쎈 - 수학 II (2025) 86~93p_B단계_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

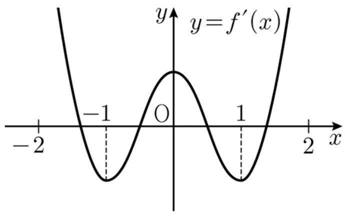
이름

01 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+(3a+6)x+4$가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위한 정수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

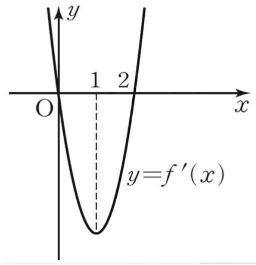
02 함수 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$이 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하기 위한 실수 a의 최댓값을 구하시오.

03 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 설명 중 옳은 것은?



① 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소한다.
② 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 증가한다.
③ 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 감소한다.
④ 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다.
⑤ 함수 $f(x)$는 구간 $(2, \infty)$에서 증가한다.

04 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은?



① $(-\infty, 0]$ ② $(-\infty, 1]$ ③ $[-1, 1]$
④ $[0, 2]$ ⑤ $[2, \infty)$

05 함수 $f(x)=x^3-3x+5$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

06 함수 $f(x)=3x^4-4x^3-1$ 에서 극값으로 옳은 것은?

① 극댓값 : -2
② 극솟값 : -2
③ 극댓값 : -1
④ 극솟값 : -1
⑤ 극값이 없음

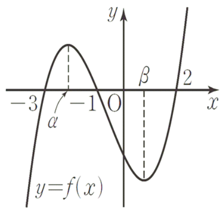
07 함수 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$가 $2<x<3$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

08 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+(3a-3)x+1$이 증가하는 구간이 닫힌구간 $[-1, 5]$일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

09 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+5$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.
(단, a, b는 상수)

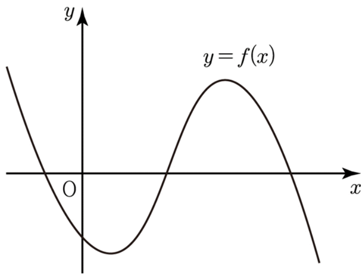
10 삼차함수 $f(x)=2ax^3-9x^2+12a^2x$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 극솟값을 구하시오.

11 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?
(단, $\alpha<0<\beta$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$, $|\beta|<|\alpha|$)



① $ab<0$ ② $ac>0$
③ $ad>0$ ④ $bc>0$
⑤ $bd<0$

12 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $b>0$

ㄴ. $ac<0$

ㄷ. $f(-1)=0$이면 $ac+b^2<ab+bc$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$이 감소하는 구간이 $[\alpha, \beta]$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

14 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x$가 증가하는 x의 구간은?

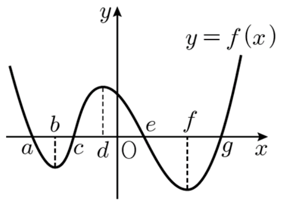
① $(0, \infty)$ ② $(0, -\infty)$ ③ $(-\infty, 1)$
④ $(-\infty, \infty)$ ⑤ $(-\infty, 0)$

15 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+2$가 감소하는 x의 값의 범위가 $-1 \le x \le b$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

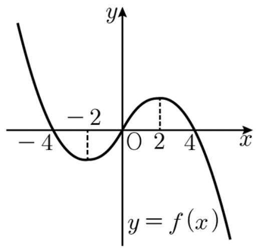
16 삼차함수 $f(x)=ax^3+3x^2+1$이 $-1<x<0$에서 감소하도록 하는 양의 정수 a의 최솟값을 구하시오.

17 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\{f(x)\}^2$이 감소하는 구간인 것은?



① $(a,\ b)$　② $(c,\ d)$　③ $(d,\ e)$
④ $(e,\ f)$　⑤ $(g,\ \infty)$

18 모든 실수에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$g(x)=xf(x)$로 정의되어지는 함수 $g(x)$에 대하여 다음 중 집합 $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{d}{dx}g(x)<0\right\}$의 원소인 것은?

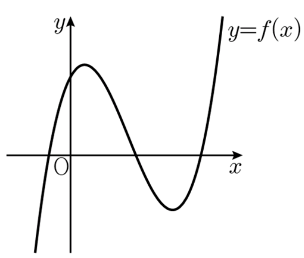
① -5　② -3　③ 1
④ 2　⑤ 4

19 함수 $f(x)=x^3-12x+6$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는?

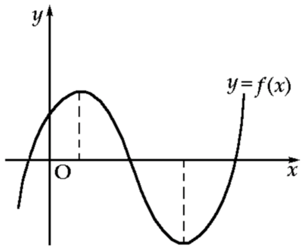
① $(-1,\ 7)$　② $(-1,\ 14)$　③ $(0,\ 7)$
④ $(1,\ 7)$　⑤ $(1,\ 14)$

20 [2020년 11월 고3 문과 25번 변형]
곡선 $y=x^3-12x+4$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

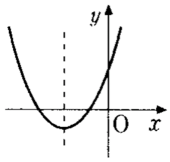
21 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



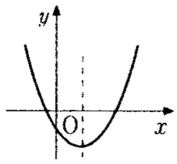
22 실수 a, b, c에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프의 개형이 그림과 같다. 이 때, 다음 중 함수 $g(x)=ax^2+bx+c$의 그래프로 적당한 것은?



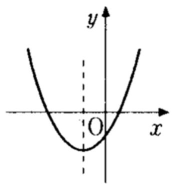
①



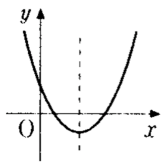
②



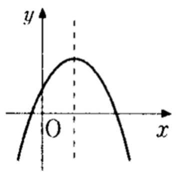
③



④

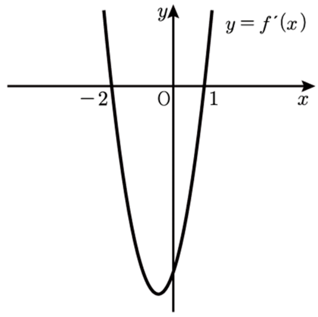


⑤

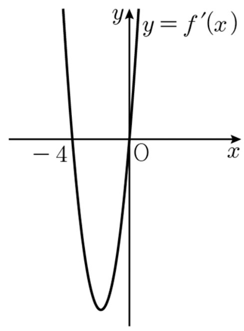


23 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 $\frac{11}{2}$일 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

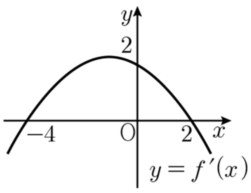
(단, a, b, c는 상수)



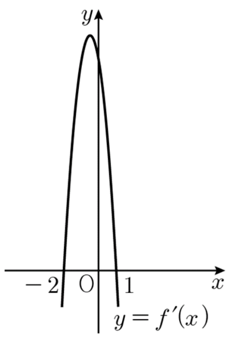
24 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f(x)$의 극솟값이 2이고 극댓값이 34일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.



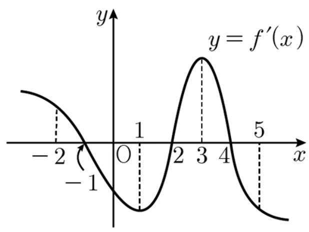
25 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오.



26 삼차함수 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 5일 때, $f(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수)



27 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

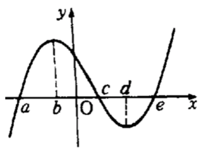


〈보기〉

ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-2,\ -1)$에서 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.
ㄷ. $f(x)$는 구간 $(2,\ 4)$에서 증가한다.
ㄹ. $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
ㅁ. $f(x)$는 $x=4$에서 극대이다.

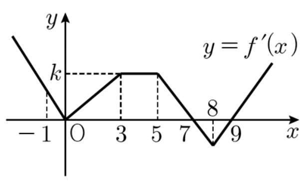
① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄷ, ㅁ ⑤ ㄹ, ㅁ

28 아래 그림은 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 다음 설명 중 맞는 것을 모두 고르면?



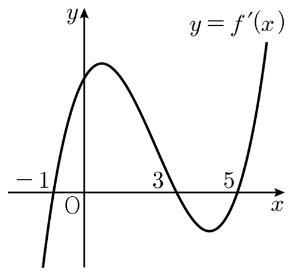
① $f(x)$는 구간 $[a,\ c]$에서 증가한다.
② $f(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다.
③ $f(x)=0$는 서로 다른 네 개의 실근을 갖는다.
④ $f'(a)+f'(c)+f'(e)=0$
⑤ $b<x_1<x_2<d$인 임의의 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$

29 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $-1<x<8$에서 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.
② $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
③ $3<x<5$에서 $f(x)$는 상수함수이다.
④ $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
⑤ $x<0$일 때, $f(x)$는 감소한다.

30 아래 그림은 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. $f(-1)<f(5)<0<f(3)$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31 함수 $f(x)=-2x^3+(a-3)x^2+(a-5)x+3a$가 모든 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서의 최솟값이 $f(t)$가 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

32 다음 보기 중 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a는 상수이다.)

〈보기〉

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 3이다.
ㄴ. $a=-3$이면 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $|a|\le 3$이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-(a+1)x+10$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 구간 $(0,\ 3)$에서 감소할 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오.

34 함수 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+ax-1$ 에 대하여 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a 는 상수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $f(x)$ 가 항상 증가하기 위한 조건은 $a<\frac{1}{12}$ 이다.
ㄴ. $a=0$ 일 때, $f(x)$ 의 그래프는 항상 감소한다.
ㄷ. $a<0$ 일 때, $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 열린구간 (α,β)이면 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$ 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35 실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
(나) $f'(0)=4$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

36 [2020년 3월 고3 문과 18번/4점]

$a>0$인 상수 a에 대하여
함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

37 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -8을 갖는다.
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=-15$

38 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

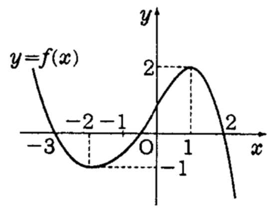
(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3}=1$
(나) $x=-3$과 $x=4$에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5-h)}{h}$의 값은?

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

39 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x$는 $x=a$에서 극솟값 b를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3,\ f(3))$에서 접하는 직선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$에서 직선 l까지의 거리가 d이다. $226d^2$의 값을 구하시오.

40 아래 그림과 같이 미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x)=x^2f(x)$이다. 이 때 $g'(-2)$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

쎈 - 수학 II (2025) 86~93p_B단계_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 -3	03 ⑤
04 ④	05 ②	06 ②
07 21	08 6	09 25
10 4	11 ⑤	12 ⑤
13 ③	14 ④	15 ③
16 1	17 ③	18 ⑤
19 ②	20 20	21 1
22 ④	23 19	24 9
25 9	26 -22	27 ④
28 ①, ④	29 ④	30 ⑤
31 ③	32 ⑤	33 9
34 ②	35 ⑤	36 ①
37 2	38 ④	39 324
40 ④		

쎈 - 수학 II (2025) 86~93p_B단계_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ②

해설 $f(x)=x^3-3ax^2+(3a+6)x+4$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3a+6$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-3(3a+6)\le 0$

$9a^2-9a-18\le 0$, $a^2-a-2\le 0$

$(a+1)(a-2)\le 0$ $\quad\therefore\ -1\le a\le 2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개다.

02 **정답** -3

해설 주어진 함수를 미분하면 $f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 감소함수가 되어야 하므로

$f'(x)\le 0$, 즉 $f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)\le 0$

(i) $a<0$

(ii) $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a(a+2)\le 0$

$a^2+2a-3\ge 0$, $(a+3)(a-1)\ge 0$

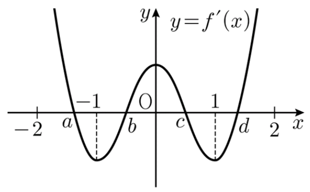
$\therefore\ a\le -3$ 또는 $a\ge 1$

(i), (ii)에 의하여 $a\le -3$

따라서 a의 최댓값은 -3이다.

03 **정답** ⑤

해설 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d라 하자.



① 구간 $(-\infty,\ a)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라서 $(-\infty,\ -1)$은 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 아니다.

② 구간 $(-1,\ b)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. 따라서 $(-1,\ 0)$은 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 아니다.

③ 구간 $(0,\ c)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라서 $(0,\ 1)$은 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 아니다.

④ 구간 $(1,\ d)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. 따라서 $(1,\ 2)$는 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 아니다.

⑤ 구간 $(2,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

04 **정답** ④

해설 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)\le 0$인 구간은 $[0,\ 2]$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 감소한다.

05 정답 ②

해설 $f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $M=7$,
$x=1$에서 극솟값 $m=3$을 갖는다.

$\therefore M-m=7-3=4$

06 정답 ②

해설 $f(x)=3x^4-4x^3-1$ 에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$, 1 이므로 아래

증감표에 의해

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서, 극댓값은 존재하지 않고 $x=1$ 일 때 극솟값 -2 가 된다.

07 정답 21

해설 $f(x)=-x^3+x^2+ax-4$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+a=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a+\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$가 $2<x<3$에서 증가하려면 이 구간에서$f'(x)\geq 0$이어야 하므로 $f'(3)\geq 0$이어야만 한다.

$f'(3)=-21+a\geq 0$

$\therefore a\geq 21$

따라서 실수 a의 최솟값은 21이다.

08 정답 6

해설 $f(x)=-x^3+ax^2+(3a-3)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+(3a-3)$

함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 닫힌구간 $[-1,\ 5]$이므로

$f'(x)\geq 0$인 x의 값의 범위가 $-1\leq x\leq 5$이어야 한다.

즉, 이차부등식 $f'(x)\geq 0$의 해가 $-1\leq x\leq 5$이므로

$f'(x)=-3(x+1)(x-5)=-3x^2+12x+15$

따라서 $2a=12$, $3a-3=15$이므로

$a=6$

09 정답 25

해설 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+5$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

(ⅰ) $f(1)=-2$에서 $2+a+b+5=-2$

$\therefore a+b=-9$ $\cdots$ ㉠

(ⅱ) $f'(1)=0$에서 $6+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-6$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(-2)=-16+12+24+5=25$

10 정답 4

해설 $f'(x)=6ax^2-18x+12a^2$이고

$x=a$에서 극값을 가지므로

$f'(a)=6a^3-18a+12a^2=6a(a-1)(a+3)=0$

(ⅰ) $a=1$일 때 $f'(x)=6(x-1)(x-2)$

$x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로 문제의 조건에 적합하다.

(ⅱ) $a=-3$일 때, $f'(x)=-18(x+3)(x-2)$

$x=-3$에서 극소이므로 문제의 조건에 적합하지 않다. 따라서 극솟값은 $f(2)=4$이다.

11 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서
$x \to \infty$ 일 때, $f(x) \to \infty$ 이므로
$a>0$
$x=0$일 때, y축의 음의 부분과 만나므로
$d<0$
한편, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에 대하여 이차방정식
$f'(x)=0$은 음의 실근 α와 양의 실근 β를 갖는다.
이때, $\alpha<0<\beta$, $|\beta|<|\alpha|$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}<0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}<0$이므로
$b>0$, $c<0$
$\therefore a>0, b>0, c<0, d<0$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

12 정답 ⑤

해설 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x가 모두 양수이므로
이차방정식 $-3x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha>0$, $\beta>0$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\dfrac{2a}{3}>0$, $\alpha\beta=-\dfrac{b}{3}>0$이므로
$a>0$, $b<0$
한편, $f(0)=c<0$
ㄱ. $b<0$ (거짓)
ㄴ. $a>0$, $c<0$이므로 $ac<0$ (참)
ㄷ. $f(-1)=1+a-b+c=0$
$b-c=a+1>0$
$ac+b^2<ab+bc$에서
$b^2-(a+c)b+ac<0$
$(b-a)(b-c)<0$인지를 확인하면 된다.
이때 $b-a<0$, $b-c>0$이므로
$(b-a)(b-c)<0$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$
이때 $f'(x)\le 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로
$3(x-3)(x+1)\le 0$, $(x-3)(x+1)\le 0$
$\therefore -1<x<3$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로
$\alpha+\beta=-1+3=2$

14 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-3x^2+4x$에서
$f'(x)=3x^2-6x+4$이므로 $\dfrac{D}{4}<0$에 해당한다.
따라서 이 함수는 임의의 실수 x에 대해 증가함수이다.

15 정답 ③

해설 $f(x)=x^3+ax^2-9x+2$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-9$
함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가
$-1\le x\le b$이므로 이차방정식 $3x^2+2ax-9=0$의
두 근이 -1, b이다.
즉, 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+b=-\dfrac{2}{3}a$, $(-1)\cdot b=-3$
따라서 $a=-3$, $b=3$이므로
$a+b=0$

16 정답 1

해설 $f(x)=ax^3+3x^2+1$에서

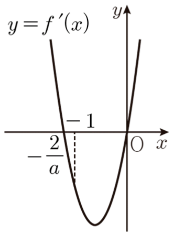
$f'(x)=3ax^2+6x=3x(ax+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2}{a}$

이때 a는 양의 정수이므로 $-2\le-\dfrac{2}{a}<0$이고

$-\dfrac{2}{a}\le x\le 0$에서 $f'(x)\le 0$이다.

따라서 함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 감소하려면 다음 그림과 같이 $x=-1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.



즉, $-\dfrac{2}{a}\le-1$이어야 하므로

$\dfrac{2}{a}\ge 1$에서 $a\le 2$

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 1이다.

17 정답 ③

해설 $y=\{f(x)\}^2$에서 $y'=2f(x)f'(x)$

① 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

② 구간 $(c,\ d)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(c,\ d)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

③ 구간 $(d,\ e)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)<0$
따라서 구간 $(d,\ e)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

④ 구간 $(e,\ f)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)<0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(e,\ f)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

⑤ 구간 $(g,\ \infty)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)>0$이므로
$2f(x)f'(x)>0$
따라서 구간 $(g,\ \infty)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

18 정답 ⑤

해설 $g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

① $f(-5)>0,\ -5f'(-5)>0$
$\therefore\ g'(-5)>0$

② $f(-3)<0,\ -3f'(-3)>0$ 이므로
$g'(-3)$ 의 부호는 결정할 수 없다.

③ $f(1)>0,\ f'(1)>0$
$\therefore\ g'(1)>0$

④ $f(2)>0,\ f'(2)=0$
$\therefore\ g'(2)>0$

⑤ $f(4)=0,\ 4f'(4)<0$
$\therefore\ g'(4)<0$

집합 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{d}{dx}g(x)<0\right\}$의 원소인 것은 ⑤이다.

19 정답 ②

해설 $f(x)=x^3-12x+6$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	22	↘	-10	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 22, $x=2$에서 극솟값 -10을 가지므로

$\mathrm{A}(-2,\ 22),\ \mathrm{B}(2,\ -10)$

따라서 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot 2+3\cdot(-2)}{1+3},\ \dfrac{1\cdot(-10)+3\cdot 22}{1+3}\right)$

즉, $(-1,\ 14)$

20 정답 20

해설 $y=x^3-12x+4$에서

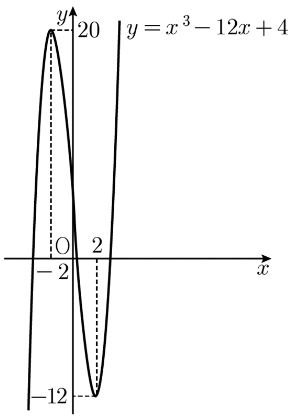
$y'=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

즉, $y'=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=x^3-12x+4$는

$x=-2$에서 극댓값 20, $x=2$에서 극솟값 -12를 갖는다.



이때 곡선 $y=x^3-12x+4$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이므로 직선 $y=k$는

점 $(-2,\ 20)$ 또는 $(2,\ -12)$를 지나야 한다.

따라서 양수 k의 값은 20이다.

21 정답 1

해설 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로

$c>0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고,

$f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고,

α, β는 서로 다른 두 양수이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{b}{3}>0$

$\therefore\ a<0,\ b>0$

$$\therefore\ \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}$$
$$=-1+1+1=1$$

22 정답 ④

해설 (ⅰ) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, 즉 그래프의 오른쪽이 ∞로 가고 있으므로, $a>0$

(ⅱ) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 그래프에서 양의 구간에서 두 개의 극값이 존재하므로, $f'(x)=0$은 두 개의 양의 실근을 갖는다.

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}>0$

$\therefore\ b<0,\ c>0$

그러므로, 이차함수 $g(x)$의 그래프는 아래로 볼록, y절편>0, 대칭축>0이다.

23 정답 19

해설 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=12-4a+b=0$ ⋯ ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-6$

함수 $f(x)$의 극솟값이 $\dfrac{11}{2}$이므로

$f(1)=1+a+b+c=\dfrac{11}{2}$

$\therefore\ c=9$

따라서 함수 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x+9$이므로

극댓값은

$f(-2)=19$

24 정답 9

해설 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-4)=0$, $f'(0)=0$이므로
$f'(0)=c=0$
$f'(-4)=48a-8b=0$ ⋯ ㉠
이때 $f'(x)=0$에서 $x=-4$, $x=0$
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$의 극솟값이 2, 극댓값이 34이므로
$f(0)=d=2$
$f(-4)=-64a+16b+2=34$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$
따라서 $f(x)=x^3+6x^2+2$이므로
$f(1)=1+6+2=9$

25 정답 9

해설 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$y=f'(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로
$f'(0)=c=2$
$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, 2이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -4와 2이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$-4+2=-\frac{2b}{3a},\ (-4)\cdot 2=\frac{c}{3a}=\frac{2}{3a}$$
$$\therefore a=-\frac{1}{12},\ b=-\frac{1}{4}$$
이때 $f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
이때 $f(x)=-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2+2x+d$이므로 구하는 차는
$f(2)-f(-4)$
$=\left(-\frac{2}{3}-1+4+d\right)-\left(\frac{16}{3}-4-8+d\right)$
$=9$

26 정답 -22

해설 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$의 도함수는
$f'(x)=-6x^2+2ax+b$
$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는
$x=1$에서 극댓값, $x=-2$에서 극솟값을 가지므로
$f'(1)=-6+2a+b=0$ ⋯ ㉠
$f'(-2)=-24-4a+b=0$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-3$, $b=12$
즉 $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+c$이고,
함수 $f(x)$의 극댓값이 5이므로
$f(1)=-2-3+12+c=5$
$\therefore c=-2$
따라서 함수 $f(x)=-2x^3-3x^2+12x-2$이므로
극솟값은
$f(-2)=-22$

27 정답 ④

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 2, 4이다.
즉, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$이고
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(-2,\ -1)$에서 $f'(x)>0$이므로
$f(x)$는 증가한다. (거짓)
ㄴ. 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이므로
$f(x)$는 감소한다. (거짓)
ㄷ. 구간 $(2,\ 4)$에서 $f'(x)>0$이므로
$f(x)$는 증가한다. (참)
ㄹ. $f'(1)\neq 0$이므로
$f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㅁ. $f(x)$는 $x=4$에서 극대이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㅁ이다.

28 정답 ①, ④

해설 $f'(x)=0$의 세 근이 $x=a$, $x=c$, $x=e\ (a<0<c<e)$이므로
$f'(x)=(x-a)(x-c)(x-e)$
이 때, $x=a$, $x=e$에서 극소이고 $x=c$에서 극대이다.
① $a \le x \le c$에서 $f'(x) \ge 0$이므로 $f(x)$는 증가한다. ∴ 참
② $x=b$ 전후에서 $f'(x)$의 부호가 변하지 않으므로 극대가 아니다. ∴ 거짓
③ 극솟값과 극댓값이 같은 부호이면 서로 다른 네 실근을 갖지 않는다. ∴ 거짓
④ $f'(a)=0$, $f'(c)=0$, $f'(e)=0$이므로
$f'(a)+f'(c)+f'(e)=0$ ∴ 참
⑤ $b<x<c$에서는 $f'(x)>0$이므로 증가함수이고 $c<x<d$에서는 $f'(x)<0$이므로 감소함수이다.
따라서 $b<x_1<x_2<d$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$라고 할 수 없다. ∴ 거짓

29 정답 ④

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 7, 9이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=7$ 또는 $x=9$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	7	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

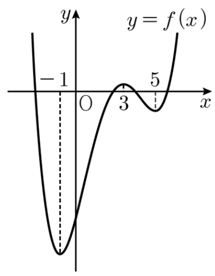
① $-1<x<8$에서 $f(x)$는 $x=7$에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.
② $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $3<x<5$에서 $f'(x)=k\ (k>0)$이므로 $f(x)$는 일차함수이다.
④ $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
⑤ $x<0$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

30 정답 ⑤

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-1, 3, 5$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(-1)<f(5)<0<f(3)$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 정답 ③

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서의 최솟값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.
$f(x)=-2x^3+(a-3)x^2+(a-5)x+3a$에서
$f'(x)=-6x^2+2(a-3)x+(a-5)$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a-3)^2+6(a-5)\le 0$, $a^2-21\le 0$
$(a+\sqrt{21})(a-\sqrt{21})\le 0$
$\therefore -\sqrt{21}\le a\le \sqrt{21}$
따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

32 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+3$이므로 $f'(0)=3$이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 3이다. (참)

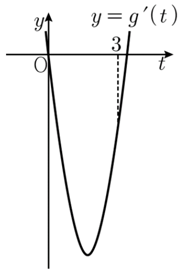
ㄴ. $a=-3$이면 $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$에서
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$
따라서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3이고
꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$인 이차함수이므로
$x=1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=3x^2+2ax+3$에서
이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면 $|a|\le 3$이므로
$\frac{D}{4}=a^2-9\le 0$
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

33 정답 9

해설 $f(x)=-x^3+ax^2-(a+1)x+10$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax-(a+1)$
따라서 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=-3t^2+2at-(a+1)$이므로 접선의 방정식은
$y-\{-t^3+at^2-(a+1)t+10\}$
$=\{-3t^2+2at-(a+1)\}(x-t)$
$\therefore\ y=\{-3t^2+2at-(a+1)\}x+2t^3-at^2+10$
즉, $g(t)=2t^3-at^2+10$이므로
$g'(t)=6t^2-2at$
함수 $g(t)$가 구간 $(0,\ 3)$에서 감소하려면
$0<t<3$에서 $g'(t)\le 0$이어야 하므로
다음 그림에서 $g'(3)=54-6a\le 0$



$\therefore\ a\ge 9$
따라서 실수 a의 최솟값은 9이다.

34 정답 ②

해설 $f'(x)=3x^2-x+a$ 이고, $f'(x)=0$ 판별식 D는
$D=1-12a$

ㄱ. $D\le 0$, 즉 $a\ge \frac{1}{12}$ 이면 $f'(x)\ge 0$ 이고, $f(x)$ 는 증가한다. (거짓)

ㄴ. $a=0$ 일 때, $f'(x)=3x^2-x$ 이고, $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 갖고 증가하는 구간과 감소하는 구간이 모두 존재한다. (거짓)

ㄷ. $a<0$ 일 때, $D=1-12a>0$ 이므로
$f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
최고차항의 계수가 양수이고, $f(x)$ 는 구간 (α,β) 에서 감소하므로 $x=\alpha$ 에서 극댓값, $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다.
따라서 $\alpha,\ \beta$ 는 $f'(x)=0$ 의 실근이고,
$f'(x)=3x^2-x+a=0$ 이므로 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

35 정답 ⑤

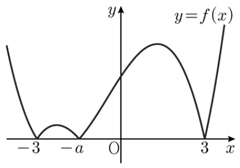
해설 $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$에서
$x=y=0$을 대입하면 $f(0)=0$
x에 x, y에 $-h$을 대입하면
$f(x+h)=f(x)-f(-h)-xh(x+h)$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(0)-f(-h)}{h}-x(x+h)$$
$(\because\ f(0)=0)$
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0)-f(-h)}{h}-x(x+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(-h)-f(0)}{-h}-x(x+h)\right\}$$
$$=f'(0)-x^2$$
$\therefore\ f'(x)=f'(0)-x^2=-x^2+4$
따라서 $x=-2$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 가진다.
즉, $a=2$, $b=-2$이므로 $a-b=4$

36 정답 ①

해설 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.

(ⅰ) $0<a<3$일 때

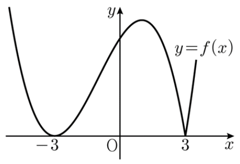
함수 $f(x)=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=3$일 때

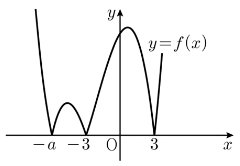
함수 $f(x)=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3,\ 0)$에서 접하고 점 $(3,\ 0)$에서 만나므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a>3$일 때

함수 $f(x)=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a,\ 0)$, $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=3$

이때 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

37 정답 2

해설 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에서 $f(1)=-8$, $f'(1)=0$이므로

$f(1)=a+b+c+d=-8$ $\cdots$ ㉠

$f'(1)=3a+2b+c=0$ $\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $x\to 0$일 때 분모$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 분자$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-15$$

$f(0)=0$에서 $d=0$ $\cdots$ ㉢

$f'(0)=-15$에서 $c=-15$ $\cdots$ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=6,\ c=-15,\ d=0$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-15x$이므로

$f(2)=8+24-30=2$

38 정답 ④

해설 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이므로 $f'(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 3이다.

이때 조건 (나)에서 $x=-3$과 $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=f'(4)=0$에서

$f'(x)$는 $x+3$과 $x-4$를 인수로 갖는다.

$\therefore\ f'(x)=3(x+3)(x-4)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(5+h)-f(5)\}-\{f(5-h)-f(5)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-f(5)}{-h}\\&=f'(5)+f'(5)\\&=2f'(5)\\&=2\cdot 24=48\end{aligned}$$

39 정답 324

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$
$=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{40}{3}$ 극대	↘	-72 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=6$에서 극솟값 -72를 갖는다.

$\therefore\ a=6,\ b=-72$

$f'(3)=-15,\ f(3)=-45$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-45)=-15(x-3)$

$\therefore\ y=-15x$

점 $(6,\ -72)$와 직선 $y=-15x$, 즉 $15x+y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|15\cdot 6+1\cdot(-72)|}{\sqrt{15^2+1^2}}=\frac{18}{\sqrt{226}}$$

$$\therefore\ d=\frac{18}{\sqrt{226}}$$

$$\therefore\ 226d^2=226\cdot\left(\frac{18}{\sqrt{226}}\right)^2=324$$

40 정답 ④

해설 $g(x)=x^2f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로`

$g'(-2)=2\cdot(-2)\cdot f(-2)+(-2)^2\cdot f'(-2)$
$=-4f(-2)+4f'(-2)$

문제의 그림에서 $f(-2)$=-1이고, $x=-2$에서 $f(x)$는 극소이므로 $f'(-2)=0$이다.

$\therefore\ g'(-2)=-4\cdot(-1)+4\cdot 0=4$