마플시너지(2025) - 공통수학2 173~210p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
150문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 보기 중 명제인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $1+1=3$
ㄴ. $2(x-2)=2x-4$
ㄷ. $x-1=x+1$
ㄹ. $x-1=2x-3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

02 다음 중 명제인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $x^2 > \sqrt{13}$
② 2는 홀수이다.
③ 엇각의 크기는 서로 같다.
④ 오늘은 날씨가 좋다.
⑤ 99는 100에 가깝다.

03 [2007년 6월 고1 6번]
다음은 편지 내용의 일부분이다.

안녕하세요?
저는 제주도에 사는 희망이라고 해요.
ㄱ. 제주도는 섬이랍니다.
제가 자랑하고 싶은 곳은 한라산이에요.
ㄴ. 한라산은 아시아에서 가장 높은 산이랍니다.
ㄷ. 한라산에는 예쁜 꽃들이 많아요.
날씨가 맑은 날에는 산 정상까지 보인답니다.
ㄹ. 오늘은 날씨가 참 좋군요.

위의 밑줄 친 문장 중에서 명제인 것을 모두 고른 것은?

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

04 다음 중 참인 명제인 것은?

① $-8x+2>-8x+3$
② 3.33333은 3.4에 가까운 수이다.
③ $-x^2+5x>6$
④ 23은 소수이다.
⑤ π^2은 유리수이다.

05 [2022년 3월 고2 2번 변형]
실수 x에 대한 조건 'x는 -2보다 작거나 같다.'의 부정은?

① $x<-2$ ② $x\le -2$ ③ $x=-2$
④ $x\ge -2$ ⑤ $x>-2$

06 실수 x, y, z에 대하여
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$의 부정과 서로 같은 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x)=0$
② $x\ne y$ 그리고 $y\ne z$ 그리고 $z\ne x$
③ $(x-y)(y-z)(z-x)\ne 0$
④ x, y, z는 모두 서로 다른 수이다.
⑤ x, y, z 중 적어도 두 수는 서로 다르다.

07 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2-4x-12\le 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

08 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에서 두 조건 $p: x^2=3x$, $q: x\ge 2$에 대하여 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합은?

① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{3\}$
④ $\{0, 1\}$ ⑤ $\{3, 5\}$

09 [2016년 9월 고3 문과 12번 변형]
정수 a에 대한 조건 $p: 2a(a+2)\ge 0$에 대하여 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 20 이하의 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 'p: x는 홀수 또는 12의 약수' 일 때, 조건 $\sim p$의 진리집합의 모든 원소의 합은?

① 84 ② 86 ③ 88
④ 90 ⑤ 92

11 전체집합 U에 대하여 두 조건 '$p: x \leq 2$', '$q: x < -3$'의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 조건 '$-3 \leq x \leq 2$'의 진리집합을 나타낸 것은?

① $P \cup Q$　② $P \cap Q$　③ $P \cup Q^C$　④ $P \cap Q^C$　⑤ $P^C \cap Q$

12 [2024년 10월 고1 16번/4점]
두 자연수 a, b에 대하여 실수 x에 대한 두 조건
$p: x^2-4x+a+2 \leq 0$, $q: 0 < |x-b| \leq 4$의
진리집합을 각각 P, Q라 하자. $P \neq \varnothing$, $P \subset Q$가 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

13 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 다음 중 명제 $p \rightarrow q$가 참인 것은?

① $p: a<0$　　$q: \dfrac{1}{a}>0$
② $p: a>b$　　$q: \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$
③ $p: a+b>0$　　$q: a-b>0$
④ $p: a^2>ab$　　$q: b^2<ab$
⑤ $p: |a|>|b|$　　$q: \dfrac{1}{|a|}<\dfrac{1}{|b|}$

14 다음 중 참인 명제는?

① $x>0$이면 $x>1$이다.
② $2x-1=3$이면 $x^2+2x-8=0$이다.
③ x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다.
④ 자연수 n이 소수이면 n^2은 홀수이다.
⑤ 실수 x, y에 대하여 $xy=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.

15 다음 중 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $a>b$이면 $a^2>b^2$이다.
ㄴ. 정사각형은 마름모이다.
ㄷ. 임의의 유리수 x에 대하여 $\sqrt{2}x$는 무리수이다.
ㄹ. $a+b>0$이면 $a>0$이고 $b>0$이다.
ㅁ. x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다.

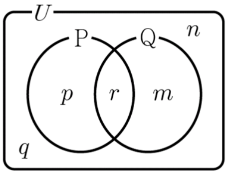
① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄷ, ㄹ　④ ㄴ, ㅁ　⑤ ㄹ, ㅁ

16 다음 보기 중 참인 명제의 개수는?

〈보기〉
ㄱ. x가 무한소수이면 x는 무리수이다.
ㄴ. $a>b$이면 $ac>bc$이다.
ㄷ. 자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 홀수이다.
ㄹ. 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.

① 없다.　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

17 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 두 집합 P, Q가 다음 그림과 같을 때, 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는?



① m ② n ③ p
④ q ⑤ r

18 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에서 두 조건 p, q를 만족시키는 두 집합을 각각 P, Q라 하자. $P=\{x\,|\,x$는 2의 배수$\}$, $Q=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$일 때, 명제 $p \to \sim q$가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 6 ⑤ 7

19 [2019년 3월 고3 문과 8번/3점]
자연수 x에 대하여 명제
'$5 \le x \le 9$이면 $x \le 8$이다.'
가 거짓임을 보여 주는 x의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

20 명제 $p \to q$가 참일 때, 조건 p를 만족시키는 집합 P와 조건 q를 만족시키는 집합 Q사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^C \subset P^C$ ③ $Q \subset P^C$
④ $Q^C \subset P$ ⑤ $Q = P^C$

21 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \to q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cap Q = \varnothing$ ② $P \cup Q = P$
③ $P \cup Q^C = P$ ④ $P - Q = \varnothing$
⑤ $Q - P = \varnothing$

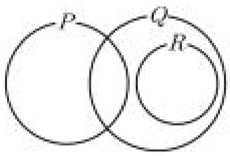
22 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q를 만족시키는 집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \to \sim q$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $P^C \subset Q$
③ $Q \subset P^C$ ④ $P \cup Q^C = U$
⑤ $P^C \cap Q^C = \varnothing$

23 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. $\sim q \to p$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \cup Q = Q$ ② $P \cup Q = U$
③ $P \cap Q = P$ ④ $P^c \cap Q = Q$
⑤ $P^c \cup Q = U$

24 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하고, 벤 다이어그램으로 나타내면 아래 그림과 같다.
다음 보기 중 참인 명제만을 있는대로 고른 것은?

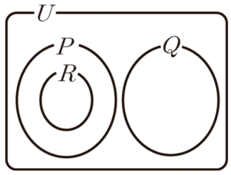


〈보기〉

ㄱ. $q \to r$
ㄴ. (p이고 q) $\to p$
ㄷ. (p 또는 q) $\to r$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

25 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합의 포함 관계가 아래 그림과 같다. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 명제는?



① $p \to \sim q$ ② $p \to \sim r$ ③ $q \to \sim p$
④ $r \to p$ ⑤ $\sim p \to \sim r$

26 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 q가 'x는 홀수이다.' 일 때, 명제 $p \to \sim q$가 참이 되게 하는 집합 P의 개수를 구하시오.

27 전체집합 $U = \{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 p가 'p : x는 6의 양의 약수이다.'일 때,
명제 $\sim p \to q$가 참이 되도록 하는 집합 Q의 개수를 구하시오.

28 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $P \cap Q = Q$, $Q \cap R = R$인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \rightarrow p$ ② $r \rightarrow q$ ③ $\sim p \rightarrow \sim q$
④ $\sim q \rightarrow \sim r$ ⑤ $p \rightarrow r$

29 실수 전체의 집합 U에 대하여 $x \in U$, $y \in U$일 때, 다음 보기 중 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 모든 x에 대하여 $-x^2+2x-3<0$이다.
ㄴ. 어떤 x에 대하여 $x^2+1 \geq 0$이다.
ㄷ. 어떤 x, y에 대하여 $x^2+y^2 \neq 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30 다음 중 거짓인 명제는?

① 어떤 짝수는 소수이다.
② 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+1 \geq 0$이다.
③ 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x>0$이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $x^3<0$이다.
⑤ 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2>x$이다.

31 [2018년 3월 고3 문과 29번 변형]
전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 두 명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $4x^2-12x+5<0$이다.'
'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x \in A$이다.'가 있다.
두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

32 [2017년 6월 고2 문과 6번 변형]
명제
'$x=a$이면 $x^2+x-12=0$이다.'
가 참이 되기 위한 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

33 두 조건 'p : $|x-3|<k$', 'q : $-5 \leq x \leq 8$'에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

34 두 조건 $p : |x-1|>1$, $q : |x-k|<6$에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

35 명제 '$-1-a<x<5-a$이면 $-2 \leq x \leq 8$이다.'가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq -3$
② $-3 \leq a \leq 1$
③ $-3 \leq a < 1$
④ $-3 < a < 1$
⑤ $a \leq 1$

36 명제 '$2k-4 \leq x \leq 3k+6$인 어떤 실수 x에 대하여 $0 \leq x \leq 4$이다.'가 참이 되게 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

37 명제 '$-4 \leq x < 7$인 어떤 실수 x에 대하여 $a-2 < x \leq 3a+8$이다.'가 참이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $a > -5$)

38 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+3ax+18<0$이다.'가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

39 명제 '$x \geq 99$이면 $2x+a \leq 3x-2a$이다.' 가 참이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \leq 31$
② $a \geq 31$
③ $a \leq 33$
④ $a \geq 33$
⑤ $a \leq 35$

40 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가
$p: 2 \le x \le 10$, $q: x < k+1$이다. 이때 $p \to q$가 거짓이 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하시오.

41 두 조건 $p: |x-1| \ge h$, $q: |x+2| < 5$에 대하여 명제 '$\sim p$이면 q이다.' 가 참이 되도록 하는 실수 h의 최댓값을 구하시오. (단, $h > 0$)

42 두 조건 $p: |x+1| \ge 4$, $q: |x| \le k$에 대하여 명제 $q \to \sim p$가 참이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43 두 조건 $p: |x-3| < k$, $q: x^2-5x-14 > 0$에 대하여 명제 $p \to \sim q$가 참이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

44 명제
'모든 실수 x에 대하여 $4x^2+18x+a \ge 0$이다.'
가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

45 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-8x+2a-2 < 0$이다.' 의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

46 명제
'모든 실수 x에 대하여 $3x^2+10x+a \geq 0$이다.'
가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

47 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-6x+a-1<0$이다.'
의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

48 [2023년 11월 고1 25번 변형]
정수 k에 대한 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

> p : 모든 실수 x에 대하여
> $x^2+4kx+8k+5>0$이다.
> q : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-1$이다.

49 [2024년 3월 고2 26번/4점]
실수 x에 대한
두 조건 $p: 2x-a=0$, $q: x^2-bx+9>0$이 있다.
명제 $p \rightarrow \sim q$와 명제 $\sim p \rightarrow q$가 모두 참이 되도록 하는 두 양수 a, b의 값의 합을 구하시오.

50 다음 명제의 부정이 참일 때, 양수 k의 최솟값을 구하시오.

> 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3kx+36>0$이다.

51 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-ax+16<0$이다.' 의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

52 세 조건
$p : x^2+2x-15<0,\ q : x \le a+3,\ r : x<b-2$
에 대하여 두 명제 $p \to \sim q$, $p \to r$가 모두 참이 되도록 하는 a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 할 때, $m-M$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

53 [2023년 3월 고2 18번/4점]
실수 x에 대한 두 조건 $p : |x-k| \le 2$, $q : x^2-4x-5 \le 0$이 있다. 명제 $p \to q$와 명제 $p \to \sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

54 두 조건 p, q에 대하여 명제 $\sim q \to p$의 역이 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \to q$　② $\sim p \to \sim q$　③ $q \to \sim p$
④ $\sim q \to p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

55 명제 '내일 소풍 가지 않으면, 비가 온다.'의 대우는?

① 내일 소풍 가면, 비가 오지 않는다.
② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.
③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.
④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.
⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

56 다음 중 그 역이 참인 명제를 모두 고르면? (정답 2개) (단, x, y는 실수)

① $3x-2>0$ 이면 $x=1$ 이다.
② 사다리꼴은 평행사변형이다.
③ 삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\angle A=60^\circ$ 이다.
④ x, y가 짝수이면 $x+y$ 도 짝수이다.
⑤ $x+y>0$ 이면 $xy>0$ 이다.

57 다음 보기 중 역과 대우가 모두 참인 명제를 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.
ㄴ. 실수 x, y에 대하여 $x+y>2$이면 $x>1$ 또는 $y>1$이다.
ㄷ. $\triangle ABC$에서 $\angle A=\angle B$이면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58 [2018년 3월 고3 문과 13번 변형]

두 조건 p, q의 진리집합이 각각

$$P=\{2,\ a+3\},\ Q=\{1,\ 4,\ a^2-2\}$$

이다. 명제 $q \rightarrow p$의 역이 참일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

59 명제 '$x^2+kx-6 \neq 0$이면 $x-2k \neq 0$이다.'가 참이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

60 두 실수 a, b에 대하여 명제 '$a+b<4$이면 $a<7$ 또는 $b<k$이다.'가 참일 때, 정수 k의 최솟값을 구하시오.

61 명제 '$|x-2a| \geq 4$이면 $|x+1|>2$이다.'가 참이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

62 [2023년 3월 고2 19번 변형]

다음 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는?

> (가) $\{2\} \subset A \subset \{x \mid x$는 실수$\}$
> (나) $a^2-6 \notin A$이면 $a \notin A$이다.
> (다) $n(A)=3$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

63 세 조건 p, q, r에 대하여 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim p \rightarrow r$ 가 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $\sim r \rightarrow p$ ② $q \rightarrow \sim p$
③ $\sim r \rightarrow \sim q$ ④ $q \rightarrow r$
⑤ $q \rightarrow \sim r$

64 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $p \Rightarrow r$	㉡ $r \Rightarrow p$	㉢ $p \Rightarrow \sim r$
㉣ $q \Rightarrow \sim r$	㉤ $r \Rightarrow \sim p$	

① ㉠, ㉡
② ㉠, ㉢, ㉤
③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣
⑤ ㉢, ㉣, ㉤

65 네 조건 p, q, r, s에 대하여 두 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$, $r \rightarrow s$가 모두 참일 때, 다음 중 명제 $r \rightarrow p$가 참임을 보이기 위하여 필요한 참인 명제는?

① $q \rightarrow \sim s$ ② $\sim q \rightarrow s$ ③ $s \rightarrow q$
④ $\sim s \rightarrow q$ ⑤ $s \rightarrow \sim q$

66 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R는 각각 세 조건 p, q, r를 만족하는 집합이다.
두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset R$ ③ $P^C \subset R^C$
④ $P \subset Q^C$ ⑤ $R^C \subset P$

67 세 명제 $\sim p \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim r$이 참이고, 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$ ② $\mathrm{R} \subset \mathrm{Q}^c$
③ $\mathrm{R} \cup \mathrm{P}^c = \mathrm{R}$ ④ $\mathrm{P} \subset \mathrm{R}$
⑤ $\mathrm{R} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{R}$

68 다음 두 명제가 모두 참일 때, 항상 참인 명제인 것은?

(가) 달리기를 잘하는 학생은 축구도 잘한다. (나) 축구를 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

① 달리기를 잘하는 학생이 농구를 잘하는 것은 아니다.
② 농구를 잘하는 학생은 축구도 잘한다.
③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.
④ 농구를 잘하지 못하는 학생은 달리기도 잘하지 못한다.
⑤ 축구와 농구를 모두 잘하는 학생은 달리기를 잘할 수 있다.

69 다음은 A, B, C, D 네 사람의 컴퓨터 활용능력시험 결과이다.
위 사실로부터 얻을 수 있는 추론 중 항상 옳은 것은?

> (가) 1, 2, 3 급에 각각 1 명, 2 명, 1 명이 합격했다.
> (나) A와 B는 다른 급수에 합격했다.
> (다) A와 C는 다른 급수에 합격했다.
> (라) D는 세 사람과 다른 급수에 합격했다

① A는 1 급에 합격했다.
② B는 2 급에 합격했다.
③ A는 3 급에 합격했다.
④ C는 1 급에 합격했다.
⑤ D는 3 급에 합격했다.

70 5명의 학생 A, B, C, D, E가 K대학교에 지원하여 그 중 1명이 합격하였다. 학생들은 다음과 같이 이야기하였고 그 중 1명이 거짓말을 하였다. 이때 합격한 학생은?

> A: "B는 합격하지 않았다."
> B: "합격한 사람은 D이다."
> C: "내가 합격하였다."
> D: "B의 말은 거짓말이다."
> E: "나는 합격하지 않았다."

① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

71 A, B, C 세 사람이 각각 빨간색, 파란색, 검은색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A는 항상 참만을 말하고 C는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 진술했을 때, 사실이 아닌 것은?

> 빨간색 모자를 쓴 사람: 검은색 모자를 쓴 사람은 C이다.
> 검은색 모자를 쓴 사람: 자신이 B이다.
> 파란색 모자를 쓴 사람: 검은색 모자를 쓴 사람은 A이다.

① 검은색 모자를 쓴 사람은 C이다.
② 빨간색 모자를 쓴 사람은 A이다.
③ 파란색 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
④ 파란색 모자를 쓴 사람은 C가 아니다.
⑤ 검은색 모자를 쓴 사람은 A가 아니다.

72 우성, 동건, 정재는 전교 3등 안에 드는 학생들이다. 다음의 주장들 중 하나만 참이라 할 때, 전교 1, 2, 3등을 차례대로 적은 것은?

> 우성: 나는 전교 1등이 아니야
> 동건: 나는 2등이 아니야.
> 정재: 나는 2등이야.

① 동건, 정재, 우성 ② 정재, 동건, 우성
③ 우성, 동건, 정재 ④ 정재, 우성, 동건
⑤ 동건, 우성, 정재

73 x, y가 실수일 때, 다음 보기 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건이 되는 것을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $p : xy=0$ $\quad q : |x-y|=|x+y|$
ㄴ. $p : x=y=0$ $\quad q : |x-y|+|x+y|=0$
ㄷ. $p : x=y=0$ $\quad q : x+y\sqrt{3}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

74 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p: $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$
q: $A=B$
r: $A\cup B=B$

이때 조건 p는 조건 q이기 위한 (가) 조건이고, 조건 q는 조건 r이기 위한 (나) 조건이다. (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분 ② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요 ④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

75 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $p : x=1$ 이고 $y=1$, $q : x+y=2$이고 $xy=1$
② $p : |x-1|=2$, $q : x^2-2x+3=0$
③ $p : a>3$, $q : a^2>9$
④ $p : a^2=ab$, $q : a=b$
⑤ $p : |a|<|b|$, $q : a<b$

76 다음 중 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y는 실수이다.)

① $p : a<0$, q : $\sqrt{a^2}=-a$
② $p : xy<0$, $q : x<0$이고 $y>0$
③ $p : xy=0$, $q : x=0$ 또는 $y=0$
④ $p : A\cup(B-A)=B$, $q : A\subset B$
⑤ $p : x$, y가 유리수, $q : x+y$, xy가 유리수

77 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① p: $ac=bc$, q: $a=b$
② p: $A\subset B$, q: $A-B=\varnothing$
③ p: $a>0$이고 $b<0$, q: $ab<0$
④ p: $a+b$가 정수, q: a, b가 정수
⑤ p: $\triangle ABC$는 정삼각형이다.
q: $\triangle ABC$의 세 내각의 크기가 같다.

78 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은? (단, a, b, x, y는 실수이다.)

① p : $a<b$ $\quad q$: $|a|<|b|$
② p : $|x|=|y|$ $\quad q$: $x^2=y^2$
③ p : $a^2-2ab+b^2=0$ $\quad q$: $a=b=0$
④ p : $x>0$, $y>0$ $\quad q$: $x^2+y^2>0$
⑤ p : $a>x$, $b>y$ $\quad q$: $ab>xy$

79 다음 보기 중 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $p: a \geq b$, $q: a^2 \geq b^2$
ㄴ. $p: a+b \leq 2$, $q: a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$
ㄷ. $p: |a-b| = |a|-|b|$, $q: (a-b)b \geq 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

80 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는
$p: a^2+b^2=0$, $q: a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$,
$r: |2a+b| = |2a-b|$ 이다. 다음 보기 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. p는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. p는 q이고 r이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

81 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는
$p: (a+b)^2=0$, $q: (a-b)^2=0$, $r: a^2+b^2=0$
이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. p는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. q는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. p이고 q는 r이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

82 두 조건 a, b에 대하여 $f(a, b)$를

$$f(a, b)=\begin{cases} 1 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닐 때}) \\ 0 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 필요충분조건일 때}) \\ -1 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닐 때}) \end{cases}$$

로 정의한다. 세 집합 X, A, B에 대하여 조건 p, q, r가 다음과 같을 때, $f(p, q)+2f(q, r)+3f(r, p)$의 값을 구하시오.

(가) $p: X \subset A$ 이고 $X \subset B$
(나) $q: X \subset (A \cap B)$
(다) $r: X \subset (A \cup B)$

83 전체집합 U의 두 부분집합 P, Q에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p는 $\sim q$이기 위한 충분조건일 때 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $P^C \subset Q$
④ $P \cap Q = \varnothing$ ⑤ $P \cap Q^C = Q$

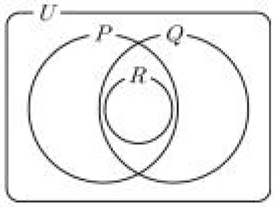
84 두 조건 p, q에 대하여 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다. 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, U는 전체집합이다.)

① $P\cap Q=\varnothing$　② $P\cup Q=U$
③ $P\subset Q$　④ $Q\subset P$
⑤ $Q^c=P$

85 세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건이고 r는 q이기 위한 충분조건이다. 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?
(단, P, Q, R는 공집합이 아니다.)

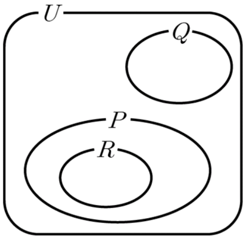
① $R\subset(P\cup Q)$　② $R-Q=P$　③ $Q-P=R$
④ $R^C\subset(Q\cup P)$　⑤ $P^C\subset(Q\cap R)$

86 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. 이 집합의 포함 관계가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① r는 p 또는 q이기 위한 필요조건이다.
② $\sim r$는 $\sim p$ 또는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
③ r는 p이고 q이기 위한 충분조건이다.
④ r는 p이고 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ $\sim r$는 p이고 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

87 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. 이들의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은? (단, U는 전체집합이다.)



〈보기〉

ㄱ. $\sim p \rightarrow \sim r$

ㄴ. $q \rightarrow \sim r$

ㄷ. ($\sim p$이고 $\sim r$) $\rightarrow q$

ㄹ. (p 또는 r) $\rightarrow \sim q$

① ㄱ, ㄴ　② ㄷ, ㄹ　③ ㄱ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

88 두 조건 p, q에 대하여 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $Q \subset P$　③ $P - Q = \varnothing$
④ $P \cap Q = \varnothing$　⑤ $P \cup Q = U$

89 두 조건

$p: x^2 + ax + 16 \neq 0$

$q: x - 4 \neq 0$

에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

90 두 조건 $p: 2x - a \neq 0$, $q: 4x^2 + 2x - 12 \neq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

91 $x^2 + ax + 3 \neq 0$이 $x - 1 \neq 0$이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

92 $x^2+ax+6\neq0$인 것은 $x\neq-2$이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

93 [2018년 11월 고2 문과 7번/3점]

실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2-a=0$,

$q : x=2$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

94 [2019년 11월 고3 문과 6번/3점]

실수 x에 대한 두 조건

$p : x=a$,

$q : 3x^2-ax-32=0$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

95 [2021년 11월 고1 11번 변형]

실수 x에 대한 두 조건

$p : |x+1|\le n$, $q : x^2+4x-12\le 0$에 대하여

p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

96 [2018년 11월 고1 12번 변형]

실수 x에 대한 두 조건

$p : x^2-3x-4\le 0$, $q : (x-a)(x-a-1)\le 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

97 실수 x에 대한 두 조건 $p : x^2-4\le 0$, $q : x\le a$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

98 $x=2x+\frac{1}{2}$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건일 때, 실수 a, b에 대하여 $4(a-b)$의 값을 구하시오.

99 두 조건 $p:(x-1)^2=a$, $q:x=3$ 또는 $x=b$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

100 [2018년 3월 고2 이과 10번/3점]
실수 x에 대한 두 조건

$p:(x-1)(x-1-a)\le 0$,

$q:-3<x\le 7$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

101 [2018년 3월 고2 이과 10번 변형]
실수 x에 대한 두 조건

$p:(x-1)(x-1-a)\le 0$,

$q:-2<x<6$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

102 [2018년 11월 고1 12번/3점]
실수 x에 대한 두 조건

$p:x^2-5x-6\le 0$

$q:(x-a)(x-a-2)\le 0$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

103 $x^2-6x+8<0$이 $-2<x-a<2$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

104 $-a \le x \le a$가 $x^2-2x-48<0$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

105 [2023년 11월 고1 13번/3점]
실수 x에 대하여 두 조건
$p:(x+1)(x+2)(x-3)=0$,
$q:x^2+kx+k-1=0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은?

① -18 ② -16 ③ -14
④ -12 ⑤ -10

106 자연수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 $P=\{3\}$, $Q=\{a^2-1,\ ab+a\}$, $R=\{ab,\ b-1\}$이라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 p이기 위한 필요조건일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

107 [2022년 11월 고1 13번/3점]
실수 x에 대한 두 조건 $p:x^2-6x+9\le 0$,
$q:|x-a|\le 2$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

108 세 조건 $p:-2<x<3$ 또는 $x\ge 6$, $q:x\ge a+1$, $r:x\le b+1$에 대하여 $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이고 q는 p이기 위한 필요조건이다. 이때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 최솟값을 구하시오.

109 [2021년 3월 고2 14번 변형]
실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p:\ x^2-11x-12=0,\ q:\ |x-1|>k$$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

110 두 조건 p: $|x-a|<3$, q: $|x-3|<7$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

111 [2016년 11월 고3 문과 7번 변형]

실수 x에 대한 두 조건

$$p: |x-1| \le 2,$$
$$q: |x| \le 2a-1$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

112 [2022년 3월 고2 17번/4점]

실수 x에 대한 두 조건

p: $x^2+2ax+1 \ge 0$, q: $x^2+2bx+9 \le 0$이 있다.

다음 두 문장이 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

• 모든 실수 x에 대하여 p이다. • p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

113 p는 q이기 위한 필요조건, p는 $\sim r$이기 위한 충분조건일 때, 항상 참인 것은?

① $p \Rightarrow q$ ② $\sim p \Rightarrow r$ ③ $p \Rightarrow r$ ④ $r \Rightarrow \sim q$ ⑤ $\sim r \Rightarrow p$

114 세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고, $\sim q$는 r이기 위한 필요조건일 때, <보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

115 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 r이기 위한 필요조건, p는 s이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 필요충분조건일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. q는 p이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. s는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. s는 q이기 위한 충분조건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

116 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 "n^2이 홀수이면 n도 홀수이다."를 증명한 것이다.

> [증명]
> 주어진 명제의 (가)를 구해보면
> "n이 짝수 이면 n^2도 짝수이다."
> 이 때, n이 짝수이면
> $n=$(나) (단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
> 따라서 $n^2=4k^2=2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k+1$ ④ 역, $2k+1$ ⑤ 역, $4k^2$

117 다음은 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이때 $\square$ 안에 들어갈 내용으로 바르지 않은 것은?

> 주어진 명제의 $\boxed{①}$을 구하여 보면
> n이 $\boxed{②}$이면 n^2도 $\boxed{②}$이다.
> 이때 n이 $\boxed{②}$이므로 $n=\boxed{③}$
> (k는 0 또는 자연수)
> 즉, n^2은 $\boxed{②}$이다.
> 따라서 주어진 명제의 $\boxed{①}$이 $\boxed{④}$이므로
> 주어진 명제는 $\boxed{⑤}$이다.

① 대우 ② 홀수 ③ $2k+1$ ④ 거짓 ⑤ 참

118 다음은 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.'를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면
> 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{(가)}$'이다.
> n이 3의 배수가 아니므로
> $n=3m\pm\boxed{(나)}$ (m은 자연수)에서
> $n^2=9m^2\pm6m+1=3(3m^2\pm2m)+1$
> 이때 $3m^2\pm2m$이 $\boxed{(다)}$이므로 n^2은 $\boxed{(라)}$
> 따라서 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3의 배수가 아니다.
② (나) 1
③ (다) 자연수
④ (라) 3의 배수이다.
⑤ (마) 참

119 다음은 $\sqrt{5}$가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

> $\sqrt{5}$를 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{(가)}$ 인 정수이다.)
> $\therefore \sqrt{5}p=q$
> 양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$이므로
> q는 $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 p는 $\boxed{(다)}$이므로 $\boxed{(가)}$에 모순이다.
> 즉, $\sqrt{5}$는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	양수	5의 배수	짝수
②	음수	짝수	홀수
③	서로소	홀수	5의 배수
④	서로소	5의 배수	짝수
⑤	서로소	5의 배수	5의 배수

120 [2013년 6월 고1 19번/4점]
다음은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2-1}$ 이 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt{n^2-1}$ 이 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
> $p^2(n^2-1)=q^2$ 이다.
> p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $n^2=$ $\boxed{(가)}$ 이다.
> 자연수 k에 대하여
> (ⅰ) $q=2k$일 때
> $(2k)^2<n^2<$ $\boxed{(나)}$ 인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅱ) $q=2k+1$일 때
> $\boxed{(나)}$ $<n^2<(2k+2)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여
> $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
> 따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(3)$의 값은?

① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

121 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$ 이 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
> $p^2(n^2+1)=q^2$이다.
> p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
> $n^2=$ $\boxed{(가)}$ 이다.
> 자연수 k에 대하여
> (ⅰ) $q=2k$일 때
> $(2k-1)^2<n^2<$ $\boxed{(나)}$ 인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅱ) $q=2k+1$일 때
> $\boxed{(나)}$ $<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
> $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
> 따라서 $\sqrt{n^2+1}$ 은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값은?

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

122 [2017년 3월 고3 문과 12번 변형]
실수 x에 대한 조건
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이다.'
가 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

123 다음은 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$임을 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 식 또는 기호를 차례대로 나열한 것은?

> $a>0$, $b>0$일 때,
> $\boxed{(가)}-\boxed{(나)}$
> $=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$
> $\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
> 그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$이므로
> $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

	(가)	(나)	(다)
①	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$<$
②	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$>$
③	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$<$
④	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$>$
⑤	$(\sqrt{a+b})^2$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$>$

124 다음은 $a>0$, $b>0$일 때 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. $\square$안에 알맞은 것은?

> $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\square\right)^2}{2}\geq 0$

① $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　② $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
③ $a+b$　④ $a-b$
⑤ ab

125 다음 보기 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z는 실수이다.)

〈보기〉
ㄱ. $x^2-xy+y^2\geq 0$
ㄴ. $x^2+4x\geq -4$
ㄷ. $|x|+|y|\geq |x-y|$
ㄹ. $x^2\geq 0$
ㅁ. $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

126 다음 보기 중 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)의 개수는?

〈보기〉
(가) $x^2-xy+y^2\geq 0$
(나) $x^2-x+1>0$
(다) $|a+b|\leq |a|+|b|$
(라) $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$
(바) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq (ax+by)^2$

① 6개　② 5개　③ 4개
④ 3개　⑤ 2개

127 두 실수 a, b에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $(a+b)^2\geq 3ab$
ㄴ. $\sqrt{2|a|+2|b|}\geq\sqrt{3|a|}+\sqrt{3|b|}$
ㄷ. $\sqrt{a^2+b^2}\leq |a-b|$
ㄹ. $a^2+4b^2+16\geq 8a+16b-4ab$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

128 실수 a, b에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $|a|+|b| \geq |a+b|$
ㄴ. $|a|-|b| \leq |a-b|$
ㄷ. $|a+b| \geq |a-b|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

129 두 양수 a, b에 대하여 $ab=25$일 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오.

130 [2018년 11월 고2 문과 9번/3점]
$x>0$인 실수 x에 대하여

$$4x+\frac{a}{x}\ (a>0)$$

의 최솟값이 2일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

131 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(1,\ 4)$를 지날 때, ab의 최솟값을 구하시오. (단, a, b는 $a>0$, $b>0$인 상수이다.)

132 두 양수 a, b에 대하여 $2a+2b=4$일 때, $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값을 구하시오.

133 $x>-1$일 때, $x+\frac{4}{x+1}$의 최솟값을 m, 그때의 x의 값을 n이라고 한다. 이때 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

134 $a>0$, $b>0$일 때, $(2a+3b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$의 최솟값은?

① 16 ② 20
③ 24 ④ 25
⑤ 28

135 양수 a에 대하여 $\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$의 최솟값을 m, 그때의 a의 값을 n이라 할 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

136 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하시오.

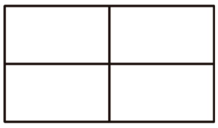
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$$

137 [2022년 11월 고1 25번 변형]
두 양의 실수 a, b에 대하여 두 일차함수 $f(x)=\dfrac{a}{6}x-\dfrac{1}{3}$, $g(x)=\dfrac{1}{b}x+2$가 있다.
직선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 평행할 때, $(a+2)(b+3)$의 최솟값을 구하시오.

138 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ (단, a는 실수)이 허근을 가질 때, $a+\dfrac{1}{a-4}$의 최솟값을 구하시오.

139 세 양수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$의 최솟값을 구하시오.

140 길이가 $30\,\text{m}$인 철망을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 개의 직사각형 모양으로 우리를 만들려고 한다. 이때 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

141 [2019년 11월 고1 16번 변형]
한 모서리의 길이가 8이고 부피가 192인 직육면체를 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은?

① $2\sqrt{26}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{29}$ ⑤ $2\sqrt{30}$

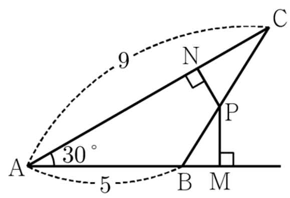
142 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle\mathrm{OBC}$의 최소 넓이는?

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

143 [2018년 6월 고2 문과 17번/4점]
양수 m에 대하여 직선 $y=mx+2m+3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

144 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=9$, $\angle\mathrm{CAB}=30^\circ$인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에서 두 직선 AB, AC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



145 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 $M-m$의 값을 구하시오.

146 $a^2+b^2=4$, $x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면?

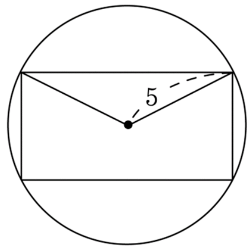
① $-4 \le ax+by \le 4$
② $-9 \le ax+by \le 9$
③ $-6 \le ax+by \le 6$
④ $0 \le ax+by \le 36$
⑤ $36 \le ax+by \le 36$

147 실수 x, y, z에 대하여 $x+y+z=7$, $x^2+y^2+z^2=27$일 때, x의 최댓값을 구하시오.

148 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}\,y+\sqrt{3}\,z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

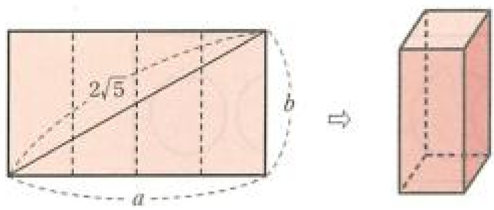
① $\mathrm{M}=3$, $m=0$
② $\mathrm{M}=3$, $m=-3$
③ $\mathrm{M}=6$, $m=0$
④ $\mathrm{M}=6$, $m=-6$
⑤ $\mathrm{M}=6$, $m=-12$

149 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$　② $5\sqrt{2}$　③ $10\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{2}$　⑤ $100\sqrt{2}$

150 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$이고 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형 모양의 종이를 4등분하여 눈금에 맞게 접어서 직육면체 모양의 기둥을 만들려고 한다. 기둥의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하시오.



마플시너지(2025) - 공통수학2 173~210p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
150문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ②, ③	03 ②
04	05	06 ⑤
07 6	08	09
10	11	12
13	14	15
16	17	18 ④
19 ④	20	21
22	23 ②	24
25	26 32	27 16
28 ⑤	29 ⑤	30
31 56	32 ③	33 ⑤
34 9	35	36 7
37 26	38 5	39 ③
40	41 2	42
43 4	44 ②	45 9
46 ④	47 10	48 3
49 12	50 4	51 -8
52 13	53 ②	54 ③
55 ③	56 ①, ②	57 ①
58	59 1	60 -3
61 2	62	63
64 ⑤	65	66
67 ②	68	69 ②
70	71	72
73	74	75
76	77	78 ④
79 ②	80 ⑤	81
82 -1	83	84 ①
85	86	87
88	89 -8	90 -12
91 -4	92 5	93
94	95	96
97	98 3	99
100	101	102
103 3	104	105
106	107	108 8
109	110	111
112	113 ④	114
115	116 ①	117
118	119	120
121	122	123 ④
124 ②	125	126
127	128	129 10
130 ①	131	132 4
133 ③	134 ④	135 ①
136 9	137 24	138
139 6	140 ③	141

142 ③	143 ⑤	144 437
145 10	146 ③	147 5
148 ④	149 ④	150 20

마플시너지(2025) - 공통수학2 173~210p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
150문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 ㄱ. 거짓인 명제
ㄴ. $2(x-2)=2\cdot x+2\cdot(-2)=2x-4$이므로 참인 명제
ㄷ. $x-1=x+1$에서 $-1=1$이므로 거짓인 명제
ㄹ. x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 정답 ②, ③

해설 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
② 거짓인 명제이다.
③ 거짓인 명제이다.
④, ⑤ '좋다', '가깝다'는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ②, ③이다.

03 정답 ②

해설 명제의 뜻 이해하기
문장이나 식 중에서 참, 거짓을 판별할 수 있는 것이 명제이다.
ㄱ은 참인 명제이고, ㄴ은 거짓인 명제이다.
∴ ㄱ, ㄴ

04 정답 ④

해설 ① $-8x+2>-8x+3$에서 $2>3$이므로 거짓인 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
④ 참인 명제이다.
⑤ 거짓인 명제이다.

05 정답 ⑤

해설 실수 x에 대한 조건 'x는 -2보다 작거나 같다.'의 부정은 'x는 -2보다 크다.', 즉 '$x>-2$'이다.

06 정답 ⑤

해설 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$
$x-y=0$ 그리고 $y-z=0$ 그리고 $z-x=0$
$\therefore\ x=y$ 그리고 $y=z$ 그리고 $z=x$
따라서 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$의 부정은
$x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$
즉 x, y, z 중 적어도 두 수는 서로 다르다.

07 정답 6

해설 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$p: x^2-4x-12\leq 0$에서
$(x+2)(x-6)\leq 0$
$\therefore\ -2\leq x\leq 6$
$\therefore\ P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 6이다.

08 정답 ①

해설 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면
$\mathrm{P}=\{0,\ 3\}$, $\mathrm{Q}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
'p이고 $\sim q$'를 만족하는 집합은 $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}^c$
$\therefore\ \mathrm{P}\cap\mathrm{Q}^c=\mathrm{P}-\mathrm{Q}=\{0\}$

09 정답 ①

해설 주어진 조건 p의 $\sim p$는
$\sim p: 2a(a+2)<0$이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{a|-2<a<0,\ a$는 정수$\}$이다.
따라서 진리집합의 원소의 개수는 1이다.

10 정답 ②

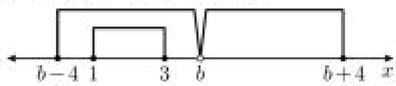
해설 20 이하의 자연수 중 홀수는 $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$이고 12의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 12$이므로
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19\}$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{8, 10, 14, 16, 18, 20\}$이므로
구하는 원소의 합은
$8+10+14+16+18+20=86$

11 정답 ④

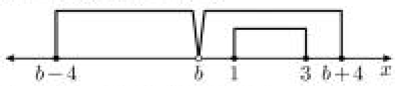
해설 $-3 \le x \le 2$에서 $x \le 2$이고 $x \ge -3$
p : $x \le 2$이므로
$P=\{x \mid x \le 2\}$
q : $x<-3$에서 $\sim q$: $x \ge -3$이므로
$Q^C=\{x \mid x \ge -3\}$
따라서 구하는 진리집합은
$P \cap Q^C$

12 정답 ③

해설 명제와 조건을 활용하여 문제해결하기
$P \neq \varnothing$이려면 $x^2-4x+a+2 \le 0$을 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.
이차방정식 $x^2-4x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-4)^2-4(a+2)$이고 $D \ge 0$이어야 하므로
$(-4)^2-4(a+2) \ge 0$에서
$a \le 2$
따라서 $P \neq \varnothing$가 되도록 하는 자연수 a의 값은 $1, 2$이다.
또한, $0<|x-b| \le 4$에서
$Q=\{x \mid b-4 \le x<b$ 또는 $b<x \le b+4\}$
(ⅰ) $a=1$일 때
$x^2-4x+3 \le 0$
$(x-1)(x-3) \le 0$에서
$P=\{x \mid 1 \le x \le 3\}$이므로 $P \subset Q$이려면
$P \subset \{x \mid b-4 \le x<b\}$이거나
$P \subset \{x \mid b<x \le b+4\}$이어야 한다.
(a) $P \subset \{x \mid b-4 \le x<b\}$일 때



$b-4 \le 1, 3<b$에서 $3<b \le 5$이므로
$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은 $4, 5$
따라서 $P \neq \varnothing$, $P \subset Q$가 되도록 하는
두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는
$(1, 4), (1, 5)$
(b) $P \subset \{x \mid b<x \le b+4\}$



$b<1, 3 \le b+4$에서 $-1 \le b<1$이므로
$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a=2$일 때
$x^2-4x+4 \le 0$
$(x-2)^2 \le 0$에서 $P=\{2\}$이므로 $P \subset Q$이려면
$b-4 \le 2<b$ 또는 $b<2 \le b+4$이어야 하므로
$2<b \le 6$ 또는 $-2 \le b<2$
$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은
$1, 3, 4, 5, 6$
따라서 $P \neq \varnothing$, $P \subset Q$가 되도록 하는
두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는
$(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 7이다.

13 정답 ⑤

해설 ① $a=-1$이면 $a<0$이지만 $\frac{1}{a}<0$이므로 거짓이다.

② $a=1, b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이므로 거짓이다.

③ $a=1, b=3$이면 $a+b>0$이지만 $a-b<0$이므로 거짓이다.

④ $a=1, b=-2$이면 $a^2>ab$이지만 $b^2>ab$이므로 거짓이다.

⑤ $|a|, |b|$는 모두 양수이므로 $|a|>|b|$일 때, 양변에 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다.
따라서 $p \to q$는 참이다.

14 정답 ②

해설 ① [반례] $x=\frac{1}{2}$

② $2x-1=3$에서 $x=2$이고
$2^2+2\cdot 2-8=0$이므로 참이다.

③ [반례] $x=2$이면 x는 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다.

④ [반례] 2는 소수이지만 2^2는 짝수이므로 거짓이다.

⑤ [반례] $x=0,\ y=1$이면 $xy=0$이지만
$x^2+y^2=1\neq 0$이다.

15 정답

해설 ㄱ. [반례] $a=1,\ b=-4$일 때, $a>b$이지만 $a^2<b^2$이다. (거짓)

ㄴ. 정사각형은 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이다. (참)

ㄷ. [반례] $x=0$일 때, $\sqrt{2}x=0$이므로 유리수이다. (거짓)

ㄹ. [반례] $a=5,\ b=-4$일 때, $a+b=1>0$이지만 $b<0$이다. (거짓)

ㅁ. 6은 12의 약수이므로 6의 약수는 12의 약수이다. (참)

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㅁ이다.

16 정답 ③

해설 ㄱ. [반례] $x=0.\dot{1}$이면 $0.\dot{1}$은 무한소수이지만
$0.\dot{1}=\frac{1}{9}$이므로 무리수가 아니다. (거짓)

ㄴ. [반례] $c<0$일 때, $a>b$이면 $ac<bc$이다. (거짓)

따라서 보기 중 참인 명제는 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

17 정답 ⑤

해설 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 원소는 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소인 r이다.

18 정답 ④

해설 명제 $p\to\sim q$가 거짓임을 보이려면 P의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

$\therefore\ P\cap(Q^C)^C=P\cap Q=\{6\}$

19 정답 ④

해설 명제의 참과 거짓을 판별한다.
명제 $p\to q$에 대하여 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $P\not\subset Q$일 때 거짓이다.
그러므로 진리집합 P의 원소이지만 진리집합 Q의 원소가 아닌 예를 찾아야 한다.
자연수 x에 대하여 두 조건
'$p: 5\le x\le 9$', '$q: x\le 8$'의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$P=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
따라서 명제 $p\to q$가 거짓임을 보여 주는 x의 값은 집합 P에 속하지만 집합 Q에는 속하지 않는 원소인 9이다.

20 정답 ②

해설 명제 $p\to q$가 참이므로 $P\subset Q$,
즉 $Q^C\subset P^C$이다.

21 정답 ④

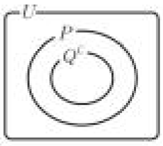
해설 명제 $p\to q$가 참이면 $P\subset Q$이므로 $P-Q=\varnothing$이다.

22 정답 ③

해설 명제 $p\to\sim q$가 참이므로
$P\subset Q^C$
$(Q^C)^C\subset P^C$
$Q\subset P^C$

23 정답 ②

해설



명제 $\sim q \rightarrow p$가 참이므로 $Q^c \subset P$이고 Q^c P의 포함관계는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore P \cup Q = U$

24 정답 ②

해설 ㄱ. $Q \not\subset R$이므로 명제 $q \rightarrow r$는 거짓이다.

ㄴ. $(P \cap Q) \subset P$이므로
명제 (p이고 q)$\rightarrow p$는 참이다.

ㄷ. $(P \cup Q) \not\subset R$이므로
명제 (p 또는 q)$\rightarrow r$는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ뿐이다.

25 정답

해설 ① $P \subset Q^C$이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$는 참이다.

② $P \not\subset R^C$이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$는 거짓이다.

③ $Q \subset P^C$이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$는 참이다.

④ $R \subset P$이므로 명제 $r \rightarrow p$는 참이다.

⑤ $P^C \subset R^C$이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$는 참이다.

26 정답 32

해설 명제 $p \rightarrow \sim q$가 참이려면 $P \subset Q^C$이어야 한다.

이때 $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $Q^C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 $P \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$을 만족시키는

집합 P의 개수는 $2^5 = 32$

27 정답 16

해설 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이므로

$P^C \subset Q$

이때 $P = \{1, 2, 3, 6\}$이므로

$P^C = \{4, 5, 7, 8, 9\}$

따라서 집합 Q는 $4, 5, 7, 8, 9$를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 Q의 개수는

$2^{9-5} = 2^4 = 16$

28 정답 ⑤

해설 $P \cap Q = Q$에서 $Q \subset P$

$Q \cap R = R$에서 $R \subset Q$

$R \subset Q$, $Q \subset P$에서 $R \subset P$

이때 세 명제 $q \rightarrow p$, $r \rightarrow q$, $r \rightarrow p$는 참이다.

$Q \subset P$에서 $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$가 참이다.

$R \subset Q$에서 $Q^C \subset R^C$이므로 $\sim q \rightarrow \sim r$가 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

29 정답 ⑤

해설 ㄱ. $-x^2+2x-3 = -(x-1)^2-2$이므로
모든 실수 x에 대하여 $-x^2+2x-3 < 0$이다. (참)

ㄴ. $x=0$이면 $x^2+1 \geq 0$이다. (참)

ㄷ. $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2 \neq 0$이다. (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30 정답 ⑤

해설 ① 짝수 2는 소수이다.

② $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$

③ $x=1$이면 $x^2+x > 0$이다.

④ $x=-1$이면 $x^3 < 0$이다.

⑤ [반례] $x = \frac{1}{2}$일 때 $x^2 = \frac{1}{4}$이므로 $x^2 < x$

따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

31 정답 56

해설 조건 $4x^2-12x+5<0$을 만족시키는 진리집합을 P라 하면

$(2x-1)(2x-5)<0$에서 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$이므로

$P=\{1, 2\}$

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $4x^2-12x+5<0$이다.'가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

$\therefore$ $A=\{1\}$, $A=\{2\}$, $A=\{1, 2\}$

'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'이 참이 되기 위해서는 $A\cap B\neq\varnothing$이어야 한다.

(i) $A=\{1\}$일 때
집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로
집합 B의 개수는 $2^4=16$

(ii) $A=\{2\}$일 때
집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로
집합 B의 개수는 $2^4=16$

(iii) $A=\{1, 2\}$일 때
집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.
전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합은 $2^5=32$이고 1과 2를 모두 포함하지 않은 부분집합은 $2^3=8$이므로
집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합의 개수는
$32-8=24$

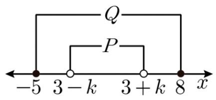
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는
$16+16+24=56$

32 정답 ③

해설 명제가 참이 되기 위해서는 $a^2+a-12=0$에서
$(a-3)(a+4)=0$이다.
따라서 $a=3$ 또는 $a=-4$이다.
$a>0$이므로 $a=3$이다.

33 정답 ⑤

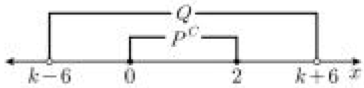
해설 $|x-3|<k$에서 $-k<x-3<k$
$\therefore$ $3-k<x<3+k$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|3-k<x<3+k\}$,
$Q=\{x|-5\le x\le 8\}$
명제 $p\to q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 다음 그림과 같다.



그러므로 $-5\le 3-k$, $3+k\le 8$
$k\le 8$, $k\le 5$
$\therefore$ $k\le 5$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

34 정답 9

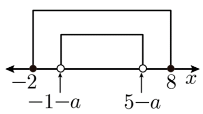
해설 $|x-1|>1$에서 $x-1<-1$ 또는 $x-1>1$
$\therefore$ $x<0$ 또는 $x>2$
$|x-k|<6$에서 $-6<x-k<6$
$\therefore$ $k-6<x<k+6$
따라서 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면
$P=\{x|x<0$ 또는 $x>2\}$
$\therefore$ $P^C=\{x|0\le x\le 2\}$
$Q=\{x|k-6<x<k+6\}$
이때 $\sim p\to q$가 참이므로 $P^C\subset Q$이어야 하므로 다음 그림에서



$k-6<0$, $2<k+6$
$\therefore$ $-4<k<6$
따라서 정수 k는
-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 9개이다.

35 정답 ②

해설 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x|-1-a<x<5-a\}\subset\{x|-2\le x\le 8\}$
이어야 하므로 다음 그림에서
$-2\le -1-a$, $5-a\le 8$



즉, $a\le 1$, $-3\le a$
$\therefore$ $-3\le a\le 1$

36 정답 7

해설 조건 $2k-4 \le x \le 3k+6$의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x|2k-4 \le x \le 3k+6\}$

조건 $0 \le x \le 4$의 진리집합을 Q라 하면

$Q=\{x|0 \le x \le 4\}$

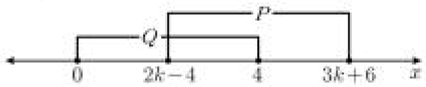
어떤 실수 x에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중에서 진리집합 Q에 속하는 원소가 적어도 하나 존재해야 한다. 즉, 주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$ 이어야 한다.

따라서 두 진리집합 P와 Q를 수직선 위에 나타내어 보면 다음의 2가지 경우 중 하나이다.

(ⅰ) $2k-4 \ge 0$인 경우

$2k-4 \le 4$

$\therefore\ k \le 4$

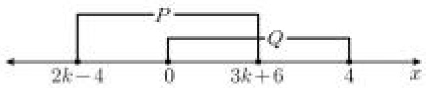


$\therefore\ 2 \le k \le 4$

(ⅱ) $2k-4 < 0$인 경우

$0 \le 3k+6$

$\therefore\ k \ge -2$



$\therefore\ -2 \le k < 2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-2 \le k \le 4$

따라서 주어진 명제를 참이 되게 하는 정수 k의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$의 7개이다.

37 정답 26

해설 조건 '$-4 \le x < 7$'의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x|-4 \le x < 7\}$

조건 '$a-2 < x \le 3a+8$'의 진리집합을 Q라 하면

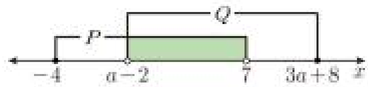
$Q=\{a-2 < x \le 3a+8\}$

주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$ 이어야 한다.

(ⅰ) $-4 < a-2$, 즉 $a > -2$일 때

다음 그림과 같이 $a-2 < 7$이어야 하므로

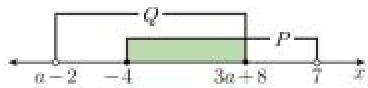
$-2 < a < 9$



(ⅱ) $a-2 \le -4$, 즉 $a \le -2$일 때

다음 그림과 같이 $-4 \le 3a+8$이어야 하므로

$-4 \le a \le -2$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-4 \le a < 9$이므로

주어진 명제가 참이 되도록 하는 정수 a는

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$이다.

따라서 구하는 a의값의 합은 26

38 정답 5

해설 주어진 명제가 거짓이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3ax+18 \ge 0$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+3ax+18=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-72 \le 0$

$a^2 \le 8$

따라서 조건을 만족하는 정수 a의 개수는 5이다.

39 정답 ③

해설 $2x+a \le 3x-2a$에서 $x \ge 3a$

$P=\{x|x \ge 99\}$, $Q=\{x|x \ge 3a\}$라 하면

$P \subset Q$이어야 하므로 $3a \le 99$

$\therefore\ a \le 33$

40 정답 9

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면

$p \rightarrow q$가 거짓이므로 $P \not\subset Q$이어야 한다.

따라서 $k+1 \le 10$에서 $k \le 9$이므로 정수 k의 최댓값은 9이다.

41 **정답** 2

해설 $p:|x-1|<h$에서 $\sim p:|x-1|<h$이므로

$-h<x-1<h$

$\therefore -h+1<x<h+1$

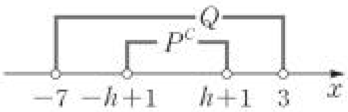
$q:|x+2|<5$에서 $-5<x+2<5$

$\therefore -7<x<3$

따라서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P^c=\{x|-h+1<x<h+1\}$

$Q=\{x|-7<x<3\}$



명제 'p이면 q이다.'가 참이 되려면

$P\subset Q$이어야 하므로 다음 그림에서

$-7\le -h+1$, $h+1\le 3$

$h\le 8$, $h\le 2$

$\therefore 0<h\le 2\ (\because h>0)$

따라서 실수 h의 최댓값은 2이다.

42 **정답** ②

해설 $\sim p:|x+1|<4$이므로

$|x+1|<4$에서 $-5<x<3$

$|x|\le k$에서 $-k\le x\le k$

$q\to\sim p$가 참이 되려면

$\{-k\le x\le k\}\subset\{-5<x<3\}$이어야 하므로

$-k>-5$, $k<3$

따라서 $k<3$이므로 자연수 k의 최댓값은 2이다.

43 **정답** 4

해설 $\sim q:x^2-5x-14\le 0$이므로

$x^2-5x-14\le 0$에서 $(x+2)(x-7)\le 0$

$-2\le x\le 7$

$|x-3|<k$에서 $3-k<x<3+k$

$p\to\sim q$가 참이 되려면

$\{x|3-k<x<3+k\}\subset\{x|-2\le x\le 7\}$이어야 하므로

$3-k\ge -2$, $3+k\le 7$

따라서 $k\le 4$이므로 자연수 k의 최댓값은 4이다.

44 **정답** ②

해설 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $4x^2+18x+a<0$이다.'

이차방정식 $4x^2+18x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

위의 명제가 참이 되려면

$\frac{D}{4}=9^2-4\cdot a>0$

$\therefore a<\frac{81}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 20이다.

45 **정답** 9

해설 주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+2a-2\ge 0$이다.'가

참이 되어야 하므로 이차방정식 $x^2-8x+2a-2=0$의

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(2a-2)\le 0$

$2a\ge 18$

$\therefore a\ge 9$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 9이다.

46 **정답** ④

해설 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $3x^2+10x+a<0$이다.'

이차방정식 $3x^2+10x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

위의 명제가 참이 되려면

$\frac{D}{4}=5^2-3\cdot a>0$

$\therefore a<\frac{25}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 8이다.

47 **정답** 10

해설 주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-6x+a-1\ge 0$이다.'가 참이

되어야 하므로 이차방정식 $x^2-6x+a-1=0$의

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(a-1)\le 0$

$\therefore a\ge 10$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 10이다.

48 정답 3

해설 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+8k+5>0$이므로
이차방정식 $x^2+4kx+8k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(8k+5)<0$

$4k^2-8k-5=(2k+1)(2k-5)<0$

$-\frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$

어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-1$이므로 $k-1\geq 0$에서
$k\geq 1$

이때 정수 k에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$P=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

이때 $P\cap Q=\{1,\ 2\}$이므로 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 1, 2이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 3이다.

49 정답 12

해설 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $p\to\sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$에서 $Q\subset P^C$이다.

명제 $\sim p\to q$가 참이므로 $P^C\subset Q$이다.

$\therefore\ Q=P^C$

$p:2x-a=0$에서 $P=\left\{\frac{a}{2}\right\}$이고, $Q=P^C$에서

$Q=\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.

즉, 부등식 $x^2-bx+9>0$의 해가 $x\neq\frac{a}{2}$인 모든 실수이므로 이차함수 $y=x^2-bx+9$의 그래프는 x축에 접해야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-bx+9=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=(-b)^2-4\cdot1\cdot9=0$이므로 $b^2=36$에서 양수 b의 값은 6이다.

따라서 조건 $q:x^2-6x+9>0$에서

$Q=\{x\,|\,x\neq 3\text{인 실수}\}$이고 $\frac{a}{2}=3$, 즉 $a=6$

$\therefore\ a+b=6+6=12$

50 정답 4

해설 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-3kx+36\leq 0$이다.'
이다.

위의 명제가 참이려면 이차방정식 $x^2-3kx+36=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-3k)^2-4\cdot 36\geq 0$, $9k^2-144\geq 0$

$k^2-16\geq 0$, $(k+4)(k-4)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -4$ 또는 $k\geq 4$

따라서 양수 k의 최솟값은 4이다.

51 정답 -8

해설 주어진 명제의 부정
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+16\geq 0$이다.'가 참이 되어야 하므로 이차방정식 $x^2-ax+16=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-64\leq 0$

$\therefore\ -8\leq a\leq 8$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 -8이다.

52 정답 13

해설 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,-5<x<3\}$, $Q=\{x\,|\,x\leq a+3\}$,

$R=\{x\,|\,x<b-2\}$

$p\to\sim q$, $p\to r$가 참이므로 $P\subset Q^C$, $P\subset R$이어야 한다. 즉, $a+3\leq -5$, $3\leq b-2$

$\therefore\ a\leq -8$, $b\geq 5$

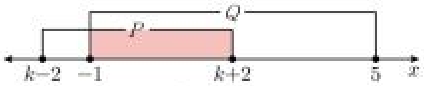
따라서 a의 최댓값은 -8, b의 최솟값은 5이므로

$M=-8$, $m=5$

$\therefore\ m-M=5-(-8)=13$

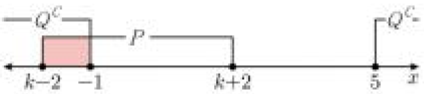
53 정답 ②

해설 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 p에서 $|x-k| \le 2$
$k-2 \le x \le k+2$이므로
$P=\{x|k-2 \le x \le k+2\}$
조건 q에서 $x^2-4x-5 \le 0$, $(x+1)(x-5) \le 0$
$-1 \le x \le 5$이므로
$Q=\{x|-1 \le x \le 5\}$이고
$Q^C=\{x|x<-1$ 또는 $x>5\}$
명제 $p \to q$와 명제 $p \to \sim q$가 모두 거짓이므로
$P \not\subset Q$이고 $P \not\subset Q^C$
즉, $P \cap Q \ne \varnothing$이고 $P \cap Q^C \ne \varnothing$ … ㉠
이어야 한다.
$k-2 \ge -1$이고 $k+2 \le 5$, 즉 $1 \le k \le 3$이면
$P \subset Q$가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 다음과 같이 k의 범위를 나누어 생각하자.
(ⅰ) $k<1$인 경우
㉠에서 $P \cap Q \ne \varnothing$이므로 [그림 1]과 같이
$-1 \le k+2$, 즉 $k \ge -3$ … ㉡



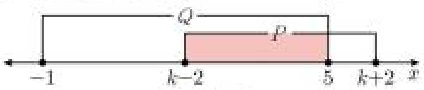
[그림 1]

$P \cap Q^C \ne \varnothing$이므로 [그림 2]와 같이
$k-2<-1$, 즉 $k<1$ … ㉢



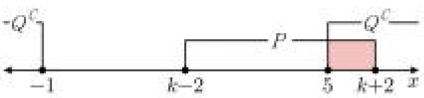
[그림 2]

㉡, ㉢에서 $-3 \le k<1$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0이다.
(ⅱ) $k>3$인 경우
㉠에서 $P \cap Q \ne \varnothing$이므로 [그림 3]과 같이
$k-2 \le 5$, 즉 $k \le 7$ … ㉣



[그림 3]

$P \cap Q^C \ne \varnothing$이므로 [그림 4]와 같이
$5<k+2$, 즉 $k>3$ … ㉤



[그림 4]

㉣, ㉤에서 $3<k \le 7$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 4, 5, 6, 7이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7이고 그 합은
$-3-2-1+0+4+5+6+7=16$

54 정답 ③

해설 명제 $\sim q \to p$의 역인 $p \to \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \to \sim p$도 참이다.

55 정답 ③

해설 명제 '$p \Rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \Rightarrow \sim p$'이다.
p: 소풍가지 않는다.
q: 비가 온다.
따라서 $\sim q \Rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.
(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

56 정답 ①, ②

해설 ① 역 : $x=1$ 이면 $3x-2>0$ 이다. (참)
② 역 : 평행사변형이면 사다리꼴이다. (참)
③ 역 : $\triangle$ABC 에서 $\angle A=60^\circ$ 이면 $\triangle$ABC 는 정삼각형이다. (거짓)
[반례] $\angle A=60^\circ$, $\angle B=90^\circ$ 이면 $\triangle$ABC 는 직각삼각형이다.
④ 역 : $x+y$가 짝수이면 x, y 는 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$ 이면 $x+y=2$ 는 짝수이지만 x, y 는 홀수이다.
⑤ 역 : $xy>0$ 이면 $x+y>0$ 이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=-1$ 이면 $xy>0$ 이지만 $x+y<0$ 이다.
따라서 역이 참인 것은 ①, ②이다.

57 정답 ①

해설 ㄱ. 역: 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다. (참)

대우: 자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다. (참)

즉, 역과 대우가 모두 참이다.

ㄴ. 역: 실수 x, y에 대하여 $x>1$ 또는 $y>1$이면 $x+y>2$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y=2-1<2$

대우: 실수 x, y에 대하여 $x \le 1$ 이고 $y \le 1$이면 $x+y \le 2$이다. (참)

즉, 역은 거짓이고 대우는 참이다.

ㄷ. 명제: $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B}$이면 $\triangle \mathrm{ABC}$는 이등변삼각형이다. (참)

역: $\triangle \mathrm{ABC}$가 이등변삼각형이면 $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B}$이다. (거짓)

[반례] $\angle \mathrm{A} = 120^\circ$, $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} = 30^\circ$ 이면 $\triangle \mathrm{ABC}$는 이등변삼각형이지만 $\angle \mathrm{A} \ne \angle \mathrm{B}$

즉, 역은 거짓이고 명제가 참이므로 대우는 참이다.

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

58 정답 ①

해설 명제 $q \to p$의 역이 참이므로

명제 $p \to q$가 참이다.

즉, $P \subset Q$가 성립해야 하므로 $2 \in Q$이어야 한다.

$a^2-2=2$, 즉 $a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$P=\{1, 2\}$, $Q=\{1, 2, 4\}$이므로

$P \subset Q$

(ii) $a=2$일 때

$P=\{2, 5\}$, $Q=\{1, 2, 4\}$이므로

$P \not\subset Q$

(i), (ii)에 의하여 $a=-2$

59 정답 1

해설 주어진 명제가 참이 되려면

그 대우 '$x-2k=0$이면 $x^2+kx-6=0$이다.'도 참이 되어야 한다.

따라서 $x=2k$를 $x^2+kx-6=0$에 대입하면

$(2k)^2+k\cdot(2k)-6=0$, $6k^2=6$, $k^2=1$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

60 정답 -3

해설 주어진 명제

'$a+b<4$이면 $a<7$ 또는 $b<k$이다.'가 참이므로

그 대우

'$a \ge 7$이고 $b \ge k$이면 $a+b \ge 4$이다.'도 참이다.

이때 $a \ge 7$, $b \ge k$에서 $a+b \ge 7+k$이므로

'$a+b \ge 7+k$이면 $a+b \ge 4$이다.'가 참이 되려면

$7+k \ge 4$

$\therefore k \ge -3$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

61 정답 2

해설 주어진 명제가 참이 되려면

그 대우 '$|x+1| \le 2$이면 $|x-2a|<4$이다.'도 참이 되어야 한다.

이때 두 조건 p, q를 각각

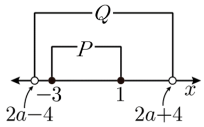
$p: |x+1| \le 2$, $q: |x-2a|<4$라 하고,

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x | -3 \le x \le 1\}$,

$Q=\{x | 2a-4<x<2a+4\}$

이때 명제 $p \to q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 한다.



위의 그림에서 $2a-4<-3$, $2a+4>1$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

따라서 정수 a는 -1, 0의 2개이다.

62 정답 ③

해설 조건 (가)에서 $2\in A$

조건 (나)에서 명제 '$a^2-6\notin A$이면 $a\notin A$'가 참이므로 이 명제의 대우 '$a\in A$이면 $a^2-6\in A$'도 참이다.

이때 $2\in A$이므로

$2^2-6=-2\in A$

또, $-2\in A$이므로

$(-2)^2-6=4-6=-2\in A$

$\therefore \{-2, 2\}\subset A$

조건 (다)에서 $n(A)=3$이므로

$A=\{-2, 2, k\}$ (단, $k\neq-2$, $k\neq 2$)라 하자.

$k\in A$이면 $k^2-6\in A$이므로 k^2-6의 값은 -2, 2, k 중 하나이다.

(i) $k^2-6=-2$인 경우

$k^2=4$에서 $k=-2$ 또는 $k=2$가 되어 $k\neq-2$, $k\neq 2$에 모순이다.

(ii) $k^2-6=2$인 경우

$k^2=8$에서 $k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$

(iii) $k^2-6=k$인 경우

$k^2-k-6=0$

$(k-3)(k+2)=0$이고 $k\neq-2$이므로

$k=3$

(i), (ii), (iii)에서

$k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$ 또는 $k=3$

따라서 집합 A가 될 수 있는 것은

$\{-2, 2, -2\sqrt{2}\}$, $\{-2, 2, 2\sqrt{2}\}$, $\{-2, 2, 3\}$이고 개수는 3이다.

63 정답 ⑤

해설 $\sim p\rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r\rightarrow p$가 참이다.

$p\rightarrow\ \sim q$가 참이므로 그 대우 $q\rightarrow\ \sim p$가 참이다.

$\sim r\rightarrow p, p\rightarrow\ \sim q$가 참이므로 삼단논법에 의해 $\sim r\rightarrow\ \sim q$가 참이고

$\sim r\rightarrow\ \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q\rightarrow r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다.

64 정답 ⑤

해설 $p\Rightarrow q$ 가 참이고, 또한 $r\Rightarrow\sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q\Rightarrow\sim r$ 가 참 $\therefore p\ \Rightarrow\ q\ \Rightarrow\sim r$

즉, $p\Rightarrow\sim r$, $q\Rightarrow\sim r$ 가 참이고 또한 $p\Rightarrow\sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r\Rightarrow\sim p$ 도 참이다.

따라서 ㉢, ㉣, ㉤이 참이다.

65 정답 ③

해설 $\sim p\rightarrow\ \sim q$, $r\rightarrow s$가 참이므로

각각의 대우인 $q\rightarrow p$, $\sim s\rightarrow\ \sim r$도 참이다.

따라서 $r\rightarrow p$가 참이려면 $s\rightarrow q$가 필요하다.

66 정답 ③

해설 $\sim p\rightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$

$r\rightarrow\ \sim q$가 참이므로 $R\subset Q^C$

또, $\sim p\rightarrow q$와 $r\rightarrow\ \sim q$의 대우인 $q\rightarrow\ \sim r$이 참이므로

$\sim p\rightarrow\ \sim r$이 참이다.

$\therefore P^C\subset R^C$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

67 정답 ②

해설 $\sim p\rightarrow q$, $q\rightarrow\sim r$이 참이므로

$\sim p\rightarrow q\rightarrow\sim r$에서 $P^c\subset Q\subset R^c$이다.

따라서

② $Q\subset R^c$이므로 $R\subset Q^c$

68 정답 ④

해설 세 조건 p, q, r를

p : 달리기를 잘한다. q : 축구를 잘한다.

r : 농구를 잘한다.

라 하면 (가)에 의해 $p\rightarrow q$가 참이고 (나)에 의해 $q\rightarrow r$가 참이므로 $p\rightarrow r$ 도 참이다.

따라서 '달리기를 잘하는 학생은 농구도 잘한다.'와 그 대우인

'농구를 잘하지 못하는 학생은 달리기도 잘하지 못한다.'가 참이다.

69 정답 ②

해설 D는 다른 세 사람과 서로 다른 급수이므로 1급 이거나 3급이다.
A는 B, C와 서로 다른 급수이므로,
D가 1급 인 경우 A는 3급이고, D가 3급인 경우 A는 1급 이어야 한다.
따라서 B, C는 2급이다.

70 정답 ③

해설 B와 D는 서로 상반된 이야기를 하고 있다.
만일 B가 참이고 D가 거짓이라면 합격자는 C, D가 된다.
합격자는 1명이어야 하므로 모순이다.
따라서 B는 거짓이고 합격자는 C이다.

71 정답 ③

해설 세 진술은 검은색 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다.
A는 항상 참만을 말하므로 참말을 A가 했고, B, C는 거짓말을 하고 있다.
만약 A가 검은색 모자를 썼다면 파란색 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다.
만약 B가 검은색 모자를 썼다면 B가 참말을 했으므로 모순이다.
따라서 C가 검은색 모자를 썼고, 그 말을 한 빨간색 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로 A는 빨간색 모자를 썼다.
즉, 파란색 모자를 쓴 사람은 B이므로 거짓말을 했다.
따라서 사실이 아닌 것은 ③이다.

72 정답 ②

해설 우성이의 주장이 참이라고 가정하면 동건이와 정재의 주장은 거짓이 된다.
즉, 우성이는 전교 1등이 아니고, 동건이는 전교 2등이고, 정재는 전교 2등이 아니다.
이때 동건이가 2등이기 때문에 우성이는 전교 3등이 되고 남은 정재가 전교 1등이 된다.
따라서 모순이 존재하지 않으므로 정재, 동건, 우성이 각각 1, 2, 3등이다.
한편, 동건이의 주장이 참이라면 우성과 정재의 주장이 거짓이 되는데 이 경우 정재가 2등이 되어 참을 말한 것이 되므로 모순이다.
또한, 정재의 주장이 참이라면 우성과 동건의 주장이 거짓이 되어야 하는데 동건이가 참을 말한 것이 되므로 모순이다.

73 정답 ③

해설 ㄱ. $|x-y|=|x+y|$
$\Leftrightarrow (x-y)^2=(x+y)^2$
$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=x^2+2xy+y^2$
$\Leftrightarrow xy=0$
따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $x=y=0$이면 $|x-y|+|x+y|=0$
또한, $|x-y|+|x+y|=0$이면
$x-y=0,\ x+y=0$이므로 $x=y=0$
따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $x=y=0$이면 $x+y\sqrt{3}=0$
[$\leftarrow$의 반례] $x=3,\ y=-\sqrt{3}$이면 $x+y\sqrt{3}=0$
따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

74 정답 ④

해설 (가) p: $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$에서 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$이므로 $A=B$
따라서 $p\Leftrightarrow q$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.
(나) r: $A\cup B=B$에서 $A\subset B$
따라서 $q\Longrightarrow r$이므로 조건 q는 조건 r이기 위한 충분조건이다.

75 정답 ③

해설 ① $p: x=1$ 이고 $y=1$

$q: x+y=2$에서 $y=2-x$이므로

$x(2-x)=1,\ 2x-x^2=1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$이고 $y=1$

따라서 $p \Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② $p: |x-1|=2 \Leftrightarrow x-1=\pm 2$

$\Leftrightarrow x=3$ 또는 $x=-1$

$q: x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.

③ $p: a>3$

$q: a^2>9 \Leftrightarrow a^2-9>0$

$\Leftrightarrow (a+3)(a-3)>0$

$\Leftrightarrow a<-3$ 또는 $a>3$

즉, 명제 $p \rightarrow q$는 참이지만 $q \rightarrow p$는 거짓이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

④ $p: a^2=ab \Leftrightarrow a^2-ab=0$

$\Leftrightarrow a(a-b)=0$

$\Leftrightarrow a=0$ 또는 $a=b$

$q: a=b$

즉, 명제 $p \rightarrow q$는 거짓이고 $q \rightarrow p$는 참이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

⑤ $p: |a|<|b|$

$\Leftrightarrow a^2<b^2$

$\Leftrightarrow a^2-b^2<0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)<0$

$\Leftrightarrow a+b>0,\ a-b<0$ 또는 $a+b<0,\ a-b>0$

$\Leftrightarrow a>-b,\ a<b$ 또는 $a<-b,\ a>b$

$q: a<b$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.

76 정답 ②

해설 ① $\sqrt{a^2}=-a$에서 $|a|=-a$, 즉 $a\le 0$이므로

$p \Rightarrow q,\ q \not\Rightarrow p$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $xy<0$에서 $x,\ y$의 부호는 서로 반대이다.

즉, '$x>0$이고 $y<0$' 또는 '$x<0$이고 $y>0$'이므로

$p \not\Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$ 이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $xy=0$에서 $x=0$ 또는 $y=0$이므로

$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $A\cup(B-A)=B$에서 $A\cup(B\cap A^C)=B$

$(A\cup B)\cap(A\cup A^C)=B,\ A\cup B=B$

즉, $A\subset B$이므로 $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $x,\ y$가 유리수이면 $x+y,\ xy$는 모두 유리수이지만 $x+y,\ xy$가 유리수라고 해서 $x,\ y$가 유리수인 것은 아니다.

[반례] $x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$ 이면

$x+y=0,\ xy=-2$는 유리수이지만 $x,\ y$는 무리수이다.

즉, $p \Rightarrow q,\ q \not\Rightarrow p$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

즉, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ②이다.

77 정답 ③

해설 ① $ac=bc \rightleftarrows a=b$

[반례] $a=1,\ b=2,\ c=0$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건

② $A\subset B \rightleftarrows A-B=\varnothing$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건

③ $a>0$이고 $b<0 \rightleftarrows ab<0$

[반례] $a=-2,\ b=2$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건

④ $a+b$가 정수 $\rightleftarrows a,\ b$가 정수

[반례] $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건

⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건

즉, p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ③이다.

78 정답 ④

해설 ① $p \to q$: [반례] $a=-2$, $b=1$이면
$-2<1$이지만 $|-2|>|1|$(거짓)
$q \to p$: [반례] $a=1$, $b=-2$이면
$|1|<|-2|$이지만 $1>-2$(거짓)
따라서 p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
② $p \to q$: $|x|=|y|$이면 $|x|^2=|y|^2$이므로
$x^2=y^2$(참)
$q \to p$: $x^2=y^2$이면 $x^2 \ge 0$, $y^2 \ge 0$이므로
$\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}$에서 $|x|=|y|$(참)
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
③ $p \to q$: [반례] $a=1$, $b=1$이면
$1^2-2\cdot1\cdot1+1^2=0$이지만
$a \ne 0$, $b \ne 0$(거짓)
$q \to p$: $a=b=0$이면 $a^2-2ab+b^2=0$(참)
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만
충분조건은 아니다.
④ $p \to q$: $x>0$, $y>0$이면 $x^2>0$,
$y^2>0$이므로 $x^2+y^2>0$(참)
$q \to p$: [반례] $x=1$, $y=-1$이면
$1^2+(-1)^2>0$이지만
$1>0$, $-1<0$(거짓)
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만
필요조건은 아니다.
⑤ $p \to q$: [반례] $a=1$, $b=1$, $x=-2$,
$y=-2$이면 $1>-2$이지만
$1\cdot1<(-2)\cdot(-2)$(거짓)
$q \to p$: [반례] $a=-2$, $b=-2$, $x=1$,
$y=1$이면 $(-2)\cdot(-2)>1\cdot1$이지만
$-2<1$(거짓)
따라서 p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
그러므로 p가 q이기 위한 충분조건이지만
필요조건은 아닌 것은 ④이다.

79 정답 ②

해설 $p \to q$가 참이고 $q \to p$가 거짓인 것을 찾는다.
ㄱ. $a \ge b \to a^2 \ge b^2$ (거짓), [반례] $a=-1$, $b=-2$
$a^2 \ge b^2 \to a \ge b$ (거짓), [반례] $a=-4$, $b=3$
ㄴ. $a+b \le 2 \to a \le 1$ 또는 $b \le 1$ (참)
$a \le 1$ 또는 $b \le 1 \to a+b \le 2$(거짓)
[반례] $a=0$, $b=3$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
아니다.
ㄷ. $|a-b|=|a|-|b| \to (a-b)b \ge 0$ (거짓)
$|a-b|=|a|-|b| \leftarrow (a-b)b \ge 0$ (참)
p에서 양변을 제곱하면
$a^2-2ab+b^2=a^2-2|a||b|+b^2$
$ab=|a||b|$, 즉 $ab \ge 0$
또한, $(a-b)b \ge 0$에서
$a \ge b$, $b \ge 0$ 또는 $a \le b$, $b \le 0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은
아니다.
따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만
필요조건이 아닌 것은 ㄴ뿐이다.

80 정답 ⑤

해설 $p : a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$
$q : a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$에서
$(a-b)^3=0$ $\quad\therefore a=b$
$r : |2a+b|=|2a-b|$에서
$2a+b=2a-b$ 또는 $2a+b=-(2a-b)$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
ㄱ. $p \Rightarrow r$, $r \not\Rightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim p : a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$, $\sim q : a \ne b$
따라서 $\sim p \not\Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$이므로
$\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. q이고 r는 $a=b=0$
따라서 $p \Leftrightarrow (q$이고 $r)$이므로 p는 q이고 r이기 위한
필요충분조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

81 정답 ④

해설 $p:(a+b)^2=0$에서 $a=-b$

$q:(a-b)^2=0$에서 $a=b$

$r:a^2+b^2=0$에서 $a=0,\ b=0$

ㄱ. $r \Rightarrow p,\ p \not\Rightarrow r$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다. (거짓)

ㄴ. $r \Rightarrow q,\ q \not\Rightarrow r$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. (p이고 q): $a=b=0$

따라서 (p이고 q) $\Leftrightarrow r$이므로 p이고 q는 r이기 위한 필요충분조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

82 정답 -1

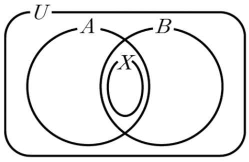
해설 $p: X \subset A$ 이고 $X \subset B$, $q: X \subset (A \cap B)$,

$r: X \subset (A \cup B)$

(i) $p: X \subset A$ 이고 $X \subset B$, $q: X \subset (A \cap B)$에서

$X \subset A$ 이고 $X \subset B$이면 $X \subset (A \cap B)$이고

$X \subset (A \cap B)$이면 $X \subset A$ 이고 $X \subset B$이다.



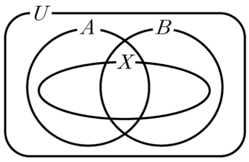
따라서 $f(p,\ q)$에서 $p \Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

$\therefore\ f(p,\ q)=0$

(ii) $q: X \subset (A \cap B)$, $r: X \subset (A \cup B)$에서

$X \subset (A \cap B)$이면 $X \subset (A \cup B)$이다.

이때 다음 그림에서 $r \not\Rightarrow q$이다.



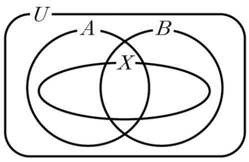
따라서 $f(q,\ r)$에서 $q \Rightarrow r$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이다.

$\therefore\ f(q,\ r)=1$

(iii) $r: X \subset (A \cup B)$, $p: X \subset A$ 이고 $X \subset B$에서

$X \subset A$ 이고 $X \subset B$이면 $X \subset (A \cup B)$이다.

이때 다음 그림에서 $r \not\Rightarrow p$이다.



따라서 $f(r,\ p)$에서 $p \Rightarrow r$이므로 r는 p이기 위한 필요조건이다.

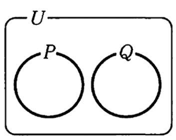
$\therefore\ f(r,\ p)=-1$

따라서 $f(p,\ q)+2f(q,\ r)+3f(r,\ p)=-1$

83 정답 ④

해설 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q^C$

따라서 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

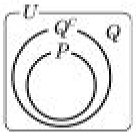


$\therefore\ P \cap Q=\varnothing$

84 **정답** ①

해설 $P \subset Q^c \longrightarrow P - Q^c = \varnothing \longrightarrow P \cap (Q^c)^c = \varnothing$

$\therefore P \cap Q = \varnothing$
벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



85 **정답** ①

해설 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
r는 q이기 위한 충분조건이므로 $R \subset Q$
따라서 $R \subset Q \subset P$이므로 항상 옳은 것은
$R \subset (P \cup Q)$

86 **정답** ③

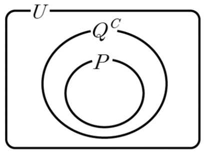
해설 $R \subset (P \cup Q)$, $R \subset (P \cap Q)$이므로
① r는 p 또는 q이기 위한 충분조건이다.
② $R^C \supset (P \cap Q)^C$, 즉 $R^C \supset (P^C \cup Q^C)$에서
$\sim r$는 $\sim p$ 또는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.
③, ④ r는 p이고 q이기 위한 충분조건이다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

87 **정답** ④

해설 ㄱ. $R \subset P$, 즉 $P^C \subset R^C$이므로 $\sim p \Rightarrow \sim r$ (참)
ㄴ. $Q \subset R^C$이므로 $q \Rightarrow \sim r$ (참)
ㄷ. $P^C \cap R^C = (P \cup R)^C = P^C$이고, $P^C \not\subset Q$이므로
($\sim p$이고 $\sim r$) $\not\Rightarrow q$ (거짓)
ㄹ. $P \cup R = P$이고, $P \subset Q^C$이므로
(p 또는 r) $\Rightarrow \sim q$ (참)
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

88 **정답** ④

해설 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q^C$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



① $P \not\subset Q$
② $Q \not\subset P$
③ $P - Q = P$
⑤ $P \cup Q \neq U$
이므로 항상 옳은 것은 ④이다.

89 **정답** -8

해설 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \to q$가 참이다.
따라서 그 대우 $\sim q \to \sim p$도 참이므로
$x - 4 = 0$, 즉 $x = 4$이면 $x^2 + ax + 16 = 0$이 성립한다.
$4^2 + 4a + 16 = 0$, $4a = -32$
따라서 $a = -8$이다.

90 **정답** -12

해설 p가 q이기 위한 필요조건이므로
명제 '$4x^2 + 2x - 12 \neq 0$이면 $2x - a \neq 0$이다.'가
참이다.
따라서 그 대우인
'$2x - a = 0$이면 $4x^2 + 2x - 12 = 0$이다.'도 참이다.
$2x - a = 0$에서 $x = \frac{a}{2}$ 이므로
이것을 $4x^2 + 2x - 12 = 0$에 대입하면
$4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right) - 12 = 0$, $a^2 + a - 12 = 0$
$(a+4)(a-3) = 0$
$\therefore a = -4$ 또는 $a = 3$
따라서 구하는 모든 실수 a값의 곱은
$-4 \cdot 3 = -12$

91 **정답** -4

해설 $x^2 + ax + 3 \neq 0$이 $x - 1 \neq 0$이기 위한 충분조건이므로
명제 '$x^2 + ax + 3 \neq 0$이면 $x - 1 \neq 0$이다.'는 참이고
대우 '$x - 1 = 0$이면 $x^2 + ax + 3 = 0$이다.'도 참이다.
따라서 $x = 1$을 $x^2 + ax + 3 = 0$에 대입하면
$a = -4$

92 정답 5

해설 p가 q이기 위한 충분조건이면 $p \to q$가 참
곧, $p \Rightarrow q$
명제가 참이면 대우 $\sim q \to \sim p$도 참이다.
명제는 $x^2+ax+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$이고
대우는 $x=-2 \Rightarrow x^2+ax+6=0$
내용으로 보아 대우로 푸는 것이 쉽다.
곧, $x=-2$는 방정식 $x^2+ax+6=0$의 근이라는
뜻이므로 $4-2a+6=0 \quad \therefore a=5$

93 정답 ④

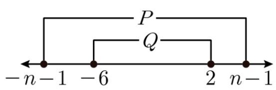
해설 진리집합의 포함관계 추론하기
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, $Q=\{2\}$
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $P \supset Q$이어야 하므로
$\sqrt{a}=2$
따라서 $a=4$

94 정답

해설 충분조건의 뜻을 이해하고 있는가?
조건 p를 만족시키는 x의 값이 조건 q도 만족시켜야 하므로
$3a^2-a^2-32=0$
$a^2=16$
$a>0$이므로 $a=4$

95 정답 ③

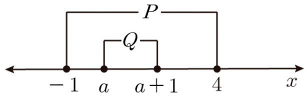
해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-n-1 \le x \le n-1\}$,
$Q=\{x|-6 \le x \le 2\}$
이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$이어야 한다.



이때 $-n-1 \le -6$, $n-1 \ge 2$이므로 $n \ge 5$
따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

96 정답 ①

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2-3x-4 \le 0$
$(x+1)(x-4) \le 0$
$\therefore -1 \le x \le 4$, 즉 $P=\{x|-1 \le x \le 4\}$
또, $(x-a)(x-a-1) \le 0$에서
$a \le x \le a+1$
$\therefore Q=\{x|a \le x \le a+1\}$
이때 p가 q이기 위한 필요조건이므로
$Q \subset P$



이때 $a \ge -1$이고 $a+1 \le 4$이므로
$-1 \le a \le 3$
따라서 모든 정수 a의 합은
$-1+0+1+2+3=5$

97 정답 2

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-2 \le x \le 2\}$, $Q=\{x|x \le a\}$
$P \subset Q$를 만족시켜야 하므로
$a \ge 2$
따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

98 정답 3

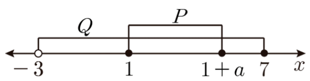
해설 $x=2x+\dfrac{1}{2}$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$
이때 $x=2x+\dfrac{1}{2}$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한
필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는
$-\dfrac{1}{2}$뿐이어야 한다.
중근 $x=-\dfrac{1}{2}$을 갖고 최고차항의 계수가 1인
이차방정식은 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$이므로
$x^2+ax+b=x^2+x+\dfrac{1}{4}$
$\therefore a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$
따라서 $4(a-b)=4\times\dfrac{3}{4}=3$

99 정답 3

해설 p가 q이기 위한 필요충분조건이므로
이차방정식 $(x-1)^2=a$의 두 근이
$x=3$ 또는 $x=b$이다.
따라서 $(3-1)^2=a$에서
$a=4$
또, $a=4$이므로 $(x-1)^2=4$에서
$x=3$ 또는 $x=-1$
따라서 $a=4$, $b=-1$이므로
$a+b=3$

100 정답 ④

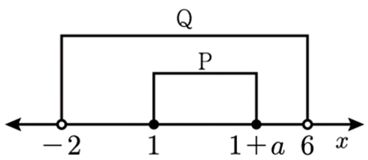
해설 충분조건과 이차부등식의 성질을 이용하여
자연수의 개수를 구한다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
a는 자연수이므로 $1<1+a$이다.
$P=\{x|1\le x\le 1+a\}$
$Q=\{x|-3<x\le 7\}$



p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.
따라서 $1+a\le 7$, $a\le 6$
자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 a의 개수는 6이다.

101 정답 ②

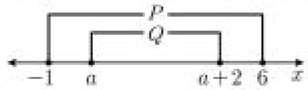
해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
a는 자연수이므로 $1<1+a$이다.
$P=\{x|1\le x\le 1+a\}$
$Q=\{x|-2<x<6\}$



p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.
따라서 $1+a<6$, $a<5$
자연수 a는 1, 2, 3, 4이므로 a의 개수는 4이다.

102 정답 ②

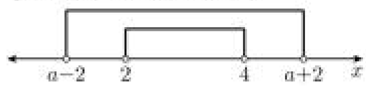
해설 명제의 조건 이해하기
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$x^2-5x-6=(x+1)(x-6)\le 0$에서
$-1\le x\le 6$,
$(x-a)(x-a-2)\le 0$에서
$a\le x\le a+2$이므로
$P=\{x|-1\le x\le 6\}$,
$Q=\{x|a\le x\le a+2\}$이다.
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$



$a\ge -1$이고 $a+2\le 6$이므로 $-1\le a\le 4$
따라서 모든 정수 a의 개수는 6

103 정답 3

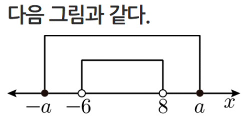
해설 $x^2-6x+8<0$에서 $(x-2)(x-4)<0$
$\therefore 2<x<4$
$-2<x-a<2$에서 $a-2<x<a+2$
이때 $2<x<4$가 $a-2<x<a+2$이기 위한
충분조건이므로 다음 그림에서



$a-2\le 2$, $4\le a+2$
$\therefore 2\le a\le 4$
따라서 정수 a의 개수는 2, 3, 4의 3이다.

104 정답 ①

해설 $-a\le x\le a$가 $x^2-2x-48<0$이기 위한
필요조건이므로
명제 '$x^2-2x-48<0$이면 $-a\le x\le a$이다.'가
참이다.
$x^2-2x-48<0$에서 $(x+6)(x-8)<0$
$\therefore\ -6<x<8$
즉, $\{x|-6<x<8\}\subset\{x|-a\le x\le a\}$이므로
다음 그림과 같다.



그러므로 $-a\le -6$, $a\ge 8$
$\therefore a\ge 8$
따라서 a의 최솟값은 8이다.

105 정답 ④

해설 필요조건을 이용하여 추론하기
$(x+1)(x+2)(x-3)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$이고,
$x^2+kx+k-1=(x+1)(x+k-1)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=-k+1$이므로
실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-2,\ -1,\ 3\}$, $Q=\{-1,\ -k+1\}$
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면
$Q\subset P$
$-k+1\in Q$에서 $-k+1\in P$이므로
$-k+1=-2$이면 $k=3$,
$-k+1=-1$이면 $k=2$,
$-k+1=3$이면 $k=-2$
따라서 모든 정수 k의 값의 곱은
$3\cdot 2\cdot(-2)=-12$

106 정답 6

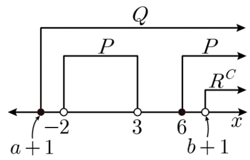
해설 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$
즉, $3\in\{a^2-1,\ ab+a\}$이므로
$a^2-1=3$ 또는 $ab+a=3$
한편, r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$
즉, $3\in\{ab,\ b-1\}$ $\cdots$ ㉠
(ⅰ) $a^2-1=3$일 때
a는 자연수이므로 $a=2$
㉠에서 $3\in\{2b,\ b-1\}$이므로
$2b=3$ 또는 $b-1=3$
그런데 b는 자연수이므로
$b=4$
즉, $a=2$, $b=4$일 때
$a+b=6$
(ⅱ) $ab+b=3$일 때
$a(b+1)=3$이고 a, b는 자연수이므로
$a=1$, $b+1=3$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
이때 $R=\{1,\ 2\}$이므로
$P\not\subset R$
즉, $a=1$, $b=2$일 때는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b$의 값은 6이다.

107 정답 ①

해설 명제 사이의 관계 이해하기
$x^2-6x+9=(x-3)^2\le 0$에서 $x=3$이므로
실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{3\}$, $Q=\{x\,|\,|x-a|\le 2\}$
p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$
$3\in P$에서 $3\in Q$이므로
$|3-a|\le 2$
$-2\le 3-a\le 2$
$\therefore\ 1\le a\le 5$
따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은
$5+1=6$

108 정답 8

해설 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|-2<x<3$ 또는 $x\ge 6\}$
$Q=\{x\,|\,x\ge a+1\}$
$R=\{x\,|\,x\le b+1\}$
이때 $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이고
q는 p이기 위한 필요조건이므로
두 명제 $\sim r\to p$, $p\to q$가 참이다.
즉, $R^C\subset P$, $P\subset Q$이므로 $R^C\subset P\subset Q$
다음 그림에서 $a+1\le -2$, $b+1\ge 6$이므로
$a\le -3$, $b\ge 5$



$b-a\ge 8$
따라서 $b-a$의 최솟값은 8이다.

109 정답 ⑤

해설 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$x^2-11x-12=0$

$(x+1)(x-12)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=12$이므로

$P=\{-1,\ 12\}$

또, 조건 q의 진리집합을 Q라 하면 조건 q에 대하여

$\sim q: |x-1| \le k$

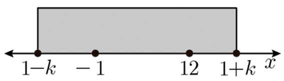
이때 k는 자연수이므로

$-k \le x-1 \le k$

$1-k \le x \le 1+k$

즉, $Q^C=\{x|1-k \le x \le 1+k\}$이므로

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q^C$이어야 한다.



즉, $1-k \le -1$이고 $12 \le 1+k$이어야 한다.

이때 $k \ge 2$이고 $k \ge 11$이므로

$k \ge 11$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

110 정답

해설 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

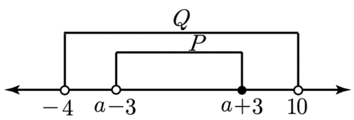
p: $-3<x-a<3$에서 $a-3<x<a+3$이므로

따라서 $P=\{x|a-3<x<a+3\}$이고,

q: $-7<x-3<7$에서 $-4<x<10$이므로

$Q=\{x|-4<x<10\}$이다.

이때 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$



$\therefore\ a-3 \ge -4,\ a+3 \le 10$

$\therefore\ -1 \le a \le 7$

따라서 조건을 만족하는 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$ 7이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2+\cdots+7=27$

111 정답 ②

해설 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|\,|x-1| \le 2\}$

$=\{x|-2 \le x-1 \le 2\}$

$=\{x|-1 \le x \le 3\}$ $\cdots$ ㉠

또, a가 자연수이므로

$Q=\{x|\,|x| \le 2a-1\}$

$=\{x|-2a+1 \le x \le 2a-1\}$ $\cdots$ ㉡

한편, p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p \to q$이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

㉠과 ㉡에서 $3 \le 2a-1$이므로 $a \ge 2$이고,

$-2a+1 \le -1$이므로 $a \ge 1$

따라서 $a \ge 2$이므로 자연수 a의 최솟값은 2이다.

112 정답 ①

해설 이차부등식을 포함한 문장이 참인 명제가 되도록 하는 문제를 해결한다.

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 $p,\ q$의 진리 집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면

$P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1 \ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1 \le 0$

$(a+1)(a-1) \le 0$

$\therefore\ -1 \le a \le 1$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로

$Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0$

$\therefore\ -3<b<3$

따라서 정수 b는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이다.

따라서 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3 \cdot 5=15$

113 정답 ④

해설 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 이고,
p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \Rightarrow \sim r$ 이 되어,
$q \Rightarrow p \Rightarrow \sim r$ 이 성립한다.
따라서 $q \Rightarrow \sim r$ 이 참이고
그 대우인 $r \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

114 정답 ⑤

해설 p는 q이기위한 충분조건이고 $p \Rightarrow q$이다.
또, $\sim q$는 r이기위한 필요조건이므로
$r \Rightarrow \sim q$이다.
ㄱ. (참) $p \Rightarrow q$이므로 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$가 성립한다.
따라서, $\sim q$는 $\sim p$이기위한 충분조건이다.
ㄴ. (참) $r \Rightarrow \sim q$이므로 대우 $q \rightarrow \sim r$가 성립한다.
따라서, q는 $\sim r$이기위한 충분조건이다.
ㄷ. (참) $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow \sim r$이므로
$p \Rightarrow \sim r$이다.
따라서, $\sim r$는 p이기위한 필요조건이다.
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

115 정답 ②

해설 p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow p$,
p는 s이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow s$,
q는 r이기 위한 필요충분조건이므로 $q \Leftrightarrow r$
ㄱ. $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow p$이므로 $q \Rightarrow p$
즉, q는 p이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow s$이므로 $r \Rightarrow s$
즉, s는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow s$이므로 $q \Rightarrow s$
즉, s는 q이기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

116 정답 ①

해설 [증명]
주어진 명제의 대우를 구해보면,
"n이 짝수 이면 n^2도 짝수이다."
이 때, n이 짝수이면
$n = 2k$(단, k는 자연수)로 놓을 수 있다.
따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$이므로 n^2도 짝수 이다.

117 정답 ④

해설 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$를 구하여 보면
n이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 n^2도 $\boxed{\text{홀수}}$이다.
이때 n이 $\boxed{\text{홀수}}$이므로
$n = \boxed{2k+1}$ (k는 0 또는 자연수)
$n^2 = (2k+1)^2$
$= 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(2k^2 + 2k) + 1$
즉, n^2은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.
따라서 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 $\boxed{\text{참}}$이므로
주어진 명제는 $\boxed{\text{참}}$이다.
따라서 괄호 안에 들어갈 내용으로 바르지 않은 것은 ④이다.

118 정답 ④

해설 주어진 명제의 대우는
'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다.}}$'이다.
n이 3의 배수가 아니므로
$n = 3m \pm \boxed{1}$ (m은 자연수)에서
$n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$
이때 $3m^2 \pm 2m$이 $\boxed{\text{자연수}}$이므로
n^2은 $\boxed{\text{3의 배수가 아니다.}}$
따라서 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

119 정답 ⑤

해설 $\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면
$\sqrt{5} = \dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{서로소}}$인 정수이다.)
$\therefore \sqrt{5}p = q$
양변을 제곱하면 $5p^2 = q^2$이고
q^2 은 5의 배수이므로 q는 $\boxed{\text{5의 배수}}$이다.
$q = 5k$ (k는 정수)라 하면
$5p^2 = 25k^2$
$\therefore p^2 = 5k^2$
따라서 p도 $\boxed{\text{5의 배수}}$이므로
이는 p, q가 $\boxed{\text{서로소}}$인 조건에 모순이다.
즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.
(가) 서로소 (나) 5의 배수 (다) 5의 배수

120 정답 ③

해설 수의 성질을 이용하여 무리식에 관한 증명을 완성한다.

$p^2(n^2-1)=q^2$에서 q^2이 p의 배수이므로

$\dfrac{q^2}{p}$은 자연수이다.

p가 1이 아닌 자연수이면 p, q가 서로소이므로

$\dfrac{q^2}{p}$은 자연수가 아니다.

그러므로 $p=1$

$p^2(n^2-1)=q^2$에 $p=1$을 대입하면 $n^2-1=q^2$

즉, $n^2=\boxed{q^2+1}$

$\therefore f(q)=q^2+1$

$n\geq 2$이고 $q^2=n^2-1\geq 2^2-1=4-1=3$

그러므로 $q^2\geq 3$에서 $q>1$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

즉, $2k<n<2k+1$을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2+1$이므로

$\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$

$\therefore g(k)=(2k+1)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)과 (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

이상에 의해서 $f(2)+g(3)=5+49=54$

121 정답 ②

해설 $\sqrt{n^2+1}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+1)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로

$p=1$이 되어야 한다.

따라서 $n^2=\boxed{q^2-1}$이다.

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-1=4k^2-1$이고

$(2k-1)^2<4k^2-1<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

그러나 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-1=4k^2+4k$이고

$(2k)^2<4k^2+4k<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

그러나 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$은 무리수이다.

$f(q)=q^2-1$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(4)+g(2)=16-1+16=31$

122 정답 ②

해설 모든 실수 x에 대하여
부등식 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이 참인 명제가 되려면
$f(x)=x^2-2kx-3k^2-4k+3$이라 할 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다.
즉, 이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$이
서로 다른 두 허근을 가져야 하므로
이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$의 판별식을
D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-3k^2-4k+3)$$
$$=4k^2+4k-3$$
$$=(2k+3)(2k-1)<0$$
$$\therefore -\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$$

따라서 정수 k의 개수는 -1, 0의 2이다.

123 정답 ④

해설 $a>0$, $b>0$일 때,
$\boxed{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\boxed{(\sqrt{a+b})^2}$
$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$
$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{>}\ 0$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

124 정답 ②

해설 $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$

125 정답 ⑤

해설 ㄱ. x^2-xy+y^2
$=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4}y^2+y^2$
$=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$ (절대부등식)
ㄴ. $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ (절대부등식)
ㄷ. $(|x|+|y|)^2=x^2+2|x|\cdot|y|+y^2$
$|x-y|^2=x^2-2xy+y^2$
$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
$=2|x|\cdot|y|+2xy\geq 0$이고,
$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
$=\{(|x|+|y|)+|x-y|\}\{(|x|+|y|)-|x-y|\}$
이때 $(|x|+|y|)+|x-y|$는 항상 양수이므로
$(|x|+|y|)-|x-y|$도 양수이다. (절대부등식)
ㄹ. $x^2\geq 0$ (절대부등식)
ㅁ. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$
$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0$
(절대부등식)
따라서 옳은 것은 모두 5개이다.

126 정답 ③

해설 (가) $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(나) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(다) $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$
$=a^2+2ab+b^2-(a^2+2|ab|+b^2)$
$=2(ab-|ab|)\leq 0$ (단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립)
따라서 실수 a, b에 대하여 항상 성립한다.
(라) [반례] $a=b=-1$인 경우 $a+b=-2$,
$2\sqrt{ab}=2$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(마) [반례] $a=b=-1$, $c=1$인 경우
$(a+b)(b+c)(c+a)=0$, $8abc=8$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(바) 코시-슈바르츠 부등식은 모든 실수에 대하여 항상
성립한다.
따라서 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식은
(가), (나), (다), (바)의 4개이다.

127 정답 ③

해설 ㄱ. $(a+b)^2-3ab=(a^2+2ab+b^2)-3ab$

$=a^2-ab+b^2$

$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

이때 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geq 0$이므로

$(a+b)^2-3ab\geq 0$ (참)

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

ㄴ. $(\sqrt{2|a|+2|b|})^2-(\sqrt{3|a|}+\sqrt{3|b|})^2$

$=2|a|+2|b|-(3|a|+3|b|+6\sqrt{|ab|})$

$=-(|a|+|b|+6\sqrt{|ab|})$

$=-\{(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|})^2+4\sqrt{|ab|}\}\leq 0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

$\therefore \sqrt{2|a|+2|b|}\leq\sqrt{3|a|}+\sqrt{3|b|}$ (거짓)

ㄷ. $(\sqrt{a^2+b^2})^2-(|a-b|)^2$

$=(a^2+b^2)-(a^2+b^2-2ab)$

$=2ab$

따라서 부등호를 결정할 수 없다. (거짓)

ㄹ. $a^2+4b^2+16-8a-16b+4ab$

$=a^2+(2b)^2+(-4)^2+2\cdot a\cdot(-4)+2\cdot 2b\cdot(-4)+2\cdot a\cdot 2b$

$=(a+2b-4)^2\geq 0$

(단, 등호는 $a+2b=4$일 때 성립)

$\therefore a^2+4b^2+16\geq 8a+8b-4ab$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

128 정답 ③

해설 ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq(|a+b|)^2$

$\therefore |a|+|b|\geq|a+b|$

($\because |a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$) (참)

ㄴ. (i) $|a|\geq|b|$일 때

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(ab-|ab|)\leq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)

(ii) $|a|<|b|$일 때

$|a|-|b|<0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에 의하여 $|a|-|b|\leq|a-b|$ (참)

ㄷ. [반례] $a=2$, $b=-1$이면 $|a+b|=1$,

$|a-b|=3$이므로 $|a+b|<|a-b|$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

129 정답 10

해설 $a>0$, $b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{25}$

$=10$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

130 정답 ①

해설 절대부등식 이해하기

$4x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\times\frac{a}{x}}=2\sqrt{4a}=2$

(단, 등호는 $4x=\frac{a}{x}$일 때 성립한다.)

따라서 $a=\frac{1}{4}$

131 정답 16

해설 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(1, 4)$를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}}$

$\frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{4}{ab}}$, $\frac{1}{4}\geq\frac{4}{ab}$

$\therefore ab\geq 16$

따라서 ab의 최솟값은 16이다.

132 정답 4

해설 $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2a+2b}{ab}=\frac{4}{ab}$

$2a>0$, $2b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+2b\geq 2\sqrt{2a\cdot 2b}=4\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $2a+2b=4$이므로 $\sqrt{ab}\leq 1$

양변을 제곱하면 $ab\leq 1$

$\frac{1}{ab}\geq 1$이므로 $\frac{4}{ab}\geq 4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

133 정답 ③

해설 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1$$
$$\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1$$
$$=2\cdot 2-1=3$$

이때 등호는 $x+1=\frac{4}{x+1}$일 때 성립하므로
$(x+1)^2=4$
$x+1=2$ ($\because$ $x+1>0$)
$\therefore$ $x=1$
따라서 $x+\frac{4}{x+1}$는 $x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로
$m=3$, $n=1$
$\therefore$ $m+n=3+1=4$

134 정답 ④

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(2a+3b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)=4+\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}+9$$
$$\geq 13+2\sqrt{\frac{6a}{b}\cdot\frac{6b}{a}}$$
$$=25$$

(단, 등호는 $\frac{6a}{b}=\frac{6b}{a}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.)
따라서 $(2a+3b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)$의 최솟값은 25이다.

135 정답 ①

해설 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)=2a^2+4+1+\frac{2}{a^2}$$
$$=5+2a^2+\frac{2}{a^2}$$
$$\geq 5+2\sqrt{2a^2\cdot\frac{2}{a^2}}$$
$$=5+4$$
$$=9$$

이때 등호는 $2a^2=\frac{2}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=1$
$\therefore$ $a=1$ ($\because$ $a>0$)
즉, $\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)$는 $a=1$일 때 최솟값 9를 갖는다.
따라서 $m=9$, $n=1$이므로
$m+n=10$

136 정답 9

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$
$$\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

따라서 최솟값은 9

137 정답 24

해설 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가
각각 $\frac{a}{6}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로
$\frac{a}{6}=\frac{1}{b}$에서 $ab=6$

$$(a+2)(b+3)=ab+3a+2b+6$$
$$=12+3a+2b$$

$a>0$, $b>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3a+2b\geq 2\sqrt{6ab}=12$
(단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)
따라서 $(a+2)(b+3)$의 최솟값은 24이다.

138 정답 6

해설 주어진 이차방정식이 허근을 가지므로
$D=16-4a<0$에서 $a-4>0$

$$a-4+\frac{1}{a-4}\geq 2\sqrt{(a-4)\cdot\frac{1}{a-4}}$$
$$=2$$
$$a+\frac{1}{a-4}=a-4+\frac{1}{a-4}+4$$
$$\geq 2+4=6$$

(단, 등호는 $a-4=\frac{1}{a-4}$일 때 성립한다.)
따라서 $a=5$일 때 최솟값 6을 갖는다.

139 정답 6

해설 $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

$=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}+2\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}$

$=2+2+2=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

140 정답 ③

해설 전체 우리의 가로의 길이를 $x\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $y\mathrm{m}$라 하면 철망의 길이가 $30\mathrm{m}$이므로 $3x+3y=30$

$\therefore x+y=10$

$x>0$, $y>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

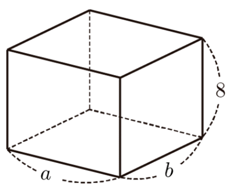
이때 $x+y=10$이므로 $\sqrt{xy}\leq 5$

양변을 제곱하면 $xy\leq 25$

따라서 우리의 넓이의 최댓값은 25이다.

141 정답 ③

해설



위 그림과 같이 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, 8이라 하자.

$8ab=192$이므로 $ab=24$이고

직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+8^2}$이다.

$a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립한다.)

$a^2+b^2\geq 48$

$\sqrt{a^2+b^2+64}\geq 4\sqrt{7}$

따라서 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{7}$이다.

142 정답 ③

해설 $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ b)$이므로

$\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ab$ $\cdots$ ㉠

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{2}{b}}=2\sqrt{\dfrac{1}{S}}$

$\therefore S\geq 4$

143 정답 ⑤

해설 절대부등식 문제 해결하기

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$라 하고 a, b의 값을 구하기 위해 직선의 식에 각각 대입하면

$0=ma+2m+3$에서 $a=\dfrac{-2m-3}{m}=\dfrac{-3}{m}-2<0$

$b=m\times 0+2m+3$에서 $b=2m+3>0$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{m}+2\right)\times(2m+3)=\dfrac{1}{2}\times\left(6+\dfrac{9}{m}+4m+6\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(4m+\dfrac{9}{m}+12\right)$

$\geq\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{4m\times\dfrac{9}{m}}+12\right)$

$=6+6$

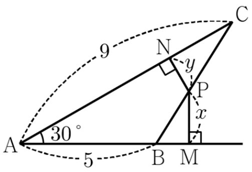
$=12$

(단, 등호는 $4m=\dfrac{9}{m}$, 즉 $m=\dfrac{3}{2}$일 때 성립한다.)

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

144 정답 437

해설 $\overline{\mathrm{PM}}=x$, $\overline{\mathrm{PN}}=y$라 하면



$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{APC}$에서

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 9\cdot \sin 30^{\circ}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot y$

$\frac{45}{4}=\frac{5}{2}x+\frac{9}{2}y$

$\therefore\ 10x+18y=45$ $\cdots$ ㉠

한편, $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}=\frac{5}{x}+\frac{9}{y}$이고,

$45\left(\frac{5}{x}+\frac{9}{y}\right)=(10x+18y)\left(\frac{5}{x}+\frac{9}{y}\right)$ ($\because$ ㉠)

$=212+\frac{90x}{y}+\frac{90y}{x}$

$=212+90\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

이때 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$45\left(\frac{5}{x}+\frac{9}{y}\right)=212+90\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$\geq 212+90\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$=212+180=392$

즉, $\frac{5}{x}+\frac{9}{y}\geq\frac{392}{45}$이므로

$\frac{5}{x}+\frac{9}{y}$, 즉 $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의 최솟값은 $\frac{392}{45}$이다.

따라서 $p=45$, $q=392$이므로

$p+q=437$

145 정답 10

해설 x, y는 실수이므로 코시―슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(x+2y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로

$25\geq(x+2y)^2$

$\therefore\ -5\leq x+2y\leq 5$

(단, 등호는 $x=\frac{y}{2}$일 때 성립한다.)

따라서 $M=5$, $m=-5$이므로

$M-m=5-(-5)=10$

146 정답 ③

해설 $a^2+b^2=4$, $x^2+y^2=9$이면

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$에서

$4\cdot 9\geq(ax+by)^2$

$\therefore\ -6\leq ax+by\leq 6$

147 정답 5

해설 $x+y+z=7$에서 $y+z=7-x$ $\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=27$에서 $y^2+z^2=27-x^2$ $\cdots$ ㉡

y, z가 실수이므로

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$

㉠, ㉡을 대입하면

$2(27-x^2)\geq(7-x)^2$

$54-2x^2\geq 49-14x+x^2$, $3x^2-14x-5\leq 0$

$(3x+1)(x-5)\leq 0$

$\therefore\ -\frac{1}{3}\leq x\leq 5$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 5이다.

148 정답 ④

해설 x, y, z가 실수이므로

코시―슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\}(x^2+y^2+z^2)$

$\geq(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$

$36\geq(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$

$-6\leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z\leq 6$

$\therefore\ \mathrm{M}=6$, $m=-6$

149 정답 ④

해설 직사각형의 대각선의 길이는 10이고

가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면

$a^2+b^2=100$

코시―슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

$200\geq(a+b)^2$

$\therefore\ a+b\leq 10\sqrt{2}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은

$2(a+b)=20\sqrt{2}$

150 **정답** 20

해설 직사각형의 가로, 세로의 길이가 각각 a, b이므로
$a^2+b^2=20$
이때 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b이므로
정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은
$\frac{a}{4}\cdot 8+4b=2a+4b$
따라서 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2$
$20\cdot 20\ge(2a+4b)^2$
$\therefore\ -20\le 2a+4b\le 20$
이때 $a>0$, $b>0$이므로 $0<2a+4b\le 20$
따라서 구하는 최댓값은 20이다.