마플시너지 - 수학Ⅱ 10~41,43~76,78~119p

함수의 극한 ~ 접선의 방정식

실시일자	-
100문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 $\lim_{x\to0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=0$

02 정답 18

해설 $\lim_{x\to4}\frac{3x-12}{\sqrt{x+5}-3}$

$=\lim_{x\to4}\frac{3(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{3(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}3(\sqrt{x+5}+3)=18$

03 정답 27

해설 $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)=27$

04 정답 $-\frac{1}{6}$

해설 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{6}(x+\sqrt{6})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{6}(x+\sqrt{6})}$

$=-\frac{1}{6}$

05 정답 5

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)=5$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{7}{x}\right)=5$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$

06 정답 4

해설 $\lim_{x\to1+}f(x)=4\cdot1=4$

07 정답 ②

해설 ①, ③ $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(0)=1$이고

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0+}\sqrt{x+1}=\lim_{x\to0-}\sqrt{x+1}=1$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

④ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2-1)=-1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2+2)=2$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ②이다.

08 정답 ④

해설 함수 $y=-2x^2+3a$와 함수 $y=4x-2a$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-2x^2+3a)=-8+3a$,

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(4x-2a)=8-2a$,

$f(2)=8-2a$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$-8+3a=8-2a$

$\therefore a=\frac{16}{5}$

09 정답 -3

해설
$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{\{-2(0+\Delta x)^3-3(0+\Delta x)+1\}-1}{\Delta x}\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-2(\Delta x)^3-3\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\{-2(\Delta x)^2-3\}=-3$$

10 정답 ①

해설 미분계수 이해하기
$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}\times\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$
$$=\frac{1}{3}f'(4)=7$$

따라서 $f'(4)=3\times7=21$

11 정답 2

해설 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

12 정답 4

해설 $f'(x)=3x^3-5x^2+ax+3$에서

$f'(1)=a+1=5$이므로

$a=4$

13 정답 11

해설 $f(x)=(x-1)(x^3+2x^2+8)$에서

$f'(x)=x^3+2x^2+8+(x-1)(3x^2+4x)$

$\therefore f'(1)=1^3+2\cdot1^2+8+0=11$

14 정답 1

해설 $f'(x)=-6x+1$이므로

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-6a+1=-5$

$\therefore a=1$

15 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-2x+16$ 으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 a 라 하면 접점의 좌표는

$(a,\ a^3-2a+16)$

$x=a$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-2$

따라서 기울기가 $3a^2-2$ 이고 점

$(a,\ a^3-2a+16)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a+16)=(3a^2-2)(x-a)$ 이고 이 식을 정리하면

$y=(3a^2-2)x-2a^3+16$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2a^3+16$

즉, $a^3=8$ 이므로 $a=2$

따라서 접선의 방정식은 $y=10x$ 이므로

$m=10$

16 정답 ④

해설 ④ $\lim_{x\to2}f(x)=1$

17 정답 -3

해설
$$f(x)=\begin{cases}2x-6 & (x\ge3)\\ -2x+6 & (2\le x<3)\\ -2x^2+1 & (x<2)\end{cases}$$
$$\lim_{x\to2-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)+\lim_{x\to4}f(x)$$
$$=\lim_{x\to2-}(-2x^2+1)+\lim_{x\to2+}(-2x+6)+\lim_{x\to4}(2x-6)$$
$$=-7+2+2=-3$$

18 정답 ⑤

해설

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{1}{x^2}}=4$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}+5x}{3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+5}{3}=\frac{\sqrt{4}+5}{3}=\frac{7}{3}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 정답 $\frac{1}{2}$

해설

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2-5x+3}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{4}$

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-x}-2x$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-x}-2x)(\sqrt{4x^2-x}+2x)}{(\sqrt{4x^2-x}+2x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}=-\frac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{1}{2}$

20 정답 20

해설

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}$에서

$x\to\infty$일 때 (분모)$\to\infty$이고, 극한값이 $\frac{1}{3}$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

한편, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{3x^2-2x-1}=2$에서 극한값이 존재하고

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(3x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{3x+1}$

$=\frac{1-a}{4}=2$

$1-a=8$

$\therefore a=-7$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+7)$이므로

$f(3)=20$

21 정답 2

해설

$x\neq-2$일 때, $f(x)=\frac{x^2+6x+8}{x+2}$이고

$y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)$

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(x+4)=2$

$\therefore f(-2)=2$

22 정답 2개

해설 $g(x)=f(x)+2x$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

$g(1)=f(1)+2=-4+2=-2$

$g(2)=f(2)+4=-1+4=3$

$g(3)=f(3)+6=2+6=8$

$g(4)=f(4)+8=-9+8=-1$

따라서 $g(1)g(2)<0$, $g(3)g(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)+2x=0$은 열린구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

23 정답 1

해설 $\dfrac{(a+2)^2+2(a+2)-(a^2+2a)}{a+2-a}$

$=\dfrac{4a+4+4}{2}=2a+4,\ 2a+4=6$

$\therefore\ a=1$

24 정답 ③

해설 x의 값이 2에서 7까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(7)-f(2)}{7-2}=\dfrac{77-12}{5}=13$

한편, 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(c+h)^2+4(c+h)-(c^2+4c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2ch+h^2+4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2c+h+4)=2c+4$$

이때, 평균변화율과 $x=c$에서의 미분계수가 같으므로

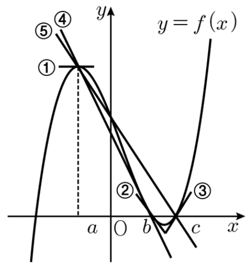
$2c+4=13$

$2c=9 \qquad \therefore\ c=\dfrac{9}{2}$

25 정답 ③

해설 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, 평균변화율은 두 점을 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 직선의 기울기 중 가장 큰 것은 ③이다.



26 정답 ②

해설 미분가능성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$,

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2$이므로

$g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

27 정답 19

해설 함수 $f(x)+2g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)+2g'(1)=5+2\cdot7=19$

28 정답 100

해설 곡선 $f(x)=2x^3-px^2+qx-1$이

점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(1)=2-p+q-1=3$

$\therefore\ p-q=-2$ $\cdots$ ㉠

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

이때 $f'(x)=6x^2-2px+q$에서

$f'(1)=6-2p+q=2$

$\therefore\ -2p+q=-4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6,\ q=8$

$\therefore\ p^2+q^2=6^2+8^2=100$

29 정답 ①

해설 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

한편, $f(x)=x^3+ax+b,\ f'(x)=3x^2+a$이므로

$f(1)=0$에서 $a+b=-1$ $\cdots\cdots$㉠

$f'(1)=4$에서 $3+a=4$ $\cdots\cdots$㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

$\therefore ab=-2$

30 정답 41

해설 다항식 $x^{15}+3x^7+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)로 놓으면

$x^{15}+3x^7+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ $\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+3\cdot1+1=a+b$

$\therefore a+b=5$ $\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$15x^{14}+21x^6=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ $\cdots$ ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $15\cdot1+21\cdot1=a$

$\therefore\ a=36$

$a=36$을 ㉡에 대입하면 $36+b=5$

$\therefore\ b=-31$

따라서 나머지 $R(x)=36x-31$이므로

$R(2)=36\cdot2-31=41$

31 정답 $-\dfrac{5}{16}$

해설 다항식 x^5+ax^4+b를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^5+ax^4+b=(x+1)^2Q(x)$ $\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a+b=0\ \therefore\ a+b=1$ $\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+4ax^3=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$5-4a=0$ $\therefore\ a=\dfrac{5}{4}$

㉡에 $a=\dfrac{5}{4}$를 대입하면

$\dfrac{5}{4}+b=1$ $\therefore\ b=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ ab=-\dfrac{5}{16}$

32 정답 2

해설 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$y'=3x^2-a$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $3-a$이다.

따라서 이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ 3-a=2$

즉, $a=1$이다.

또한, 점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=x^3-x+b$ 위의 점이므로

$1=1^3-1+b$

$\therefore\ b=1$

따라서 $a+b=2$이다.

33 정답 0

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+px+q$ 에서,

$f'(x)=x^2+p$,

$f(1)=\frac{1}{3}+p+q=-1,\quad p+q=-\frac{4}{3}$ ……㉠

$f'(1)=1+p$ 에서, $x=1$ 일 때의 접선의 방정식은,

$y=(1+p)(x-1)-1$

$\therefore\ y=(1+p)x-p-2$

이 직선이 원점을 지나므로,

$0=-p-2\quad\therefore\ p=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $q=\frac{2}{3}$

$\therefore\ p+3q=-2+2=0$

34 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$

따라서 접선의 방정식은

$y-4=-(x+1)$, 즉 $y=-x+3$

$x^3-4x+1=-x+3$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

35 정답 5

해설 $f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2)$이라고 하면 접선의 기울기가 9이므로 $f'(t)=9$에서

$3t^2-6t=9,\ 3(t+1)(t-3)=0$

$t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -4),\ (3,\ 0)$이므로

접선의 방정식은 $y=9x+5$ 또는 $y=9x-27$

이때 $k>0$이므로 $k=5$이다.

36 정답 ④

해설 $y'=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4$이므로

접선의 방정식은 $x=-1$일 때 기울기가 최대이고

그때 기울기는 4이다.

기울기 4인 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$y=4(x+1)-2=4x+2$

그러므로 $a=4,\ b=2$이고 $a+b=6$

37 정답 ④

해설 $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 접하므로

$f(1)=g(1)$에서 $1+a=b+1$

$\therefore a-b=0$ ……㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $3+a=2b$

$\therefore a-2b=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=3$

$\therefore a+b=3+3=6$

38 정답 2

해설 $\lim_{x\to\infty}f(x)=4$, 즉 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+a}+b\right)=4$이므로 $b=4$

$x=2$에서의 극한이 존재하지 않으므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)\neq\lim_{x\to 2+}f(x)$

따라서 $a=-2$이므로

$a+b=2$

39 정답 8

해설 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고,

$x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x-2)}&=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{f(t-1)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{f(t-1)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{f(t-1)}\cdot(t+2)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(t-1)}{t}}\cdot(t+2)\\&=4\cdot 2=8\end{aligned}$$

40 정답 ②

해설 함수의 극한 이해하기

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\cdot\dfrac{h(x)}{g(x)}}{7+3\cdot\dfrac{h(x)}{g(x)}}$$

$=2$

41 정답 ④

해설 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=(-1)\cdot1=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=-1$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=(-1)-1=-2$,

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=1-0=1$

즉, $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}g(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+}g(t)=0$

또, $x\to1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(f(x))=g(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1}g(f(x))=0$이다. (참)

ㄹ. $\dfrac{6t+1}{t-1}=m$이라 하면 $m=6+\dfrac{7}{t-1}$에서

$t\to-\infty$일 때, $m\to6-$이므로

$\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(\dfrac{6t+1}{t-1}\right)$

$=\lim\limits_{m\to6-}f(m)$

$=\lim\limits_{m\to2-}f(m)$ ($\because f(x)=f(x+4)$)

$=1$ (참)

ㅁ. $f(x)=f(x+4)$, $g(x)=g(x+4)$이고, $\cdots$ ㉠

$-x=k$라 하면 $x\to4+$일 때, $k\to-4-$이므로

$\lim\limits_{x\to4+}\{f(-x)+g(-x)\}$

$=\lim\limits_{k\to-4-}\{f(k)+g(k)\}$

$=\lim\limits_{k\to0-}\{f(k)+g(k)\}$ ($\because$ ㉠)

$=(-1)+1=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이다.

42 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to-1-} f(x)=1,\ f(-1)=1$ ∴참

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\lim_{x\to1+} g(x)$

$=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\lim_{x\to1-} g(x)=0$ ∴참

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)=0,\ f(1)g(1)=1\cdot1=1$

∴거짓

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

43 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=1+1=2$

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=1+1=2$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=0-(-1)=1$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to1+} f(g(x))=\lim_{g(x)\to-1+} f(g(x))=1$

$\lim_{x\to0} g(f(x))=g(1)=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44 정답 ②

해설 $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=f(x)-h(x)$이고,

$\lim_{x\to\infty} h(x)=2$이다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+g(x)}{2f(x)-3g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+\{f(x)-h(x)\}}{2f(x)-3\{f(x)-h(x)\}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2f(x)-h(x)}{-f(x)+3h(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{h(x)}{f(x)}}{-1+3\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}$

$=-2\left(\because \lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=0\right)$

45 정답 8

해설 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{t}{2}(x+2)$

점 P는 직선 $y=\dfrac{t}{2}(x+2)$와 원 $x^2+y^2=4$의

교점이므로 점 P의 y좌표를 구하면

$\left(\dfrac{2y}{t}-2\right)^2+y^2=4,\ \dfrac{4}{t^2}y^2-\dfrac{8}{t}y+y^2=0$

$\therefore\ y=\dfrac{8t}{t^2+4}\ (\because\ y\neq0)$

따라서 $\overline{OA}=t,\ \overline{PH}=\dfrac{8t}{t^2+4}$이므로

$\lim_{t\to\infty}(\overline{OA}\cdot\overline{PH})=\lim_{t\to\infty}\left(t\cdot\dfrac{8t}{t^2+4}\right)=8$

46 정답 64

해설 $\dfrac{3t}{x}=-\dfrac{1}{t}x+4$에서 $3t^2=-x^2+4tx$

$x^2-4tx+3t^2=0,\ (x-t)(x-3t)=0$

$\therefore\ x=t$ 또는 $x=3t$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$A(t,\ 3),\ B(3t,\ 1)$

$\overline{OA}=\sqrt{t^2+9},\ \overline{OB}=\sqrt{9t^2+1}$

$\lim_{t\to1+}\dfrac{\overline{OB}-\overline{OA}}{t-1}$

$=\lim_{t\to1+}\dfrac{\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9}}{t-1}$

$=\lim_{t\to1+}\dfrac{(\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9})(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}{(t-1)(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}$

$=\lim_{t\to1+}\dfrac{8(t^2-1)}{(t-1)(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9})}$

$=\lim_{t\to1+}\dfrac{8(t+1)}{\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{10}$

$\therefore\ 10k^2=10\cdot\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{10}\right)^2=64$

47 정답 ⑤

해설 함수의 극한을 이용한 도형 문제 해결하기

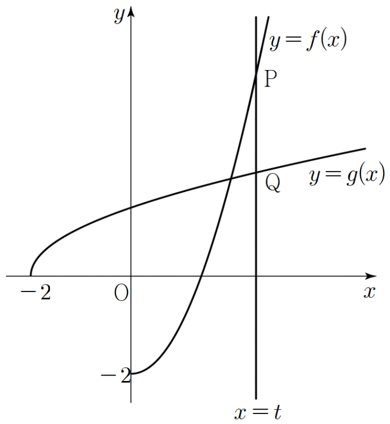
$x=t$ 와 $y=f(x)$ 가 만나는 점 P 의 좌표는

$(t,\ t^2-2)$ 이고

$x=t$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 점 Q 의 좌표는

$(t,\ \sqrt{t+2}\ )$ 이므로

선분 PQ 의 길이는 $h(t)=t^2-2-\sqrt{t+2}$ 이다.



$$\begin{aligned}\lim_{t\to2+}\frac{h(t)}{t-2}&=\lim_{t\to2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}\\&=\lim_{t\to2+}\frac{(t^2-4)+(2-\sqrt{t+2}\,)}{t-2}\\&=\lim_{t\to2+}\left\{(t+2)+\frac{2-\sqrt{t+2}}{t-2}\right\}\\&=\lim_{t\to2+}\left\{(t+2)+\frac{2-t}{(t-2)(2+\sqrt{t+2}\,)}\right\}\\&=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\lim_{t\to2+}\frac{h(t)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}$$

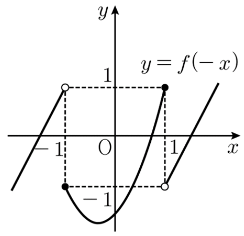
$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t^2-2-\sqrt{t+2}\,)(t^2-2+\sqrt{t+2}\,)}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2}\,)}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t-2)(t^3+2t^2-1)}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2}\,)}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{t^3+2t^2-1}{t^2-2+\sqrt{t+2}}=\frac{15}{4}$$

48 정답 ⑤

해설 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)f(-x)$

$=-1\cdot1=-1$

$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)f(-x)$

$=1\cdot(-1)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=-1+1=0$

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

또한, $h(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 각각 연속이어야 한다.

ㄱ에 의하여 $\lim_{x\to-1}g(x)=-1$이고,

$g(-1)=f(-1)f(1)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이때 $g(x)=f(x)f(-x)$에서

$g(-x)=f(-x)f(x)$이므로 함수 $g(x)$는

$x=1$에서도 연속이다. 또한, ㄴ에서 함수 $h(x)$는

$x=1$에서 연속이고, $h(-x)=f(-x)+f(x)$이므로

함수 $h(x)$는 $x=-1$에서도 연속이다.

따라서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 각각 연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ ㄷ이다.

49 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(-x)=1$,

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}|x|=1$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}\{|x|\cdot 1\}=1$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}\{(-x)\cdot(-1)\}=1$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} f(x+1)=\lim_{x\to 1+} f(t)=\lim_{t\to 1+}|t|=1$,

$\lim_{x\to 0-} f(x+1)=\lim_{x\to 1-} f(t)=\lim_{t\to 1-}(-t)=-1$,

$\lim_{x\to 0} g(x)=-1$

$\lim_{x\to 0+} f(x+1)g(x)=-1$, $\lim_{x\to 0-} f(x+1)g(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x+1)g(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x+1)g(x)$

즉, 함수 $f(x+1)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

50 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=-1\cdot 0=0$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=0\cdot 1=0$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=-1\cdot 1=-1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0-$,

$x\to 0-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0+} f(g(x))$

$=\lim_{t\to 0-} f(t)=0$

$\lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0-} f(g(x))=f(1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to 0+}(f\circ g)(x)\neq \lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t=-1$,

$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(-1)=1$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0-} g(f(x))$

$=\lim_{t\to 0+} g(t)=0$

이므로 $\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)\neq \lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

51 정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=0\cdot0=0$이므로

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0} f(g(x))=f(0)=0$이고

$f(g(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(g(x))=f(g(0))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to+0} g(f(x))=\lim_{x\to1-} g(x)=0$

$\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{x\to-1+} g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(g(x))=0$

이때 $g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\therefore \lim_{x\to0} f(g(x))=g(f(0))$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=0$에서 연속이다.

52 정답 ③

해설 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{x\to0-} f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-} \{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$이고

$\lim_{x\to1+} \{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1} \{f(x)+g(x)\}=0$이다.

$x=1$에서 함숫값 $f(1)+g(1)=0$이다.

$\lim_{x\to1} \{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로

$f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $\lim_{x\to1-} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=-1$이고

$\lim_{x\to1+} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1} (f\circ g)(x)=-1$,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$이다.

따라서 $\lim_{x\to1} (f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(1)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

53 정답 ①

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=1\cdot0=0$,

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=0\cdot0=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이고,

$x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

$\lim_{x\to0-} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to0} f(g(x))=1$

이때 $f(g(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(g(x))\neq f(g(0))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이고,

$x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=1$

$\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{t\to-1+} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to0} g(f(x))=1$

이때 $g(f(0))=g(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0} g(f(x))\neq g(f(0))$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

따라서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄱ뿐이다.

54 정답 ④

해설 ㄱ. $x \to 1+$ 일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(f(x))=f(1)=1$

$x \to 1-$ 일 때 $f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(f(x))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x \to 1+} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 1-} f(f(x))$

이므로 $\lim_{x \to 1} (f \circ f)(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x \to 1+} g(g(x))=\lim_{t \to 1+} g(t)=1$

$x \to 1-$일 때 $t \to 0+$ 이므로

$\lim_{x \to 1-} g(g(x))=\lim_{t \to 0+} g(t)=1$

$\lim_{x \to 1} (g \circ g)(x)=1$

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x \to 1+} g(f(g(x)))=\lim_{t \to 1+} g(f(t))$

$t \to 1+$일 때 $f(t)=1$이므로

$\lim_{t \to 0+} g(f(t))=g(1)=1$

또, $x \to 1-0$일 때 $t \to +0$이므로

$\lim_{x \to 1-} g(f(g(x)))=\lim_{t \to 0+} g(f(t))$

그런데 $t \to 0+$ 일 때 $f(t)=0$이므로

$\lim_{t \to 0+} g(f(t))=g(0)=1$

$\therefore \lim_{x \to 1} (g \circ f \circ g)(x)=1$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

55 정답 ④

해설 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$x<2$일 때,

$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x \geq 2$일 때,

$f(x)=1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데, $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다.

즉,

$$\lim_{x \to 2-} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x \to 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x \to 2+} \frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$에서

$\frac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2,\ 2a=-1$

따라서, $a=-\frac{1}{2}$이다.

56 정답 -20

해설 조건 (가)에서 $f(-1)=0,\ f(3)=0$

즉, $f(x)$가 $x+1,\ x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)$ ($a \neq 0$, a는 상수)로 놓고

조건 (나)의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{a(x+1)(x-3)}{(x-3)}=\lim_{x \to 3} a(x+1)=4a$$

따라서 $4a=20$이므로 $a=5$

즉, $f(x)=5(x+1)(x-3)$이므로

$f(1)=5 \cdot 2 \cdot (-2)=-20$

57 정답 ③

해설 $0 \le x < 1$일 때 $f(x)=-4$,
$1 \le x < 2$일 때 $f(x)=-3$,
$2 \le x < 3$일 때 $f(x)=-2$,
$3 \le x < 4$일 때 $f(x)=-1$,
$4 \le x < 5$일 때 $f(x)=0$,
$5 \le x < 6$일 때 $f(x)=1$,
$x=6$일 때 $f(x)=2$
즉, 불연속인 x의 값은 $1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 개수는 6이다.

58 정답 ④

해설 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3} f(x)$의 값이 존재한다.
즉, $\lim_{x\to3+} f(x) = \lim_{x\to3-} f(x)$이므로
$\lim_{x\to3+} 3(x-3) = \lim_{x\to3-} (-x^2+ax+b)$
$\therefore\ -9+3a+b=0\ \cdots$ ㉠
또, $f(x-1)=f(x+3)$에 x대신 $x+1$을 대입하면
$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$
$\therefore b=3$
$b=3$을 ㉠에 대입하면
$-9+3a+3=0$
$\therefore a=2$
따라서
$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+3 & (0 \le x < 3) \\ 3(x-3) & (3 \le x \le 4) \end{cases}$이므로
$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$

59 정답 ④

해설 ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면
$g(x)=h(x)-f(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄴ. [반례]
$f(x)=0,\ g(x)=\begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이면
$f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만
$g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} g(x)=b$로 놓으면
$g(x)$가 연속이므로 $b=g(a)$
또, $f(x)$가 연속함수이므로
$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))=f(b)$
따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

60 정답 ③

해설 ㄱ. 【반례】 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 이고 $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 이면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이지만
$f(g(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}+1}=\dfrac{x-1}{x}$은 $x=0$에서
정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.
ㄴ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x \ge 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$ 이면
$f(f(x))=2$이므로 모든 실수 x에서
연속이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면
$x \to a$일 때 $t \to f(a)$이므로
$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to f(a)} g(t) = g(f(a))$
따라서 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ 뿐이다.

61 정답 ①

해설 ㄱ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=b$로 놓으면 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(a)=b$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때, $t\to b$이므로

$\lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{t\to b} g(t)$

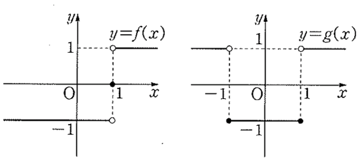
이때 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{t\to b} g(t)=g(b)=g(f(a))$

즉, $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(f(a))$이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 【반례】 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만

$x\to 1+$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=g(1)=-1$

$x\to 1-0$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=g(-1)=-1$

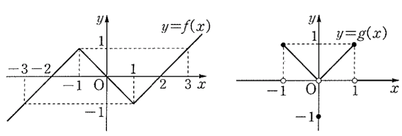
$\therefore \lim_{x\to 1} g(f(x))=-1$

이때 $g(f(1))=g(0)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1} g(f(x))=g(f(1))$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 【반례】 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



$f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $f(-1)=1$이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to -1+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to -1+} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=1$

$x\to -1-$일 때 $t\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -1-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1} g(f(x))=1$

이때 $g(f(-1))=g(1)=1$이므로

$\lim_{x\to -1} g(f(x))=g(f(-1))$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

62 정답 3

해설 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{3f(x)-2g(x)\}=3f(a)-2g(a)$이므로 함수 $3f(x)-2g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{g(x)\}^3=\{g(a)\}^3$이므로 함수 $\{g(x)\}^3$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $f(a)=0$이면 $\dfrac{g(a)}{f(a)}$의 값이 정의되지 않으므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to a}\{3f(x)g(x)\}=3f(a)g(a)$이므로 함수 $3f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㅁ. $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$이려면 함수 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이라는 조건이 더 필요하다.

따라서 $x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.

63 정답 ①

해설 ㄱ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} g(x)=b$로 놓으면 $g(x)$가 연속이므로 $b=g(a)$

또, $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)=f(g(a))$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$일 때,

$y=f(x)$와 $y=f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$일 때,

$|f(x)|=1$이므로 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

64 정답 ④

해설 ① $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $\{f(x)\}^2$, $\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.
따라서 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

② $4f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면
$g(x)=4f(x)-h(x)$
이때 $f(x)$, $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

③ 임의의 실수 a에 대하여 $f(a)=b$라 하면 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$
즉, $f(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이므로
$\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=\lim\limits_{t\to b}g(t)=g(b)$
($\because$ $g(x)$가 연속함수)
이때 $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)$이므로
$\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(a)$
즉, $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.
따라서 $(g\circ f)(x)$와 $g(x)$가 연속함수이므로 $(g\circ f)(x)-g(x)$도 연속함수이다.

④ [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\le 0)\\ 2 & (x>0)\end{cases}$이면
$g(x)+1=\begin{cases}2 & (x\le 0)\\ 3 & (x>0)\end{cases}$이므로
$f(x)=0$, $f(x)\{g(x)+1\}=0$
따라서 $f(x)$와 $f(x)\{g(x)+1\}$은 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이고 $|f(x)|+2>0$이므로
$\dfrac{g(x)}{|f(x)|+2}$는 연속함수이다.

65 정답 ③

해설 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}\{3f(x)-g(x)\}=3f(a)-g(a)$이므로
함수 $3f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}\{g(x)\}^2=\{g(a)\}^2$이므로 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $g(a)=0$이면 $\dfrac{f(a)}{g(a)}$의 값이 정의되지 않으므로
함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim\limits_{x\to a}\{2f(x)g(x)\}=2f(a)g(a)$이므로
함수 $2f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㅁ. $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$이려면 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이라는 조건이 더 필요하다.

따라서 $x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.

66 정답 2

해설 연속함수의 성질에 의하여 ㄱ, ㄴ은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$, $g(x)=x-1$이라 하면 $f(g(x))=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-2 & (x\ge 1)\end{cases}$이다.
즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

67 정답 ②

해설 ㄱ. [반례] $f(x)=[x]$, $g(x)=-[x]-1$이면

$\lim_{x\to0+}[x]\neq\lim_{x\to0-}[x]$,

$\lim_{x\to0+}(-[x]-1)\neq\lim_{x\to0-}(-[x]-1)$이지만

$\lim_{x\to0}[x](-[x]-1)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$, $\lim_{x\to0}g(x)$가 모두 존재하지 않지만

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)$는 존재한다. (거짓)

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$x\to0$일 때 $f(x)\to f(0)$이므로

$\lim_{x\to0}|f(x)|^2=|f(0)|^2$

따라서 $y=|f(x)|^2$도 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면

$|f(x)|^2=1$이다.

따라서 $y=|f(x)|^2$은 $x=0$에서 연속이지만

$y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

68 정답 2

해설 연속함수의 성질에 의하여 ㄱ, ㄴ은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}+1$는 $g(x)=0$일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x-1 & (x\ge0)\end{cases}$, $g(x)=x-1$이라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

69 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}f(x)=a$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to0}|f(x)|=|a|$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)+|f(x)|\}=a+|a|$

따라서 극한값 $\lim_{x\to0}\{f(x)+|f(x)|\}$가 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=b$ (b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1}\{f(x)\cdot f(x)\}$

$=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}f(x)=b^2$

또, $\{f(1)\}^2=b^2$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$도 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$로 놓으면

$\{f(x)\}^2=1$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이지만, $\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

70 정답 ②

해설 ㄱ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$, $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$이면

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$이지만

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{|x|}}{\frac{1}{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}1=1$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)$가 모두 존재하지 않지만

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 존재한다. (거짓)

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$x\to0$일 때 $f(x)\to f(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+|f(x)|\}=f(0)+|f(0)|$

따라서 $y=f(x)+|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.
(참)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x\geq0)\end{cases}$이라 하면

$x<0$일 때,

$f(x)+|f(x)|=-1+|-1|=-1+1=0$

$x\geq0$일 때,

$f(x)+|f(x)|=0+|0|=0$

따라서 $y=f(x)+|f(x)|$는 $x=0$에서
연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

71 정답 ④

해설 $x^3+a-9=0$에서 $f(x)=x^3+a-9$라 하면
열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가져야 하므로 $f(-1)f(2)<0$이어야 한다.

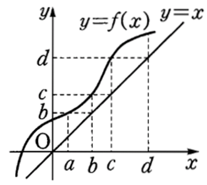
$(a-1)(a-10)<0$

$1<a<10$에서 정수 a의 개수는 8개다.

72 정답 ④

해설 x의 값이 b에서 c까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{g(c)-g(b)}{c-b}=\dfrac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b}$



이때 위의 그림에서 $f(b)=c$이므로

$f^{-1}(c)=b$

또, $f(a)=b$ 이므로

$f^{-1}(b)=a$

따라서 구하는 평균변화율은

$\dfrac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b}=\dfrac{b-a}{c-b}$

73 정답 14

해설 $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^3+6h^2+14h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(h^2+6h+14)$

$=14$

74 정답 ①

해설 $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-1}{x^2-3x-4}=3$에서 $x \to 4$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 4}\{f(x)-1\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(4)-1=0$에서 $f(4)=1$

$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-1}{x^2-3x-4}=3$에서

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-1}{x^2-3x-4}=\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{(x-4)(x+1)}=\frac{f'(4)}{5}=3$$

$\therefore f'(4)=15$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2)-1}{x+2} &= \lim_{x \to -2} \frac{f(x^2)-f(4)}{x+2} \\ &= \lim_{x \to -2} \left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{(x+2)(x-2)} \cdot (x-2)\right\} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4} \cdot (-4) \\ &= -4f'(4) \\ &= -60\end{aligned}$$

75 정답 ③

해설 미분계수의 정의를 이용한 극한값 구하기

$$\begin{aligned}&\lim_{n \to \infty} n^3\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}^3 \\ &= \lim_{n \to \infty}\left\{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}\right\}^3 \\ &= \lim_{n \to \infty}\left\{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2}}\right\}^3 = \{2f'(0)\}^3=64\end{aligned}$$

76 정답 2

해설 $f(-1)=-3$, $f'(-1)=4$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to -1} \frac{x^2f(-1)-f(x)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{-f(x)+f(-1)-f(-1)+x^2f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{-\{f(x)-f(-1)\}+(x^2-1)f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \left\{-\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}+(x-1)f(-1)\right\} \\ &= -f'(-1)-2f(-1) \\ &= -4-2 \cdot (-3)=2\end{aligned}$$

77 정답 ⑤

해설 (가) $f'(a)$

(나) $\lim_{x \to a} f(x)$

(다) 0

【참고】 $f(x)=|x|$ 에서 미분계수의 정의에 의하여 $f'(0)$을 구해보면,

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1$$

따라서, $x=0$ 에서의 미분계수는 존재하지 않는다.

78 정답 ⑤

해설 $f(x)=4x^2+5xf'(1)$에서

$f'(x)=8x+5f'(1)$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=8+5f'(1)$, $4f'(1)=-8$

$\therefore f'(1)=-2$

$f'(1)=-2$이므로 ㉠에서

$f'(x)=8x-10$

$\therefore f'(3)=24-10=14$

79 정답 ③

해설 $[\{f(x)\}^2]'=2f(x)\cdot f'(x)$이므로
$h(x)=\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$일 때
$h'(x)=2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)$
$=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$
$(\because f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x))$
따라서 $h(x)$는 상수함수이므로 임의의 x에 대하여
$h(x)=\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$
$=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2=1$
$\therefore \{f(1997)\}^2-\{g(1997)\}^2=1$

80 정답 ③

해설 미분계수 이해하기
함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$
$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=13$

81 정답 14

해설 $f(x)=2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5$으로 놓으면
$f(-1)=-2+2-2+2-2=-2$이므로
$\lim_{x\to-1}\frac{2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+2}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5-(-2)}{x+1}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$
이때
$f'(x)=18x^8+16x^7+14x^6+12x^5+10x^4$이므로
$f'(-1)=18-16+14-12+10=14$

82 정답 ②

해설 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq0)$이라 하면
도함수 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.
조건 (가)의 $6f(x)=3xf'(x)+2$에서
좌변과 우변은 모두 n차식이므로
최고차항의 계수를 비교하면
$6a=3an,\ 3a(n-2)=0$
$\therefore n=2$ $(\because a\neq0)$
즉, $f(x)$는 이차함수이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq0$)이라 하면
$f'(x)=2ax+b$
이것을 $6f(x)=3xf'(x)+2$에 대입하면
$6ax^2+6bx+6c=6ax^2+3bx+2$
위의 식이 x에 대한 항등식이므로
$6b=3b,\ 6c=2$
$\therefore b=0,\ c=\frac{1}{3}$
또한, 조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로
$f(1)=a+b+c=2$
$a+0+\frac{1}{3}=2$
$\therefore a=\frac{5}{3}$
$\therefore f(x)=\frac{5}{3}x^2+\frac{1}{3}$
$\therefore f(2)=\frac{5}{3}\cdot4+\frac{1}{3}=7$

83 정답 2

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$에서
$x=y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)-2$이므로 $f(0)=2$
$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-2-f(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1$
$=f'(0)+1$
이때, $f'(1)=3$이므로 $f'(0)=2$

84 정답 6

해설 $f(x)=2x^3-3x+10$으로 놓으면
$f'(x)=6x^2-3$이므로 $f'(1)=6-3=3$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 9)$에서의 접선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은
$y-9=3(x-1)$
$y=3x+6$ $\cdots$ ㉠
직선 ㉠의 x절편과 y절편이 각각 -2, 6이므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6=6$

85 정답 ⑤

해설 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{-3-0}{2-(-1)}=-1$
$f(x)=-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로
$f'(t)=-2t=-1 \quad \therefore\ t=\frac{1}{2}$
따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이고,
접선의 기울기가 -1이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$\therefore\ 4x+4y-5=0$

86 정답 ②

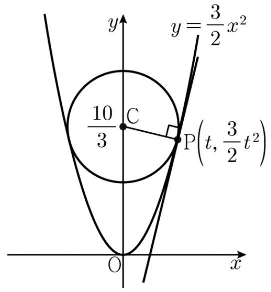
해설 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-6$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로
$f'(t)=2t=2 \quad \therefore\ t=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 점 $(1,\ 1)$과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값이므로
$\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

87 정답 2

해설 $f(x)=x^4+3$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로
접선의 방정식은
$y-(t^4+3)=4t^3(x-t) \quad \therefore\ y=4t^3x-3t^4+3$
이 직선이 원점을 지나므로 $0=-3t^4+3$
$t^4-1=0,\ (t-1)(t+1)(t^2+1)=0$
$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ $(\because t^2+1>0)$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$, $(1,\ 4)$이므로
$\overline{PQ}=2$

88 정답 ④

해설 $f(x)=\frac{3}{2}x^2$이라 하면 $f'(x)=3x$
다음 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{3}{2}t^2\right)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t$이고, 직선 CP의 기울기는
$$\frac{\frac{3}{2}t^2-\frac{10}{3}}{t-0}=\frac{9t^2-20}{6t}$$



이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로
$3t\cdot\frac{9t^2-20}{6t}=-1,\ 9t^2-20=-2,\ t^2=2$
$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$
따라서 두 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3)$, $(\sqrt{2},\ 3)$이므로
원 C의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(3-\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{3}$

89 정답 ⑤

해설 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}(3x-1)\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(\frac{2}{x}\right)^{9}+\cdots+\left(\frac{9}{x}\right)^{2}+\left(\frac{10}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3-t}{t}\{t^{10}+(2t)^9+\cdots+(9t)^2+10t\}$$

$$=\lim_{t\to 0}(3-t)(t^9+2^9\cdot t^8+\cdots+9^2\cdot t+10)=30$$

90 정답 4

해설 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=\alpha$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-\alpha$$

또한,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)}=4\text{에서}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{3\cdot\frac{f(-t)}{t}}{\sqrt{\frac{f(-t)}{t}\cdot\frac{1}{t}+1}+\frac{f(-t)}{t}}$$

$$=\frac{-3\alpha}{1-\alpha}=4,\ 4-4\alpha=-3\alpha$$

$$\therefore \alpha=4$$

91 정답 ⑤

해설 함수의 연속성에 대한 성질을 이해할 수 있는가?

ㄱ. (참) $x=\pm1$ 에서 불연속

ㄴ. (참) $\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=(1-1)f(1)=0$ 이므로

$x=1$ 에서 연속

ㄷ. (참) $y=\{f(x)\}^2=x^2$ 이므로 실수 전체에서 연속

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

92 정답 ③

해설 $g(x)=\begin{cases}x-3 & (x\ge3)\\-(x-3) & (x<3)\end{cases}$

ㄱ. $f(x)+g(x)=\begin{cases}2x-9 & (x\ge3)\\3 & (x<3)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to3+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to3+}(2x-9)=-3$

$\lim_{x\to3-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to3-}3=3$

따라서 $\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)+g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다. (참)

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases}(x-3)(x-6) & (x\ge3)\\-x(x-3) & (x<3)\end{cases}$

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)=0$이므로 $f(x)g(x)$는

$x=3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)g(x)-f(3)g(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(x-6)}{x-3}=\lim_{x\to3+}(x-6)=-3$

$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)g(x)-f(3)g(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3-}\frac{-x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}(-x)=-3$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서의 미분계수가 존재하므로

$x=3$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)g(x)=\begin{cases}(x-3)(x-6) & (x\ge3)\\-x(x-3) & (x<3)\end{cases}$이므로

$|f(x)g(x)|=\begin{cases}(x-3)(x-6) & (x\ge6)\\-(x-3)(x-6) & (3\le x<6)\\-x(x-3) & (0\le x<3)\\x(x-3) & (x<0)\end{cases}$

$\lim_{x\to6}|f(x)g(x)|=|f(6)g(6)|=0$이므로

$|f(x)g(x)|$는 $x=6$에서 연속이다.

$\lim_{x\to6+}\frac{|f(x)g(x)|-|f(6)g(6)|}{x-6}$

$=\lim_{x\to6+}\frac{(x-3)(x-6)}{x-6}=\lim_{x\to6+}(x-3)=3$

$\lim_{x\to6-}\frac{|f(x)g(x)|-|f(6)g(6)|}{x-6}$

$=\lim_{x\to6-}\frac{-(x-3)(x-6)}{x-6}=\lim_{x\to6-}(-x+3)=-3$

따라서 $|f(x)g(x)|$는 $x=6$에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=6$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

93 정답 ⑤

해설 ㄱ. $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

$y=-x$를 주어진 식에 대입하면

$f(x-x)=f(x)+f(-x)-6x^2$

$\therefore f(x)+f(-x)=6x^2+f(0)=6x^2$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+6xh-f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+6xh}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{h}+6x$

$=f'(0)+6x=6x+3$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에서 연속이다. 즉, $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

94 정답 ⑤

해설 ㄱ. 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$에서 $f(0)=0$

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}+2x$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+2x$

$=f'(0)+2x=4+2x$ (참)

ㄴ. 주어진 식에 $y=-x$를 대입하면

$f(x-x)=f(x)+f(-x)-2x^2$

$f(x)+f(-x)=2x^2+f(0)=2x^2$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에서 연속이다.

$\therefore f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

95 정답 ③

해설 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이라 하면

$f'(x)=x$

점 $\mathrm{P}(2a,\ 2a^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2a)=2a$이므로

접선 l의 방정식은

$y-2a^2=2a(x-2a)$

$\therefore y=2ax-2a^2$

접선 l이 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$2ax-2a^2=0$

$\therefore x=a\ (\because a>0)$

$\therefore \mathrm{A}(a,\ 0)$

한편, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2a}x+\dfrac{1}{2}$

위의 직선의 y절편은 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

이때 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이가 $r(a)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{OB}})\cdot r(a)$에서

$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{a+\sqrt{a^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{2}\right\}\cdot r(a)$

$\therefore r(a)=\dfrac{a}{2\left(a+\dfrac{1}{2}+\sqrt{a^2+\dfrac{1}{4}}\right)}$

$\therefore \lim\limits_{a\to\infty}r(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a}{2\left(a+\dfrac{1}{2}+\sqrt{a^2+\dfrac{1}{4}}\right)}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{1}{2a}+\sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}}\right)}$

$=\dfrac{1}{2\cdot2}=\dfrac{1}{4}$

96 정답 3

해설 $\frac{t-1}{t+2}=m$으로 놓으면 $t\to\infty$일 때, $m\to1-$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)=\lim_{m\to1-}f(m)=2$

$\frac{4t+1}{t-2}=n$으로 놓으면 $t\to\infty$일 때, $n\to4+$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)=\lim_{n\to4+}f(n)=1$

$\therefore 2\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+2}\right)-\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right)=2\cdot2-1=3$

97 정답 ④

해설 최대 최소의 정리의 역은 '함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지면 이 구간에서 연속이다.'이다.

①, ②, ③ 구간 $[1,\ 5]$에서 최댓값과 최솟값을 갖고 연속이다.

④ 구간 $[1,\ 5]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속은 아니다.

⑤ 구간 $[1,\ 5]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않고 연속도 아니다.

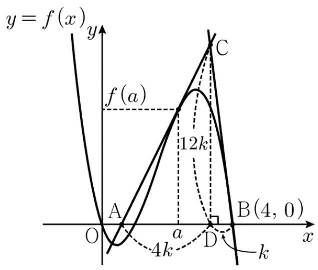
따라서 보기 중 최대, 최소의 정리의 역이 성립하지 않음을 보이는 예로 적당한 것은 ④이다.

98 정답 ④

해설 $f(x)=-x^3+5x^2-4x$에서

$f'(x)=-3x^2+10x-4$이므로

점 $\mathrm{B}(4,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=-12$



이때 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=4:1$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=4k$

직선 BC의 기울기는 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{-k}=-12$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=12k$

또 직선 AC의 기울기는 $\frac{12k}{4k}=3$

$f'(a)=-3a^2+10a-4=3$을 만족시키는 a를 구하면

$3a^2-10a+7=0,\ (a-1)(3a-7)=0$

$\therefore\ a=\frac{7}{3}\ (\because\ a>1)$

99 정답 32

해설 미분법과 접선의 방정식을 활용할 수 있는가?

직선 AB와 삼차함수 $y=x^3-5x$가 접하는 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

직선 AB의 기울기가 1이므로 $y'_{x=x_1}=1$이다.

$y'=3x^2-5$이므로

$y'_{x=x_1}=3x_1^2-5=1$

$\therefore\ x_1=-\sqrt{2}\quad(\because\ x_1<0)$

$y_1=-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

이때, 직선 AB의 방정식은

$y-3\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})$

$\therefore\ y=x+4\sqrt{2}$

두 점 A, B의 좌표가

$\mathrm{A}(0,4\sqrt{2}),\ \mathrm{B}(-4\sqrt{2},0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=8$

따라서 구하는 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4\overline{\mathrm{AB}}=4\times8=32$

100 정답 ②

해설 $f'(0)$은 $x=0$에서의 $y=f(x)$의 접선의 기울기이므로

$\triangle\mathrm{POB}=4\triangle\mathrm{PAO}$에서 선분 PO를 공유하므로

$\overline{\mathrm{OB}}=4\overline{\mathrm{AO}}$

$\triangle\mathrm{PAB}$는 P가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{4\mathrm{OA}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PO}}=2\overline{\mathrm{OA}}$

$f'(0)=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=2$