1. 전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이라 하자.
$P \cap Q = P$, $R^C \cup Q = U$일 때, 참인 명제만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $p \to q$
ㄴ. $r \to q$
ㄷ. $p \to \sim r$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 실수 x에 대한 두 조건

$p : |x-k| \le 2$,
$q : x^2 - 4x - 5 \le 0$

이 있다. 명제 $p \to q$와 명제 $p \to \sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

3. 자연수 n에 대한 조건

'$2 \le x \le 5$인 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 - 8x + n \ge 0$이다.'
가 참인 명제가 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

4. 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는?

(가) $\{0\} \subset A \subset \{x | x$는 실수$\}$
(나) $a^2 - 2 \notin A$이면 $a \notin A$이다.
(다) $n(A) = 4$

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

5. 다음은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2-1}$이 무리수임을 증명한 것이다.

〈 증 명 〉

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2-1)=q^2$이다.
p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
$n^2=\boxed{\text{(가)}}$이다.
자연수 k에 대하여
(i) $q=2k$일 때
$(2k)^2<n^2<\boxed{\text{(나)}}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(ii) $q=2k+1$일 때
$\boxed{\text{(나)}}<n^2<(2k+2)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(i)과 (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(3)$의 값은?

① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

6. 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r은

$p : |a|+|b|=0$
$q : a^2-2ab+b^2=0$
$r : |a+b|=|a-b|$

이다. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. q이고 r은 p이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 다음은 양의 실수 a, b, c에 대하여 부등식

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

〈 증 명 〉

양의 실수 a, b, c에 대하여

$(a+b)^2-4ab=\boxed{\text{(가)}}\ge 0$

이므로 $4ab \le (a+b)^2$ 이고,

같은 방법으로 $4bc \le (b+c)^2$, $4ca \le (c+a)^2$ 이므로

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b \le \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉠.$$

한편, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0$에서

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{\boxed{\text{(다)}}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡으로부터

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \quad \cdots\cdots$$

㉢

이때, ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$(a-b)^2$	$2(ab+bc+ca)$	4
②	$(a-b)^2$	$2(ab+bc+ca)$	3
③	$(a-b)^2$	$4(ab+bc+ca)$	4
④	$(a-2b)^2$	$2(ab+bc+ca)$	3
⑤	$(a-2b)^2$	$4(ab+bc+ca)$	4

8. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{R}\left(-\frac{1}{a},\ 0\right)$에 대하여 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

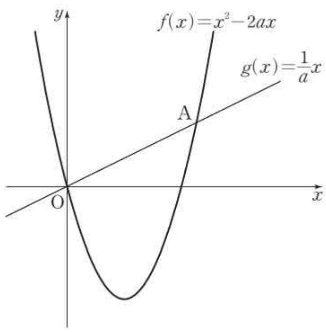
9. 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. 명제 $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow r$가 참일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $Q-R^C=R$
ㄴ. $P-R=\varnothing$
ㄷ. $Q-P\subset R$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, , ㄷ

10. 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 B라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하자. 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

[공통수학2 내신대비 집합과 명제 정답 및 해설]

1. [정답]3

ㄱ. $P\cap Q=P$이므로 $P\subset Q$

따라서 명제 $p \to q$는 참이다. (참)

ㄴ. $R^C\cap Q=U$이므로 $(R^C\cap Q)^C=U^C=\varnothing$에서

$R\cap Q^C=R-Q=\varnothing$

따라서 $R\subset Q$이므로 명제 $r \to q$는 참이다. (참)

ㄷ. [반례] $P\cap R\neq\varnothing$일 때, $P\not\subset R^C$

따라서 명제 $p \to \sim r$는 거짓이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2. [정답] 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 p에서

$|x-k|\leq 2$, $k-2\leq x\leq k+2$이므로

$P=\{x|k-2\leq x\leq k+2\}$

조건 q에서

$x^2-4x-5\leq 0$, $(x+1)(x-5)\leq 0$

$-1\leq x\leq 5$이므로 $Q=\{x|-1\leq x\leq 5\}$

이때 $Q^C=\{x|x<-1$ 또는 $x>5\}$이다.

명제 $p \to q$와 명제 $p \to \sim q$가 모두 거짓이므로

$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$

즉, $P\cap Q^C\neq\varnothing$이고 $P\cap Q\neq\varnothing$ ...... ㉠

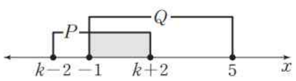
이어야 한다.

$k-2\geq -1$이고 $k+2\leq 5$, 즉 $1\leq k\leq 3$이면 $P\subset Q$가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 다음과 같이 k의 범위를 나누어 생각하자.

(ⅰ) $k<1$인 경우

㉠에서 $P\cap Q\neq\varnothing$이므로 [그림 1]과 같이

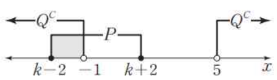
$-1\leq k+2$, 즉 $k\geq -3$ ...... ㉡



[그림 1]

$P\cap Q^C\neq\varnothing$이므로 [그림 2]와 같이

$k-2<-1$, 즉 $k<1$ ...... ㉢



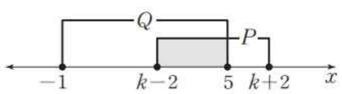
[그림 2]

㉡, ㉢에서 $-3\leq k<1$이고, 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0이다.

(ⅱ) $k>3$인 경우

㉠에서 $P\cap Q\neq\varnothing$이므로 [그림 3]과 같이

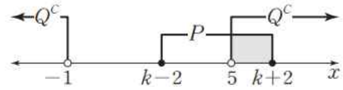
$k-2\leq 5$, 즉 $k\leq 7$ ...... ㉣



[그림 3]

$P\cap Q^C\neq\varnothing$이므로 [그림 4]와 같이

$5<k+2$, 즉 $k>3$ ...... ㉤



[그림 4]

㉣, ㉤에서 $3<k\leq 7$이고, 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 4, 5, 6, 7이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7이고, 그 합은

-3-2-1+0+4+5+6+7=16

3. [정답] 1

$f(x)=x^2-8x+n$이라 하자.

$2\leq x\leq 5$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $2\leq x\leq 5$이고 $f(x)\geq 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로 이 범위에서

함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-8x+n=(x-4)^2+n-16$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4는

$2\leq x\leq 5$에 속한다.

$f(2)=n-12$, $f(4)=n-16$, $f(5)=n-15$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $n-12$를 갖는다.

즉, $f(2)=n-12\geq 0$이므로 $n\geq 12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다.

4. [정답] 1

조건 (가)에서 $0\in A$

조건 (나)에서 명제 '$a^2-2\notin A$이면 $a\notin A$'가 참이므로 이 명제의 대우 '$a\in A$이면 $a^2-2\in A$'도 참이다.

$0\in A$이므로

$0^2-2=-2\in A$

$-2\in A$이므로

$(-2)^2-2=4-2=2\in A$

$2\in A$이므로

$2^2-2=2\in A$

그러므로 $\{-2,\ 0,\ 2\}\subset A$

조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로

$A=\{-2,\ 0,\ 2,\ k\}$ (단, $k\neq -2$, $k\neq 0$, $k\neq 2$)라 하자.

$k\in A$이면 $k^2-2\in A$이므로 k^2-2의 값은 -2, 0, 2, k 중 하나이다.

(ⅰ) $k^2-2=-2$인 경우

$k^2=0$에서 $k=0$이 되어 $k\neq 0$에 모순이다.

(ⅱ) $k^2-2=0$인 경우

$k^2=2$에서 $k=-\sqrt{2}$또는 $k=\sqrt{2}$

(ⅲ) $k^2-2=2$인 경우

$k^2=4$에서 $k=-2$또는 $k=2$가 되어 $k\neq -2$, $k\neq 2$에 모순이다.

(ⅳ) $k^2-2=k$인 경우

$k^2-k-2=0$, $(k-2)(k+1)=0$

이고 $k\neq 2$이므로

$k=-1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$

따라서 집합 A가 될 수 있는 것은

{-2, 0, 2, $-\sqrt{2}$}, {-2, 0, 2, $\sqrt{2}$}, {-2, 0, 2, -1}

이고, 개수는 3이다.

5. [정답] 3

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2-1)=q^2$이다.

q^2이 p의 배수이므로 $\frac{q^2}{p}$ 은 자연수이다.

p가 1이 아닌 자연수이면 p, q가 서로소이므로 $\frac{q^2}{p}$ 은 자연수가 아니다.

그러므로 $p=1$

$p=1$을 $p^2(n^2-1)=q^2$에 대입하면 $n^2-1=q^2$

즉, $n^2=\boxed{q^2+1}$

$n\geq 2$이고 $q^2=n^2-1\geq 2^2-1=4-1=3$

그러므로 $q^2\geq 3$에서 $q>1$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

즉, $2k<n<2k+1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2+1$이므로 $\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

즉, $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

6. [정답] 5

$p:|a|+|b|=0$에서 $a=0$, $b=0$

$q:a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

$r:|a+b|=|a-b|$에서 $|a+b|^2=|a-b|^2$이므로

$a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. $\sim p:a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$

$\sim r:a\neq 0$이고 $b\neq 0$

따라서 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. q이고 r이면 $a=b=0$이므로

q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7. [정답] 2

양의 실수 a, b, c에 대하여

$$(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab$$
$$=a^2-2ab+b^2$$
$$=\boxed{(a-b)^2}\geq 0$$

이므로 $4ab\leq(a+b)^2$이고,

같은 방법으로 $4bc\leq(b+c)^2$, $4ca\leq(c+a)^2$이므로

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$
$$=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b$$
$$\leq\frac{(a+b)^2}{a+b}c+\frac{(b+c)^2}{b+c}a+\frac{(c+a)^2}{c+a}b$$
$$=\boxed{2(ab+bc+ca)}\ \ldots\ldots\ ㉠$$

한편, 곱셈 공식에 의하여 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq 0$$

$$ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{\boxed{3}}\ \ldots\ldots\ ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡으로부터

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\frac{2}{3}(a+b+c)^2\ \ldots\ldots\ ㉢$$

이때 ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

따라서 (가): $(a-b)^2$, (나): $2(ab+bc+ca)$, (다): 3

8. [정답] 2

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$이므로 직선 OP에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이다.

그러므로 점 P(a, b)를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{a}{b}(x-a)+b$$

$x=0$일 때, $y=b+\frac{a^2}{b}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ b+\frac{a^2}{b}\right)$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\left(b+\frac{a^2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=1$$

{ 단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.}

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

9. [정답] 3

세 진리집합 P, Q, R의 벤다이어그램을 이용한다.

{STEP 1} 세 조건 p, q, r를 이용하여 세 진리집합 P, Q, R의 포함 관계를 알아본다.

$p \Rightarrow q$이므로 $P \subset Q$. . . . . . ㉠

$\sim p \Rightarrow q$이므로 $P^C \subset Q$ . . . . . . ㉡

$\sim p \Rightarrow r$이므로 $P^C \subset R$, 즉 $R^C \subset P$ . . . . . . ㉢

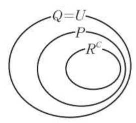
㉠, ㉡에서

$(P \cup P^C) \subset Q \subset U$

그런데 $P \cup P^C = U$이므로 $Q = U$ . . . . . . ㉣

{STEP 2} 세 진리집합 P, Q, R사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

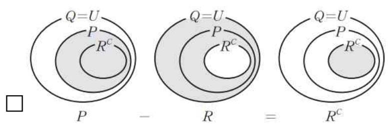
세 진리집합 P, Q, R사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



{STEP 3} 벤다이어그램을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. ㉣에서 $Q-R^C=U-R^C=R$ (참)

ㄴ.



$R^C \neq \varnothing$인 경우에는

$P-R=R^C \neq \varnothing$ (거짓)

ㄷ. ㉢, ㉣에서

$Q-P=U-P=P^C \subset R$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10. [정답] 1

점 C의 x좌표를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

{STEP 1} 점 C의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$가 만나는 점 A의 x좌표는 $x^2-2ax=\frac{1}{a}x$에서

$x^2-\left(2a+\frac{1}{a}\right)x=0$, $x\left(x-2a-\frac{1}{a}\right)=0$

$x>0$이므로

$x=2a+\frac{1}{a}$

그러므로 점 A의 좌표는 $\left(2a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{1}{a^2}\right)$이다.

한편, 이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$이므로 이 그래프의 꼭짓점 B의 좌표는 $(a,\ -a^2)$이다.

따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$\left(\frac{2a+\frac{1}{a}+a}{2},\ \frac{2+\frac{1}{a^2}+(-a^2)}{2}\right)$

즉, $\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a},\ 1+\frac{1}{2a^2}-\frac{a^2}{2}\right)$

{STEP 2} 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 선분 CH의 길이의 최솟값을 구한다.

점 H는 점 C에서 y축에 내린 수선의 발이고 $a>0$이므로 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같다.

즉, $\overline{\mathrm{CH}}=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a \times \frac{1}{2a}}=\sqrt{3}$

{ 단, 등호는 $\frac{3}{2}a=\frac{1}{2a}$, 즉 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 성립한다. }

따라서 선분 CH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.