고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 명제 '이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.'의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.

② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.

③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.

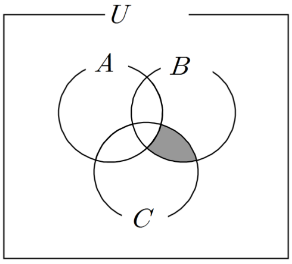
④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.

⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

02 두 집합 $X=\{x|-1\le x\le 3\}$, $Y=\{y|a\le y\le b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=2x+3$의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -27　② -12　③ 0
④ 9　⑤ 24

03 다음은 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대한 벤 다이어그램이다. 어두운 부분을 집합으로 옳게 표현한 것은?

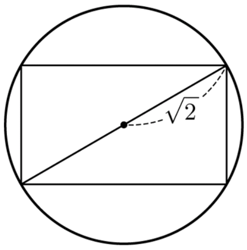


① $(A\cap C)-B$
② $(B\cap C)-A$
③ $A-(B\cup C)$
④ $B-(A\cup C)^c$
⑤ $B-(A\cap C)^c$

04 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B=A$일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?

① $A\subset B$　② $A\cup B=B$
③ $A-B=\varnothing$　④ $A\cup B^c=U$
⑤ $B^c\subset A^c$

05 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

06 함수 $y=\sqrt{2x+5}$ 의 정의역을 A,
함수 $y=\sqrt{12-3x}$ 의 정의역을 B라고 할 때,
$A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

07 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 ▷를
$A \triangleright B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$으로 약속할 때,
다음 중 $(A\triangleright B)\triangleright B$와 항상 같은 집합은?

① A　② B　③ $A\cap B$
④ $A\cup B$　⑤ $A-B$

08 [2017년 4월 고3 문과 15번 변형]
다음은 어느 고등학교 학생 100명을 대상으로 봉사 활동과 동아리 활동에 대한 참가 희망 조사를 한 결과이다.

- 봉사 활동을 희망한 학생은 42명이다.
- 동아리 활동을 희망하지 않은 학생은 25명이다.

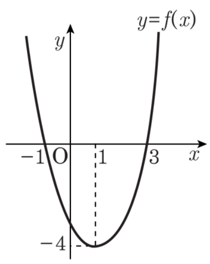
봉사 활동과 동아리 활동을 모두 희망한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

① 57　② 59　③ 61
④ 63　⑤ 65

09 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여
$f(mn)=f(m)+f(n)$, $f(2)=1$일 때, $f(2^{2006})$의
값은 얼마인가?

① 1003　② 2006　③ 4012
④ 2^{1003}　⑤ 2^{2006}

10 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
방정식 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는?



① 2개　② 4개　③ 6개
④ 8개　⑤ 0개

11 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x)=2g(x)+1$
② $h(x)=2g(x)-1$
③ $h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$
④ $h(x)=g\left(\frac{x}{2}+1\right)$
⑤ $h(x)=\frac{1}{2}g(2x-1)+1$

12 $\sqrt{x+2}=x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

① $2<k<\frac{9}{4}$
② $2\le k<\frac{9}{4}$
③ $k>\frac{9}{4}$
④ $k<2$
⑤ $2<k\le\frac{9}{4}$

13 다음은 임의의 네 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다. 이때 (가), (나)에 알맞은 것을 쓰시오.

> $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
> $=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$
> $\qquad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
> $=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
> $=(\boxed{(가)})^2\ge 0$
> $\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$
> (단, 등호는 $\boxed{(나)}$일 때 성립한다.)

14 두 함수 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, pq의 값을 구하시오.

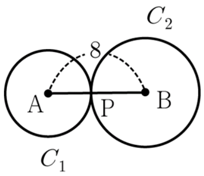
15 [2009년 9월 고1 18번]
집합 $S=\{a,\ b,\ c\}$의 부분집합을 원소로 갖는 집합 X가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) $A\in X$ 이면 $S-A\in X$
> (나) $A\in X,\ B\in X$이면 $A\cup B\in X$

이 때, 집합 X의 개수는? (단, $X\ne\varnothing$)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

16 길이가 8인 선분 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 중심이 A이고 반지름이 선분 AP인 원을 C_1, 중심이 B이고 반지름이 선분 BP인 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $9S_1+S_2$의 최솟값은?



① $\frac{573}{10}\pi$ ② $\frac{288}{5}\pi$ ③ $\frac{579}{10}\pi$
④ $\frac{291}{5}\pi$ ⑤ $\frac{117}{2}\pi$

17 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-6 & (x<-3) \\ x & (-3\le x<1) \\ -x+2 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

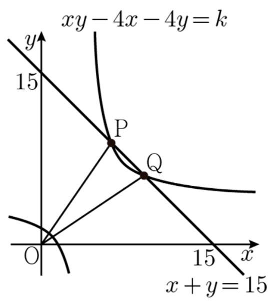
18 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$\mathrm{A}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$\mathrm{B}=\{(x,y)\,|\,y=ax\}$$

① $a<0$ ② $a>0$
③ $0<a<1$ ④ $0\le a\le 1$
⑤ $a<0, a>1$

19 집합 $P=\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n\}$에 대하여 $f(P)=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n$이라 정의한다. 집합 $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$의 부분집합을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{16}$이라 할 때, $f(A_1)+f(A_2)+f(A_3)+\cdots+f(A_{16})$의 값을 구하시오.

20 다음 그림과 같이 곡선 $xy-4x-4y=k$가 직선 $x+y=15$와 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 54일 때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오. (단, $k<0$)



21 함수 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x-2}$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$가 만나지 않도록 하는 m의 값 또는 범위를 구하시오.

22 함수 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}x+3}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $3\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ ② $2\sqrt{3}-1$ ③ $3\sqrt{2}-1$

④ $2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}$

23 유리함수 $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+2}$에 대하여 $g(x)=|f(x)+q|$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재할 때, 양의 정수 q의 최솟값을 구하시오.

> (가) $-2<x_1<x_2<0$
> (나) $g(x_1)<4$, $g(x_2)>4$

24 두 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=px+q$ $(p>0)$에 대하여 부등식 $f(x-2)<g(x)<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위가 $1<x<2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ④	03 ②
04 ④	05 ③	06 ④
07 ②	08 ②	09 ②
10 ②	11 ③	12 ②
13 (가) $bx-ay$	(나) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$	14 25
15 ④	16 ②	17 ④
18 ①	19 240	20 117
21 $m=0$ 또는 $m<-\frac{1}{12}$		22 ④
23 6	24 1	

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 명제 $p \Rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이다.

02 정답 ④

해설 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일 대응이어야 한다.

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

$f(-1)=a,\ f(3)=b$

이때 $f(-1)=2 \cdot (-1)+3=1$

$f(3)=2 \cdot 3+3=9$이므로

$a=1,\ b=9$

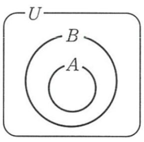
$\therefore\ ab=9$

03 정답 ②

해설 벤 다이어그램의 어두운 부분은 $B \cap C$에서 A를 제외하면 되므로 구하고자 하는 집합은 $(B \cap C)-A$ 이다.

04 정답 ④

해설



$A \cap B=A$에서 $A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B=B$

$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

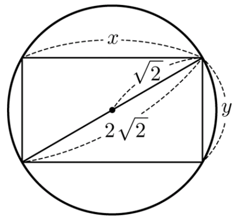
$\Leftrightarrow A \cap B^c=\varnothing$

$\Leftrightarrow A^c \cup B=U$

$\Leftrightarrow B^c \cup A^c$

05 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y\ (x>0,\ y>0)$이라 하면



$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$이고

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이므로

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8 \cdot 8=64$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

$\therefore\ -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

06 정답 ④

해설 $2x+5 \ge 0$에서 $x \ge -\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ A=\left\{x \,\middle|\, x \ge -\dfrac{5}{2}\right\}$

$12-3x \ge 0$에서 $x \le 4$ $\quad \therefore\ B=\{x \mid x \le 4\}$

따라서 $A \cap B=\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{5}{2} \le x \le 4\right\}$이므로

이 집합에 속하는 정수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

07 정답 ②

해설 $A \triangleright B=(A \cap B) \cup (A^C \cap B)$

$=(A \cup A^C) \cap B$

$=U \cap B=B$

$\therefore\ (A \triangleright B) \triangleright B=B \triangleright B$

$=(B \cap B) \cup (B^C \cap B)$

$=B \cup \varnothing=B$

08 정답 ②

해설 학생 100명 전체집합을 U라 하면 $n(U)=100$
봉사 활동을 희망한 학생들의 집합을 A라 하면 $n(A)=42$
동아리 활동을 희망한 학생들의 집합을 B라 하면
$n(B^C)=25$이므로 $n(B)=75$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=42+75-n(A\cup B)$
$=117-n(A\cup B)$
$n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때, 최솟값 75를 갖는다.
따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 42
$n(A\cup B)$는 $A\cup B=U$일 때, 최댓값 100을 갖는다.
따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 17
$\therefore M+m=42+17=59$

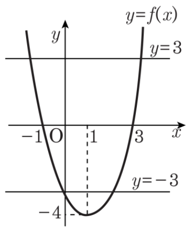
09 정답 ②

해설 $f(2^{2006})=f(2\times2\times\cdots\times2)$
$=f(2)+f(2)+\cdots+f(2)$
$=2006f(2)=2006$

10 정답 ②

해설 $|f(x)|=t\ (t\geq0)$ 로 놓으면
$f(|f(x)|)=0 \longrightarrow f(t)=0$
$\therefore t=3(\because t\geq0)$
$\therefore |f(x)|=3$

ⅰ) $f(x)=3$ 일 때
$y=f(x)$ 와 $y=3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.
$\therefore$ 2개
ⅱ) $f(x)=-3$ 일 때
$y=f(x)$ 와 $y=-3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.
$\therefore$ 2개
따라서 방정식 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는 4개다.

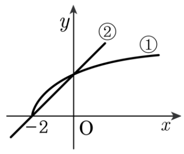


11 정답 ③

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$f^{-1}(x)=g(x)$
이때 $y=f(2x-1)$의 역함수를 구하기 위해
x, y를 서로 바꾸어 쓰면
$x=f(2y-1)$, $f^{-1}(x)=2y-1$
$\therefore g(x)=2y-1$
위의 식을 y에 관하여 정리하면
$g(x)+1=2y$
$\therefore y=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$
따라서 구하는 역함수 $y=h(x)$는
$h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$

12 정답 ②

해설 $y=\sqrt{x+2}\cdots\cdots\cdots$ ①
$y=x+k\cdots\cdots\cdots$ ② 라 하면



그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1이고 k 값의 변화에 따라 달라진다.
그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는
$\sqrt{x+2}=x+k \Rightarrow x+2=(x+k)^2 \Rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$
$\Rightarrow x^2+(2k-1)x+k^2-2=0\cdots\cdots\cdots$ ③
①, ②가 서로 접하려면 ③의 $D=0$ 이어야 한다.
$\therefore (2k-1)^2-4(k^2-2)=0,\ 4k^2-4k+1-4k^2+8=0$
$-4k+9=0,\ 4k=9$
$\therefore k=\frac{9}{4}$
또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$ 을 지날 경우
$0=-2+k$
$\therefore k=2$
따라서 구하는 k 의 범위는 $2\leq k<\frac{9}{4}$

13 정답 (가) $bx-ay$ (나) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

해설 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$\quad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

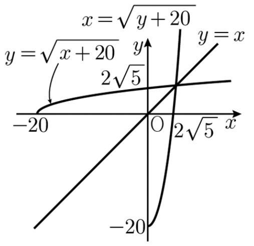
$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2=\boxed{(bx-ay)^2}\geq 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq (ax+by)^2$

(단, 등호는 $\boxed{(bx-ay)^2}$, $\boxed{\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}}$ 일 때 성립한다.)

14 정답 25

해설 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 함수 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{x+20}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+20}=x$의 양변을 제곱하면

$x+20=x^2$, $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x\geq 0$)

따라서 주어진 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(5,\ 5)$이므로

$p=5$, $q=5$

$\therefore pq=25$

15 정답 ④

해설 집합의 포함관계를 이해하고 조건을 만족하는 집합 구하기

X는 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{a,\ b\}, \{a,\ c\}, \{b,\ c\}, S$의 일부를 원소로 하고 주어진 조건을 만족하는 집합이므로

$\{S,\ \varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{b\},\ \{a,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{c\},\ \{a,\ b\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$

그러므로 5개

16 정답 ②

해설 길이가 8인 선분 AB 위를 점 P가 움직이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=8$이고,

$9S_1+S_2=9\pi\overline{AP}^2+\pi\overline{BP}^2=\pi\left(9\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\right)$

이때 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$는 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+1^2\right\}\left(9\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\right)\geq\left(\dfrac{1}{3}\cdot 3\overline{AP}+\overline{BP}\right)^2$

(단, 등호는 $\overline{AP}=\dfrac{4}{5}$, $\overline{BP}=\dfrac{36}{5}$일 때 성립)

$\dfrac{10}{9}\left(9\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\right)\geq\left(\overline{AP}+\overline{BP}\right)^2$

$9\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\geq\dfrac{9}{10}\cdot 8^2=\dfrac{288}{5}$

($\because \overline{AP}+\overline{BP}=8$)

$\therefore 9S_1+S_2=\pi\left(9\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\right)\geq\dfrac{288}{5}\pi$

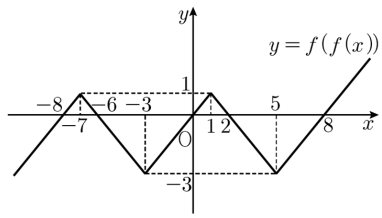
따라서 $9S_1+S_2$의 최솟값은 $\dfrac{288}{5}\pi$이다.

17 정답 ④

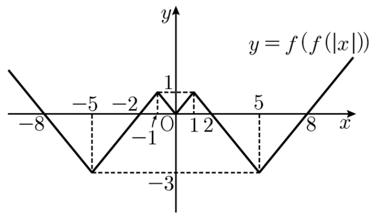
해설

$$f(f(x))=\begin{cases} x+8 & (x<-7) \\ -x-6 & (-7\leq x<-3) \\ x & (-3\leq x<1) \\ -x+2 & (1\leq x<5) \\ x-8 & (x\geq 5)\end{cases}$$

이므로 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(f(|x|))$의 그래프는 $y=f(f(x))$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\right)=20$

18

정답 ①

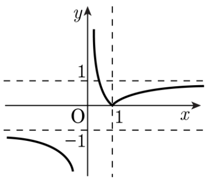
해설 $y=\dfrac{|x-1|}{x}$에서

$x \geq 1$일 때,

$y=\dfrac{x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+1$

$x<1$일 때,

$y=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}-1$



$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y=ax$가 만나지 않아야 하므로,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a<0$

19

정답 240

해설 $A=\{3, 6, 9, 12\}$의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$이라 하면, 집합 A의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1}=8$(번)씩 나온다.

$\therefore\ f(A_1)+f(A_2)+f(A_3)+\cdots+f(A_{16})$

$=8 \cdot (3+6+9+12)=240$

20

정답 117

해설 $xy-4x-4y=k$ $\cdots$ ㉠

곡선 ㉠과 직선 $x+y=15$의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하고, $y=15-x$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-15x+(60+k)=0$ $\cdots$ ㉡

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=60+k=54$

$\therefore\ k=-6$

$k=-6$을 ㉡에 대입하여 풀면 $x=6$ 또는 $x=9$

$\therefore\ \mathrm{P}(6, 9), \mathrm{Q}(9, 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}^2=6^2+9^2=117$

21

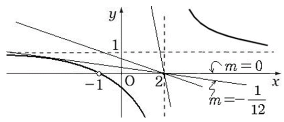
정답 $m=0$ 또는 $m<-\dfrac{1}{12}$

해설 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x-2}$

$=\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x+1}{x-2}\ (x \neq -1, x \neq 2)$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=m(x-2)$ $\cdots$ ㉡

㉡은 정점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선이므로,
㉠과 만나지 않는 경우는 다음의 두 경우이다.

(ⅰ) $m=0$일 때,
직선이 곡선 위의 빈 점 $(-1, 0)$을 지나므로 만나지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $\dfrac{x+1}{x-2}=m(x-2)$이 실근을 갖지 않으면 교점이 없다.
㉠의 양변에 $x-2$를 곱하여 정리하면

$mx^2-(4m+1)x+(4m-1)=0$

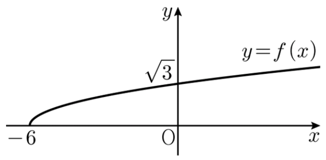
$D=(4m+1)^2-4m(4m-1)<0$에서

$m<-\dfrac{1}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=0$ 또는 $m<-\dfrac{1}{12}$

22 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ 의 그래프는 다음과 같다.



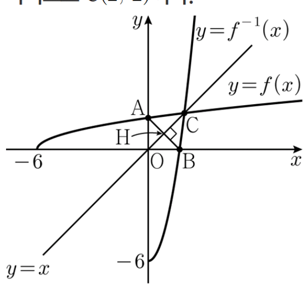
$x=0$일 때 함숫값이 $\sqrt{3}$ 이므로 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$이다.
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하는 형태이므로 함수의 그래프가 역함수의 그래프와 만나는 교점은 직선 $y=x$와의 교점과 같다.

$\sqrt{\frac{1}{2}x+3}=x$에서 양변을 각각 제곱하면

$\frac{1}{2}x+3=x^2$, $2x^2-x-6=0$,

$(2x+3)(x-2)=0$이므로 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

이때 점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이 아니므로 $\mathrm{C}(2,\ 2)$이다.



한편, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

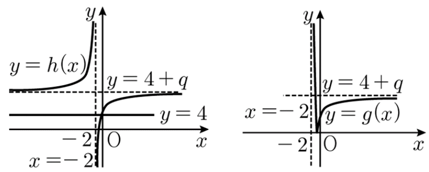
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=2\sqrt{3}-\frac{3}{2}$ 이다.

23 정답 6

해설 $h(x)=f(x)+q$라 하면 $g(x)=|h(x)|$

$f(x)=\frac{4x-3}{x+2}=\frac{4(x+2)-11}{x+2}=-\frac{11}{x+2}+4$

에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=4$이므로
함수 $y=h(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=4+q$이다.
이때 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재하려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $-2<x<0$에서 증가하고 직선 $y=4$와 만나야 한다.



[그림 1]

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같아야 하므로 $h(0)>4$에서

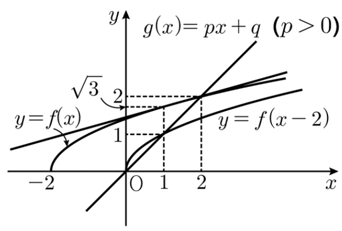
$q-\frac{3}{2}>4$

$\therefore\ q>\frac{11}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 양의 정수 q의 최솟값은 6이다.

24 정답 1

해설 $f(x)=\sqrt{x+2}$ 에서
$f(x-2)=\sqrt{(x-2)+2}=\sqrt{x}$
이때 부등식 $f(x-2)<g(x)<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위가 $1<x<2$이려면
다음 그림과 같이 함수 $g(x)=px+q\ (p>0)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ 또는 $(1,\ \sqrt{3})$, $(2,\ 2)$를 지나야 한다.



이때 p, q가 정수이므로 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선이고,

이 직선의 방정식은 $y-1=\frac{2-1}{2-1}(x-1)$에서

$y=x$
$\therefore\ g(x)=x$
따라서 $p=1$, $q=0$이므로
$p+q=1+0=1$