

1.

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) - f(1) = x^3 + 13x^2 + 26x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은?¹⁾ [3점]

- ① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

2.

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-4}{2h} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(3) + f'(3)$ 의 값은?²⁾ [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3.

함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & (x < 2) \\ 4x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.)³⁾ [3점]

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

4.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 5$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = 7$$

두 실수 a , b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 일 때, ab 의 값은?

4) [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5.

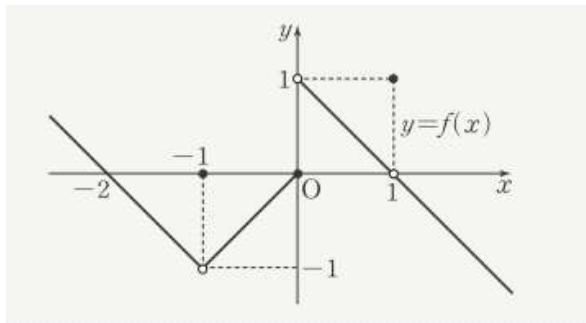
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & (x \neq 4) \\ 2 & (x = 4) \end{cases}$$

에 대하여 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $h'(4) = 6$ 이다. $f(0)$ 의 값을 구하시오.⁵⁾ [4점]

6.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 6) [4점]



<보기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = 0$
- ㄴ. 함수 $y = f(x)f(-x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.
- ㄷ. 함수 $y = f(x)f(-x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8.

함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$ 의 값은?

(단, a 는 상수이다.) 8) [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

9.

함수 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) 9) [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

7.

두 함수

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 $x=0$ 에서 미분가능한 함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?) 7) [4점]

<보기>

- ㄱ. $xf(x)$
- ㄴ. $f(x)g(x)$
- ㄷ. $|f(x)-g(x)|$

10.

함수 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 가 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-4}{h} = 3$ 을 만족시킬 때, 두

상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. 10) [4점]

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11.

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 12$$

를 만족시킨다. $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 라 할 때, $g'(1)$ 의 값을 구하시오.¹¹⁾ [4점]

12.

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ 이고, 함수 $g(x) = x^2 + 3x$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - f(1)g(1)}{x - 1}$ 의 값은?¹²⁾ [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

13.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x - 3) - 1}{x - 3} = 6$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 일 때, $h'(0)$ 의 값을 구하시오.¹³⁾ [4점]

14.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접한다. 함수 $g(x) = (x - 3)f'(x)$ 에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$ 의 값은?¹⁴⁾ [3점]

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

15.

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(ㄱ) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$(ㄴ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$f'(5)$ 의 값을 구하시오.¹⁵⁾ [4점]

16.

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

를 만족시킨다. 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -1$$

일 때, $f(2) + g(3)$ 의 값을?¹⁶⁾ [4점]

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

17.

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(ㄱ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

$$(ㄴ) 1\circ\text{이 아닌 상수 } \alpha\text{에 대하여 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha \circ\text{이다.}$$

$\alpha \times f(4)$ 의 값을 구하시오.¹⁷⁾ [4점]

18.

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)f(x)$$

라 하자. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = -2$ 일 때, $g'(2)$ 의 값을?¹⁸⁾ [4점]

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

19.

상수 a 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = (x^2 - x + a)f(x)$ 라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\text{(1)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(x)}{x - 1} = 0$$

$$\text{(2)} g'(1) \neq 0$$

$\text{(3)} f(\alpha) = f'(\alpha)$ 이고 $g'(\alpha) = 2f'(\alpha)$ 인 실수 α 가 존재한다.

$g(\alpha + 4) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)¹⁹⁾ [4점]

실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-a) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

라 하자. 양의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 t 까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?²⁰⁾ [4점]

<보기>

ㄱ. $a = 1$ 일 때, $g(1) = -1$ 이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 1 일 때, $g(2) = \frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 를 만족시키는 $0 < k < 2$ 인 실수 k 가 존재할 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = -\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

① ㄱ

④ ㄱ, ㄷ

② ㄴ

⑤ ㄴ, ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

〈정답 및 해설〉

1) [정답/모범답안]

1

[해설] 201809고2 가 #13

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3+13h^2+26h}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2+13h+26) = 26 \end{aligned}$$

2) [정답/모범답안]

1

[해설] 2020040고3 나 #10

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-4}{2h} = 1 \text{이} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(3+h)-4\} = 0, \text{ 즉, } f(3) = 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-4}{2h} = \frac{1}{2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{1}{2} f'(3) = 1$$

$$\text{이므로 } f'(3) = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{따라서 } f(3) + f'(3) = 4 + 2 = 6$$

3) [정답/모범답안]

5

[해설] 201809 고2 가 #7

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 미분 가능하다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$8+2a = 8+b, b = 2a$$

(ii) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2+ax-(8+b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2+ax-(8+2a)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(2x+4+a)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+4+a) = 8+a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x+b-(8+b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \text{이므로}$$

$$8+a = 4, \text{ 즉, } a = -4, b = -8$$

$$\text{따라서 } ab = (-4) \times (-8) = 32$$

4) [정답/모범답안]

3

[해설] 202103 고3 확통 #12

조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{이다. 즉, } f(1) = g(1) \dots \text{①}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1} = 5$$

$$\text{즉, } f'(1)-g'(1) = 5 \dots \text{②}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1} = 7 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f'(1)+g'(1) = 7 \dots \text{③}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1) \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때,}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } a = f(1) \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\text{①에서 } f(1) = g(1) \text{이므로 } f'(1) = b \times f(1) = ab$$

$$\text{②, ③을 연립해서 풀면 } f'(1) = 6$$

$$\text{따라서 } ab = 6$$

5) [정답/모범답안]

32

[해설] 201811 고2 나 #29

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) \times \frac{1}{x-4} - 2f(4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-2(x-4)f(4)}{(x-4)^2} = 6 \dots \text{④} \end{aligned}$$

$$\text{④에서 } \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \{f(x)-2(x-4)f(4)\} = 0, \text{ 즉, } f(4) = 0$$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x-4)(x^2+ax+b) \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 놓고 ④에 대입하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2+ax+b)}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+ax+b}{x-4} = 6 \dots \text{⑤}$$

$$\text{⑤에서 } \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2+ax+b) = 0, \text{ 즉, } 16+4a+b = 0$$

$$\text{따라서 } b = -4a - 16 \text{이고 이를 ⑤에 대입하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+ax-4a-16}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+a+4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x+a+4) = a+8 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } a = -2, b = -8$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x-4)(x^2-2x-8) \text{이므로}$$

$$f(0) = (-4) \times (-8) = 32$$

6) [정답/모범답안]

3

[해설] 201411 고2 나 #20

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. -x = t \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0$$

에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = 0$

또한, $f(-1)f(-(-1)) = f(-1)f(1) = 0 \times 1 = 0$ 이므로
함수 $y = f(x)f(-x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다. (참)

□. $f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leq 0) \\ -x + 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$ 이고

$$f(-x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 < x < 0) \\ -x & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$
 이므로

$$f(x)f(-x) = \begin{cases} x^2 + x & (-1 < x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^2 - x & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)f(-x) - f(0)f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)f(-x) - f(0)f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

이므로 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7) [정답/모범답안]

3

[해설] 201311 고2나 #16

ㄱ. $xf(x) = x|x|$ 에서 $xf(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$xf(x) = h_1(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

따라서 함수 $h_1(x)$, 즉 함수 $xf(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 미분계수가

존재하므로 함수 $xf(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)g(x) = \begin{cases} |x| \times (2x + 1) & (x \geq 0) \\ |x| \times (-x - 1) & (x < 0) \end{cases}$
 $= \begin{cases} 2x^2 + x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$

$f(x)g(x) = h_2(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_2(x) - h_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h_2(x) - h_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1$$

따라서 함수 $h_2(x)$, 즉 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 미분계수

가 존재하므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $f(x) - g(x) = \begin{cases} |x| - (2x + 1) & (x \geq 0) \\ |x| - (-x - 1) & (x < 0) \end{cases}$
 $= \begin{cases} -x - 1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$

에서 $|f(x) - g(x)| = \begin{cases} x + 1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$

$|f(x) - g(x)| = h(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 1) - (0 + 1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0$$

이므로 $h'(0)$ 이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $|f(x) - g(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.
이상에서 $x = 0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

8) [정답/모범답안]

3

[해설] 202203 고3 확통 #6

$$\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = 4a - 1 = 7 \text{에서 } a = 2 \text{이다.}$$

한편 $f'(x) = 4x - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \\ &= 2f'(a) \\ &= 2f'(2) = 10 \end{aligned}$$

9) [정답/모범답안]

1

[해설] 201911 고2나 #12

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

따라서 $f(1) = 0$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ 에서 $f(1) = 2 + a + b = 0$, $a + b = -2$ ⑦

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 5$$

$f'(x) = 4x + a$ 이므로

$f'(1) = 4 + a = 5$ 에서 $a = 1$ ⑧

⑦, ⑧에서 $a = 1$, $b = -3$

따라서 $f(x) = 2x^2 + x - 3$ 이므로 $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$

10) [정답/모범답안]

181

[해설] 201611 고2나 #26

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{h} = 3 \text{에서 } \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \text{이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+h) - 4\} = 0$$

따라서 $f(2) = 4$

$f(x) = 3x^2 + ax + b$ 에서 $f(2) = 12 + 2a + b = 4$

$2a + b = -8$ ⑨

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 3$$

$f'(x) = 6x + a$ 이므로

$f'(2) = 12 + a = 3$ 에서 $a = -9$ ⑩

⑨, ⑩에서 $a = -9$, $b = 10$ 따라서 $a^2 + b^2 = 81 + 100 = 181$

11) [정답/모범답안]

28

[해설] 201809 고2나 #26

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x-1} = 12 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0$$

따라서 $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 12$$

$g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 에서 $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$ 으로
 $g'(1) = 2f(1) + 2f'(1) = 2 \times 2 + 2 \times 12 = 28$

12) [정답/모범답안]

3

[해설] 201509 고2 가 #15

함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - f(1)g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

$h(x) = f(x)g(x)$ 으로 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$g(x) = x^2 + 3x$ 에서 $g'(x) = 2x + 3$

$g(1) = 1 + 3 = 4, g'(1) = 2 + 3 = 5$

따라서 $h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \times 4 + 1 \times 5 = 13$

13) [정답/모범답안]

15

[해설] 201609 고2가 #26

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 2\} = 0$ 에서 $f(0) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x-3) - 1}{x-3} = 6$ 에서 $x-3=t$ 라 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-1}{t} = 6$ 에서 극한값이 존재하고 $t \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

즉, $\lim_{t \rightarrow 0} \{g(t)-1\} = 0$ 에서 $g(0) = 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0) = 6$$

$h(x) = f(x)g(x)$ 으로 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

따라서 $h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 3 \times 1 + 2 \times 6 = 15$

14) [정답/모범답안]

3

[해설] 202003 고3 나 #13

이차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접하므로 $f(x) = (x-a)^2$ (a 는 상수)라 하면

$f'(x) = 2(x-a)$

$$g(x) = (x-3)f'(x) = 2(x-a)(x-3) \\ = 2x^2 - 2(a+3)x + 6a$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

x 의 계수가 0이다. 즉, $a = -3$

따라서 $f(x) = (x+3)^2$ 에서 $f(0) = 3^2 = 9$

15) [정답/모범답안]

40

[해설] 201509 고2나 #26

조건 (b)에서 함수 $f(x) - 2x^2$ 은 이차항의 계수가 2인 이차함수이고

조건 (b)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2x^2\} = 0$ 으로 방정식 $f(x) - 2x^2 = 0$ 을

$x = 1$ 을 실근으로 갖는다.

즉, $f(x) - 2x^2 = 2(x-1)(x-a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x-a)}{x^2 - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-a)}{x+1} = 1-a = 2$$

따라서 $a = -1$

$$f(x) = 2x^2 + 2(x-1)(x+1) = 4x^2 - 2$$

따라서 $f'(x) = 8x$ 이므로 $f'(5) = 40$

16) [정답/모범답안]

2

[해설] 201709 고2가 #19

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$ 이므로 두 다향함수 $f(x), g(x)$ 의 모든 항의 차수는 홀수이다.

두 훌수 m, n 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 최고차항을 각각 x^m, x^n 이라 하면, 두 도함수 $f'(x), g'(x)$ 의 최고차항은 각각 mx^{m-1}, nx^{n-1} 이다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3$$
에서 $m-1 = 2+(n-1)$, 즉 $m=n+2$ …… ⑦

또, 최고차항의 계수의 비에서 $\frac{m}{n} = 3$ …… ⑧

⑦, ⑧에서 $m=3, n=1$

$f(x) = x^3 + ax$ (a 는 상수), $g(x) = x$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + ax)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) = a = -1$$

따라서 $f(x) = x^3 - x, g(x) = x$ 이므로

$$f(2) + g(3) = (8-2) + 3 = 9$$

17) [정답/모범답안]

18

[해설] 202111 고2 #28

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$
이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $f(1)=0$ …… ⑨

조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha (\alpha \neq 1)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f'(x) = 0$$
이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ …… ⑩

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $f(2)=0$ …… ⑪

⑨, ⑪에 의해

$f(x) = k(x-1)(x-2)(x+a)$ (k, a 는 상수, $k \neq 0$)

$$f'(x) = k\{(x-2)(x+a) + (x-1)(x+a) + (x-1)(x-2)\} \\ a \neq -2$$
라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)} = \frac{2+a}{2+a} = 1 \neq \alpha$$

그러므로 $a = -2$ 이며 $f(x) = k(x-1)(x-2)^2$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2 + 2k(x-1)(x-2)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)+2(x-1)} \\ &= \frac{1}{0+2 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 \text{이므로 } k=3 \\ \text{따라서 } \alpha \times f(4) &= \frac{1}{2} \times (3 \times 3 \times 2^2) = 18 \end{aligned}$$

18)[정답/모범답안]

2

[해설] 202211 고2 #17

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2 - 2x + 2)f(x) \text{에서 } g(2) = 2f(2) \\ g'(x) &= (2x-2)f(x) + (x^2 - 2x + 2)f'(x) \text{에서} \\ g'(2) &= 2f(2) + 2f'(2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = -2 \text{에서 } f(2) \neq \frac{1}{2} \text{이라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \frac{g(2)-1}{2f(2)-1} = \frac{2f(2)-1}{2f(2)-1} = 1 \neq -2$$

$$\text{이므로 } f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } g(2) = 2f(2) = 1 \text{이고 } g'(2) = 2f'(2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{2\{f(x)-f(2)\}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x-2}{2}}{2 \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$

이때 $f'(2) = 0$ 이라 하면 $g'(2) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} \text{의 값이 존재하지 않는다. 그러므로 } f'(2) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \frac{g'(2)}{2f'(2)} = \frac{g'(2)}{g'(2)-1} = -2 \quad \text{따라서 } g'(2) = \frac{2}{3}$$

19)[정답/모범답안]

61

{문제 풀이}

STEP 1 조건 (㉠), (㉡)를 이용하여 a 와 $f(1)$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad (b, c \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

조건 (㉠)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a)f(x) - f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)f(x)}{x-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + a - 1)f(x) = (a-1)f(1) = 0$$

따라서 $a=1$ 또는 $f(1)=0$

(i) $a \neq 1$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이어야 하므로

$$c = -b - 1 \text{이고 } f(x) = (x-1)(x+b+1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)(x-1)(x+b+1)}{x-1} \\ &= (a-1)(b+2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b=-2, f(x) = (x-1)^2$$

$$g'(x) = (2x-1)(x-1)^2 + (x^2 - x + a)(2x-2) \text{에서}$$

$g'(1) = 0$ 이므로 조건 (㉡)을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1) \neq 0$ 이라 하면 $a=1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)f(x)}{x-1} = f(1) = 0$$

이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=1$ 이고 $f(1)=0$ 이며 $b \neq -2$

STEP 2 α 의 값을 구한다.

$$f(x) = (x-1)(x+b+1) \text{에서 } f'(x) = 2x+b$$

$$g(x) = (x^2 - x + 1)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = (2x-1)f(x) + (x^2 - x + 1)f'(x)$$

조건 (㉠)에서 $f(\alpha) = f'(\alpha)$ 이므로

$$(\alpha-1)(\alpha+b+1) = 2\alpha+b \quad \dots \dots \oplus$$

$$g'(\alpha) = (2\alpha-1)f(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha)$$

$$g'(\alpha) = 2f'(\alpha) \text{이므로}$$

$$(2\alpha-1)f'(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha) = 2f'(\alpha)$$

$$(\alpha^2 + \alpha - 2)f'(\alpha) = 0$$

$$(\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b) = 0$$

따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$

이때 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$ 이면

⑦에서 $b=-2$ 이므로 $b \neq -2$ 인 것에 모순이다.

즉, $\alpha=-2$ 이므로 ⑦에서 $b=\frac{7}{4}$ 이고

$$g(x) = (x^2 - x + 1)(x-1)\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

STEP 3 $p+q$ 의 값을 구한다.

$$g(\alpha+4) = g(2) = 3 \times 1 \times \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$$

따라서 $p=4, q=57$ 이므로 $p+q=4+57=61$

20) ④

$f(0)=a$ 이므로 양수 t 에 대하여

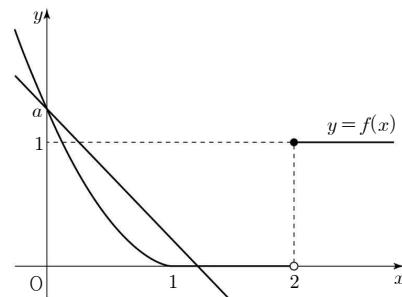
$$g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)-a}{t}$$

이고, 함수 $g(t)$ 의 값은 두 점 $(0, a), (t, f(t))$ 를

지나는 직선의 기울기와 같다.

$$\therefore a=1 \text{일 때 } g(1) = \frac{f(1)-1}{1} = -1 \text{ (첨)}$$

∴ (i) $a \geq 1$ 일 때

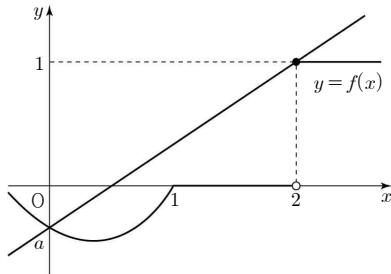


모든 양수 t 에 대하여

$$f(t) \leq a \text{이므로 } g(t) = \frac{f(t)-a}{t} \leq 0$$

그러므로 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 1이 될 수 없다.

(ii) $-1 < a < 1$ 일 때

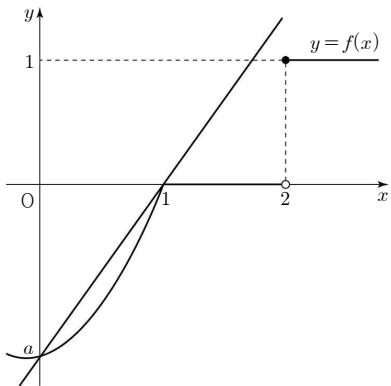


함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-a}{2} < 1$$

그러므로 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 1보다 작다.

(iii) $a \leq -1$ 일 때



함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(1) = \frac{f(1)-a}{1} = -a$$

함수 $g(t)$ 의 최댓값이 1이기 위해서는

$$a = -1$$

$$\text{이 때 } g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

함수 $g(t)$ 의 최댓값이 1일 때, $g(2)=1$ (거짓)

c. $0 < k < 2$ 인 k 에 대하여

두 점 $(0, a)$, $(k, f(k))$ 를 지나는 직선을 l 이라

하자. $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인

양수 k ($0 < k < 2$)가 존재하기 위해서는

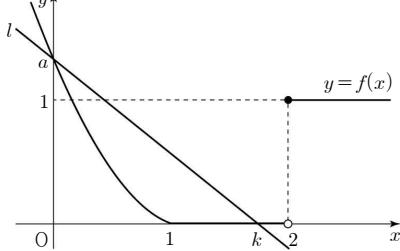
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 l 의 교점 중

$(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이어야 하고,

이 세 교점의 x 좌표는 k , $k+1$, $k+2$ 이어야

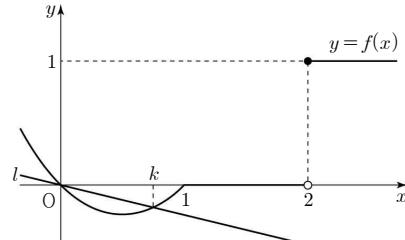
한다.

(i) $a > 0$ 일 때



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 l 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점은 $(k, f(k))$ 뿐이므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인 k 가 존재하지 않는다.

(ii) $a = 0$ 일 때



$0 < k < 1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 l 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점은 $(k, f(k))$ 뿐이므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인 k 가 존재하지 않는다.

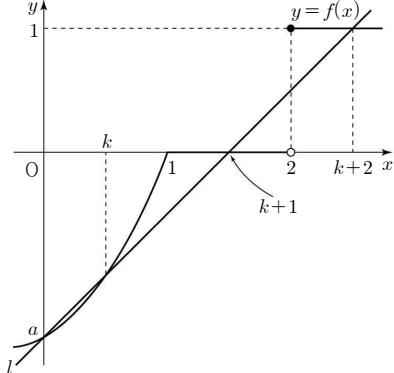
$1 \leq k < 2$ 일 때, 직선 l 의 기울기가 0이므로 $g(k)=0$

$$\text{이 때 } g(k+1) = \frac{1-0}{(k+1)-0} = \frac{1}{k+1} > 0 \text{ 이므로}$$

$$g(k) \neq g(k+1)$$

그러므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인 k 가 존재하지 않는다.

(iii) $a < 0$ 일 때



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 l 의 교점 중 $(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이기 위해서는

$0 < k < 1$ 이고

$$f(k+1)=0, f(k+2)=1 \text{이어야 한다.}$$

$$\frac{1-0}{(k+2)-(k+1)} = 1 \text{이므로 직선 } l \text{의}$$

기울기는 1

직선 l 위의 두 점 $(k, f(k)), (k+1, 0)$ 에

$$\text{대하여 } \frac{0-f(k)}{(k+1)-k} = 1 \text{에서 } f(k) = -1$$

$$\therefore (k-1)(k-a) = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

직선 l 위의 두 점 $(0, a), (k, f(k))$ 에

$$\text{대하여 } \frac{f(k)-a}{k-0} = \frac{-1-a}{k} = 1 \text{에서}$$

$$a = -k-1 \quad \dots \textcircled{2}$$

\textcircled{1}, \textcircled{2} 을 연립하면

$$(k-1)(2k+1) = -1, 2k^2 - k = 0$$

$$0 < k < 1 \text{이므로 } k = \frac{1}{2}, a = -\frac{3}{2}$$

그러므로

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

○] 때

$$\begin{aligned} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) &= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ &= \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16} \end{aligned}$$

함수 $y = f(x)$ 의 최솟값 $-\frac{25}{16}$ 가 $-\frac{3}{2}$ 보다

작으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = -\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서

만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ