기말고사 내신 대비- (명제)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 25년 3월 ~ 고2 15년 6월

실시일자	-
8문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

01 [2015년 6월 고2 문과 16번/4점]

전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 p: $a(x-1)(x-2)<0$, q: $x>b$이다. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

<보기>

ㄱ. $a=0$일 때, $P=\varnothing$이다.

ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때, $P\subset Q$이다.

ㄷ. $a<0$, $b=3$일 때, 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 참이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 [2025년 3월 고2 15번/4점]

실수 x에 대한 두 조건

p: $(x-a)(x+2a)>0$, q: $|x-1|\le 5$

가 있다. q가 $\sim p$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

03 [2016년 3월 고2 이과 16번/4점]

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각

$$P=\{3\},\ Q=\{a^2-1,\ b\},\ R=\{a,\ ab\}$$

라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 p이기 위한 필요조건일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, a, b는 실수이다.)

① $-\frac{3}{2}$　② -2　③ $-\frac{5}{2}$　④ -3　⑤ $-\frac{7}{2}$

04 [2025년 3월 고2 20번/4점]

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 20 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 명제 '모든 $x\in U$에 대하여 $\{x,\ x^2+1\}\not\subset A$이다.'는 거짓이다.

(나) 자연수 x에 대한 두 조건 p, q가

p: x는 $\frac{1}{2}x\in A$인 20 이하의 자연수이다.

q: x는 $x\in A$인 20 이하의 짝수이다.

일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

$1\notin A$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은?

① 50　② 53　③ 56　④ 59　⑤ 62

05 [2022년 3월 고2 17번/4점]

실수 x에 대한 두 조건

$p: x^2+2ax+1 \geq 0$, $q: x^2+2bx+9 \leq 0$이 있다.
다음 두 문장이 모두 참인 명제가 되도록 하는
정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

> • 모든 실수 x에 대하여 p이다.
> • p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

06 [2018년 3월 고2 문과 19번/4점]

두 조건 p, q의 진리집합이 각각

$$P=\{(x,\ y) \mid |x|-1 \leq y \leq 1\},$$
$$Q=\{(x,\ y) \mid x^2+(y-a)^2 \leq b^2\}$$

이다. p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는
양수 b의 최댓값은? (단, a는 실수이다.)

① $\sqrt{2}-1$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}-2$ ④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

07 [2018년 6월 고2 문과 17번/4점]

양수 m에 대하여 직선 $y=mx+2m+3$이
x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

08 [2019년 3월 고2 문과 30번/4점]

두 함수

$$f(x)=x^2-2x+6,$$
$$g(x)=-|x-t|+11 \ (t\text{는 실수})$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<g(x)) \\ g(x) & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 명제

'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와
직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'

가 참이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

기말고사 내신 대비- (명제)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 25년 3월 ~ 고2 15년 6월

실시일자	-
8문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

빠른정답

01 ②	02 ③	03 ⑤
04 ③	05 ①	06 ③
07 ⑤	08 26	

기말고사 내신 대비- (명제)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 25년 3월 ~ 고2 15년 6월

실시일자	-
8문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

01 정답 ②

해설 집합과 명제 추론하기

ㄱ. $a=0$이면

p : $0\times(x-1)(x-2)<0$이 되어 이 부등식을 만족하는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$ 이다. ∴참

ㄴ. $a>0$, $b=0$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\,|\,1<x<2\}$이고,

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x>0\}$이므로

$P\subset Q$이다. ∴참

ㄷ. $a<0$, $b=3$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>2\}$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{x\,|\,1\le x\le 2\}$이다.

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x>3\}$이고

$P^C\not\subset Q$이므로 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

∴거짓

02 정답 ③

해설 필요조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

q가 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $P^C\subset Q$이다.

q : $|x-1|\le 5$에서 $Q=\{x\,|-4\le x\le 6\}$

p : $(x-a)(x+2a)>0$에서

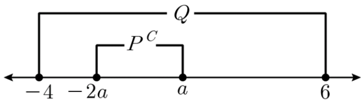
$\sim p$: $(x-a)(x+2a)\le 0$

(ⅰ) $a>0$인 경우

$P^C=\{x\,|-2a\le x\le a\}$이고 $P^C\subset Q$이므로

$-4\le -2a$이고 $a\le 6$

$\therefore\ 0<a\le 2$



(ⅱ) $a=0$인 경우

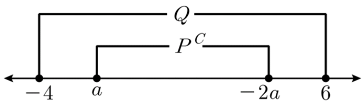
$P^C=\{0\}$ 이므로 $P^C\subset Q$가 항상 성립한다.

(ⅲ) $a<0$인 경우

$P^C=\{x\,|\,a\le x\le -2a\}$이고 $P^C\subset Q$이므로

$-4\le a$이고 $-2a\le 6$

$\therefore\ -3\le a<0$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $-3\le a\le 2$이다.

따라서 $M=2$, $m=-3$이므로

$M+m=-1$

03 정답 ⑤

해설 필요조건과 충분조건을 이용하여 최솟값을 구한다.

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ ······ ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P \subset R$ ······ ㉡

㉠에서 $a^2-1=3$ 또는 $b=3$

(ⅰ) $a^2-1=3$일 때,

$a=-2$ 또는 $a=2$

㉡에서 $ab=3$이어야 한다. 즉,

$a=-2,\ b=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=2,\ b=\dfrac{3}{2}$

(ⅱ) $b=3$일 때,

㉡에서 $a=3$ 또는 $ab=3$이어야 한다. 즉,

$a=3,\ b=3$ 또는 $a=1,\ b=3$

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 $a+b$의 최솟값은

$(-2)+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$

04 정답 ③

해설 명제의 참, 거짓을 이용하여 집합을 추론한다.

조건 (가)에서 명제 '어떤 $x \in U$에 대하여 $\{x,\ x^2+1\} \subset A$이다.'가 참이다.

따라서 집합 A는 $\{1,\ 2\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{3,\ 10\}$, $\{4,\ 17\}$ 중 적어도 하나의 집합을 부분집합으로 가진다.

이때 $1 \notin A$이므로 $\{1,\ 2\} \not\subset A$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이다.

(ⅰ) $\{2,\ 5\} \subset A$인 경우

$2 \in A$이고 2가 짝수이므로 조건 (나)에서 $2 \in Q$이고 $P=Q$에서 $2 \in P$이다.

$x=2$가 조건 p를 만족시키므로 $\dfrac{1}{2} \cdot 2=1 \in A$가 되어 조건 $1 \notin A$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\{4,\ 17\} \subset A$인 경우

$4 \in A$이고 4가 짝수이므로 조건 (나)에서 $4 \in Q$이고 $P=Q$에서 $4 \in P$이다.

$x=4$가 조건 p를 만족시키므로

$\dfrac{1}{2} \cdot 4=2 \in A$이고, (ⅰ)과 마찬가지로 $1 \in A$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\{3,\ 10\} \subset A$인 경우

$\dfrac{1}{2} \cdot 6=3 \in A$에서 $x=6$은 조건 p를 만족시킨다.

즉, $6 \in P$이고 $P=Q$에서 $6 \in Q$이므로 $x=6$은 조건 q를 만족시킨다.

따라서 $6 \in A$이고 $\{3,\ 6,\ 10\} \subset A$

$\dfrac{1}{2} \cdot 12=6 \in A$에서 $x=12$는 조건 p를 만족시킨다.

즉, $12 \in P$이고 $P=Q$에서 $12 \in Q$이므로 $x=12$은 조건 q를 만족시킨다.

따라서 $12 \in A$이고 $\{3,\ 6,\ 10,\ 12\} \subset A$

이때 $\dfrac{1}{2} \cdot 24=12 \in A$이지만, $24>20$이므로 $x=24$는 조건 p를 만족시키지 않는다.

또한, $10 \in A$이고 10은 짝수이므로 $x=10$은 조건 q를 만족시킨다.

즉, $10 \in Q$이고 $P=Q$에서 $10 \in P$이다. $x=10$이 조건 p를 만족시키므로 $\dfrac{1}{2} \cdot 10=5 \in A$이고

$\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12\} \subset A$

한편, $\dfrac{1}{2} \cdot 20=10 \in A$에서 $x=20$은 조건 p를 만족시킨다.

즉, $20 \in P$이고 $P=Q$에서 $20 \in Q$이므로 $x=20$은 조건 q를 만족시킨다.

따라서 $20 \in A$이고 $\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 20\} \subset A$

이때 $\dfrac{1}{2} \cdot 40=20 \in A$이지만 $40>20$이므로 $x=40$은 조건 p를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 20\} \subset A$이다.

$A=\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 20\}$이면

$P=Q=\{6,\ 10,\ 12,\ 20\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

따라서 $A=\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 20\}$일 때 A의 모든 원소의 합이 최소이고, 그 합은

$3+5+6+10+12+20=56$

05 정답 ①

해설 이차부등식을 포함한 문장이 참인 명제가 되도록 하는 문제를 해결한다.

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리 집합을 각각 P, Q라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\leq 0$$

$$(a+1)(a-1)\leq 0$$

$$\therefore\ -1\leq a\leq 1$$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$$

$$(b+3)(b-3)<0$$

$$\therefore\ -3<b<3$$

따라서 정수 b는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3\cdot 5=15$

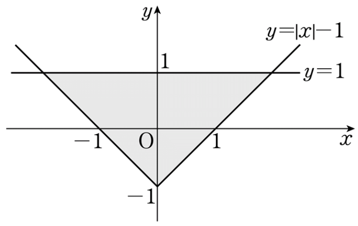
06 정답 ③

해설 부등식의 영역을 구하여 필요조건 문제를 해결한다.

진리집합 $P=\{(x,\ y)\,|\,|x|-1\leq y\leq 1\}$에서

$|x|-1\leq y$는 함수 $y=|x|-1$의 그래프와 그 윗부분이므로 진리집합 P는 함수 $y=|x|-1$의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역이다.

진리집합 P를 좌표평면에 나타내면 다음 그림의 색칠된 삼각형과 그 내부가 된다.



진리집합 $Q=\{(x,\ y)\,|\,x^2+(y-a)^2\leq b^2\}$에서

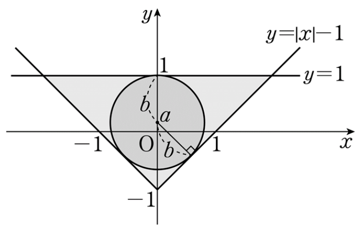
$x^2+(y-a)^2=b^2$은 중심이 $(0,\ a)$이고 반지름의 길이가 b인 원이므로 진리집합 Q는 중심이 $(0,\ a)$이고 반지름의 길이가 b인 원과 그 내부이다.

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이다.

즉, 원 $x^2+(y-a)^2=b^2$이 함수 $y=|x|-1$의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역에 포함되어야 한다.

따라서 $-1<a<1$

반지름의 길이 b가 최대가 될 때는 원 $x^2+(y-a)^2=b^2$이 그림과 같이 세 직선 $y=x-1$, $y=-x-1$, $y=1$에 동시에 접할 때이다.



원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $y=x-1$ 사이의 거리는

$$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}=\frac{a+1}{\sqrt{2}}$$

원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 $y=1$ 사이의 거리는 $1-a$

$\dfrac{a+1}{\sqrt{2}}$과 $1-a$는 둘 다 원의 반지름의 길이이므로

$$\frac{a+1}{\sqrt{2}}=1-a$$

$$(a+1)=\sqrt{2}(1-a)=\sqrt{2}-\sqrt{2}a$$

$$(\sqrt{2}+1)a=\sqrt{2}-1$$

$$a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$$

따라서 $b=1-a=2\sqrt{2}-2$

07 정답 ⑤

해설 절대부등식 문제 해결하기
A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$라 하고 a, b의 값을 구하기 위해
직선의 식에 각각 대입하면

$0=ma+2m+3$에서 $a=\dfrac{-2m-3}{m}=\dfrac{-3}{m}-2<0$

$b=m\times 0+2m+3$에서 $b=2m+3>0$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{m}+2\right)\times(2m+3)&=\frac{1}{2}\times\left(6+\frac{9}{m}+4m+6\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(4m+\frac{9}{m}+12\right)\\&\ge\frac{1}{2}\left(2\sqrt{4m\times\frac{9}{m}}+12\right)\\&=6+6\\&=12\end{aligned}$$

(단, 등호는 $4m=\dfrac{9}{m}$, 즉 $m=\dfrac{3}{2}$일 때 성립한다.)

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

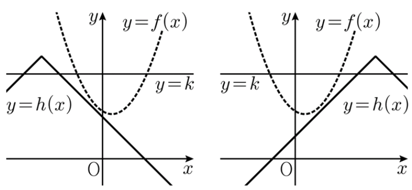
08 정답 26

해설 $f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여
대칭이다.

한편, $-|x-t|+11=\begin{cases}x-t+11 & (x<t)\\ -x+t+11 & (x\ge t)\end{cases}$이므로

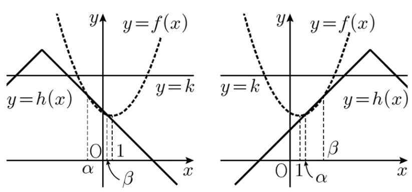
함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여
대칭이다.
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이
세 가지로 나타난다.

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

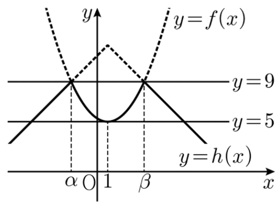
(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<\beta\le 1$ 또는 $1\le\alpha<\beta$)일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

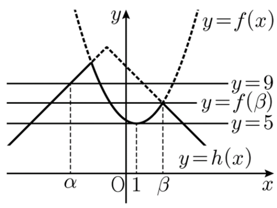
(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<1<\beta$)일 때,

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=1$일 때,



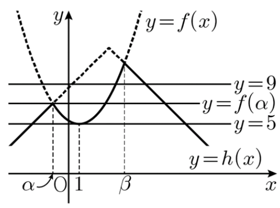
두 교점은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
이때 β의 값을 구하면
$x^2-2x+6=-x+12$, $x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$, $x=-2$ 또는 $x=3$
$\beta>1$이므로 $\beta=3$, $g(3)=-|3-1|+11=9$
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5뿐이다.

② $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\beta)$ $(5<f(\beta)<9)$

③ $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\alpha)$ $(5<f(\alpha)<9)$

(i), (ii), (iii)에 의하여 명제 '어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $5\le k<9$
따라서 자연수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은
$5+6+7+8=26$