

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 267~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{x}$ ③ $\frac{1}{x-1}$
 ④ $\frac{x}{x-1}$ ⑤ $\frac{x+1}{x(x-1)}$

02 함수 $y = -\frac{2}{x} - 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은?

- ① $x=0, y=3$ ② $x=0, y=-3$
 ③ $x=1, y=3$ ④ $x=-1, y=3$
 ⑤ $x=1, y=-3$

03 빈칸에 알맞은 말로 올바른 것을 고르면?

$$y = \frac{2x+1}{x-5}, y = \frac{x^2+3}{x-2}, y = \frac{5x-5}{x+1}$$

위 주어진 함수들은 함수 이면서 함수가 아니다.

- ① 다항, 유리 ② 상수, 다항
 ③ 유리, 다항 ④ 항등, 다항
 ⑤ 항등, 유리

04 $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$ 를 간단히 하면?

- ① 0 ② 1 ③ $a+b$
 ④ bc ⑤ $a+b+c$

05 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11}$ 의 값을 구하시오.

06 $f(x) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ 에 대하여 $f(k) = -\frac{1}{2}$ 를

만족시키는 상수 k 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 분수식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② $1 - a$ ③ $1 - a^2$
④ $1 + a^2$ ⑤ $1 + a$

08 $2x = 3y$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{13}$ ② $\frac{6}{13}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{19}{12}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

09 함수 $y = \frac{2x - 2}{x - 2}$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? _____

- ① 그래프는 점 (2, 2)에 대하여 대칭이다.
② 정의역은 $\{x \mid x \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이다.
③ 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 (0, 1)이다.
④ 그래프는 모든 사분면을 지난다.
⑤ 그래프는 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 평행이동 한 것이다.

10 함수 $y = \frac{bx - 6}{x - a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 4$,
 $y = 2$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

11 유리함수 $y = \frac{-4x - 3}{x + 2}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든
실수이고, 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이때 ab 의
값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

- 12** 함수 $y = \frac{ax+7}{x+b}$ 의 그래프가 두 직선 $y = x+3$ 과 직선 $y = -x-2$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

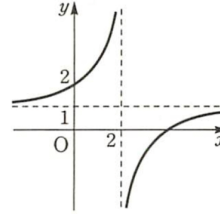
- ① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

- 13** $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 점 $(k, -2)$ 를 지난다. k 의 값을 구하시오.

- 14** 함수 $f(x) = \frac{ax}{x+1}$ 에 대하여 $f = f^{-1}$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

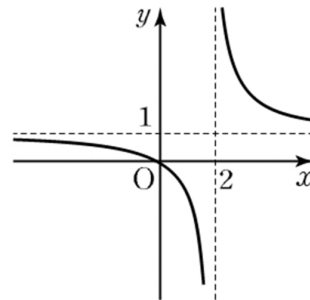
- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

- 15** 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은?



- ① 8 ② 6 ③ -6 ④ -8 ⑤ -12

- 16** 함수 $y = \frac{k}{x+p} + q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 k, p, q 에 대하여 $k+p+q$ 의 값은?



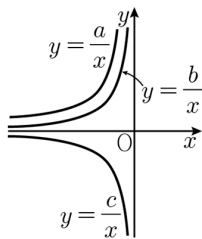
- ① -2 ② -1
 ③ 0 ④ 1
 ⑤ 2

- 17** 이차부등식 $x^2 - x - 2 \leq 0$ 을 만족시키는 x 에 대하여 함수 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$
 ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$
 ⑤ $\frac{7}{2}$

- 18** 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ 이라 하자. 등식 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(11) = \frac{a}{(x+b)(x+c)}$ 가 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 성립할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

- 19** 다음 그림은 세 함수 $y = \frac{a}{x}$, $y = \frac{b}{x}$, $y = \frac{c}{x}$ 의 그래프의 일부분이다. 상수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?



- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
 ④ $b < c < a$ ⑤ $c < b < a$

- 20** $3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \frac{2x-2}{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y = ax + 1$ 이 한 점에서 만날 때, 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. 이때 $M+3m$ 의 값을 구하시오.

- 21** [2018년 9월 고2 이과 8번/3점]
 두 상수 a, b 에 대하여 정의역이 $\{x | 2 \leq x \leq a\}$ 인 함수 $y = \frac{3}{x-1} - 2$ 의 치역이 $\{y | -1 \leq y \leq b\}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a > 2, b > -1$)
- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

- 22** 함수 $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프와 겹친다. 이때 상수 a, b, k 의 합 $a+b+k$ 의 값을 구하시오.

23 함수 $y = \frac{2x+a-4}{x-3}$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않게 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오.

24 함수 $y = \frac{2x+k-2}{x+1}$ 의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 자연수 k 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25 $3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \frac{3x-a}{x+1}$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 b 라고 할 때 실수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $a > -3$)

26 함수 $f(x) = \frac{2x}{-x+2}$, $g(x) = \frac{x-1}{3x}$ 의 역함수를 각각 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ 라 할 때, $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$ 의 값을 구하시오.

27 두 유리함수 $f(x) = \frac{4x}{x+1}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(a) = 3$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

28 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$ 으로 정의할 때, $f^{222}(111)$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.)

29 함수 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 에 대하여

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

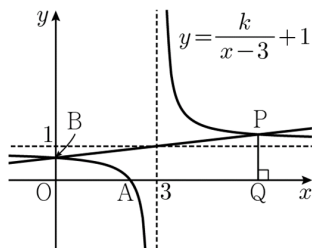
$$f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{1+f^2(x)}{1-f^2(x)}, \dots \text{으로 정의한다.}$$

이때 $f^{99}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

30 아래 그림과 같이 함수 $y = \frac{k}{x-3} + 1$ ($0 < k < 3$)의

그래프와 x 축, y 축의 교점을 각각 A, B라 하자.

이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $k=2$ 일 때, 점 P의 좌표는 $\left(6, \frac{5}{3}\right)$ 이다.

ㄴ. $0 < k < 3$ 인 실수 k 에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, k 의 값은 $3 - \sqrt{6}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31 분수함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

- ① $a-d=0$ ② $a+d=0$
③ $ad=1$ ④ $ad=-1$
⑤ $ad-bc=0$

32 유리함수 $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c 는 실수이고, $a \neq 0$ 이다.)

〈보기〉

ㄱ. $f(1) = f^{-1}(1)$ 이면 $b-c=0$ 이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, $f(0)=0$ 이면 $a=-b^2$ 이다.

ㄷ. $a < 0$ 일 때 $x_1 < b < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

33 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|$ 에 대하여 $a < b$ 인 두 양수 a, b 가

$f(a)=f(b)$ 를 만족시킬 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

⌐. $0 < f(a) < 2$

ㄴ. $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$

ㄷ. $\frac{f(a)+f(b)}{7} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)}$

〈보기〉

- ① ⌐ ② ㄴ ③ ⌐, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ⌐, ㄴ, ㄷ

34 [2020년 3월 고2 19번 변형]

함수 $f(x)=\frac{a}{x-9}+b$ 에 대하여

함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a \neq 0$ 이다.)

- ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{17}{4}$ ③ -4
- ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 267~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ①	02 ②	03 ③
04 ①	05 $\frac{5}{11}$	06 ③
07 ③	08 ⑤	09 ④
10 6	11 ③	12 ⑤
13 1	14 ②	15 ①
16 ④	17 ②	18 22
19 ①	20 2	21 ①
22 0	23 10	24 ①
25 9	26 $\frac{1}{19}$	27 4
28 111	29 -3	30 ③
31 ②	32 ②	33 ③
34 ④		



마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 267~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ①

해설

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\
 &= \frac{(x-1)^2 + x}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x^2 - x}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x(x-1)}{x(x-1)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

02 정답 ②

해설 함수 $y = -\frac{2}{x} - 3$ 의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x = 0$, $y = -3$ 이다.

03 정답 ③

해설 주어진 함수들은 유리함수면서 다항함수가 아닌 분수함수이다.

04 정답 ①

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{-a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-ab + ca - bc + ab - ca + bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0
 \end{aligned}$$

05 정답 $\frac{5}{11}$

해설 (주어진 식) $= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{5}{11}$$

06 정답 ③

해설 $f(x) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1}$

$$= \frac{-1}{x-1}$$

따라서 $f(k) = \frac{-1}{k-1} = -\frac{1}{2}$ 에서 $k = 3$

07 정답 ③

해설 준식 $= \frac{1}{1 - \frac{a}{a-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}}$

$$= \frac{a-1}{a-1-a} \times \frac{a+1}{a+1-a}$$

$$= \frac{a-1}{-1} \times \frac{a+1}{1} = 1 - a^2$$

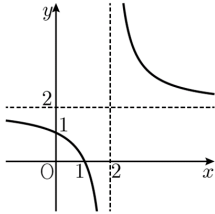
08 정답 ⑤

해설 $2x = 3y$ 에서 $x = \frac{3}{2}y$

$$\therefore \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^2 + y^2}{\frac{9}{4}y^2 - y^2} = \frac{7}{5}$$

09 정답 ④

해설 $y = \frac{2x-2}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나므로 옳지 않은 것은 ④이다.

10 정답 6

해설 $y = \frac{bx-6}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab-6}{x-a}$

$$= \frac{ab-6}{x-a} + b$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a, y=b$ 이므로

$a=4, b=2$

$\therefore a+b=6$

11 정답 ③

해설 유리함수 $y = \frac{-4x-3}{x+2}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든

실수이고, 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x=a, y=b$ 는 주어진 함수의 점근선이다.

따라서 $y = \frac{-4x-3}{x+2} = -4 + \frac{5}{x+2}$ 에서

점근선은 $x=-2, y=-4$ 이므로

$ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

12 정답 ⑤

해설 $y = \frac{ax+7}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab+7}{x+b} = \frac{-ab+7}{x+b} + a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b, y=a$

점근선의 교점 $(-b, a)$ 가 두 직선 $y=x+3,$

$y=-x-2$ 의 교점이므로 $a=-b+3, a=b-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$

$\therefore ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

13 정답 1

해설 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 2,

y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{x-2} - 1$$

이 함수의 그래프가 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{1}{k-2} - 1 \quad \therefore k = 1$$

14 정답 ②

해설 $y = \frac{ax}{x+1}$ 라 하면

$$y(x+1) = ax$$

$$y = (a-y)x \quad \therefore x = \frac{y}{a-y}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x}{a-x}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{a-x}$$

$$f = f^{-1} \text{이므로 } \frac{ax}{x+1} = \frac{x}{a-x}$$

$$\therefore a = -1$$

15 정답 ①

해설 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓으면 ①의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{-2} + 1 \quad \therefore k = -2$$

$k=-2$ 를 ①에 대입하면

$$y = \frac{-2}{x-2} + 1 = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\therefore a=1, b=-4, c=-2$$

$$\therefore abc = 8$$

16 정답 ④

해설 함수 $y = \frac{k}{x+p} + q$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$$x=2, y=1 \text{이므로 } p=-2, q=1$$

따라서 함수 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 그래프가 점

$$(0, 0) \text{를 지나므로 } 0 = \frac{k}{-2} + 1 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore k+p+q = 2+(-2)+1 = 1$$

17 정답 ②

해설 부등식 $x^2 - x - 2 \leq 0$ 에서

$$(x+1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 2$$

므로

$$y = \frac{2x+3}{x+2} \text{의 그래프는 } y = -\frac{1}{x} \text{의 그래프를}$$

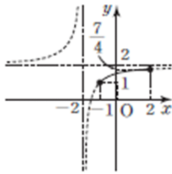
x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때, 최솟값 1 ,

$x = 2$ 일 때 최댓값 $\frac{7}{4}$ 을 갖는다.



$$\text{즉, } m = 1, M = \frac{7}{4} \text{이므로 } M + m = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$$

18 정답 22

$$\text{해설 } f(n) = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$$

$$= \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(11)$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{x+10} - \frac{1}{x+11} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+11}$$

$$= \frac{11}{x(x+11)}$$

따라서 $a = 11, b = 0, c = 11$ 이므로

$$a + b + c = 22$$

19 정답 ①

해설 $y = \frac{a}{x}, y = \frac{b}{x}$ 의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$$a < 0, b < 0$$

이때 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 $y = \frac{b}{x}$ 의 그래프보다

원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|a| > |b| \quad \therefore a < b$$

$y = \frac{c}{x}$ 의 그래프는 제3사분면을 지나므로

$$c > 0$$

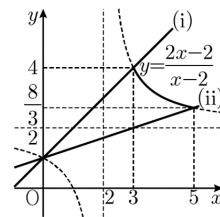
$$\therefore a < b < c$$

20 정답 2

해설 $y = \frac{2x-2}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 2$ 이므로

$3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \frac{2x-2}{x-2}$ 의 그래프는 다음

그림과 같다.



직선 $y = ax + 1$ 은 a 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$ 을
지난다.

(i) 직선 $y = ax + 1$ 이 점 $(3, 4)$ 를 지날 때,

$$4 = 3a + 1 \quad \therefore a = 1$$

(ii) 직선 $y = ax + 1$ 이 점 $(5, \frac{8}{3})$ 를 지날 때,

$$\frac{8}{3} = 5a + 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 함수 $y = \frac{2x-2}{x-2}$ 의 그래프와 직선

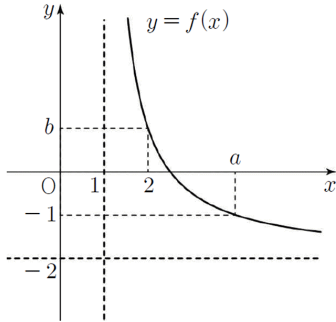
$y = ax + 1$ 이 한 점에서 만나려면 $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$

따라서 $M = 1, m = \frac{1}{3}$ 이므로 $M + 3m = 2$

21 정답 ①

해설 유리함수의 성질 이해하기

$$f(x) = \frac{3}{x-1} - 2 \text{ 이라 하면}$$



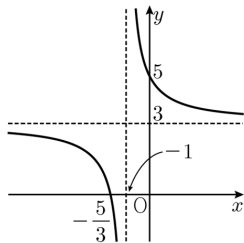
$$f(2) = b = 1, f(a) = \frac{3}{a-1} - 2 = -1$$

따라서 $a = 4, b = 1$ 이므로 $a + b = 5$

22 정답 0

해설 $y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 3$ 이므로

그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y = \frac{3x+5}{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 $y = \frac{2}{x}$ 의

그래프와 겹친다.

$$\therefore a = 1, b = -3, k = 2$$

$$\therefore a + b + k = 0$$

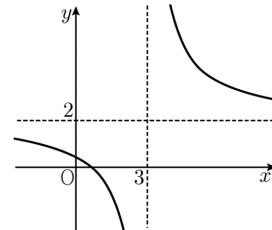
23 정답 10

해설 $y = \frac{2x+a-4}{x-3} = \frac{a+2}{x-3} + 2$

따라서 점근선의 방정식은 $x = 3, y = 2$

이때 함수 $y = \frac{2x+a-4}{x-3}$ 의 그래프가 제3사분면을

지나지 않으려면 다음 그림과 같이 $x = 0$ 에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다.



$$\text{즉, } \frac{a-4}{-3} \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a \leq 4$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

24 정답 ①

해설 $y = \frac{2x+k-2}{x+1} = \frac{2(x+1)+k-4}{x+1} = \frac{k-4}{x+1} + 2$

따라서 점근선의 방정식은

$$x = -1, y = 2$$

이때 함수 $y = \frac{2x+k-2}{x+1}$ 의 그래프가 제4사분면을

지나려면 $k-4 < 0$ 이어야 한다.

$$\therefore k < 4 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$$

또, $x = 0$ 에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$$k-2 < 0$$

$$\therefore k < 2 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡에서 $k < 2$ 이므로 자연수 k 는 1의 1개이다.

25 정답 9

해설 $y = \frac{3x-a}{x+1}$ 를 변형하면

$$y = \frac{-a-3}{x+1} + 3$$

 이때 $a > -3$ 이므로 $-a-3 < 0$ 이고,
 점근선은 $x = -1, y = 3$ 이다.
 따라서 $y = \frac{3x-a}{x+1}$ 의 최댓값은 $x = 5$ 일 때
 $\frac{15-a}{6}$ 이고, 최솟값은 $x = 3$ 일 때 $\frac{9-a}{4}$ 이다.
 이때 $\frac{15-a}{6} = 1, \frac{9-a}{4} = b$ 이므로
 $a = 9, b = 0$
 $\therefore a+b = 9$

26 정답 $\frac{1}{19}$

해설 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3))$
 $f(3) = \frac{6}{-3+2} = -6$ 이므로
 $g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(-6)$
 $g^{-1}(-6) = k$ 라 하면 $g(k) = -6$
 $\frac{k-1}{3k} = -6$ 에서 $k-1 = -18k, 19k = 1$
 $\therefore k = \frac{1}{19}$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = \frac{1}{19}$

27 정답 4

해설 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(a) = (g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(a)$
 $= (f^{-1} \circ g)(a) (\because g \circ g^{-1} = I)$
 $= f^{-1}(g(a))$
 $f^{-1}(g(a)) = 3$ 에서 $f(3) = g(a)$ 이므로
 $\frac{12}{4} = \frac{2a+1}{a-1},$
 $12a-12 = 8a+4$
 $\therefore a = 4$

28 정답 111

해설 $f(x) = \frac{x-1}{x}$ 에서

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

 따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n 은 자연수)는 항등함수이므로
 $f^{222}(111) = f^{3 \cdot 74}(111) = 111$

29 정답 -3

해설 함수 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 에서

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f^2\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$$

$$f^3\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$f^4\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(f^3\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f(-3) = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

 \vdots
 따라서 n 이 자연수일 때
 $f^n\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값은 $\frac{1}{3}, 2, -3, -\frac{1}{2}$ 이 순서대로
 반복해서 나타난다.
 이때 $99 = 4 \cdot 24 + 3$ 이므로
 $f^{99}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^3\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

30 정답 ③

해설 $y = \frac{k}{x-3} + 1$ 에서

$y = 0$ 이면 $x = 3 - k$ 이므로 $A(3 - k, 0)$

$x = 0$ 이면 $y = -\frac{k}{3} + 1$ 이므로 $B(0, -\frac{k}{3} + 1)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $R(3, 1)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$P(6, 1 + \frac{k}{3})$ 이다.

ㄱ. $k = 2$ 이면 $P(6, \frac{5}{3})$ 이다. (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\frac{\frac{k}{3} - 1}{3 - k} = -\frac{1}{3}$

직선 AP의 기울기는 $\frac{1 + \frac{k}{3}}{3 + k} = \frac{1}{3}$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 $-\frac{1}{9}$ 이므로 서로

수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서

삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

사각형 PQAB의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot (3 - k) \cdot \left(-\frac{k}{3} + 1\right) \\ &= 6 - \frac{1}{6}(3 - k)^2 \end{aligned}$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 보다 작으므로

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$$\frac{1}{6}(3 - k)^2 = 1 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 방정식 $\frac{1}{6}(3 - k)^2 = 1$ 의 해는

$$k = 3 - \sqrt{6} \quad (\because 0 < k < 3) \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

31 정답 ②

$$\begin{aligned} \text{해설 } y &= \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \frac{cx+b}{cx+d} - \frac{ab}{c} + b \\ &= \frac{b}{c} \frac{c-a}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

주어진 분수함수의 점근선은

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \text{ 이므로}$$

그래프는 점 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이

분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로 점 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$$\therefore \frac{a}{c} = -\frac{d}{c}, a = -d$$

$$\therefore a + d = 0$$

32 정답 ②

해설 ㄱ. [반례] 함수 $f(x) = \frac{2}{x} - 1$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을

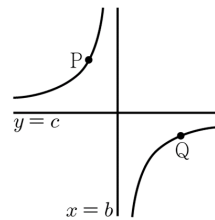
지나므로 $f(1) = f^{-1}(1) = 1$ 이지만 $b = 0$,

$c = -1$ 이므로 $b - c \neq 0$ 이다. (거짓)

ㄴ. 유리함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이면 두 점근선의 교점 (b, c) 가 직선 $y = x$ 위에 있으므로 $c = b$ 이다.

$$f(0) = \frac{a}{-b} + c = 0 \text{ 에서 } a = bc = b^2 \text{ 이다. (거짓)}$$

ㄷ. $a < 0$ 일 때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



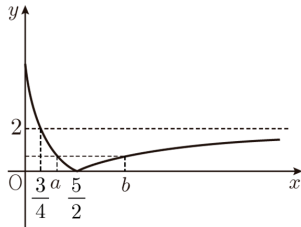
두 점 $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$ 에 대하여

$x_1 < b < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

33 정답 ③

해설 $f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| = \left| \frac{7}{x+1} - 2 \right|$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$,
 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음
 그림과 같다.



ㄱ. 위 그림에서와 같이 $0 < f(a) = f(b) < 2$ 이다. (참)
 ㄴ. 위 그림에서 알 수 있듯이 $0 < f(a) < 2$ 이기 위해서는
 $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$ 이어야 한다. (참)

ㄷ. $f(a) = \frac{7}{a+1} - 2$, $f(b) = 2 - \frac{7}{b+1}$ 이므로

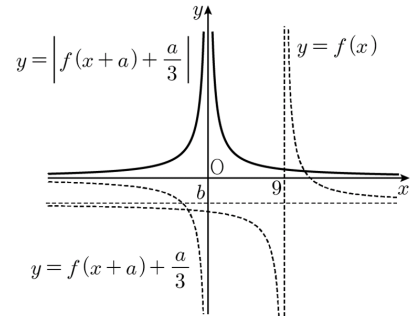
$$\begin{aligned} \frac{f(a)+f(b)}{7} &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \\ &= \frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 정답 ④

해설 곡선 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{3} \right|$ 는

곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{3}$ 의 x 축 아래에 그려진 부분을
 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y 축에 대하여
 대칭이라면 곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{3}$ 의 점근선의
 방정식은 그림과 같이 $x = 0$, $y = 0$ 이어야 함을 알 수 있다.



$$f(x) = \frac{a}{x-9} + b \text{에서}$$

$$f(x+a) + \frac{a}{3} = \frac{a}{x+a-9} + b + \frac{a}{3} \text{이고}$$

곡선 $y = f(x+a) + \frac{a}{3}$ 의 점근선의 방정식은

$$x = 9-a, y = b + \frac{a}{3}$$

이 점근선의 방정식이 $x = 0$, $y = 0$ 이어야 하므로

$$9-a=0, b+\frac{a}{3}=0$$

$$\therefore a=9, b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{9}{x-9} - 3 \text{이므로}$$

$$f(b) = f(-3) = -\frac{15}{4}$$