기말고사 내신 대비-(유리무리함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2019년 3월 고2 이과 15번/4점]

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

02 [2018년 6월 고2 이과 16번/4점]

1보다 큰 실수 a에 대하여 직선 $x=a$가 두 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$, $y=-4x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

03 [2017년 9월 고2 이과 27번/4점]

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle ABC=90^\circ$인 점 C가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위에 있다. $\overline{AC}=2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>2\sqrt{2}$)

04 [2023년 11월 고1 16번/4점]

유리함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}-4$ $(a>1)$에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OBCA의 넓이가 24일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

05 [2024년 3월 고2 17번/4점]

두 양수 a, k에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+2,\ f(a+2))$가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은?

(가) 직선 PQ의 기울기는 -1이다.
(나) 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $8\sqrt{5}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

06 [2020년 3월 고2 19번/4점]

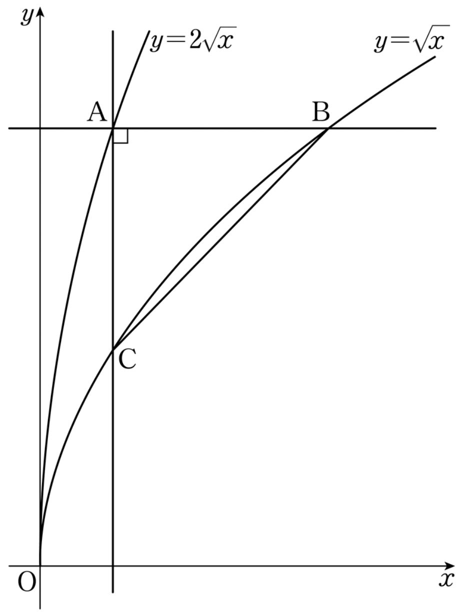
함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에 대하여

함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)

① $-\dfrac{25}{6}$ ② -4 ③ $-\dfrac{23}{6}$
④ $-\dfrac{11}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

07 [2018년 3월 고2 문과 17번/4점]

함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



① $\dfrac{1}{18}$ ② $\dfrac{1}{15}$ ③ $\dfrac{1}{12}$
④ $\dfrac{1}{9}$ ⑤ $\dfrac{1}{6}$

08 [2018년 3월 고2 이과 20번/4점]

좌표평면 위의 두 곡선

$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

<보기>

ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 16이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 [2025년 3월 고2 30번/4점]

실수 a $(a \neq 0)$과 2보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid x \neq 2$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x \geq n) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

> (가) $g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $\dfrac{3}{2}n$ 이다.
>
> (나) $g(|f(5)|)\cdot g(n)=6$

10 [2024년 3월 고2 30번/4점]

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}-b$라 하자. 함수 $g(x)=\begin{cases} |f(x)|+b & (x \leq a) \\ -f(-x+2a)+|b| & (x>a) \end{cases}$와 두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면 $h(\alpha)\cdot h(\beta)=4$
>
> (나) 방정식 $\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 최솟값은 -30, 최댓값은 15이다.

$\{g(150)\}^2$의 값을 구하시오.

11 [2023년 3월 고2 20번/4점]

함수 $f(x)=\begin{cases} -(x-a)^2+b & (x \leq a) \\ -\sqrt{x-a}+b & (x>a) \end{cases}$와 서로 다른 세 실수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 α, β, γ뿐이다.
>
> (나) $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$

$\alpha+\beta+\gamma=15$일 때, $f(\alpha+\beta)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

12 [2023년 3월 고2 30번/4점]

두 실수 a $(a<1)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-a}{x-1}+2 & (x \leq a) \\ bx(x-a)+1 & (x>a) \end{cases}$$라 하자.

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 모든 순서쌍이 (a_1, b_1), (a_2, b_2)일 때, $-40(a_1+b_1+a_2+b_2)$의 값을 구하시오.

> (가) $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-2)$이다.
>
> (나) 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

13 [2022년 3월 고2 18번/4점]

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}+b$ $(a \neq 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=|f(x)|$는 직선 $y=2$와 한 점에서만 만난다.
>
> (나) $f^{-1}(2)=f(2)-1$

$f(8)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\dfrac{1}{2}$　② $-\dfrac{1}{4}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

14 [2021년 3월 고2 30번/4점]

함수 $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ $(a>0,\ b\neq 0)$에 대하여

함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x+2a)+a & (x\geq a) \end{cases}$라 하자.

실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면, 상수 k에 대하여

$\{t\,|\,h(t)=1\}=\{t\,|\,-9\leq t\leq -8\}\cup\{t\,|\,t\geq k\}$이다.

$a\cdot b\cdot g(-k)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

15 [2020년 3월 고2 30번/4점]

함수 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(a\geq \dfrac{3}{2}\right)$에 대하여

집합 $\{x\,|\,x\geq 2\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x)\geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$$ 가 있다.

자연수 n에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(n)$이라 하자. $h(1)=h(3)<h(2)$일 때,

$g(4)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

기말고사 내신 대비-(유리무리함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ④	03 9
04 ⑤	05 ④	06 ④
07 ①	08 ④	09 68
10 36	11 ③	12 250
13 ①	14 192	15 13

기말고사 내신 대비-(유리무리함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

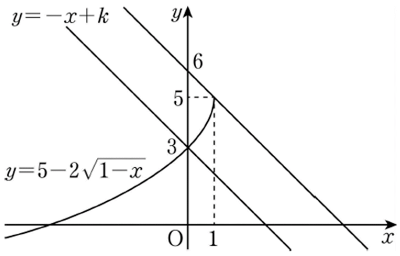
실시일자	-
15문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때의 k의 값은

$5=-1+k$에서 $k=6$

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표를 구하면

$y=5-2=3$

직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때의 k의 값은

$3=0+k$에서 $k=3$

따라서 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $3<k\le 6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $4+5+6=15$

02 정답 ④

해설 절대부등식을 이용하여 도형 문제 해결하기

$a>1$ 이고 두 점 P, Q의 좌표가 각각

$\left(a,\ \frac{1}{a-1}\right)$, $(a,\ -4a)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{a-1}+4a$이다.

이때 $a-1>0$이므로

$$4a+\frac{1}{a-1}=4(a-1)+\frac{1}{a-1}+4$$
$$\ge 2\sqrt{4(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+4$$
$$=4+4$$
$$=8$$

(단, 등호는 $a=\frac{3}{2}$일 때 성립)

이다. 따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 8이다.

03 정답 9

해설 유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\frac{2}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\frac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서

만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$ $(a\ne\sqrt{2})$라 하면

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{2}{a},\ a\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ 이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고

점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c,\ \frac{2}{c}\right)$라 하면

직선 BC의 기울기는 1이다.

$$\frac{\frac{2}{c}-a}{c-\frac{2}{a}}=\frac{-a}{c}=1,\ c=-a\text{이므로}$$

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a,\ -\frac{2}{a}\right)$

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\frac{2}{a}-\left(-\frac{2}{a}\right)\right\}^2$$
$$=4a^2+\frac{16}{a^2}=20$$

$$a^2+\frac{4}{a^2}=5$$

따라서 $k^2=\left(a+\frac{2}{a}\right)^2=a^2+\frac{4}{a^2}+4=9$

04 정답 ⑤

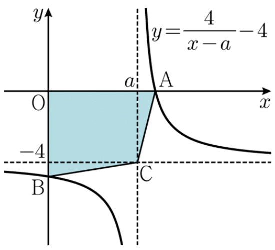
해설 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

유리함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$의 그래프의

두 점근선은 $x=a$, $y=-4$이고,

$\mathrm{A}(a+1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{4}{a}-4\right)$, $\mathrm{C}(a,\ -4)$이다.

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이를 S라 하면 S는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{CE}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(a+1)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{a}+4\right)\cdot a$$

$$=4a+4$$

$4a+4=24$에서

$a=5$

05 정답 ④

해설 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a+2,\ \dfrac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}}{a+2-a}=-1$$

$$\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}=-2,\ \frac{-2k}{a(a+2)}=-2$$

$\therefore\ k=a(a+2)$

$f(a)=\dfrac{k}{a}=a+2$, $f(a+2)=\dfrac{k}{a+2}=a$이므로

따라서 점 P의 좌표는 $(a,\ a+2)$, 점 Q의 좌표는 $(a+2,\ a)$

이때 조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a,\ -a-2)$, 점 S의 좌표는 $(-a-2,\ -a)$

따라서 직선 PS의 기울기는 $\dfrac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)}=1$이고,

직선 RS의 기울기는 $\dfrac{-a-(-a-2)}{-a-2-(-a)}=-1$,

직선 QR의 기울기는 $\dfrac{-a-2-a}{-a-(a+2)}=1$이므로

사각형 PQRS는 직사각형이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{\{-(a+2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}$$

$$=2\sqrt{2}(a+1)$$

즉, 사각형 PQRS의 넓이는

$2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(a+1)=8(a+1)=8\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}-1$이므로

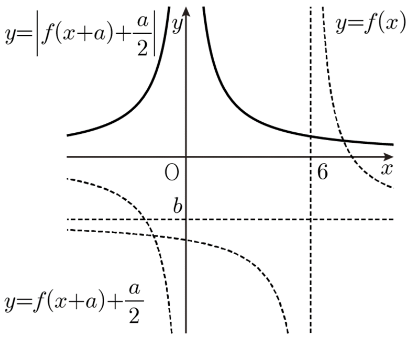
$k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

06 정답 ④

해설 평행이동을 이용하여 유리함수의 그래프를 추론한다.

곡선 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$는

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0,\ y=0$이어야 함을 알 수 있다.



이때 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에서

$f(x+a)+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+b+\dfrac{a}{2}$이고

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의 방정식은

$x=6-a,\ y=b+\dfrac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로

$6-a=0,\ b+\dfrac{a}{2}=0$

$\therefore\ a=6,\ b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=-\dfrac{11}{3}$

07 정답 ①

해설 무리함수의 그래프와 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a})$ $(a>0)$라 하면

$\mathrm{B}(4a,\ 2\sqrt{a}),\ \mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$가 된다.

직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌

두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $3a,\ \sqrt{a}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$3a=\sqrt{a}$

$9a^2=a$

$a\neq 0$이므로 $9a=1$

$a=\dfrac{1}{9}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(3a)^2=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}$

08 정답 ④

해설 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.

ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4$

$=-(\sqrt{-kx+2k}-4)$

$=-g(x)$

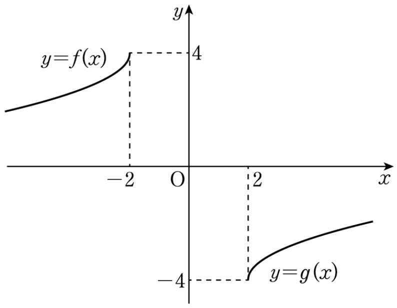
이므로 $g(x)=-f(-x)$

따라서 두 곡선

$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$는

원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $k<0$일 때,

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ⅱ) $k>0$일 때,

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고

k의 값이 커질수록

곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고

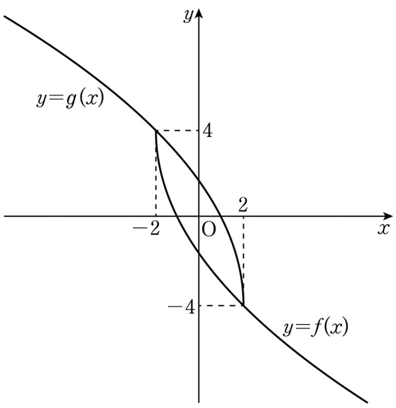
곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서

만나도록 하는 k의 최댓값은 그림과 같이

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의

점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$

$\sqrt{4k}=8,\ 4k=64$

따라서 $k=16$ (참)

09 정답 68

해설 함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\ge n) \end{cases}$$

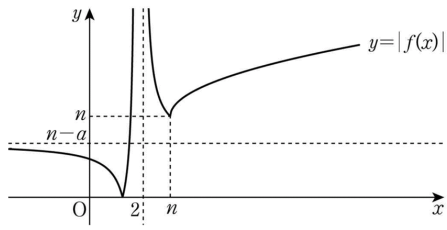
$$\frac{ax-an}{x-2}-n=\frac{a(x-2)+2a-an}{x-2}-n$$

$$=\frac{a(2-n)}{x-2}+a-n$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(2-n)}{x-2}+a-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\ge n) \end{cases}$$

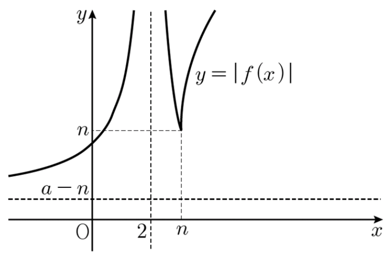
(ⅰ) $0<a<n$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,

$g(0)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

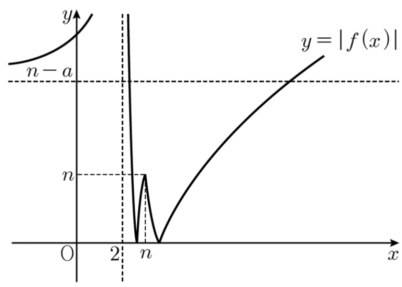
(ⅱ) $a>n$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,

$g(0)=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a<0$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, 이때

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } n<t\le n-a) \\ 3 & (t=n \text{ 또는 } t>n-a) \\ 4 & (0<t<n) \end{cases} \quad \cdots ㉠$$

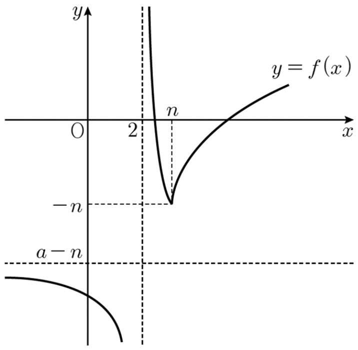
$g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0,

최댓값은 $n-a$이다. 조건 (가)에서

$n-a=\dfrac{3}{2}n$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}n$이고

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{n^2-2n}{2x-4}-\dfrac{3}{2}n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ \dfrac{1}{2}n\sqrt{x-n}-n & (x\ge n)\end{cases}$

조건 (나)에서 $g(n)=3$이므로 $g(|f(5)|)=2$



$f(5)<0$인 경우 $-n<f(5)<0$이므로 ㉠에서 $g(|f(5)|)=4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ f(5)\ge 0$

즉, ㉠에서 $f(5)=0$ 또는 $n<f(5)\le\dfrac{3}{2}n$

(a) $f(5)=0$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n=0$

$2n=n\sqrt{5-n}$

$2=\sqrt{5-n}$

$n=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n=\dfrac{1}{6}n(n-11)=0$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 11이다.

(b) $n<f(5)\le\dfrac{3}{2}n$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n$이므로

$n<\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n\le\dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\le\dfrac{3}{2}$

$4<\sqrt{5-n}\le 5$

그런데 $2<n\le 5$에서 $\sqrt{5-n}<\sqrt{3}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n$

$=\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n$

$n<\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n\le\dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{6}n-\dfrac{11}{6}\le\dfrac{3}{2}$

$6<n-11\le 9$

$17<n\le 20$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 $18,\ 19,\ 20$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값은 $11,\ 18,\ 19,\ 20$이고 그 합은

$11+18+19+20=68$

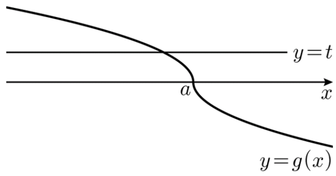
10 정답 36

해설 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $b\le 0$일 때

$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+a} & (x\le a)\\ -\sqrt{x-a} & (x>a)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



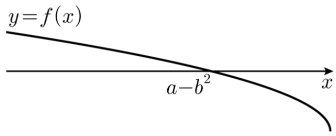
그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 항상 1이므로 $h(t)=1$

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b>0$일 때

$0=\sqrt{-x+a}-b$에서 $x=a-b^2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$x\le a-b^2$이면 $f(x)\ge 0$이므로

$g(x)=|f(x)|+b=f(x)+b=\sqrt{-x+a}$

$a-b^2<x\le a$이면 $f(x)<0$이므로

$g(x)=|f(x)|+b$

$\quad=-f(x)+b=-\sqrt{-x+a}+2b$

$x>a$일 때

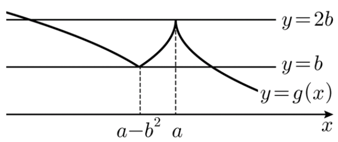
$g(x)=-f(-x+2a)+|b|$

$\quad=-\sqrt{-(-x+2a)+a}+b+|b|$

$\quad=-\sqrt{x-a}+2b$

그러므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

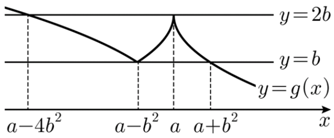
$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+a} & (x\le a-b^2)\\ -\sqrt{-x+a}+2b & (a-b^2<x\le a)\\ -\sqrt{x-a}+2b & (x>a)\end{cases}$



$h(t)\le 3$이고 $h(\alpha)\cdot h(\beta)=4$에서

$h(\alpha)=h(\beta)=2$이므로 조건 (가)를 만족시키는 실수 $\alpha,\ \beta$의 값은 $\alpha=b,\ \beta=2b$이다.

조건 (나)에서 x에 대한 방정식
$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근은
함수 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\alpha$, $y=\beta$의
교점의 x좌표이므로 방정식의 서로 다른 실근의
개수는 4이다.
그러므로 x에 대한 방정식
$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근 중
최솟값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2b$의
교점의 x좌표 중 a가 아닌 값이고, 최댓값은
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b$의 교점의
x좌표 중 $a-b^2$이 아닌 값이다.
즉, $-30<a-b^2<a<15$이고,
$g(-30)=2b$, $g(15)=b$이다.



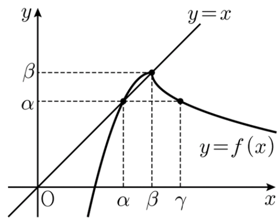
$g(-30)=2b$에서
$\sqrt{30+a}=2b$, $30+a=4b^2$
$a-4b^2=-30$ $\cdots$ ㉠
$g(15)=b$에서
$-\sqrt{15-a}+2b=b$
$-\sqrt{15-a}=-b$, $15-a=b^2$
$a+b^2=15$ $\cdots$ ㉡
이므로 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=6$, $b=3$이고

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+6} & (x\le -3)\\ -\sqrt{-x+6}+6 & (-3<x\le 6)\\ -\sqrt{x-6}+6 & (x>6)\end{cases}$$

$\therefore\ \{g(150)\}^2=(-\sqrt{150-6}+6)^2=36$

11 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.
방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ $\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이고
조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 α, β, γ뿐이므로
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고
방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이거나
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고
방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ이다.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이고
방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐인 경우를 생각하자.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α, γ이므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$는 두 점에서 만나고
두 교점의 x좌표는 각각 α, γ이다.
또, 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$는 오직 한 점에서 만나고
이 점의 x좌표는 β이다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 x축에 평행한 직선이 오직
한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이어야
한다.
따라서 점 $(a,\ b)$는 $(\beta,\ \beta)$와 일치한다.
즉, $a=b=\beta$ $\cdots$ ㉡
또, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이므로 곡선 $y=f(x)$와
직선 $y=x$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$에서 만난다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x$에서 $-(x-a)^2+b=x$
㉡에서 $-(x-\beta)^2+\beta=x$
$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0$
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$
$\therefore\ x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\alpha\neq\beta$이므로
$\alpha=\beta-1$
$f(\gamma)=\alpha$이고 $\gamma>\beta=a$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha$
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$, $\sqrt{\gamma-\beta}=1$
$\therefore\ \gamma=\beta+1$
이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$, $3\beta=15$
$\therefore\ \beta=5$
$\alpha=\beta-1=4$, $\gamma=\beta+1=6$
따라서 ㉡에서 $a=b=5$이고

$$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\le 5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$$이므로

$f(\alpha+\beta)=f(9)$
$=-\sqrt{9-5}+5=3$
또, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고
방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β, γ인 경우에도
같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$이다.

12 정답 250

해설 이차함수와 유리함수의 그래프를 추론하여 미지수의 값을 구한다.
$a<1$, 즉 $1-a>0$이므로
$x\le a$에서 함수 $f(x)=\dfrac{1-a}{x-1}+2$는 x의 값이
커지면 y의 값은 작아진다. $\cdots$ ㉠
이때 $x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는
직선 $y=2$를 점근선으로 가지므로
$x\le a$이면 $f(a)\le f(x)<2$ $\cdots$ ㉡

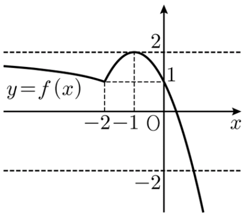
조건 (가)에 의하여 $x \le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이므로 a의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $-2<a<1$인 경우
㉠에서 $f(-2)>f(a)$가 되어
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$인 경우

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+2 & (x \le -2) \\ bx(x+2)+1 & (x>-2) \end{cases}$$

㉠에서 $x \le -2$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x) \ge f(-2)$
$f(-2)=f(0)=1$이고
$-2<x \le 0$에서 $f(x)=bx(x+2)+1$이므로
조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$이어야 한다.
또, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가
직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와
함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-2$와
만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.
㉡에서 $f(-2)=1 \le f(x)<2$이므로
$x \le -2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는
직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.
$x>-2$에서 함수 $f(x)=bx(x+2)+1$ $(b<0)$의 그래프는 직선 $y=-2$와 한 점에서 만난다.
따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 1]과 같이
함수 $f(x)=bx(x+2)+1$의 그래프는
직선 $y=2$에 접해야 한다.



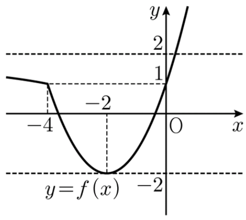
[그림 1]

함수 $f(x)=bx(x+2)+1$은 $x=-1$에서
최대이므로 $f(-1)=2$
$f(-1)=b\cdot(-1)\cdot 1+1=2$에서
$b=-1$
따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $(-2,\ -1)$이다.

(iii) $a<-2$인 경우
$f(a)=f(0)=1$이고 ㉠, ㉡에서
$x \le a$일 때 $1 \le f(x)<2$
$a<x \le 0$에서 $f(x)=bx(x-a)+1$이므로
조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는
$x=-2$에서 최소이어야 한다.
따라서 $b>0$이고 $\dfrac{a}{2}=-2$이어야 한다.
$a=-4$이고 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-1}+2 & (x \le -4) \\ bx(x+4)+1 & (x>-4) \end{cases}$$

또, ㉡에서
$f(-4)=1 \le f(x)<2$이므로
$x \le -4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는
직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.
$x>-4$에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의
그래프는 직선 $y=-2$와 한 점에서 만난다.
따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림2]와 같이
$x>-4$에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의
그래프는 직선 $y=-2$에 접해야 한다.



[그림 2]

함수 $f(x)=bx(x+4)+1$은 $x=-2$에서
최소이므로 $f(-2)=-2$
$f(-2)=b\cdot(-2)\cdot 2+1=-2$에서
$b=\dfrac{3}{4}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-4,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$는
$(-2,\ -1)$, $\left(-4,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다.

$\therefore\ -40(a_1+b_1+a_2+b_2)$

$$=-40\cdot\left\{-2+(-1)+(-4)+\frac{3}{4}\right\}=250$$

13 정답 ①

해설 유리함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.
곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로
두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.
이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로
$b=2$ 또는 $b=-2$ ⋯ ㉠
$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$, 즉 $y=\dfrac{a}{x}+b$에서
$\dfrac{a}{x}=y-b$, $x=\dfrac{a}{y-b}$
이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{a}{x-b}$
$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{a}{x-b}$
조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로
$\dfrac{a}{2-b}=\dfrac{a}{2}+b-1$ ⋯ ㉡
㉡에서 $b\neq 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$이다.
㉡에 $b=-2$를 대입하면
$\dfrac{a}{4}=\dfrac{a}{2}-3$
$\therefore\ a=12$
따라서 $f(x)=\dfrac{12}{x}-2$이므로
$f(8)=\dfrac{12}{8}-2=-\dfrac{1}{2}$

14 정답 192

해설 유리함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
$f(x)=\dfrac{bx}{x-a}=\dfrac{ab}{x-a}+b$
곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로
곡선 $y=f(x+2a)+a$는 곡선 $y=f(x)$를
x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로
곡선 $y=f(x+2a)+a$의 점근선의 방정식은
$x=a-2a=-a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$, $y=b+a$
$\{t\,|\,h(t)=1\}=\{t\,|\,-9\le t\le -8\}\cup\{t\,|\,t\ge k\}$ ⋯ ㉠
를 만족시키는 경우를 찾아보자.
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 $h(t)$이므로
집합 $\{t\,|\,h(t)=1\}$은 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 집합을 나타낸다.
따라서 ㉠은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 t의 값의 범위는 $-9\le t\le -8$ 또는 $t\ge k$임을 나타낸다.
(ⅰ) $b>0$인 경우
$ab>0$, $b+a>b>0$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $t<b$ 또는 $b+a<t\le g(a)$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $b<0$인 경우
$ab<0$이고 $b<b+a$이다.
이때 $g(a)=f(3)+a=\dfrac{3}{2}b+a$ ⋯ ㉡
이므로 다음의 경우로 나누어 살펴보자.
(a) $b<g(a)$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는
$b<t<g(a)$ 또는 $t\ge b+a$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.
(b) $b=g(a)$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는
$t=g(a)$ 또는 $t\ge b+a$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.
(c) $b>g(a)$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는
$g(a)\le t\le b$ 또는 $t\ge b+a$이다.
따라서 ㉠을 만족시키기 위해서는
$g(a)=-9$, $b=-8$, $b+a=k$이어야 한다.
이때 ㉡에서 $g(a)=\dfrac{3}{2}\cdot(-8)+a=-9$이므로 $a=3$
$\therefore\ k=b+a=-5$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{24}{x-3}-8 & (x<3)\\ -\dfrac{24}{x+3}-5 & (x\ge 3)\end{cases}$$ 이므로
$g(-k)=g(5)=-8$
$\therefore\ a\cdot b\cdot g(-k)=3\cdot(-8)\cdot(-8)=192$

15 정답 13

해설 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(a\ge\dfrac{3}{2}\right)$에서
$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}(x-2)^2+\dfrac{3}{a}\,(x\ge 2)$이다.
함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우})\\ f^{-1}(x) & (f(x)\ge f^{-1}(x)\text{인 경우})\end{cases}$ 는

$x \ge 2$인 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이다.
$f(x) < f^{-1}(x)$인 경우 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1이다.
따라서 $f(x) \ge f^{-1}(x)$일 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수와 이에 따른 $h(n)$은 다음과 같다.
(i) 교점의 개수가 1인 경우
(a) 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하는 경우
$\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}=x-n$에서
$x^2-(a+4)x+an+7=0$
x에 대한 이차방정식
$x^2-(a+4)x+an+7=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(a+4)\}^2-4(an+7)=0$
$a^2+8a-12-4an=0$이므로
$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$
(b) 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 아랫부분에 있는 경우,
x좌표가 2일 때 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$보다 크므로 $\frac{3}{a}<2-n$,
$n<2-\frac{3}{a}$
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1인 자연수 n의 값의 범위는 $n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ 또는 $n<2-\frac{3}{a}$이고 $h(n)=2$
(ii) 교점의 개수가 2인 경우, 즉 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 윗부분에 있고, 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$을 지나거나 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인 $-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 작으므로
$-n>-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$, $n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2인 자연수 n의 값의 범위는
$2-\frac{3}{a} \le n < 2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$이고
이때 $h(n)=3$이다.
(iii) 교점이 없는 경우, 즉 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 아랫부분에 있는 경우
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인
$-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 크므로 $-n<-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$,
$n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 점이 없는 자연수 n의 값의 범위는 $n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$이고 이때 $h(n)=1$이다.
(i), (ii), (iii)에서

$$h(n)=\begin{cases} 2 & \left(0<n<2-\frac{3}{a}\right) \\ 3 & \left(2-\frac{3}{a} \le n < 2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \\ 2 & \left(n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \\ 1 & \left(n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \end{cases}$$

$h(1)=h(3)<h(2)$를 만족시키려면 $h(1)=2$, $h(3)=2$, $h(2)=3$이어야 한다.
즉, $0<1<2-\frac{3}{a}$ $\cdots$ ㉠
$2-\frac{3}{a} \le 2 < 2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ $\cdots$ ㉡
$3=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ $\cdots$ ㉢
㉢에서 $\frac{a}{4}-\frac{3}{a}-1=0$, $a^2-4a-12=0$, $a=-2$ 또는 $a=6$
이때 $a \ge \frac{3}{2}$이므로 $a=6$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면
$0<1<2-\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$이므로 ㉠을 만족시키고, ㉡에 대입하면 $2-\frac{3}{6} \le 2 < 2-\frac{3}{6}+\frac{6}{4}$, $\frac{3}{2} \le 2 < 3$이므로 ㉡을 만족시킨다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는 $a=6$일 때인

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-3} & (f(x)<f^{-1}(x) \text{인 경우}) \\ \frac{1}{6}(x-2)^2 & (f(x) \ge f^{-1}(x) \text{인 경우}) \end{cases}$$ 이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 k라 하면
$\frac{1}{6}(k-2)^2+\frac{1}{2}=k$, $k^2-10k+7=0$

$k>2$이므로 $k=5+3\sqrt{2}$

따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{6x-3}+2 & (x>5+3\sqrt{2}) \\ \frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2} & (2\le x\le 5+3\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로 $g(4)=\frac{1}{6}(4-2)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로 $p+q=13$