

| | | | |
|--------------|---|----|----|
| 실시일자 | - | 숙제 | 이름 |
| 30문제 / DRE수학 | | | |

개념+유형 개념편 – 수학Ⅱ (2025) 32~34p_과제

함수의 극한값의 계산

01 두 함수 $f(x), g(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \text{ 일 때},$$

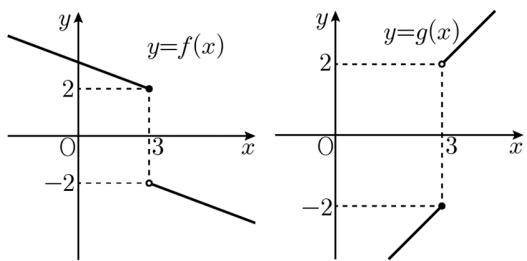
$\lim_{x \rightarrow 0} 6f(x)g(x)$ 의 값을 구하시오.

02 함수 $f(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 7$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \{-4f(x)\}$ 의 값을 구하시오.

03 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \beta$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = -2$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-g(x)+5}{3f(x)-1}$ 의 값은?
(단, $\alpha > \beta$)

- ① $\frac{3}{5}$
- ② $\frac{4}{5}$
- ③ 1
- ④ $\frac{6}{5}$
- ⑤ $\frac{7}{5}$

04 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x)$ 의 값을 구하시오.



05 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{4f(x) - 3g(x)\} = 3$ 을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) + 9g(x)}{-3f(x) + 6g(x)}$ 의 값을 구하시오.

06

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 있는데 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하면
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 도 존재한다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 존재하면
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 도 존재한다. (단, $g(x) \neq 0$)
- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하면 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 도 존재한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07

함수의 극한에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = 0$ 이다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$ 이다.
- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ 이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ

⑤ ㄴ, ㄷ

08

함수의 극한에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 는 존재하고, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\}$ 는 존재하지 않으면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 는 존재하지 않는다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + 2g(x)\}$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x)\}$ 가 모두 존재하면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 도 존재한다.
- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) - g(x)\} = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10

다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 6$ 을 만족시킬 때,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\{f(x)\}^2 - 14f(x) + 24}{x^2 - 4}$$

의 값을 구하시오.

11

[2022년 11월 고2 6번/3점]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{\{f(x)\}^2 + 3x^2}$$

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

09

함수 $f(x)$ 에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ 가 수렴하면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 가 수렴하면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이다.
- ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ 1 - \frac{f(x)}{x} \right\}$ 가 수렴하면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-2x}$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$
 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
 ⑤ 1

13

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{\sqrt{9x^2+x+2}-x}$$
의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{\sqrt{49x^2-x} + \sqrt{25x^2-1}}$$
의 값은?

- ① -2 ② -1
 ③ 0 ④ 1
 ⑤ 2

15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+16}} - \frac{1}{4} \right)$$
의 값은?

- ① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{3}{32}$ ③ $-\frac{1}{16}$
 ④ $-\frac{1}{32}$ ⑤ $\frac{1}{32}$

16

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+ax+b}=1$$
 일 때, 상수 a, b 에 대하여
 $b-a$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
 ④ 12 ⑤ 13

17

다음 등식을 만족하는 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=1$$

18

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+ax} - \sqrt{4x^2-ax})=1$$
 일 때,
 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

19

[2014년 4월 고3 문과 24번/3점]

$$\text{두 상수 } a, b \text{에 대하여 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} = 6$$

일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.**20**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 - bx} + 2x) = 3 \text{ 일 때, 상수 } a, b \text{에 대하여 } ab \text{의 값을 구하시오.}$$

21

[2016년 11월 고2 이과 13번/3점]

두 상수 a, b 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + a}{\sqrt{x+1} - 2} = b$$

일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

22

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{f(x)} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

만족시키는 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(5)$ 의 값을 구하시오.**23**다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 5} = 2, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = p$$

일 때, 실수 p 의 값은?

- | | | |
|------|------|------|
| ① 6 | ② 9 | ③ 12 |
| ④ 15 | ⑤ 18 | |

24다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$

(나) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$

(다) 방정식 $f(x) = \frac{1}{2}x$ 의 한 근이 2이다.

25

[2019년 11월 고3 문과 14번 변형]

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 최댓값은?

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 3$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{2x^2} = -\frac{9}{2}$$

- ① 15
④ 24

- ② 18
⑤ 27

- ③ 21

26

x 에 대한 다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$$

27

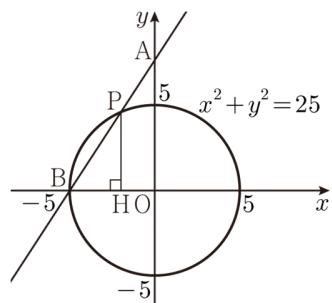
함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $|f(x)-3x| < 1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-6x+7}$ 의 값을 구하시오.

28

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $4x+1 < f(x) < 4x+7$ 을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}$ 의 값을 구하시오.

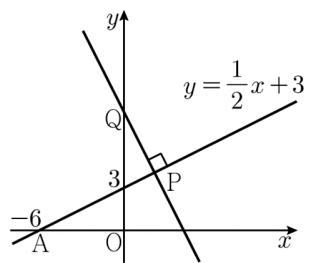
29

다음 그림과 같이 두 점 $A(0, t)$ ($t > 0$), $B(-5, 0)$ 을 지나는 직선과 원 $x^2 + y^2 = 25$ 의 교점 중에서 B가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 극한값 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} \cdot \overline{PH})$ 를 구하시오.



30

다음 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 위의
두 점 A(-6, 0), P(2t, t+3)에 대하여 점 P를 지나고
직선 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을
Q라 하자. 이때 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 값을 구하시오.



| | | | |
|--------------|---|----|----|
| 실시일자 | - | 숙제 | 이름 |
| 30문제 / DRE수학 | | | |

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) 32~34p_과제

함수의 극한값의 계산

정답

| | | |
|-------|--------|-------|
| 01 4 | 02 -28 | 03 ④ |
| 04 -4 | 05 4 | 06 ② |
| 07 ③ | 08 ③ | 09 ③ |
| 10 15 | 11 ① | 12 ② |
| 13 ③ | 14 ④ | 15 ② |
| 16 ③ | 17 -4 | 18 ② |
| 19 14 | 20 48 | 21 ⑤ |
| 22 12 | 23 ④ | 24 -4 |
| 25 ⑤ | 26 9 | 27 3 |
| 28 16 | 29 50 | 30 5 |

| | | | |
|--------------|---|----|----|
| 실시일자 | - | 숙제 | 이름 |
| 30문제 / DRE수학 | | | |

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) 32~34p_과제

함수의 극한값의 계산

01 정답 4

$$\begin{aligned}\text{해설 } \lim_{x \rightarrow 0} 6f(x)g(x) &= 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

02 정답 -28

$$\text{해설 } \lim_{x \rightarrow 0} \{-4f(x)\} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 \cdot 7 = -28$$

03 정답 ④

$$\begin{aligned}\text{해설 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \alpha, \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \beta \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \\ &= \alpha\beta \\ &= -2\end{aligned}$$

즉, α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \text{이므로}$$

$$\alpha = 2, \beta = -1 (\because \alpha > \beta)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-g(x)+5}{3f(x)-1} &= \frac{-\lim_{x \rightarrow 3} g(x)+5}{3\lim_{x \rightarrow 3} f(x)-1} \\ &= \frac{-\beta+5}{3\alpha-1} \\ &= \frac{-(-1)+5}{3 \cdot 2 - 1} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

04 정답 -4

$$\begin{aligned}\text{해설 } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -2, \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 2 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \\ &= -2 \cdot 2 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 2, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -2 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \\ &= 2 \cdot (-2) = -4 \\ \text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)g(x) \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) &= -4\end{aligned}$$

05 정답 4

$$\begin{aligned}\text{해설 } 4f(x) - 3g(x) &= h(x) \text{로 놓으면} \\ 3g(x) &= 4f(x) - h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x)+9g(x)}{-3f(x)+6g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x)+3\{4f(x)-h(x)\}}{-3f(x)+2\{4f(x)-h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20f(x)-3h(x)}{5f(x)-2h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20-3 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}}{5-2 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{20-3 \cdot 0}{5-2 \cdot 0} = 4 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = 0 \right)\end{aligned}$$

06 정답 ②

- 해설** ㄱ. [반례] $f(x) = x$, $g(x) = [x]$ 에 대하여
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ 이지만
 $\lim g(x)$ 은 존재하지 않는다. (거짓)
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha\beta$ (참)
ㄷ. [반례] $f(x) = [x]$, $g(x) = x$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x]$ 가 되어
극한값이 존재하지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

07 정답 ③

- 해설** ㄱ. [반례] $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ 일 때,
 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2}$ 이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ 이지만
 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = \infty$ 이다. (거짓)
ㄴ. [반례] $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x^2$ 일 때,
 $f(x)g(x) = 1$ 이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 이지만
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 1$ 이다. (거짓)
ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$ 이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

08 정답 ③

- 해설** ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재한다고 가정하고
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α , β 는 실수)로
놓으면
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 $= \alpha + \beta$
즉, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\}$ 가 존재하므로 가정에
모순이다. (참)
ㄴ. $f(x) + 2g(x) = h(x)$, $2f(x) + g(x) = k(x)$ 로
놓고 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + 2g(x)\} = \alpha$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x)\} = \beta$ (α , β 는 실수)라 하면
 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = \beta$
이때 $f(x) = \frac{2k(x) - h(x)}{3}$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2k(x) - h(x)}{3} = \frac{2\beta - \alpha}{3}$
즉, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다. (참)
ㄷ. [반례]
 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ x-1 & (x < 0) \end{cases}$,
 $g(x) = \begin{cases} x+2 & (x \geq 0) \\ x-2 & (x < 0) \end{cases}$ 이면
 $2f(x) - g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \{2f(x) - g(x)\} = 0$ 이지만
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 는 존재하지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 정답 ③

해설 ㄱ. $xf(x) = g(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ 가 수렴하므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \alpha$ (α 는 상수)
 $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ ∴ 참

ㄴ. [반례] $x \rightarrow \infty$ 일 때, $f(x) = 1$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 이다. ∴ 거짓

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{f(x)}{x}\right)$ 가 수렴하면
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{f(x)}{x}\right\} = 0$ 이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이다.

∴ 참
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 정답 15

해설 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 6$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)-2\} = 0$, 즉 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$
 \therefore (주어진 식) $= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x)-2}{x+2} \cdot \frac{f(x)-12}{x-2} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-2}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-12}{x-2}$
 $= 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$

11 정답 ①

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{\{f(x)\}^2+3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2 + 3}$$

$$= \frac{2-0}{3^2+3} = \frac{1}{6}$$

12 정답 ②

해설 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{(-t)^2+(-t)-2(-t)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t+2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+2}} \\ &= \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(다른 풀이)

$$\begin{aligned} & x < 0 \text{ 일 때, } \sqrt{x^2} = x = -x \text{이므로} \\ & \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \\ & \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2} \\ &= \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

13 정답 ③

해설 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{\sqrt{9x^2+x+2}-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+3}-3t}{\sqrt{9t^2-t+2}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}}-3}{\sqrt{9-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}}+1} \\ &= \frac{1-3}{3+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

14 정답 ④

해설

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{\sqrt{49x^2 - x} + \sqrt{25x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{\sqrt{49 - \frac{1}{x}} + \sqrt{25 - \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{49} + \sqrt{25}} = 1 \end{aligned}$$

15 정답 ②

해설

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+16}} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{x} \cdot \frac{4 - \sqrt{x+16}}{4\sqrt{x+16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{4 - \sqrt{x+16}}{\sqrt{x+16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{(4 - \sqrt{x+16})(4 + \sqrt{x+16})}{(\sqrt{x+16})(4 + \sqrt{x+16})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{-x}{(\sqrt{x+16})(4 + \sqrt{x+16})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{(\sqrt{x+16})(4 + \sqrt{x+16})} \\ &= \frac{-3}{4(4+4)} = -\frac{3}{32} \end{aligned}$$

16 정답 ③

해설

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + ax + b} = 1$$

에서 $x \rightarrow 3$ 일 때
(분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로
(분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로 $9 + 3a + b = 0$
 $\therefore b = -3a - 9$ ①

①을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + ax + b} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 + ax - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+a+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+a+3} \\ &= \frac{1}{a+6} = 1 \end{aligned}$$

따라서 $a = -5$, $b = 6$ 이므로
 $b - a = 6 - (-5) = 11$

17 정답 -4

해설

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + ax + b} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분자) } \rightarrow 0 \text{이고} \\ & 0 \text{이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) } \rightarrow 0 \text{이어야 한다.} \\ & \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0 \text{에서} \\ & 4 + 2a + b = 0 \\ & \therefore b = -2a - 4 \quad \dots \textcircled{1} \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + ax + b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + ax - 2a - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+a+2} \\ &= \frac{4}{a+4} \\ & \text{따라서 } \frac{4}{a+4} = 1 \text{에서 } a = 0 \text{이므로} \\ & \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -4 \\ & \therefore a+b = -4 \end{aligned}$$

18 정답 ②

해설

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + ax} - \sqrt{4x^2 - ax}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + ax} - \sqrt{4x^2 - ax})(\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt{4x^2 - ax})}{\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt{4x^2 - ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt{4x^2 - ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{4 + \frac{a}{x}} + \sqrt{4 - \frac{a}{x}}} \\ &= \frac{2a}{2+2} = \frac{a}{2} \\ & \text{즉, } \frac{a}{2} = 1 \quad \therefore a = 2 \end{aligned}$$

19 정답 14

해설 함수의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b} = 6$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a} - b) = 0$$

$$\therefore b = \sqrt{a-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{a-2})}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a} + \sqrt{a-2}) = 2\sqrt{a-2} = 6$$

$$\therefore a = 11, b = 3$$

$$\text{따라서 } a+b = 14$$

20 정답 48

해설 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 - bx} + 2x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{at^2 + bt} - 2t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{at^2 + bt} - 2t)(\sqrt{at^2 + bt} + 2t)}{\sqrt{at^2 + bt} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a-4)t^2 + bt}{\sqrt{at^2 + bt} + 2t} \quad \dots \odot$$

$$\text{①의 극한값이 존재하려면 } a-4 = 0 \quad \therefore a = 4$$

$a = 4$ 를 ①에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bt}{\sqrt{4t^2 + bt} + 2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{4 + \frac{b}{t}} + 2} = \frac{b}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{4} = 3 \text{이므로 } b = 12$$

$$\therefore ab = 4 \cdot 12 = 48$$

21 정답 ⑤

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + a}{\sqrt{x+1} - 2} = b \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1} - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + a) = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x+1} + 2)$$

$$= 8$$

$$\therefore b = 8$$

$$\text{따라서 } a+b = 11$$

22 정답 12

$$\text{해설 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{f(x)} = 3 \text{이려면}$$

$f(x)$ 는 이차식이어야 한다.

이때 이차항의 계수를 a 라고 하면

$$\frac{2}{a} = 3 \text{에서 } a = \frac{2}{3}$$

따라서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 $\frac{2}{3}$ 인 이차식이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)} = \frac{1}{2} \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때,}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{에서 } f(2) = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)(x+k)$ 로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{\frac{2}{3}(x-2)(x+k)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)}{2(x+k)}$$

$$= \frac{3}{2(2+k)} = \frac{1}{2}$$

$$6 = 2(2+k), 2+k = 3$$

$$\therefore k = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3}(x-2)(x+1) \text{이므로}$$

$$f(5) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 12$$

23 정답 ④

해설 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 5} = 2$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차식이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = p \text{이므로 } f(-1) = 0, \\ f(2) = 0 \text{이다.}$$

따라서 $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-a)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x-2)(x-a)}{(x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x-2)(x-a) = 2 \cdot (-3) \cdot (-1-a) = 3 \\ \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 15 = p$$

24 정답 -4

해설 (가)에서 $f(x)$ 는 이차 이하의 함수임을 알 수 있다.

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0$$

$f(x) = (ax+b)(x-1)$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax+b)(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = a+b = 4 \quad \dots \odot$$

$$(다)에서 f(2) = 1 이므로 2a+b = 1$$

$\dots \odot$

\odot 을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 7$

따라서 $f(x) = (-3x+7)(x-1)$ 이므로

$$f(3) = (-2) \cdot 2 = -4$$

25 정답 ⑤

해설 조건 (가), (나)에 의하여

$$f(x)g(x) = x^2(3x+a) \text{ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.}$$

조건 (나)에 의하여 $a = -9$ 이므로

$$f(x)g(x) = 3x^2(x-3)$$

이때 $f(3)$ 가 최대가 되는 $f(x)$ 는

$f(x) = 3x^2$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(3) = 27$$

26 정답 9

해설 조건 (가)에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 2, 이차항의 계수가 2인 삼차식이다.

또, 조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$f(x) = 2x^3 + 2x^2 + ax$ (a 는 상수)라 하면

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x^2 + 2x + a)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 2x + a) \\ = a$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x$ 이므로 구하는 나머지는 $f(1) = 2 + 2 + 5 = 9$

27 정답 3

해설 $|f(x) - 3x| < 1$ 에서 $-1 < f(x) - 3x < 1$

$$\therefore 3x - 1 < f(x) < 3x + 1$$

$3x - 1 > 0$, 즉 $x > \frac{1}{3}$ 일 때 각 변을 제곱하면

$$(3x-1)^2 < \{f(x)\}^2 < (3x+1)^2$$

모든 실수 x 에 대하여 $3x^2 - 6x + 7 > 0$ 이므로

각 변을 $3x^2 - 6x + 7$ 로 나누면

$$\frac{(3x-1)^2}{3x^2 - 6x + 7} < \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2 - 6x + 7} < \frac{(3x+1)^2}{3x^2 - 6x + 7}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)^2}{3x^2 - 6x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2}{3x^2 - 6x + 7} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x^2 - 6x + 7} = 3$$

28 정답 16

해설 $x > -1$ 에서

$$4x+1 < f(x) < 4x+7 \text{의 각 변을 제곱하면}$$

$$(4x+1)^2 < \{f(x)\}^2 < (4x+7)^2$$

각 변을 $x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{(4x+1)^2}{x^2+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1} < \frac{(4x+7)^2}{x^2+1}$$

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+7)^2}{x^2+1} = 16 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1} = 16$$

29 정답 50

해설 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{t}{5}(x+5)$

점 P는 직선 $y = \frac{t}{5}(x+5)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 25$ 의

교점이므로 점 P의 y좌표를 구하면

$$\left(\frac{5y}{t} - 5\right)^2 + y^2 = 25, \frac{25}{t^2}y^2 - \frac{50}{t}y + y^2 = 0$$

$$\therefore y = \frac{50t}{t^2 + 25} (\because y \neq 0)$$

$$\text{따라서 } \overline{OA} = t, \overline{PH} = \frac{50t}{t^2 + 25} \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} \cdot \overline{PH}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \cdot \frac{50t}{t^2 + 25} \right) = 50$$

30 정답 5

$$\text{해설 } \overline{AP}^2 = (2t+6)^2 + (t+3)^2 = 5t^2 + 30t + 45$$

$$\text{직선 PQ의 방정식은 } y - (t+3) = -2(x-2t),$$

$$\therefore y = -2x + 5t + 3$$

$$\text{따라서 Q}(0, 5t+3) \text{이므로}$$

$$\overline{AQ}^2 = (-6)^2 + (5t+3)^2 = 25t^2 + 30t + 45$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{25t^2 + 30t + 45}{5t^2 + 30t + 45} = 5$$