교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제) 96~97p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 참인 명제인 것은?

① $-8x+2>-8x+3$
② 3.33333은 3.4에 가까운 수이다.
③ $-x^2+5x>6$
④ 23은 소수이다.
⑤ π^2은 유리수이다.

02 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2+3x-10 \le 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

03 전체집합 $U=\{x|x$는 한 자리 자연수$\}$에 대하여 조건 p가 '$p: x^2-4x-12 \le 0$'일 때, 조건 p의 진리집합의 원소의 개수를 구하시오.

04 전체집합 $\mathrm{U}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$'의 진리집합은 $\{2, 3\}$이다.
② 조건 'x는 소수이다.'의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
③ 조건 'x는 4의 약수이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$이다.
④ 조건 '$0 \le x < 4$이고 $x \ne 2$이다.'의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$이다.
⑤ 조건 'x는 6의 약수이다.'의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$이다.

05 다음 <보기>의 조건 '$p(x)$'를 만족하는 진리집합 P가 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R이다.)

<보기>

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P=\{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x): x^2+1=0$
$P=\varnothing$
(3) $p(x): x^2-5x-4=0$
$P=\{1, 4\}$
(4) $p(x): x^2+4x+5>0$
$P=R$

① (1), (2)
② (2), (3)
③ (3), (4)
④ (2), (4)
⑤ (1), (3)

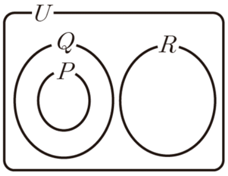
06 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2-2>0$의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$
③ $\{3,\ 4,\ 5\}$　④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
⑤ U

07 전체집합 U에서 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라고 하자. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $Q \subset P$
③ $P \cap Q = \varnothing$　④ $P \cup Q = U$
⑤ $P = Q$

08 세 조건 $p,\ q,\ r$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



① $r \Rightarrow \sim q$　② $r \Rightarrow \sim p$　③ $p \Rightarrow \sim r$
④ $\sim q \Rightarrow \sim p$　⑤ $p \Rightarrow \sim q$

09 다음 중 참인 명제는?

① 어떤 자연수 x에 대하여 $0<x<1$이다.
② 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.
③ 모든 자연수 x에 대하여 $x-3 \geq 0$이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $1-x^2>0$이다.
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)(x+3)=0$이다.

10 다음 보기 중 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 모든 자연수 x에 대하여 $x^2+x \geq 2$이다.
ㄴ. 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.
ㄷ. 어떤 음수 x에 대하여 $x<\frac{1}{x}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

11 두 조건 $p,\ q$에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$　② $\sim p \rightarrow q$　③ $p \rightarrow \sim q$
④ $q \rightarrow p$　⑤ $q \rightarrow \sim p$

12 두 조건 p, q에 대하여 명제 $q \rightarrow \sim p$의 역이 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$ ② $p \rightarrow \sim q$ ③ $\sim p \rightarrow \sim q$
④ $q \rightarrow p$ ⑤ $\sim q \rightarrow p$

13 두 조건 'p : $|x-3| \leq 10$', 'q : $x^2-k^2 \leq 0$'에 대하여 명제 $p \rightarrow q$의 역이 참이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

14 다음 중 그 명제의 역과 대우가 모두 참인 것은? (단, x, y는 실수)

① $x^3=x$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.
② $xy>1$이면 $x>1$이고 $y>1$이다.
③ 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.
④ $xy<0$이면 $x^2+y^2>0$이다.
⑤ $|x|+|y|=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다.

15 [2007년 3월 고2 6번]
세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제

$$\sim q \rightarrow \sim p, \quad r \rightarrow \sim q$$

가 모두 참일 때, <보기>에서 참인 명제를 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $p \rightarrow q$ ㄴ. $q \rightarrow r$ ㄷ. $r \rightarrow \sim p$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16 세 조건 p, q, r가 다음과 같은 조건을 모두 만족시킬 때, 아래에서 항상 참인 명제를 고르면?

(가) 명제 $q \rightarrow r$의 역은 참이다.
(나) 명제 $\sim r \rightarrow p$의 대우는 참이다.

① $q \rightarrow r$ ② $p \rightarrow q$ ③ $\sim r \rightarrow q$
④ $\sim p \rightarrow \sim q$ ⑤ $\sim p \rightarrow q$

17 두 실수 x, y에 대하여 다음 빈칸에 '필요', '충분', '필요충분' 중에서 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

> $x^2=4$는 $x=2$이기 위한 $\boxed{(가)}$ 조건이고,
> $x^2=4$는 $x=-2$ 또는 $x=2$이기 위한 $\boxed{(나)}$ 조건이다.

	(가)	(나)
①	필요	충분
②	충분	필요충분
③	필요	필요충분
④	필요충분	필요
⑤	필요충분	필요충분

18 다음 삼각형의 성질에 대하여 (가), (나)에 알맞은 것은?

> (ⅰ) 삼각형 ABC가 정삼각형인 것은 $A=60°$ 이기 위한 $\boxed{(가)}$ 조건이다.
> (ⅱ) 두 삼각형의 넓이가 같은 것은 두 삼각형이 합동이기 위한 $\boxed{(나)}$ 조건이다.

	(가)	(나)
①	충분	필요
②	충분	필요충분
③	필요	충분
④	필요	필요
⑤	필요	필요충분

19 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

> • $1<x\le 3$은 $x>-2$이기 위한 $\boxed{(가)}$ 조건이다.
> • $2x=4$는 $x^2-4x+4=0$이기 위한 $\boxed{(나)}$ 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분 ③ 충분, 충분
④ 충분, 필요 ⑤ 충분, 필요충분

20 실수 x에 대한 두 조건 $p: x^2-4\le 0$, $q: x\le a$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

21 $p: x^2+x+a=0$, $q: (x+5)^2(x-4)=0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

22 두 조건 p, q가 $p: x^2+4ax+32>0$, $q: x^2+2bx+16 \le 0$일 때, 다음 두 문장이 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 p이다.
(나) p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

23 실수 x, y에 대하여 $2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

24 x, y, z가 양의 실수일 때 $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z}\right)$의 최솟값을 구하시오.

25 $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $(a-b-c)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제) 96~97p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 2	03 6
04 ④	05 ④	06 ④
07 ④	08 ⑤	09 ④
10 ④	11 ④	12 ⑤
13 7	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ③	18 ①
19 ⑤	20 2	21 -20
22 35	23 10	24 4
25 ③		

교과서_미래엔 - 공통수학2 (명제) 96~97p

명제와 조건 ~ 절대부등식

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

01 정답 ④

해설 ① $-8x+2>-8x+3$에서 $2>3$이므로 거짓인 명제이다.
② 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
③ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
④ 참인 명제이다.
⑤ 거짓인 명제이다.

02 정답 2

해설 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이고
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$p: x^2+3x-10 \leq 0$에서
$(x+5)(x-2) \leq 0$
$\therefore\ -5 \leq x \leq 2$
$\therefore\ P=\{1,\ 2\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 2이다.

03 정답 6

해설 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$p: x^2-4x-12 \leq 0$에서
$(x+2)(x-6) \leq 0$
$\therefore\ -2 \leq x \leq 6$
$\therefore\ P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
따라서 p의 진리집합의 원소의 개수는 6이다.

04 정답 ④

해설 ① $x^2-6x+8=0 \leftrightarrow (x-2)(x-4)=0$
$\leftrightarrow x=2$ 또는 $x=4$ 따라서 진리집합은 $\{2,4\}$
② 소수는 $2,3,5$이므로 진리집합은 $\{2,3,5\}$
③ 4의 약수는 $1,2,4$이므로 진리집합은 $\{1,2,4\}$
④ $x=0,1,2,3$ 이고 $x \neq 2$이므로 진리집합은 $\{0,1,3\}$이다.
⑤ 전체집합이 $\mathrm{U}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$이고 6의 약수는 $1,2,3,6$이므로 진리집합은 $\{1,2,3,6\}$

05 정답 ④

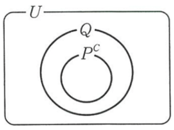
해설 (1) $P=\{1,2,3,4,6,12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2+1 \neq 0$ $\therefore P=\varnothing$
(3) $P=\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$
(4) 모든 실수 x에 대하여
$x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ 이므로
$P=R$이다.

06 정답 ④

해설 주어진 조건 $x^2-2>0$에
$x=0$을 대입하면 $0-2<0$이므로 거짓이다.
$x=1$을 대입하면 $1-2<0$이므로 거짓이다.
$x=2$를 대입하면 $4-2>0$이므로 참이다.
$x=3$을 대입하면 $9-2>0$이므로 참이다.
$x=4$를 대입하면 $16-2>0$이므로 참이다.
$x=5$를 대입하면 $25-2>0$이므로 참이다.
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이다.

07 정답 ④

해설 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이므로 $P^c \subset Q$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 아래 그림과 같다.



$\therefore\ P\cup Q=U$
따라서 옳은 것은 ④이다.

08 정답 ⑤

해설 ① $R\subset Q^C$이므로 $r\Rightarrow\sim q$는 참이다.
② $R\subset P^C$이므로 $r\Rightarrow\sim p$는 참이다.
③ $P\subset R^C$이므로 $p\Rightarrow\sim r$는 참이다.
④ $Q^C\subset P^C$이므로 $\sim q\Rightarrow\sim p$는 참이다.
⑤ $P\not\subset Q^C$이므로 $p\Rightarrow\sim q$는 거짓이다.

09 정답 ④

해설 ① 0와 1사이에는 자연수가 없으므로 주어진 명제는 거짓이다.

② 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ [반례] $x=1$이면 $x-3 \geq 0$가 성립하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x=\frac{1}{2}$ 이면 $1-x^2>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] $x=0$이면 $(x-2)(x+3) \neq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

10 정답 ④

해설 ㄱ. $x^2+x-2 \geq 0$에서
$(x+2)(x-1) \geq 0$,
즉 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 1$이므로
모든 자연수 x에 대하여 $x^2+x \geq 2$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로
$x^2 < 0$을 만족하는 x는 존재하지 않는다.

ㄷ. $x=-2$이면 $-2<-\frac{1}{2}$ 이므로 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

11 정답 ④

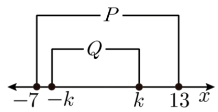
해설 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$가 참이므로 반드시 참인 명제는 그 대우인 $q \rightarrow p$이다.

12 정답 ⑤

해설 $q \rightarrow \sim p$의 역인 $\sim p \rightarrow q$가 참이므로 항상 참인 명제는 이것의 대우인 ⑤ $\sim q \rightarrow p$

13 정답 7

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$|x-3| \leq 10$에서 $-10 \leq x-3 \leq 10$
$\therefore -7 \leq x \leq 13$
$\therefore P=\{x|-7 \leq x \leq 13\}$
$x^2-k^2 \leq 0$에서 $(x+k)(x-k) \leq 0$
$\therefore -k \leq x \leq k$
$\therefore Q=\{x|-k \leq x \leq k\}$
이때 명제 $p \rightarrow q$의 역은 $q \rightarrow p$
명제 $q \rightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로
다음 그림에서 $-k \geq -7$, $k \leq 13$



$k \leq 7$, $k \leq 13$
$\therefore k \leq 7$
따라서 자연수 k의 최댓값은 7이다.

14 정답 ⑤

해설 ① $x^3=x$에서 $x^3-x=0$, $x(x-1)(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
역: $x=0$ 또는 $x=1$ 이면 $x^3=x$ 이다. (참)
대우: $x \neq 0$ 이고 $x \neq 1$ 이면 $x^3 \neq x$ 이다. (거짓)
[반례] $x=-1$

② 역: $x>1$이고 $y>1$이면 $xy>1$이다. (참)
대우: $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$이면 $xy \leq 1$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=-1$

③ 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 합동이다. (거짓)
[반례] 밑변이 5, 높이가 4인 삼각형과 밑변이 10, 높이가 2인 두 삼각형은 넓이는 10으로 같지만 합동은 아니다.
대우: 두 삼각형의 넓이가 같지 않으면 합동이 아니다. (참)

④ 역: $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다. (거짓)
[반례] $x=y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$
대우: $x^2+y^2 \leq 0$이면 $xy \geq 0$이다. (참)

⑤ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이면 $|x|+|y| \neq 0$이다. (참)

15 정답 ③

해설 명제의 참 · 거짓과 대우를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
주어진 조건에서
ㄱ. $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이므로 $p \Rightarrow q$ (참)
ㄴ. $r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$
여기서 $q \rightarrow r$ 는 반드시 참이라 할 수 없다. (거짓)
ㄷ. $r \Rightarrow \sim q$ 이고 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이므로
$r \Rightarrow \sim p$ (참)
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

16 정답 ⑤

해설 명제 $q \rightarrow r$의 역이 참이므로 $r \rightarrow q$가 참이고,
명제 $\sim r \rightarrow p$의 대우, 즉 $\sim p \rightarrow r$가 참이다.
따라서 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참이다.

17 정답 ③

해설 세 조건 p, q, r를
$p : x^2 = 4$
$q : x = 2$
$r : x = -2$ 또는 $x = 2$
라 하면 명제 $p \rightarrow q$는 거짓이고, 명제 $q \rightarrow p$는 참이므로
$x^2 = 4$는 $x = 2$이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.
또, 명제 $p \rightarrow r$는 참이고, 명제 $r \rightarrow p$도 참이므로
$x^2 = 4$는 $x = -2$ 또는 $x = 2$이기 위한
$\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

18 정답 ①

해설 (ⅰ) 삼각형 ABC가 정삼각형인 것은 $A = 60°$ 이기 위한 충분조건이다.
(ⅱ) 두 삼각형의 넓이가 같은 것은 두 삼각형이 합동이기 위한 필요조건이다.

19 정답 ⑤

해설 · $\{x | 1 < x \le 3\} \subset \{x | x > -2\}$이므로
$1 < x \le 3$은 $x > -2$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.
· $2x = 4$에서 $x = 2$이고
$x^2 - 4x + 4 = 0$에서 $x = 2$이므로
$2x = 4$는 $x^2 - 4x + 4 = 0$이기 위한
$\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

20 정답 2

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P = \{x | -2 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le a\}$
$P \subset Q$를 만족시켜야 하므로
$a \ge 2$
따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

21 정답 -20

해설 q: $(x+5)^2(x-4) = 0$에서 $x = -5$ 또는 $x = 4$
p가 q이기 위한 필요충분조건이려면
방정식 $x^2 + x + a = 0$의 해가 $x = -5$ 또는
$x = 4$이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a = -5 \cdot 4 = -20$

22 정답 35

해설 전체집합을 $U = \{x | x\text{는 실수}\}$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 명제 '모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참이므로 $P = U$이다.
이차방정식 $x^2 + 4ax + 32 = 0$의 판별식을 D라고 하면
$D < 0$이므로
$\frac{D}{4} = 4a^2 - 32 < 0$, 즉 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$
또 명제 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참이므로
$P \subset Q^C$에서 $U \subset Q^C$
따라서 $Q^C = U$이므로 $Q = \varnothing$이다.
그러므로 이차방정식 $x^2 + 2bx + 16 = 0$의 판별식을
D라고 하면 $D < 0$이므로
$\frac{D}{4} = b^2 - 16 < 0$, 즉 $-4 < b < 4$
따라서 정수 $a = -2, -1, 0, 1, 2$이고
$b = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 35이다.

23 정답 10

해설 $2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$에서

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+y^2-2y-1$

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+(y-1)^2-2$

이때 모든 실수 x, y에 대하여 $2x^2+2y^2+1>0$,

$\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}\geq 2\sqrt{36}=12$

(단, 등호는 $2x^2+2y^2+1=\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$,

즉 $2x^2+2y^2=5$일 때 성립)

또한, y는 실수이므로

$(y-1)^2\geq 0$ (단, 등호는 $y=1$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y=1$일 때,

$12+0-2=10$이다.

24 정답 4

해설 주어진 식을 전개하면

$1+\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z}{x+y}+1$

$=2+\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z}{x+y}$

$\geq 2+2\sqrt{\dfrac{x+y}{z}\times\dfrac{z}{x+y}}$

$=4$

25 정답 ③

해설 산술평균과 기하 평균의 관계에 의하여

$(a-b-c)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)=\{a-(b+c)\}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)$

$=2-\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b+c}{a}\right)$

$\leq 2-2\sqrt{\dfrac{a}{b+c}\cdot\dfrac{b+c}{a}}=0$

(단, 등호는 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b+c}{a}$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 0이다.