고1	공통수학2	문항수
	함수 출처: 학력평 가 4점	10문제

1. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 7이다.
> (나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=42$
> (다) 함수 f의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X의 어떤 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

2. 집합 $X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $\{f(x)+x^2-5\} \times \{f(x)+4x\}=0$
> 이다.
> (나) $f(0) \times f(1) \times f(2) < 0$

$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$의 값을 구하시오.

3. 자집합 $X=\{2, 3\}$을 정의역으로 하는 함수 $f(x)=ax-3a$와 함수 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하고 집합 X를 공역으로 하는 함수 $g(x)=x^2+2x+b$가 있다. 함수 $g \circ f: X \to X$가 항등함수일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<2) \\ x^2-7x+16 & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 $(f \circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

5. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases}-x+4 & (x<-2)\\ f(x) & (-2\le x\le 1)\\ -x-2 & (x>1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $f(-2)+f(1)=3$

ㄴ. $g(0)=-1$, $g(1)=-3$이면 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면 $g^{-1}(1)=0$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) $x_1 \in X$, $x_2 \in X$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $1 \le x_1 < x_2 \le 4$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 역함수가 존재하지 않는다.

7. 두 실수 a, b와 두 함수

$f(x)=-x^2-2x+1$,

$g(x)=x^2-2x-1$

에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x+b) & (x \ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)만을 원소로 하는 집합을 A라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $(0, k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

ㄴ. $(-1, 4)\in A$

ㄷ. 집합 $\{m+b|(m, b)\in A$이고 m은 정수$\}$의 모든 원소의 합은 $5+\sqrt{3}$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수

$f(x)=|2x-4|\ (0 \le x \le 4)$

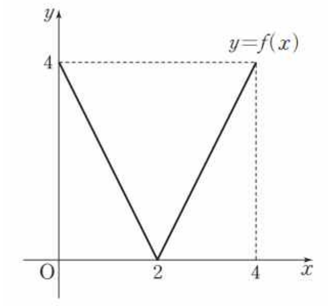
에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(f(1))=0$

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 8이다.



① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 정의역이 $\{x|x$는 $x \geq k$인 모든 실수$\}$이고,

공역이 $\{y|y$는 $y \geq 1$인 모든 실수$\}$인 함수

$f(x) = x^2 - 2kx + k^2 + 1$

에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① $\frac{7}{8}$

② 1

③ $\frac{9}{8}$

④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{11}{8}$

10. 집합 X={1, 2, 3, 4}에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> ㈎ 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x + f(f(x)) \leq 5$이다.
> ㈏ 함수 f의 치역은 $\{1,\ 2,\ 4\}$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(f(4)) = 1$
ㄴ. $f(3) = 4$
ㄷ. 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[공통수학2 내신대비 집합과 명제 정답 및 해설]

1. [정답] 7

조건 ㈎에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

조건 ㈏에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

$=1+2+3+4+5+6+7+8+n-m$

$=36+n-m=42$ 이므로 $n-m=6$

집합 X의 두 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음의 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때

함수 f의 치역은 {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}이다.

함수 f의 치역의 원소 중 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 그 차는 7이다. 이것은 조건 ㈐를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때

함수 f의 치역은 {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}이다.

함수 f의 치역의 원소 중 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 그 차는 6이다. 이것은 조건 ㈐를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n=7$

2. [정답] 26

$\{f(x)+x^2-5\}\times\{f(x)+4x\}=0$에서

$g(x)=-x^2+5$, $h(x)=-4x$라 하면

집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$f(x)=g(x)$또는 $f(x)=h(x)$이다.

$g(x)=h(x)$에서 $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$, $x=-1$

$g(-1)=h(-1)=4$이므로 $f(-1)=4$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(1)=g(-1)$

$f(1)=g(1)=4$라 하면 함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니므로

$f(1)=h(1)=-4$

$g(x)=-4$에서 $x^2=9$, $x=-3$

$f(-3)=g(-3)=-4$라 하면 함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니므로 $f(-3)=h(-3)=12$

$f(0)=h(0)=0$이라 하면 조건 ㈏를 만족시키지 않으므로

$f(0)=g(0)=5$

$f(0)\times f(1)\times f(2)<0$에서 $f(2)>0$

$h(2)=-8<0$이므로 $f(2)=g(2)=1$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(-2)=g(2)$

$f(-2)=g(-2)=1$이라 하면 함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니므로 $f(-2)=h(-2)=8$

따라서 $f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$

$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

3. [정답] 4

함수 $g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$에서 $g(f(2))=g(-a)=2$

$a^2-2a+b=2$ . . . . . . ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서 $g(f(3))=g(0)=3$ $\quad b=3$ . . . . . . ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2-2a+3=2$, $a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=1+3=4$

4. [정답] 6

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서

$f(a)=t$로 치환하면 $f(t)=t$

$t<2$일 때, $2t+2=t$에서 $t=-2$

$t\geq 2$일 때, $t^2-7t+16=t$, $(t-4)^2=0$에서 $t=4$

(ⅰ) $t=-2$인 경우

$f(a)=-2$에서

$a<2$일 때, $2a+2=-2$, $a=-2$

$a\geq 2$일 때, $a^2-7a+16=-2$, $a^2-7a+18=0$

$a^2-7a+18=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times 1\times 18=-23<0$

이므로 $a\geq 2$일 때, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $t=4$인 경우

$f(a)=4$에서

$a<2$일 때, $2a+2=4$, $a=1$

$a\geq 2$일 때, $a^2-7a+16=4$

$a^2-7a+12=0$, $(a-3)(a-4)=0$ $\quad a=3$ 또는 $a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $-2+1+3+4=6$

5. [정답] ⑤

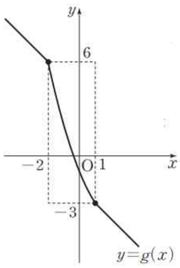
함수 $g(x)$가 일대일대응임을 알고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

{STEP 1} 함수 $g(x)$가 일대일대응이 되도록 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

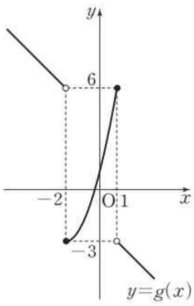
함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때



(ⅱ) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때



V

{STEP 2} (ⅰ), (ⅱ)를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄱ. (ⅰ), (ⅱ)에서 $f(-2)+f(1)=3$ (참)

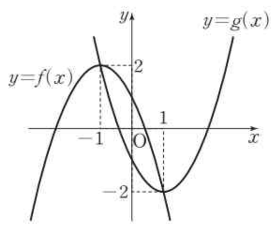
{STEP 3} ㄴ의 조건인 $g(0)=-1$, $g(1)=-3$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$, $g(1)=f(1)=-3$을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅰ)과 같다.
$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a>0$)이라 하면
$f(1)=-3$, $f(-2)=6$이어야 하므로
$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$
즉, $a+b=-2$, $4a-2b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$
따라서
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$$
이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)

{STEP 4} ㄷ의 조건인 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2임을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅱ)와 같다.

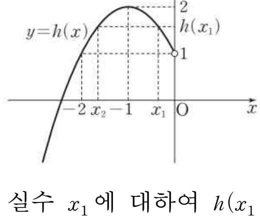
$f(x)=c(x+2)^2+d$ (c, d는 상수, $c>0$)이라 하면
$f(-2)=-3$, $f(1)=6$이어야 하므로
$d=-3$, $9c+d=6$에서 $c=1$
따라서 $f(x)=(x+2)^2-3$이고
$g(0)=f(0)=1$이므로
$g^{-1}(1)=0$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6. [정답] 510
조건 ㈎에 의하여 집합 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.
즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 선택하는 경우의 수는
${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$
조건 ㈏에 의하여 함수 f는 일대일대응이 아니다.
(ⅰ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중 하나의 값과 같을 때 $f(6)$의 값은 집합 X의 6개의 원소 중 임의의 값이 될 수 있으므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_6C_1=24$
(ⅱ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값과 다를 때 $f(6)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 하나의 값이 되어야 하므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_5C_1=10$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는 $15\times(24+10)=510$

7. [정답] ⑤
일대일대응과 일대일함수를 이용하여 문제를 해결한다.
{STEP 1} 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 함수 $y=h(x)$의 그래프를 추론해 본다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x<a$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x\ge a$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것과 같다.
ㄱ. $a=0$일 때
$x<0$에서 $h(x)=f(x)$이고,
$x<0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x_1<0$인 실수 x_1에 대하여 $h(x_1)=h(x_2)$이고,

$-2 < x_2 < -1$인 실수 x_2가 존재하므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다.

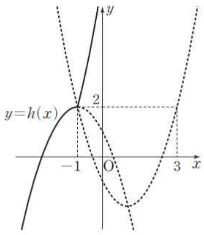
따라서 $(0,\ k) \in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $a=-1,\ b=4$일 때

함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} -(x+1)^2+2 & (x<-1) \\ (x+3)^2-2 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x_1 \neq x_2$인 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $h(x_1) \neq h(x_2)$이므로 함수 $h(x)$는 일대일함수이고, 함수 $h(x)$의 치역은 실수 전체의 집합으로 공역과 같다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 (-1, 4)$\in A$ (참)

{STEP 2} 일대일함수와 일대일대응을 이용하여 문제를 해결한다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 일대일함수이려면

$x<a$에서 $h(x)=f(x)$이므로 $a \leq -1$ . . . . . . ㉠

$x \geq a$에서 $h(x)=g(x+b)$이므로

$a+b \geq 1$ . . . . . . ㉡

이어야 하고, ㉠, ㉡을 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여

$\{h(x) | x<a\}=\{f(x) | x<a\}=\{y | y<f(a)\}$

$\{h(x) | x \geq a\}=\{g(x+b) | x \geq a\}=\{y | y \geq g(a+b)\}$

이므로 $f(a) \leq g(a+b)$이어야 한다.

일대일함수 $h(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(a)=g(a+b)$ . . . . . . ㉢

$g(x)=(x-1)^2-2 \geq -2$이므로

$f(a) \geq -2,\ (a+3)(a-1) \leq 0$

$-3 \leq a \leq 1$ . . . . . . ㉣

㉠, ㉣에 의하여 함수 $h(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 실수 a의 범위는 $-3 \leq a \leq -1$이고, $(m,\ b) \in A$를 만족시키는 실수 b가 존재하도록 하는 정수 m의 값은 -3, -2, -1이다.

(ⅰ) $m=-3$일 때

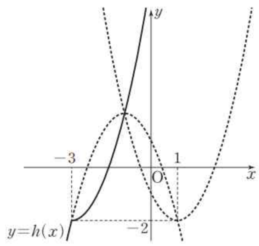
㉡에 의하여 $-3+b \geq 1,\ b \geq 4$

㉢에 의하여 $f(-3)=g(-3+b)$

$-2=(-3+b)^2-2(-3+b)-1$

$b^2-8b+16=0$

$b=4$이므로 $m+b=1$



(ⅱ) $m=-2$일 때

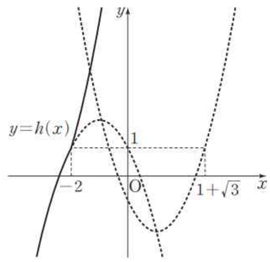
㉡에 의하여 $-2+b \geq 1,\ b \geq 3$

㉢에 의하여 $f(-2)=g(-2+b)$

$1=(-2+b)^2-2(-2+b)-1$

$b^2-6b+6=0$

$b=3+\sqrt{3}$이므로 $m+b=1+\sqrt{3}$



(ⅲ) $m=-1$일 때

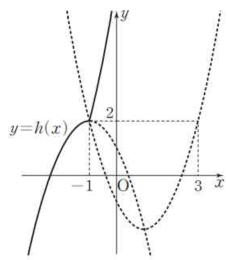
㉡에 의하여 $-1+b \geq 1,\ b \geq 2$

㉢에 의하여 $f(-1)=g(-1+b)$

$2=(-1+b)^2-2(-1+b)-1$

$b^2-4b=0$

$b=4$이므로 $m+b=3$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\{m+b \mid (m,\ b) \in A$이고 m은 정수$\}=\{1,\ 1+\sqrt{3},\ 3\}$

이므로 모든 원소의 합은

$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. [정답]⑤

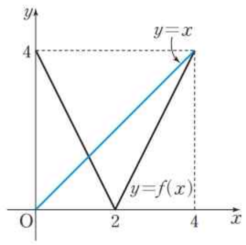
ㄱ. $f(1)=|2\times1-4|=|-2|=2$이므로

$f(f(1))=f(2)=|2\times2-4|=0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.

아래 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수

는 2이다. (참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면 방정식 $f(t)=t$를 만족시키는 해를 구해 보면

$|2t-4|=t$에서 $t=\frac{4}{3}$또는 $t=4$

즉, $f(x)=\frac{4}{3}$또는 $f(x)=4$

(ⅰ) $f(x)=\frac{4}{3}$인 경우

$|2x-4|=\frac{4}{3}$에서 $x=\frac{4}{3}$또는 $x=\frac{8}{3}$

(ⅱ) $f(x)=4$인 경우

$|2x-4|=4$에서 $x=0$또는 $x=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+0+4=8$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

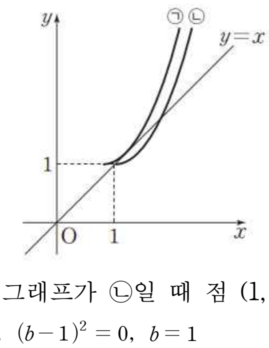
9. [정답] ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 $f(x)=x^2-2kx+k^2+1=(x-k)^2+1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 점 $(k,\ 1)$을 지난다.

아래 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉠과 같이 직선 $y=x$에 접할 때의 k의 값을 a, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉡과 같이 점 (1, 1)을 지날 때의 k의 값을 b라 하면 $a<k\le b$일 때 두 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 k의 최댓값은 b이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉡일 때 점 (1, 1)을 지나므로

$1-2b+b^2+1=1,\ (b-1)^2=0,\ b=1$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

10. [정답] ②

합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

{STEP 1} 조건 ㈎를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 조건 ㈎에 의하여 $f(f(4))\le 1$이므로

$f(f(4))=1$이다. (참)

{STEP 2} $f(4)$의 값이 1인 경우, 2인 경우, 4인 경우로 나누어 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. (ⅰ) $f(4)=1$일 때

$f(f(4))=f(1)=1$이므로 $f(1)=1$이다.

ⓐ $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 {1, 2, 4}가 될 수 없으므로 조건 ㈏를 만족시키지 않는다.

ⓑ $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 {1, 2, 4}이므로 $f(2)=4$이고 $f(f(3))=f(2)=4>2$가 되어 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

ⓒ $f(3)=4$이면 함수 f의 치역이 {1, 2, 4}이므로 $f(2)=2$이고 $f(f(1))=f(1)=1$, $f(f(2))=f(2)=2$, $f(f(3))=f(4)=1$이 되어 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $f(4)=2$일 때

$f(f(4))=f(2)=1$이므로 $f(2)=1$이다.

ⓐ $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 {1, 2, 4}이므로 $f(1)=4$이고 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

ⓑ $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 {1, 2, 4}이므로 $f(1)=4$이고 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

ⓒ $f(3)=4$일 때

$f(1)=1$이면 $f(f(1))=f(1)=1$, $f(f(2))=f(1)=1$, $f(f(3))=f(4)=2$가 되어 조건을 만족시킨다.

$f(1)=2$이면$f(f(1))=f(2)=1$, $f(f(2))=f(1)=2$, $f(f(3))=f(4)=2$가 되어 조건을 만족시킨다.

$f(1)=4$이면 $f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(4)=4$일 때

$f(f(4))=f(4)=4\ne 1$이므로 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 모든 함수 f에 대하여 $f(3)=4$이다. (참)

ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 함수 f의 개수는 3이다. (거짓)