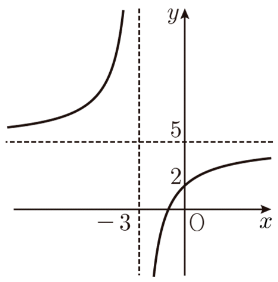
마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수)306~326p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
14문제 / DRE수학			

01 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{bx-c}{x+a}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, $3 \le x \le 18$에서 함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



02 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-x}+a & (x<5) \\ \dfrac{3x+1}{x-4} & (x \ge 5) \end{cases}$$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 치역은 $\{y \mid y>3\}$이다.
> (나) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.

$f(-11)f(k)=80$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

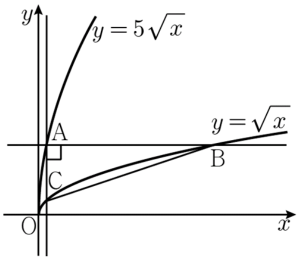
03 [2018년 3월 고2 이과 20번 변형]
좌표평면 위의 두 곡선
$y=-\sqrt{kx-3k}+6$, $y=\sqrt{-kx-3k}-6$에 대하여 다음 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $k>0$이면 두 곡선은 만나지 않는다.
ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최솟값은 -12이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 다음 그림과 같이 함수 $y=5\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



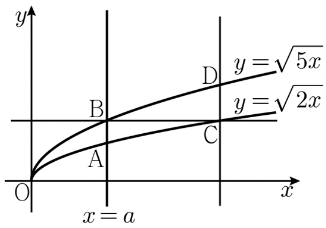
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

05 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-6}+1 & (x \geq 3)\\ -\sqrt{-x+3}+1 & (x<3)\end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)$의 값을 구하시오.

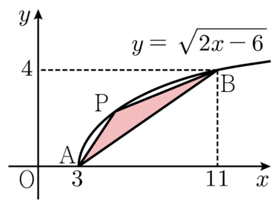
06 두 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k\ (x \geq 0)$, $g(x)=\sqrt{7x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

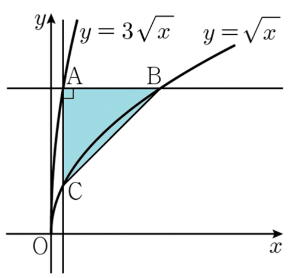
07 그림과 같이 양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{5x}$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{5x}$와 만나는 점을 D라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, a의 값을 구하시오.



08 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{2x-6}$ 의 그래프 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(11,\ 4)$ 사이를 움직일 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.



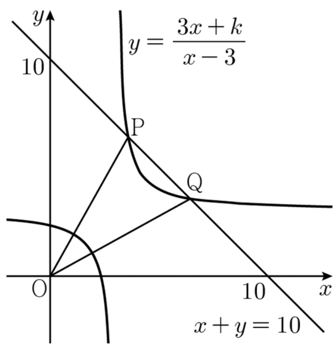
09 [2018년 3월 고2 문과 17번 변형]
다음 그림과 같이 함수 $y=3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



① $\dfrac{1}{16}$　② $\dfrac{1}{12}$　③ $\dfrac{1}{10}$　④ $\dfrac{1}{8}$　⑤ $\dfrac{1}{6}$

10 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$와 곡선 $y=\dfrac{2x+2}{x+3}$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최솟값이 m일 때, m^2의 값을 구하시오.

11 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x-3}$의 그래프가 직선 $x+y=10$과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 23일 때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.)



12 좌표평면에서 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로부터 두 함수 $y=\sqrt{-4x+4}+1$, $y=-\sqrt{-4x+4}+1$의 그래프에 그은 두 접선이 직교하도록 하는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

13 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(3,\ 2)$를 이은 선분과 함수 $y=\sqrt{mx+1}$ $(m>0)$의 그래프가 만나기 위한 m의 값의 범위는 $\alpha \le m \le \beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

14 함수 $f(x)=x^2+7$ $(x \ge 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.)

① $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수)306~326p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
14문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 -3	02 17	03 ③
04 ④	05 -1	06 ④
07 8	08 4	09 ④
10 8	11 54	12 ④
13 9	14 ④	

실시일자	-
14문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 -3

해설 주어진 그래프에서 점근선이

두 직선 $x=-3$, $y=5$이므로 그래프를 나타내는 식은

$y=\dfrac{k}{x+3}+5$ (단, $k\neq0$)

이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{3}+5$

$\therefore\ k=-9$

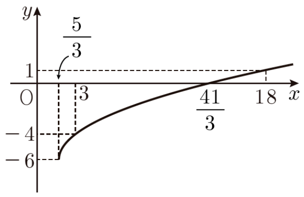
즉, 주어진 그래프를 나타내는 식은

$y=\dfrac{-9}{x+3}+5=\dfrac{5x+6}{x+3}$이므로

$a=3,\ b=5,\ c=-6$

이때 $3\leq x\leq18$에서 함수 $y=\sqrt{3x-5}-6$의

그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x=3$에서 최솟값 -4, $x=18$에서 최댓값 1을 갖는다.

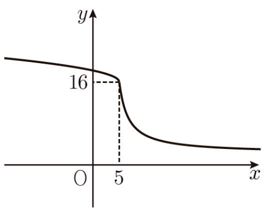
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -3이다.

02 정답 17

해설 조건 (가)에서 치역이 $\{y\,|\,y>3\}$이고,

조건 (나)에서 f는 일대일함수이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(5)=16$에서 $a=16$

이때 $f(-11)=\sqrt{5-(-11)}+16=20$이고,

$f(-11)f(k)=80$이므로 $f(k)=4$

따라서 $\dfrac{3k+1}{k-4}=4$에서 $3k+1=4k-16$이므로

$k=17$

03 정답 ③

해설 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=-\sqrt{kx-3k}+6$, $g(x)=\sqrt{-kx-3k}-6$

라 하자.

ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx-3k}+6$

$=-(\sqrt{-kx-3k}-6)$

$=-g(x)$

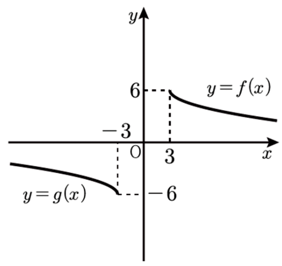
이므로 $g(x)=-f(-x)$

따라서 두 곡선

$y=-\sqrt{kx-3k}+6$, $y=\sqrt{-kx-3k}-6$은

원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $k>0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (참)

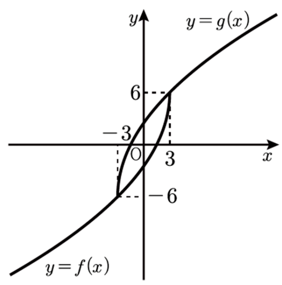
ㄷ. (ⅰ) $k>0$일 때

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ⅱ) $k<0$일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 작아질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=6$과 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-6$과 멀어진다. 따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최솟값은 그림과 같이

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-3,\ -6)$을 지날 때이다.



$-6=-\sqrt{-3k-3k}+6$

$\sqrt{-6k}=12,\ -6k=144$

따라서 $k=-24$ (거짓)

04 정답 ④

해설 점 A의 좌표를 $(a,\ 5\sqrt{a})(a>0)$라 하면

$B(25a,\ 5\sqrt{a}),\ C(a,\ \sqrt{a})$가 된다.

직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌

두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $24a,\ 4\sqrt{a}$이고

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$24a=4\sqrt{a},\ 6a=\sqrt{a}$

$36a^2=a$

이때 $a\neq0$이므로 $36a=1,\ a=\dfrac{1}{36}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

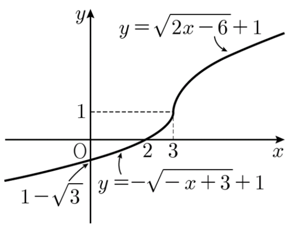
$\dfrac{1}{2}\cdot(24a)^2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

05 정답 -1

해설 $x\geq3$에서 $f(x)=\sqrt{2x-6}+1$ $\cdots$㉠

$x<3$에서 $f(x)=-\sqrt{-x+3}+1$ $\cdots$㉡

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

다음 그림에서 $f(a)=3$을 만족시키는 함수의 식은

㉠이므로 $\sqrt{2a-6}+1=3,\ 2a-6=4$

$\therefore a=5$

$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $f(b)=-2$

다음 그림에서 $f(b)=-2$를 만족시키는 함수의 식은

㉡이므로 $-\sqrt{-b+3}+1=-2,\ \sqrt{-b+3}=3$

$-b+3=9$

$\therefore b=-6$

$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)=5+(-6)$

$=-1$

06 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k\ (x\geq0)$는

집합 $\{x\,|\,x\geq0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\geq\dfrac{1}{7}k\right\}$로의

일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k$에서

$\dfrac{1}{7}x^2=y-\dfrac{1}{7}k,\ x^2=7y-k$

$\therefore x=\sqrt{7y-k}\ (\because x\geq0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{7x-k}$

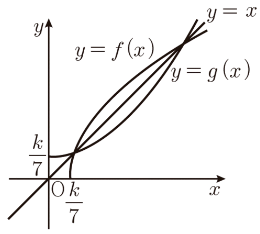
즉, 함수 $g(x)=\sqrt{7x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의

그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의

교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k=x$에서

$x^2-7x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야

하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$k\geq0,\ D=(-7)^2-4k>0$

$\therefore 0\leq k<\dfrac{49}{4}$

따라서 정수 k는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12$의 13개이다.

07 정답 8

해설 $A(a,\ \sqrt{2a}),\ B(a,\ \sqrt{5a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{2x}=\sqrt{5a},\ x=\dfrac{5}{2}a$

따라서 $C\left(\dfrac{5}{2}a,\ \sqrt{5a}\right),\ D\left(\dfrac{5}{2}a,\ \dfrac{5}{2}\sqrt{2a}\right)$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2a}-\sqrt{2a}}{\frac{5}{2}a-a}=\frac{\sqrt{2a}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\ (\because a>0)$$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sqrt{a}=2\sqrt{2}$

$\therefore a=8$

08 **정답** 4

해설 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다. 직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{4-0}{11-3}(x-3)$

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을

$y=\dfrac{1}{2}x+k$ (k는 실수)라 하면

$\sqrt{2x-6}=\dfrac{1}{2}x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2x-6=\dfrac{1}{4}x^2+kx+k^2$

$\therefore\ x^2+4(k-2)x+4k^2+24=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k-4)^2-(4k^2+24)=0,\ -16k-8=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 사이의 거리는

직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ 위의 점 $(3,\ 0)$과

직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$, 즉 $x-2y-1=0$ 사이의 거리와

같으므로

$\dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(11-3)^2+4^2}=4\sqrt{5}$ 이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=4$

09 **정답** ④

해설 점 A의 좌표를 $(a,\ 3\sqrt{a})(a>0)$라 하면

$\mathrm{B}(9a,\ 3\sqrt{a})$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$가 된다.

직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌

두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a$, $2\sqrt{a}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$8a=2\sqrt{a}$, $4a=\sqrt{a}$

$16a^2=a$

이때 $a\neq0$이므로 $16a=1$, $a=\dfrac{1}{16}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot(8a)^2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

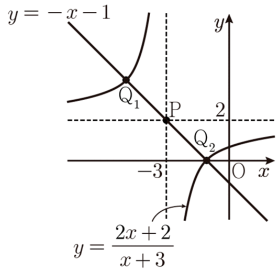
10 **정답** 8

해설 $y=\dfrac{2x+2}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+2$이므로

점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=2$이다.

즉, 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$는 두 점근선의 교점이다.

점 P가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 다음 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다.



한편, 곡선 $y=\dfrac{2x+2}{x+3}$는 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$에 대하여

대칭이므로 직선 $y-2=-(x+3)$, 즉 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

$\dfrac{2x+2}{x+3}=-x-1$에서

$2x+2=(-x-1)(x+3)$

$x^2+6x+5=0,\ (x+5)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=-1$

따라서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각

$(-5,\ 4)$, $(-1,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{PQ_1}}=\overline{\mathrm{PQ_2}}$이므로

$m=\overline{\mathrm{PQ_2}}=\sqrt{(-1+3)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ m^2=8$

11 정답 54

해설 $y=\dfrac{3x+k}{x-3}=\dfrac{3(x-3)+9+k}{x-3}=\dfrac{9+k}{x-3}+3$이므로

점근선의 방정식은 $x=3$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-3=x-3$

$\therefore\ y=x$

이때 직선 $x+y=10$도 $y=x$에 대하여 대칭이므로

직선 $x+y=10$과 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x-3}$의 그래프의

두 교점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{Q}(b,\ a)$이다.

두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 23이므로

$ab=23$

또, 두 점 P, Q가 $x+y=10$ 위의 점이므로

$a+b=10$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{a^2+b^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=10^2-2\cdot 23=54$

12 정답 ④

해설 두 함수는 $y=1$에 대하여 대칭인 무리함수이다.

이때 점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선의 기울기를 m이라 하면

접선의 방정식은 $y=m(x-a)$이다.

이것을 주어진 함수의 식에 대입하여 정리하면

$-4x+4=\{m(x-a)-1\}^2$

$-4x+4=m^2(x-a)^2-2m(x-a)+1$

$m^2x^2-2(am^2+m-2)x+a^2m^2+2am-3=0$

이때 무리함수의 그래프와 직선이 접하려면 이 방정식은 중근을 가져야 한다.

따라서 위 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(am^2+m-2)^2-m^2(a^2m^2+2am-3)=0$

$(1-a)m^2-m+1=0$

이 m에 관한 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이므로

두 접선이 직교하기 위해서는 두 근의 곱이 -1이어야 한다.

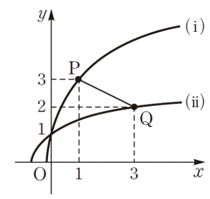
따라서 이차방정식 $(1-a)m^2-m+1=0$의 두 근을

α, β라 하면 $\alpha\beta=\dfrac{1}{1-a}=-1$

$\therefore\ a=2$

13 정답 9

해설 $y=\sqrt{mx+1}$의 그래프가 선분 PQ와 만나려면 곡선의 위치는 (ⅰ), (ⅱ)의 사이 또는 (ⅰ), (ⅱ)이어야 한다.



(ⅰ) 곡선이 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$을 지날 때,

$3=\sqrt{m+1}$, $m+1=9$

$\therefore\ m=8$

(ⅱ) 곡선이 점 $\mathrm{Q}(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=\sqrt{3m+1}$, $3m+1=4$

$\therefore\ m=1$

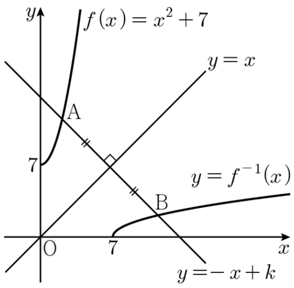
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는 $1\le m\le 8$

$\therefore\ \alpha=1$, $\beta=8$

$\therefore\ \alpha+\beta=9$

14 **정답** ④

해설 다음 그림과 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는
$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고
직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로
두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



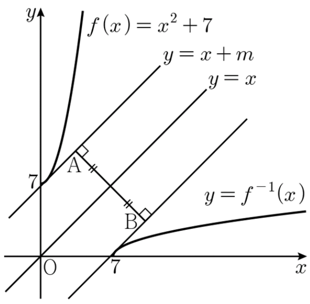
즉, 선분 AB의 길이의 최솟값은 함수 $f(x)=x^2+7$
$(x \geq 0)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의
최솟값의 2배이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+7)$ $(a>0)$이라 하면 점 P와
직선 $y=x$, 즉 $-x+y=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-a+a^2+7|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

이므로 d의 최솟값은 $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ 이다.
따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$

[다른 풀이]
다음 그림과 같이 직선 $y=x$와 평행하고,
함수 $f(x)=x^2+7$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을
$y=x+m$이라 하자.



이차방정식 $x^2+7=x+m$, 즉 $x^2-x+7-m=0$의
판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로
$D=(-1)^2-4(7-m)=0$, $4m-27=0$

$$\therefore\ m=\frac{27}{4}$$

이때 두 직선 $y=x$와 $y=x+\frac{27}{4}$ 은 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과
직선 $y=x+\frac{27}{4}$, 즉 $4x-4y+27=0$ 사이의 거리와
같으므로 거리 d는

$$d=\frac{|27|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{27}{4\sqrt{2}}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$