교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (대단원)106~109p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
12문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 함수 $f(x)=3ax^3+4x^2+ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

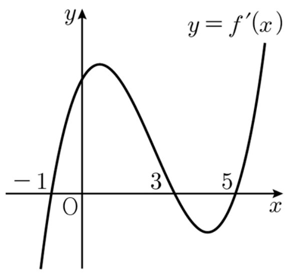
① $a\le-\frac{4}{3}$ ② $a\le-\frac{4}{3}$ 또는 $a\ge\frac{4}{3}$
③ $0<a\le\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}\le a<0$
⑤ $a\ge\frac{4}{3}$

02 함수 $f(x)=-2x^3+ax+b$가 $x=1$에서 극댓값 7을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

03 함수 $f(x)=x^3+kx^2-3kx+5$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

04 아래 그림은 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. $f(-1)<f(5)<0<f(3)$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 함수 $f(x)=x^3+2kx^2-4k^2x+1$이 $-1<x<1$에서 극댓값을 갖고, $x>1$에서 극솟값을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $a<k<b$이다. 이때 ab의 값은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

06 밑면의 반지름의 길이와 높이의 합이 $90\,\mathrm{cm}$인 원기둥의 부피가 최대일 때, 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하시오.

07 방정식 $5x^3-15x+k=0$이 한 개의 양수인 근과 서로 다른 두 개의 음수인 근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

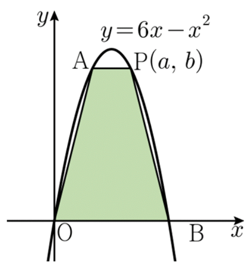
08 모든 실수 x에 대하여
부등식 $\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-a\ge 0$이 항상 성립할 때,
상수 a의 값의 범위는?

① $a<0$　② $a\le 0$　③ $0<a<\frac{1}{4}$
④ $0\le a\le\frac{1}{4}$　⑤ $a>\frac{1}{4}$

09 지면으로부터 $60\mathrm{m}$의 높이에서 $40\,\mathrm{m/s}$의 속도로 똑바로 위로 던진 물체의 t 초 후의 높이를 $h\mathrm{m}$라고 할 때, $h=60+40t-5t^2$인 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달했을 때 지면으로부터의 높이는?

① $100\,\mathrm{m}$　② $110\,\mathrm{m}$　③ $120\,\mathrm{m}$
④ $130\,\mathrm{m}$　⑤ $140\,\mathrm{m}$

10 다음 그림과 같이 곡선 $y=6x-x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나고, x축에 평행한 직선이 곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 A, 곡선이 x축과 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 B라고 할 때, 사다리꼴 OAPB의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $3<a<6$)



11 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x+3$의 최댓값은?

① 2　② 5　③ 8
④ 11　⑤ 14

12 방정식 $x^3-3x^2-a=0$ 의 a 값의 범위가 $-4<a<0$ 일 때 실근은 몇 개인가?

① 1개
② 2개
③ 3개
④ 4개
⑤ 5개

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (대단원)106~109p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
12문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ②	03 10
04 ⑤	05 ④	06 60 cm
07 9	08 ②	09 ⑤
10 32	11 ③	12 ③

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (대단원)106~109p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
12문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ⑤

해설 $f(x)=3ax^3+4x^2+ax$에서

$f'(x)=9ax^2+8x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$9a>0$

$\therefore a>0 \quad \cdots ㉠$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-9a^2\leq 0$

$\therefore a\leq -\frac{4}{3}$ 또는 $a\geq \frac{4}{3} \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$a\geq \frac{4}{3}$

02 정답 ②

해설 $f(x)=-2x^3+ax+b$에서

$f'(x)=-6x^2+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 7을 가지므로

(i) $f(1)=7$에서 $-2+a+b=7$

$\therefore a+b=9 \quad \cdots ㉠$

(ii) $f'(1)=0$에서 $-6+a=0$

$\therefore a=6 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=3$

$f(x)=-2x^3+6x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이므로 구하는 극솟값은

$f(-1)=2-6+3=-1$

03 정답 10

해설 $f(x)=x^3+kx^2-3kx+5$에서

$f'(x)=3x^2+2kx-3k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3\cdot(-3k)\leq 0,\ k(k+9)\leq 0$

따라서 $-9\leq k\leq 0$이므로 정수 k는

$-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$의

10개이다.

04 정답 ⑤

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가

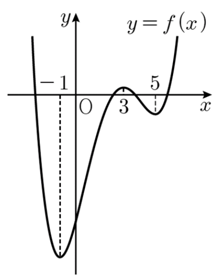
$-1, 3, 5$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 $f(-1)<f(5)<0<f(3)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 정답 ④

해설 $f(x)=x^3+2kx^2-4k^2x+1$에서

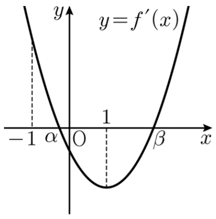
$f'(x)=3x^2+4kx-4k^2$

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-1<\alpha<1$, $\beta>1$

따라서 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야

하므로 $f'(-1)>0$, $f'(1)<0$



$f'(-1)=3-4k-4k^2>0$에서

$(2k+3)(2k-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots$ ㉠

$f'(1)=3+4k-4k^2<0$에서

$(2k+1)(2k-3)>0$

$\therefore\ k<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k>\dfrac{3}{2}$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{3}{2}<k<-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$ab=\dfrac{3}{4}$

06 정답 $60\,\text{cm}$

해설 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$, 높이를 $h\,\text{cm}$라 하면 $r+h=90$이므로

$h=90-r$

원기둥의 부피를 $V(r)\,\text{cm}^3$이라 하면

$V(r)=\pi r^2\cdot(90-r)$

$\quad=-\pi r^3+90\pi r^2$ $(0<r<90)$

$V'(r)=-3\pi r^2+180\pi r$

$\quad=-3\pi r(r-60)$

$0<r<90$이므로 $V'(r)=0$에서 $r=60$

열린구간 $(0, 90)$에서 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	60	$\cdots$	(90)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	108000π	↘	

따라서 밑면의 반지름의 길이가 $60\,\text{cm}$일 때 원기둥의 부피는 최대가 된다.

07 정답 9

해설 $5x^3-15x+k=0$에서 $k=-5x^3+15x$

$f(x)=-5x^3+15x$라 하면

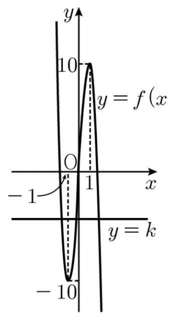
$f'(x)=-15x^2+15=-15(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-10	↗	10	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는 $-10<k<0$

따라서 정수 k는 $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$의 9개이다.

08 정답 ②

해설 $\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-a\geq 0$에서 $\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\geq a$

이때 $\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2$이라 하면

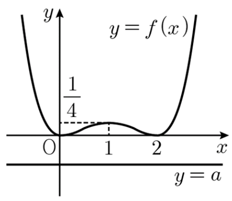
$f'(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗

즉, 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 a의 값이 함수 $f(x)$의 최솟값인 0보다 작거나 같아야 한다.

$\therefore a\leq 0$

09 정답 ⑤

해설 물체의 t초 후의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{dh}{dt}=-10t+40$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+40=0$

$\therefore t=4$

따라서 4초 후 이 물체의 지면으로부터 높이는

$60+40\cdot 4-5\cdot 4^2=140(\mathrm{m})$

10 정답 32

해설 점 A의 좌표를 (a', b')이라고 하면

$\frac{a+a'}{2}=3$이므로 $a'=6-a$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=2a-6$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{OB}}=(2a-6)+6=2a$

따라서 사다리꼴 OAPB의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=a\cdot(6a-a^2)=6a^2-a^3$

$S'(a)=12a-3a^2=3a(4-a)$

$S'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=4$

$S(a)$는 $a=4$에서 극대이고 구간 $(3, 6)$에서 최대가 된다.

$\therefore S(4)=96-64=32$

11 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-6x+3$에서 $f'(x)=3x^2-6$

즉, $f'(x)=0$에서 $x^2-2=0$

$\therefore x=\sqrt{2}$ ($\because -1\leq x\leq 2$)

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	$3-4\sqrt{2}$	↗	-1

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=8$이다.

12 정답 ③

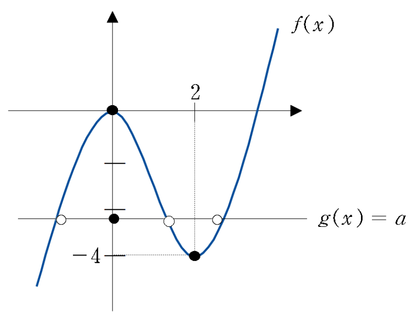
해설 $f(x)=x^3-3x^2$, $g(x)=a$라 하면

먼저, $f(x)$의 그래프의 모형을 그려 보자.

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, 2에서 극값을 가진다.

$x=0$일 때 극댓값 0

$x=2$일 때 극솟값 -4를 가진다.



따라서, a의 값의 범위가 $-4<a<0$이라 했으므로 실근은 3개이다.