개념원리(2025) - 공통수학2 (증며,산술,코시부등식) 192~203p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음은 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$임을 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 식 또는 기호를 차례대로 나열한 것은?

> $a>0$, $b>0$일 때,
> $\boxed{(가)}-\boxed{(나)}$
> $=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$
> $\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
> 그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$이므로
> $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

	(가)	(나)	(다)
①	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$<$
②	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$>$
③	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$<$
④	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$(\sqrt{a+b})^2$	$>$
⑤	$(\sqrt{a+b})^2$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	$>$

02 $x>0$, $y>0$일 때, $\dfrac{y}{4x}+\dfrac{9x}{y}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

03 양수 x, y에 대하여 $x+\dfrac{y}{4}=3$일 때, xy의 최댓값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

04 $x\geq 1$일 때, $3x+6+\dfrac{1}{3x-2}$의 최솟값을 m, 그때의 x의 값을 n이라 하자. 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

05 실수 x, y에 대하여 $x+y=2$일 때, x^2+y^2의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$일 때, $2a+3b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 M^2+m^2의 값은?

① 24　② 26　③ 28
④ 30　⑤ 32

07 둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하자. $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값을 M이라 할 때, $\sqrt{6}\,M$의 값을 구하시오.

08 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c에 대하여 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'이므로
> $a^2+b^2=3m+\boxed{(가)}$, $c^2=3n+\boxed{(나)}$
> $\therefore a^2+b^2\neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수)
> 따라서 대우가 $\boxed{(다)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(다)}$이다.

위 과정에서 (가) ~ (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	0	참
②	1	2	거짓
③	2	1	참
④	2	0	참
⑤	2	1	거짓

09 다음은 자연수 n에 대하여 명제 'n^2이 6의 배수이면 n도 6의 배수이다.'가 참임을 그 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는 'n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.'이다.
> k가 자연수일 때 n을 $\boxed{(가)}$ 또는 $6k-2$ 또는 $6k-3$ 또는 $6k-4$ 또는 $6k-5$라 하면
> (i) $n=\boxed{(가)}$일 때,
> $n^2=6(6k^2-2k)+\boxed{(나)}$
> (ii) $n=6k-2$일 때,
> $n^2=6(6k^2-4k)+4$
> (iii) $n=6k-3$일 때,
> $n^2=6(\boxed{(다)})+3$
> (iv) $n=6k-4$일 때,
> $n^2=6(6k^2-8k+2)+4$
> (v) $n=6k-5$일 때,
> $n^2=6(6k^2-10k+4)+\boxed{(나)}$
> 즉, n^2은 6으로 나누면 나머지가 $\boxed{(나)}$ 또는 3 또는 4인 자연수가 되므로 n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(a)+g(a)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

10 다음은 자연수 m, n에 대하여 명제 'm^2+n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{(가)}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
> mn이 $\boxed{(가)}$이면 m, n이 모두 $\boxed{(가)}$이므로 $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.
> 이때 $m^2+n^2=\boxed{(다)}$이므로 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
② 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
③ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
④ 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
⑤ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)+1$

11 다음은 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

[증 명]

$\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{(가)}$ 인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{2}p=q$

양변을 제곱하면 $2p^2=q^2$ 이므로

q는 $\boxed{(나)}$ 이다.

따라서 p는 $\boxed{(다)}$ 이므로 $\boxed{(가)}$ 에 모순이다.

즉, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 양수, 3의 배수, 짝수
② 음수, 짝수, 홀수
③ 서로소, 홀수, 3의 배수
④ 서로소, 홀수, 홀수
⑤ 서로소, 짝수, 짝수

12 다음은 $\sqrt{5}$ 가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

$\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{(가)}$ 인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{5}p=q$

양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$ 이므로

q는 $\boxed{(나)}$ 이다.

따라서 p는 $\boxed{(다)}$ 이므로 $\boxed{(가)}$ 에 모순이다.

즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	양수	5의 배수	짝수
②	음수	짝수	홀수
③	서로소	홀수	5의 배수
④	서로소	5의 배수	짝수
⑤	서로소	5의 배수	5의 배수

13 다음은 명제 '실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$ 이고 $b=0$이다.'가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

<증명>
주어진 명제의 결론을 부정하여
$\boxed{\quad (가) \quad}$이라 가정하면 $a^2>0$이거나 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2 \boxed{(나)} 0$ 이다.
그런데 이것은 $a^2+b^2 \boxed{(다)} 0$이라는 가정에 모순되므로 $a=0$이고 $b=0$이다.
따라서 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① $a=0$ 이고 $b=0$, $=$, $>$
② $a=0$ 이고 $b=0$, $>$, $=$
③ $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $=$, $=$
④ $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $=$, $>$
⑤ $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $>$, $=$

14 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$ 이 무리수임을 증명한 것이다.

$\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면
$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
로 놓을 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$p^2(n^2+1)=q^2$이다.
p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
$n^2=\boxed{(가)}$이다.
자연수 k에 대하여
(i) $q=2k$일 때
$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(나)}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(ii) $q=2k+1$일 때
$\boxed{(나)}<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여
$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
따라서 $\sqrt{n^2+1}$ 은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값은?

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

15 다음은 실수 x, y에 대하여
부등식 $|x|+|y| \geq |x-y|$가 성립함을 증명하는
과정이다.

$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$
$=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x-y)^2$
$=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$
$=2(\boxed{(가)}) \geq 0$ ($\because$ $|xy| \geq -xy$)
$\therefore$ $(|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$
그런데 $|x|+|y| \geq 0$, $|x-y| \geq 0$이므로
$|x|+|y| \geq |x-y|$
(단, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한
것은?

① $|xy|+xy$, $xy \leq 0$
② $|xy|+xy$, $xy \geq 0$
③ $|xy|-xy$, $xy \leq 0$
④ $|xy|-xy$, $xy \geq 0$
⑤ $|xy|-xy$, $xy=0$

16 두 실수 a, b에 대하여 $ab<0$, $a-3b=8$일 때,
$\frac{3}{a}-\frac{1}{b}$의 최솟값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

17 양수 x, y에 대하여 $5x^2+125y^2=2$일 때,
xy는 $x=\alpha$, $y=\beta$에서 최댓값 γ를 갖는다.
이때 $\alpha\beta+\gamma$의 값은?

① $\frac{1}{25}$　② $\frac{2}{25}$　③ $\frac{3}{25}$
④ $\frac{4}{25}$　⑤ $\frac{1}{5}$

18 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ (단, a는 실수)이 허근을
가질 때, $a+\frac{1}{a-4}$의 최솟값을 구하시오.

19 $x>0$, $y>0$일 때, $\left(2y+\frac{1}{4x}\right)\left(8x+\frac{12}{y}\right)$의 최솟값은?

① $26+4\sqrt{3}$　② $26+8\sqrt{3}$
③ $28+2\sqrt{3}$　④ $28+4\sqrt{3}$
⑤ $28+8\sqrt{3}$

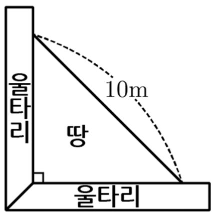
20 두 양수 a, b에 대하여 $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{9}{b}\right)$의 최솟값은?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 32　　⑤ 40

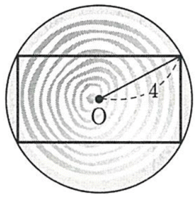
21 세 양수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{2a+2b}{c}+\dfrac{2b+2c}{a}+\dfrac{2c+2a}{b}$의 최솟값은?

① 10　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 18

22 다음 그림과 같이 수직인 두 울타리 사이를 길이가 $10\,\mathrm{m}$인 막대로 막은 삼각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 넓이의 최댓값이 $k\,\mathrm{m}^2$일 때, k의 값을 구하시오.



23 다음 그림과 같이 단면의 반지름의 길이가 4인 통나무를 가지고 밑면이 직사각형인 사각기둥을 만들려고 한다. 그 밑면의 넓이가 최대가 될 때, 밑면의 넓이를 구하시오.



24 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a^2+b^2=56$, $c^2+d^2=126$일 때, $ab+cd$의 최댓값 p와 $ac+bd$의 최솟값 q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $abcd\neq 0$)

25 원 $x^2+y^2=50$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, $a>0$, $b>0$)

개념원리(2025) - 공통수학2 (증며,산술,코시부등식) 192~203p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ②	03 ③
04 ④	05 ②	06 ②
07 30	08 ③	09 ③
10 ③	11 ⑤	12 ⑤
13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ②	17 ②	18 6
19 ②	20 ④	21 ②
22 25	23 32	24 7
25 50		

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $a>0$, $b>0$일 때,

$\boxed{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\boxed{(\sqrt{a+b})^2}$

$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{>}\ 0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

02 정답 ②

해설 $x>0$, $y>0$에서 $\frac{y}{4x}>0$, $\frac{9x}{y}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{y}{4x}+\frac{9x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{9x}{y}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{y}{4x}=\frac{9x}{y}\text{, 즉 } y=6x\text{일 때 성립한다.}\right)$

$=2\sqrt{\frac{9}{4}}=2\cdot\frac{3}{2}=3$

따라서 $\frac{y}{4x}+\frac{9x}{y}$의 최솟값은 3이다.

03 정답 ③

해설 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{y}{4}}$

(단, 등호는 $x=\frac{y}{4}$일 때 성립한다.)

$3\geq 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{xy}\ \left(\because x+\frac{y}{4}=3\right)$

$3\geq\sqrt{xy}$

$\therefore xy\leq 9$

따라서 xy의 최댓값은 9이다.

04 정답 ④

해설 $x\geq 1$에서 $3x-2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+6+\frac{1}{3x-2}=3x-2+\frac{1}{3x-2}+8$

$\geq 2\sqrt{(3x-2)\cdot\frac{1}{3x-2}}+8$

$=10$

$\left(\text{단, 등호는 } 3x-2=\frac{1}{3x-2}\text{, 즉 } x=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x\geq 1$일 때, $3x+6+\frac{1}{3x-2}$은 $x=1$에서

최솟값 10을 가지므로 $m=10$, $n=1$

$\therefore m+n=10+1=11$

05 정답 ②

해설 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

그런데 $x+y=2$이므로

$2(x^2+y^2)\geq 4$

$\therefore x^2+y^2\geq 2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 2

06 정답 ②

해설 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(2a+3b)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$13\geq(2a+3b)^2$ ($\because a^2+b^2=1$)

$\therefore -\sqrt{13}\leq 2a+3b\leq\sqrt{13}$

따라서 $2a+3b$의 최댓값은 $\sqrt{13}$,

최솟값은 $-\sqrt{13}$ 이다.

$\therefore M^2+m^2=(\sqrt{13})^2+(-\sqrt{13})^2$

$=13+13=26$

07 정답 30

해설 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$2x+2y=20 \quad \therefore x+y=10$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2\}\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}$

$\geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$15(x+y) \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

그런데 $x+y=10$이므로

$150 \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$\therefore -5\sqrt{6} \leq \sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{10}} \text{ 일 때 성립}\right)$

이때 $\sqrt{5x}>0,\ \sqrt{10y}>0$이므로

$0<\sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

따라서 $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값은 $5\sqrt{6}$이므로

$M=5\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{6}M=\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{6}=30$

08 정답 ③

해설 '세 자연수 a, b, c에 대하여 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다.'의 참, 거짓을 증명하기 위해

$a=3p\pm1,\ b=3q\pm1,\ c=3r\pm1$이면

$a^2=3(3p^2\pm2p)+1,\ b^2=3(3q^2\pm2q)+1$이므로

$a^2+b^2=3m+\boxed{2}$ (m은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

또, $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$이므로

$c^2=3n+\boxed{1}$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.

$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$

따라서 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

09 정답 ③

해설 주어진 명제의 대우는

'n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.'이다.

k가 자연수일 때 n을 $\boxed{6k-1}$ 또는 $6k-2$ 또는 $6k-3$ 또는 $6k-4$ 또는 $6k-5$라 하면

(i) $n=\boxed{6k-1}$일 때, $n^2=6(6k^2-2k)+\boxed{1}$

(ii) $n=6k-2$일 때, $n^2=6(6k^2-4k)+4$

(iii) $n=6k-3$일 때, $n^2=6(\boxed{6k^2-6k+1})+3$

(iv) $n=6k-4$일 때, $n^2=6(6k^2-8k+2)+4$

(v) $n=6k-5$일 때,

$n^2=6(6k^2-10k+4)+\boxed{1}$

즉, n^2은 6으로 나누면 나머지가 $\boxed{1}$ 또는 3 또는 4인 자연수가 되므로 n이 6의 배수가 아니면 n^2도 6의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$f(k)=6k-1,\ g(k)=6k^2-6k+1,\ a=1$이므로

$f(a)+g(a)=f(1)+g(1)=5+1=6$

10 정답 ③

해설 주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$이므로

$m=2k-1,\ n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $m^2+n^2=\boxed{2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)}$이므로

m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

11 정답 ⑤

해설 $\sqrt{2}$를 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소 인 정수이다.,)

$\therefore \sqrt{2}p=q \quad \therefore 2p^2=q^2$

q^2은 2의 배수이므로 q도 2의 배수

$q=2k$ (k는 정수)라 하면 $2p^2=4k^2$

$\therefore p^2=2k^2$

따라서 p도 2의 배수

이는 p, q가 서로소인 조건에 모순

따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니라.

(가)서로소 (나)짝수 (다)짝수

12 정답 ⑤

해설 $\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면

$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{서로소}}$인 정수이다.)

$\therefore \sqrt{5}p=q$

양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$이고

q^2 은 5의 배수이므로 q는 $\boxed{5\text{의 배수}}$이다.

$q=5k$ (k는 정수)라 하면

$5p^2=25k^2$

$\therefore p^2=5k^2$

따라서 p도 $\boxed{5\text{의 배수}}$이므로

이는 p, q가 $\boxed{\text{서로소}}$인 조건에 모순이다.

즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.

(가) 서로소 (나) 5의 배수 (다) 5의 배수

13 정답 ⑤

해설 주어진 명제의 결론을 부정하여

$\boxed{a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0}$라 가정하면 $a^2>0$이거나

$b^2>0$이므로 $a^2+b^2\boxed{>}0$ 이다.

그런데 이것은 $a^2+b^2\boxed{=}0$이라는 가정에

모순되므로 $a=0$이고 $b=0$이다.

따라서 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면

$a=0$이고 $b=0$이다.

14 정답 ②

해설 $\sqrt{n^2+1}$ 이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+1)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로

$p=1$이 되어야 한다.

따라서 $n^2=\boxed{q^2-1}$이다.

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-1=4k^2-1$이고

$(2k-1)^2<4k^2-1<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

그러나 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-1=4k^2+4k$이고

$(2k)^2<4k^2+4k<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

그러나 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여

$\sqrt{n^2+1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$ 은 무리수이다.

$f(q)=q^2-1$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(4)+g(2)=16-1+16=31$

15 정답 ①

해설 $(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$

$=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x-y)^2$

$=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$

$=2(\boxed{|xy|+xy})\geq 0$ ($\because |xy|\geq -xy$)

$\therefore (|x|+|y|)^2\geq |x-y|^2$

그런데 $|x|+|y|\geq 0$, $|x-y|\geq 0$이므로

$|x|+|y|\geq |x-y|$

(단, 등호는 $|xy|=-xy$, 즉 $\boxed{xy\leq 0}$일 때 성립)

16 정답 ②

해설 $a-3b=8$이므로

$\frac{3}{a}-\frac{1}{b}=\frac{3b-a}{ab}=-\frac{8}{ab}$

$ab<0$이므로

$a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$

이때 $a-3b=8$이므로

$a>0,\ b<0$

$a>0,\ -3b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+(-3b)\ge 2\sqrt{a\cdot(-3b)}$

$8\ge 2\sqrt{-3ab}$

$-ab\le\frac{16}{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=-3b,\text{ 즉 } a=4,\ b=-\frac{4}{3}\text{ 일 때 성립한다.}\right)$

따라서

$\frac{3}{a}-\frac{1}{b}=\frac{8}{-ab}$

$\ge\frac{8}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{2}$

이므로 $\frac{3}{a}-\frac{1}{b}$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

17 정답 ②

해설 $x>0,\ y>0$에서 $x^2>0,\ y^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x^2+125y^2\ge 2\sqrt{5x^2\cdot 125y^2}=50xy$

그런데 $5x^2+125y^2=2$이므로

$2\ge 50xy$

$\therefore xy\le\frac{1}{25}$

이때 등호는 $5x^2=125y^2$, 즉 $x=5y$일 때 성립하므로

$xy=\frac{1}{25}$에서 $5y\cdot y=\frac{1}{25},\ y^2=\frac{1}{125}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{\sqrt{5}}{25}$

따라서 xy는 $x=\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{\sqrt{5}}{25}$ 일 때

최댓값 $\frac{1}{25}$ 을 가지므로

$\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \beta=\frac{\sqrt{5}}{25},\ \gamma=\frac{1}{25}$

$\therefore \alpha\beta+\gamma=\frac{2}{25}$

18 정답 6

해설 주어진 이차방정식이 허근을 가지므로

$D=16-4a<0$에서 $a-4>0$

$a-4+\frac{1}{a-4}\ge 2\sqrt{(a-4)\cdot\frac{1}{a-4}}$

$=2$

$a+\frac{1}{a-4}=a-4+\frac{1}{a-4}+4$

$\ge 2+4=6$

$\left(\text{단, 등호는 } a-4=\frac{1}{a-4}\text{ 일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $a=5$일 때 최솟값 6을 갖는다.

19 정답 ②

해설 $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(2y+\frac{1}{4x}\right)\left(8x+\frac{12}{y}\right)=16xy+2+24+\frac{3}{xy}$

$\ge 26+2\sqrt{16xy\cdot\frac{3}{xy}}$

$=26+8\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } 16xy=\frac{3}{xy}\text{, 즉 } xy=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(2y+\frac{1}{4x}\right)\left(8x+\frac{12}{y}\right)$의 최솟값은

$26+8\sqrt{3}$

20 정답 ④

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)=\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}+20$

$\ge 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}+20$

$=32$

(단, 등호는 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$, 즉 $3a=2b$일 때 성립한다.)

따라서 $(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값은 32이다.

21 정답 ②

해설 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2a+2b}{c}+\frac{2b+2c}{a}+\frac{2c+2a}{b}$$
$$=\frac{2a}{c}+\frac{2b}{c}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{b}$$
$$=\left(\frac{2a}{c}+\frac{2c}{a}\right)+\left(\frac{2b}{c}+\frac{2c}{b}\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{2a}{c}\cdot\frac{2c}{a}}+2\sqrt{\frac{2b}{c}\cdot\frac{2c}{b}}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}$$
$$=4+4+4$$
$$=12$$

(단, 등호는

$\frac{2a}{c}=\frac{2c}{a}$, $\frac{2b}{c}=\frac{2c}{b}$, $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,

즉 $a=b=c$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{2a+2b}{c}+\frac{2b+2c}{a}+\frac{2c+2a}{b}$ 의

최솟값은 12이다.

22 정답 25

해설 직각을 낀 두 울타리의 길이를 각각 $x\,\mathrm{m}$, $y\,\mathrm{m}$라 하면

$x^2+y^2=10^2=100$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

그런데 $x^2+y^2=100$이므로

$100\geq 2xy$

$\therefore\ xy\leq 50$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 땅의 넓이는 $\frac{1}{2}xy$이므로

$\frac{1}{2}xy\leq\frac{1}{2}\cdot 50=25$

따라서 땅의 넓이의 최댓값은 $25\,\mathrm{m}^2$이다.

$\therefore\ k=25$

23 정답 32

해설 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 넓이 S는

$S=xy$

또, 통나무의 단면의 지름의 길이가 8이므로

$x^2+y^2=8^2=64$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

$64\geq 2xy$

$\therefore\ xy\leq 32$

따라서 S는 $x^2=y^2$일 때, 즉 $x=y=4\sqrt{2}$일 때, 최댓값 32를 갖는다.

24 정답 7

해설 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}$

$\quad=2|ab|$ (단, 등호는 $|a|=|b|$일 때 성립)

$c^2+d^2\geq 2\sqrt{c^2d^2}$

$\quad=2|cd|$ (단, 등호는 $|c|=|d|$일 때 성립)

$a^2+b^2=56$, $c^2+d^2=126$이므로

$56\geq 2|ab|$, $126\geq 2|cd|$

$\therefore\ -28\leq ab\leq 28$, $-63\leq cd\leq 63$

(단, 등호는 $|a|=|b|=2\sqrt{7}$, $|c|=|d|=3\sqrt{7}$ 일 때 성립)

$-28+(-63)\leq ab+cd\leq 28+63$

$\therefore\ -91\leq ab+cd\leq 91$

즉, $ab+cd$의 최댓값은 91

a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$이므로

$56\cdot 126\geq(ac+bd)^2$

$\therefore\ -84\leq ac+bd\leq 84$

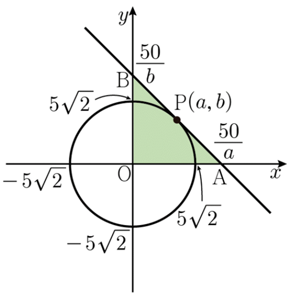
(단, 등호는 $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$일 때 성립)

즉, $ac+bd$의 최솟값은 -84

$p=91$, $q=-84$이므로 $p+q=7$

25 정답 50

해설 원 $x^2+y^2=50$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax+by=50$
이 접선이 x축, y축과 만나는 점은 각각
$\mathrm{A}\left(\frac{50}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{50}{b}\right)$



이때 $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{a}\cdot\frac{50}{b}=\frac{50^2}{2ab}$
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=50$위의 점이므로
$a^2+b^2=50$
$a>0,\ b>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$
$\therefore\ 50\geq 2ab$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
$\frac{1}{2ab}\geq\frac{1}{50}$
$\therefore\ \frac{50^2}{2ab}\geq 50$
따라서 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이의 최솟값은 50이다.