경기여자고등학교 외 8곳 - 집합과 명제

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 집합
$U=\{x|x$는 4의 배수가 아닌 40 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A에 대하여 $n(A)=4$이고
집합 A의 모든 원소의 합은 140이다. 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$라 할 때, $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구하시오.

02 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 15개의 부분집합을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{15}$라 하고, A_1의 원소 중에서 최소인 원소를 a_1, A_2의 원소 중에서 최소인 원소를 $a_2,\ \cdots,\ A_{15}$의 원소 중에서 최소인 원소를 a_{15}라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$의 값을 구하시오.

03 세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 $n(A)=16,\ n(B)=20$, $n(C)=23,\ n(A\cap B)=9,\ n(A\cap B\cap C)=2$일 때, $n(C-(A\cup B))$의 최솟값을 구하시오.
(단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

04 어느 반 학생들을 대상으로 이동통신에 가입한 학생 수를 조사하였다. $\mathrm{K},\ \mathrm{S},\ \mathrm{L}$회사의 이동통신에 가입한 학생은 각각 $23,\ 18,\ 27$명이고, $\mathrm{K},\ \mathrm{S},\ \mathrm{L}$회사의 이동통신에 모두 가입한 학생은 7명, $\mathrm{K},\ \mathrm{L}$회사의 이동통신에 모두 가입한 학생은 20명이었다. S회사 이동통신에만 가입한 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

05 다음 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

> ㉠ 임의의 유리수 x에 대하여 $x+y=\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 y가 존재한다.
> ㉡ 임의의 유리수 x에 대하여 $xy=1$을 만족하는 유리수 y가 존재한다.
> ㉢ 임의의 무리수 x에 대하여 $xy=1$을 만족하는 무리수 y가 존재한다.
> ㉣ 임의의 무리수 x에 대하여 $\sqrt{3}x$는 무리수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 없다.

06 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 이때 옳은 것은?

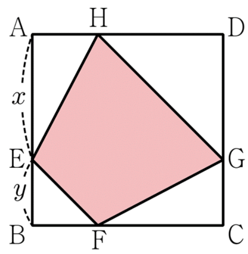
ㄱ. 첫 번째 구슬은 빨간색이 아니다.
ㄴ. 두 번째 구슬은 파란색이 아니다.
ㄷ. 세 번째 구슬은 파란색이다.

① 첫 번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫 번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

07 양수 a, b에 대하여 $ab+a+b=15$일 때, ab의 최댓값은?

① 4　② 9　③ 16
④ 25　⑤ 36

08 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $x+y$ $(x>0,\ y>0)$인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형의 네 변 AB, CB, DC, DA를 $x:y$로 내분하는 점을 각각 E, F, G, H라 할 때, 사각형 EFGH의 넓이는 16이다. 이때 선분 EH의 길이의 최솟값은?



① $\sqrt{14}$　② 4　③ $3\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{22}$

09 세 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$가 성립할 때, x의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

10 9 이하의 자연수 k에 대하여 집합 A_k를
$A_k = \{x \mid k-1 \le x \le k+2,\ x\text{는 실수}\}$라 하자.
다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{3\}$

ㄴ. 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \le 3$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다.

ㄷ. 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합의 원소의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 [2022년 3월 고2 19번/4점]
두 자연수 k, m $(k \ge m)$에 대하여
전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } k \text{ 이하의 자연수}\}$의 두 부분집합
$A = \{x \mid x\text{는 } m\text{의 약수}\}$, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $B - A = \{4, 7\}$, $n(A \cup B^C) = 7$
(나) 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

12 [2021년 11월 고1 20번/4점]
전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$의
두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$에
대하여 집합 U의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때,
집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은?

(가) $n(X) = 6$
(나) $A - X = B - X$
(다) $(X - A) \cap (X - B) \neq \varnothing$

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

13 [2019년 11월 고1 21번 변형]
전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 30 \text{ 이하의 자연수}\}$의 부분집합
$A_k = \{x \mid x(y-k) = 40,\ y \in U\}$,
$B = \left\{x \,\middle|\, \frac{40-x}{5} \in U\right\}$에 대하여 $n(A_k \cap B^C) = 2$가
되도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

14 [2017년 3월 고3 문과 20번/4점]
실수 x에 대한 두 조건
$p : x^2 - x - 6 < 0$
$q : x^2 + (6-3a)x + 2a^2 - 10a + 8 \ge 0$
이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때,
모든 정수 a의 값의 합은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

15 [2019년 3월 고2 문과 30번/4점]

두 함수

$f(x)=x^2-2x+6$,
$g(x)=-|x-t|+11$ (t는 실수)

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<g(x)) \\ g(x) & (f(x)\geq g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 명제

'어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'

가 참이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

16

$a>1$일 때, 두 이차함수
$y=x^2-4ax+3a$, $y=ax^2-3ax+1$의 그래프가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기의 최댓값은?

① $-9-2\sqrt{2}$ ② $-9-\sqrt{2}$ ③ -9
④ $-9+\sqrt{2}$ ⑤ $-9+2\sqrt{2}$

17 [2019년 3월 고2 이과 30번 변형]

최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$와 $x<6$에서 정의된 함수 $g(x)=\dfrac{2x-16}{x-6}$이 있다. 4보다 작은 실수 t에 대하여 $t\leq x\leq t+2$에서 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값을 $h(t)$라 할 때, $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(t)=\begin{cases} f(g(t+2)) & (t<2) \\ 8 & (2\leq t<4) \end{cases}$

(나) $h(-4)=-10$

$f\left(\dfrac{7}{2}\right)$의 값을 구하시오.

경기여자고등학교 외 8곳 - 집합과 명제

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 12	02 37	03 3
04 ③	05 ①	06 ③
07 ②	08 ②	09 ②
10 ⑤	11 ⑤	12 ②
13 ②	14 ②	15 26
16 ③	17 6	

경기여자고등학교 외 8곳 - 집합과 명제

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 12

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 37, 38, 39\}$

집합 A의 모든 원소의 합이 140이므로 집합 A는 35 이상인 원소를 적어도 2개 가져야 한다.

(i) 35 이상인 원소가 2개일 때

35보다 작은 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $33+34=67$이므로 네 원소의 합이 140이 되려면 35 이상인 두 원소의 합이 73 이상이 되어야 한다.

① 35, 38을 원소로 갖는 경우

$A=\{33, 34, 35, 38\}$

$x_4-x_3+x_2-x_1=4$

② 35, 39를 원소로 갖는 경우

$x_1+x_2=66$이 되어야 한다.

그러나 만족하는 35 미만의 서로 다른 두 자연수 x_1, x_2는 존재하지 않는다.

③ 37, 38을 원소로 갖는 경우

$A=\{31, 34, 37, 38\}$

$x_4-x_3+x_2-x_1=4$

④ 37, 39를 원소로 갖는 경우

$A=\{30, 34, 37, 39\}$일 때

$x_4-x_3+x_2-x_1=6$

$A=\{31, 33, 37, 39\}$일 때

$x_4-x_3+x_2-x_1=4$

⑤ 38, 39를 원소로 갖는 경우

$A=\{29, 34, 38, 39\}$일 때

$x_4-x_3+x_2-x_1=6$

$A=\{30, 33, 38, 39\}$일 때

$x_4-x_3+x_2-x_1=4$

(ii) 35 이상인 원소가 3개일 때

① 35, 37, 38을 원소로 갖는 경우

$A=\{30, 35, 37, 38\}$

$x_4-x_3+x_2-x_1=6$

② 35, 37, 39를 원소로 갖는 경우

$A=\{29, 35, 37, 39\}$

$x_4-x_3+x_2-x_1=8$

③ 35, 38, 39를 원소로 갖는 경우

$140-(35+38+39)=28$이므로 만족하지 않는다.

④ 37, 38, 39를 원소로 갖는 경우

$A=\{26, 37, 38, 39\}$

$x_4-x_3+x_2-x_1=12$

(i), (ii)에 의하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값은 12이다.

02 정답 37

해설 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 원소 중에서 최소인 원소는 $1, 3, 5, 7$ 중 하나이다.

(i) 최소인 원소가 1인 집합은 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(ii) 최소인 원소가 3인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

(iii) 최소인 원소가 5인 집합은 5를 반드시 원소로 갖고 1, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-1-2}=2^1=2$

(iv) 최소인 원소가 7인 집합은 $\{7\}$의 1개이다.

(i)~(iv)에 의하여

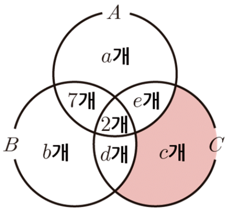
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$

$=1\cdot 8+3\cdot 4+5\cdot 2+7\cdot 1=37$

03 정답 3

해설 $n(A\cap B)=9$, $n(A\cap B\cap C)=2$에서

$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=7$



각 부분에 속하는 집합의 원소의 개수를 위의 그림과 같이 벤다이어그램에 나타내면

$n(C-(A\cup B))=c$

$n(C)=23$에서 $c+d+e+2=23$

$\therefore c=21-(d+e)$

즉, $d+e$가 최대일 때 c는 최소가 된다.

$n(A)=16$에서

$a+e+2+7=16 \therefore e=7-a$

이때 $a\ge 0$이므로 $0\le e\le 7$ $\cdots$ ㉠

$n(B)=20$에서

$b+d+2+7=20 \therefore d=11-b$

이때 $b\ge 0$이므로 $0\le d\le 11$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0\le d+e\le 18$

$3\le 21-(d+e)\le 21$

따라서 구하는 최솟값은 3이다.

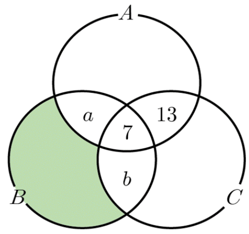
04 정답 ③

해설 K, S, L회사의 이동통신에 가입한 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하면 주어진 조건에 의하여

$n(A)=23$, $n(B)=18$, $n(C)=27$,

$n(A\cap B\cap C)=7$, $n(A\cap C)=20$

집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



S회사의 이동통신에만 가입한 학생의 집합은 색칠한 부분과 같고, $n(B)=18$이므로 색칠한 부분에 속하는 학생 수는 $a+b$가 최대일 때 최소이고, $a+b$가 최소일 때 최대이다.

$a+7+13\le n(A)=23$에서 $a\le 3$이고

$b+7+13\le n(C)=27$에서 $b\le 7$이므로

$0\le a\le 3$, $0\le b\le 7$

(ⅰ) $a=0$, $b=0$일 때, $a+b=0$으로 최소이므로 구하는 최댓값은

$M=n(B)-7-0=11$

(ⅱ) $a=3$, $b=7$일 때, $a+b=10$으로 최대이므로 구하는 최솟값은

$m=n(B)-7-10=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $M-m=11-1=10$

05 정답 ①

해설 ㉠ 주어진 조건을 만족하는 유리수 y가 존재한다면 (유리수)+(유리수)=(무리수)가 되므로 모순이다. (거짓)

㉡ $x=0$일 때, $xy=1$을 만족하는 y는 존재하지 않는다. (거짓)

㉢ x가 무리수이므로 $x\ne 0$이다. 즉, $xy=1$에서

$y=\dfrac{1}{x}$은 무리수이므로 무리수 y가 존재한다. (참)

㉣ $x=\sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{3}x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$이 되어 유리수이다.(거짓)

따라서 참인 명제는 ㉢ 뿐이다.

06 정답 ③

해설 ㄷ이 참이면 ㄴ도 참이 되어 모순

ㄱ이 거짓이고 ㄴ이 참이면 ㄷ이 참이 되어 모순

따라서 ㄱ의 참이고 ㄴ, ㄷ이 거짓이다.

즉, 첫 번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

07 정답 ②

해설 $ab+a+b=15$에서 $a+b=15-ab$ $\cdots$ ㉠

$a>0,\ b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$15-ab \geq 2\sqrt{ab}$ ($\because$ ㉠)

$ab+2\sqrt{ab}-15 \leq 0$

$(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-15 \leq 0$

$(\sqrt{ab}+5)(\sqrt{ab}-3) \leq 0$

$-5 \leq \sqrt{ab} \leq 3$

$0 < \sqrt{ab} \leq 3$ $(\because \sqrt{ab}>0)$

$\therefore\ 0 < ab \leq 9$

따라서 ab의 최댓값은 9이다.

08 정답 ②

해설 사각형 EFGH의 넓이는 정사각형 ABCD의 넓이의 반이므로

$(x+y)^2 = 2 \cdot 16 = 32$

$\therefore\ x+y=4\sqrt{2}$ $\cdots$ ㉠

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$4\sqrt{2} \geq 2\sqrt{xy}$, $2\sqrt{2} \geq \sqrt{xy}$

$\therefore\ xy \leq 8$ $\cdots$ ㉡

한편, $\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{x^2+y^2}$ 이므로

곱셈공식의 변형을 이용하면

$\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{(x+y)^2-2xy}$

$=\sqrt{32-2xy}$ ($\because$ ㉠)

$\geq \sqrt{32-2\cdot 8}$ ($\because$ ㉡)

$=4$

따라서 선분 EH의 길이의 최솟값은 4이다.

09 정답 ②

해설 $x+2y+z=1$에서 $2y+z=1-x$이고,

$x^2+y^2+z^2=2$에서 $y^2+z^2=2-x^2$이다.

따라서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (2y+z)^2$

$5(y^2+z^2) \geq (2y+z)^2$, $5(2-x^2) \geq (1-x)^2$

$6x^2-2x-9 \leq 0$, $\dfrac{1-\sqrt{55}}{6} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{55}}{6}$

$\therefore$ (최댓값)+(최솟값)$=\dfrac{1}{3}$

10 정답 ⑤

해설 ㄱ. $A_1=\{x\,|\,0 \leq x \leq 3\}$

$A_2=\{x\,|\,1 \leq x \leq 4\}$

$A_3=\{x\,|\,2 \leq x \leq 5\}$

$A_4=\{x\,|\,3 \leq x \leq 6\}$

따라서 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4=\{3\}$ (참)

ㄴ. $|l-m| \leq 3$을 만족시키는 9 이하의 자연수 l, m에 대하여 $l \leq m$이라 하자.

(ⅰ) $|l-m|=0$일 때

$m=l$이고 $A_l \cap A_m = A_l \neq \varnothing$

(ⅱ) $|l-m|=1$일 때

$m=l+1$이고

$A_l \cap A_m$

$=A_l \cap A_{l+1}=\{x\,|\,l \leq x \leq l+2\} \neq \varnothing$

(ⅲ) $|l-m|=2$일 때

$m=l+2$이고

$A_l \cap A_m$

$=A_l \cap A_{l+2}=\{x\,|\,l+1 \leq x \leq l+2\} \neq \varnothing$

(ⅳ) $|l-m|=3$일 때

$m=l+3$이고

$A_l \cap A_m$

$=A_l \cap A_{l+3}=\{l+2\} \neq \varnothing$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 9 이하의 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \leq 3$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

ㄷ. 자연수 n에 대하여 경우를 나누어 생각해보면

(ⅰ) 9 이하의 자연수 n

집합 $\{p\}$ $(n-1 \leq p \leq n+2)$가

$\{p\} \cap A_n \neq \varnothing$을 만족시키므로

집합 $\{p\}$는 A_n과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(ⅱ) 8 이하의 자연수 n

$A_n \cap A_{n+1}=\{x\,|\,n \leq x \leq n+2\}$

집합 $\{p\}$ $(n \leq p \leq n+2)$가

$\{p\} \cap (A_n \cap A_{n+1}) \neq \varnothing$을 만족시키므로

집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}과 서로소가 아니고
원소의 개수가 최소인 집합이다.

(iii) 7 이하의 자연수 n

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}$
$= \{x | n+1 \le x \le n+2\}$
집합 $\{p\}$ $(n+1 \le p \le n+2)$가
$\{p\} \cap (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}) \ne \varnothing$을
만족시키므로
집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}와 서로소가
아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(iv) 6 이하의 자연수 n

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} = \{n+2\}$
집합 $\{p\}$ $(p=n+2)$가
$\{p\} \cap (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3}) \ne \varnothing$을
만족시키므로
집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}과
서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

(v) 5 이하의 자연수 n

$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} \cap A_{n+4} = \varnothing$
따라서 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, A_{n+4}와
서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 1인 집합은
존재하지 않는다.

(i)~(v)에 따라 $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$로 두면
집합 X는 모든 A_k와 서로소가 아니다.
모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중
원소의 개수가 최소인 집합을 B라 하면 $B \subset X$
$3 \notin B$이면 $A_1 \cap B = \varnothing$이므로
$3 \in B$이어야 하고,
$8 \notin B$이면 $A_9 \cap B = \varnothing$이므로
$8 \in B$이어야 한다.
이때 $\{3, 8\} \cap A_5 = \varnothing$이고
$A_5 = \{x | 4 \le x \le 7\}$이므로
$q \in A_5$ $(4 \le q \le 7)$에 대하여 $q \in B$이어야 한다.
따라서 $B = \{3, q, 8\}$이고
B의 원소의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 정답 ⑤

해설 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

드모르간의 법칙에 의하여
$A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = (B-A)^C$이므로
조건 (가)에서
$n(A \cup B^C) = n((B-A)^C) = 7$
$B - A = \{4, 7\}$에서 $n(B-A) = 2$
$(B-A) \cup (B-A)^C = U$,
$(B-A) \cap (B-A)^C = \varnothing$이므로
$n(U) = n(B-A) + n((B-A)^C)$
$= n(B-A) + n(A \cup B^C)$
$= 2 + 7 = 9$
그러므로 $k = 9$이고 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
조건 (가)에서 $B - A = \{4, 7\}$이고 조건 (나)에서
집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이
서로 같으므로 집합 $A - B$의 모든 원소의 합은
집합 $B - A = \{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.
따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고,
모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로
m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

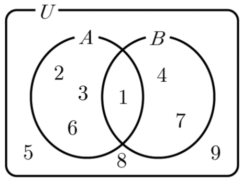
(i) $m = 6$일 때

집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.
이때 $A - B = \{2, 3, 6\}$이면 집합 $A - B$의
원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m = 9$일 때

집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.
이때 집합 $A - B$의 원소의 합이 11인 경우는
존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m = 6$이고 이때 $B = \{1, 4, 7\}$이다.
$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5, 8, 9\}$이므로
집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은
$5 + 8 + 9 = 22$

12 정답 ②

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고

조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로

$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3, 4, 5\}$

$A-X=\{3, 4, 5\}$에서 $\{1, 2\}\subset X$이고,

$B-X=\{3, 4, 5\}$에서 $\{6, 7\}\subset X$이므로

$\{1, 2, 6, 7\}\subset X$ $\cdots$ ㉠

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}(X-A)\cap(X-B)&=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)\\&=X\cap(A^C\cap B^C)\\&=X\cap(A\cup B)^C\\&=X\cap\{8, 9, 10\}\neq\varnothing\end{aligned}$$ $\cdots$ ㉡

조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여

$n(X\cap\{3, 4, 5, 8, 9, 10\})=2$ $\cdots$ ㉢

㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.

집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고

㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로

$3\in X$

따라서 $X=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+3+6+7+8=27$

13 정답 ②

해설 집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로

x는 30 이하의 자연수이고 $y-k$는 40의 약수이다.

$y\in U$이므로 $y-k<40$이고

$x\neq1$

또한, $x\in U$이므로

$x\neq40$

$y-k$와 x 사이의 관계는 다음 표와 같다.

$y-k$	2	4	5	8	10	20
x	20	10	8	5	4	2

$A_k\subset\{2, 4, 5, 8, 10, 20\}$

이때 $\dfrac{40-x}{5}\in U$에서 $40-x$는 5의 배수이므로

$B=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$(A_k\cap B^C)\subset\{2, 4, 8\}$

(ⅰ) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=2$, $y-k=20$이고 $y=20+k\leq30$이므로

$k\leq10$

(ⅱ) $4\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=4$, $y-k=10$이고 $y=10+k\leq30$이므로

$k\leq20$

(ⅲ) $8\in(A_k\cap B^C)$일 때

$x=8$, $y-k=5$이고 $y=5+k\leq30$이므로

$k\leq25$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$k\leq10$일 때 $A_k\cap B^C=\{2, 4, 8\}$

$10<k\leq20$일 때 $A_k\cap B^C=\{4, 8\}$

$20<k\leq25$일 때 $A_k\cap B^C=\{8\}$

이때 $n(A_k\cap B^C)=2$이므로

$10<k\leq20$

따라서 모든 자연수 k의 개수는 10이다.

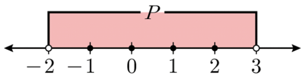
14 정답 ②

해설 연립부등식을 활용하여 조건이 참이 되도록 하는 문제를 해결한다.

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)<0$ 이므로

조건 p : $x^2-x-6<0$의 진리집합 P는

$P=\{x\,|-2<x<3\}$



$x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8$

$=x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4)$

$=(x-2a+2)(x-a+4)$ 이므로

조건 q : $x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq 0$의 진리집합 Q는 a의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

(i) $2a-2<a-4$일 때 즉, $a<-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\leq 2a-2$ 또는 $x\geq a-4\}$

(ii) $2a-2=a-4$일 때 즉, $a=-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\neq -6$인 모든 실수$\}$

(iii) $2a-2>a-4$일 때 즉, $a>-2$일 때,

$Q=\{x\,|\,x\leq a-4$ 또는 $x\geq 2a-2\}$

(i), (ii)에서 $a\leq -2$일 때

$P\cap Q=\{x\,|-2<x<3\}$이므로

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x는

-1, 0, 1, 2의 4개이다.

(iii)에서 $a>-2$일 때

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면

$1<2a-2\leq 2$이거나 $-1\leq a-4<0$이다.

따라서 $\dfrac{3}{2}<a\leq 2$ 또는 $3\leq a<4$이므로

가능한 정수 a는 2 또는 3이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 5이다.

15 정답 26

해설 $f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$이므로

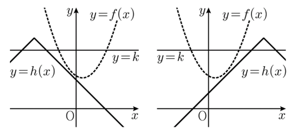
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

한편, $-|x-t|+11=\begin{cases} x-t+11 & (x<t) \\ -x+t+11 & (x\geq t)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=t$에 대하여 대칭이다.

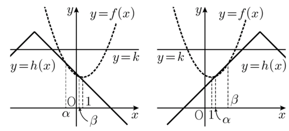
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지로 나타난다.

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않거나 한 점에서만 만날 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

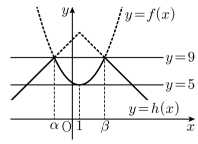
(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<\beta\leq 1$ 또는 $1\leq\alpha<\beta$)일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β ($\alpha<1<\beta$)일 때,

① $f(\alpha)=f(\beta)$, 즉 $t=1$일 때,



두 교점은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

이때 β의 값을 구하면

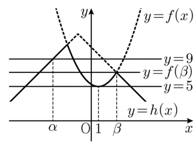
$x^2-2x+6=-x+12$, $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$, $x=-2$ 또는 $x=3$

$\beta>1$이므로 $\beta=3$, $g(3)=-|3-1|+11=9$

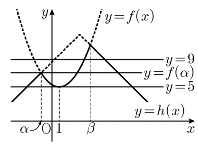
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5뿐이다.

② $f(\alpha)>f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\beta)$ ($5<f(\beta)<9$)

③ $f(\alpha)<f(\beta)$일 때,



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 5와 $f(\alpha)$ ($5<f(\alpha)<9$)

(i), (ii), (iii)에 의하여 명제 '어떤 실수 t에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.'가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $5\leq k<9$

따라서 자연수 k의 값은 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$5+6+7+8=26$

16

정답 ③

해설 $x^2-4ax+3a=ax^2-3ax+1$에서
$(a-1)x^2+ax-(3a-1)=0\ (a>1)\cdots$ ㉠
㉠의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{a-1},\ \alpha\beta=-\frac{3a-1}{a-1}$$

두 점 P, Q의 좌표를
$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2-4a\alpha+3a)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2-4a\beta+3a)$라 하면
직선 PQ의 기울기는

$$\frac{(\beta^2-4a\beta+3a)-(\alpha^2-4a\alpha+3a)}{\beta-\alpha}$$
$$=(\alpha+\beta)-4a=-\frac{a}{a-1}-4a$$
$$=\frac{-(a-1)-1}{a-1}-4a$$
$$=-1-\frac{1}{a-1}-4a$$
$$=-5-\left(\frac{1}{a-1}+4(a-1)\right)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a-1}+4(a-1)\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot 4(a-1)}=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a-1}=4(a-1)\text{일 때 성립}\right)$

이므로

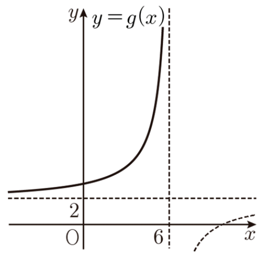
$$-5-\left(\frac{1}{a-1}+4(a-1)\right)\leq -9$$

따라서 직선 PQ의 기울기의 최댓값은 -9

17

정답 6

해설 함수 $g(x)=\dfrac{2x-16}{x-6}=2-\dfrac{4}{x-6}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x<6$에서 x의 값이 커지면 $g(x)$의 값도 커지므로 $t<4$인 t에 대하여 $g(t)<g(t+2)$이다.
$t<2$일 때 $h(t)=f(g(t+2))$이고
$g(t)\leq x\leq g(t+2)$이므로 $f(x)$는 $x=g(t+2)$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 $g(t)\leq x\leq g(t+2)$에서 x의 값이 커지면 $f(x)$의 값은 커진다.
$2\leq t<4$일 때 $h(t)=8$이므로
$g(t)\leq x\leq g(t+2)$에서 $f(x)$의 최댓값이 8로 일정하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 a는 $2\leq t<4$인 모든 t에 대하여
$g(t)\leq a\leq g(t+2)$이어야 하므로 $a=g(4)$이고,
$b=8$이다.
한편, $g(4)=4$이므로 $f(x)=\alpha(x-4)^2+8$이고
조건 (나)에서

$$h(-4)=f(g(-2))=f\left(\frac{5}{2}\right)=-10\text{이므로}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\alpha\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+8=\frac{9\alpha}{4}+8=-10$$

$\therefore\ \alpha=-8$

따라서 $f(x)=-8(x-4)^2+8$이므로

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-2+8=6$$