실시일자	-	유형별 학습	이름
12문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 24~25p_문제연습1

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 점과 직선 사이의 거리

01

정답 10

해설 $\overline{OA}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10$

02

정답 58

해설 선분 AB의 길이는 두 점 A, B 사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0-3)^2+(7-0)^2}=\sqrt{58}$

$\therefore l^2=58$

03

정답 13

해설 $\overline{OA}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$

04

정답 29

해설 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구한다.

선분 AB의 길이는 두 점 A, B사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

따라서 $l^2=29$

05

정답 ③

해설 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(8, 12)$를 $3:1$로 내분하는 점의 x좌표는 $\dfrac{3\cdot 8+1\cdot 0}{3+1}=6$

06

정답 ④

해설 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

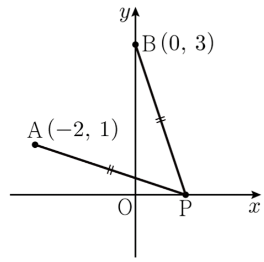
점 $(1, 2)$와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

07

정답 ④

해설 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이고



$\overline{AP}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(0-1)^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+5}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-0)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{a^2+9}$ 이므로

$a^2+4a+5=a^2+9$, $4a=4$

$\therefore a=1$

08

정답 ④

해설 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

$\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot a}{2+3}=4$, $\dfrac{2\cdot b+3\cdot(-6)}{2+3}=2$

$\dfrac{-4+3a}{5}=4$, $\dfrac{2b-18}{5}=2$

$-4+3a=20$, $2b-18=10$

따라서 $a=8$, $b=14$이므로

$a+b=8+14=22$

09 정답 ②

해설 $2x+y-7=0$ ……㉠

$3x+2y-12=0$ ……㉡

㉠×2−㉡ : $x=2,\ y=3$

∴ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$

구하는 직선의 기울기는 $-\dfrac{8}{5}$

$\left(\because\ y=-\dfrac{8}{5}x\text{ 와 평행하다.}\right)$

∴ 구하는 직선은 기울기 $-\dfrac{8}{5}$ 이고

$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$y-3=-\dfrac{8}{5}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{8}{5}x+\dfrac{31}{5}$

10 정답 $-\dfrac{3}{7}$

해설 직선 $(7k+4)x-y+5=0$의 기울기가 $7k+4$, y절편이 5이므로 직선 $(7k+4)x-y+5=0$과 y축에서 수직으로 만나는 직선은

$y=-\dfrac{1}{7k+4}x+5$

이 직선이 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$-\dfrac{5}{7k+4}+5=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{3}{7}$

11 정답 ④

해설 (ⅰ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

직선 l, m의 교점이 $(-1,\ 1)$이므로

직선 n도 $(-1,\ 1)$을 지나야 한다.

$-a-1+3=0\ \ \therefore\ a=2$

(ⅱ) 두 직선이 평행한 경우

$l\,/\!/\,n$ 일 때, $\dfrac{5}{a}=\dfrac{-2}{-1}\ \ \therefore\ a=\dfrac{5}{2}$

$m\,/\!/\,n$ 일 때, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{-1}{-1}\ \ \therefore\ a=1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times\dfrac{5}{2}\times1=5$

12 정답 ⑤

해설 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$\dfrac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|x-3y-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$

$|3x+y+2|=|x-3y-2|$

$3x+y+2=\pm(x-3y-2)$

$\therefore\ x+2y+2=0$ 또는 $2x-y=0$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$2x-y=0$

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
14문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 36~37p_문제연습2

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

01 정답 ③

해설 $x^2+y^2+12x-2y-12=0$을 표준형으로 고치면

$(x+6)^2+(y-1)^2=49$

따라서 중심의 좌표는 $(-6,\ 1)$, 반지름의 길이는 7이므로

$a=-6,\ b=1,\ r=7$

$\therefore a+b+r=-6+1+7=2$

02 정답 29

해설 $x^2+y^2-10x+4y=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=29$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{29}$ 이므로

원의 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{29})^2=29\pi$

$\therefore k=29$

03 정답 ④

해설 원의 중심은 두 점 A, B의 중점이므로

$\left(\dfrac{1+(-3)}{2},\ \dfrac{5+(-1)}{2}\right)=(-1,\ 2)$이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

04 정답 ②

해설 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$을 표준형으로 고치면

$(x-3)^2+(y+4)^2=4$

따라서 중심의 좌표는 $(3,\ -4)$, 반지름의 길이는 2이므로

$a=3,\ b=-4,\ r=2$

$\therefore a+b+r=3+(-4)+2=1$

05 정답 20

해설 $x^2+y^2+4x-8y=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=20$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 이므로

원의 넓이는 $\pi\cdot(2\sqrt{5})^2=20\pi$

$\therefore k=20$

06 정답 2

해설 $x-2y+1=0$에서 $x=2y-1$

이것을 $x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-9)=181>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

07 정답 ④

해설 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 $r=2$이고

구하는 직선의 기울기는 $m=-1$이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm2\sqrt{1+(-1)^2}$

$\therefore y=-x\pm2\sqrt{2}$

08 정답 -9

해설 접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면
원의 중심 $(-1, 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉
$2x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}$
원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면
$\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}=3,\ |k-6|=3\sqrt{5}$
$\therefore k=6\pm3\sqrt{5}$
따라서 구하는 y절편의 곱은
$(6+3\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})=-9$

09 정답 ⑤

해설 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 접점 (x_1, y_1)이 주어졌을 때
접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이므로
$1\cdot x+2\cdot y=5$
$\therefore x+2y-5=0$

10 정답 105

해설 원의 중심이 x축 위에 있으므로 $b=0$
원 $(x-a)^2+y^2=c$가 점 $(-1, 8)$을 지나므로
$(-1-a)^2+8^2=c$
$\therefore a^2+2a+65=c$ $\cdots$ ㉠
또, 원이 점 $(13, -6)$을 지나므로
$(13-a)^2+(-6)^2=c$
$\therefore a^2-26a+205=c$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5,\ c=100$
$\therefore a+b+c=105$

11 정답 12

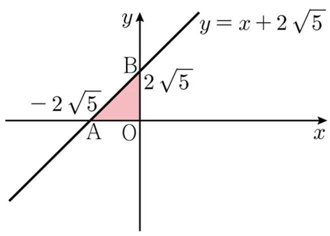
해설 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을
나타내기 위해서는 반지름 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$가 0보다
커야 하므로
$A^2+B^2-4C>0$
$36+16-4k>0$
$\therefore k<13$
따라서 조건을 만족하는 자연수 k의 개수는
12

12 정답 ④

해설 원의 중심 $(a, 3)$과
직선 $y=2x+2$, 즉 $2x-y+2=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2a-3+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a-1|}{\sqrt{5}}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면
$\frac{|2a-1|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5},\ |2a-1|>5$
$2a-1<-5$ 또는 $2a-1>5$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>3$
따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값이 아닌 것은 ④이다.

13 정답 10

해설 두 점 $(6, 4)$, $(0, -2)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{4-(-2)}{6-0}=1$이므로 직선 AB의 기울기는 1이고,
원 $x^2+y^2=10$에 접하므로 접선의 방정식은
$y=x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{1^2+1}$
$\therefore y=x\pm2\sqrt{5}$
이때 직선이 제2사분면에서 원에 접하므로 구하는 직선은
$y=x+2\sqrt{5}$
따라서 다음 그림과 같이
$\mathrm{A}(-2\sqrt{5}, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2\sqrt{5})$이므로
삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=10$



14 **정답** 900

해설 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때는 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다. 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{8-(-10)}{6-(0)}=3$이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm10\sqrt{3^2+1}$

$\therefore\ y=3x\pm10\sqrt{10}$, 즉 $3x-y\pm10\sqrt{10}=0$

점 B와 각 직선 사이의 거리를 구하면

$\dfrac{|10+10\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10\sqrt{10}+10}{\sqrt{10}}=10+\sqrt{10}$

$\dfrac{|10-10\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10\sqrt{10}-10}{\sqrt{10}}=10-\sqrt{10}$

점 B와의 거리가 더 먼 직선이

$3x-y+10\sqrt{10}=0$이므로 넓이가 최대가 될때의

삼각형 ABP의 높이는 $10+\sqrt{10}$ 이다.

이때 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+18^2}=\sqrt{360}=6\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot6\sqrt{10}\cdot(10+\sqrt{10})=30+30\sqrt{10}$

따라서 $a=30$, $b=30$이므로 $ab=900$

실시일자	-	유형별 학습	이름
18문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 48~49p_문제연습3

평행이동 ~ 대칭이동

01 정답 ①

해설 주어진 평행이동은 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하므로 $(2-2,\ -2+2)=(0,\ 0)$으로 이동한다.

02 정답 ⑤

해설 직선 $x+2y-3=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면

$(x-2)+2(y+3)-3=0$

$\therefore\ x+2y+1=0$

03 정답 ④

해설 원 $x^2+y^2=r^2$ $\cdots$ ㉠

위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}(x',\ y')$이라 하면

$x'=x+2,\ y'=y+3$이므로

$x=x'-2,\ y=y'-3$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x'-2)^2+(y'-3)^2=r^2$

점 $\mathrm{P}(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로 구하는 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$

04 정답 10

해설 점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(3,\ -4)$,

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+3)^2+(-4-4)^2}$

$=10$

05 정답 2

해설 점 $(-4,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4,\ -1)$

이 점이 직선 $ax+3y-5=0$ 위에 있으므로

$4a-3-5=0$

$\therefore\ a=2$

06 정답 -1

해설 점 $(6k,\ 7)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-6k,\ -7)$이고 점 P가 직선 $y=-2x-5k$ 위에 있으므로

$-7=(-2)\cdot(-6k)-5k$

즉, $7k=-7$

$\therefore\ k=-1$

07 정답 ④

해설 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

원의 방정식에 x 대신 $-y$를 y 대신 $-x$를 대입한다.

$(-y-1)^2+(-x+2)^2=1$

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

08 정답 ④

해설 주어진 방정식을 원점대칭하면

$(-x)^2+(-y)^2+2\cdot(-x)-6\cdot(-y)+6=0$

$\therefore\ x^2+y^2-2x+6y+6=0$

09 정답 ⑤

해설 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+4)^2=r^2$

이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-2)^2+(x+4)^2=r^2$

$\therefore (x+4)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로

$(-3+4)^2+(5-2)^2=r^2,\quad r^2=10$

$\therefore r=\sqrt{10}\ (\because r>0)$

10 정답 ②

해설 원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x\to -x$, $y\to -y$를 대입한다.

11 정답 4

해설 원 $(x+4)^2+(y+a)^2=13$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$(x-4)^2+(y-a)^2=13$

이 도형이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$(2-4)^2+(1-a)^2=13$, $(1-a)^2=9$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=4$

이때 a는 양수이므로 $a=4$

12 정답 ②

해설 주어진 두 원이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
두 원의 중심의 좌표가 각각
$(a,\ 2)$, $(b-2,\ 1)$이므로

$a=1$, $b-2=2$에서 $b=4$

$\therefore a+b=5$

13 정답 ④

해설 점 $(2,\ 4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 7)$이라 하면

$2+m=-1,\ 4+n=7$

$\therefore\ m=-3,\ n=3$

따라서 직선 $x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x+3)+a(y-3)+b=0$

$\therefore\ x+ay+3-3a+b=0$

이 직선이 직선 $x+4y-4=0$과 일치하므로

$a=4,\ 3-3a+b=-4$

$\therefore\ a=4,\ b=5$

$\therefore\ a+b=9$

14 정답 ①

해설 y축 방향으로 b만큼 이동시키면 $x^2+(y-b)^2=1$이 된다. 이 원과 $4x-3y-4=0$이 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 반지름과 같다.

$\dfrac{|-3\cdot b-4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$

$|-3b-4|=5$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{3}\ (\because b>0)$

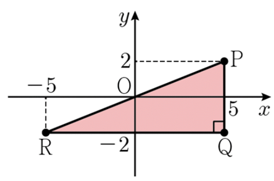
15 정답 20

해설 점 $\mathrm{P}(5,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q는
$\mathrm{Q}(5,\ -2)$

또, 점 $\mathrm{P}(5,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 R는
$\mathrm{R}(-5,\ -2)$

따라서 다음 그림에서 세 점 $\mathrm{P}(5,\ 2)$, $\mathrm{Q}(5,\ -2)$, $\mathrm{R}(-5,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 4=20$



16 **정답** 38

해설 직선 $4x+3y+k=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$4x-3y+k=0$
이 직선과 점 $(-3, 2)$ 사이의 거리가 4이므로
$\dfrac{|-12-6+k|}{\sqrt{4+(-3)^2}}=4$
$|k-18|=20$, $k-18=\pm20$
$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=38$
따라서 구하는 양수 k의 값은 38이다.

17 **정답** ③

해설 $f(-y,\ -x)=0$은 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때 꺾인점 $(0.8,\ 0.8)$은 $(-0.8,\ -0.8)$로 옮겨지므로 바르게 나타낸 것은 ③이다.

18 **정답** ④

해설 원 $(x+1)^2+(y-a)^2=25$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y+1)^2+(x-a)^2=25$
$\therefore\ (x-a)^2+(y+1)^2=25$
이 원의 중심의 좌표는 $(a,\ -1)$
따라서 두 점 $(a,\ -1)$, $(6,\ 5)$사이의 거리가 10이므로
$\sqrt{(a-6)^2+(-1-5)^2}=10$, $|a-6|=8$
$\therefore\ a=-2$ ($\because\ a<0$)