고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{2,\ 3\},\ 3\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \subset A$ ② $\varnothing \in A$ ③ $\{1,\ 2\} \in A$
④ $\{2,\ 3\} \in A$ ⑤ $\{2,\ 3\} \subset A$

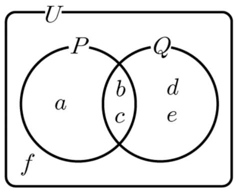
02 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수의 개수는?

① 15 ② 60 ③ 240
④ 960 ⑤ 3840

03 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 $A \cap (A-B)^C$과 항상 같은 집합은?

① $(A \cap B) \cup A$ ② $A-(A \cap B)$
③ $(A \cup B)-A$ ④ $(A \cup B)-(A-B)$
⑤ $B \cap (B-A)^C$

04 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, P, Q의 포함관계가 다음과 같다. 명제 $q \rightarrow \sim p$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 원소를 구한 것은?



① 없음 ② a
③ b, c ④ d, e
⑤ f

05 $a>2$일 때, $4a-3+\dfrac{9}{a-2} \geq k$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

06 명제 '모든 실수 x에 대하여 $4x^2+5x+a>0$이다.'가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $(P-R^C)\cup(Q-R)=\varnothing$이 성립할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① p는 r이기 위한 필요충분조건이다.
② $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
③ q는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.
④ $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
⑤ r는 $\sim p$이기 위한 필요충분조건이다.

08 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x-1)=6x+1$일 때, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는?

① $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ② $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
③ $g(x)=2x-1$ ④ $g(x)=2x+3$
⑤ $g(x)=2x+1$

09 자연수 n에 대하여 $\sqrt{2n+x}-\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)$의 값은?

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

10 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ 4

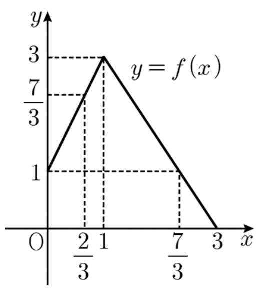
11 두 집합 $A=\{(x,\ y)\,|\,y=\sqrt{4-x}\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=mx+1,\ m$은 실수$\}$에 대하여 $n(A\cap B)=2$일 때, m의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{2}\le m<0$ ② $-\frac{1}{3}\le m<0$
③ $-\frac{1}{4}\le m<0$ ④ $-\frac{1}{5}\le m<0$
⑤ $-\frac{1}{6}\le m<0$

12 임의의 집합 S에 대하여 P(S)를 $P(S)=\{X \mid X \subset S\}$ 로 정의할 때, $P(P(\varnothing))$와 같은 것은?

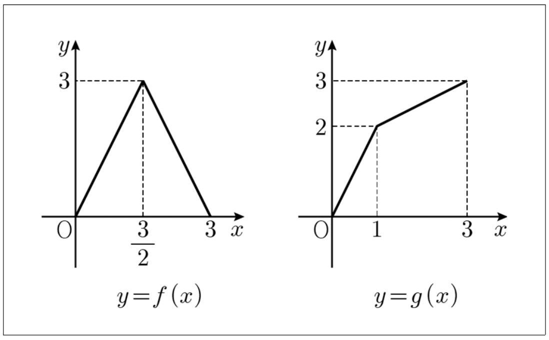
① $\varnothing$
② $\{\varnothing\}$
③ $\{\{\varnothing\}\}$
④ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
⑤ $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

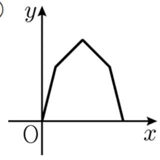
13 $0 \le x \le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라고 할 때, $f^{2021}\left(\frac{2}{3}\right)$의 값은?

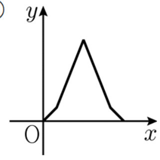


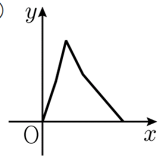
① 0
② $\frac{2}{3}$
③ 1
④ $\frac{7}{3}$
⑤ 3

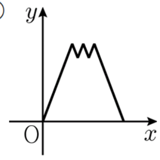
14 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같다. 다음 중 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프의 개형은?

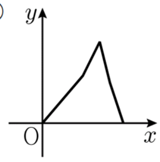


①


②


③


④


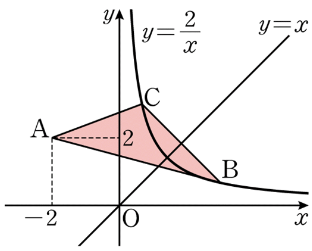
⑤


15 [2015년 3월 고2 문과 21번/4점]

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$와 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha>\sqrt{2}$)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

16 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-3}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $a+f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq 0$이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

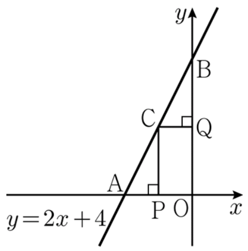
17 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

18 a, b, c, d, x, y, z가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

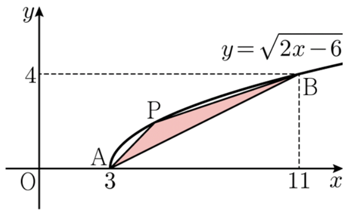
> ㉠ $a^2+b^2\geq ab$
> ㉡ $a^2+b^2+1<2(a+b-1)$
> ㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\leq(ax+by+cz)^2$
> ㉣ $|a+b|\leq|a|+|b|$
> ㉤ $|a|-|b|\geq|a-b|$
> ㉥ $|a+b|\geq|a|-|b|$

19 다음 그림과 같이 직선 $y=2x+4$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고 직선 위의 한 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, 두 삼각형 BQC, CPA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+S_1+S_2+4$의 최솟값을 구하시오. (단, 점 C는 제2사분면 위의 점이다.)



20 실수 k에 대하여 함수 $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $f(-2)+f(-1)+f(0)+\cdots+f(6)$의 값을 구하시오.

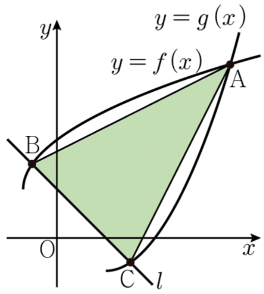
21 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{2x-6}$의 그래프 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(11,\ 4)$ 사이를 움직일 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.



22 함수 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x+4 & (x<3) \\ x & (x\geq 3) \end{cases}$에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프가 이차함수 $y=x^2-6x+k$의 그래프와 오직 한 점에서 만나기 위한 상수 k의 값은?

① 10 ② $\dfrac{43}{4}$ ③ $\dfrac{23}{2}$ ④ $\dfrac{49}{4}$ ⑤ 13

23 다음 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\sqrt{3x+4}+2$, $g(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}$ $(x \geq 2)$의 그래프의 교점을 A라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 l이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① 20　② 24　③ 28
④ 32　⑤ 36

24 집합 $\{x \mid |x|<7,\ x$는 정수$\}$의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$가 다음 조건을 모두 만족한다.

> (가) $n(A)=2$
> (나) $B=\{x^2-2 \mid x \in A\}$
> (다) $C=\{2x-k \mid x \in A,\ k$는 2 이하의 정수$\}$

$B=C$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 α, k의 값을 β라 하자. $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ②	03 ⑤
04 ③	05 ②	06 ①
07 ④	08 ②	09 ③
10 ⑤	11 ③	12 ④
13 ③	14 ①	15 ④
16 ⑤	17 ⑤	18 ㉠, ㉣, ㉥
19 8	20 12	21 4
22 ④	23 ②	24 4

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

② $\varnothing \in A$이므로 $\varnothing \in A$

③ $1 \in A,\ 2 \in A$이므로 $\{1,\ 2\} \subset A$

⑤ $2 \in A,\ 3 \in A$이므로 $\{2,\ 3\} \subset A$

02 정답 ②

해설 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수는
일대일함수이므로
$X=\{1,\ 2,\ 3\},\ \ Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여
일대일함수의 개수는
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

03 정답 ⑤

해설
$$\begin{aligned} A\cap(A-B)^C &= A\cap(A\cap B^C)^C \\ &= A\cap\{A^C\cup(B^C)^C\} \\ &= A\cap(A^C\cup B) \\ &= (A\cap A^C)\cup(A\cap B) \\ &= \varnothing\cup(A\cap B) = A\cap B \end{aligned}$$

① $(A\cap B)\subset A$이므로 $(A\cap B)\cup A = A$

② $A-(A\cap B) = A-B$

③ $(A\cup B)-A = B-A$

④
$$\begin{aligned} (A\cup B)-(A-B) &= (A\cup B)-(A\cap B^C) \\ &= (A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C \\ &= (A\cup B)\cap(A^C\cup B) \\ &= (A\cap A^C)\cup B = \varnothing\cup B \\ &= B \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} B\cap(B-A)^C &= B\cap(B\cap A^C)^C \\ &= B\cap\{B^C\cup(A^C)^C\} \\ &= B\cap(B^C\cup A) \\ &= (B\cap B^C)\cup(B\cap A) \\ &= \varnothing\cup(B\cap A) = B\cap A \\ &= A\cap B \end{aligned}$$

04 정답 ③

해설 명제 $q \to \sim p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q에는
속하지만 집합 P^C에는 속하지 않는 원소를 찾으면 된다.
이것을 만족시키는 원소로 이루어진 집합은
$P\cap Q=\{b,\ c\}$이다.

05 정답 ②

해설 $4a-3+\dfrac{9}{a-2}=4(a-2)+\dfrac{9}{a-2}+5$

$a-2>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4(a-2)+\frac{9}{a-2}+5 &\geq 2\sqrt{4(a-2)\cdot\frac{9}{a-2}}+5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4(a-2)=\dfrac{9}{a-2}$, 즉 $a=\dfrac{7}{2}$일 때 성립)

따라서 $4a-3+\dfrac{9}{a-2} \geq k$가 항상 성립하려면
$k \leq 17$이어야 하므로 k의 최댓값은 17이다.

06 정답 ①

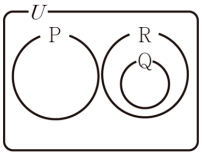
해설 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.
이때 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $4x^2+5x+a \leq 0$이다.'
이차방정식 $4x^2+5x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
주어진 명제의 부정이 참이 되려면
$D=5^2-4\cdot 4a \geq 0$

$\therefore\ a \leq \dfrac{25}{16}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

07 정답 ④

해설 $(P-R^C)\cup(Q-R)=\varnothing$에서
$P-R^C=\varnothing$, $Q-R=\varnothing$
$\therefore\ P\cap R=\varnothing$, $Q\subset R$
즉, 세 집합 P, Q, R의 포함관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $P\neq R$이므로 p는 r이기 위한 필요충분조건이 아니다.
② $P^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 아니다.
③ $Q\subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
④ $R^C\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
⑤ $R\subset P^C$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

08 정답 ②

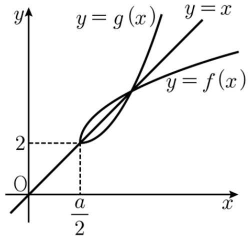
해설 $3x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{3}$
이를 $f(3x-1)=6x+1$에 대입하면
$f(t)=6\cdot\dfrac{t+1}{3}+1=2t+3$
$\therefore\ f(x)=2x+3$
$y=2x+3$으로 놓으면
$2x=y-3 \qquad \therefore\ x=\dfrac{y-3}{2}$
x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{x-3}{2}$
$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

09 정답 ③

해설 $2n+x\geq 0$이므로 $x\geq -2n\cdots$ ㉠
$2n-x\geq 0$이므로 $x\leq 2n\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\sqrt{2n+x}-\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는
$-2n\leq x\leq 2n$
$n=2$일 때 x의 값의 범위는 $-4\leq x\leq 4$이므로
$f(2)=9$
$n=3$일 때 x의 값의 범위는 $-6\leq x\leq 6$이므로
$f(3)=13$
$\therefore\ f(2)+f(3)=22$

10 정답 ⑤

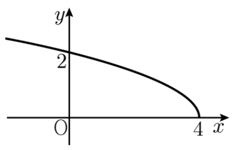
해설 다음 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$라 하면
두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=4\quad\cdots$ ㉠
한편, $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$와 $y=x$의 교점의 x좌표는
$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-6x+4+a=0$
이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
㉠에 대입하면
$4=36-4(4+a)$, $4+a=8$
$\therefore\ a=4$

11 정답 ③

해설 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+1$은 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 두 그래프의 교점이 2개이려면 $m<0$이고, 직선이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때 m의 값이 최소이다.
즉, m의 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 m의 값의 범위는
$-\dfrac{1}{4}\leq m<0$

12 정답 ④

해설 $P(\varnothing)=\{X|X\subset\varnothing\}$에서 $\varnothing$의 부분집합은 $\varnothing$ 뿐이므로 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ 이다.

또한, 집합 $\{\varnothing\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로

$$\begin{aligned}P(P(\varnothing))&=\{X|X\subset P(\varnothing)\}\\&=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\end{aligned}$$

13 정답 ③

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{7}{3}$, $f\left(\dfrac{7}{3}\right)=1$, $f(1)=3$, $f(3)=0$, $f(0)=1$

이므로

$$f^2\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{7}{3}\right)=1$$

$$f^3\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(1)=3$$

$$f^4\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^3\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(3)=0$$

$$f^5\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^4\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(0)=1$$

$$f^6\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^5\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(1)=3$$

$\vdots$

$f^n\left(\dfrac{2}{3}\right)$의 값은 $n\geq 2$일 때, $1,\ 3,\ 0$이 반복된다.

따라서 $f^{2021}\left(\dfrac{2}{3}\right)=f^{3\cdot 673+2}\left(\dfrac{2}{3}\right)=f^2\left(\dfrac{2}{3}\right)=1$

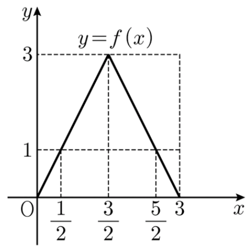
14 정답 ①

해설

$$y=f(x)=\begin{cases}2x & \left(0\leq x\leq \dfrac{3}{2}\right)\\ 6-2x & \left(\dfrac{3}{2}\leq x\leq 3\right)\end{cases}$$ 이고

$$y=g(x)=\begin{cases}2x & (0\leq x\leq 1)\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & (1\leq x\leq 3)\end{cases}$$ 이므로

$$\begin{aligned}y&=(g\circ f)(x)=g(f(x))\\&=\begin{cases}2f(x) & (0\leq f(x)\leq 1)\\ \dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{3}{2} & (1\leq f(x)\leq 3)\end{cases}\end{aligned}$$



그런데 위 그림에서와 같이

$0\leq x\leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{2}\leq x\leq 3$일 때,

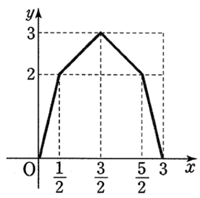
$0\leq f(x)\leq 1$

$\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{5}{2}$ 일 때,

$1\leq f(x)\leq 3$이므로

$$\begin{aligned}y&=(g\circ f)(x)\\&=\begin{cases}2\cdot 2x & \left(0\leq x\leq \dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2}\cdot 2x+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2}(6-2x)+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{5}{2}\right)\\ 2(6-2x) & \left(\dfrac{5}{2}\leq x\leq 3\right)\end{cases}\\&=\begin{cases}4x & \left(0\leq x\leq \dfrac{1}{2}\right)\\ x+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}\right)\\ \dfrac{9}{2}-x & \left(\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{5}{2}\right)\\ 12-4x & \left(\dfrac{5}{2}\leq x\leq 3\right)\end{cases}\end{aligned}$$

따라서 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



15 정답 ④

해설 점의 대칭이동과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

점 B가 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$\beta=\frac{2}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta=2$ ⋯ ㉠

$\alpha>\sqrt{2}$ 이므로 $0<\beta<\sqrt{2}$, 즉 $0<\beta<\alpha$

두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$C(\beta,\ \alpha)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)$

($\because \alpha>\beta$)

직선 BC와 직선 $y=x$가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1이다.

또한, 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은

$y-\beta=-(x-\alpha)$, 즉 $x+y-(\alpha+\beta)=0$

점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|-2+2-(\alpha+\beta)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$

($\because \alpha>0,\ \beta>0$)

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h\\&=\frac{1}{2}\cdot(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\alpha^2-\beta^2=4\sqrt{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)^2&=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2\\&=(4\sqrt{3})^2+4\cdot 2^2=64\end{aligned}$$

$\alpha^2+\beta^2>0$이므로

$\alpha^2+\beta^2=8$

16 정답 ⑤

해설 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\frac{a}{x-3}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=b$이므로

$y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-a$, $y=b+\frac{a}{3}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{x-3}-1$이므로

$f(b)=f(-1)=\frac{3}{-4}-1=-\frac{7}{4}$

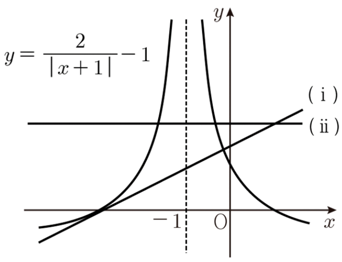
$\therefore a+f(b)=3+\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}$

17 정답 ⑤

해설

$$y=\frac{2}{|x+1|}-1=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}-1 & (x>-1)\\ -\dfrac{2}{x+1}-1 & (x<-1)\end{cases}$$

이고 직선 $y=-kx+2+k$는 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 접할 때,

$-\dfrac{2}{x+1}-1=-kx+2+k$에서

$kx^2-3x-k-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4k\cdot(-k-5)=0$에서

$(2k+9)(2k+1)=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{9}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{1}{2}$

이때 직선 $y=-kx+2+k$의 y절편이 0보다 크므로

$k=-\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=-kx+2+k$가 x축에 평행할 때

$k=0$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\dfrac{1}{2}+0=-\dfrac{1}{2}$

18 정답 ㉠, ㉣, ㉥

해설 부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠ $a^2+b^2-ab=a^2-ab+\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{3}{4}b^2$

$=(a-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}b^2\ge 0$

$\therefore\ a^2+b^2\ge ab$: 맞음

㉡ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+b^2-2b+3$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0$

$\therefore\ a^2+b^2+1>2(a+b-1)$: 틀림

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2$

$+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+$

$c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2\ge 0$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2$: 틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=a^2 2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2|ab|-2ab\ge 0(\because\ |ab|\ge ab)$

$\therefore\ |a|+|b|\ge|a+b|$: 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2|ab|+2ab\le 0(\because|ab|\ge ab)$

$\therefore\ |a|-|b|\le|a-b|$: 틀림

㉥ $|a+b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2ab+2|ab|\ge 0$

$\therefore\ |a+b|\ge|a|-|b|$: 맞음

19 정답 8

해설 두 점 A, B는 각각 직선 $y=2x+4$와 x축, y축과의 교점이므로

$A(-2, 0)$, $B(0, 4)$

점 C는 직선 $y=2x+4$ 위에 있으므로

$b=2a+4$

$\overline{AP}=a+2$, $\overline{CQ}=-a$, $\overline{CP}=b$, $\overline{BQ}=4-b$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(-a)\cdot(4-b)=(-a)^2=a^2$,

$S_2=\frac{1}{2}b(a+2)=\frac{b^2}{4}$

$$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+S_1+S_2+4$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+a^2+\frac{b^2}{4}+4$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right)^2$$

a, b는 0이 아닌 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{(-1)^2+1^2\}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right)^2\right\}$$

$$\geq\left\{-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right\}^2$$

(단, $a<0$, $b>0$이므로

등호는 $-\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{b}{2}+\frac{2}{b}$일 때 성립)

이때 $b=2a+4$이므로

$$-a-\frac{1}{a}=a+2+\frac{1}{a+2}$$

$$2a+2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}=0$$

$$(2a+2)\left\{1+\frac{1}{a(a+2)}\right\}=\frac{2(a+1)^3}{a(a+2)}=0$$

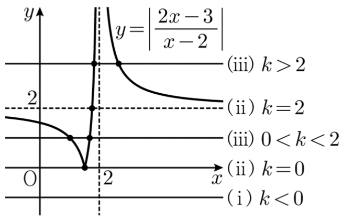
따라서 $a=-1$, $b=2$일 때 최솟값을 가지므로

구하는 최솟값은 $(-2)^2+2^2=8$이다.

20 정답 12

해설 함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=2$이므로 함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프는 그림과 같고, k의 값에 따라 $f(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.



(i) $k<0$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않으므로

$f(k)=0$

(ii) $k=0$ 또는 $k=2$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나므로

$f(k)=1$

(iii) $0<k<2$ 또는 $k>2$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나므로

$f(k)=2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 값은

$f(-2)+f(-1)+f(0)+\cdots+f(6)$

$=0\cdot2+1\cdot2+2\cdot5=12$

21 정답 4

해설 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다. 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{4-0}{11-3}(x-3)$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을

$y=\frac{1}{2}x+k$ (k는 실수)라 하면

$\sqrt{2x-6}=\frac{1}{2}x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2x-6=\frac{1}{4}x^2+kx+k^2$

$\therefore x^2+4(k-2)x+4k^2+24=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-(4k^2+24)=0,\ -16k-8=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 사이의 거리는

직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 위의 점 $(3,\ 0)$과

직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, 즉 $x-2y-1=0$ 사이의 거리와

같으므로

$\frac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

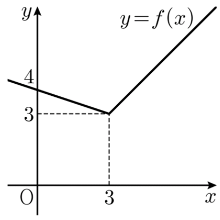
이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(11-3)^2+4^2}=4\sqrt{5}$ 이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=4$

22 정답 ④

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}f(x)+4 & (f(x)<3)\\ f(x) & (f(x)\ge 3)\end{cases}$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 3$이므로

$(f\circ f)(x)=f(x)$이다.

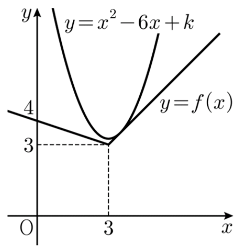
이차함수 $y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$의

그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서 만나기

위해서는 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-6x+k$의

그래프와 직선 $y=x$가 접해야 한다.



$x^2-6x+k=x$에서

이차방정식 $x^2-7x+k=0$이 중근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=49-4k=0,\ 4k=49$

$\therefore k=\frac{49}{4}$

23 정답 ②

해설 $y=f(x)=\sqrt{3x+4}+2\ (y\geq 2)$라 하면

$(y-2)^2=3x+4,\ x=\frac{1}{3}(y-2)^2-\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}\ (x\geq 2)$

즉, 함수 $g(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}\ (x\geq 2)$는

함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의

교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{3x+4}+2=x$에서

$3x+4=(x-2)^2$

$x^2-7x=x(x-7)=0$

$\therefore x=7\ (\because x\geq 2)$

$\therefore \mathrm{A}(7,\ 7)$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{C}(3,\ -1)$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로

직선 l의 방정식은

$y=-(x+1)+3$

$x+y-2=0$

점 $\mathrm{A}(7,\ 7)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|7+7-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=6\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=24$

24 정답 4

해설 $B=\{x^2-2\,|\,x\in A\}\subset\{x\,|\,|x|<7,\ x$는 정수$\}$

이므로 $-7<x^2-2<7,\ 0\leq x^2<9$

$\therefore -3<x<3$

그런데 x는 정수이므로 $V=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$라

하면 $A\subset V$

조건 (가)에서 $n(A)=2$이므로

$A=\{x_1,\ x_2\}\ (x_1\neq x_2,\ x_1\in V,\ x_2\in V)$라 하면

$B=\{{x_1}^2-2,\ {x_2}^2-2\}$, $C=\{2x_1-k,\ 2x_2-k\}$

$B=C$이므로

${x_1}^2-2=2x_1-k,\ {x_2}^2-2=2x_2-k$ 또는

${x_1}^2-2=2x_2-k,\ {x_2}^2-2=2x_1-k$

(ⅰ) ${x_1}^2-2=2x_1-k,\ {x_2}^2-2=2x_2-k$일 때

${x_1}^2-2=2x_1-k$에서 ${x_1}^2-2x_1+k-2=0$

$x_1=1\pm\sqrt{3-k}$

이때 $x_1\in V$이므로 $\sqrt{3-k}=-1,\ 0,\ 1$

k는 2 이하의 정수이므로 $k=2$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=2$

마찬가지로 ${x_2}^2-2=2x_2-k$일 때에도

$x_2=0$ 또는 $x_2=2$

$x_1\neq x_2$이므로 $x_1=0,\ x_2=2$ 또는

$x_1=2,\ x_2=0$

$\therefore A=\{0,\ 2\}$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=2$이므로

$\alpha\beta=2\cdot 2=4$

(ⅱ) ${x_1}^2-2=2x_2-k,\ {x_2}^2-2=2x_1-k$일 때

위의 두 식을 변끼리 빼면

${x_1}^2-{x_2}^2=2(x_2-x_1)$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(x_1-x_2)=0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0$

$\therefore x_1+x_2+2=0\ (\because x_1\neq x_2)$

이 식을 만족시키는 $x_1,\ x_2$는 $x_1=-2,\ x_2=0$

또는 $x_1=0,\ x=-2$

$\therefore A=\{-2,\ 0\},\ k=-2$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=-2$이므로

$\alpha\beta=-2\cdot(-2)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha\beta=4$