x+1}{cx+b}$이므로

$a=2,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b-c=4$

17 정답 ①

해설 $f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=\mathrm{I}$ 이므로

$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$ $y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y=\frac{x+2}{3x+4} \longleftrightarrow 3yx+4y=x+2$$

$$\longleftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$$

$$\longleftrightarrow x=\frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore\ y=g^{-1}(x)=\frac{-4x+2}{3x-1},$$

$$f(x)=g^{-1}(x)$$

$$=\frac{-4x+2}{3x-1}$$

$$=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로}$$

$$f(x)=\frac{4x-2}{-3x+1}$$

$$=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ m=\frac{1}{3},\ n=-\frac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

18 정답 ⑤

해설 ① $y=\sqrt{6+2x}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{6+2x}-3,\ 3=\sqrt{6+2x}$

$9=6+2x$ $\quad\therefore\ x=\frac{3}{2}$

따라서 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

② $6+2x\geq 0$에서 $x\geq -3$

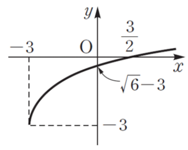
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -3\}$이다.

③ $\sqrt{6+2x}\geq 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq -3\}$이다.

④ $y=\sqrt{6+2x}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

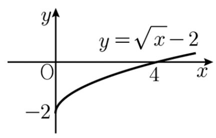
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향-3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.

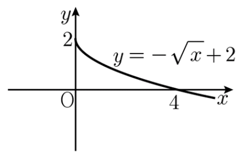


19 정답 ③

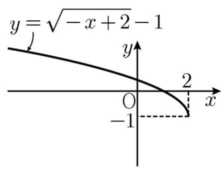
해설 세 함수 $y=\sqrt{x}-2,\ y=-\sqrt{x}+2,$ $y=\sqrt{-x+2}-1$의 그래프와 그 그래프가 지나지 않는 사분면은 다음과 같다.



⇨ 제2, 3사분면



⇨ 제2, 3사분면



⇨ 제3사분면

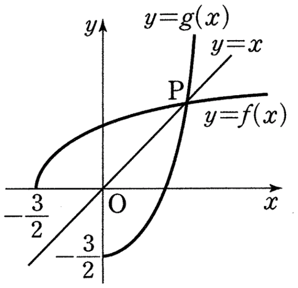
따라서 주어진 세 함수의 그래프가 모두 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

20 정답 ④

해설 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수는 $x=\sqrt{ay+b}$
이 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$1=\sqrt{2a+b}$
$\therefore 2a+b=1$

21 정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{2x+3}=x$의 양변을 제곱하면
$2x+3=x^2$, $x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 교점은 제1사분면 위에 있으므로
$\mathrm{P}(3, 3)$
$\therefore \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

22 정답 $\frac{32}{3}$

해설 $g(5)=\sqrt{15-6}+2=5$이므로
$(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(5)$
$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$에서
$\frac{2k}{k-2}=5$, $2k=5k-10$
$\therefore k=\frac{10}{3}$
$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(5)=\frac{10}{3}$
$f(3)=\frac{6}{3-2}=6$이므로
$(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(6)$
$g^{-1}(6)=l$이라 하면 $g(l)=6$에서
$\sqrt{3l-6}+2=6$, $\sqrt{3l-6}=4$
$3l-6=16$
$\therefore l=\frac{22}{3}$
$\therefore (g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(6)=\frac{22}{3}$
$\therefore (f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(5)=\frac{10}{3}+\frac{22}{3}$
$=\frac{32}{3}$

23 정답 ③

해설 함수 f와 함수 g는 서로 역함수이므로
$g\circ f=I$ (단, I는 항등함수)이다.
즉, $g\circ f\circ f=(g\circ f)\circ f=I\circ f=f$이므로
$(g\circ f\circ f)(17)=((g\circ f)\circ f)(17)$
$=(I\circ f)(17)$
$=f(17)$
$=\sqrt{17-1}+2$
$=6$

[다른 풀이]
$f(17)=\sqrt{17-1}+2=6$,
$f(6)=\sqrt{6-1}+2=\sqrt{5}+2$,
$g(\sqrt{5}+2)=(\sqrt{5}+2-2)^2+1=6$이므로
$(g\circ f\circ f)(17)=g(f(f(17)))$
$=g(f(6))$
$=g(\sqrt{5}+2)$
$=6$

24

정답 20

해설 $a=\sqrt{1}=1,\ b=2\sqrt{1}=2$

$b=\sqrt{d}$ 에서 $d=b^2=4$

$c=2\sqrt{d}=2\sqrt{4}=4$

$c=\sqrt{e}$ 에서 $e=c^2=16$

$\therefore\ d+e=4+16=20$

25

정답 ②

해설 그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은

직선 $y=x+a$ 가 $(2,\ 0)$ 을 지날 때부터

직선이 $y=\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

ⅰ) $y=x+a$ 에 $(2,\ 0)$ 을 대입하면 $a=-2$

ⅱ) $y=\sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y=x+a$ 가 접하기 위해서는

두 식을 연립한 식의 판별식 $\mathrm{D}=0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2x-4}=x+a$

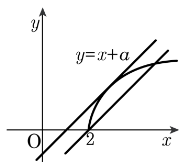
양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x(a-1)+a^2+4=0$

$\frac{\mathrm{D}}{4}=(a-1)^2-a^2-4=0$

$-2a-3>0,\ a<-\frac{3}{2}$

ⅰ), ⅱ)로 부터 $-2\le a<-\frac{3}{2}$



26

정답 5

해설 $f(5)-f(2)=3$이므로

$f(2)=1,\ f(5)=4$ 또는 $f(2)=2,\ f(5)=5$

(ⅰ) $f(2)=1,\ f(5)=4$인 경우

$f=f^{-1}$를 만족시키려면

$f(1)=2,\ f(4)=5$이어야 한다.

이때 $f(3)=3$이어야 하므로

함수 f의 개수는 1이다.

(ⅱ) $f(2)=2,\ f(5)=5$인 경우

$f=f^{-1}$를 만족시키려면

$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(4)=4$ 또는

$f(1)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=3$ 또는

$f(1)=3,\ f(3)=1,\ f(4)=4$ 또는

$f(1)=4,\ f(3)=3,\ f(4)=1$이어야 하므로

함수 f의 개수는 4이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는 5이다.

27

정답 ①

해설 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-4x+4=x$에서

$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

이때 $x\ge 4$이므로 $x=4$에서 모든 근의 합은 4이다.

28

정답 ④

해설 $y=\frac{3x+1}{x-1}=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+3$

주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=1,\ y=3$의 교점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=x+m,\ y=-x+n$은 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=1+m,\ 3=-1+n$

$m=2,\ n=4$

$\therefore\ m+n=6$

29

정답 1

해설 주어진 함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

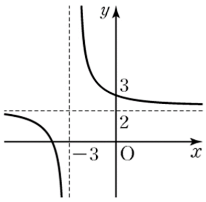
$x=-1,\ y=\frac{1}{4}$

즉, $f(x)=\frac{k}{x+1}+\frac{1}{4}$이라 하면 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$f(0)=k+\frac{1}{4}=2$

$\therefore\ k=\frac{7}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{\frac{7}{4}}{x+1}+\frac{1}{4}=\frac{7+(x+1)}{4(x+1)}=\frac{x+8}{4x+4}$



따라서 $a=1,\ b=4,\ c=4$이므로

$a-b+c=1-4+4=1$이다.

[다른 풀이]

그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$2=\frac{2b}{c}$

$\therefore\ b=c$

$$y=\frac{ax+2b}{4x+c}=\frac{\frac{a}{4}(4x+c)-\frac{ac}{4}+2b}{4x+c}$$

$$=\frac{-\frac{ac}{4}+2b}{4x+c}+\frac{a}{4}$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\frac{c}{4},\ y=\frac{a}{4}$

따라서 그래프는 점근선의 교점 $\left(-\frac{c}{4},\ \frac{a}{4}\right)$에 대하여

대칭이므로 $-\frac{c}{4}=-1,\ \frac{a}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=c=4$

$\therefore\ a-b+c=1-4+4=1$