# 2. 함수의 연속

( )반 ( )번
이름 ( )

## 1.

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+1 & (x<1) \\ 7 & (x=1) \\ -3x+b & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? 1)
(단, $a$와 $b$는 상수이다.)
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

## 2.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]2)

(가) $x \geq -\dfrac{1}{2}$인 모든 실수 $x$에 대하여

$$(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=x^2+ax+b$$

이다. (단, $a$와 $b$는 상수이다.)
(나) $f(4)=2$

① $-7$ ② $-3$ ③ $1$ ④ $5$ ⑤ $9$

## 3.

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} & (x \neq 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$가

$x=2$에서 연속일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오. 3)

## 4.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$(x-1)f(x)=x^3+ax+b$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $a\times b$의 값은? 4)
(단, $a$, $b$는 상수이다.)
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

## 5.

$f(x)$가 다항함수일 때, 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-x^2}{x-1} & (x \neq 1) \\ k & (x=1) \end{cases}$$

로 정의하자. $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$일 때, $k+f(3)$의 값을 구하시오.5)
(단, $k$는 상수)

**6.**

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\neq 1)\\ 1 & (x=1)\end{cases},\quad g(x)=2x+k$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 $k$의 값은? 6)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

**7.**

함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

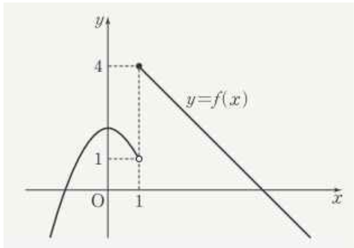
$$g(x)=\begin{cases}f(x+1) & (x\leq 0)\\ f(x-1) & (x>0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은?7)

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

**8.**

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=x^2+ax-9$일 때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$의 값은? 8)




① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

**9.**

두 함수

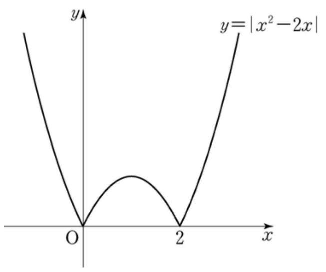
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (x<1)\\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 1)\end{cases},\quad g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) 9)

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

## 10.

실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 $t$에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.10)

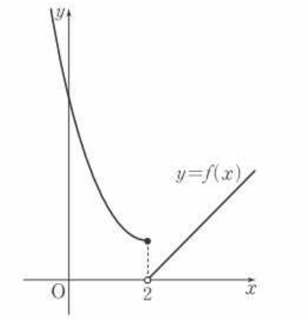



## 11.

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5 & (x\le 2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases}$$

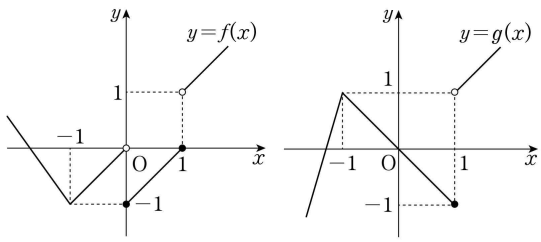
와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(5)$의 값은? 11)




① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

## 12.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.




<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 12)

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=-1$

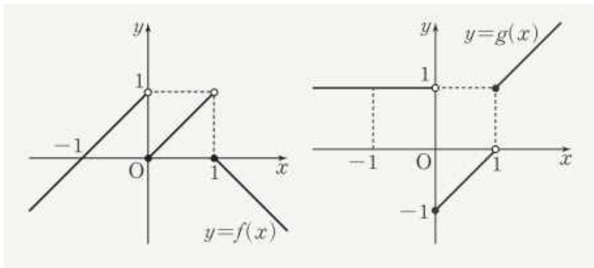
ㄴ. $f(1)g(1)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

## 13.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 13)




< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$

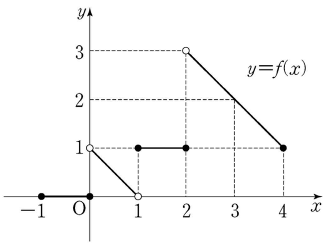
ㄴ. $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

### 14.

닫힌구간 $[-1,\ 4]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.




<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [14)]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x) < \lim_{x\to 1+} f(x)$

ㄴ. $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right)=1$

ㄷ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

### 15.

함수

$$f(x)=\begin{cases} x(x-2) & (x\le 1) \\ x(x-2)+16 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$의 값을 구하시오. [15)]

### 16.

-1이 아닌 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x\le 0) \\ 2x+a & (x>0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-1)$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 $a$의 값은? [16)]

① $-\frac{7}{2}$　② -3　③ $-\frac{5}{2}$　④ -2　⑤ $-\frac{3}{2}$

### 17.

5 이하의 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1$$

$$g(x)=\begin{cases} x+b & (1<x<3) \\ 7-b & (x\le 1,\ x\ge 3) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [17)]

**18.**

실수 $m$에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

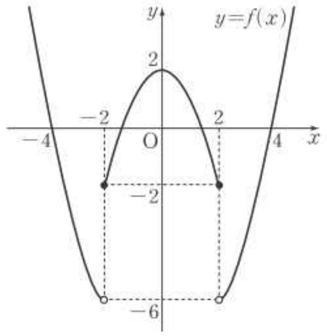
$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. 18)

**19.**

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2)\\ -x^2+2 & (|x|\le 2)\end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.




함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 $k$의 값의 곱은? 19)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

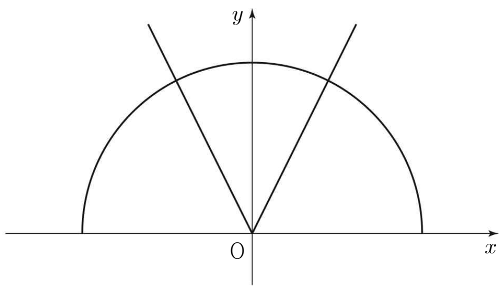
**20.**

두 집합

$$A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=5,\ y\ge 0\},$$
$$B=\{(x,\ y)\,|\,y=2|x|\}$$

에 대하여 좌표평면에서 집합 $A\cup B$가 나타내는 도형을 $S$라 하자. 양의 실수 $m$에 대하여 직선 $y=m(x+5)$가 도형 $S$와 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 할 때, 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(m)$은 $m=\alpha_1$, $m=\alpha_2$, $m=\alpha_3$에서만 불연속이다. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$의 값은?[20] [4점]

① $\frac{17}{6}$　② $3$　③ $\frac{19}{6}$　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{7}{2}$




**21.**

최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\[2mm] 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3}g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [21] [4점]

## 〈정답 및 해설〉

1) [정답] ④
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x^2+ax+1)=a+3$
$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-3x+b)=-3+b$
$f(1)=7$
이므로 $a+3=-3+b=7$
따라서 $a=4,\ b=10$이므로 $a+b=4+10=14$

2) 14. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기
조건 (가)의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$0\times f(0)=b$에서 $b=0$
조건 (가)의 식의 양변에 $x=4$를 대입하면
$2f(4)=16+4a$
조건 (나)에 의하여 $4=16+4a$에서 $a=-3$
그러므로 $x\ge -\frac{1}{2}$이고 $x\ne 0$인 모든 실수 $x$에
대하여 $f(x)=\frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2}$$
$$=\frac{-3\times 2}{2}=-3$$

3) [정답] 32
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=2$에서 $x\to 2$일 때
(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}+b)=2a+b=0$에서
$b=-2a$
$\therefore\ \lim_{x\to 2}f(x)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}$$
$$=2$$
따라서 $a=8,\ b=-16$이므로
$2a-b=32$

4) [정답] ①

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{x-1} & (x\ne 1)\\ 4 & (x=1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=4$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0,\ b=-a-1$
$b=-a-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+a+1)$$
$$=3+a=4$$
따라서 $a=1,\ b=-2$이므로 $a\times b=1\times(-2)=-2$

5) 정답 15
$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=2$ 이므로
다항함수 $f(x)=x^2+2x+a$ 꼴이다.
함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+a}{x-1}=k$ 이어야 한다.
$x\to 1$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값은 일정한 값이므로
(분자)$\to 0$ 이어야 한다.
$2\times 1+a=0$　　　$\therefore\ a=-2$
$f(x)=x^2+2x-2$ 이고 $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}=2$
$\therefore\ k=2$
$\therefore\ k+f(3)=2+13=15$

6) [정답] ①
함수 $f(x)$가 $x\ne 1$인 모든 실수에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}f(x)\times\lim_{x\to 1}g(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\times\lim_{x\to 1}(2x+k)=0$$
$f(1)g(1)=1\times(2+k)=2+k$
따라서 $2+k=0$이므로 $k=-2$

7) ②
함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$ ……㉠

$x+1=t$로 놓으면 $x\to 0-$일 때, $t\to 1-$이므로
$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-}\{f(x+1)\}^2=\lim_{t\to 1-}\{f(t)\}^2=a^2$
$x-1=s$로 놓으면 $x\to 0+$일 때, $s\to -1+$
이므로

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x-1)\}^2=\lim_{s\to -1+}\{f(s)\}^2=(2+a)^2$

또, $\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$

㉠에 대입하면

$a^2=(2+a)^2$, $4a+4=0$

$\therefore\ a=-1$

8) [정답] ③

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\times\lim_{x\to 1-}g(x)$
$=1\times(1+a-9)=a-8$

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)\times\lim_{x\to 1+}g(x)$
$=4\times(1+a-9)=4(a-8)$

$f(1)g(1)=4(a-8)$

따라서 $a-8=4(a-8)$이므로 $a=8$

9) [정답] ①

함수 $f(x)$가 $x\neq 1$인 모든 실수에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하고

$\lim_{x\to 1-}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1-}(2x^3+ax+b)=0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-}(2x^3+ax+b)=2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}\dfrac{2x^3+ax-a-2}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1-}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1-}(2x^2+2x+a+2)=a+6$

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}\dfrac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}=0$

$f(1)g(1)=\dfrac{1}{3}(2+a-a-2)=0$

이므로 $a+6=0$, 즉 $a=-6$

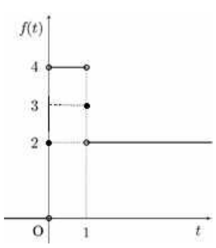
$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 $b-a=4-(-6)=10$

10) 8

함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$




이고 $t=0$과 $t=1$에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$과 $t=1$에서 연속이므로

$$\begin{cases}\lim_{t\to 0+}f(t)g(t)=4g(0)\\ \lim_{t\to 0-}f(t)g(t)=0\\ f(0)g(0)=2g(0)\end{cases}$$

$4g(0)=0=2g(0)$

$\therefore\ g(0)=0$

$$\begin{cases}\lim_{t\to 1+}f(t)g(t)=2g(1)\\ \lim_{t\to 1-}f(t)g(t)=4g(1)\\ f(1)g(1)=3g(1)\end{cases}$$

$2g(1)=4g(1)=3g(1)$

$\therefore\ g(1)=0$

$\therefore\ g(t)=t(t-1)$

$\therefore\ f(3)+g(3)=2+6=8$

11) [정답] ③

함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 불연속이고 이차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 2+}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2+}g(x)=0$이어야 한다.

따라서 $g(2)=0$이므로 이차함수 $g(x)$를

$g(x)=(x-2)(x+a)$ ($a$는 실수)라 하자.

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{x^2-4x+5}=\dfrac{g(2)}{1}=0$

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=\dfrac{g(2)}{1}=0$이므로 $\lim_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$이고

$\lim_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\dfrac{(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x+a)=2+a=0$

따라서 $a=-2$이므로 $g(x)=(x-2)^2$이고

$g(5)=3^2=9$

12) [정답] ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-}g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\times\lim_{x\to 1-}g(x)=0\times(-1)=0$

(거짓)

ㄴ. $f(1)=0$, $g(1)=-1$이므로 $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$

(참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+}g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)\times\lim_{x\to 1+}g(x)=1\times1=1$

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=0$에서

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$이므로

극한값 $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

13) [정답] ⑤

ㄱ. $x\to 0+$일 때 $f(x)\to 0$이므로 $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-}g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\times\lim_{x\to 1-}g(x)=1\times0=0$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=0$ (ㄴ에서)

(ⅱ) $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+} g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)\times\lim_{x\to 1+} g(x)=0\times 1=0$

(ⅲ) $f(1)g(1)=0\times 1=0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에 의하여 $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14) ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=0 < \lim_{x\to 1+} f(x)=1$

ㄴ. $\frac{1}{t}=s$라 하면 $t\to\infty$일 때 $s\to 0$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{s\to 0} f(s)=1$

ㄷ. $f(f(3))=f(2)=1$

$\lim_{x\to 3-} f(f(x))=1$, $\lim_{x\to 3+} f(f(x))=3$

$f(f(3))=\lim_{x\to 3-} f(f(x))\neq\lim_{x\to 3+} f(f(x))$

따라서 $x=3$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다

15) [정답] 14

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)\{f(x)-a\}$

$=\lim_{x\to 1-} f(x)\times\lim_{x\to 1-}\{f(x)-a\}$

$=\lim_{x\to 1-} x(x-2)\times\lim_{x\to 1-}\{x(x-2)-a\}$

$=-(-1-a)=1+a$

$\lim_{x\to 1+} f(x)\{f(x)-a\}$

$=\lim_{x\to 1+} f(x)\times\lim_{x\to 1+}\{f(x)-a\}$

$=\lim_{x\to 1+}\{x(x-2)+16\}\times\lim_{x\to 1+}\{x(x-2)+16-a\}$

$=15(15-a)=225-15a$

$f(1)\{f(1)-a\}=-(-1-a)=1+a$

따라서 $1+a=225-15a$이므로 $a=14$

16) [정답] ④

$$f(x-1)=\begin{cases}-x & (x\le 1)\\ 2x-2+a & (x>1)\end{cases}$$

$$g(x)=f(x)f(x-1)=\begin{cases}(-x-1)(-x) & (x\le 0)\\ (2x+a)(-x) & (0<x\le 1)\\ (2x+a)(2x-2+a) & (x>1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=1$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) $x=0$일 때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)=\lim_{x\to 0+} g(x)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $a$의 값에 관계없이 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $x=1$일 때

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1-} g(x)=g(1)=\lim_{x\to 1+} g(x)$이어야 하므로

$-(a+2)=(a+2)a$, $(a+1)(a+2)=0$

$a=-2$ ($\because a\neq -1$)

따라서 구하는 $a$의 값은 -2이다.

17) [정답] 7

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$과 $x=3$에서 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)$

$=(a^2-3a+2)(7-b)$

$=(a-1)(a-2)(7-b)$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=(a^2-3a+2)(1+b)$

$=(a-1)(a-2)(1+b)$

$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)$

이므로

$(a-1)(a-2)(7-b)=(a-1)(a-2)(1+b)$에서

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $b=3$

(ⅱ) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때

$f(3)g(3)=\lim_{x\to 3+} f(x)g(x)$

$=(a^2-7a+10)(7-b)$

$=(a-2)(a-5)(7-b)$

$\lim_{x\to 3-} f(x)g(x)=(a^2-7a+10)(3+b)$

$=(a-2)(a-5)(3+b)$

$f(3)g(3)=\lim_{x\to 3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)g(x)$

이므로

$(a-2)(a-5)(7-b)=(a-2)(a-5)(3+b)$에서

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $b=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a=1$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이고,

$x=3$에서도 연속이기 위해서는 $b=2$

$a=2$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서

모두 연속이므로 $b=1, 2, 3, 4, 5$

$a=3$ 또는 $a=4$인 경우

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 모두

연속이 되도록 하는 $b$의 값은 존재하지 않는다.

$a=5$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이고,

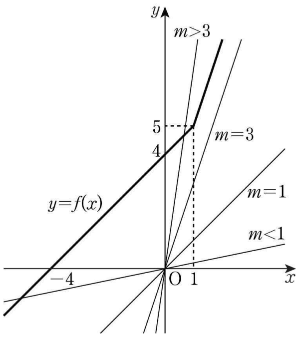
$x=1$에서도 연속이기 위해서는 $b=3$

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a, b)$는 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(5, 3)$이고 그 개수는 7이다.

18) [정답] 8

직선 $y=mx$는 실수 $m$의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ 3x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.




그러므로 함수 $g(m)$은

$$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.
그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+} g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=\lim_{x\to1+} g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ⅱ) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+} g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=\lim_{x\to3+} g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

19) [정답] ③

(ⅰ) $k=1$인 경우

$\lim_{x\to2-} f(x)f(x)=(-2)\times(-2)=4$

$\lim_{x\to2+} f(x)f(x)=(-6)\times(-6)=36$

$\lim_{x\to2-} f(x)f(x)\ne\lim_{x\to2+} f(x)f(x)$

$\lim_{x\to2} f(x)f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ⅱ) $k=-1$인 경우

$\lim_{x\to2-} f(x)f(-x)=(-2)\times(-2)=4$

$\lim_{x\to2+} f(x)f(-x)=(-6)\times(-6)=36$

$\lim_{x\to2-} f(x)f(-x)\ne\lim_{x\to2+} f(x)f(-x)$

$\lim_{x\to2} f(x)f(-x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ⅲ) $k\ne-1$, $k\ne1$인 경우

함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to2-} f(x)f(kx)=\lim_{x\to2+} f(x)f(kx)=f(2)f(2k)$이어야 한다.

$-2f(2k)=-6f(2k)=-2f(2k)$

따라서 $f(2k)=0$

$x=-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$에서 $f(x)=0$이므로 $f(2k)=0$에서 $2k=-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$

따라서 $k=-2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 상수 $k$의 값의 곱은

$(-2)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=2$

20) [정답] $\frac{17}{6}$

직선 $y=m(x+5)$는 기울기가 $m(m>0)$이고 점 $(-5,0)$을 지나는 직선이다.

함수 $y=2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=5(y\ge0)$은 두 점 $(-1,2)$, $(1,2)$에서 만난다.

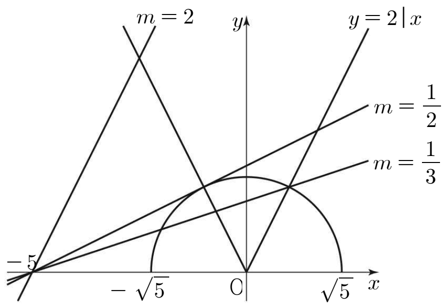
직선 $y=m(x+5)$가 점 $(1,2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{3}$

직선 $y=m(x+5)$가 점 $(-1,2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{2}$

이때 두 점 $(0,0)$, $(-1,2)$를 지나는 직선의 기울기가 $-2$이므로

곡선 $x^2+y^2=5(y\ge0)$ 위의 점 $(-1,2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

그러므로 직선 $y=\frac{1}{2}(x+5)$는 곡선 $x^2+y^2=5(y\ge0)$ 위의 점 $(-1,2)$에서의 접선이다.




(ⅰ) $0<m<\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=4$

(ⅱ) $m=\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=3$

(ⅲ) $\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$일 때, $f(m)=4$

(ⅳ) $\frac{1}{2}\le m<2$일 때, $f(m)=2$

(ⅴ) $m\ge2$일 때, $f(m)=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여

$$f(m)=\begin{cases} 1 & (m \geq 2) \\ 2 & \left(\frac{1}{2} \leq m < 2\right) \\ 3 & \left(m=\frac{1}{3}\right) \\ 4 & \left(0 < m < \frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0, \infty)$에서

함수 $f(m)$은 $m=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{2}$, $m=2$에서만

불연속이므로 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2=\frac{17}{6}$

21) [정답] 20

$\lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3)\neq0$일 때,

$x=3$에 가까운 $x$의 값에 대하여 $f(x)\neq0$이므로

$g(x)=\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to3} g(x)=g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x\neq3$인 $x$의 값에 대하여

$f(x)\neq0$

이때,

$\lim_{x\to3} g(x)$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$ ----㉡

위에서 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

($k$는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to3} g(x)$

$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$

$=\frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$

$=\frac{6-k}{k-3}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$\frac{6-k}{k-3}=3-1$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5)\neq0$이므로

$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$=\frac{5\times4\times2\times\{2\times1\times(-1)+1\}}{2\times1\times(-1)}$

$=20$