QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

실시일자	2025.09.15	유형별 학습	이름
100문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 신사고 26~28,41~47,68~70p

함수의 극한 ~ 도함수

빠른정답

01 ③	02 2	03 1
04 -9	05 -30	06 4
07 2	08 -1	09 0
10 0	11 0	12 0
13 0	14 7	15 -3
16 0	17 ③	18 ①
19 $\frac{3}{2}$	20 $\frac{2}{3}$	21 3
22 4	23 1	24 2
25 3	26 0	27 ④
28 ②	29 5	30 $-\frac{1}{2}$
31 ①	32 1	33 50
34 ①	35 ⑤	36 ①
37 ③	38 ②, ④, ⑤	39 ④
40 ③	41 ⑤	42 ②
43 ③	44 ①	45 ②
46 2개	47 ⑤	48 ①
49 ③	50 4개	51 $\frac{4}{5}$
52 $\frac{1}{250}$	53 $-\frac{5}{2}$	54 ②
55 ⑤	56 ③	57 ③
58 3	59 2	60 -6
61 4	62 0	63 -1
64 5	65 ①	66 $\frac{1}{2}$
67 6	68 ①	69 4개
70 ④	71 ④	72 1
73 7	74 3	75 1
76 -2	77 3	78 11
79 0	80 ④	81 11
82 61	83 5	84 5
85 ②	86 ①	87 ③
88 21	89 ④	90 10
91 ①	92 ④	93 64
94 $\frac{1}{6}$	95 ③	96 ③
97 11	98 1	99 ③
100 ③		

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

실시일자	2025.09.15	유형별 학습	이름
100문제 / DRE수학			

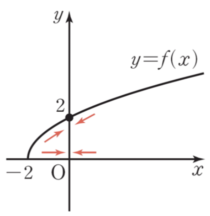
교과서 (수학Ⅱ) - 신사고 26~28,41~47,68~70p

함수의 극한 ~ 도함수

01 정답 ③

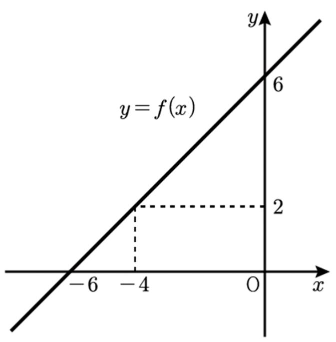
해설 $f(x)=\sqrt{2x+4}$ 로 놓으면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x의 값이 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to0}\sqrt{2x+4}=2$$



02 정답 2

해설 $f(x)=x+6$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

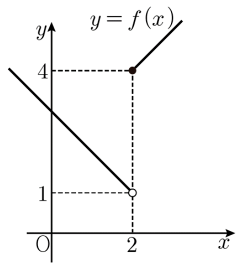


x의 값이 -4가 아니면서 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-4}(x+6)=2$$

03 정답 1

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x\to2-}f(x)=1$$

04 정답 -9

해설
$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}&=\lim_{x\to2}f(x)-\lim_{x\to2}g(x)\\&=-5-4\\&=-9\end{aligned}$$

05 정답 -30

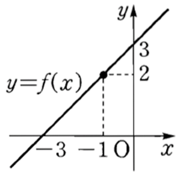
해설 $\lim_{x\to0}\{-5f(x)\}=-5\lim_{x\to0}f(x)=-5\cdot6=-30$

06 정답 4

해설 $\lim_{x\to-3}4=4$

07 정답 2

해설 $f(x)=x+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2$



08 정답 -1

해설 $\lim\limits_{x\to 2}(3-2x)=3-2\cdot 2=-1$

09 정답 0

해설 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to 5}f(x)=0$

10 정답 0

해설 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

11 정답 0

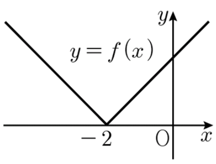
해설 $\lim\limits_{x\to 5+}|x-5|=\lim\limits_{x\to 5+}(x-5)=0$

$\lim\limits_{x\to 5-}|x-5|=\lim\limits_{x\to 5-}(-x+5)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 5}|x-5|=0$

12 정답 0

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore \lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$

13 정답 0

해설 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$

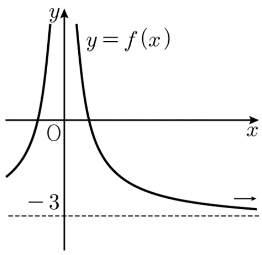
14 정답 7

해설 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=2\cdot 1+5=7$

15 정답 -3

해설 $f(x)=-3+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

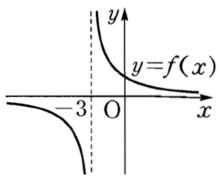
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3+\dfrac{1}{x^2}\right)=-3$



16 정답 0

해설 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$



17 정답 ③

해설 $x^5-4x-24$를 인수정리에 의한 조립제법으로 인수분해하면

$x^5-4x-24=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+12)$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^5-4x-24}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+12)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^4+2x^3+4x^2+8x+12)$$
$$=16+16+16+16+12$$
$$=76$$

18 정답 ①

해설
$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+3}=\frac{2}{3}$$

19 정답 $\frac{3}{2}$

해설
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(3x-2)}{2x^2+4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-6}{2x^2+4x-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}}{2+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

20 정답 $\frac{2}{3}$

해설
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(2x+3)}{3x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+3}{3x^2+x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

21 정답 3

해설
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=3$$

22 정답 4

해설 $\lim_{x\to1-}f(x)=0,\ \lim_{x\to-1}f(x)=4$

$\therefore\ \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to-1}f(x)=4$

23 정답 1

해설 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=1$

즉, $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=1$

24 정답 2

해설 $\lim_{x\to0-}f(x)=2,\ \lim_{x\to0+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=2$

25 정답 3

해설 x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)=3$

x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 2-} f(x)=3$

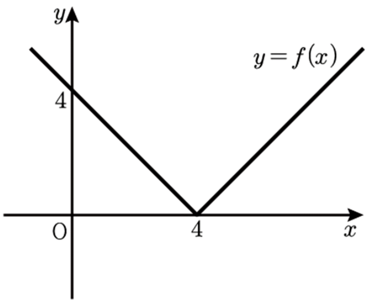
즉, $\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=3$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=3$

26 정답 0

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$\lim_{x \to 4} f(x)=0$



27 정답 ④

해설 ④ $\lim_{x \to 2} f(x)=1$

28 정답 ②

해설 $\lim_{x \to 3} f(x)=a$라 하면

$$\lim_{x \to 3}\frac{x^2-9}{\{f(x)\}^2-16}$$
$$=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{\{f(x)-4\}\{f(x)+4\}}$$
$$=\lim_{x \to 3}\frac{x+3}{\frac{f(x)-4}{x-3}\cdot\{f(x)+4\}}$$
$$=\frac{\lim_{x \to 3}(x+3)}{\lim_{x \to 3}\frac{f(x)-4}{x-3}\cdot\lim_{x \to 3}\{f(x)+4\}}$$
$$=\frac{6}{2(a+4)}$$

이때 $a=4$이므로 $\frac{6}{2(a+4)}=\frac{3}{8}$

$\therefore \lim_{x \to 3}\frac{x^2-9}{\{f(x)\}^2-16}=\frac{3}{8}$

29 정답 5

해설 $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-2a\right)=0$이므로

$\sqrt{b}-2a=0 \quad \therefore b=4a^2$ $\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-2a}{\sqrt{a+3x}-\sqrt{a-3x}}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{(x^2+ax)\left(\sqrt{a+3x}+\sqrt{a-3x}\right)}{6x\left(\sqrt{x^2+ax+4a^2}+2a\right)}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{(x+a)\left(\sqrt{a+3x}+\sqrt{a-3x}\right)}{6\left(\sqrt{x^2+ax+4a^2}+2a\right)}$$
$$=\frac{2a\sqrt{a}}{24a}=\frac{\sqrt{a}}{12}$$

$\frac{\sqrt{a}}{12}=\frac{1}{12}$에서 $a=1$이므로

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=5$

30 정답 $-\frac{1}{2}$

해설 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+4x}{\sqrt{16x^2+9x+16}-2x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+4}-4t}{\sqrt{16t^2-9t+16}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}-4}{\sqrt{16-\frac{9}{t}+\frac{16}{t^2}}+2}$$

$$=\frac{1-4}{4+2}=-\frac{1}{2}$$

31 정답 ①

해설 임의의 실수 x에 대하여 $3x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $3x^2+1$로 나누면

$$\frac{6x^2-3}{3x^2+1}\le f(x)\le\frac{6x^2+5}{3x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5}{3x^2+1}=2$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

32 정답 1

해설 $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=2f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{-7f(x)+3g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-f(x)+2\{2f(x)-g(x)\}}{-f(x)-3\{2f(x)-g(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-f(x)+2h(x)}{-f(x)-3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{-1-3\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{-1+2\cdot0}{-1-3\cdot0}=1\left(\because\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty}h(x)}{\lim_{x\to\infty}f(x)}=0\right)$$

33 정답 50

해설 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{t}{5}(x+5)$

점 P는 직선 $y=\frac{t}{5}(x+5)$와 원 $x^2+y^2=25$의 교점이므로 점 P의 y좌표를 구하면

$$\left(\frac{5y}{t}-5\right)^2+y^2=25,\ \frac{25}{t^2}y^2-\frac{50}{t}y+y^2=0$$

$$\therefore y=\frac{50t}{t^2+25}\ (\because y\ne0)$$

따라서 $\overline{OA}=t$, $\overline{PH}=\frac{50t}{t^2+25}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{OA}\cdot\overline{PH})=\lim_{t\to\infty}\left(t\cdot\frac{50t}{t^2+25}\right)=50$$

34 정답 ①

해설 $x^2+y^2=2$에서 $y^2=2-x^2$이므로

이것을 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=r^2$에 대입하면

$(x-\sqrt{2})^2+(2-x^2)=r^2$

$-2\sqrt{2}x+4=r^2 \qquad \therefore x=\frac{4-r^2}{2\sqrt{2}}$

이때 점 P의 x좌표가 $f(r)$이므로

$$f(r)=\frac{4-r^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{r\to2-}\frac{f(r)}{16-r^4}=\lim_{r\to2-}\frac{\frac{4-r^2}{2\sqrt{2}}}{16-r^4}$$

$$=\lim_{r\to2-}\frac{4-r^2}{2\sqrt{2}(4-r^2)(4+r^2)}$$

$$=\lim_{r\to2-}\frac{1}{2\sqrt{2}(4+r^2)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\cdot8}=\frac{\sqrt{2}}{32}$$

35 정답 ⑤

해설 $y=a$를 $x^2+(y-3)^2=9$에 대입하면

$x^2+(a-3)^2=9$

$x^2=9-(a-3)^2=6a-a^2$

$\therefore x=\sqrt{6a-a^2}$

$\therefore \mathrm{Q}(\sqrt{6a-a^2}, a)$

또, $y=a$를 $y=\frac{1}{16}x^2$에 대입하면

$a=\frac{1}{16}x^2$, $x^2=16a$

$\therefore x=4\sqrt{a}$ ($\because x>0$)

$\therefore \mathrm{R}(4\sqrt{a}, a)$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a\to 0+$이므로

$$\lim_{a\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{a\to 0+}\frac{4\sqrt{a}-\sqrt{6a-a^2}}{4\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to 0+}\frac{4-\sqrt{6-a}}{4}=\frac{4-\sqrt{6}}{4}$$

36 정답 ①

해설 $x>\frac{1}{3}$인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{2}{3x+1}<f(x)<\frac{2}{3x-1}$이므로

$\frac{2x}{3x+1}<xf(x)<\frac{2x}{3x-1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}=\frac{2}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{2}{3}$

37 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\frac{5}{x+2}$는 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

① $-5\leq x<-2$일 때, 최댓값은

$f(-5)=\frac{5}{-5+2}=-\frac{5}{3}$

②, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ $-2<x\leq 3$일 때, 최댓값은 없다.

따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ③이다.

38 정답 ②, ④, ⑤

해설 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이다.

① $f(2)=0$이고

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}x|x-2|=0$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이므로 $x=2$에서 연속이다.

② $\lim_{x\to 2+}[x]=2$, $\lim_{x\to 2-}[x]=1$이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-[x])=0$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x-[x])=1$

$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=2$에서 불연속이다.

③ $f(2)=3$이고

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x}$$
$$=3$$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이므로 $x=2$에서 연속이다.

④ $f(2)=2$이고

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\{(x-2)^2+3\}=3$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$이므로 $x=2$에서 불연속이다

⑤ $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2}=1$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

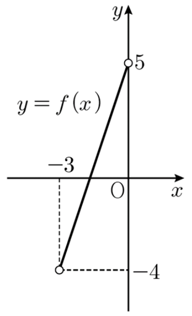
$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 것은 ②, ④, ⑤이다.

39 정답 ④

해설 ① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-3,\ 0)$에서 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-3,\ 0)$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.



② $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이다.

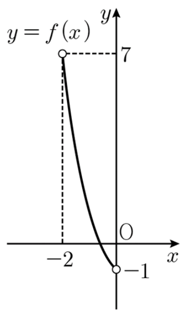
또, $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=-\infty$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ 1]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.

③ $f(x)=\log_7(2x+2)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다. 또, $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

④ $f(x)=\sqrt{2x-1}$은 $x>\dfrac{1}{2}$인 모든 실수에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 5]$에서 연속이므로 최대・최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-2,\ 0)$에서 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,\ 0)$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.



40 정답 ③

해설 함수 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+3}$은 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$f(x)=x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이라 하면

$f(-1)=7,\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4},\ f(3)=3$

이므로

$\dfrac{3}{4}\le f(x)\le 7$ $\qquad\therefore \dfrac{1}{7}\le\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{4}{3}$

즉, $\dfrac{1}{7}\le y\le\dfrac{4}{3}$이므로 $M=\dfrac{4}{3},\ m=\dfrac{1}{7}$

$\therefore Mm=\dfrac{4}{21}$

41 정답 ⑤

해설 ④, ⑤ $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0-} f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

이때 $f(0)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$가 존재하지만 극한값과 함숫값이 다르므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또한, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

즉, 구간 $(-1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 $0,\ 1$의 2개이다.

42 정답 ②

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면

$x=-2,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=f(-2)$이어야 하므로

$b+4=4-2a-3$

$\therefore\ 2a+b=-3$ ⋯⋯ ㉠

또한 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)=f(2)$이어야 하므로

$4+2a-3=b-4$

$\therefore\ 2a-b=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=(-2)+1=-1$

43 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{1}{4}$

44 정답 ①

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0-} f(x)=2,\ \lim_{x\to0+} f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)-\lim_{x\to0+} f(x)=4$ (참)

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이고,

$x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x-1)=\lim_{t\to0+} f(t)=-2$

$\lim_{x\to1-} f(x-1)=\lim_{t\to0-} f(t)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to1+} f(x-1)\neq\lim_{x\to1-} f(x-1)$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $x-2=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to-2+$이고,

$x\to0-$일 때 $t\to-2-$이므로

$$\lim_{x\to0+} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to0+} f(x)\lim_{x\to0+} f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to0+} f(x)\lim_{t\to-2+} f(t)$$
$$=(-2)\cdot2=-4$$

$$\lim_{x\to0-} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to0-} f(x)\lim_{x\to0-} f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to0-} f(x)\lim_{t\to-2-} f(t)$$
$$=2\cdot2=4$$

$\lim_{x\to0+} f(x)f(x-2)\neq\lim_{x\to0-} f(x)f(x-2)$

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)f(x-2)$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)f(x-2)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

45 정답 ②

해설 $x \neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+a}{x-1}=f(1)$ ……㉠

㉠에서 $x=1$일 때

(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x \to 1}(x^2-3x+a)=0$이므로

$-2+a=0$ $\quad \therefore a=2$

$$\therefore f(1)=\lim_{x \to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(x-2)$$
$$=1-2=-1$$

46 정답 2개

해설 $g(x)=f(x)-3x$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

$g(1)=f(1)-3=1-3=-2$

$g(2)=f(2)-6=5-6=-1$

$g(3)=f(3)-9=10-9=1$

$g(4)=f(4)-12=6-12=-6$

따라서 $g(2)g(3)<0$, $g(3)g(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)-3x=0$은 열린구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

47 정답 ⑤

해설 $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to 3+} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 3+} g(x)$

$=\lim\limits_{x \to 3+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to 3-} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 3-} g(x)=0$이고

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$f(3)=\lim\limits_{x \to 3+} f(x)=0$

같은 방법으로 $f(-3)=\lim\limits_{x \to -3-} f(x)=0$

$\therefore f(x)=(x+3)(x-3)$

함수 $f(x-a)g(x)=(x-a+3)(x-a-3)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는

$a-3=3$ 또는 $a+3=-3$이므로 $a=6$ 또는 $a=-6$

따라서 구하는 값은 $6\times(-6)=-36$

48 정답 ①

해설 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=m(x+5)$는 기울기가 $m\ (m>0)$이고 점 $(-5,\ 0)$을 지나는 직선이다.

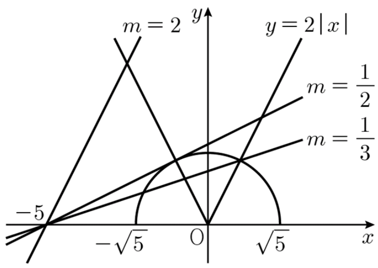
함수 $y=2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$은 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$에서 만난다.

직선 $y=m(x+5)$가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때, $m=\dfrac{1}{3}$

직선 $y=m(x+5)$가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때, $m=\dfrac{1}{2}$

이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 직선 $y=\dfrac{1}{2}(x+5)$는 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선이다.



(ⅰ) $0 < m < \frac{1}{3}$일 때, $f(m) = 4$

(ⅱ) $m = \frac{1}{3}$일 때, $f(m) = 3$

(ⅲ) $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$일 때, $f(m) = 4$

(ⅳ) $\frac{1}{2} \le m < 2$일 때, $f(m) = 2$

(ⅴ) $m \ge 2$일 때, $f(m) = 1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여

$$f(m) = \begin{cases} 1 & (m \ge 2) \\ 2 & \left(\frac{1}{2} \le m < 2\right) \\ 3 & \left(m = \frac{1}{3}\right) \\ 4 & \left(0 < m < \frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(m)$은

$m = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$에서만 불연속이므로

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{17}{6}$

49 **정답** ③

해설 연속함수의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = -1$, $x = 0$에서도 연속이다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 연속이므로

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = f(0)$$

즉, $a \cdot 0 + 1 = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b$

$\therefore b = 1$

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $f(x+2) = f(x)$를 만족시키므로

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (3x^2 + 2ax + b)$$

또, 함수 $f(x)$가 $x = -1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) = f(-1)$에서

$\lim_{x \to 1-} (3x^2 + 2ax + b) = a \cdot (-1) + 1$

$3 + 2a + b = -a + 1$

$\therefore a = -1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a + b = 0$이다.

50 **정답** 4개

해설 $g(x) = f(x) - x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$g(0) = f(0) - 0 = -\frac{1}{2} < 0$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} > 0$

$g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} > 0$

$g(1) = f(1) - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6} < 0$이므로

사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$은

열린구간 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$에서

각각 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = x$는 $0 < x < 1$에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

51 **정답** $\frac{4}{5}$

해설

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x-3}{5x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{4}{5}$$

52 정답 $\frac{1}{250}$

해설 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{\sqrt{25x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty} t^2\left(\frac{1}{5}-\frac{t}{\sqrt{25t^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{25t^2+1}-5t)}{5\sqrt{25t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{25t^2+1}-5t)(\sqrt{25t^2+1}+5t)}{5\sqrt{25t^2+1}(\sqrt{25t^2+1}+5t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{125t^2+5+25t\sqrt{25t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{125t^2+5+25\sqrt{25t^4+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{125+\frac{5}{t^2}+25\sqrt{25+\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{1}{250}$$

53 정답 $-\frac{5}{2}$

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5f(x)+1}{2f(x)-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{5f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2f(x)}{x}-\frac{3}{x}}$$
$$=\frac{-5\cdot(-2)}{2\cdot(-2)}=-\frac{5}{2}$$

54 정답 ②

해설 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x}-5x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+3}{\sqrt{(-t)^2+(-t)}-5(-t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+3}{\sqrt{t^2-t}+5t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+5}$$
$$=\frac{-1}{1+5}=-\frac{1}{6}$$

(다른 풀이)

$x<0$일 때, $\sqrt{x^2}= x =-x$이므로

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$
$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x}-5x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-5x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-5}$$
$$=\frac{1}{-1-5}=-\frac{1}{6}$$

55 정답 ⑤

해설 i) $x>1$일 때 $|x-1|=x-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x-1}=1$$

ii) $x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$$\lim_{x\to1}=-1$$

(좌극한 값) ≠ (우극한 값) 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

56 정답 ③

해설 ㄱ. [반례] $f(x)=\frac{2}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x^2}$일 때,

$f(x)+g(x)=\frac{1}{x^2}$이다.

$\lim_{x\to0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0}g(x)=-\infty$이지만

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\infty$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=x^2$일 때,

$f(x)g(x)=1$이다.

$\lim_{x\to0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0}g(x)=0$이지만

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=1$이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}g(x)=1$이면

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{\infty}=0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

57 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 모두 존재하므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)+g(x)\}-f(x)]$$
$$=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$이면

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x=0$,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}x^2=0$이므로

주어진 조건을 모두 만족시키지만

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$이고

$\alpha\beta\neq0$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}=\frac{\alpha}{\beta}$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

58 정답 3

해설
$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to4}f(x)}{\lim_{x\to4}g(x)}=\frac{9}{3}=3$$

59 정답 2

해설 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-4g(x)\}=\alpha$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4g(x)}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left\{1-4\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)+2}{3f(x)-8g(x)-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4\cdot\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{2}{f(x)}}{3-8\cdot\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{3}{f(x)}}$$
$$=\frac{1+4\cdot\frac{1}{4}+0}{3-8\cdot\frac{1}{4}-0}$$
$$=2$$

60 정답 -6

해설 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 3, 이차항의 계수가 4인 삼차식임을 알 수 있다.

또, (나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로

$f(x)\to0$에서 $f(0)=0$이다.

즉, $f(x)=3x^3+4x^2+ax$ (a는 상수) 로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(3x^2+4x+a)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(3x^2+4x+a)=a$$

따라서 $a=-1$에서 $f(x)=3x^3+4x^2-x$이므로

$$f(-2)=3\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2+(-1)\cdot(-2)$$
$$=-6$$

61 정답 4

해설 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$

$\therefore b=\sqrt{4-a^2}$ ($\because b>0$)

이때 $\mathrm{Q}\left(a,\ -\sqrt{4-a^2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{4-a^2}$

$\therefore S(a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2\sqrt{4-a^2}=a\sqrt{4-a^2}$

$$\therefore \lim_{a\to 2-}\frac{S(a)}{\sqrt{2-a}}=\lim_{a\to 2-}\frac{a\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{2-a}}=\lim_{a\to 2-}\frac{a\sqrt{2-a}\sqrt{2+a}}{\sqrt{2-a}}=\lim_{a\to 2-}a\sqrt{2+a}=4$$

62 정답 0

해설 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le 2$이므로

$-2\le f(x)\le 2,\ -\frac{4}{x}\le\frac{f(x)-2}{x}\le 0\ (x\ne 0)$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}0=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2}{x}=0$

63 정답 -1

해설 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 1}(mx+2)=1\quad\therefore m=-1$

64 정답 5

해설 함수 $f(x)$가 $x=1,\ x=2,\ x=3$에서 불연속이므로 $x=1,\ x=2,\ x=3$에서 함수 $g(x)$의 연속성을 조사해 보자.

(i) $\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}(x-1)f(x)=0\cdot 0=0$

$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}(x-1)f(x)=0\cdot 2=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}g(x)=0$

이때 $g(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2+}(x-1)f(x)=1\cdot 0=0$

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}(x-1)f(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 2+}g(x)\ne\lim_{x\to 2-}g(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2}g(x)$가 존재하지 않으므로

$g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to 3}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}(x-1)f(x)=2\cdot 1=2$

이때 $g(3)=2f(3)=-2$이므로

$\lim_{x\to 3}g(x)\ne g(3)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2, 3이므로

구하는 합은

$2+3=5$

65 정답 ①

해설 $f(x)=\begin{cases}x^2-5a & (x<a)\\ -2x+4 & (x\ge a)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\cdot(-2a+4)$

$\lim_{x\to a-}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\cdot(a^2-5a)$

따라서 $a^2-5a=0$이거나 $-2a+4=a^2-5a$이므로

$a=4$ 또는 $a=5$ ($\because a>0$)

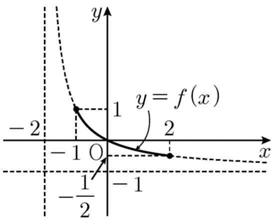
따라서 모든 a의 값의 합은 9이다.

66 정답 $\frac{1}{2}$

해설 함수 $f(x)=-\frac{x}{x+2}=-1+\frac{2}{x+2}$는

구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 이 구간에서

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 1,

$x=2$에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

즉, $M=1$, $m=-\frac{1}{2}$이므로

$M+m=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

67 정답 6

해설 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)=\frac{10}{x+4}$의 최솟값은

$f(1)=2$

함수 $g(x)=-\sqrt{x+3}+4$의 최댓값은

$g(-3)=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

68 정답 ①

해설 $f(x)=x^2-5x+a$로 놓으면 $f(x)$는

구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=a+6$, $f(1)=a-4$

이므로

$f(-1)f(1)=(a+6)(a-4)<0$

$\therefore -6<a<4$

따라서 정수 a는

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3$이므로 그 합은

-9이다.

69 정답 4개

해설 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(5)<0$이므로

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$,

$(3, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(-1)f(-2)<0$, $f(-3)f(-5)<0$

즉, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은

구간 $(-2, -1)$, $(-5, -3)$에서 각각 적어도 하나의

실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

70 정답 ④

해설 $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-g(x)\}=3$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{g(x)}=0$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{g(x)}\{2f(x)-g(x)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2f(x)}{g(x)}-1\right\}$$

$$=0\cdot 3=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5g(x)-2f(x)}{4f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-2\cdot\frac{f(x)}{g(x)}}{4\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+3}$$

$$=\frac{5-1}{2+3}=\frac{4}{5}$$

71 정답 ④

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$,

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=(-1)\cdot1=-1$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)g(x)=-1$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=(-1)-1=-2$,

$\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=1-0=1$

즉, $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$

이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to-1+} g(t)=0$

또, $x\to1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(1)=0$

$\lim_{x\to1} g(f(x))=0$이다. (참)

ㄹ. $\frac{6t+1}{t-1}=m$이라 하면 $m=6+\frac{7}{t-1}$에서

$t\to-\infty$일 때, $m\to6-$이므로

$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{6t+1}{t-1}\right)$

$=\lim_{m\to6-} f(m)$

$=\lim_{m\to2-} f(m)$ ($\because f(x)=f(x+4)$)

$=1$ (참)

ㅁ. $f(x)=f(x+4)$, $g(x)=g(x+4)$이고, $\cdots$ ㉠

$-x=k$라 하면 $x\to4+$일 때, $k\to-4-$이므로

$\lim_{x\to4+}\{f(-x)+g(-x)\}$

$=\lim_{k\to-4-}\{f(k)+g(k)\}$

$=\lim_{k\to0-}\{f(k)+g(k)\}$ ($\because$ ㉠)

$=(-1)+1=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이다.

72 정답 1

해설 점 A는 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 $x=2$의 교점이므로 $A(2,\ 1)$

점 B는 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $x=t$의 교점이므로

$B\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$

점 C는 점 B에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발이므로

$C\left(2,\ \frac{2}{t}\right)$

따라서

$\overline{AB}=\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{2}{t}-1\right)^2}$

$=\sqrt{t^2-4t-\frac{4}{t}+\frac{1}{4t^2}+5}$

$\overline{BC}=t-2$이므로

$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-4t-\frac{4}{t}+\frac{1}{4t^2}+5}}{t-2}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{t}-\frac{4}{t^3}+\frac{1}{4t^4}+\frac{5}{t^2}}}{1-\frac{2}{t}}=1$

73 정답 7

해설 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 분모가 0 이 아니어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a\neq0$ 이다.

$D=a^2-8a<0$ 이므로 $0<a<8$ 이다.

따라서 정수 a 의 개수는 7이다.

[참고]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq0$)도 $x=a$에서 연속이다.

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속함수일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

74 정답 3

해설 $x \neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+b}{x-1}=3 \cdots$ ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(ax^2+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x+1)(x-1)}{x-1}=2a=3$

따라서 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$이므로

$a-b=\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3$

75 정답 1

해설 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(6)-f(3)}{6-3}=\dfrac{2-(-1)}{3}=1$

76 정답 -2

해설 x의 값이 a에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(1)-f(a)}{1-a}&=\frac{(1^3-1)-(a^3-1)}{1-a}\\&=\frac{a^3-1}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}\\&=a^2+a+1 \quad \cdots ㉠\end{aligned}$$

또, $f(x)=x^3-1$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^3-1\}-(1^3-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h(h^2+3h+3)}{h}=3 \quad \cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a^2+a+1=3$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$a<0$이므로 $a=-2$

77 정답 3

해설
$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2+(1+h)-1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+3h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+3)=3\end{aligned}$$

78 정답 11

해설 $f(x)=3x^3+2x+1$에서

$f'(x)=9x^2+2$

$\therefore f'(1)=9\cdot1^2+2=11$

79 정답 0

해설 $y'=(3^3)'=0$

80 정답 ④

해설 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+7x+3$에서

$f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(1)=3\times1^2+7=10$

81 정답 11

해설 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(2)=11$

82 정답 61

해설 미분계수 계산하기

$f'(x)=2x(x^3-x+1)+(x^2-1)(3x^2-1)$

따라서 $f'(2)=4\cdot7+3\cdot11=61$

83 정답 5

해설 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$
$=\dfrac{\{5(a+\Delta x)+2\}-(5a+2)}{\Delta x}$
$=\dfrac{5\Delta x}{\Delta x}=5$

84 정답 5

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로
$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^3+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{5\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{5+3\Delta x+(\Delta x)^2\}=5$

85 정답 ②

해설 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서
$\lim_{x\to 1-}f(x)=b-1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)=a+2$이므로
$b-1=2+a$에서
$a-b=-3$ … ㉠
$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$\lim_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=b$
$\lim_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2a+2$
$2a+2=b$ … ㉡
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=4$
$\therefore\ a+b=1+4=5$

86 정답 ①

해설 $f(x)=3x^2+5$ 에서
$\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{3(x+\Delta x)^2+5\}-\{3x^2+5\}}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2+5-3x^2-5}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{6x\Delta x+3\Delta x^2}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x)$
$=6x$

87 정답 ③

해설 $f'(x)=\lim_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$
$=\lim_{t\to x}\dfrac{\boxed{t^3-x^3}}{t-x}$
$=\lim_{t\to x}\dfrac{(t-x)(t^2+xt+x^2)}{t-x}$
$=\lim_{t\to x}\boxed{t^2+xt+x^2}$
$=3x^2$

88 정답 21

해설 미분계수 계산하기
$f'(x)=6x^2-3,\ f'(2)=21$

89 정답 ④

해설 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x+2)$에서
$f'(x)=2x(x^2+x+2)+(x^2+1)(2x+1)$이므로
$f'(1)=2\cdot 4+2\cdot 3=14$

90 정답 10

해설 곱의 미분법을 활용하여 미분계수를 구한다.
곱의 미분법에 의하여 함수 $f(x)g(x)$의 도함수는
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
이때 $f'(x)=4x+5,\ g'(x)=3x^2$이므로
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\cdot 2+3\cdot 0$
$=10$

91 정답 ①

해설 평균변화율과 미분계수의 정의 이해하기

x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{3a^2-2a}{a}=3a-2$

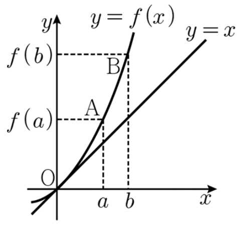
$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)=4$이므로

$3a-2=4$

$\therefore a=2$

92 정답 ④

해설 다음 그림과 같이 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$라 하자.



ㄱ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고,

$f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$f'(a)<f'(b)$ (거짓)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 1보다 크므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$

이때 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)>b-a$ (참)

ㄷ. $0<a<b$에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>0$이고 x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 커진다.

즉, $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>f'(\sqrt{ab})>f'(0)$이므로

$f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>f'(\sqrt{ab})>1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

93 정답 64

해설 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}\{f(x)+f(1)\}}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\{f(x)+f(1)\}$

$=f'(1)\cdot2f(1)$

이때 $f'(x)=6x^2-14x$이므로

$f'(1)=-8$

따라서 구하는 식의 값은

$f'(1)\cdot2f(1)=(-8)\cdot2\cdot(-4)=64$

94 정답 $\dfrac{1}{6}$

해설 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{x^3-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(\sqrt{x})-f(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=f'(1)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

95 정답 ③

해설 점 $(1, 7)$이 함수 $f(x)=4x^2+ax+5$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=4+a+5=7$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-2x+5$이므로

$f'(x)=8x-2$

점 $(1, 7)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고, 그 값이 m이므로

$f'(1)=8-2=m$

따라서 $m=6$이므로

$am=(-2)\cdot6=-12$

96 정답 ③

해설 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=b+1$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)=1+a$이므로

$b+1=1+a$에서

$a=b$ ⋯ ㉠

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=b$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3+2a$$

$3+2a=b$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-3$

$\therefore a+b=-3+(-3)=-6$

97 정답 11

해설 다항함수의 미분 이해하기

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=2$이고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2$

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(1)=3f(1)+f'(1)=3\times3+2=11$

98 정답 1

해설
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)f(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)-f(0)\}f(1-x)}{x}$$
$$=f'(0)\cdot f(1)$$
$$=1\cdot1=1$$

99 정답 ③

해설
$$f'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$
$(\because f(-x)=f(x))$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$$
$$=(-1)\times f'(x)=-f'(x)$$

100 정답 ③

해설 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-a}{x-1}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때

(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-a\}=0$이므로

$f(1)=a$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-a}{x-1}=2$에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

$\therefore f'(1)=2$

이때 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $bx-1$이므로

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+bx-1$ ⋯ ㉠

(단, $Q(x)$는 다항식)

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=b-1=a$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+b$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=b=2$

$b=2$를 ㉡에 대입하면

$a=2-1=1$

$\therefore a+b=1+2=3$