〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

여러가지 방정식편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

[3차 방정식]

1.내신 핵심 문항

삼차방정식 $x^3+2x^2-2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때 세 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

풀이)

풀 이

두 가지 풀이법
1. 근과 계수와의 관계로 풀어 보자
2. 역수로 갖는 방정식으로 생각해보자

방법1)

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이

$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=-a$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2=b$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1=-c$$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=1$이므로

$abc=-2\cdot 2\cdot 1=-4$

방법2)

역수 방정식으로 보면 된다.
a=-2, b=2,c=1 따라서 abc=-4

(내용정리)

역수 관계 삼차방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하자.

양변을 x^3로 나누면 $a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$x=\alpha$를 대입해 보면

$a+b(\frac{1}{\alpha})+c(\frac{1}{\alpha})^2+d(\frac{1}{\alpha})^3=0$이다.

즉 근이 $\frac{1}{\alpha}$이 된다.

따라서 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 α, β, γ라 하면

$a+b(\frac{1}{x})+c(\frac{1}{x})^2+d(\frac{1}{x})^3=0$

$\leftrightarrow d(\frac{1}{x})^3+c(\frac{1}{x})^2+b(\frac{1}{x})+a=0$ 의 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=-\frac{a}{d}$

[3차 방정식]

2.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3+(a-1)x^2+2ax+12=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 조립제법으로 인수분해 한다.
2. 이차방정식과 구한 근을 비교해 본다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+2ax+12$로 놓으면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a-1 & 2a & 12 \\ & & -2 & -2a+6 & -12 \\ \hline & 1 & a-3 & 6 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+2)\{x^2+(a-3)x+6\}$

이때 방정식이 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 $x=-2$를 근으로 가질 때

$4-2(a-3)+6=0$

$\therefore\ a=8$

다음 페이지 계속

(ⅱ) 방정식 $x^2+(a-3)x+6=0$이 중근을 가질 때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-24=0$

$a^2-6a-15=0$

$\therefore\ a=3\pm\sqrt{24}=3\pm2\sqrt{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$8+(3-2\sqrt{6})+(3+2\sqrt{6})=14$

[3차 방정식]

3.내신 킬러 문항

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식

$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) x에 대한 삼차방정식 $P(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 곱은 5이다.

(나) x에 대한 삼차방정식 $P(3x-1)=0$은 한 근 0과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 합은 2이다.

$a+b+c$의 값은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]

$f(x) = 0$의 근 $\alpha \leftrightarrow f(ax+b) = 0$의 근은

$ax + b = \alpha \leftrightarrow x = \dfrac{\alpha - b}{a}$

삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

방정식 $P(x) = 0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면 방정식 $P(3x-1) = 0$의 세 근은

$\dfrac{\alpha+1}{3}, \dfrac{\beta+1}{3}, \dfrac{\gamma+1}{3}$

조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma = 5$ ⋯ ㉠

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{\alpha+1}{3} = 0$이고, $\dfrac{\beta+1}{3} + \dfrac{\gamma+1}{3} = 2$이므로

$\alpha = -1, \beta + \gamma = 4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5) = 0$

$P(x) = (x+1)(x^2-4x+5)$

$\quad = x^3 - 3x^2 + x + 5$

따라서 $a = -3, b = 1, c = 5$이므로

$a + b + c = 3$

[3차 방정식]

4.내신 킬러 문항

삼차방정식 $x^3 - x^2 - kx + k = 0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. α, β 중 실수는 하나뿐이고 $\alpha^2 = -2\beta$일 때, $\beta^2 + \gamma^2$의 값은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 인수분해를 해본다.
2. 실수는 하나뿐임을 분석해 본다.

삼차방정식의 근에 대한 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

$x^3 - x^2 - kx + k = 0$에서

$x^2(x-1) - k(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2-k) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x^2 = k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k > 0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k < 0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x = 1$뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha = 1$ 또는 $\beta = 1$

(ⅰ) $\alpha = 1$일 때

$\alpha^2 = -2\beta$에서 $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}$ 이므로

α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

다음 페이지 계속

(ii) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

[3차 방정식]

5.내신 킬러 문항

방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, 실수 p, q의 곱은?

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 두근이 허근임을 확인한다.
2.α와 α^2은 서로 켤레 복소수 관계

(ⅰ) 한 허근을 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\alpha^2=a-bi$ (∵ 계수가 실수인 방정식)

$\therefore (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$

$a^2-b^2=a\cdots\cdots\cdots$ ①

$2ab=-b\cdots\cdots\cdots$ ②

①, ② 에서 $b\neq 0$ 이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

[3차 방정식]

6.내신 킬러 문항

서로 다른 세 수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오.

(가) $a^3-4a^2-2a+10=a^2+b^2+c^2$

(나) $b^3-4b^2-2b+10=a^2+b^2+c^2$

(다) $c^3-4c^2-2c+10=a^2+b^2+c^2$

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
1. 동일한 꼴을 확인한다.
2. 삼차방정식을 찾는다.
3. 근이 a ,b ,c 임을 확인한다.

조건 (가), (나), (다)에서

$$a^3-4a^2-2a+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$b^3-4b^2-2b+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

$$c^3-4c^2-2c+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$$x^3-4x^2-2x+10-(a^2+b^2+c^2)=0$$

의 세 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=-2$,

$abc=a^2+b^2+c^2-10$

$$\begin{aligned}\therefore\ abc&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-10\\&=16-2\cdot(-2)-10\\&=16+4-10\\&=10\end{aligned}$$

10

[3차 방정식]

7.내신 킬러 문항

x에 대한 삼차식

$$f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

ㄴ. $a<b<0$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근의 합이 7이 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

풀이)

풀 이

[핵심포인트!]
ㄴ. 존재성임을 확인한다.

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$이므로 조립제법에 의하여

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\
 & & 1 & 2a & b^2 \\
\hline
 & 1 & 2a & b^2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}
$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

이때 $a<b<0$이면 $a-b<0$, $a+b<0$이므로

$D>0$이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

한편, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하고 $1+2a+b^2=0$이어야 한다.

다음 페이지 계속

예를 들어 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$ 이면

$a<b<0$이고 $1+2a+b^2=0$이며,

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$

이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른

두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의

합이 $-2a$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른

실근의 합은 $1+(-2a)=7$에서 $a=-3$

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$이어야 하므로 $b^2<a^2=9$

또, $x=1$이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이

아니어야 하므로 $1+2a+b^2\neq 0$, 즉 $b^2\neq 5$

그러므로 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$,

$(-3, 2)$, 그 개수는 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.