실시일자	-	# 수학 II	이름
30문제 / DRE수학			

수능/모의 공통

고2 25년 9월 ~ 고2 22년 9월

01 정답 ②

해설 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to3+}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to3+}f(x)=-1$

02 정답 ④

해설 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2+4x+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=4$$

03 정답 ①

해설 미분계수 이해하기

$f(x)=x^3+x^2-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+2x$

따라서 곡선 $y=x^3+x^2-5$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=5$

04 정답 ④

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=4+2$$
$$=6$$

05 정답 ①

해설 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^3+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^3+1)$$
$$=2^3+1=9$$

06 정답 ⑤

해설 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to3+}f(x)=2+3=5$

07 정답 ⑤

해설 함수의 극한의 성질 이해하기

$2x+1\le f(x)\le(x+1)^2$에서

$\lim_{x\to0}(2x+1)=\lim_{x\to0}(x+1)^2=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}f(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to0}(x+5)f(x)=\lim_{x\to0}(x+5)\cdot\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=5\cdot1=5$$

08 정답 7

해설 미분계수 계산하기

$f(x)=x^3-5x+8$에서 $f'(x)=3x^2-5$

$\therefore f'(2)=3\cdot2^2-5=7$

09 정답 ③

해설 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+1=3$

10 정답 ⑤

해설 미분계수 이해하기

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{f'(2)}{4}=3$$

$\therefore f'(2)=3\cdot4=12$

11 정답 ①

해설 함수의 극한의 성질 이해하기

$x > \frac{1}{2}$ 인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{3}{2x+1} < f(x) < \frac{3}{2x-1}$ 이므로

$\frac{3x}{2x+1} < xf(x) < \frac{3x}{2x-1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x-1} = \frac{3}{2}$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \frac{3}{2}$

12 정답 ③

해설 미분계수 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$에서

$2-a=4+2b+a$, $b=-a-1$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{(x-a)-(2-a)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2+}\frac{(x^2+bx+a)-(2-a)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2+}\frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2+}(x-a+1) = 3-a\end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$1=3-a$에서 $a=2$, $b=-3$

$\therefore f(2)=0$

13 정답 ①

해설 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=\log_2(x+a)+1$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, 5]$에서 $x=a$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 $f(a)=\log_2 2a+1=3$에서

$a=2$

$$\begin{aligned}\therefore f(a+4) &= f(6)\\ &= \log_2 8+1\\ &= 3+1=4\end{aligned}$$

14 정답 34

해설 함수의 극한 이해하기

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=3$이므로

$f(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$이고 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore b=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2+ax}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(2x^2+3x+a)\\ &= a=3\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2+3x$이므로

$f(2)=34$

15 정답 ③

해설 미분계수 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서

$a+b+1=-3b-1$, 즉 $a=-4b-2$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(ax^2+bx+1)-(-3b-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+bx+3b+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(-4b-2)x^2+bx+3b+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)\{(-4b-2)x-3b-2\}}{x-1}$$
$$=-7b-4$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(-3bx-1)-(-3b-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-3b(x-1)}{x-1}=-3b$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$-7b-4=-3b$에서 $b=-1$, $a=2$

$\therefore\ a+b=1$

16 정답 ②

해설 곱의 미분법 이해하기

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$
$g'(0)=-2f(0)$, $g'(2)=2f(2)$
$g'(0)+g'(2)=2\{-f(0)+f(2)\}=16$
$\therefore\ f(2)-f(0)=8$

17 정답 ①

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{\{f(x)\}^2+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2+3}$$
$$=\frac{2-0}{3^2+3}=\frac{1}{6}$$

18 정답 ③

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+kg(x)\}=2+k\cdot1=2+k$$
$$\lim_{x\to0+}\{f(x)+kg(x)\}=(-1)+k\cdot3=-1+3k$$

이때 $\lim_{x\to0}\{f(x)+kg(x)\}$의 값이 존재하므로
$2+k=-1+3k$
$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

19 정답 ①

해설 평균변화율을 이용하여 추론하기

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 6까지 변할 때의
평균변화율이 0이므로

$$\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{36+6a}{6}=0$$

$\therefore\ a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+b$이므로
$f'(x)=2x-6$
$\therefore\ f'(4)=2\cdot4-6=2$

20 정답 16

해설 함수의 극한에 대한 성질 이해하기

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{g(x)}=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{g(x)}\right\}$$
$$=8\cdot2=16$$

21 정답 ③

해설 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$,

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t})$

점 A에서 직선 $x=t$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\mathrm{H}(t,\ 1)$

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(t^2-\sqrt{t})\cdot(t-1)$$

$$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}=\lim_{t\to1+}\frac{(t^2-\sqrt{t})(t-1)}{2(t-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to1+}\frac{(t^4-t)}{(t-1)(t^2+\sqrt{t})}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to1+}\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+\sqrt{t})}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to1+}\frac{t(t^2+t+1)}{t^2+\sqrt{t}}=\frac{3}{4}$$

22 정답 54

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{2t}{x}=-\dfrac{1}{t}x+3$에서 $2t^2=-x^2+3tx$

$x^2-3tx+2t^2=0,\ (x-t)(x-2t)=0$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(t,\ 2),\ \mathrm{B}(2t,\ 1)$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{t^2+4},\ \overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4t^2+1}$

$$\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{\left(\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}\right)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}{(t-1)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{3(t^2-1)}{(t-1)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$\therefore\ 30k^2=30\cdot\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2=54$$

23 정답 ③

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x<0$일 때, $\left|\dfrac{2}{x}-3\right|=-\dfrac{2}{x}+3>3$이므로

$x<0$에서 함수 $y=\left|\dfrac{2}{x}-3\right|$의 그래프와

직선 $y=t\ (0<t<3)$은 만나지 않는다.

$0<x<\dfrac{2}{3}$일 때, $\left|\dfrac{2}{x}-3\right|=\dfrac{2}{x}-3$

$\dfrac{2}{x}-3=t$에서 $x=\dfrac{2}{3+t}$

$x\geq\dfrac{2}{3}$일 때, $\left|\dfrac{2}{x}-3\right|=-\dfrac{2}{x}+3$

$-\dfrac{2}{x}+3=t$에서 $x=\dfrac{2}{3-t}$

따라서 $f(t)=\dfrac{2}{3-t}-\dfrac{2}{3+t}=\dfrac{4t}{(3-t)(3+t)}$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{t}\cdot\frac{4t}{(3-t)(3+t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{(3-t)(3+t)}=\frac{4}{9}$$

24 정답 20

해설 함수의 극한에 대한 성질 이해하기

두 이차함수 $f(x),\ g(x)$의 x^2의 계수를 각각

$a,\ b\ (a\neq0,\ b\neq0)$이라 하자.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)-x^2}=1$이므로

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)-x^2$의 차수는 2이고

$\dfrac{a}{b-1}=1,\ a=b-1,\ b-a=1$이므로

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{g(x)-f(x)}{x-3}$의 값이 존재하므로

다항식 $g(x)-f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

$g(x)-f(x)=(x-3)(x+k)$ (k는 실수)

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+k)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x+k)$$

$$=3+k=8$$

따라서 $k=5$이므로

$g(x)-f(x)=(x-3)(x+5)$

$\therefore\ g(5)-f(5)=20$

25 정답 ②

해설 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$(x-1)f(x)=\sqrt{x^2+3}+a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\sqrt{1^2+3}+a$에서 $a=-2$

$x\neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1} f(x) \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} \\ &= \frac{1+1}{\sqrt{1^2+3}+2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

26 정답 ①

해설 미분계수 이해하기

다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned} 6 &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\} \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $f'(1)=3$이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\right\} \\ &= f'(1)\cdot 3=9 \end{aligned}$$

27 정답 ②

해설 곱의 미분법 이해하기

$g(x)=\left(x^2-2x+2\right)f(x)$에서 $g(2)=2f(2)$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+\left(x^2-2x+2\right)f'(x)$에서

$g'(2)=2f(2)+2f'(2)$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=-2$에서

$f(2)\neq\dfrac{1}{2}$이라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1} &= \frac{g(2)-1}{2f(2)-1} \\ &= \frac{2f(2)-1}{2f(2)-1} \\ &= 1\neq -2 \end{aligned}$$

$\therefore f(2)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $g(2)=2f(2)=1$이고

$g'(2)=2f'(2)+1$이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1} &= \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{2\{f(x)-f(2)\}} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}}{2\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}} \end{aligned}$$

이때 $f'(2)=0$이라 하면 $g'(2)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f'(2)\neq 0$에서

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1} &= \frac{g'(2)}{2f'(2)} \\ &= \frac{g'(2)}{g'(2)-1}=-2 \end{aligned}$$

$\therefore g'(2)=\dfrac{2}{3}$

28 정답 25

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)g(x)$, $f(x)+g(x)$는 $x=-3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2}=4$에서 $\lim_{x\to-3}(x+3)^2=0$이므로

$\lim_{x\to-3}f(x)g(x)=f(-3)g(-3)=0$ … ㉠

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)+g(x)}{x+3}=-4$에서 $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}\{f(x)+g(x)\}=f(-3)+g(-3)=0$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(-3)=g(-3)=0$이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x+3$을 인수로 갖는다.

$f(x)=a(x+3)$, $g(x)=(x+3)(x+b)$ (a, b는 상수)

라 하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)^2(x+b)}{(x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to-3}a(x+b)$$
$$=a(-3+b)=4 \quad \cdots ㉢$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)+g(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)+(x+3)(x+b)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}(a+x+b)$$
$$=a-3+b=-4 \quad \cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하면

$a(-a-4)=4$, $a^2+4a+4=0$

즉, $(a+2)^2=0$에서 $a=-2$이고 $b=1$

$\therefore f(x)=-2(x+3)$, $g(x)=(x+3)(x+1)$

따라서 $f(2)=-10$, $g(2)=15$이므로

$g(2)-f(2)=25$

29 정답 ①

해설 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$$f(x)=\cos^2x-\sin x-1$$
$$=(1-\sin^2x)-\sin x-1$$
$$=-\sin^2x-\sin x$$
$$=-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

이때 $f(\pi)=0$이고 π가 구간 $(\pi,\ a]$에 속하지 않으므로

구간 $(\pi,\ a]$에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 갖기 위해서는

$f(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값이 구간 $(\pi,\ a]$에 존재해야 한다.

$f(x)\le 0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x\ge 0$

$x>\pi$에서 $\sin x=-1$인 x의 최솟값은 $\frac{3}{2}\pi$

$x>\pi$에서 $\sin x\ge 0$인 x의 최솟값은 2π

$\therefore p=\frac{3}{2}\pi$

한편, 구간 $\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$에서 $-1\le\sin x<0$이므로

$f(x)=-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$

따라서 $M=\frac{1}{4}$에서

$pM=\frac{3}{8}\pi$

30 정답 ①

해설 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=m(x+5)$는 기울기가 m $(m>0)$이고

점 $(-5,\ 0)$을 지나는 직선이다.

함수 $y=2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=5$ $(y\ge 0)$은

두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$에서 만난다.

직선 $y=m(x+5)$가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때, $m=\frac{1}{3}$

직선 $y=m(x+5)$가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때, $m=\frac{1}{2}$

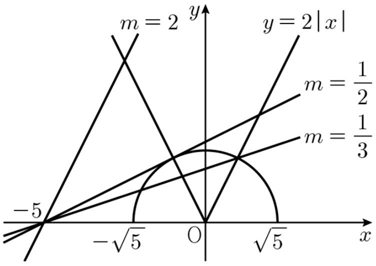
이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기가

-2이므로 곡선 $x^2+y^2=5$ $(y\ge 0)$ 위의

점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 직선 $y=\frac{1}{2}(x+5)$는

곡선 $x^2+y^2=5$ $(y\geq 0)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선이다.



(i) $0<m<\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=4$

(ii) $m=\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=3$

(iii) $\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$일 때, $f(m)=4$

(iv) $\frac{1}{2}\leq m<2$일 때, $f(m)=2$

(v) $m\geq 2$일 때, $f(m)=1$

(i) ~ (v)에 의하여

$$f(m)=\begin{cases} 1 & (m\geq 2) \\ 2 & \left(\frac{1}{2}\leq m<2\right) \\ 3 & \left(m=\frac{1}{3}\right) \\ 4 & \left(0<m<\frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(m)$은

$m=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{2}$, $m=2$에서만 불연속이므로

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{17}{6}$