마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 함수 중 그 그래프가 $y=|2x-6|$의 그래프와 만나는 것은?

① $y=-x^2+1$
② $y=-2x^2$
③ $y=-2x+4$
④ $y=\frac{1}{2}x-3$
⑤ $y=x-2$

02 함수 $f(x)=|2x-4|$에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=(f\circ f\circ f)(x)$의 서로 다른 실근의 합을 구하시오.

03 함수 $y=|x-1|-2$의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m의 값의 범위는?

① $-1<m<0$
② $-\frac{1}{2}<m<1$
③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$
④ $0<m<1$
⑤ $1<m<2$

04 다음 중 함수 $y=|3x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$가 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는?

① $m>-3$
② $m\le\frac{3}{7}$
③ $-3<m<\frac{3}{7}$
④ $m<-3$ 또는 $m\ge\frac{3}{7}$
⑤ $m\le-3$ 또는 $m>\frac{3}{7}$

05 세 함수 f, g, h에 대하여 $f(x)=2x-1$, $(h\circ g)(x)=x+3$일 때, $(f\circ(h\circ g))(a)=11$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

06 두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+5$에 대하여 $(f \circ g)(k)=13$일 때, $(g \circ f)(k)$값을 구하시오.

07 일차함수 $f(x)=ax+2$에 대하여 함수 g를 $g(x)=(f \circ f)(x)$라 하자. 직선 $y=f(x)$의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기의 곱이 27일 때, $g(2)$의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25
④ 26 ⑤ 27

08 자연수 전체의 집합에서 정의된

함수 $f(x)=\begin{cases} x+5 & (x\text{가 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} & (x\text{가 짝수}) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f \circ f)(a)=25$를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=|x|-4$,

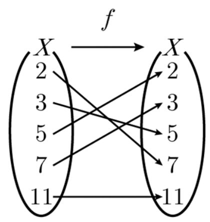
$g(x)=\begin{cases} -x^2+4 & (x \geq 0) \\ x^2+4 & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여

$g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k의 값을 α, β $(\alpha>\beta)$라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10 두 함수$f(x)=2x+a$, $g(x)=-x+1$에 대하여 $g \circ f=f \circ g$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

11 집합 $X=\{2, 3, 5, 7, 11\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 그림과 같다. 함수 $g: X \to X$가 $g(2)=5$, $f \circ g=g \circ f$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 11

12 두 함수 f, g가 일대일대응이고, $(g \circ f)(x) = 3x - 2$, $g(6) = 4$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

13 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : A \to A$를
$f(x) = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 2) \\ 5 & (x = 1) \end{cases}$로 정의하자.
$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
라 할 때, $f^{2020}(2) + f^{2023}(4)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

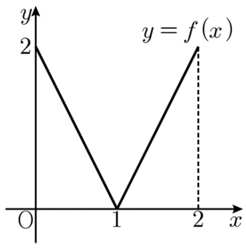
14 함수 $f(x) = -x + 3$에 대하여
$f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$으로 정의할 때,
$f^{100}(a) = 100$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.
(단, n은 자연수이다.)

15 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여
함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
(나) $2 \leq x \leq 4$일 때,
$(f \circ f)(x) = f(x) - 2x + 2$이다.

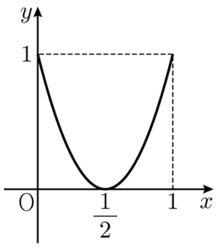
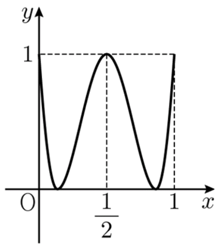
$f(1) + f(3) + f(4)$의 값을 구하시오.

16 집합 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$에 대하여 A에서 A로의 함수
$y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f^1 = f$,
$f^{n+1} = f \circ f^n$으로 정의할 때, $f^{2020}\left(\frac{3}{4}\right)$의 값을
구하시오. (단, n은 자연수이다.)



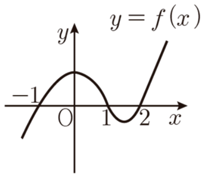
17 실수 전체의 집합에서 정의된
함수 $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & (x < -2) \\ x + 2 & (x \geq -2) \end{cases}$에 대하여
함수 $y = (f \circ f)(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로
둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

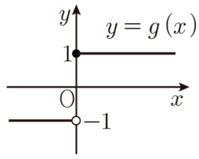
18 함수 $f(x)=4x^2-4x+1\ (0 \le x \le 1)$에 대하여 $y=f(x)$와 $y=f(f(x))$의 그래프 개형은 다음과 같다. 이때 집합 $\{x \mid f(f(f(x)))=x,\ 0 \le x \le 1\}$의 원소의 개수는?

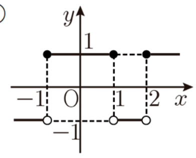



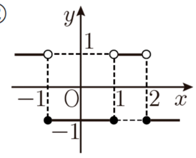
① 16 ② 12 ③ 8
④ 6 ⑤ 5

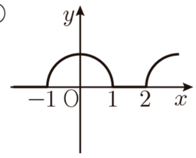
19 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f, g의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는?

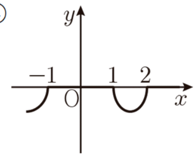


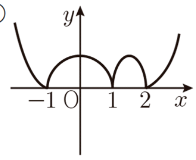


①


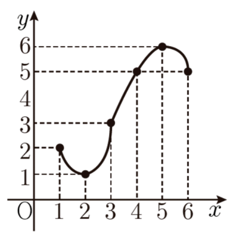
②


③


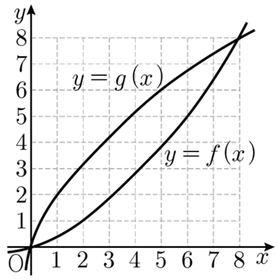
④


⑤


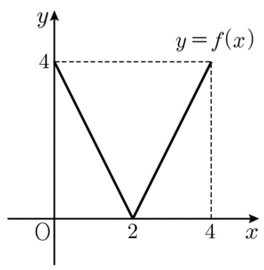
20 $1 \le x \le 6$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(a)=6$을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.



21 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f\circ g)(1)+(g\circ f)(6)$의 값을 구하시오.

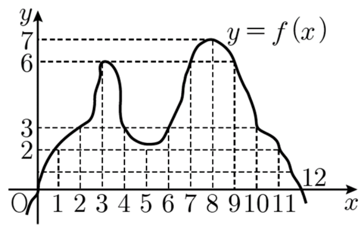


22 집합 $X=\{x|0\le x\le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x\le 2)\\ 2x-4 & (2<x\le 4)\end{cases}$의 그래프가 다음 그림과 같다. 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=x+2$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는?



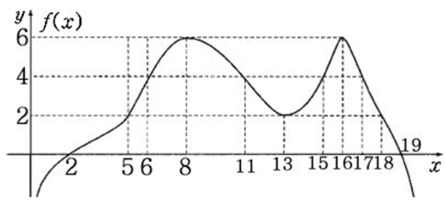
① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

23 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$가 $g(x)=(f\circ f)(x+2)$일 때, $g(x)=6$을 만족시키는 실수 x의 개수는?
(단, $x<0$ 또는 $x>12$일 때, $f(x)<0$이다.)



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

24 다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적은 것은?
($x<2$ 또는 $x>19$일 때, $f(x)<0$이다.)



① 2, 20　② 2, 22　③ 3, 20　④ 4, 42　⑤ 4, 50

25 함수 $f(x)$ 의 역함수는 $f^{-1}(x)=3x-3$ 이고, 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(2x-1)$ 로 정의할 때, $g(2)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

26 일차함수 $y=f(x)$에 대하여 $f(2)=3$, $f^{-1}(9)=5$일 때, $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

27 집합 $X=\{x \mid x \leq a,\ x\text{는 실수}\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-x^2+4x$의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

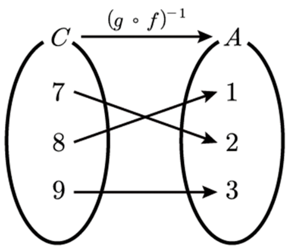
28 정의역이 $X=\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, 공역이 $Y=\{y \mid -1 \leq y \leq 5\}$인 함수 $f(x)=ax+b$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

29 함수 $f(x)=4x+3$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편을 a, y절편을 b라 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

30 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(2x-3)=4x+1$이다. $f^{-1}(x)=ax+b$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

31 [2017년 6월 고2 이과 15번 변형]

세 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$, $C=\{7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f:A\to B$와 $g:B\to C$가 일대일대응이다.
함수 $(g\circ f)^{-1}:C\to A$가 그림과 같고 $f(1)=5$, $g(6)=7$일 때, $f(2)+g(4)$의 값은?



① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

32 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+a & (x=1,\ 3)\ (a\text{는 상수}) \\ \dfrac{x^2}{4} & (x=2,\ 4) \end{cases}$$

이고, 함수 f의 역함수 g가 존재한다.
$g^1(x)=g(x)$, $g^{n+1}(x)=g\left(g^n(x)\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$
라 할 때, $2a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

33 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$f(x)=\begin{cases} -3x & (x\ge 0) \\ kx & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$일 때, k의 값을 구하시오.

34 점 $(2,\ 4)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

35 $f(x)=2x-3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

36 두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x+2$, $g(x)=2x-6$에 대하여 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)$의 값을 구하시오.

37 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (x\geq 0) \\ 2x+k & (x<0) \end{cases}$$

이 $f^{-1}(-3)=-1$을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

38 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<3) \\ \frac{2}{3}x+a & (x\geq 3) \end{cases}$의 역함수를 g라고 하자. $g(g(8))=b$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

39 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=x+15$, $g(x)=\begin{cases} 4x & (x<5) \\ 2x+10 & (x\geq 5) \end{cases}$에 대하여 $f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))$의 값을 구하시오.

40 함수 $y=3x+2|x|$의 역함수는?

① $y=3x-2|x|$ ② $y=-3x+2|x|$
③ $y=-3x-2|x|$ ④ $y=\frac{3x-2|x|}{5}$
⑤ $y=\frac{-3x+2|x|}{5}$

41 두 함수 $f(x)=3x+4$, $g(x)=-\frac{1}{5}x+9$에 대하여 $((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=2$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

42 함수 $f(x)=x^2+4x+k\ (x\geq-2)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 점 $(4,\ 1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

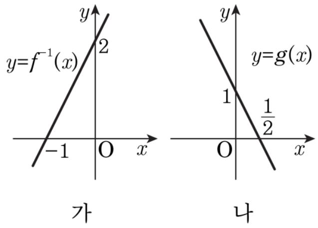
43 함수 $f(x)=x^2+2x+k\ (x\geq\ -1)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 점 $(4,\ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

44 함수 $f(x)=2x+3-\left|\frac{3}{2}x-3\right|$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 36 ② 44 ③ 52
④ 60 ⑤ 68

45 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$

② $y=f(x-1)$

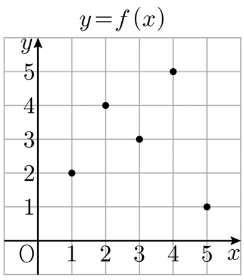
③ $y=-f(x-1)$

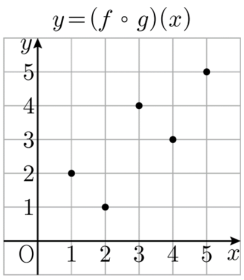
④ $y=f(x+1)$

⑤ $y=-f(1-x)$

46 [2015년 9월 고2 이과 16번/4점]

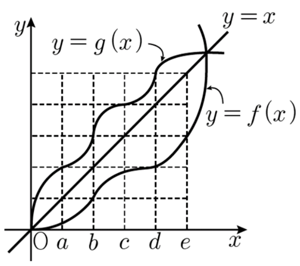
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같을 때, $g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)$의 값은?





① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

47 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음 그림과 같을 때, $(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(c)$의 값은?
(단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 14	03 ②
04 ④	05 3	06 1
07 ④	08 385	09 ⑤
10 $-\frac{1}{2}$	11 ④	12 6
13 ①	14 100	15 17
16 2	17 7	18 ③
19 ①	20 10	21 7
22 ②	23 ③	24 ①
25 ⑤	26 $\frac{1}{4}$	27 ①
28 2	29 $\frac{9}{4}$	30 4
31 ⑤	32 ②	33 $-\frac{1}{3}$
34 ④	35 ④	36 5
37 ③	38 7	39 80
40 ④	41 1	42 ②
43 ⑤	44 ④	45 ①
46 ⑤	47 ⑤	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

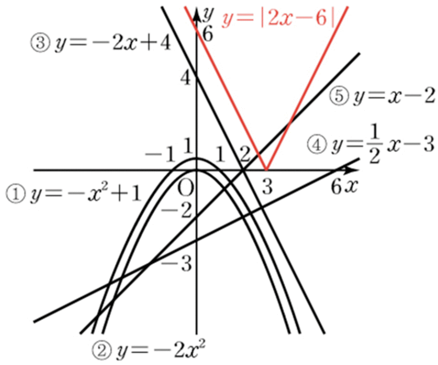
01 정답 ⑤

해설 $y=|2x-6|$에서

$x<3$일 때, $y=-2x+6$

$x \geq 3$일 때, $y=2x-6$

따라서 함수 $y=|2x-6|$의 그래프와 보기의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2x-6|$의 그래프와 만나는 것은 ⑤이다.

02 정답 14

해설 방정식 $(f\circ f)(x)=(f\circ f\circ f)(x)$에서

$(f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$이므로

$(f\circ f)(x)=t$라 하면 $f(t)=t$이다.

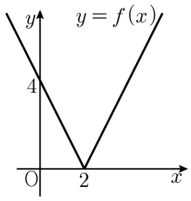
$|2t-4|=t$의 양변을 제곱하면 $(2t-4)^2=t^2$,

$3t^2-16t+16=0$, $(t-4)(3t-4)=0$

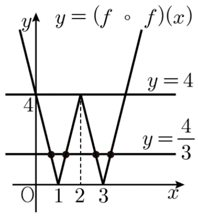
즉, $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$이므로 $(f\circ f)(x)=\frac{4}{3}$,

$(f\circ f)(x)=4$이다.

$f(x)=|2x-4|$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{4}{3}$의 교점의

x좌표가 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$이므로 방정식

$(f\circ f)(x)=\frac{4}{3}$의 서로 다른 실근의 합은

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=8$이고, 함수 $y=(f\circ f)(x)$의

그래프와 직선 $y=4$의 교점의 x좌표가 각각

$0, 2, 4$이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=4$의 서로 다른

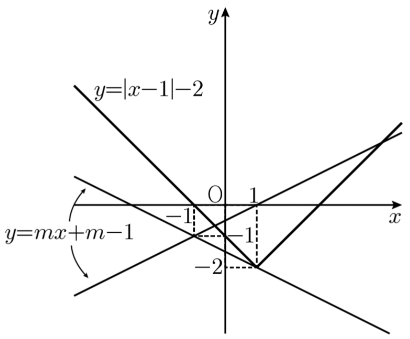
실근의 합은 $0+2+4=6$이다.

따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=(f\circ f\circ f)(x)$의 서로

다른 실근의 합은 $8+6=14$이다.

03 정답 ②

해설 $y=|x-1|-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.

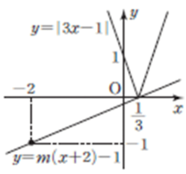


또한, 직선 $y=mx+m-1$, 즉 $y=m(x+1)-1$은 m의 값에 관계 없이 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 직선이다.
다라서 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{2}<m<1$

04 정답 ④

해설



위의 그림에서 함수 직선 $y=m(x+2)-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.
이때, 함수 $y=|3x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$이 만나려면

(i) $m<\dfrac{1}{-\frac{1}{3}}$ 에서 $m<-3$

(ii) $m\geq\dfrac{-1-0}{-2-\frac{1}{3}}$ 에서 $m\geq\dfrac{3}{7}$

(i), (ii)에서 $m<-3$ 또는 $m\geq\dfrac{3}{7}$

05 정답 3

해설 $(f\circ(h\circ g))(a)=f((h\circ g)(a))$
$=f(a+3)$
$=2(a+3)-1$
$=2a+5$

따라서 $2a+5=11$이므로
$a=3$

06 정답 1

해설 $(f\circ g)(k)=f(g(k))$
$=3g(k)-2$
$=3(2k+5)-2$
$=6k+13$

$6k+13=13$이므로 $k=0$

$\therefore\ (g\circ f)(k)=g(f(0))$
$=g(-2)$
$=2(-2)+5=1$

07 정답 ④

해설 $f(x)=ax+2$이므로
$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+2)$
$=a(ax+2)+2=a^2x+2a+2$

직선 $y=f(x)$의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기의 곱이 27이므로
$a\cdot a^2=27$
$\therefore\ a=3$
따라서 $g(x)=9x+8$이므로
$g(2)=18+8=26$

08 정답 385

해설 $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=25$에서
$25=20+5$ 또는 $25=\dfrac{50}{2}$
20은 홀수가 아니고 50은 짝수이므로
$f(f(a))=50$
$50=45+5$ 또는 $50=\dfrac{100}{2}$
45는 홀수이고 100은 짝수이므로
$f(a)=45$ 또는 $f(a)=100$

(i) $f(a)=45$일 때
$45=40+5$ 또는 $45=\dfrac{90}{2}$
이때 40은 홀수가 아니고 90은 짝수이므로
$a=90$

(ii) $f(a)=100$일 때
$100=95+5$ 또는 $100=\dfrac{200}{2}$
이때 95는 홀수이고 200은 짝수이므로
$a=95$ 또는 $a=200$

(i), (ii)에서 $(f\circ f\circ f)(a)=25$를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은
$90+95+200=385$

09 **정답** ⑤

해설 (i) $f(k)<0$일 때,

$g(f(k))=\{f(k)\}^2+4=3,$

$\{f(k)\}^2=-1$

따라서 $f(k)<0$일 때 $g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $f(k)\ge 0$일 때,

$g(f(k))=-\{f(k)\}^2+4=3$

$\therefore \{f(k)\}^2=1,\ f(k)=1\ (\because f(k)\ge 0)$

$f(k)=|k|-4=1$에서

$|k|=5 \qquad \therefore k=\pm 5$

즉 $\alpha=5,\ \beta=-5$이므로 $\qquad \alpha-\beta=10$

10 **정답** $-\frac{1}{2}$

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+a)$

$=-(2x+a)+1=-2x-a+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$

$=2(-x+1)+a=-2x+2+a$

이 때, $g\circ f=f\circ g$이므로

$-2x-a+1=-2x+a$

$2a=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

11 **정답** ④

해설 $f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ $\qquad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2)),\ f(5)=g(7)$

$\therefore g(7)=2$

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

$f(g(7))=g(f(7)),\ f(2)=g(3)$

$\therefore g(3)=7$

12 **정답** 6

해설 $(g\circ f)(2)=3\cdot 2-2=4$에서

$g(f(2))=4$

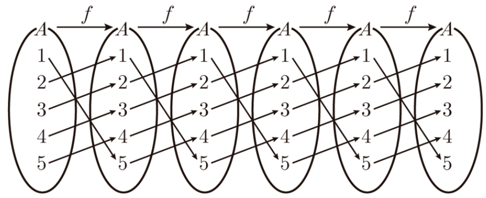
이때 함수 g가 일대일대응이므로

$g(f(2))=4=g(6)$이면

$f(2)=6$

13 **정답** ①

해설 $f(1)=5,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3,\ f(5)=4$이므로 $f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4,\ f^5$의 대응관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $f^5(x)=x$이므로

$f^{2020}(2)=f^{5\cdot 404}(2)=f^5(2)=2$

$f^{2023}(4)=f^{5\cdot 404+3}(4)=f^3(4)=1$

$\therefore f^{2020}(2)+f^{2023}(4)=2+1=3$

14 **정답** 100

해설 $f^1(x)=f(x)=-x+3$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+3)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+3$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여

$f^{2n-1}(x)=-x+3,\ f^{2n}(x)=x$

따라서 $f^{100}(x)=x$이므로 $f^{100}(a)=a=100$

15 정답 17

해설 조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일대응이다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$1 \le f(x) \le 7$

조건 (나)에서 $2 \le x \le 4$일 때,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) - 2x + 2$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $x = 4$를 대입하면

$f(f(4)) = f(4) - 8 + 2 \ge 1$

즉, $f(4) \ge 7$이므로

$f(4) = 7$

$f(f(4)) = f(7) = 7 - 8 + 2 = 1$

$\therefore f(4) = 7,\ f(7) = 1$ $\cdots$ ㉡

㉠에 $x = 3$을 대입하면

$f(f(3)) = f(3) - 6 + 2 \ge 2$

즉, $f(3) \ge 6$이고 $f(4) = 7$이므로

$f(3) = 6$

$f(f(3)) = f(6) = 6 - 6 + 2 = 2$

$\therefore f(3) = 6,\ f(6) = 2$ $\cdots$ ㉢

㉠에 $x = 2$를 대입하면

$f(f(2)) = f(2) - 4 + 2 \ge 3$

즉, $f(2) \ge 5$이고 $f(3) = 6$, $f(4) = 7$이므로

$f(2) = 5$

$f(f(2)) = f(5) = 5 - 4 + 2 = 3$

$\therefore f(2) = 5,\ f(5) = 3$ $\cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$f(1) = 4$

$\therefore f(1) + f(3) + f(4) = 4 + 6 + 7 = 17$

16 정답 2

해설 $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (0 \le x < 1) \\ 2x-2 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$이므로

$f^1\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f^3\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^2)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(1) = 0$

$f^4\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^3)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(0) = 2$

$f^5\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^4)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(2) = 2$

$\vdots$

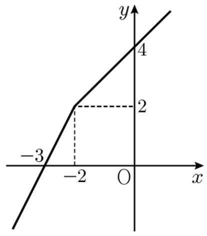
즉, $f^n\left(\frac{3}{4}\right) = 2\ (n \ge 4)$이므로 $f^{2020}\left(\frac{3}{4}\right) = 2$

17 정답 7

해설 $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & (x < -2) \\ x+2 & (x \ge -2) \end{cases}$에서

$$f(f(x)) = \begin{cases} 2(2x+4)+4 & (x < -3) \\ (2x+4)+2 & (-3 \le x < -2) \\ (x+2)+2 & (x \ge -2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x+12 & (x < -3) \\ 2x+6 & (-3 \le x < -2) \\ x+4 & (x \ge -2) \end{cases}$$



$f(f(x)) = 0$에서

$4x + 12 = 0,\ x = -3$

$f(f(-2)) = 2$

$f(f(0)) = 4$

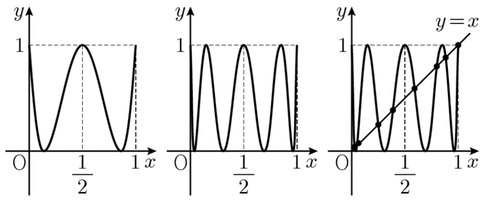
이므로

함수 $y = (f \circ f)(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 1 + 2 + 4 = 7$

18 정답 ③

해설 다음 그림에서 구하는 원소의 개수는 8개이다.



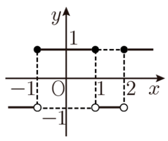
$y = f(f(x))$ $\quad y = f(f(f(x)))$ $\quad f(f(f(x))) = x$

19 정답 ①

해설 $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$이므로

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ 1 & (-1 \le x \le 1) \\ -1 & (1 < x < 2) \\ 1 & (x \ge 2) \end{cases}$$

따라서 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는 ①이다.



20 정답 10

해설 $f(a)=b$라 하면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))$
$\quad =f(b)=6$

이때 $f(b)=6$에서 $b=5$이므로

$f(a)=5$

$f(a)=5$에서 $a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

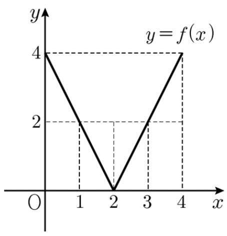
$4+6=10$

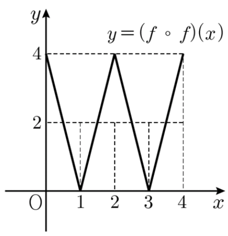
21 정답 7

해설 $(f\circ g)(1)+(g\circ f)(6)=f(g(1))+g(f(6))$
$\quad =f(2)+g(5)$
$\quad =1+6$
$\quad =7$

22 정답 ②

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)=f(3)=2$이므로

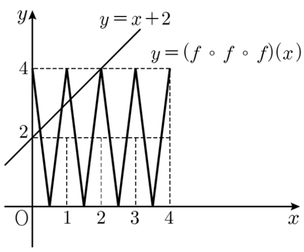




함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프에서

$(f\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f)\left(\frac{3}{2}\right)=(f\circ f)\left(\frac{5}{2}\right)$
$\quad =(f\circ f)\left(\frac{7}{2}\right)$

이므로 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 개수가 4이므로 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=x+2$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

23 정답 ③

해설 $g(x)=6$에서 $(f\circ f)(x+2)=6$이므로

$f(f(x+2))=6$

$x+2=t$로 놓으면 $f(f(t))=6$

$\therefore f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$ 또는 $f(t)=9$

그런데 $f(t)\le 7$이므로

$f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$

(i) $f(t)=3$일 때

$t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=6$ 또는 $t=10$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

(ii) $f(t)=7$일 때, $t=8$

$\therefore x=6$

(i), (ii)에서 실수 x의 개수는 $0, 2, 4, 6, 8$의 5이다.

24 정답 ①

해설 $f(x+2)=t$라 하면

주어진 그래프에서 $f(t)=4$인 t의 값은

$t=6, 11, 15, 17$

한편, 다음을 만족하는 x의 값을 구한다.

$f(x+2)=6, 11, 15, 17 \quad \cdots$ ㉠

이때 그래프에서 $f(x)\le 6$이므로 ㉠ 중에서 실근을 갖는 것은 $f(x+2)=6$일 때뿐이다.

따라서 그래프에서 $f(8)=6$, $f(16)=6$이므로

$x+2=8, 16$

$\therefore x=6, 14$

따라서 조건을 만족하는 서로 다른 실근은 2개이고 그 합은

$6+14=20$

25 정답 ⑤

해설 $g(2)=f(2\cdot 2-1)=f(3)$ 이다.

$f^{-1}(x)=3x-3=3$ 에서 $x=2$

$\therefore f(3)=2$

따라서 $g(2)=2$

26 정답 $\frac{1}{4}$

해설 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f(2)=3$이므로

$2a+b=3$ $\cdots$ ㉠

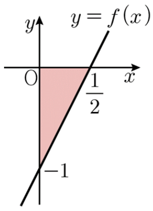
$f^{-1}(9)=5$에서 $f(5)=9$이므로

$5a+b=9$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore f(x)=2x-1$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



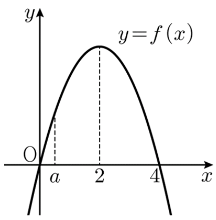
따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1=\frac{1}{4}$

27 정답 ①

해설 $f(x)=-(x-2)^2+4$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는

일대일대응이어야 하므로 $a \leq 2$이다.

또, 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(a)=a$에서 $-a^2+4a=a$

$a^2-3a=0,\ a(a-3)=0$

$\therefore\ a=0$ ($\because\ a \leq 2$)

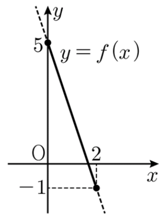
28 정답 2

해설 $f(x)=ax+b$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는

일대일 대응이어야 하므로 증가 또는 감수함수이어야 된다.

이때 $a<0$이므로 다음 그림과 같이 감소함수이고 치역과

공역이 같아야 한다.



즉, $f(0)=5$, $f(2)=-1$이므로

$b=5$, $2a+b=-1$에서 $a=-3$

$\therefore\ a+b=-3+5=2$

29 정답 $\frac{9}{4}$

해설 $y=4x+3$로 놓으면 $4x=y-3$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

직선 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$의 x절편이 3, y절편이 $-\frac{3}{4}$이므로

$a=3$, $b=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ a+b=\frac{9}{4}$

30 정답 4

해설 $2x-3=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$

따라서 $f(t)=2t+7$

$\therefore\ f(x)=2x+7$

$y=2x+7$이라 하면 $2x=y-7$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$이므로 $a-b=4$이다.

31 정답 ⑤

해설 $(g \circ f)(1)=8$, $(g \circ f)(2)=7$, $(g \circ f)(3)=9$
이때 $g(6)=7$이고, 함수 g는 일대일대응이므로
$f(2)=6$이다.
또한, $f(1)=5$, $f(2)=6$이고 함수 f는
일대일대응이므로 $f(3)=4$이다.
$(g \circ f)(3)=9$에서 $f(3)=4$이므로 $g(4)=9$이다.
$\therefore f(2)+g(4)=6+9=15$

32 정답 ②

해설 함수 f의 역함수 g가 존재하므로
함수 f는 일대일대응이다.
$f(2)=1$, $f(4)=4$이므로
$f(1)=2$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=2$
$f(1)=2$, $f(3)=3$일 때 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
$f(1)=3$, $f(3)=2$일 때 $a=\frac{7}{2}$
$g^1(2)=3$, $g^2(2)=1$, $g^3(2)=2$, $g^4(2)=3$, $\cdots$
이므로
n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 1일 때 $g^n(2)=3$
n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2일 때 $g^n(2)=1$
n이 3으로 나누어떨어졌을 때 $g^n(2)=2$
$g^{10}(2)=g^{3\cdot3+1}(2)=3$, $g^{11}(2)=g^{3\cdot3+2}(2)=1$
$\therefore 2a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=7+3+1=11$

33 정답 $-\frac{1}{3}$

해설 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 함수 $y=kx$는 $y=-3x$의
역함수이어야 한다.
$\therefore k=-\frac{1}{3}$

34 정답 ④

해설 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나면
$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지난다.
그런데 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가
일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$를
지난다.
$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$라 하면
$2a+b=4$, $4a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$
따라서 $f(x)=-x+6$이므로
$f(-1)=7$

35 정답 ④

해설 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x \longleftrightarrow (g\circ f)(2x)=x$
$\longleftrightarrow g(f(2x))=x$
$f(2x)=2\bullet 2x-3=4x-3$
$\therefore g(f(2x))=g(4x-3)=x$
$4x-3=1$ 에서 $x=1$ 이므로
$g(4x-3)=x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1$

36 정답 5

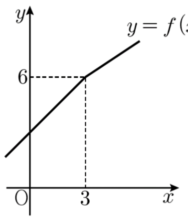
해설 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)=(g^{-1}\circ f)(6)=g^{-1}(f(6))$
$=g^{-1}(4)$
$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로
$2k-6=4$ $\qquad\therefore k=5$
$(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)=g^{-1}(4)=5$

37 정답 ③

해설 $f^{-1}(-3)=-1$에서 $f(-1)=-3$이므로
$f(-1)=-2+k=-3$
$\therefore k=-1$
따라서 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq 0) \\ 2x-1 & (x<0)\end{cases}$이므로
$f(5)=5-1=4$

38 정답 7

해설 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
이때 함수 f가 $x=3$에서 오직 하나의 값을 가져야 하므로
$f(3)=6$이어야 한다.
즉, $f(3)=\frac{2}{3}\cdot3+a=6$
$\therefore a=4$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $g(8)=k$라고 하면 $f(k)=8$이고,
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $k>3$이므로
$f(k)=\frac{2}{3}k+4=8$
$\therefore k=6$
또, $g(g(8))=g(6)=b$에서
$f(b)=6$이고, $f(3)=6$이므로
$b=3$
따라서 $a=4,\ b=3$이므로
$a+b=7$

39 정답 80

해설 $g^{-1}(30)=k$라 하면 $g(k)=30$
(i) $k<5$일 때, $g(k)=4k$이므로
$4k=30$
$\therefore k=\frac{15}{2}$
이때 $k<5$이므로 k의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $k\ge5$일 때, $g(k)=2k+10$이므로
$2k+10=30$
$\therefore k=10$
(i), (ii)에서 $k=10$, 즉 $g^{-1}(30)=10$이므로
$f(g^{-1}(30))=f(10)=10+15=25$
또, $g(30)=70$에서 $f^{-1}(70)=l$이라 하면
$f(l)=70$이므로
$l+15=70$
따라서 $l=55$이므로
$f^{-1}(70)=55$
$\therefore f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))=25+55=80$

40 정답 ④

해설 $y=3x+2|x|=\begin{cases}5x & (x\ge0)\\ x & (x<0)\end{cases}$이므로
(i) $x\ge0$일 때, $y\ge0$이고
$y=5x$에서 $x=\frac{1}{5}y$
x, y를 바꾸면 $y=\frac{1}{5}x\ (x\ge0)$
(ii) $x<0$일 때, $y<0$이고
$y=x$의 역함수는 그대로 $y=x\ (x<0)$
(i), (ii)에 따라 구하는 역함수는
$y=\begin{cases}\frac{1}{5}x & (x\ge0)\\ x & (x<0)\end{cases}$, 즉 $y=\frac{3x-2|x|}{5}$

41 정답 1

해설 $((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=(f^{-1}\circ g^{-1})(f(a))$
$=(g\circ f)^{-1}(f(a))$
$=(g\circ f)^{-1}(3a+4)$
$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=2$이므로
$(g\circ f)^{-1}(3a+4)=2$에서
$(g\circ f)(2)=3a+4$
즉, $g(f(2))=g(10)=3a+4$이므로
$-\frac{1}{5}\cdot10+9=3a+4,\ 7=3a+4$
$\therefore a=1$

42 정답 ②

해설 점 $(4,\ 1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로
점 $(1,\ 4)$는 함수 $y=f(x)$ 위의 점이다.
즉, $f(1)=4$이므로
$f(1)=1^2+4+k=4$
$\therefore k=-1$

43 정답 ⑤

해설 점 $(4,\ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(-1,\ 4)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.
즉, $f(-1)=4$이므로 $1-2+k=4$
$\therefore k=5$

44 정답 ④

해설 (i) $\frac{3}{2}x-3 \geq 0$에서 $x \geq 2$일 때,

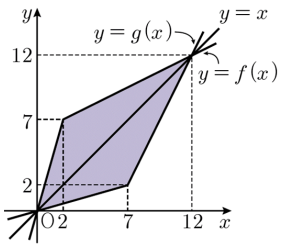
$f(x)=2x+3-\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{1}{2}x+6$

(ii) $\frac{3}{2}x-3 < 0$에서 $x<2$일 때,

$f(x)=2x+3+\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{7}{2}x$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+6 & (x \geq 2) \\ \frac{7}{2}x & (x<2) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2+\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10=30$

따라서 구하는 넓이는 $30 \cdot 2=60$

45 정답 ①

해설 그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나)의 그래프와 일치한다.

즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면

$y=f^{-1}(-x) \cdots$ ㉠이다.

㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y=f^{-1}(-x)-1 \cdots$ ㉡이다.

㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1 \cdots$ ㉢이므로

㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.

$\therefore y=-f(x+1)$

$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

46 정답 ⑤

해설 역함수의 성질 추론하기

$f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

이와 같은 방법으로

$g(2)=5,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ g(5)=4$

$g(2)+(g \circ f)^{-1}(1)=5+f^{-1}(g^{-1}(1))$

$=5+f^{-1}(1)$

$=5+5=10$

47 정답 ⑤

해설 $g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$

$\therefore m=b$

$f^{-1}(b)=n$이라 하면 $f(n)=b$

$\therefore n=d$

따라서 $(g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(c)=g(f^{-1}(g^{-1}(c)))$

$=g(f^{-1}(b))$

$=g(d)$

$=e$