

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

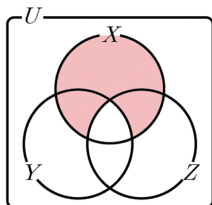
실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

- 01** 두 집합 $X = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,
 $Y = \{y | a \leq y \leq b\}$ 에서 $f: X \rightarrow Y$,
 $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재할 때,
 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

- 02** 다음 중 아래 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는
 집합과 항상 같은 집합은?



- ① $X - (Y \cup Z)$ ② $X - (Y \cap Z)$
 ③ $X \cap (Y - Z)$ ④ $X \cap (Y \cup Z)$
 ⑤ $X \cup (Y \cap Z)$

- 03** 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지
 않은 것은?

- ① $B \subset A$
 ② $A \subset (A \cup B)$
 ③ $A \cup B = A$
 ④ $(A \cap B) \cup B = A$
 ⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

- 04** 다음은 ' x, y 가 실수일 때, $x - y$ 가 무리수이면
 x, y 중 적어도 하나는 무리수이다.'를 증명한 과정이다.
 (가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는

' x, y 가 모두 유리수이면 $x - y$ 는 유리수이다.'이다.

x, y 가 모두 유리수이면

$$x = \frac{b}{a}, y = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \text{는 정수}, a \neq 0, c \neq 0)$$

로 놓을 수 있으므로

$$x - y = \frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{ac}$$

$\boxed{\text{(가)}}$ 와 ac 는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고, $ac \neq 0$ 이므로

$x - y = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로

주어진 명제도 참이다.

- ① $bc - ad$, 정수, 유리수
 ② $bc - ad$, 정수, 무리수
 ③ $bc - ad$, 무리수, 유리수
 ④ $ad - bc$, 정수, 유리수
 ⑤ $ad - bc$, 무리수, 무리수

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 05 두 집합 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{4-x}\}$,
 $B = \{(x, y) | y = -x + k\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 0$ 을
 만족시키는 정수 k 의 최솟값을 구하시오.

- 06 세 함수 $f(x) = -x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 2x$ 에
 대하여 $(h \circ f) \circ g$ 를 구하시오.

- 07 [2009년 3월 고2 8번]
 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $*$ 을
 $A * B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
 로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른
 것은?

————— <보기> —————

ㄱ. $A * B = B * A$

ㄴ. $A * A = A$

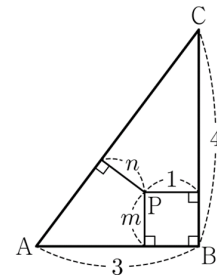
ㄷ. $A * A * \dots * A = A$
A가 2009개

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 08 어느 놀이공원의 입장객 85명을 대상으로 범퍼카와
 자이로드롭을 이용한 입장객 수를 조사하였더니 각각
 40명, 50명이었다. 이때 범퍼카와 자이로드롭을 모두
 이용한 입장객 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때,
 Mm 의 값은?

- ① 50 ② 100 ③ 150
 ④ 200 ⑤ 250

- 09 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ 인 직각삼각형
 ABC 의 내부의 한 점 P 에서 \overline{BC} 에 내린 수선의
 길이가 1이고, \overline{AB} , \overline{AC} 에 내린 수선의 길이가 각각
 m , n 일 때, $m^2 + n^2$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{28}{17}$ ② $\frac{29}{17}$ ③ $\frac{30}{17}$
 ④ $\frac{31}{17}$ ⑤ $\frac{32}{17}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

10 함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타낸 것은?

- ① $g(\frac{x}{3})$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

11 함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 는 $x=p$ 에서 최댓값 q 를 갖는다. 이때 $p+q$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

12 다음 보기 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 있는 대로 고르시오. (단, a, b 는 실수이다.)

〈보기〉

- ㉠. $p: A \cup B = B, q: A \subset B$
㉡. $p: a^2 + b^2 = 0, q: a = 0$ 이고 $b = 0$
㉢. $p: a^2 = b^2, q: a = b$

13 2이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이 정의된 함수 f 가 있다.

- Ⅰ. $f(p) = p$ (p 가 소수)
Ⅱ. $f(rs) = f(r) + f(s)$ ($r, s \in A$)

이 때, $f(1200)$ 의 값을 구하시오.

14 함수 $f(x) = \sqrt{3x-3} + 1$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만날 때, 선분 PQ 의 길이를 구하시오.

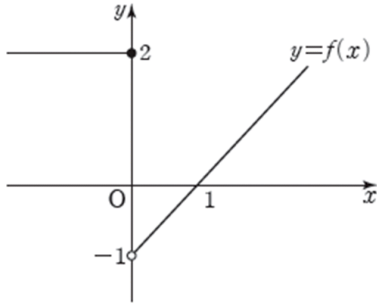
15 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ 이라 하고, A_1 의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2 의 원소의 총합을 $S(A_2)$, \dots , A_8 의 원소의 총합을 $S(A_8)$ 이라 할 때, $S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_8)$ 의 값은?

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 16 함수 $f(x) = \begin{cases} 2 & (x \leq 0) \\ x-1 & (x > 0) \end{cases}$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

- 17 직선 $y = -x + 6$ 이 두 유리함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y 축에 가까운 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

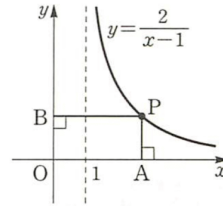
〈보기〉

- ㄱ. $3x_1 > x_2$
ㄴ. $y_1 - y_2 = x_2 - x_1$
ㄷ. $x_1y_2 + x_2y_1 = 2x_1x_2$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 18 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{2}{x-1}$ 위의

한 점 P와 점 P에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소가 될 때, 이 사각형의 넓이는?
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



- ① 1 ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ 4

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

19 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right|$ 에 대하여 $a < b$ 인 두 양수 a, b 가

$f(a) = f(b)$ 를 만족시킬 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

㉠. $0 < f(a) < 2$

㉡. $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$

㉢. $\frac{f(a)+f(b)}{7} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

20 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a(1-x)} + 2 & (x \geq 1) \\ -2(x-1)^2 + b & (x < 1) \end{cases}$$

다음 중 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위한 상수 a, b 에 대한 조건으로 옳은 것은?

- ① $a < 0, b = 1$ ② $a > 0, b = 2$
③ $a < 0, b = 2$ ④ $a > 0, b = 1$
⑤ $a < 0, b = -1$

21 좌표평면에서

두 함수 $f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4, g(x) = \sqrt{x+1}$ 의

그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

㉠. 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다.

㉡. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 곡선 $y = g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

㉢. 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = 3, x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 87이다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

22 집합 $A = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키면서 k 개의 원소를 갖는 집합 B 의 개수를 a_k 라 하자. 이때 $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.

(가) $B \subset A, n(B) \neq 0$

(나) $x \in B$ 이면 $\frac{729}{x} \in B$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 23 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 의
두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $A \cap B = \{1, 2, 5\}$

(나) $A^C \cap B^C = \{7, 11\}$

집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 할 때,

$S(A) = 3S(B)$ 가 되도록 하는 두 집합 A, B 에 대하여

$\frac{S(A)S(B)}{2}$ 의 값을 구하시오.

- 24 함수 $f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여
방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로 다른
실근의 합을 구하시오.

- 25 좌표평면에서 무리함수 $f(x) = 2\sqrt{x}$ 의 그래프와
원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을 각각
 A, B 라 하고, 함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의
그래프와 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을
각각 C, D 라 하자. 두 직선 AB, CD 의 기울기를 각각
 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 \cdot m_2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ②	03 ④
04 ①	05 5	
06 $((h \circ f) \circ g)(x)=-2x^6+6x^4-6x^2$		
07 ④	08 ④	09 ⑤
10 ⑤	11 ②	12 ㄷ
13 21	14 $3\sqrt{2}$	15 ③
16 ②	17 ②	18 ②
19 ③	20 ③	21 ⑤
22 4	23 294	24 14
25 ③		



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

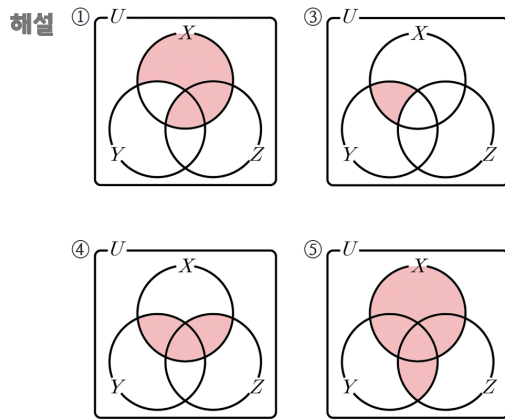
유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 함수 $y=f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
따라서 함수 $y=f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.
즉, $a=f(0)=-1$, $b=f(2)=5$ 이므로
 $a+b=4$

02 정답 ②



03 정답 ④

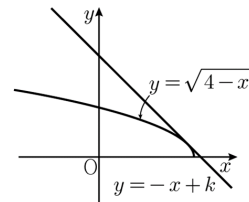
해설 $A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로
옳지 않다.

04 정답 ①

해설 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc-ad}{ac}$ 이므로 (가)는 $bc-ad$ 이다.
따라서 $bc-ad$ 와 ac 는 정수이므로 (나)는 정수이다.
또한 위의 조건과 $ac \neq 0$ 에 의해
 $x-y$ 는 유리수이므로 (다)는 유리수이다.

05 정답 5

해설 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고
직선 $y = -x + k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 이므로
다음 그림과 같다.



$n(A \cap B) = 0$ 이므로 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와
직선 $y = -x + k$ 가 만나지 않아야 한다.
 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 접할 때,
 $\sqrt{4-x} = -x + k$ 의 양변을 제곱하면
 $4-x = x^2 - 2kx + k^2$
 $x^2 + (1-2k)x + k^2 - 4 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (1-2k)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$
 $-4k + 17 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$
따라서 $k > \frac{17}{4}$ 이므로 정수 k 의 최솟값은 5이다.

06 정답 $((h \circ f) \circ g)(x) = -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

해설 $(h \circ f)(x) = h(f(x))$
 $= h(-x^3 - 1)$
 $= -2x^3 - 2$ 이므로
 $((h \circ f) \circ g)(x) = (h \circ f)(g(x))$
 $= (h \circ f)(x^2 - 1)$
 $= -2(x^2 - 1)^3 - 2$
 $= -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

07 정답 ④

해설 집합의 연산의 성질을 이해하고 연산의 규칙성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned}\neg, A * B &= (A \cup B)^C \cup (A \cap B) \\ &= (B \cup A)^C \cup (B \cap A) \\ &= B * A \quad (\text{참})\end{aligned}$$

$$\neg, A * A = A^C \cup A = U \quad (\text{거짓})$$

$$\begin{aligned}\neg, A * A * A &= U * A = U^C \cup A = A \\ A * A * A * A &= A * A = U \\ A * A * A * A * A &= A * A * A = A \\ &\vdots\end{aligned}$$

위로부터

$$\underbrace{A * A * A \cdots * A}_{A \text{가 짝수개}} = U$$

$$\underbrace{A * A * A \cdots * A}_{A \text{가 홀수개}} = A$$

임을 알 수 있다. 2009가 홀수이므로

$$\underbrace{A * A * A \cdots * A}_{A \text{가 2009개}} = A \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

[참고]

연산 *에 대한 결합법칙

$$A * (B * C) = (A * B) * C \text{이 성립하므로}$$

$$A * (B * C), (A * B) * C \text{는 모두}$$

$$A * B * C \text{로 나타낼 수 있다.}$$

08 정답 ④

해설 입장객 전체의 집합을 U ,
범퍼카를 이용한 입장객의 집합을 A ,
자이로드롬을 이용한 입장객의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 85, n(A) = 40, n(B) = 50$
범퍼카와 자이로드롬을 모두 이용한 입장객의 집합은
 $A \cap B$ 이므로 $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이다.
 $\therefore M = n(A) = 40$
또, $A \cup B = U$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최소이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 에서
 $m = 40 + 50 - 85 = 5$
 $\therefore Mm = 200$

09 정답 ⑤

해설 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로
 $\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA$ 에서

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 3m + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5n$$

$$\therefore 3m + 5n = 8$$

이때 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2 + 5^2)(m^2 + n^2) \geq (3m + 5n)^2$$

$$34(m^2 + n^2) \geq 8^2$$

$$\therefore m^2 + n^2 \geq \frac{64}{34} = \frac{32}{17}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{32}{17}$ 이다.

10 정답 ⑤

해설 $f(x) = 4x - 1$ 을 $y = 4x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 4y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 를 $y = 12x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 12y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{12}$$

$$\begin{aligned}\therefore \{f(3x)\}^{-1} &= \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{3}g(x)\end{aligned}$$

<다른풀이>

$y = f(3x)$ 에서 x, y 를 바꾸면 $x = f(3y)$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3y \quad \therefore y = \frac{1}{3}f^{-1}(x)$$

따라서 $y = f(3x)$ 의 역함수는

$$\frac{1}{3}f^{-1}(x) = \frac{1}{3}g(x)$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

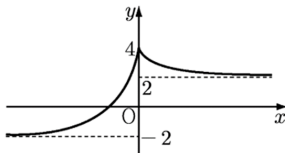
집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

11 정답 ②

해설 (i) $x < 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{-x+1} = \frac{-6}{x-1} - 2$

(ii) $x > 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2$

함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 0$ 일 때 최댓값 4를 가지므로 $p = 0$, $q = 4$
 $\therefore p + q = 4$

12 정답 ㄷ

해설 ㄱ. $A \cup B = B$ 에서 $A \subset B$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = 0$ 이고 $b = 0$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $a^2 = b^2$ 에서 $a = \pm b$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

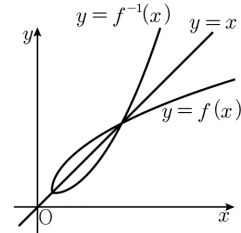
13 정답 21

해설 $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1200) &= f(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^4) + f(3) + f(5^2) \\ &= 4f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 4 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 21 \end{aligned}$$

14 정답 $3\sqrt{2}$

해설 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{3x-3}+1 = x \text{에서 } \sqrt{3x-3} = x-1$$

양변을 제곱하면

$$3x-3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 $P(1, 1)$, $Q(4, 4)$ 또는 $P(4, 4)$, $Q(1, 1)$ 이므로

$$PQ = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

15 정답 ③

해설 집합 A 의 부분집합을 모두 구해보면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 이다.

이때 1을 반드시 포함하는 집합은 4개, 2를 반드시

포함하는 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 집합은

4개이므로 원소의 총합은

$$4(1+2+3) = 24$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

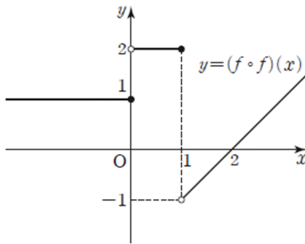
16 정답 ②

해설 $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 값은 -1 부터 커지므로 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프 중 $x > -1$ 인 부분을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

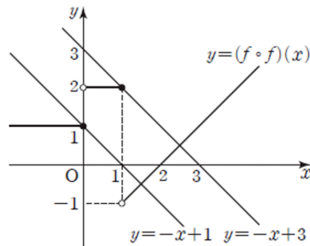
또, $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(2) = 1$ 이다.

그러므로 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

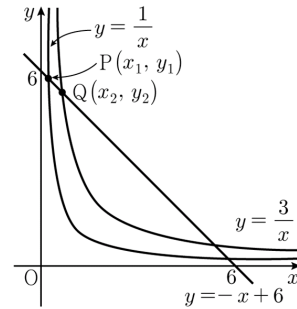


이때 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나는 정수 k 는 1, 3으로 그 합은 4이다.



17 정답 ②

해설 직선 $y = -x + 6$ 이 두 함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y 축에 가까운 점을 다음 그림과 같이 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 라 하자.



ㄱ. 주어진 그래프에서 $y_1 > y_2$ 이므로

$$\frac{1}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

이때 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 이므로 위의 부등식의 양변에

$x_1 x_2$ 를 곱하면 $x_2 > 3x_1$ (거짓)

ㄴ. 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식이

$y = -x + 6$ 이므로 직선 PQ의 기울기는 -1 이다.

$$\text{즉, } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1, y_1 - y_2 = -(x_1 - x_2)$$

$$\therefore y_1 - y_2 = x_2 - x_1 \text{ (참)}$$

ㄷ. 원점 O에서 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 각각

지나는 직선의 기울기를 비교하면

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} > \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}, \frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2}{x_2}$$

$$\therefore x_2 y_1 > x_1 y_2 \text{ (} \because x_1 > 0, x_2 > 0 \text{)}$$

이 부등식의 양변에 $x_1 y_2$ 를 각각 더하면

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 > x_1 y_2 + x_1 y_2$$

$$= 2x_1 y_2$$

$$> 2x_1 x_2 \text{ (} \because y_2 > x_2 \text{)}$$

$$\therefore x_1 y_2 + x_2 y_1 > 2x_1 x_2 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $(t, \frac{2}{t-1})$ 로 놓으면 $t > 1$ 이므로
 사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$$2\left(t + \frac{2}{t-1}\right) = 2\left(1 + t - 1 + \frac{2}{t-1}\right)$$

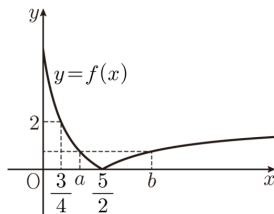
$$\geq 2\left\{1 + 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}}\right\}$$

$$= 2(1 + 2\sqrt{2})$$
 이때 등호는 $t-1 = \frac{2}{t-1}$ 일 때 성립하므로
 $t = \sqrt{2} + 1$ 일 때 둘레의 길이가 최소가 된다.
 따라서 이때의 사각형 OAPB의 넓이는

$$t \cdot \frac{2}{t-1} = (\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

19 정답 ③

해설 $f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| = \left| \frac{7}{x+1} - 2 \right|, f\left(\frac{3}{4}\right) = 2,$
 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음
 그림과 같다.



ㄱ. 위 그림에서와 같이 $0 < f(a) = f(b) < 2$ 이다. (참)
 ㄴ. 위 그림에서 알 수 있듯이 $0 < f(a) < 2$ 이기 위해서는
 $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$ 이어야 한다. (참)

ㄷ. $f(a) = \frac{7}{a+1} - 2, f(b) = 2 - \frac{7}{b+1}$ 이므로

$$\frac{f(a)+f(b)}{7} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}$$

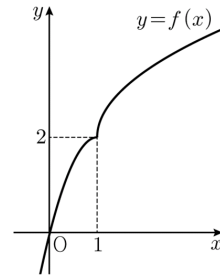
$$= \frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)}$$

$$= \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 정답 ③

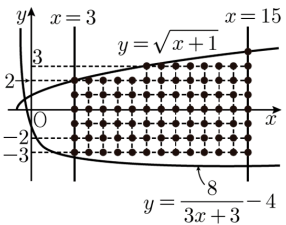
해설 아래 그림과 같이 $x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는
 이차함수 $y = -2(x-1)^2 + b$ 의 그래프의 일부이고
 증가하는 함수이다.



따라서 다음 그림과 같이 $x \geq 1$ 일 때, 무리함수
 $y = \sqrt{a(1-x)} + 2$ 의 그래프도 증가해야 함수
 $f(x)$ 가 일대일대응이 된다.

즉, $y = \sqrt{a(1-x)} + 2 = \sqrt{-a(x-1)} + 2$ 에서
 $-a > 0$ 이므로 $a < 0$
 $f(1) = b = 2$
 $\therefore a < 0, b = 2$

21 정답 ⑤

- 해설** ㄱ. 함수 $f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4$ 의 점근선의 방정식은
 $x = -1, y = -4$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는
 직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다. (참)
- ㄴ. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 함수 $g(x) = \sqrt{x+1}$ 에서
 $2 \leq g(x) \leq 4$ 이므로 y 좌표가 정수인 점의 개수는
 3이다. (참)
- ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
 점 $(3, -\frac{10}{3})$ 을 지나고, 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
 점 $(3, 2)$ 를 지난다.
- 
- $3 \leq x \leq 15$ 에서 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
 y 좌표가 정수인 점이 없고 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
 $x = 3, 8, 15$ 일 때만 y 좌표가 정수이다.
- 두 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4, y = \sqrt{x+1}$ 과
 두 직선 $x = 3, x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는
 그 경계에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의
 개수는
 $x = 3, 4, 5, 6, 7$ 일 때 각각 6
 $x = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ 일 때 각각 7
 $x = 15$ 일 때 8
 따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는
 $5 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 87$ (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

22 정답 4

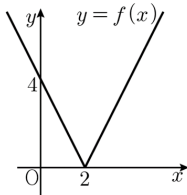
- 해설** 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B 는 공집합이
 아니어야 하고, 집합 B 의 원소는 729의 양의 약수이어야
 한다.
- 이때 729의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729이고
 조건 (나)에 의하여 1과 729, 3과 243, 9와 81은 어느
 하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의
 원소이다.
- (i) $n(B) = 1$ 인 경우는 $\{27\}$ 이므로 $a_1 = 1$
 (ii) $n(B) = 3$ 인 경우는 $\{1, 27, 729\}, \{3, 27, 243\},$
 $\{9, 27, 81\}$ 이므로 $a_3 = 3$
 (i), (ii)에 의하여
 $a_1 + a_3 = 1 + 3 = 4$

23 정답 294

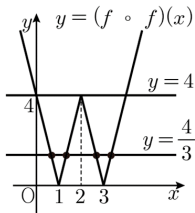
- 해설** 조건 (가)에서 $S(A \cap B) = 8$
 조건 (나)에서 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{7, 11\}$ 이므로
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$
 $\therefore S(A \cup B) = 48$
 $S(A) + S(B) = S(A \cup B) + S(A \cap B)$
 $= 48 + 8 = 56$
 이때 $S(A) = 3S(B)$ 이므로
 $S(A) + S(B) = 3S(B) + S(B) = 4S(B)$
 따라서 $4S(B) = 56$ 이므로
 $S(B) = 14, S(A) = 3S(B) = 42$
 $\therefore \frac{S(A)S(B)}{2} = \frac{42 \cdot 14}{2} = 294$

24 정답 14

해설 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 에서
 $(f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$ 이므로
 $(f \circ f)(x) = t$ 라 하면 $f(t) = t$ 이다.
 $|2t - 4| = t$ 의 양변을 제곱하면 $(2t - 4)^2 = t^2$,
 $3t^2 - 16t + 16 = 0$, $(t - 4)(3t - 4) = 0$
 즉, $t = \frac{4}{3}$ 또는 $t = 4$ 이므로 $(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$,
 $(f \circ f)(x) = 4$ 이다.
 $f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3}$ 의 교점의

x 좌표가 각각 $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$ 이므로 방정식

$(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$ 의 서로 다른 실근의 합은

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 8$ 이고, 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의

그래프와 직선 $y = 4$ 의 교점의 x 좌표가 각각

0, 2, 4이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = 4$ 의 서로 다른

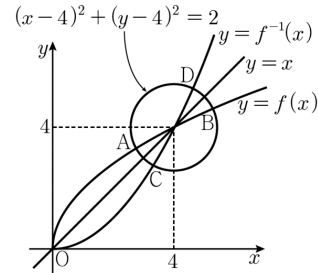
실근의 합은 $0 + 2 + 4 = 6$ 이다.

따라서 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로

다른 실근의 합은 $8 + 6 = 14$ 이다.

25 정답 ③

해설 원 $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여
 대칭이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 역함수
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 두 직선 AB, CD는 서로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 직선 AB의 방정식을 $y = m_1x + n$ 이라 하면

직선 CD의 방정식은 $x = m_1y + n$

즉, $y = \frac{1}{m_1}x - \frac{n}{m_1}$ 이다.

따라서 $m_2 = \frac{1}{m_1}$ 이므로 $m_1m_2 = 1$