마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 273~298p

유리함수의 그래프

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 유리함수 $y=\dfrac{5}{x}$ $(x>0)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리가 6일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

02 [2023년 11월 고1 16번 변형]

유리함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-a}-6$ $(a>1)$에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OBCA의 넓이가 20일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 3　② $\dfrac{7}{2}$　③ 4　④ $\dfrac{9}{2}$　⑤ 5

03 [2018년 11월 고2 문과 13번 변형]

유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-k}$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=2x$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k\neq-\dfrac{1}{2}\right)$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

04 함수 $f(x)=\dfrac{bx}{ax-1}$의 정의역과 치역이 같다. 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점이 직선 $y=-3x+5$ 위에 있을 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

① $\dfrac{5}{11}$　② $\dfrac{5}{9}$　③ 0　④ $\dfrac{9}{5}$　⑤ $\dfrac{11}{5}$

05 함수 $f(x)=\dfrac{a}{2x+4}-b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+2a)-\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $a+f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)

① $-\dfrac{11}{5}$　② $-\dfrac{17}{10}$　③ $-\dfrac{6}{5}$　④ $-\dfrac{7}{10}$　⑤ $-\dfrac{1}{5}$

06 분모, 분자가 일차식인 유리식 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 조건을 모두 만족한다. 이때 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

> (가) 점 $(-1, 3)$에 대하여 대칭이다.
> (나) 점 $(-2, 6)$을 지난다.

07 다음 보기 중 함수 $y=\dfrac{3x+7}{x+3}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

> ㄱ. 치역은 $\{y \mid y \ne -3$인 실수$\}$이다.
> ㄴ. 그래프는 점 $(-3,\ 3)$에 대하여 대칭이다.
> ㄷ. 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

08 a, b가 양수일 때, $2 \le x \le 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2 \le \dfrac{2x-1}{x-1} \le bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

09 [2017년 9월 고2 이과 27번 변형]

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$인 점 C가 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있다. $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>\sqrt{2}$)

10 함수 $f(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a와 b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

〈조건〉

> (가) 3이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x-6)-6$이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치한다.

11 함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{x-2}$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $x \ne 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x+1)+b$이다.
> (나) 직선 $x=5$는 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프의 한 점근선이다.

상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 4 ② 2 ③ 0
④ -2 ⑤ -4

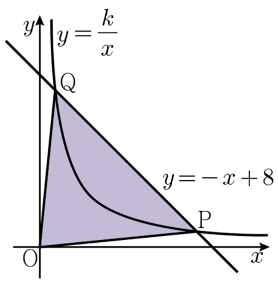
12 함수 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$에 대하여

$f^1=f,\ f^n=f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

로 정의한다. $f^{30}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$일 때,

상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오.

13 그림과 같이 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+8$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

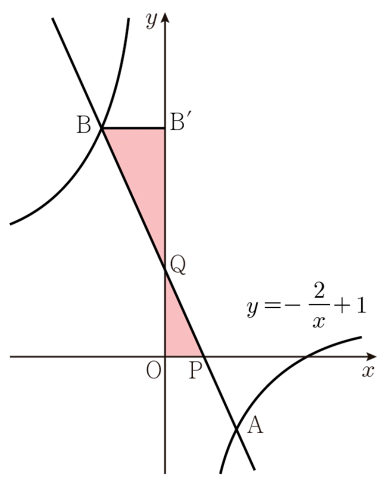


① $\dfrac{21}{4}$ ② $\dfrac{87}{16}$ ③ $\dfrac{45}{8}$ ④ $\dfrac{93}{16}$ ⑤ 6

14 [2016년 4월 고3 문과 27번 변형]

좌표평면 위에 함수 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x} & (x>0)\\ -\dfrac{16}{x} & (x<0)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=x$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값을 구하시오.

15 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}+1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(k,\ -\dfrac{2}{k}+1\right)\ (-2<k<0)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B'이라 할 때, 두 삼각형 BQB', OPQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최솟값을 m, 그 때의 k값을 α라 할 때, $m+\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-1$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

16 유리함수 $y=\dfrac{ax+7}{x+b}$의 역함수의 그래프가 두 직선 $x=-3$, $y=1$과 만나지 않도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

17 양수 k에 대하여 유리함수 $y=\dfrac{k}{x+4}+2$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 그래프의 두 점근선의 교점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, $k\cdot\overline{\mathrm{AB}}$의 값은?

① $28\sqrt{5}$ ② $30\sqrt{5}$ ③ $32\sqrt{5}$
④ $34\sqrt{5}$ ⑤ $36\sqrt{5}$

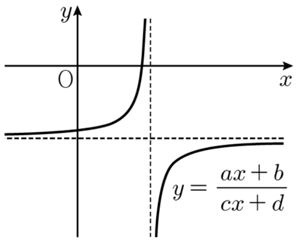
18 양의 실수 전체의 집합 A에서 A로의 함수 f, h를 $f(x)=x^2+x$, $h(x)=\dfrac{x+2}{f(x)}$로 정의한다. 함수 g가 f의 역함수일 때, $h(g(6))$의 값을 구하시오.

19 유리함수 $y=\dfrac{6}{2x-6}$의 그래프 위의 점 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여
$y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

21 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)



〈보기〉

ㄱ. $ac<0$　　ㄴ. $cd<0$

ㄷ. $ad-bc<0$　　ㄹ. $b>0$이면 $d<0$이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄴ, ㄹ　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

22 [2017년 9월 고2 이과 27번/4점]

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=90°$인 점 C가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위에 있다. $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>2\sqrt{2}$)

23 [2022년 3월 고2 18번 변형]

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}+b\ (a\neq 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=|f(x)|$는 직선 $y=3$과 한 점에서만 만난다.
(나) $f^{-1}(3)=f(3)-2$

$f(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{3}{2}$　② 2　③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 273~298p

유리함수의 그래프

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 62	02 ①	03 ①
04 ④	05 ②	06 0
07 ⑤	08 ①	09 5
10 5	11 ②	12 31
13 ②	14 36	15 ③
16 ①	17 ③	18 $\frac{2}{3}$
19 ②	20 $a+b=-1$	21 ②
22 9	23 ④	

실시일자	-
23문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 62

해설 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 유리함수 $y=\dfrac{5}{x}$ $(x>0)$의 그래프 위의 점이므로 $b=\dfrac{5}{a}$에서 $ab=5$ $(a>0,\ b>0)$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 6이므로

$\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=6$에서 $a+b=6\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(6\sqrt{2})^2-2\cdot 5$

$=62$

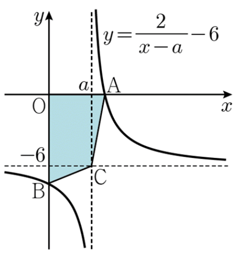
02 정답 ①

해설 유리함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-a}-6$ $(a>1)$의 그래프의

두 점근선은 $x=a$, $y=-6$이고,

$\mathrm{A}\left(a+\dfrac{1}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{a}-6\right)$, $\mathrm{C}(a,\ -6)$이다.

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이를 S라 하면 S는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{CE}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(a+\dfrac{1}{3}\right)\cdot 6+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{a}+6\right)\cdot a$

$=6a+2$

$6a+2=20$에서

$a=3$

03 정답 ①

해설 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-k}=\dfrac{2k+1}{x-k}+2$의 그래프의

두 점근선의 방정식은 $x=k$, $y=2$이고

두 점근선의 교점 $(k,\ 2)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이다.

따라서 $k=1$

04 정답 ④

해설

$y=\dfrac{bx}{ax-1}=\dfrac{\dfrac{b}{a}(ax-1)+\dfrac{b}{a}}{ax-1}=\dfrac{b}{a(ax-1)}+\dfrac{b}{a}$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$,

치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$이고 정의역과 치역이 같으므로

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{a}$ $\qquad\therefore\ b=1$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{b}{a}$

두 점근선의 교점 $\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{b}{a}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$이

직선 $y=-3x+5$ 위에 있으므로

$\dfrac{1}{a}=-\dfrac{3}{a}+5$, $\dfrac{4}{a}=5$ $\qquad\therefore\ a=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{9}{5}$

05 정답 ②

해설 $y=f(x+2a)-\dfrac{a}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+2a)-\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+2a)-\dfrac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+2a)-\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+2a)-\dfrac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\dfrac{a}{2x+4}-b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-b$이므로

$y=f(x+2a)-\dfrac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2-2a$, $y=-b-\dfrac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로 $a=-1$, $b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2x+4}-\dfrac{1}{2}$이므로

$f(b)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{10}$

$\therefore a+f(b)=-1+\left(-\dfrac{7}{10}\right)=-\dfrac{17}{10}$

06 정답 0

해설 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이므로

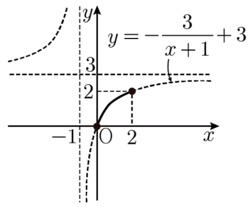
$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+3$ $(k\neq 0)$으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(-2)=6$이므로 $6=-k+3$

$\therefore k=-3$

$\therefore f(x)=-\dfrac{3}{x+1}+3$

따라서 $0\leq x\leq 2$에서 $y=-\dfrac{3}{x+1}+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최댓값 $-\dfrac{3}{2+1}+3=2$,

$x=0$일 때, 최솟값 $-\dfrac{3}{0+1}+3=0$을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$2\cdot 0=0$

07 정답 ⑤

해설 $y=\dfrac{3x+7}{x+3}=\dfrac{3(x+3)-2}{x+3}=-\dfrac{2}{x+3}+3$

ㄱ. 치역은 $\{y\,|\,y\neq 3$인 실수$\}$이다. (거짓)

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-3, 3)$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $y=\dfrac{3x+7}{x+3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (참)

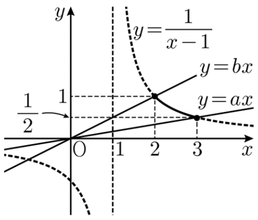
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 정답 ①

해설 $\dfrac{2x-1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$ $(2 \leq x \leq 3)$이므로

$ax+2 \leq 2+\dfrac{1}{x-1} \leq bx+2$

$ax \leq \dfrac{1}{x-1} \leq bx$



위의 그래프에 의하여 $a \leq \dfrac{1}{6}$, $b \geq \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore$ (a의 최댓값)$+$(b의 최솟값)$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

09 정답 5

해설 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서

만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)(a \neq 1)$라 하면

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a}, a\right)$이다.

$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고

점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$라 하면 직선 BC의 기울기는

1이다.

$\dfrac{\frac{1}{c}-a}{c-\frac{1}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$, $c=-a$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a, -\dfrac{1}{a}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\dfrac{1}{a}-\left(-\dfrac{1}{a}\right)\right\}^2$

$=4a^2+\dfrac{4}{a^2}=12$

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=3$

따라서 $k^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2=5$

10 정답 5

해설 $f(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}=\dfrac{3(x-a)+3a+b}{x-a}=\dfrac{3a+b}{x-a}+3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a, 3)$

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(3, a)$ $\cdots$ ㉠

(가)에서 함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프이므로

함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+6, -3)$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $a=-3$

$a=-3$을 $y=\dfrac{3a+b}{x-a}+3$에 대입하면

$y=\dfrac{b-9}{x+3}+3$

(나)에서 이 그래프를 평행이동하면 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치하므로

$b-9=-1$, $b=8$

$\therefore a+b=(-3)+8=5$

11 정답 ②

해설 $f(x)=\dfrac{x+a}{x-2}=\dfrac{(x-2)+a+2}{x-2}=\dfrac{a+2}{x-2}+1$

이므로 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=2$이고, 조건 (가)에서

$$f^{-1}(x)=f(x+1)+b=\frac{x+1+a}{x+1-2}+b$$
$$=\frac{(x-1)+a+2}{x-1}+b$$
$$=\frac{a+2}{x-1}+b+1$$

이므로 $b+1=2$

$\therefore b=1$

또, 조건 (나)에서

$$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+a}{x-2}\right)$$
$$=\frac{\dfrac{x+a}{x-2}+a}{\dfrac{x+a}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{x+a+ax-2a}{x-2}}{\dfrac{x+a-2x+4}{x-2}}$$
$$=\frac{(a+1)x-a}{-x+a+4}$$

의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=5$이므로

$a+4=5$

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=2$

12 정답 31

해설 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}$$
$$=\frac{x}{1+2x}$$
$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$$
$$=\frac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}$$
$$=\frac{x}{1+3x}$$

같은 방법으로 하면

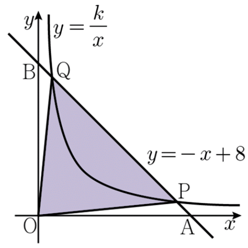
$$f^{30}(x)=\frac{x}{1+30x}$$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=30$이므로

$a-b+c=31$

13 정답 ②

해설 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A$(8,\ 0)$, B$(0,\ 8)$



삼각형 OAB의 넓이는

$$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$$

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26이므로

$$\triangle\text{OAP}=\triangle\text{OQB}=\frac{1}{2}(32-26)=3$$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\triangle\text{OAP}=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot b=3$에서 $b=\dfrac{3}{4}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8=\dfrac{3}{4}$에서 $a=\dfrac{29}{4}$이다.

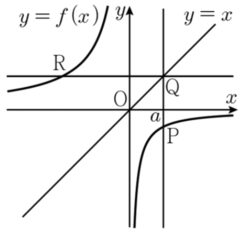
또, 점 P는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$$k=ab=\frac{29}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{87}{16}$$

14 정답 36

해설 점 P의 x 좌표를 a라 하자.

(ⅰ) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(a,\ -\dfrac{4}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{16}{a},\ a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\dfrac{4}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\dfrac{16}{a}$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}=\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)$$
$$=a^2+\frac{64}{a^2}+20$$
$$\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{64}{a^2}}+20$$
$$=36$$

등호가 성립하는 경우는

$a^2=\dfrac{64}{a^2}$, 즉 $a=2\sqrt{2}$일 때이다.

그러므로 $a=2\sqrt{2}$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(a,\ -\dfrac{16}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{4}{a},\ a\right)$이므로

(ⅰ)에서와 같이

$a=-2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 36이다.

15 정답 ③

해설 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(k,\ -\dfrac{2}{k}+1\right)$ $(-2<k<0)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-\dfrac{2}{k}+2}{k-1}=\frac{-2+2k}{k(k-1)}=\frac{2}{k}$$

이므로 직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{k}(x-1)-1$,

즉 $y=\dfrac{2}{k}x-\dfrac{2}{k}-1$이다.

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}\left(\dfrac{k}{2}+1\ ,0\right)$,

$\mathrm{Q}\left(0,\ -\dfrac{2}{k}-1\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{k}{2}+1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{2}{k}-1$, $\overline{\mathrm{B'Q}}=2$, $\overline{\mathrm{BB'}}=-k$

따라서 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-k)=-k,$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(-\frac{2}{k}-1\right)=-\left(1+\frac{1}{k}+\frac{k}{4}\right)$$

이므로

$$S_1+S_2=-\frac{5}{4}k-\frac{1}{k}-1$$

이때 두 수 $-\dfrac{5}{4}k$, $-\dfrac{1}{k}$이 모두 양수이므로,

$(\because\ -2<k<0)$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_1+S_2\geq 2\sqrt{\left(-\frac{5}{4}k\right)\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)}-1$$
$$=\sqrt{5}-1$$

$\left(\text{단, 등호는 } k=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 일 때 성립}\right)$

$$\therefore\ m+\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$$

16 정답 ①

해설 유리함수 $y=\frac{ax+7}{x+b}$의 역함수의 그래프가 두 직선 $x=-3$, $y=1$과 만나지 않으므로

유리함수 $y=\frac{ax+7}{x+b}$의 그래프의 점근선은

$x=1$, $y=-3$이다.

$$y=\frac{ax+7}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+7}{x+b}$$
$$=\frac{7-ab}{x+b}+a$$

이므로 유리함수 $y=\frac{ax+7}{x+b}$의 그래프의 점근선은

두 직선 $x=-b$, $y=a$이다.

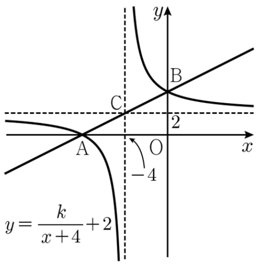
따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a+b=-4$

17 정답 ③

해설 함수 $y=\frac{k}{x+4}+2$ $(k>0)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점은 $\mathrm{C}(-4,\ 2)$

점 $\mathrm{C}(-4,\ 2)$와 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 그림과 같이 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.



두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 하면

점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\frac{a+0}{2}=-4$, $\frac{0+b}{2}=2$

즉, $a=-8$, $b=4$

그러므로 $\mathrm{A}(-8,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}$

$=\sqrt{\{0-(-8)\}^2+(4-0)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

또, 함수 $y=\frac{k}{x+4}+2$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\frac{k}{0+4}+2$, $k=8$

$\therefore\ k\cdot\overline{\mathrm{AB}}=8\cdot4\sqrt{5}=32\sqrt{5}$

18 정답 $\frac{2}{3}$

해설 g가 f의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

$\therefore\ h(g(6))=\frac{g(6)+2}{f(g(6))}=\frac{g(6)+2}{6}$

$g(6)=f^{-1}(6)=a$라 하면 $f(a)=6$

$a^2+a=6$, $a^2+a-6=0$

$(a-2)(a+3)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-3$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

즉, $g(6)=2$이므로

$$h(g(6))=\frac{g(6)+2}{6}$$
$$=\frac{2+2}{6}=\frac{2}{3}$$

19 정답 ②

해설 $y=\frac{6}{2x-6}=\frac{3}{x-3}$이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉, $x<3$이면 $y<0$이고, $x>3$이면 $y>0$이다.

$x=-1$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot(-1)-6}=-\frac{3}{4}$에서 분모의 절댓값이 분자의 절댓값보다 크므로 $x<-1$인 경우 y의 값은 정수가 될 수 없다.

$x=0$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot0-6}=-1$

$x=1$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot1-6}=-\frac{3}{2}$

$x=2$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot2-6}=-3$

$x=3$일 때, 주어진 유리함수는 정의되지 않는다.

$x=4$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot4-6}=3$

$x=5$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot5-6}=\frac{3}{2}$

$x=6$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot6-6}=1$

$x=7$일 때, $y=\frac{6}{2\cdot7-6}=\frac{3}{4}<1$이므로

$x>7$인 경우 y의 값은 정수가 될 수 없다.

따라서 유리함수 $y=\frac{6}{2x-6}$의 그래프 위의 점 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점은

$(0,\ -1)$, $(2,\ -3)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 1)$의 4개이다.

20 정답 $a+b=-1$

해설 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}\cdots$ ① 에서

x대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{-x+2}{x+1}\cdots$ ②

① $+2\times$ ② $\longrightarrow -f(x)=\frac{1}{x+1}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1,\ y=0$

$\therefore a+b=-1$

21 정답 ②

해설 ㄱ, ㄴ. $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}$

$=\frac{a(cx+d)-ad+bc}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}$

$\therefore\ y=-\frac{ad-bc}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}$

위의 함수의 그래프는 $y=-\frac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\frac{d}{c}$만큼, y축의 방향으로

$\frac{a}{c}$만큼 평행이동한 것으로 점근선은

두 직선 $x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$이다.

따라서 주어진 그래프에서

$-\frac{d}{c}>0,\ \frac{a}{c}<0$이므로 $ac<0,\ cd<0$ (참)

ㄷ. 주어진 함수의 그래프에서 $y=-\frac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프는

제2,4사분면을 지나야 하므로

$-(ad-bc)<0$

$\therefore\ ad-bc>0$ (거짓)

ㄹ. 주어진 함수의 그래프의 y절편이 음수이므로 $x=0$을

대입하면 $\frac{b}{d}<0$이다.

즉, $b>0$이면 $d<0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

22 정답 9

해설 유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\frac{2}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\frac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서

만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$ $(a\neq\sqrt{2})$라 하면

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{2}{a},\ a\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고

점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c,\ \frac{2}{c}\right)$라 하면

직선 BC의 기울기는 1이다.

$\frac{\frac{2}{c}-a}{c-\frac{2}{a}}=\frac{-a}{c}=1,\ c=-a$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a,\ -\frac{2}{a}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\frac{2}{a}-\left(-\frac{2}{a}\right)\right\}^2$

$=4a^2+\frac{16}{a^2}=20$

$a^2+\frac{4}{a^2}=5$

따라서 $k^2=\left(a+\frac{2}{a}\right)^2=a^2+\frac{4}{a^2}+4=9$

23 **정답** ④

해설 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와 직선 $y=-3$과 만나는 점의 개수의 합은 1이다.
곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=3$, $y=-3$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.
이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로
$b=3$ 또는 $b=-3$ $\cdots$ ㉠

$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$, 즉 $y=\dfrac{a}{x}+b$에서

$\dfrac{a}{x}=y-b$, $x=\dfrac{a}{y-b}$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{a}{x-b}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(3)=f(3)-2$이므로

$\dfrac{a}{3-b}=\dfrac{a}{3}+b-2$ $\cdots$ ㉡

㉡에서 $b\neq 3$이므로 ㉠에서 $b=-3$이다.
㉡에 $b=-3$을 대입하면

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{a}{3}-5$

$\therefore\ a=30$

따라서 $f(x)=\dfrac{30}{x}-3$이므로

$f(5)=\dfrac{30}{5}-3=3$