쎈 - 수학Ⅱ 83,85p_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
31문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 함수 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$이 증가하는 구간이 닫힌구간 $[a,\ b]$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

02 함수 $y=x^3-6x^2+12x$의 증가하는 구간은?

① 없다.
② $x<-2$
③ $x>2$
④ $-2<x<2$
⑤ 모든 실수

03 [2024년 3월 고3 7번 변형]

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2-7x+2$의 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이 $x\le-4$, $x\ge2$에서 증가하고, $-4\le x\le2$에서 감소할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

05 어떤 도선의 한 지점 P에 흐르는 시각 t에서의 전류의 세기 $A(t)$가

$$A(t)=200t^3-900t^2+1200t\ (0\le t\le10)$$

일 때, P에 흐르는 전류의 세기가 감소하는 시각 t의 범위는 $a\le t\le b$이다. $b-a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오.

07 함수 $f(x)=x^3+3x^2-24x-12$가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$에서 증가할 때, 상수 α,β의 곱$\alpha\beta$의 값은?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

08 함수 $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+1$의 극댓값은?

① 0　② -1　③ -2　④ -5　⑤ -3

09 [2018년 11월 고2 문과 12번/3점]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이 $x=\alpha$에서 극댓값 M을 가질 때, $\alpha+M$의 값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

10 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -5　② 1　③ 6　④ 11　⑤ 16

11 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값 7을 가질 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오.

12 함수 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+7$의 극댓값의 개수를 a, 극솟값의 개수를 b라 할 때, $a+3b$의 값은?

① 1　② 4　③ 7　④ 8　⑤ 9

13 [2013년 11월 고3 문과 25번/3점]

함수 $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

14 [2023년 11월 고3 7번 변형]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$이 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은?
(단, α와 β는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

15 함수 $f(x)=x^3-3x+2$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

16 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 극값을 가지면 $f'(1)=\square$이다.

17 [2021년 9월 고3 5번/3점]

함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

18 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 5를 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

19 함수 $f(x)=2x^4+\frac{8}{3}x^3-4x^2-8x+1$의 극댓값의 개수를 a, 극솟값의 개수를 b라 할 때, $a+2b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

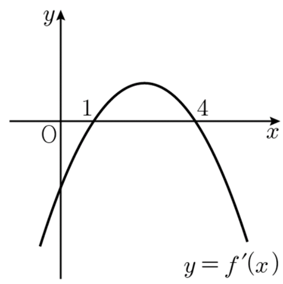
20 구간 $[3,\ 5]$에서 함수 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x$는 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

21 함수 $f(x)=2x-x^2\ (0\le x\le 3)$의 최솟값을 구하시오.

22 닫힌 구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)=-3x^4-4x^3+5$의 최댓값 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

23 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $y=f(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하시오.



24 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+3$은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$에서 최솟값 γ를 갖는다고 한다. 이때 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$)

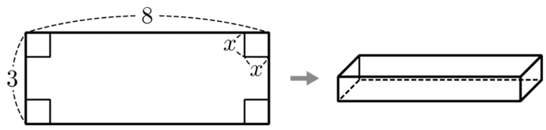
25 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=x^2(3a-x)$의 최댓값과 최솟값의 차는?

(단, $0 < a \le \dfrac{2}{3}$)

① $12a+8$　② $4a^3$　③ 16

④ $24a$　⑤ $4a^3-12a+8$

26 다음 그림과 같이 두 변의 길이가 각각 8, 3인 직사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라 내고 남는 부분으로 뚜껑이 없는 상자를 만들었다. 이 상자의 부피가 최대가 될 때, x의 값은?



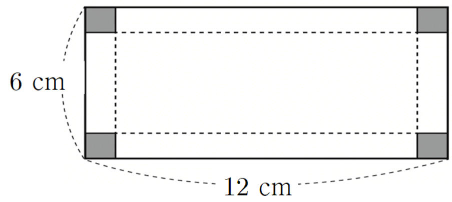
① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{2}{3}$

④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ 1

27 [2011년 4월 고3 이과 28번/4점]

[그림 1]과 같이 가로의 길이가 12 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서 [그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 $M\text{ cm}^3$이라 할 때, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}M$의 값을 구하시오.

(단, 종이의 두께는 무시한다.)

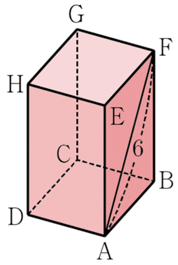


[그림 1]

[그림 2]

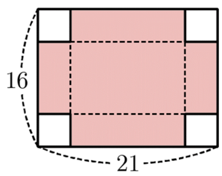
28 가로의 길이가 15cm, 세로의 길이가 8cm인 직사각형 모양의 양철판의 네 귀퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내고 남은 부분으로 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피가 최대가 되도록 하려면 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이를 얼마로 하면 되는지 구하시오.

29 다음 그림과 같이 밑면이 정사각형인 사각기둥이 있다. 사각형 ABFE의 대각선 AF의 길이가 6일 때, 이 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 넓이는?

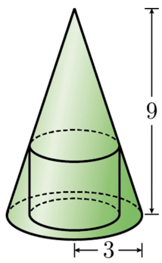


① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

30 다음 그림과 같이 가로의 길이가 21, 세로의 길이가 16인 직사각형 모양의 종이의 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고, 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 상자의 부피의 최댓값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.)



31 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 9인 원뿔에 원기둥이 내접할 때, 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하시오.



쎈 - 수학Ⅱ 83,85p_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
31문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ⑤	03 ③
04 27	05 ①	06 3
07 ①	08 ⑤	09 ②
10 ③	11 7	12 ①
13 22	14 ④	15 ⑤
16 0	17 ③	18 5
19 ②	20 -28	21 -3
22 ②	23 1	24 $\frac{9}{2}$
25 ③	26 ③	27 24
28 $\frac{5}{3}\text{cm}$	29 ①	30 450
31 2		

쎈 - 수학Ⅱ 83,85p_문제연습

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
31문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

이때 $f'(x)\geq 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x-1)(x-3)\geq 0,\ (x-1)(x-3)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 3$

따라서 $a=1,\ b=3$이므로

$a+b=1+3=4$

02 정답 ⑤

해설 $y=x^3-6x^2+12x$에서,

$y'>0$ 일 때, 함수는 증가한다.

$y'=3x^2-12x+12$

$=3(x-2)^2\geqq 0$

∴ 모든 실수 구간에서 증가하는 함수이다.

03 정답 ③

해설 $f'(x)=x^2-6x-7=(x+1)(x-7)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=7$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	7	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$-1\leq a<b\leq 7$일 때,

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 감소한다.

따라서 $b-a$의 최댓값은

$7-(-1)=8$

04 정답 27

해설 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $-4,\ 2$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$-4+2=-\dfrac{2a}{3},\ (-4)\cdot 2=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=3,\ b=-24$

$\therefore a-b=3-(-24)=27$

05 정답 ①

해설 $A(t)=200t^3-900t^2+1200t$에서

$A'(t)=600t^2-1800t+1200$

$=600(t-1)(t-2)$

P에 흐르는 전류의 세기가 감소할 때,

$A'(t)\leq 0$이므로 $600(t-1)(t-2)\leq 0$

$\therefore 1\leq t\leq 2$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로

$b-a=2-1=1$

06 정답 3

해설 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

즉, 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 감소하므로

양수 a에 대하여 $0<a\leq 3$이다.

따라서 구하는 a의 최댓값은 3이다.

07 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+3x^2-24x-12$ 에서

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x-2)(x+4)$

이때, $f'(x)>0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$3(x-2)(x+4)>0 \qquad \therefore x<-4$ 또는 $x>2$

따라서 $\alpha=-4, \beta=2$이므로

$\alpha\beta=-4\cdot 2=-8$

08 정답 ⑤

해설 $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극대값 $f(2)=-3$을 갖는다.

09 정답 ②

해설 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

$\therefore \alpha=1, M=f(1)=5$

따라서 $\alpha+M=6$

10 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값

$f(-1)=7$을 가지므로

$a=-1,\ b=7$

$\therefore a+b=6$

11 정답 7

해설 $f(x)$가 $x=3$에서 극값 7을 가지므로

$f(3)=7, f'(3)=0$

$\therefore f(3)+f'(3)=7$

12 정답 ①

해설 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+7$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	31	↘		↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때, 극댓값 31을 갖고,

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로

$x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a=1, b=0$이므로 $a+3b=1$

13 정답 22

해설 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$이다.

$f'(x)=6x^2-24x+a$이므로

$f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore a=18$

따라서 $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$이고

$f(1)=2-12+18-4=4=M$

$\therefore a+M=18+4=22$

14 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-24$

$=3(x+2)(x-4)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=4$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$\beta-\alpha=4-(-2)=6$

15 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3-3x+2$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $M=4$, $x=1$에서 극솟값 $m=0$을 갖는다.

$\therefore M-m=4-0=4$

16 정답 0

해설 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 극값을 가지면 $f'(1)=\boxed{0}$이다.

17 정답 ③

해설 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

이때 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$을 갖고,

$x=1$에서 극솟값

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$을 갖는다.

$\therefore M+m=15$

18 정답 5

해설 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 5를 가지므로

$f(1)=5$

19 정답 ②

해설 $f(x)=2x^4+\frac{8}{3}x^3-4x^2-8x+1$에서

$f'(x)=8x^3+8x^2-8x-8=8(x+1)^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{19}{3}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극솟값 $-\frac{19}{3}$를 갖고,

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로

$x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $a+2b=2$

20 정답 -28

해설 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x$에서

$f'(x)=4x^3-24x^2+36x-16=4(x-4)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 3\le x\le 5$)

x	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-21	↘	-32	↗	-5

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 -32를 가지므로

$a=4,\ b=-32$

$\therefore\ a+b=-28$

21 정답 -3

해설 $f(x)=2x-x^2\ (0\le x\le 3)$에서

$f'(x)=2-2x=2(1-x)$이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이므로 아래의 증감표에 의하면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-3

따라서, $x=1$ 일 때 최댓값 1을 가지고

$x=3$ 일 때 최솟값 -3을 가진다.

22 정답 ②

해설 $f(x)=-3x^4-4x^3+5$에서

$f'(x)=-12x^3-12x^2=-12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$(중근)

닫힌 구간 $[-2, 0]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-11	↗	6	↘	5

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 6,

$x=-2$일 때 최솟값 -11을 가지므로

$M=6,\ m=-11$

$\therefore\ M-m=6-(-11)=17$

23 정답 1

해설 $f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 구간 $[0, 2]$에서 $x=1$일 때 $f(x)$는 극소인 동시에 최소이다.

24 정답 $\dfrac{9}{2}$

해설 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^2+3$에서

$f'(x)=2x^3-2x=2x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{5}{2}$	↗	3	↘	$\frac{5}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 가지므로

$\alpha=-1,\ \beta=1,\ \gamma=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=|-1|+|1|+\left|\dfrac{5}{2}\right|=\dfrac{9}{2}$

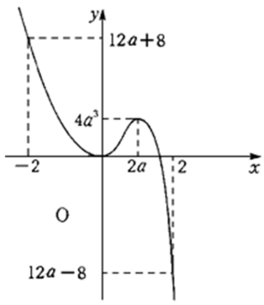
25 정답 ③

해설 $f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

$0<2a\le\frac{4}{3}$이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 증감표를 만들면 다음과 같다.

(x)	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$12a+8$	↘	0	↗	$4a^3$	↘	$12a-8$



(ⅰ) 최댓값은 $4a^3$ 또는 $12a+8$인데

$4a^3-(12a+8)=4(a+1)^2(a-2)<0$

($\because 0<a\le\frac{2}{3}$)이므로 $12a+8>4a^3$에서 최댓값은 $12a+8$

(ⅱ) 최솟값은 0 또는 $12a-8$인데

$0>12a-8$이므로 최솟값은 $12a-8$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$(12a+8)-(12a-8)=16$이다.

26 정답 ③

해설 상자의 부피를 $f(x)$라 할 때,

$f(x)=x(8-2x)(3-2x)=4x^3-22x^2+24x$

$f'(x)=12x^2-44x+24=4(3x^2-11x+6)$

$=4(x-3)(3x-2)=0$

이때 $0<x<\frac{3}{2}$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 동시에 최대이다.

27 정답 24

해설 도함수를 활용하여 실생활문제 해결하기

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$ 이므로

$x=3-\sqrt{3}$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

28 정답 $\frac{5}{3}$cm

해설 잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 $x$cm,

상자의 부피를 $V\text{cm}^3$라고 하면

$V=x(8-2x)(15-2x)=2(2x^3-23x^2+60x)$

(단, $0<x<4$)

$\therefore\ V'=2(6x^2-46x+60)=4(3x-5)(x-6)$

$V'=0$에서 $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=6$

즉, 구간 $(0,\ 4)$에서 증가와 감소 상태를 나타내는 표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	4
V'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
V	↗	↗	극대	↘	↘

따라서 상자의 부피 V는 $x=\frac{5}{3}$에서 극대이고 최대가 되므로

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 $\frac{5}{3}$cm로 하면 된다.

29 정답 ①

해설 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 a, 높이를 x라 하면
피타고라스 정리에 의하여
$a=\sqrt{36-x^2}$ (단, $0<x<6$)
사각기둥의 부피를 $V(x)$라 할 때
$V(x)=x\left(\sqrt{36-x^2}\right)^2=x(36-x^2)$
$V'(x)=(36-x^2)+x\cdot(-2x)$
$=-3x^2+36=-3(x^2-12)$
$=-3(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$
$V'(x)=0$에서 $x=2\sqrt{3}$ ($\because$ $0<x<6$)

x	(0)	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 넓이는
$a^2=36-(2\sqrt{3})^2=24$

30 정답 450

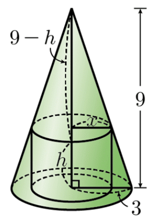
해설 잘라 낼 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면
잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면은
가로의 길이가 $21-2x$, 세로의 길이가 $16-2x$인
직사각형이므로
$21-2x>0$, $16-2x>0$
$\therefore x<8$
그런데 $x>0$이므로 $0<x<8$
상자의 부피를 $V(x)$라 하면
$V(x)=x(21-2x)(16-2x)$
$=4x^3-74x^2+336x$
$\therefore$ $V'(x)=12x^2-148x+336$
$=4(x-3)(3x-28)$
$V'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because$ $0<x<8$)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	8
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	450	$\searrow$	

따라서 상자의 부피의 최댓값은
$V(3)=3\cdot15\cdot10=450$

31 정답 2

해설 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x $(0<x<3)$, 높이를 h라 하면
$(9-h):x=9:3$
$3x=9-h$
$\therefore$ $h=9-3x$



원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면
$V(x)=\pi x^2h$
$=\pi x^2(9-3x)$
$=3\pi(-x^3+3x^2)$
$V'(x)=3\pi(-3x^2+6x)$
$=-9\pi x(x-2)$
$V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=2$
$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$V(2)$ 극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=2$에서 최대가 되므로 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 2이다.