교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (도함수의 활용_중단원)102~105p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -5　② 1　③ 6
④ 11　⑤ 16

02 함수 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+10$이 극솟값을 갖는 모든 x의 값의 합을 구하시오.

03 함수 $f(x)=x^4+4x^3-20x^2+5$가 극솟값을 갖는 모든 x의 값의 합을 구하시오.

04 방정식 $x^3-3x-4=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

05 방정식 $2x^4-4x^2+3=0$의 서로 다른 실근은 몇 개인가?

① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

06 방정식 $3x^4-6x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

07 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-6t$로 주어질 때, $t=3$에서의 속도를 a, 가속도를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 18
② 21
③ 23
④ 39
⑤ 41

08 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-9t^2+24t$이고, 점 P는 출발 후 운동 방향을 두 번 바꾼다. 운동 방향을 바꾸는 순간의 위치를 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하시오.

09 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 극솟값 4를 갖고, $x=0$에서 극댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① $\frac{15}{2}$ ② 7 ③ $\frac{13}{2}$
④ 6 ⑤ 5

10 [2024년 10월 고3 7번 변형]
상수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3+3x^2-24x+k$의 극솟값이 -12일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 84 ② 88 ③ 92
④ 96 ⑤ 100

11 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=ax^3-9ax^2+5$의 최솟값이 -49일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

12 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서
함수 $f(x)=2x^3-21x^2+72x+a$의 최댓값이 60일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

13 곡선 $y=2x^3-6x^2-15x$와 직선 $y=3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

14 [2019년 9월 고3 문과 27번 변형]
곡선 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+7x+2$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

15 두 함수 $f(x)=x^3-2x+4$, $g(x)=x+k$에 대하여 구간 $[0, 2]$에서 $f(x) \geq g(x)$가 성립하는 k의 범위에 속하는 자연수의 개수를 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

16 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+x$, $g(x)=x^2+x+a$에 대하여 구간 $[0, 3]$에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하도록 하는 상수 a의 최댓값을 구하시오.

17 $-1 \leq x \leq 2$ 의 삼차부등식 $4x^3-12x+a \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 a 의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

18 $x>0$에서 부등식 $2x^3+3x^2 \geq 12x+k$가 성립할 때, 상수 k의 최댓값을 구하시오.

19 직선 선로를 달리고 있는 어느 열차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리가 $x\,\mathrm{m}$일 때, $x=6t-1.5t^2$인 관계가 성립한다. 이때 열차가 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리를 구하시오.

20 직선 철로를 달리는 어떤 기차가 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 $x\,\mathrm{m}$이라 하면 $x=20t-0.5t^2$이다. 이 기차가 목적지에 정확히 정지하려면 목적지로부터 전방 $a\,\mathrm{m}$의 지점에서 제동을 걸어야 한다고 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

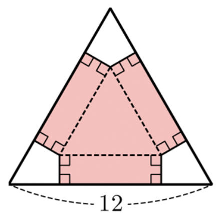
21 함수 $f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+5$가 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 항상 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\alpha\le a\le\beta$이다. 상수 $\alpha,\ \beta$의 합 $\alpha+\beta$의 값은?

① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

22 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2-(a-6)x+1$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 항상 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\alpha\le a\le\beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값은?

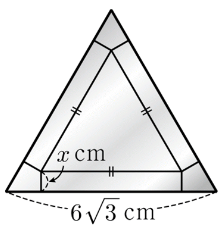
① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

23 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 모양의 종이의 세 귀퉁이에서 합동인 사각형 모양을 잘라내어 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값은?

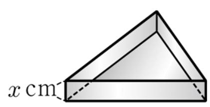


① 24　② 28　③ 32
④ 36　⑤ 40

24 한 변의 길이가 $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$인 정삼각형의 함석조각의 세 귀퉁이를 [그림 1]과 같이 잘라서 [그림 2]처럼 밑변이 정삼각형인 용기를 만들려 한다. 이때 부피를 최대로 하는 용기의 높이 x를 구하시오.



[그림 1]



[그림 2]

25 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
방정식 $|f(x)|=16$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(1)$의 값은?

① -13　② -12　③ -11
④ -10　⑤ -9

26 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
방정식 $|f(x)|=6\sqrt{3}$의 실근의 개수가 4일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (도함수의 활용_중단원)102~105p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 1	03 -3
04 1	05 ①	06 4
07 ④	08 4	09 ⑤
10 ④	11 1	12 -21
13 -540	14 18	15 ④
16 -4	17 ④	18 -7
19 $6\,\mathrm{m}$	20 200	21 ④
22 ②	23 ③	24 $1\,\mathrm{cm}$
25 ③	26 -10	

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 (도함수의 활용_중단원)102~105p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 속도와 가속도

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$에서
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값
$f(-1)=7$을 가지므로
$a=-1,\ b=7$
$\therefore\ a+b=6$

02 정답 1

해설 $f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}x^3-12x^2+10$에서
$f'(x)=4x^3-4x^2-24x=4x(x+2)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{34}{3}$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-53	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2,\ x=3$에서 극솟값을 가지므로
모든 x의 값의 합은
$-2+3=1$

03 정답 -3

해설 $f(x)=x^4+4x^3-20x^2+5$에서
$f'(x)=4x^3+12x^2-40x=4x(x+5)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-370	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

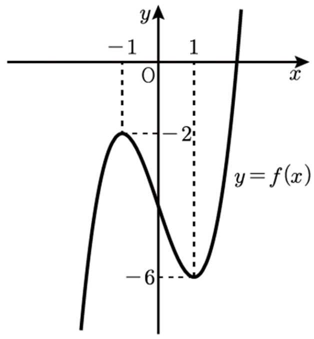
함수 $f(x)$는 $x=-5,\ x=2$에서 극솟값을 가지므로
모든 x의 값의 합은
$-5+2=-3$

04 정답 1

해설 $f(x)=x^3-3x-4$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



05 정답 ①

해설 $f(x)=2x^4-4x^2+3$ 이라 하면
$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)$
$=8x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로 아래 증감표에 의하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$

이 함수의 최댓값은 존재하지 않고 최솟값은 1 이 된다. 따라서, 이 함수는 실근을 가지지 않는다.

06 정답 4

해설 $f(x)=3x^4-6x^2+2$라 하면

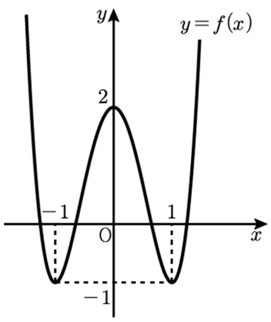
$f'(x)=12x^3-12x=12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



07 정답 ④

해설 $x=t^3-6t$

속도 : $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6$,

가속도 : $\alpha=\dfrac{dv}{dt}=6t$ 이므로,

$a=v_{t=3}=27-6=21$,

$b=\alpha_{t=3}=18$

$\therefore\ a+b=21+18=39$

08 정답 4

해설 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$일 때 점 P의 위치는 20이고, $t=4$일 때 점 P의 위치는 16이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 4이다.

09 정답 ⑤

해설 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때 $f'(1)=f'(0)=0$이므로

$f'(x)=6x(x-1)$

$\therefore\ a=-3,\ b=0$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+c$이고,

$f(1)=4$이므로

$f(x)=2x^3-3x^2+5$

$\therefore\ f(0)=5$

10 정답 ④

해설 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=k-28=-12$이므로

$k=16$, 즉 $f(x)=x^3+3x^2-24x+16$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-4)=96$

11 정답 1

해설 $f'(x)=3ax^2-18ax=3ax(x-6)$

닫힌구간 $[-1,3]$에서의 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-10a+5$	↗	5	↘	$-54a+5$

이때 $a>0$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $-54a+5$이다.

따라서 $-54a+5=-49$이므로

$a=1$

12 정답 -21

해설 $f(x)=2x^3-21x^2+72x+a$에서

$f'(x)=6x^2-42x+72$

$=6(x-3)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	$a+81$	↘	$a+80$

이때 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)=a+81$이므로

$a+81=60$

$\therefore\ a=-21$

13 정답 -540

해설 $y=2x^3-6x^2-15x=3x+k$에서

$2x^3-6x^2-18x=k$이므로

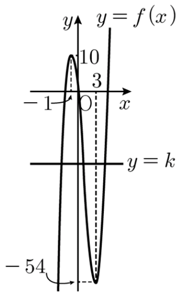
$f(x)=2x^3-6x^2-18x$라 하면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	-54	↗



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은

$k=-54$ 또는 $k=10$

따라서 실수 k의 값의 곱은

$-54\cdot10=-540$

14 정답 18

해설 $x^3-\frac{9}{2}x^2+7x+2=x+k$에서

$x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+2=k$ $\cdots$ ㉠

따라서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-9x+6$이므로 $f'(x)=0$에서

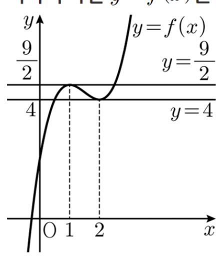
$3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	4	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 ㉠이 서로 다른 두 실근만을 갖기 위해서는

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서만 만나야 한다.

즉, $k=\frac{9}{2}$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $\frac{9}{2}\cdot4=18$

15 정답 ④

해설 $f(x)\geq g(x)$에서

$x^3-3x+4\geq k$이고

구간 $[0,2]$에서 함수 $h(x)=x^3-3x+4$의 최솟값은

$h'(1)=0$이므로 $h(1)=2$가 된다.

$\therefore 2\geq k$

16 정답 -4

해설 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(x^3-2x^2+x)-(x^2+x+a)=x^3-3x^2-a$
$\therefore h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
즉, 구간 $[0, 3]$에서 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	

위의 증감표에 의하여 $h(x)$는 구간 $[0, 3]$에서
$x=2$일 때 극소이면서 최소이므로
$h(2)=8-12-a\geq 0$ $\therefore a\leq -4$
따라서 a의 최댓값은 -4이다.

17 정답 ④

해설 $f(x)=4x^2-12x+a$ 로 놓으면
$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$a-8$ (극소)	↗	

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로
최솟값은 $a-8$ 이다.
이때, $-1\leq x\leq 2$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면
$(f(x)$의 최솟값$)\geq 0$이어야 한다.
즉, $a-8\geq 0$, $a\geq 8$
따라서 실수 a 의 최솟값은 8 이다.

18 정답 -7

해설 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$라 놓으면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ $(\because x>0)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이고 최소이다.
이때 최솟값은 $f(1)=-7-k$
최솟값이 0 이상이어야 하므로 $-7-k\geq 0$에서
$k\leq -7$, 즉 k의 최댓값은 -7이다.

19 정답 6m

해설 열차가 제동을 건 후 t초 후의 속도 $v(t)$는
$v(t)=6-3t$
열차가 정지할 때의 속도는 $v(t)=0$이므로
$6-3t=0$
$\therefore t=2$
따라서 제동을 건 후 2초 동안 열차가 움직인 거리는
$6\cdot 2-1.5\cdot 2^2=6(\mathrm{m})$

20 정답 200

해설 위치가 $x=20t-0.5t^2$이므로
시각 t에서의 속도 $v(t)$는
$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=20-t$
한편, 기차가 정지할 때의 속도는 0이므로
$v(t)=0$에서 $t=20$
즉, 기차가 정지할 때까지 걸리는 시간은 20초이므로
20초 동안 움직인 거리는
$20\cdot 20-0.5\cdot 20^2=200(\mathrm{m})$
따라서 목적지에 정확히 정지하려면 목적지로부터
전방 200m의 지점에서 제동을 걸어야 한다.
$\therefore a=200$

21 정답 ④

해설 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상
$f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
$f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+5$에서
$f'(x)=3x^2-2ax+a+6$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-3(a+6)\leq 0$
$a^2-3a-18\leq 0$, $(a+3)(a-6)\leq 0$
$\therefore -3\leq a\leq 6$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=6$이므로
$\alpha+\beta=-3+6=3$

22 정답 ②

해설 $x_1 < x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1) < f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - (a-6)x + 1$에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax - (a-6)$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대해 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4} = a^2 + a - 6 \leq 0, \quad (a+3)(a-2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq a \leq 2$

따라서 $\alpha = -3$, $\beta = 2$이므로

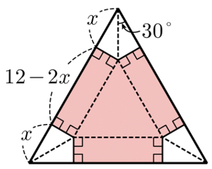
$\alpha + \beta = -1$

23 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터의 거리가 x 인 부분까지 자른다고 하면 뚜껑이 없는 삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이가 $12-2x$ 이므로 x의 값의 범위는

$0 < 12 - 2x < 12$

$\therefore 0 < x < 6$



이때 뚜껑이 없는 삼각기둥의 밑넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2$, 높이는

$x\tan 30° = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 이므로

이 상자의 부피를 $V(x)$ 로 놓으면

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$= x^3 - 12x^2 + 36x$$

$V'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x-2)(x-6)$

$V'(x) = 0$ 에서 $x = 2$ ($\because$ $0 < x < 6$)

$V'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

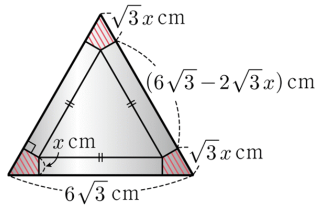
x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	↗

따라서 $x = 2$일 때 $V(x)$ 는 극대이면서 최대이므로 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자의 부피의 최댓값은

$V(2) = 8 - 48 + 72 = 32$

24 정답 1 cm

해설 용기의 부피를 x의 함수 $V(x)$라 하자.



(밑면의 한 변의 길이)$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$

$= 2\sqrt{3}(3-x)$(cm)

(밑면의 넓이)$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12(3-x)^2$

$= 3\sqrt{3}(3-x)^2$(cm^2)

따라서 $V(x) = 3\sqrt{3}(3-x)^2 x$(cm^3)이므로

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}V'(x)\right) = 2(3-x)(-1)x + (3-x)^2$$

$$= (3-x)(-2x+3-x)$$

$$= (3-x)(3-3x)$$

$$= 3(3-x)(1-x) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 3$

한편, 밑면의 한 변은 양수이고 높이도 양수이므로 $6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x > 0$, $x > 0$에서 변수 x의 범위는 $0 < x < 3$이다.

이 범위에서 도함수의 부호를 조사하면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$V'(x)$	$27\sqrt{3}$	+	0	−	0
$V(x)$		↗	$12\sqrt{3}$	↘	

$x = 1$에서 도함수의 부호가 양에서 음으로 변하므로 함수 $V(x)$는 단 하나의 극댓값을 갖는다.

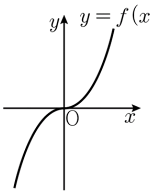
또한, $V(0) = 0$, $V(3) = 0$이므로

극댓값은 최댓값과 같다.

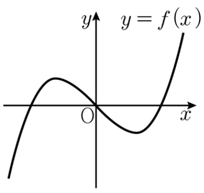
$\therefore x = 1$(cm)

25 정답 ③

해설 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

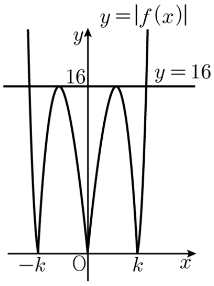


[그림 1]



[그림 2]

이때 방정식 $|f(x)|=16$의 서로 다른 실근의 개수가 4이기 위해서는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=16$이 다음 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프의 0이 아닌 x절편을 각각 $-k$, k $(k>0)$라 하면

$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$이므로

$f'(x)=3x^2-k^2=(\sqrt{3}x+k)(\sqrt{3}x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$에서 극댓값 16을 갖고,

$x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 -16을 가지므로

$f\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}}\right)=-16$, $\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}}\right)^3-k^2\cdot\dfrac{k}{\sqrt{3}}=-16$

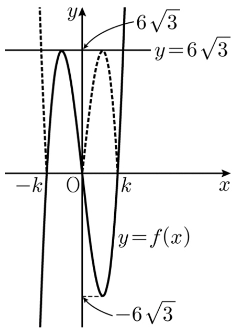
$k^3=24\sqrt{3}$ $\qquad\therefore k=2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로

$f(1)=1-12=-11$

26 정답 -10

해설 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$를 만족시키고 방정식 $|f(x)|=6\sqrt{3}$의 실근의 개수가 4이려면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$ $(k>0)$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-k^2=(\sqrt{3}x+k)(\sqrt{3}x-k)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 $-6\sqrt{3}$을 가지므로 $f\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}}\right)=-6\sqrt{3}$에서

$\dfrac{k^3}{3\sqrt{3}}-\dfrac{k^3}{\sqrt{3}}=-6\sqrt{3}$, $k=3$

따라서 $f(x)=x^3-9x$이므로 $f(2)=-10$