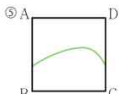
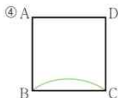
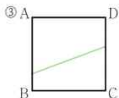
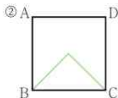
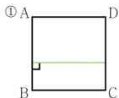
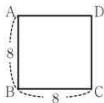


직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_13번

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 32$ 가 성립할 때, 다음 중 점 P의 자취를 나타내는 것은?

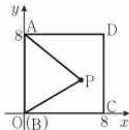


직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_13번_해설

정답 ①

해설 다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $A(0, 8)$, $B(0, 0)$ 이므로

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 32 \text{에서}$$

$$\{x^2 + (y-8)^2\} - \{x^2 + y^2\} = 32$$

$$-16y + 64 = 32$$

$$\therefore y = 2$$

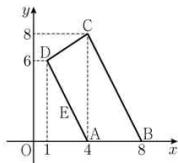
따라서 점 P의 자취는 ①과 같다.



직선의 방정식- 준킬러_기출

반포고등학교-23-1학기_기말고사_17번

좌표평면 위의 네 점 $A(4, 0)$, $B(8, 0)$, $C(4, 8)$, $D(1, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형 $ABCD$ 에서 선분 AD 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 지나는 직선 l 이 사각형 $ABCD$ 의 넓이를 이등분한다. 직선 l 이 선분 BC 와 만나는 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은?



① 9

② $\frac{19}{2}$

③ 10

④ $\frac{21}{2}$

⑤ 11



직선의 방정식- 준킬러_ 해설

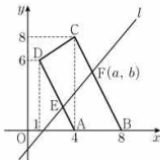
반포고등학교-23-1학기_기말고사_17번

정답 ④

해설 직선 AD의 기울기는 $\frac{6-0}{1-4} = -2$,

직선 BC의 기울기는 $\frac{8-0}{4-8} = -2$

즉, 두 직선 AD, BC는 평행이므로 사각형 ABCD는
사다리꼴이다.



두 밑변의 길이가 각각 a , b 이고 높이가 h 인
사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$$

직선 l 이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면
나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이
서로 같아야 한다.



직선의 방정식- 준킬러_해설

반포고등학교-23-1학기_기말고사_17번(2)

선분 AD를 1:2로 내분하는 점을 E라 하고
점 E를 지나는 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를
이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여
점 F가 선분 BC를 $m:n$ 으로 내분한다고 하자.

$$\overline{AD} = 3\sqrt{5}, \overline{BC} = 4\sqrt{5} \text{ 이고}$$

$$\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{DE} + \overline{CF} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} + \frac{m}{m+n} \cdot 4\sqrt{5}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5} + \frac{n}{m+n} \cdot 4\sqrt{5}$$

$$1 + \frac{4m}{m+n} = 2 + \frac{4n}{m+n}$$

$$\frac{4(m-n)}{m+n} = 1 \text{ 에서 } 4m - 4n = m + n, 3m = 5n$$

따라서 $m:n=5:3$ 이므로 점 F의 좌표는

$$F\left(\frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{8}, \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 0}{8}\right) = F\left(\frac{11}{2}, 5\right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{11}{2}, b = 5 \text{ 이므로}$$

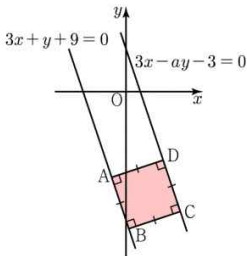
$$a+b = \frac{21}{2}$$



직선의 방정식- 준킬러_ 기출

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_24번

다음 그림과 같이 평행한 두 직선 $3x + y + 9 = 0$,
 $3x - ay - 3 = 0$ 위에 사각형 ABCD가 정사각형이
되도록 네 점 A, B, C, D를 잡을 때, 이 정사각형의
넓이를 구하시오.



직선의 방정식- 준킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_24번

정답 $\frac{72}{5}$

해설 두 직선 $3x + y + 9 = 0$, $3x - ay - 3 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{-a} \neq \frac{9}{-3} \text{에서 } a = -1$$

정사각형의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같고

직선 $3x + y + 9 = 0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$ 과 직선

$3x + y - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-9 + 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5} \sqrt{10}$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{6}{5} \sqrt{10}$

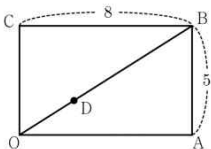
$$\text{이므로 넓이는 } \left(\frac{6}{5} \sqrt{10} \right)^2 = \frac{72}{5}$$



직선의 방정식- 준킬러_ 기출

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_8번

다음 그림과 같이 가로 길이가 8, 세로 길이가 5인 직사각형 OABC에 대하여 선분 OB를 1:3으로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 DB를 5:2로 외분하는 점과 직선 CD 사이의 거리는?



① $\frac{100}{17}$

② $\frac{150}{17}$

③ $\frac{200}{17}$

④ $\frac{250}{17}$

⑤ $\frac{300}{17}$



직선의 방정식- 준킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_8번

정답 ③

해설 좌표평면 위에 점 O가 원점,

두 번 OA, OC가 각각 x 축, y 축 위에 오도록

직사각형 OABC를 놓으면

$A(8, 0), B(8, 5), C(0, 5)$

선분 OB를 1:3으로 내분하는 점 D의 좌표는

$$D\left(\frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 0}{1+3}, \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 0}{1+3}\right), \text{ 즉 } D\left(2, \frac{5}{4}\right)$$

선분 DB를 5:2로 외분하는 점을 E라 하면

$$E\left(\frac{8 \cdot 5 - 2 \cdot 2}{5-2}, \frac{5 \cdot 5 - \frac{5}{4} \cdot 2}{5-2}\right), \text{ 즉 } E\left(12, \frac{15}{2}\right)$$

직선 CD의 방정식은

$$y-5 = \frac{\frac{5}{4}-5}{2-0}(x-0)$$

$$\therefore 15x + 8y - 40 = 0$$

따라서 점 $E\left(12, \frac{15}{2}\right)$ 와

직선 $15x + 8y - 40 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|15 \cdot 12 + 8 \cdot \frac{15}{2} - 40\right|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{200}{17}$$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_16번

원점을 지나고 기울기가 양인 두 직선 l 과 m 이 있다.
직선 l 의 기울기는 직선 m 의 기울기의 4배이고,
직선 m 은 x 축의 양의 방향과 직선 l 이 이루는 각을
이등분한다. 이때 직선 m 의 기울기를 구하시오.

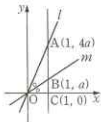


직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_16번_해설

정답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



직선 m 을 $y = ax$ ($a > 0$)라고 하면 직선 l 은 $y = 4ax$ 이다.

이때 l 과 m 이 직선 $x = 1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라고 하면 $A(1, 4a)$, $B(1, a)$ 이다.

그런데 $\angle AOB = \angle BOC$ 이므로

$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{AB} : \overline{BC} = 3a : a = 3 : 1$$

$$\overline{OC} = 1 \text{ 이므로 } \overline{OA} = 3$$

따라서 직각삼각형 OAC에서 $(4a)^2 + 1^2 = 3^2$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_19번

세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 12)$, $B(16, 4)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 3배일 때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

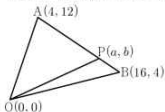


직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_19번_해설

정답 ④

해설 다음 그림에서 $\triangle OAP = 3\triangle OBP$ 이려면
점 P는 두 점 A, B를 3:1로 내분하여야 한다.



$$\text{따라서 } P\left(\frac{3 \cdot 16 + 1 \cdot 4}{3 + 1}, \frac{3 \cdot 4 + 1 \cdot 12}{3 + 1}\right)$$

즉, $P(13, 6)$ 이므로

$$a = 13, b = 6$$

$$\therefore a - b = 7$$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_21번

세 점 $A(1, 6)$, $B(-1, -2)$, $C(5, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 직선 $mx + y - m - 6 = 0$ 이 삼각형 ABC 의 넓이를 이등분할 때, 상수 m 값을 구하시오.



직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_21번_해설

정답 5

해설 $mx + y - m - 6 = 0$ 에서
 $m(x-1) + (y-6) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 6)$ 을
지난다.
 $A(1, 6)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 이 삼각형 ABC 의 넓이를
이등분하려면 직선 $\textcircled{1}$ 은 \overline{BC} 의 중점 $(2, 1)$ 을 지나야
한다.
따라서 $m - 5 = 0$ 이므로
 $m = 5$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_22번

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 위의 점 중에서 직선 $y = 2x - 2$ 까지의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8



직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_22번_해설

정답 ②

해설 직선 $y = 2x - 2$ 에 평행인 직선 $y = 2x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 접점이 (a, b) 이다.
 $2a + k = a^2 - 2a + 3, a^2 - 4a + (3 - k) = 0$ 이므로
 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - (3 - k) = 0$
 $4 - (3 - k) = 0, 1 + k = 0$
 $\therefore k = -1$
 $k = -1$ 을 대입하면 $a^2 - 4a + 4 = 0$ 이므로 $a = 2$
이때 $y = 2x - 1$ 에 $a = 2$ 를 대입하면 $b = 4 - 1 = 3$
 $\therefore a + b = 2 + 3 = 5$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_25번

좌표평면 위의 한 점 $A(2, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는
정삼각형 ABC 의 무게중심이 원점일 때,
정삼각형 ABC 의 넓이는?

- ① $20\sqrt{3}$ ② $25\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$
④ $35\sqrt{3}$ ⑤ $40\sqrt{3}$



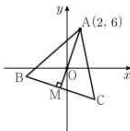
직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_25번_해설

정답 ③

해설 다음 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 정삼각형 ABC의 무게중심이 원점 O이므로

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AM}$$



이때 $\overline{AO} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AM} = \frac{3}{2} \overline{AO} = 3\sqrt{10}$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변 BC의 길이는

$$\overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{AM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{10} = 2\sqrt{30}$$

이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

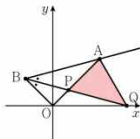
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \overline{BC}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 120 = 30\sqrt{3}$$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

잠실여자고등학교-23-기말_17번

세 점 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에서 $\angle B$ 의 이등분선이 선분 OA 와 만나는 점을 P 라 하고, 선분 BP 의 연장선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 APQ 의 넓이는?



- ① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$



직선의 방정식 - 준킬러_해설

잠실여자고등학교-23-기말_17번_해설

정답 ⑤

해설 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서

$$\overline{OB}=2, \overline{OA}=2\sqrt{3}, \overline{AB}=4$$

삼각형 OAB 에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{OB} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{PA} \text{ 이므로}$$

$$\overline{OP} : \overline{PA} = 1 : 2$$

즉, 점 P 는 \overline{OA} 를 1:2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1 \cdot \sqrt{6}}{1+2}, \frac{1 \cdot \sqrt{6}}{1+2}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

한편, 직선 BP 의 방정식을 구하면

$$y - \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$$

$$\therefore y = (-2 + \sqrt{3})x - \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

점 Q 의 x 좌표가 직선 BP 의 x 절편이므로

$$Q(\sqrt{6} + \sqrt{2}, 0)$$

이때 직선 AP 의 방정식은 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 이므로

점 $Q(\sqrt{6} + \sqrt{2}, 0)$ 과 직선 AP 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{6} + \sqrt{2} - 0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore \triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot (\sqrt{3} + 1) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

서울세종고등학교-23-기말_9번

두 직선

$$l: ax + y - 3a + 2 = 0,$$

$$m: 2x - ay + 2a - 4 = 0$$

에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a 는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $a = 0$ 일 때 두 직선 l 과 m 은 서로 수직이다.

ㄴ. 직선 m 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$ 를 지난다.

ㄷ. 두 직선 l 과 m 이 평행이 되기 위한 a 의 값이 존재한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



직선의 방정식 - 준킬러_해설

서울세종고등학교-23-기말_9번_해설

정답 ③

해설 \neg . $a=0$ 일 때, $l: y=-2$, $m: x=2$ 이므로

두 직선 l , m 은 서로 수직이다. (참)

\perp . $2x-ay+2a-4=0$ 에서

$$2(x-2)-a(y-2)=0$$

이 등식은 $x=2$, $y=2$ 일 때 a 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

즉, 직선 m 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$ 를 지난다. (참)

\sqsubset . $a=0$ 일 때, \neg 에 의해 두 직선 l , m 은 서로 수직이다.

$a \neq 0$ 일 때, 두 직선 l , m 의 기울기는 각각

$$-a, \frac{2}{a} \text{ 이다. 그런데 } -a = \frac{2}{a} \text{ 를 만족시키는}$$

실수 a 의 값은 존재하지 않으므로 두 직선 l 과 m 이

평행하기 위한 실수 a 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

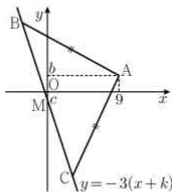
따라서 옳은 것은 \neg , \perp 이다.



직선의 방정식 - 준킬러_기출

서울세종고등학교-23-기말_14번

다음 그림과 같이 좌표평면에서 점 $A(9, b)$ 와 직선 $y = -3(x + k)$ 위의 서로 다른 두 점 B, C 가 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 만족시킨다. 선분 BC 의 중점이 y 축 위의 점 $M(0, c)$ 에 있을 때, $b + 3k$ 의 값은?



① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

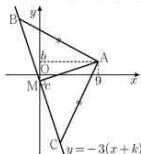


직선의 방정식 - 준킬러_해설

서울세종고등학교-23-기말_14번_해설

정답 ④

해설 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고
 밑변 BC의 중점이 M이므로
 두 선분 AM, BC는 서로 수직이다.



점 M은 직선 $y = -3(x+k)$ 와 y축이 만나는 점이므로
 $M(0, -3k) = M(0, c)$

$$\therefore c = -3k \quad \dots \textcircled{7}$$

직선 BC의 기울기는 -3이므로

직선 AM의 기울기는 $\frac{1}{3}$, M(0, c)에서

$$\text{직선 AM은 } y = \frac{1}{3}x + c$$

점 A(9, b)가 이 직선을 지나므로

$$\therefore b = 3 + c \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $b + 3k = 3$



직선의 방정식 - 준킬러_기출

서울세종고등학교-23-기말_16번

점 $(3, -1)$ 와 직선 $kx + y - 3k - 4 = 0$ 사이의 거리는 $k = a$ 일 때 최댓값 b 를 갖는다고 한다. 이때 $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 실수이다.)



직선의 방정식- 준킬러_해설

서울세종고등학교-23-기말_16번_해설

정답 5

해설 점 $(3, -1)$ 와 직선 $kx + y - 3k - 4 = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 하면

$$f(k) = \frac{|3k - 1 - 3k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$f(k)$ 는 $\sqrt{k^2 + 1}$ 의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$ 일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0) = \frac{5}{\sqrt{1}} = 5$$

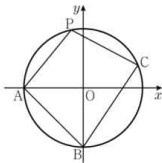
따라서 $a=0$, $b=5$ 이므로 $a+b=5$



직선+원의 방정식 - 킬러_기출

서울세종고등학교-23-기말_18번

다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 169$ 위에
세 점 $A(-13, 0)$, $B(0, -13)$, $C(12, 5)$ 가 있다.
점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위에 점 P 가 있을 때,
다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

- ㄱ. 점 B 와 직선 AC 사이의 거리는 $3\sqrt{26}$ 이다.
- ㄴ. 사각형 $PABC$ 의 넓이가 최대일 때, 직선 PB 와 직선 AC 는 서로 수직이다.
- ㄷ. 사각형 $PABC$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{65}{2}(\sqrt{26}+5)$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



직선+원의 방정식- 킬러_해설

서울세종고등학교-23-기말_18번_해설(1)

정답 ④

해설 ㄱ. 직선 AC의 방정식은 $x - 5y + 13 = 0$ 이므로

점 B와 직선 AC 사이의 거리는

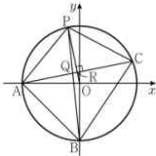
$$\frac{|-5 \cdot (-13) + 13|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = 3\sqrt{26} \text{ (참)}$$

ㄴ. 원 $x^2 + y^2 = 169$ 위의 점 P에서의 접선이
직선 AC와 평행할 때, 사각형 PABC의 넓이가
최대가 된다.

선분 AC와 두 선분 PB, PO가 만나는 점을 각각
Q, R라 하자.

원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AC는 평행하고,
원의 반지름 OP와 각각 서로 수직이다.

삼각형 PQR에서 $\angle R = 90^\circ$, $\angle Q < 90^\circ$ 이므로
직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이 아니다. (거짓)



직선+원의 방정식 - 킬러_해설

서울세종고등학교-23-기말_18번_해설(2)

ㄷ. 사각형 PABC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와
삼각형 ACP의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AC}=5\sqrt{26}$ 이고 ㄱ에
의하여

$$\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{26} \cdot 3\sqrt{26} = 195 \quad \dots \textcircled{1}$$

삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은 ㄴ에 의하여

$$\overline{OR} = \frac{|1 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 13|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\overline{PR} = 13 - \overline{OR} = 13 - \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{26} \cdot \left(13 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \\ = \frac{65}{2}(\sqrt{26} - 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

따라서 사각형 PABC의 넓이의 최댓값은

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \frac{65}{2}(\sqrt{26} + 5) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



원의 방정식- 킬러_기출

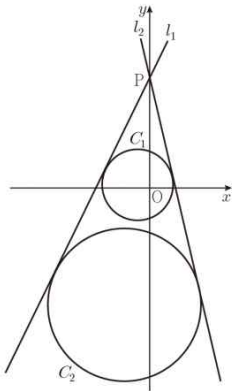
반포고등학교-23-1학기_기말고사_10번

좌표평면에 원 $C_1 : (x+a)^2 + y^2 = 6$ 이 있다. 다음 그림과 같이 점 $P(0, b)$ 에서 원 C_1 에 그은 두 접선을 l_1, l_2 라 하자.

두 직선 l_1, l_2 가 원 $C_2 : (x+3)^2 + (y+8)^2 = 24$ 에

모두 접할 때, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 합을 c 라 하자.

$10(a+b+c)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 양의 상수이다.)



원의 방정식- 킬러_해설

반포고등학교-23-1학기_기말고사_10번(1)

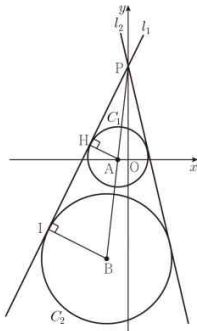
10 정답 31

해설 두 원 C_1 , C_2 의 중심을 각각 A, B라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-a, 0)$, $(-3, -8)$ 이다.

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l_1 에 내린

수선의 발을 각각 H, I라 하자.



$\overline{AH} = \sqrt{6}$, $\overline{BI} = 2\sqrt{6}$ 이므로 두 삼각형 PAH, PBI는
달음비가 $\overline{AH} : \overline{BI} = 1 : 2$ 인 닮은 도형이다.



원의 방정식- 킬러_해설

반포고등학교-23-1학기_기말고사_10번(2)

이때 점 A는 선분 BP의 중점이므로

$$\frac{0-3}{2} = -a, \frac{b-8}{2} = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 8 \quad \dots \textcircled{㉑}$$

점 P(0, 8)을 지나고 점 A $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서의 거리가 $\sqrt{6}$ 인

직선을 $y = mx + 8$, 즉 $mx - y + 8 = 0$ (m 은 상수)로 놓으면

$$\frac{\left| -\frac{3}{2}m - 0 + 8 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{6}$$

$$\left| -\frac{3}{2}m + 8 \right| = \sqrt{6(m^2 + 1)} \quad \dots \textcircled{㉒}$$

㉒의 양변을 제곱하면

$$\frac{9}{4}m^2 - 24m + 64 = 6m^2 + 6$$

$$15m^2 + 96m - 232 = 0$$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 합은

$$m_1 + m_2 = -\frac{96}{15} = -\frac{32}{5} \text{ 이므로}$$

$$c = -\frac{32}{5} \quad \dots \textcircled{㉓}$$

㉑, ㉓에서

$$10(a + b + c) = 10\left(\frac{3}{2} + 8 - \frac{32}{5}\right) = 31$$



원의 방정식- 킬러_기출

반포고등학교-23-1학기_기말고사_14번

좌표평면에서 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 과 직선 $y = mx - m + 1$ 이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_1 , 선분 OQ와 호 OQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 를 만족시키는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크다.)

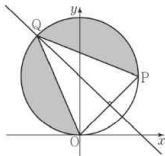


원의 방정식- 킬러_해설

반포고등학교-23-1학기_기말고사_14번

정답 2

해설 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기



직선 $y = mx - m + 1 = m(x - 1) + 1$ 은

m 의 값에 관계없이 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

점 P 의 x 좌표는 점 Q 의 x 좌표보다 크므로 $P(1, 1)$

$S_1 = S_2$ 이므로 $\overline{PQ} = \overline{OQ}$

삼각형 PQO 가 이등변삼각형이므로

선분 OP 의 수직이등분선은 점 Q 를 지난다.

선분 OP 를 수직이등분하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

즉, $y = -x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 을 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + (-x + 1 - 1)^2 = 1$$

$$\text{즉, } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ 또는 } Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

m 은 직선 PQ 의 기울기이므로

$$m = 1 - \sqrt{2} \text{ 또는 } m = 1 + \sqrt{2}$$

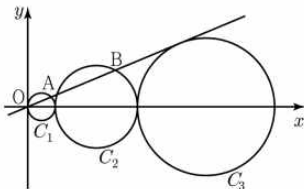
따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 2



원과 접선- 킬러_ 기출

은광여자고등학교-23-중간_20번

다음 그림과 같이 중심이 x 축 위에 있고, 반지름의 길이가 각각 1, 3, 5인 세 원 C_1 , C_2 , C_3 가 있다. 원점에서 원 C_3 에 그은 접선이 제1사분면에서 원 C_2 와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



원과 접선- 킬러_해설

은광여자고등학교-23-중간_20번_해설

정답 $\frac{16\sqrt{14}}{13}$

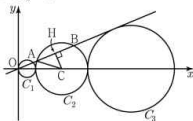
해설 원점 $(0, 0)$ 에서 원 C_3 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = mx$
 $\therefore mx - y = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 원 C_3 의 중심 $(13, 0)$ 과 직선 $mx - y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|13m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|13m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

 원 C_3 의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|13m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$$

 양변을 제곱하여 정리하면 $m^2 = \frac{25}{14}$
 $\therefore m = \frac{5}{12} \quad (\because m > 0) \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은 $5x - 12y = 0$



다음 그림과 같이 원 C_2 의 중심 $C(5, 0)$ 에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|25|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{25}{13}$$

직각삼각형 $\triangle ACH$ 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{25}{13}\right)^2} = \frac{8\sqrt{14}}{13}$$

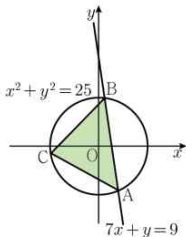
$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = \frac{16\sqrt{14}}{13}$$



원의 방정식- 준킬러_ 기출

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_6번

다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 25$ 와 직선 $7x + y = 9$ 가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되도록 원 위에 점 C를 잡을 때, 점 C에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하시오.



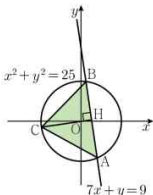
원의 방정식- 준킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_6번

정답 $y = -7x - 25\sqrt{2}$

해설 다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH}$$



S가 최대가 되려면 \overline{CH} 가 최대가 되어야 하므로 점 C는 직선 AB와 평행하면서 원에 접하는 직선 위의 점이다. 따라서 기울기가 -7 인 원의 접선의 방정식은

$$y = -7x \pm 25\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

이때 접선의 y절편은 음수이므로 구하는 접선의 방정식은

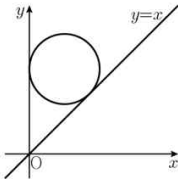
$$y = -7x - 25\sqrt{2}$$



원의 방정식- 준킬러_ 기출

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_13번

다음 그림과 같이 중심이 좌표평면 위의 제1사분면에 있고 반지름의 길이가 1인 원이 y 축과 직선 $y=x$ 에 동시에 접한다. 이 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.)



- ① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$



원의 방정식- 준킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_13번

정답 ④

해설 주어진 원은 반지름의 길이가 1이고
y축에 접하므로 원의 중심의 x좌표는 $a=1$ 이고,
원의 중심 $(1, b)$ 와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의
거리가 1이므로

$$\frac{|1-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

$$|1-b|=\sqrt{2}, 1-b=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore b=1-\sqrt{2} \text{ 또는 } b=1+\sqrt{2}$$

이때 원의 중심이 제1사분면에 있으므로 $b>0$ 이다.

$$\therefore b=1+\sqrt{2}$$

따라서 $a=1, b=1+\sqrt{2}$ 이므로

$$a+b=1+(1+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$$

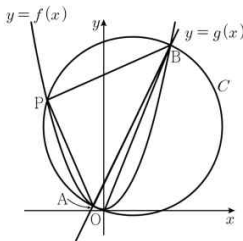


원의 방정식- 킬러_기출

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_16번

두 양수 a, m 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 를
 $f(x) = ax^2, g(x) = m^2x + 9a$ 라 하자.

다음 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가
만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB를 지름으로 하고
원점 O를 지나는 원 C가 있다. 원 C와 곡선 $y = f(x)$ 는
서로 다른 네 점에서 만나고, 원 C와 곡선 $y = f(x)$ 가
만나는 네 점 중 O, A, B가 아닌 점을 P($k, f(k)$)라 하자.
삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 AOB의 넓이의 7배일 때,
 $f(k) + g(k)$ 의 값을 구하시오.



원의 방정식- 킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_16번(1)

정답 3

해설 곡선 $y = ax^2$ 과 직선 $y = m^2x + 9a$ 가 만나는

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A(\alpha, a\alpha^2), B(\beta, a\beta^2)$$

이차방정식 $ax^2 - m^2x - 9a = 0$ 의 두 실근이

α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{m^2}{a}, \alpha\beta = -9$$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 $\angle BOA = 90^\circ$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이

-1이므로

$$\begin{aligned}\frac{a\alpha^2 - 0}{\alpha - 0} \cdot \frac{a\beta^2 - 0}{\beta - 0} &= a\alpha \cdot a\beta \\ &= a^2 \cdot \alpha\beta \\ &= -9a^2 = -1\end{aligned}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\frac{1}{9}$ 이다.

점 $P\left(k, \frac{k^2}{3}\right)$ 은 원 C 위의 점이므로 $\angle APB = 90^\circ$

직선 PA의 기울기와 직선 PB의 기울기의 곱이

-1이므로

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\alpha^2}{3} - \frac{k^2}{3}}{\alpha - k} \cdot \frac{\frac{\beta^2}{3} - \frac{k^2}{3}}{\beta - k} &= \frac{1}{9}(\alpha + k)(\beta + k) \\ &= \frac{1}{9}\{k^2 + (\alpha + \beta)k + \alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{9}(k^2 + 3m^2k - 9) = -1\end{aligned}$$



원의 방정식- 킬러_해설

숙명여자고등학교-23-1학기_기말고사_16번(2)

즉, $k^2 + 3m^2k = 0$ 에서 $k = -3m^2$ 이고

$$P(-3m^2, 3m^4)$$

점 $P(-3m^2, 3m^4)$ 과 직선 $y = m^2x + 3$ 사이의 거리를 d_1 이라 하면

$$d_1 = \frac{|m^2 \cdot (-3m^2) - 3m^4 + 3|}{\sqrt{m^4 + 1}} = \frac{|-6m^4 + 3|}{\sqrt{m^4 + 1}}$$

점 O 와 직선 $y = m^2x + 3$ 사이의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2 = \frac{3}{\sqrt{m^4 + 1}}$$

삼각형 ABP 와 삼각형 AOB 의 넓이의 비는

$d_1 : d_2$ 이므로

$$\frac{|-6m^4 + 3|}{\sqrt{m^4 + 1}} : \frac{3}{\sqrt{m^4 + 1}} = 7 : 1 \text{에서}$$

$$|-6m^4 + 3| = 21, m^4 = 4$$

이때 m 은 양수이므로 $m = \sqrt{2}, k = -6$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^2, g(x) = 2x + 3$ 이므로

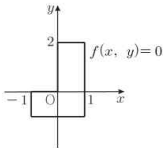
$$f(k) + g(k) = 12 + 2 \cdot (-6) + 3 = 3$$



도형의 이동- 준킬러_기출

세화고등학교-23-중간_10번

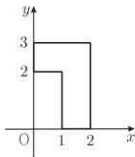
좌표평면에서 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이
그림과 같은 \sqcap 모양일 때, 다음 중 방정식
 $f(x-1, 2-y) = 0$ 이 좌표평면에 나타내는 도형은?



도형의 이동- 킬러_해설

세화고등학교-23-중간_10번_해설

방정식 $f(x-1, -(y-2))=0$ 이 나타내는 도형은
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여
대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1, y 축의 방향으로 2만큼
평행이동한 도형이므로 다음 그림과 같다.



도형의 이동- 준킬러_ 기출

세화고등학교-23-중간_20번

직선 $l : y = \frac{1}{2}x + k$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한

직선을 l_1 , 직선 l_1 을 y 축에 대하여 대칭이동한

직선을 l_2 , 직선 l_2 를 x 축에 대하여 대칭이동한

직선을 l_3 라 할 때, 네 직선 l, l_1, l_2, l_3 으로

둘러싸인 부분의 넓이가 32이다. 이때, 양수 k 의
값은?



도형의 이동- 킬러_해설

세화고등학교-23-중간_20번_해설

1 직선 $l: y = \frac{1}{2}x + k$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한

직선 l_1 은

$$l_1: -y = \frac{1}{2}x + k, y = -\frac{1}{2}x - k$$

직선 l_1 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 l_2 는

$$l_2: y = -\frac{1}{2}(-x) - k, y = \frac{1}{2}x - k$$

직선 l_2 를 x 축에 대하여 대칭이동한 직선 l_3 은

$$l_3: -y = \frac{1}{2}x - k, y = -\frac{1}{2}x + k$$

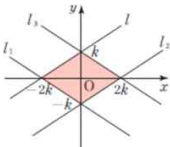
따라서 네 직선 l, l_1, l_2, l_3 으로 둘러싸인 부분은

그림과 같이 두 대각선의 길이가 $4k, 2k$ 인

마름모이고 그 넓이가 32이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 4k \cdot 2k = 4k^2 = 32$$

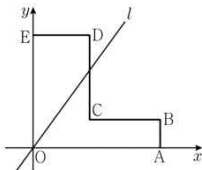
$$k^2 = 8 \quad \therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$



직선의 방정식- 준킬러_기출

반포고등학교-23-1학기_기말고사_7번

다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선 l 이 원점 O 와 다섯 개의 점 $A(9, 0)$, $B(9, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 8)$, $E(0, 8)$ 을 선분으로 이은 도형 $OABCDE$ 의 넓이를 이등분한다. 이때 직선 l 의 기울기는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수)



① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

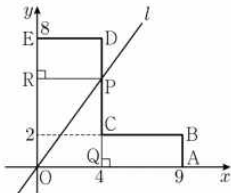


직선의 방정식- 준킬러_ 해설

반포고등학교-23-1학기_기말고사_7번

정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 직선 l 과 선분 CD 의 교점을 P ,
점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q , R 라
하자.



삼각형 OPQ 의 넓이와 삼각형 OPR 의 넓이가 서로
같으므로 사각형 $ABCQ$ 와 사각형 $DERP$ 의 넓이가 서로
같다.

$$4 \cdot \overline{ER} = 5 \cdot 2$$

$$\therefore \overline{ER} = \frac{5}{2}$$

따라서 $P\left(4, \frac{11}{2}\right)$ 이므로 직선 l 의 기울기는 $\frac{11}{8}$ 이다.

즉, $p = 8$, $q = 11$ 이므로

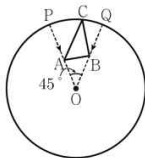
$$p + q = 19$$



도형의 이동- 킬러_ 기출

중등고등학교-23-중간_18번

반지름의 길이가 20 m인 원형의 수영장이 있다. 점 O 는 수영장의 중심이고, 두 점 P, Q 는 원 위의 점이며 $\angle POQ = 45^\circ$ 이다. 갑과 을이 각각 P, Q 에서 동시에 출발하여 중심 O 를 향해 가고 있다. 호 PQ 위에 한 점 C 를 고정하고 선분 OP 와 선분 OQ 위의 임의의 두 지점 A, B 에 갑과 을이 각각 도달하였을 때, 세 지점 A, B, C 를 서로 연결한 거리의 합 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ 의 최솟값은?



- ① $15\sqrt{2}$ m ② $15\sqrt{3}$ m ③ $20\sqrt{2}$ m
 ④ $20\sqrt{3}$ m ⑤ $20\sqrt{5}$ m

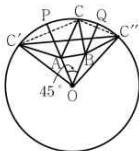


03 도형의 이동- 킬러_준비_해설

중등고등학교-23-중간_18번_해설

정답 ③

해설 선분 OP , OQ 에 대한 점 C 의 대칭점을 C' , C'' 이라 하면
 $\overline{AC} = \overline{AC'}$, $\overline{BC} = \overline{BC''}$ 이므로



$\triangle ABC$ 에서

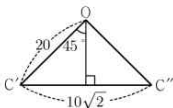
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC''} + \overline{AC'} \geq \overline{C'C''}$$

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ 의 최솟값은 $\overline{C'C''}$ 이다.

이때 $\triangle OC'C''$ 은 $\angle C'OC'' = 90^\circ$ 인

이등변삼각형이므로

$$\overline{C'C''} = 20\sqrt{2}$$



03 도형의 이동- 킬러_기출

중동고등학교-23-중간_15번

$x = a$ 일 때, $\sqrt{(x-2)^2+25} + \sqrt{x^2+9}$ 의 최솟값이 b 이다. $4a+b^2$ 의 값을 구하시오.



03 도형의 이동- 준킬러_ 해설

중등고등학교-23-중간_15번_해설

정답 71

해설 세 점 P, A, B를 $P(x, 0)$, $A(2, 5)$, $B(0, 3)$ 으로

정하면 $\sqrt{(x-2)^2+25}$ 는 두 점 A, P 사이의 거리이고

$\sqrt{x^2+9}$ 는 두 점 B, P 사이의 거리이다.

즉, $\sqrt{(x-2)^2+25} + \sqrt{x^2+9}$ 의 최솟값은

점 A에서 점 P를 거쳐 점 B까지 가는

최단 거리를 의미한다.

이때 점 $P(x, 0)$ 은 x 축 위의 점이므로 점 $B(0, 3)$ 을

x 축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 $C(0, -3)$

$\overline{BP} = \overline{CP}$ 이므로

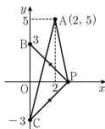
$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PC}$

$\geq \overline{AC}$

즉, 점 P가 직선 AC와 x 축의 교점일 때

주어진 식은 최솟값을 갖고

그 최솟값은 선분 AC의 길이와 같다.



직선 AC의 방정식은

$y = 4x - 3$

즉, 주어진 식의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 x 좌표는

$4x - 3 = 0$ 에서 $x = \frac{3}{4}$ 이고

이때의 최솟값은

$\sqrt{(2-0)^2 + (5+3)^2} = 2\sqrt{17}$

따라서 $a = \frac{3}{4}$, $b = 2\sqrt{17}$ 이므로

$4a + b^2 = 3 + 68 = 71$



03 도형의 이동- 준킬러- 기출

중등고등학교-23-중간_4번

포물선 $y = x^2 + 4x - 11$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가
직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의
거리는?

① $6\sqrt{2}$

② $7\sqrt{2}$

③ $8\sqrt{2}$

④ $6\sqrt{3}$

⑤ $7\sqrt{3}$



도형의 이동- 킬러_해설

중등고등학교-23-중간_4번_해설

정답 ②

해설 A의 좌표를 (a, b) 라 두면 B의 좌표는 (b, a) 가 된다.

두 점은 포물선 위의 점이므로

$$a = b^2 + 4b - 11, b = a^2 + 4a - 11 \text{이 성립한다.}$$

위의 두 식을 변끼리 빼서 정리하면

$$(a-b)(a+b+5)=0$$

$$\therefore a+b+5=0 \quad (\because a \neq b)$$

$$b = -a-5 \text{를 } b = a^2 + 4a - 11 \text{에 대입하면}$$

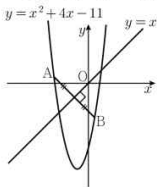
$$a^2 + 5a - 6 = 0, (a+6)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = -6$$

$$\text{즉, } \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a=-6 \\ b=1 \end{cases} \text{이므로}$$

A $(-6, 1)$, B $(1, -6)$ 이 된다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$$



0도형의 이동- 준킬러_ 기출

개포고등학교-23-중간_13번

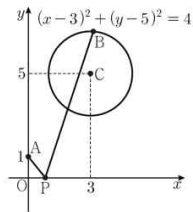
좌표평면 위의 점 $A(0, 1)$ 과

원 $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 가 있다. x 축 위의 점 P 와

이 원 위의 점 B 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$a + b\sqrt{5}$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 유리수이다.)



도형의 이동- 준킬러_ 해설

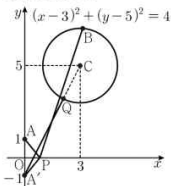
중등고등학교-23-중간_13번_해설

정답 1

해설 점 $A(0, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(0, -1)$

$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 의 최솟값과 같다.

다음 그림과 같이 $\overline{A'B}$ 는 점 B 가 Q 의 위치에 있을 때 최솟값을 갖는다.



$\overline{A'C} = 3\sqrt{5}$ 이고, 원의 반지름의 길이는 2이므로

$\overline{A'Q} = 3\sqrt{5} - 2$

즉, $a = -2$, $b = 3$ 이므로

$a + b = 1$

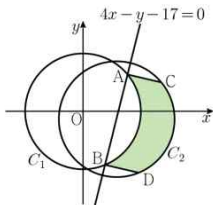
도형의 이동- 킬러_기출

개포고등학교-23-중간_19번

다음 그림과 같이 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 49$ 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원을 C_2 라 하자.

원 C_1 과 직선 $4x - y - 17 = 0$ 이 만나는 두 점 A, B를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점을 각각 C, D라 하자.

선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 S 라 할 때, $\left(\frac{S}{4}\right)^2$ 의 값을 구하시오.

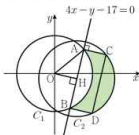


도형의 이동- 킬러_해설

중등고등학교-23-중간_19번_해설

정답 136

해설 점 A를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼
 평행이동한 점이 C이므로 직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이다.
 즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로
 사각형 ABDC는 직사각형이다.
 $\therefore \overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$
 또, 다음 그림과 같이 원점에서 직선 $4x - y - 17 = 0$ 에
 내린 수선의 발을 H라 하자.



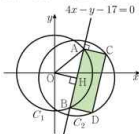
$$\text{이때 } \overline{OH} = \frac{|-17|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \sqrt{17} \text{ 이고,}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{17})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } \overline{AB} = 2\overline{AH} = 8\sqrt{2}$$

따라서 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인
 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같으므로

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 8\sqrt{34}$$



따라서 색칠된 부분의 넓이는 $S = 8\sqrt{34}$ 이므로

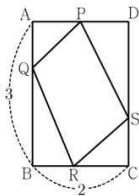
$$\left(\frac{S}{4}\right)^2 = 136$$



도형의 이동- 킬러_ 기출

은광여자고등학교-23-중간_5번

다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 2$ 인 직사각형이 있다.
점 P는 변 AD의 중점이고, 점 S는 변 CD를 1:2로
내분하는 점이다. 변 AB와 변 BC 위의 두 점 Q, R에
대하여 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값을
구하시오.



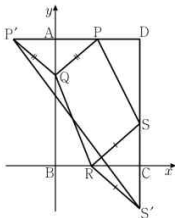
도형의 이동- 킬러_해설

은광여자고등학교-23-중간_5번_해설

정답 $5 + \sqrt{5}$

해설 변 BC를 x 축, 변 AB를 y 축, 점 B를 원점으로 놓으면
 $P(1, 3), S(2, 1)$

점 S를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 S' 이라 할 때,
 $S'(2, -1)$ 이고, 점 P를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을
 $P'(-1, 3)$ 이다.



$$\begin{aligned}\overline{PS} + \overline{SR} + \overline{RQ} + \overline{QP} &= \overline{PS} + \overline{S'R} + \overline{RQ} + \overline{QP'} \\ &\geq \overline{PS} + \overline{P'S'}\end{aligned}$$

이때 $\overline{PS} = \sqrt{5}$, $\overline{P'S'} = 5$ 이므로

사각형 PQRS의 둘레의 최솟값은

$$5 + \sqrt{5}$$

도형의 이동- 킬러_ 기출

세화고등학교-23-중간_15번

원 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P를 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하고, 점 Q를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하자.

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 의 최솟값이 $-\frac{12}{5}$ 이고 최댓값이 0일 때,

$|r+k|$ 의 값을 구하시오.

(단, $x_1 \neq x_2$ 이고 r 는 양수이다.)



도형의 이동- 킬러_ 준비_해설

세화고등학교-23-중간_15번_해설(1)

원 $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여

대칭이동한 원을 C_1 , x 축의 방향으로 k 만큼

평행이동한 원을 C_2 라 하자.

두 원 C_1 , C_2 의 중심을 각각 A, B라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, -4)$, $(4+k, 0)$ 이고

두 원 C_1 , C_2 의 반지름의 길이는 모두 r 이다.

점 P를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P' ,

점 Q를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점을 Q' 이라

하면 점 P' 은 원 C_1 위의 점이고,

점 Q' 은 원 C_2 위의 점이다.

이때 두 점 $P'(x_1, y_1)$, $Q'(x_2, y_2)$ 에 대하여

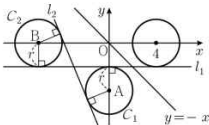
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 의 값은 직선 $P'Q'$ 의 기울기와 같다.

직선 $P'Q'$ 의 기울기의 최댓값이 0이므로 다음 그림과

같이 원 C_2 의 중심의 x 좌표가 $-2r$ 보다 작고,

두 원 C_1 , C_2 는 모두 x 축에 평행한 직선 l_1 에 접한다.

따라서 $4+k < -2r$ 이고 $r=4-r$, 즉 $r=2$



또, 직선 $P'Q'$ 의 기울기의 최솟값이 $-\frac{12}{5}$ 이므로

위 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 는 모두 기울기가

$-\frac{12}{5}$ 인 직선 l_2 에 접하고, 이때 원 C_2 의 중심의

x 좌표는 직선 l_2 의 x 절편보다 작다.

직선 l_2 의 방정식을 $y = -\frac{12}{5}x + n$ 이라 하면

직선 l_2 의 y 절편은 점 A의 y 좌표보다 작으므로

$$n < -4$$

점 A(0, -4)와 직선 $y = -\frac{12}{5}x + n$, 즉

$12x + 5y - 5n = 0$ 사이의 거리는 원 C_1 의 반지름의
길이와 같으므로

$$\frac{|0 + 5 \cdot (-4) - 5n|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$|-5n - 20| = 2 \cdot 13$$

$$n < -4 \text{이므로 } -5n - 20 = 26$$

$$\therefore n = -\frac{46}{5}$$

따라서 직선 l_2 의 방정식은 $12x + 5y + 46 = 0$ 이다.

점 $B(4+k, 0)$ 과 직선 $12x + 5y + 46 = 0$ 사이의 거리는 원 C_2 의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|12 \cdot (4+k) + 0 + 46|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$|12k + 94| = 26$$

$$\therefore k = -10 \text{ 또는 } k = -\frac{17}{3}$$

이때 $4+k = -6$ 또는 $4+k = -\frac{5}{3}$ 에서

직선 l_2 의 x 절편이 $-\frac{23}{6}$ 이므로 $4+k = -6$ 이어야

하고 이는 $4+k < -2r = -4$ 를 만족시킨다.

따라서 $k = -10$ 이므로

$$\begin{aligned} |r+k| &= |2+(-10)| \\ &= |-8| = 8 \end{aligned}$$