수열

[notes]

(1) 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d$$

☞. 등차수열의 일반항은 n에 관해서 일차식이다.

(2) 등차수열의 계산 요령

❶ 네 수가 등차수열을 이룰 때 ⇒ $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$

❷ 세 수가 등차수열을 이룰 때 ⇒ $a-d,\ a,\ a+d$

(3) 등차수열의 합

첫째항이 a 공차가 d n번째 항이 l인 등차수열의 첫째항부터 n항까지의 합 S_n은 $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2} = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

☞. 등차수열의 일반 합은 n에 관해서 이차식이다.

(4) 조화수열

❶ $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3} \cdots, \dfrac{1}{a_n}, \cdots$: 등차수열 이면

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 은 조화수열이다. (즉, 역수가 등차수열이다.)

❷ 수열 $a,\ b,\ c$가 등차수열을 이룰 때, $b=\dfrac{2ac}{a+c}$를 조화중항이라고 한다.

(5) 일반항과 합의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 알 때 일반항 a_n 은

$$a_1 = S_1,\quad a_n = S_n - S_{n-1}\ (\text{단, } n \geq 2)$$ 이다.

(6) 등비수열

수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 이 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (일정) 일 때 이 수열은 공비 r인 등비수열이다.

(7) 등비, 등차, 조화중항

❶ 세수 a, x, b 가 이순서로 등차수열 ⇒ $x=\dfrac{a+b}{2}$ ⇒ 산술평균

❷세수 a, x, b 가 이순서로 등비수열 ⇒ $x=\pm\sqrt{ab}$ ⇒ 기하평균

❸ 세수 a, x, b 가 이순서로 조화수열 ⇒ $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ ⇒ 조화평균

☞ $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

(8) 수열 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$에서 연속하는 세 항 사이에

(1) $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$이면 $\{a_n\}$은 등차수열

(2) $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}$이면 $\{a_n\}$은 등비수열

(3) $\dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$이면 $\{a_n\}$은 조화수열

(9) 등비수열의 일반항

첫째항이 a 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}$

(10) 등비수열의 합

첫째항이 a 공비가 r인 등비수열의 n항까지의 합 S_n은

① $r \neq 1$ 이면 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r = 1$ 이면 $S_n = na$ 이다.

(11) 원리합계(I)

❶원금 a를 연이율 r인 단리법에 의해 n년간 예금했을때의 원리합계 A는 $A = a(1+nr)$

❷ 원금 a를 연이율 r인 복리법에 의해 n년간 예금했을때의 원리합계 B는 $B = a(1+r)^n$

(12) 원리합계(II)

❶ 매년초에 a원씩 연이률 r인 복리법에 의해 n년 적립예금했을 때의 원리합계 A는

$$A = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$$
$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

❷ 매년말에 a원씩 연이률 r인 복리법에 의해 n년 적립예금했을 때의 원리합계

$$B = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^{n-1}$$
$$= \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

[notes]

(13) 등차수열을 효과적으로 계산해 보자

❶ 일반항이 n에 관한 일차식으로 주어지면 기울기가 공차이다.

$a_n = pn + q \Rightarrow p$가 공차

❷ 제 n항까지의 합이 n에 관한 이차식일 때 다음 내용들을 확인할 수 있다.

$S_n = An^2 + Bn + C$

ⅰ) $\{a_n\}$는 $A = 2d$인 등차 수열

ⅱ) $C = 0$이면 첫째 항부터 등차수열

ⅲ) $C \neq 0$이면 둘째 항부터 등차수열

(2) 등비수열이 r의 거듭 꼴로 주어진다.

$S_n = pr^n + q$, $p + q = 0$

$\Rightarrow$ **공비** r, **첫째항부터 등비수열**

(4) 일반항이 일차식, 이차식으로 주어지면 다음 내용들을 알 수 있다.

❶ **일반항: 일차식 $\Rightarrow$ 등차수열**

❷ **일반항: 이차식 $\Rightarrow$ 계차가 등차수열**

(5) 계차수열

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

(5) 여러 가지 수열의 합

❶ 일반항이 분수식으로 이루어진 수열

일반항을 부분분수로 고친 후 각 항을 나열하여 가감한다.

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$

❷ 일반항이 무리식으로 이루어진 수열

분모의 유리화 또는 이중근호를 풀어서 각 항을 나열하여 가감한다.

❸ 멱급수 -구교육과정

(등차수열)·(등비수열)꼴로 주어진 수열의 합을 **멱급수**라 하고, 그의 합을 구할 때는 합을 S라 놓고 양변에 공비 r을 곱하여 뺀 $S - rS$를 계산한다.

(6) 군수열-구교육과정

주어진 수열을 어떤 규칙에 따라 몇 개의 항을 차례로 묶어 군으로 나눈 수열을 **군수열**이라 한다.

[notes]

☞ 군수열의 풀이 방법 -구교육과정

❶각 군의 첫째항이 갖는 규칙성을 파악한 후 제 n군의 첫째항을 구하여 제 n군의 항수 및 규칙을 파악한다.

❷ 분수로 된 군수열에서는 분모가 같은 것끼리 묶거나, 분모, 분자의 합이 일정한 것끼리 묶는다.

※ 조항관계, 항수 관계 파악한다. 조항은 계차수열을 이루고 항수는 자연수의 합을 이룰 때가 많다.

[notes]

(7) 수학적 귀납법

어떤 명제 $p(n)$이 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음의 두 가지를 증명하면 된다.

i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다. (초기 조건)

ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

※ 칸 채우기 문제가 출제된다.

$n=k$때 성립하는 조건을 확인한다.

$n=k+1$일 때 성립하는 조건을 확인한다.

식을 확인해 보면 적당한 식을 찾을 수 있다

(8) 시그마 식 간단히 하기

⇨ **극한 계산할 때 유용하다.**

❶ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + ★$

❷ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + ★$

❸ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \frac{1}{4}n^4 + ★$

❹ $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + ★$

❺ $\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + ★$

(9) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(10) 분수의 분리

❶ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

❷ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$

❸ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

❹ $k \cdot k! = (k+1)! - k!$

❺ $\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$

(11) 점화식 -구교육과정

❶ $a_{n+1} = a_n + f(n)$의 꼴

$a_{n+1} - a_n = f(n)$: 계차수열의 일반항

$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ (단, $n \geqq 2$)

❷ $a_{n+1} = a_n f(n)$의 꼴

$\Rightarrow a_n = a_1 f(1)f(2)\cdots f(n-1)$(단, $n \geqq 2$)

❸ $a_{n+1} = pa_n + q$(단, $pq \neq 0$, $p \neq 1$)의 꼴

$\Rightarrow p$: 계차수열의 공비

$a_n = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)(1-p^{n-1})}{1-p}$

❹ $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$

(단, $p+q+r=0$, $pqr \neq 0$)의 꼴

$\Rightarrow \frac{r}{p}$가 계차의 공비

$a_n = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)(1-(\frac{r}{p})^{n-1})}{1-(\frac{r}{p})}$

(12) 수열문제를 풀 때 나열이 안되면 점화식을 세운다.

예1) 10L의 물이 들어 있는 컵이 있다. 물의 $\frac{1}{3}$을 덜어내고, 다시 $2L$의 물을 넣는 것을 계속하면, 남는 물의 양은 얼마에 가까워지는가? 답 6L

예2) 세 개의 막대기에 크기가 서로 다른 n개의 접시가 놓여 있다. 한번에 한 개씩만 옮길 수 있으며 작은 접시 위에 큰 접시가 놓일 수는 없다. 모두 몇 번만에 옮길 수 있겠는가?

[notes]

(12) 피보나치 수열문제는 일반항을 찾기보다 규칙을 찾아 본다.

❶ $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ 점화식으로 주어지면 ⇒ 피보나치 수열을 이룬다.

❷ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89 수의 나열이 등장하면 피보나치 수열이다.
(1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144)

❸ 계단문제, 달리기 문제는 피보나치를 이룰 때가 많다.

[notes]

(13) 일반항을 찾기 힘든 문제는 주기성과 규칙성을 찾아본다.

(1) 반복적인 수의 규칙

❶ $9, 99, 999, \cdots \Rightarrow (10^n - 1)$

❷ $7, 77, 777, \cdots \Rightarrow \frac{7}{9}(10^n - 1)$

❸ $99,\ 9999,\ 999999, \cdots \Rightarrow\ (10^{2n} - 1)$

❹ $77, 7777, 777777, \cdots \Rightarrow\ \frac{7}{9}(10^{2n} - 1)$

❺ $1, 101, 10101,\ \cdots \Rightarrow \frac{1}{99}(10^{2n} - 1)$

(2) 주기를 가진 점화식

❶ $a_n = a_{n+p} \Rightarrow$ 주기 p

$a_n = -a_{n+p} \Rightarrow$ 주기 $2p$

❷ $a_n \cdot a_{n+p} \cdot a_{n+2p} \cdots = c \Rightarrow$ 주기 p

$a_n + a_{n+p} + a_{n+2p} \cdots = c \Rightarrow$ 주기 p

❸ $a_{n+2p} = a_{n+p} - a_n \Rightarrow$ 주기 $6p$

$a_{n+p} = a_n - a_{n-p}$ 이므로 준식에서 이식을 빼면 $a_{n+2p} = -a_{n-p}$

따라서 주기 $6p$