교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (부정적분과 정적분)131~133p_중단원

부정적분 ~ 정적분

실시일자	-
16문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2022년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=12x^3-3x^2$이고 $f(0)=-4$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

02 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $6x^2+2$이다. 이 곡선이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, $f(1)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

03 함수 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t+k)dt$가 $x=-2$에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수)

① -6　② $-\frac{11}{2}$　③ -5　④ $-\frac{9}{2}$　⑤ -4

04 미생물 배양기에 있는 어떤 미생물의 처음 개체 수가 20이고 t시간 후의 개체 수를 $F(t)$라 하면 $F'(t)=20\left(4t+\frac{1}{2}\right)$이 성립한다고 한다. 3시간 후의 개체 수를 구하시오.

05 1보다 큰 자연수 n에 대하여 $\int_{0}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx=50$일 때, n의 값은?

① 25　② 50　③ 75　④ 100　⑤ 125

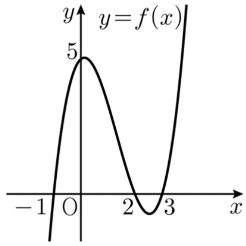
06 $\int_{-2}^{2}|x^2-2x-3|dx$의 값을 구하시오.

07 $\int_0^a |2x^2-4x|dx=\frac{16}{3}$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. (단, $a>2$)

08 $\int_0^a(-3x^2-2x+6)dx=0$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

09 다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(x)=9x^2+\int_0^1(x+3)f(t)dt$가 성립할 때,
$5f'(2)$의 값을 구하시오.

10 다음 그림은 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프이다.
$f(-1)=f(2)=f(3)=0$, $f(0)=5$일 때,
$\int_0^3 f'(x)dx$의 값은?



① -5 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 5

11 함수 $f(x)=5x^3-7x+8$에 대하여
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$의 값을 구하시오.

12 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$f'(x)=\begin{cases} 8x-4 & (x \geq 1) \\ 3x^2+1 & (x<1) \end{cases}$일 때, $f(0)-f(2)$의 값을 구하시오.

13 다음 조건을 모두 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은?

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x-2}=3$	(나) $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{x-4}=2$

① $\frac{28}{3}$　② 10　③ $\frac{32}{3}$

④ $\frac{34}{3}$　⑤ 12

14 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x} f(t)dt=3x^3+ax^2+bx-3$을 만족시킨다.

$f(2)=0$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -12　② -14　③ -16

④ -18　⑤ -20

15 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$\int_{-2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+4x^2+4x$를 만족시킬 때,

$f(0)$의 값은?

① 0　② 2　③ 4

④ 6　⑤ 8

16 어느 대학의 교수가 학생들을 대상으로 수학 공식 기억 실험을 하였다. 그 결과 학생이 수학 공식 암기를 시작한 지 t분 후의 기억량의 시간에 대한 변화율을 $f(t)$라 할 때, 그 기억량은 $\int_{0}^{t} f(x)dx$임을 알아내었다고 한다.

어느 학생이 수학 공식을 암기하기 시작한 지 t분 후의 기억량의 시간에 대한 변화율이 $f(t)=-0.001t^4+3.6t$이라 할 때, 이 학생의 20분 후의 기억량을 구하시오.

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (부정적분과 정적분)131~133p_중단원

부정적분 ~ 정적분

실시일자	-
16문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 52	02 ③	03 ④
04 410	05 ②	06 $\frac{34}{3}$
07 3	08 2	09 174
10 ①	11 6	12 -10
13 ③	14 ④	15 ⑤
16 80		

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (부정적분과 정적분)131~133p_중단원

부정적분 ~ 정적분

실시일자	-
16문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 52

해설 $f(x)=\int(12x^3-3x^2)dx$

$=3x^4-x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=C=-4$이므로

$f(x)=3x^4-x^3-4$

$\therefore f(-2)=48+8-4=52$

02 정답 ③

해설 $f'(x)=6x^2+2$이므로

$f(x)=\int(6x^2+2)dx=2x^3+2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=C=2$

따라서 $f(x)=2x^3+2x+2$이므로

$f(1)=2+2+2=6$

03 정답 ④

해설 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t+k)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x+k$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=0$, 즉 $4-2+k=0$

$\therefore k=-2$

$\therefore f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은

$f(1)=\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_{-2}^{1}=-\frac{9}{2}$

04 정답 410

해설 $F(t)=\int F'(t)dt=\int 20\left(4t+\frac{1}{2}\right)dt$

$=\int(80t+10)dt$

$=40t^2+10t+C$ (단, C는 적분상수)

이 미생물의 처음 개체 수가 20이므로

$F(0)=20$에서 $C=20$

$\therefore F(t)=40t^2+10t+20$

따라서 3시간 후의 개체 수는

$F(3)=40\cdot3^2+10\cdot3+20=410$

05 정답 ②

해설 $\int_0^1(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$=\left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]_0^1$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$

이므로 $n=50$

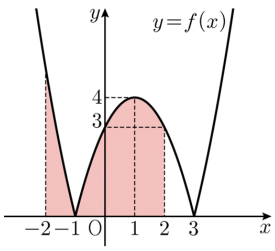
06

정답 $\dfrac{34}{3}$

해설 $f(x)=|x^2-2x-3|$이라 하면

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & (-2\le x\le -1) \\ -x^2+2x+3 & (-1\le x\le 2) \end{cases}$$



따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_{-2}^{2}|x^2-2x-3|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$$

07

정답 3

해설 $|2x^2-4x|=\begin{cases} 2x^2-4x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -2x^2+4x & (0<x<2) \end{cases}$

이때 $a>2$이므로

$$\int_{0}^{a}|2x^2-4x|dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)dx+\int_{2}^{a}(2x^2-4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{2}^{a}$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+8\right)+\left\{\left(\frac{2}{3}a^3-2a^2\right)-\left(\frac{16}{3}-8\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{16}{3}$$

이때 $\dfrac{2}{3}a^3-2a^2+\dfrac{16}{3}=\dfrac{16}{3}$이므로

$2a^3-6a^2=0,\ a^2(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>2)$

08

정답 2

해설 $\displaystyle\int_{0}^{a}(-3x^2-2x+6)dx=\left[-x^3-x^2+6x\right]_{0}^{a}$

$=-a^3-a^2+6a$

따라서 $-a^3-a^2+6a=0$이므로

$a(a-2)(a+3)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

09

정답 174

해설 $\displaystyle f(x)=9x^2+\int_{0}^{1}(x+3)f(t)dt$

$\displaystyle =9x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt+3\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=9x^2+kx+3k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(9t^2+kt+3k)dt=k$$

$$\left[3t^3+\frac{1}{2}kt^2+3kt\right]_{0}^{1}=k$$

$$3+\frac{1}{2}k+3k=k$$

$$\therefore\ k=-\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=9x^2-\dfrac{6}{5}x-\dfrac{18}{5}$이므로

$$f'(x)=18x-\frac{6}{5}$$

$$\therefore\ 5f'(2)=5\cdot\frac{174}{5}=174$$

10

정답 ①

해설 $\displaystyle\int_{0}^{3}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{0}^{3}=f(3)-f(0)$

$=0-5=-5$

11

정답 6

해설 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=F'(1)=f(1)=6$$

12 정답 -10

해설 $f'(x)=\begin{cases} 8x-4 & (x\ge 1) \\ 3x^2+1 & (x<1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} 4x^2-4x+C_1 & (x\ge 1) \\ x^3+x+C_2 & (x<1) \end{cases}$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(x^3+x+C_2)=f(1)$

$1+1+C_2=4-4+C_1$

$\therefore C_1-C_2=2$

$\therefore f(0)-f(2)=C_2-(16-8+C_1)$

$=-8-(C_1-C_2)$

$=-8-2$

$=-10$

13 정답 ③

해설 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-2}=3$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 3인 일차함수이다.

즉, $f'(x)=3x+k$ (k는 상수)라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to 4$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 4}f(x)=0$이므로 $f(4)=0$

$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=2$

$f'(4)=12+k=2$에서 $k=-10$

$\therefore f'(x)=3x-10$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-10)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-10x+C$

$f(4)=24-40+C=-16+C=0$

$\therefore C=16$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-10x+16$

따라서 방정식 $\frac{3}{2}x^2-10x+16=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\frac{16}{\frac{3}{2}}=\frac{32}{3}$

14 정답 ④

해설 $\int_{-1}^{x}f(t)dt=3x^3+ax^2+bx-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-3+a-b-3$

$a-b=6$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2+2ax+b$

$f(2)=0$이므로 $36+4a+b=0$

$4a+b=-36$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=-12$

$\therefore a+b=-18$

15 정답 ⑤

해설 $\int_{-2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+4x^2+4x$에서

$x\int_{-2}^{x}f(t)dt-\int_{-2}^{x}tf(t)dt=x^3+4x^2+4x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-2}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+8x+4$

$\therefore \int_{-2}^{x}f(t)dt=3x^2+8x+4$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+8$

$\therefore f(0)=8$

16 정답 80

해설 $f(t)=-0.001t^4+3.6t$이므로 학생의 20분 후의 기억량은

$\int_{0}^{20}(-0.001t^4+3.6t)dt$

$=\left[-\frac{1}{5000}t^5+\frac{9}{5}t^2\right]_0^{20}$

$=-\frac{1}{5000}\cdot 20^5+\frac{9}{5}\cdot 20^2$

$=80$