

고1	2024_1-1_기말_이화여고		선택형		서답형	
	수학상	부등식~원의방정식	17문항	80점	3문항	20점

1 두 점 $A(a, -1)$, $B(4, b)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식이 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$ 일 때, $a^2 + b^2 + r^2$ 의 값은?

- ① 27 ② 31 ③ 35
④ 39 ⑤ 43

2 두 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 8)$ 에 대하여 선분 AB를 3 : 1으로 내분하는 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

3 두 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 8)$ 에 대하여 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점을 $Q(a, b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① 250 ② 280 ③ 320
④ 350 ⑤ 380

4 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=7$ 인 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, \overline{AM} 의 길이의 제곱 \overline{AM}^2 의 값은?

- ① 32 ② 33 ③ 34
④ 35 ⑤ 36

5 두 점 $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표를 P라 할 때, $\triangle ABP$ 의 넓이는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

6 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선이 원 $x^2 + y^2 + 8x - 4y + a = 0$ 과 접할 때, 실수 a 의 값은?

- ① $-\frac{19}{5}$ ② -4 ③ $-\frac{21}{5}$
④ $-\frac{22}{5}$ ⑤ $-\frac{23}{5}$

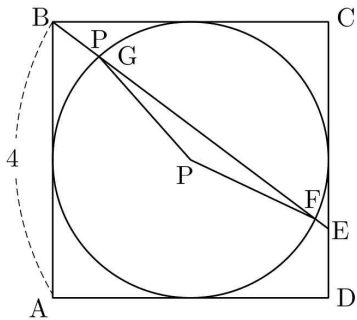
7 x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} xy - 2x - 2y = 0 \\ xy + 2x + 2y = -4 \end{cases}$$

를 만족시키는 x, y 를 좌표평면 위의 점 (x, y) 로 나타낼 때, 이 두 점 사이의 거리는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

8 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에 내접하는 원이 있다. 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 DE가 정사각형 ABCD에 내접하는 원과 만나는 두 점을 F, G라 하고, 원의 중심을 P라 할 때, 삼각형 PFG의 넓이는?



- ① $\frac{2\sqrt{3}}{25}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{25}$ ③ $\frac{2\sqrt{6}}{25}$
④ $\frac{4\sqrt{6}}{25}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{6}}{25}$

9 다음은 두 점 $A(-3, 1)$ 과 $B(2, 1)$ 에서 거리의 비가 2 : 3으로 일정한 점 P가 그리는 도형을 구하는 과정의 일부이다.

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3 \text{에서 } 3\overline{PA} = 2\overline{PB}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$$

이 때, 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PA}^2 = (x+3)^2 + (y-1)^2$$

$$\overline{PB}^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\text{이므로 } 9\{(x+3)^2 + (y-1)^2\} = 4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\}$$

$$\text{이 식을 정리하면 } (x+7)^2 + (y-1)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 점 P가 그리는 도형은 중심의 좌표가 $(-7, 1)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이다.

이 때, 원 ①은 \overline{AB} 를 2 : 3으로 내분하는 점 (a, b) 와 2 : 3으로 외분하는 점 (c, d) 를 지름의 양 끝점으로 하는 원임을 알 수 있다.

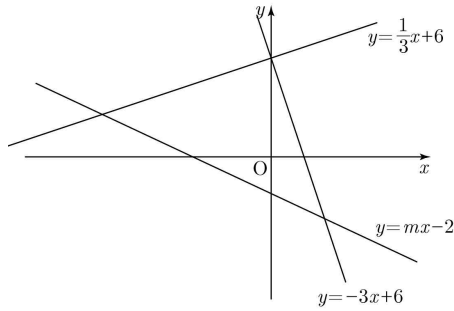
위의 과정을 만족하는 r, a, b, c, d 에 대하여 점 (r, c) 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2d인 원 위의 점과 점 (b, a) 사이의 거리의 최솟값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

10 좌표평면에서 세 직선

$$y = \frac{1}{3}x + 6, y = -3x + 6, y = mx - 2 \quad (m < 0)$$

로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형일 때, m 의 값은?



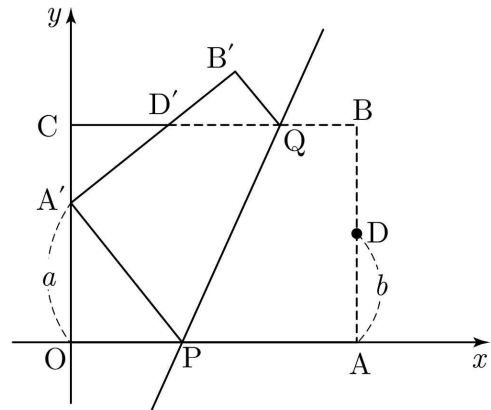
- ① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

11 x 에 대한 사차방정식 $x^4 - 5ax^2 + 6a^2 + 6a - 36 = 0$ 이 실근과 허근을 모두 가질 때, 0이 아닌 정수인 a 를 갖도록 하는 정수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

12 그림과 같이 가로 길이가 12이고, 세로 길이가 9인

직사각형 OABC 모양의 종이를 점 O가 원점에, 두 점 A, C가 각각 x 축, y 축 위에 있도록 좌표평면 위에 놓았다. 점 D'는 선분 CB를 1:2로 내분하는 점이다. 선분 OA 위의 점 P와 선분 CB 위의 점 Q를 접는 선으로 하여 종이를 접었다더니 점 A는 선분 OC 위의 점 A'으로, 선분 AB 위의 점 D는 점 D'으로 옮겨졌다. 선분 OA'의 길이를 a , 선분 AD의 길이를 b , 직선 PQ의 방정식은 $y = mx + n$ 이다. 이 때, $a + b + m + n$ 의 값은? (단, a, b, m, n 은 정수, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

13 좌표평면에 원 $x^2 + y^2 - 12x = 0$ 이 있다. 이 원의 현 중에서 점 A(2, 0)을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

14 0이 아닌 실수 p 에 대하여 이차함수 $f(x) = px^2 + 2x + 1$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, 이 이차함수의 그래프가 y 축과 만나는 점을 B라 할 때, 두 점 A, B를 지나는 직선 l 의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하자. x 에 대한 부등식 $f(x) - g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수가 10이 되도록 하는 p 의 범위가 $a \leq p < b$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은?

- ① -21 ② -19 ③ -17
④ 19 ⑤ 21

15 좌표평면 위에 세 점 A(5, 0), B(8, -6), C(13, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 외심을 E, 무게중심을 G라 할 때, 삼각형 IEG의 넓이는?

- ① $\frac{5}{36}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

16 부등식 $-x^2+3x+1 \leq mx+n \leq x^2-x+6$ 가 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하도록 하는 모든 정수 m 의 값의 합을 $f(n)$ 이라 할 때, $10f(1)+f(2)$ 의 값은?

- ① 25 ② 26 ③ 33
④ 35 ⑤ 36

17 직선 $y=ax+b$ 가 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프와 원 $x^2+(y+1)^2=1$ 에 동시에 접할 때, 네 접점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 사각형 PQRS의 넓이 S 가 $S=\frac{q}{p}\sqrt{5}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수)

- ① 1301 ② 1321 ③ 1341
④ 1361 ⑤ 1381

서술형

18 점 A(5, 10)에서 원 $x^2+y^2=25$ 에 그은 접선의 접점을 B, C라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 A(5, 10)에서 원 $x^2+y^2=25$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오. [4점]

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [2점]

19 x 에 대한 부등식 $|2x - a| < 3$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 합이 21일 때, a 의 범위를 구하십시오. [3.0점]

20 좌표평면 위에 두 점 $A(6, 0)$, $B(0, 12)$ 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 세 직선 l , m , n 의 기울기의 합을 모두 구하십시오.
(단, O 는 원점)

- (가) 직선 l 은 점 A 를 지난다.

(나) 세 직선 l , m , n 은 선분 OB 위의 점 P 에서 만난다.

(다) 세 직선 l , m , n 은 삼각형 OAB 의 넓이를 4등분한다.

문항별 배점

1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
4.2	4.2	4.3	4.4	4.4	4.5	4.5	4.6	4.7	4.7
11번	12번	13번	14번	15번	16번	17번	18번	19번	20번
4.9	4.9	5	5.1	5.1	5.2	5.3	6	7	7

2024년 1학년 1학기 기말고사 이화여고

1. ④

2. ①

3. ③

4. ②

5. ④

6. ③

7. ③

8. ⑤

9. ①

10. ④

11. ②

12. ①

13. ②

14. ②

15. ③

16. ⑤

17. ⑤

18. (1) $x = 5$, $3x - 4y + 25 = 0$ (2) 40

19. $13 < a < 15$ 또는 $a = 21$

[2022년 타 학교 기출 일치]

$|2x - a| < 3$ 를 풀면 $\frac{a-3}{2} < x < \frac{a+3}{2}$ 이다.

(1) $a = 2k - 1$ (k 는 정수) 꼴인 경우

$\frac{a-3}{2}$, $\frac{a+3}{2}$ 모두 정수이므로

$\frac{a-3}{2} < x < \frac{a+3}{2}$ 를 만족하는 정수 x 는

$\frac{a-1}{2}$, $\frac{a+1}{2}$ 이다.

$\frac{a-1}{2} + \frac{a+1}{2} = 21$ 이므로, $a = 21$ 이다.

(2) $a = 2k - 1$ (k 는 정수) 꼴이 아닌 경우

$\frac{a-3}{2}$, $\frac{a+3}{2}$ 모두 정수가 아니므로

$\frac{a-1}{2} < b < \frac{a+1}{2}$ 인 정수 b 에 대하여 $\frac{a-3}{2} < x < \frac{a+3}{2}$ 를

만족하는 정수 x 는

$b-1$, b , $b+1$ 이다.

$(b-1) + b + (b+1) = 21$ 이므로 $b = 7$ 이다.

$\frac{a-1}{2} < b < \frac{a+1}{2}$ 즉, $\frac{a-1}{2} < 7 < \frac{a+1}{2}$ 를 만족하는 a 의

범위는 $13 < a < 15$ 이다.

따라서 a 의 범위는 $13 < a < 15$ 또는 $a = 21$ 이다.

20. $\frac{9}{4}$ 또는 -3 또는 $-\frac{33}{4}$