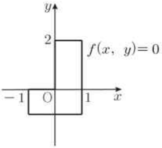
도형의 이동- 준킬러_ 기출

세화고등학교-23-중간_10번

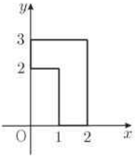
좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 그림과 같은 모양일 때, 다음 중 방정식 $f(x-1,\ 2-y)=0$이 좌표평면에 나타내는 도형은?



도형의 이동- 킬러_ 해설

세화고등학교-23-중간_10번_해설

방정식 $f(x-1,\ -(y-2))=0$이 나타내는 도형은
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여
대칭이동한 후, x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 2만큼
평행이동한 도형이므로 다음 그림과 같다.



세화고등학교-23-중간_20번

직선l : $y=\frac{1}{2}x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2, 직선 l_2를 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3라 할 때, 네 직선 l, l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 부분의 넓이가 32이다. 이때, 양수 k의 값은?

도형의 이동- 킬러_해설

세화고등학교-23-중간_20번_해설

직선 l : $y=\frac{1}{2}x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한

직선 l_1은

l_1 : $-y=\frac{1}{2}x+k$, $y=-\frac{1}{2}x-k$

직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l_2는

l_2 : $y=-\frac{1}{2}(-x)-k$, $y=\frac{1}{2}x-k$

직선 l_2를 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l_3은

l_3 : $-y=\frac{1}{2}x-k$, $y=-\frac{1}{2}x+k$

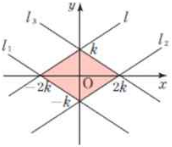
따라서 네 직선 l, l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 부분은

그림과 같이 두 대각선의 길이가 $4k$, $2k$인

마름모이고 그 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4k\cdot 2k=4k^2=32$

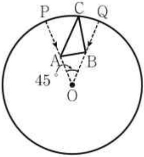
$k^2=8$ $\therefore k=2\sqrt{2}$ $(\because k>0)$



도형의 이동- 킬러_ 기출

중동고등학교-23-중간_18번

반지름의 길이가 20 m인 원형의 수영장이 있다. 점 O는 수영장의 중심이고, 두 점 P, Q는 원 위의 점이며 $\angle POQ = 45°$이다. 갑과 을이 각각 P, Q에서 동시에 출발하여 중심 O를 향해 가고 있다. 호 PQ 위에 한 점 C를 고정하고 선분 OP와 선분 OQ 위의 임의의 두 지점 A, B에 갑과 을이 각각 도달하였을 때, 세 지점 A, B, C를 서로 연결한 거리의 합 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 최솟값은?



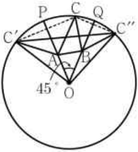
① $15\sqrt{2}$ m ② $15\sqrt{3}$ m ③ $20\sqrt{2}$ m
④ $20\sqrt{3}$ m ⑤ $20\sqrt{5}$ m

중동고등학교-23-중간_18번_해설

정답 ③

해설 선분 OP, OQ에 대한 점 C의 대칭점을 C′, C″이라 하면

$\overline{AC}=\overline{AC'}$, $\overline{BC}=\overline{BC''}$ 이므로



△ABC에서

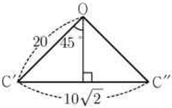
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AB}+\overline{BC''}+\overline{AC'}\geq\overline{C'C''}$

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 최솟값은 $\overline{C'C''}$이다.

이때 $\triangle OC'C''$은 $\angle C'OC''=90°$ 인

이등변삼각형이므로

$\overline{C'C''}=20\sqrt{2}$



중동고등학교-23-중간_15번

$x=a$일 때, $\sqrt{(x-2)^2+25}+\sqrt{x^2+9}$ 의 최솟값이 b이다. $4a+b^2$의 값을 구하시오.

중동고등학교-23-중간_15번_해설

정답 71

해설 세 점 P, A, B를 P$(x, 0)$, A$(2, 5)$, B$(0, 3)$으로 정하면 $\sqrt{(x-2)^2+25}$는 두 점 A, P 사이의 거리이고 $\sqrt{x^2+9}$는 두 점 B, P 사이의 거리이다.

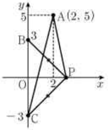
즉, $\sqrt{(x-2)^2+25}+\sqrt{x^2+9}$의 최솟값은 점 A에서 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 최단 거리를 의미한다.

이때 점 P$(x, 0)$은 x축 위의 점이므로 점 B$(0, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 C$(0, -3)$

$\overline{BP}=\overline{CP}$이므로

$$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PC}$$
$$\geq \overline{AC}$$

즉, 점 P가 직선 AC와 x축의 교점일 때, 주어진 식은 최솟값을 갖고 그 최솟값은 선분 AC의 길이와 같다.



직선 AC의 방정식은

$y=4x-3$

즉, 주어진 식의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표는

$4x-3=0$에서 $x=\frac{3}{4}$이고

이때의 최솟값은

$\sqrt{(2-0)^2+(5+3)^2}=2\sqrt{17}$

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=2\sqrt{17}$이므로

$4a+b^2=3+68=71$

중동고등학교-23-중간_4번

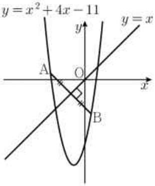
포물선 $y=x^2+4x-11$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $6\sqrt{2}$ ② $7\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

중동고등학교-23-중간_4번_해설

정답 ②

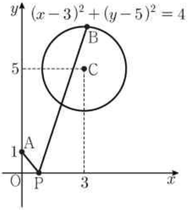
해설 A의 좌표를 (a, b)라 두면 B의 좌표는 (b, a)가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a=b^2+4b-11$, $b=a^2+4a-11$이 성립한다.
위의 두 식을 변끼리 빼서 정리하면
$(a-b)(a+b+5)=0$
$\therefore a+b+5=0$ ($\because a\neq b$)
$b=-a-5$를 $b=a^2+4a-11$에 대입하면
$a^2+5a-6=0$, $(a+6)(a-1)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=-6$
즉, $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-6 \\ b=1 \end{cases}$이므로
$A(-6, 1)$, $B(1, -6)$이 된다.
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$



0도형의 이동- 준킬러_ 기출

개포고등학교-23-중간_13번

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$과
원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$가 있다. x축 위의 점 P와
이 원 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은
$a+b\sqrt{5}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)



도형의 이동- 준킬러_ 해설

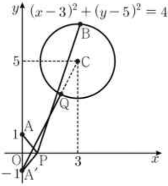
중동고등학교-23-중간_13번_해설

정답 1

해설 점 A(0, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(0, −1)

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 최솟값과 같다.

다음 그림과 같이 $\overline{A'B}$는 점 B가 Q의 위치에 있을 때 최솟값을 갖는다.



$\overline{A'C}=3\sqrt{5}$이고, 원의 반지름의 길이는 2이므로

$\overline{A'Q}=3\sqrt{5}-2$

즉, $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b=1$

도형의 이동- 킬러_ 기출

개포고등학교-23-중간_19번

다음 그림과 같이 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2+y^2=49$를

x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼

평행이동한 원을 C_2라 하자.

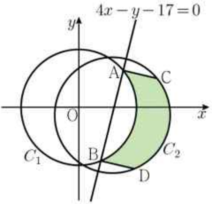
원 C_1과 직선 $4x-y-17=0$이 만나는 두 점 A, B를

x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼

평행이동한 점을 각각 C, D라 하자.

선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된

부분의 넓이를 S라 할 때, $\left(\dfrac{S}{4}\right)^2$ 의 값을 구하시오.



중동고등학교-23-중간_19번_해설

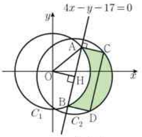
정답 136

해설 점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이 C이므로 직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로
사각형 ABDC는 직사각형이다.

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

또, 다음 그림과 같이 원점에서 직선 $4x-y-17=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



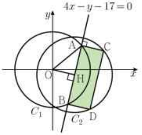
이때 $\overline{OH}=\frac{|-17|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$ 이고,

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{7^2-(\sqrt{17})^2}=4\sqrt{2}$

이므로 $\overline{AB}=2\overline{AH}=8\sqrt{2}$

따라서 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC 의 넓이와 같으므로

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}=8\sqrt{34}$

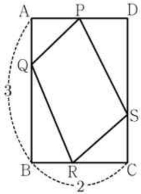


따라서 색칠된 부분의 넓이는 $S=8\sqrt{34}$ 이므로

$\left(\frac{S}{4}\right)^2=136$

은광여자고등학교-23-중간_5번

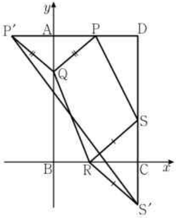
다음 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$인 직사각형이 있다. 점 P는 변 AD의 중점이고, 점 S는 변 CD를 $1:2$로 내분하는 점이다. 변 AB와 변 BC 위의 두 점 Q, R에 대하여 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.



은광여자고등학교-23-중간_5번_해설

정답 $5+\sqrt{5}$

해설 변 BC를 x축, 변 AB를 y축, 점 B를 원점으로 놓으면
P(1, 3), S(2, 1)
점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S′이라 할 때,
S′(2, −1)이고, 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점을
P′이라 할 때, P′(−1, 3)이다.

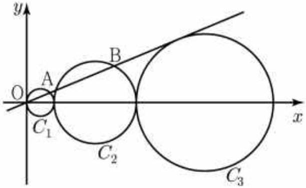


$\overline{PS}+\overline{SR}+\overline{RQ}+\overline{QP}=\overline{PS}+\overline{S'R}+\overline{RQ}+\overline{QP'}$
$\geq \overline{PS}+\overline{P'S'}$

이때 $\overline{PS}=\sqrt{5}$, $\overline{P'S'}=5$이므로
사각형 PQRS의 둘레의 최솟값은
$5+\sqrt{5}$

은광여자고등학교-23-중간_20번

다음 그림과 같이 중심이 x축 위에 있고, 반지름의 길이가 각각 1, 3, 5인 세 원 C_1, C_2, C_3가 있다. 원점에서 원 C_3에 그은 접선이 제1사분면에서 원 C_2와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



원과 접선- 킬러_ 해설

은광여자고등학교-23-중간_20번_해설

정답 $\dfrac{16\sqrt{14}}{13}$

해설 원점 $(0,\ 0)$에서 원 C_3에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=mx$

$\therefore\ mx-y=0 \quad \cdots ㉠$

원 C_3의 중심 $(13,\ 0)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|13m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|13m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원 C_3의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

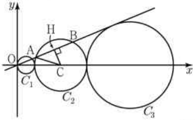
$\dfrac{|13m|}{\sqrt{m^2+1}}=5$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2=\dfrac{25}{144}$

$\therefore\ m=\dfrac{5}{12}\ (\because\ m>0) \quad \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$5x-12y=0$



다음 그림과 같이 원 C_2의 중심 $\mathrm{C}(5,\ 0)$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|25|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{25}{13}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{25}{13}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{14}}{13}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{16\sqrt{14}}{13}$

세화고등학교-23-중간_15번

원 $(x-4)^2+y^2=r^2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점의 좌표를 (x_2, y_2)라 하자.

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 최솟값이 $-\dfrac{12}{5}$이고 최댓값이 0일 때, $|r+k|$의 값을 구하시오.

(단, $x_1 \neq x_2$이고, r는 양수이다.)

세화고등학교-23-중간_15번_해설(1)

원 $(x-4)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ -4)$, $(4+k,\ 0)$이고

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 r이다.

점 P를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 P$'$,

점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 Q$'$이라 하면 점 P$'$은 원 C_1 위의 점이고,

점 Q$'$은 원 C_2 위의 점이다.

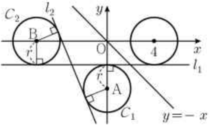
이때 두 점 P$'(x_1,\ y_1)$, Q$'(x_2,\ y_2)$에 대하여

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값은 직선 P$'$Q$'$의 기울기와 같다.

직선 P$'$Q$'$의 기울기의 최댓값이 0이므로 다음 그림과 같이 원 C_2의 중심의 x좌표가 $-2r$보다 작고,

두 원 C_1, C_2는 모두 x축에 평행한 직선 l_1에 접한다.

따라서 $4+k<-2r$이고 $r=4-r$, 즉 $r=2$



또, 직선 $\mathrm{P'Q'}$의 기울기의 최솟값이 $-\dfrac{12}{5}$이므로

위 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 모두 기울기가

$\dfrac{-12}{5}$인 직선 l_2에 접하고, 이때 원 C_2의 중심의

x좌표는 직선 l_2의 x절편보다 작다.

직선 l_2의 방정식을 $y=-\dfrac{12}{5}x+n$이라 하면

직선 l_2의 y절편은 점 A의 y좌표보다 작으므로

$n<-4$

점 $\mathrm{A}(0,\ -4)$와 직선 $y=-\dfrac{12}{5}x+n$, 즉

$12x+5y-5n=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의

길이와 같으므로

$$\frac{|0+5\cdot(-4)-5n|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$|-5n-20|=2\cdot 13$

$n<-4$이므로 $-5n-20=26$

$\therefore\ n=-\dfrac{46}{5}$

세화고등학교-23-중간_15번_해설(3)

따라서 직선 l_2의 방정식은 $12x+5y+46=0$이다.
점 $\mathrm{B}(4+k,\ 0)$과 직선 $12x+5y+46=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|12\cdot(4+k)+0+46|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$|12k+94|=26$

$\therefore\ k=-10$ 또는 $k=-\frac{17}{3}$

이때 $4+k=-6$ 또는 $4+k=-\frac{5}{3}$에서

직선 l_2의 x절편이 $-\frac{23}{6}$이므로 $4+k=-6$이어야 하고 이는 $4+k<-2r=-4$를 만족시킨다.
따라서 $k=-10$이므로

$$\begin{aligned}|r+k|&=|2+(-10)|\\&=|-8|=8\end{aligned}$$