교과서_미래엔 - 공통수학1 72~73p(중단원)_이차방정식과 이차함수

이차방정식과 이차함수의 관계 ~ 이차함수의 최대·최소

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 이차함수 $y=5x^2-6x+1$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

02 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

$$y=-4x^2+4x-1$$

03 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

$$y=x^2+4x+4$$

04 이차함수 $y=x^2-2x+4k$의 그래프가 x축과 서로 만나지 않을 때, k의 값의 범위는?

① $k<\frac{1}{2}$　② $k<-\frac{1}{2}$　③ $k>\frac{1}{4}$
④ $k<\frac{1}{4}$　⑤ $k>-\frac{1}{4}$

05 이차함수 $y=2x^2-5x+1-2k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 가장 작은 정수 k의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

06 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계에 대하여 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이면 $\square$에서 만난다.

07 이차함수 $y=x^2-3x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.

08 다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하시오.

$$y=x^2-x+1$$

09 [2015년 9월 고1 4번/3점]
$-2\le x\le 3$에서 이차함수 $y=(x+1)^2-2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

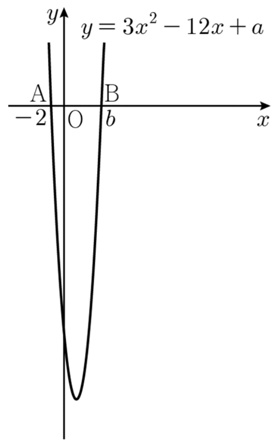
① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

10 이차함수 $f(x)=3x^2-12x+8$에 대하여 $-3\le x\le -1$에서의 최솟값을 p, $1\le x\le 3$에서의 최솟값을 q, $7\le x\le 9$에서의 최솟값을 r라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오.

11 이차함수 $y=x^2-8x+a$의 그래프와 x축과의 두 교점의 x좌표가 각각 6, b일 때, $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

12 다음 그림과 같이 이차함수 $y=3x^2-12x+a$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에서 만날 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?



① -30　② -28　③ -26
④ -24　⑤ -22

13 [2024년 3월 고2 24번/3점]
직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+6$의 그래프와 만나도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

14 이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하시오.

15 직선 $y=-2x+2k$가 이차함수 $y=x^2+kx-8$의 그래프와 한 점에서 만나고, 이차함수 $y=3x^2+4$의 그래프와 만나지 않도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

16 이차함수 $y=(k+2)x^2-1$의 그래프와 직선 $y=k(2x-1)+2$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $k<a$일 때, a의 값은?

① -10　② -8　③ -6
④ -4　⑤ -2

17 [2016년 3월 고2 이과 7번/3점]

$0 \le x \le 3$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$의 최댓값이 12일 때, $f(x)$의 최솟값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

18 이차함수 $y=ax^2-4ax+a^2+2a$의 최솟값이 3일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

19 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -3과 5이다.
(나) $6 \le x \le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 66이다.

$f(-4)$의 값을 구하시오.

20 [2023년 6월 고1 20번 변형]

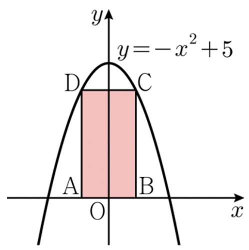
실수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-a)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3 \le x \le 15$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
(나) $3 \le x \le 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $9 \le x \le 15$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 같다.

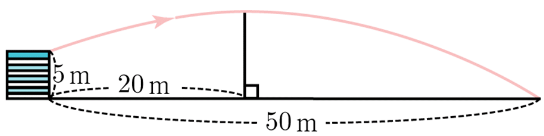
$f(-2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 86 ② 87 ③ 88
④ 89 ⑤ 90

21 다음 그림의 직사각형 ABCD에서 두 점 A와 B는 x축 위에 있고, 두 점 C와 D는 이차함수 $y=-x^2+5$의 그래프 위에 있다. 이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오.

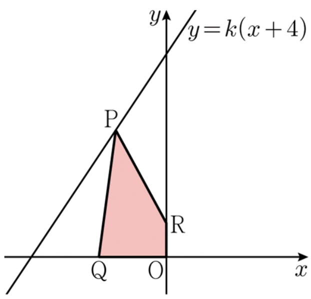


22 다음 그림과 같이 지면으로부터 $5\,\text{m}$ 높이에 위치한 발사대에서 비스듬히 물 로켓을 쏘아 올렸더니 물 로켓이 이차함수의 그래프 모양을 그리면서 날아가다가 지면에 떨어졌다. 물 로켓은 발사대로부터 $20\,\text{m}$ 떨어진 지점에서 지면으로부터 최고 높이에 도달하였고, $50\,\text{m}$ 떨어진 지점에서 지면에 떨어졌다. 이때 물 로켓의 지면으로부터의 최고 높이가 $a\,\text{m}$이다. a의 값을 구하시오.



23 어느 과일 가게에서 복숭아 한 개의 가격이 800원일 때, 하루에 200개씩 팔린다고 한다 이 복숭아 한 개의 가격을 $2x$원 내리면 하루 판매량은 x개 증가한다고 할 때, 복숭아의 하루 판매액이 최대가 되게 하려면 복숭아 한 개의 가격을 얼마로 정해야 하는지 구하시오.

24 [2024년 9월 고1 17번/4점]
$1 \le k \le 3$인 실수 k에 대하여 직선 $y=k(x+4)$ 위에 x좌표가 $-k$인 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{Q}(-2,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$에 대하여 사각형 PQOR 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{75}{16}$ ③ $\frac{39}{8}$
④ $\frac{81}{16}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

교과서_미래엔 - 공통수학1 72~73p(중단원)_이차방정식과 이차함수

이차방정식과 이차함수의 관계 ~ 이차함수의 최대·최소

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 2	02 1	03 1
04 ③	05 ③	06 한 점
07 2	08 0	09 ②
10 90	11 ④	12 ①
13 6	14 6	15 -6
16 ③	17 ④	18 3
19 18	20 ④	21 12
22 9	23 600원	24 ④

교과서_미래엔 - 공통수학1 72~73p(중단원)_이차방정식과 이차함수

이차방정식과 이차함수의 관계 ~ 이차함수의 최대·최소

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 2

해설 이차방정식 $5x^2-6x+1=0$의 판별식 D가

$\frac{D}{4}=3^2-5\times1=4>0$이므로

주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

02 정답 1

해설 이차방정식 $-4x^2+4x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-4)\cdot(-1)=0$

이므로 방정식 $-4x^2+4x-1=0$은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개다.

03 정답 1

해설 이차방정식 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4^2-4\times1\times4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축과의 교점은 1개다.

04 정답 ③

해설 $y=x^2-2x+4k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

판별식 D가 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-4k<0$

$\therefore k>\frac{1}{4}$

05 정답 ③

해설 이차함수 $y=2x^2-5x+1-2k$의 그래프가

x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

이차방정식 $2x^2-5x+1-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot2\cdot(1-2k)>0$

$25-8+16k>0$

$\therefore k>-\frac{17}{16}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 -1이다.

06 정답 한 점

해설 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식을 D라고 할 때 $D=0$이면 한 점에서 만난다.

07 정답 2

해설 $x^2-3x+3=2x+1$, $x^2-5x+2=0$

$x^2-5x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot1\cdot2=17>0$이므로

이차함수 $y=x^2-3x+3$의 그래프와

직선 $y=2x+1$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

08 정답 0

해설 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

이므로 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

09 정답 ②

해설 이차함수의 최댓값과 최솟값 계산하기

꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 속한다.

$x=-1$일 때 $y=-2$

$x=-2$일 때 $y=-1$

$x=3$일 때 $y=14$이므로

최댓값 $M=14$, 최솟값 $m=-2$

따라서 $M+m=12$

10 정답 90

해설 $f(x)=3x^2-12x+8=3(x-2)^2-4$

(i) $-3\le x\le -1$에서 $f(-3)=71$,

$f(-1)=23$이므로 $f(x)$의 최솟값은 23이다.

$\therefore\ p=23$

(ii) $1\le x\le 3$에서 $f(1)=-1$, $f(2)=-4$,

$f(3)=-1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 -4이다.

$\therefore\ q=-4$

(iii) $7\le x\le 9$에서 $f(7)=71$, $f(9)=143$이므로

$f(x)$의 최솟값은 71이다.

$\therefore\ r=71$

(i), (ii), (iii)에서

$p+q+r=23+(-4)+71=90$

11 정답 ④

해설 이차함수 $y=x^2-8x+a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 실근이다.

따라서 $x^2-8x+a=0$에 $x=6$을 대입하면

$36-48+a=0$

$\therefore\ a=12$

이차방정식의 두 실근은

$x^2-8x+12=0$, $(x-2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=6$

따라서 $a=12$, $b=2$이므로 $a+b=14$

12 정답 ①

해설 이차함수 $y=3x^2-12x+a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -2, b이므로

-2, b는 이차방정식 $3x^2-12x+a=0$의 두 근이다.

이차방정식 $3x^2-12x+a=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$-2+b=\dfrac{12}{3}=4$, 즉 $b=6$

또, 두 근의 곱은 $-2\cdot b=\dfrac{a}{3}$에서 $b=6$을 대입하면

$\dfrac{a}{3}=-12$

$\therefore\ a=-36$

따라서 $a=-36$, $b=6$이므로

$a+b=-30$

13 정답 6

해설 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 최솟값을 구한다.

직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+6$의 그래프와 만나므로 이차방정식 $x^2-2x+6=-x+k$가 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+6-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-1)^2-4\cdot(6-k)=-23+4k\ge 0$

$\therefore\ k\ge\dfrac{23}{4}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

14 정답 6

해설 ㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면

$x^2+ax+a=x+1$

$\therefore\ x^2+(a-1)x+a-1=0$

㉠, ㉡이 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(a-1)=0$

$(a-1)\{(a-1)-4\}=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 a의 값은 6

15 정답 -6

해설 $x^2+kx-8=-2x+2k$에서

이차방정식 $x^2+(k+2)x-2k-8=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(k+2)^2-4(-2k-8)=k^2+12k+36=0$

$\therefore k=-6$ $\cdots$ ㉠

$-2x+2k=3x^2+4$에서

이차방정식 $3x^2+2x+4-2k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1-3(4-2k)<0$

$\therefore k<\frac{11}{6}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$k=-6$

16 정답 ③

해설 이차함수 $y=(k+2)x^2-1$의 그래프와 직선 $y=k(2x-1)+2$가 만나지 않으므로 이차방정식

$(k+2)x^2-1=k(2x-1)+2$, 즉

$(k+2)x^2-2kx+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)(k-3)<0$

$k+6<0$ $\therefore k<-6$

$\therefore a=-6$

17 정답 ④

해설 제한된 범위에서 정의된 이차함수의 최댓값을 이용하여 최솟값을 구한다.

$f(x)=(x^2-4x+4)-4+a$

$=(x-2)^2-4+a$

이므로 $0\le x\le 3$일 때, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 속한다. 이때,

$x=0$일 때 $f(0)=a$

$x=2$일 때 $f(2)=-4+a$

$x=3$일 때 $f(3)=-3+a$

이므로 주어진 이차함수 $f(x)$는

$x=0$에서 최댓값 $f(0)=a$를 갖고,

$x=2$에서 최솟값 $f(2)=-4+a$를 갖는다.

$a=12$이므로

$f(2)=-4+12=8$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

18 정답 3

해설 $y=ax^2-4ax+a^2+2a=a(x-2)^2+a^2-2a$

이 이차함수의 최솟값이 존재하므로 $a>0$

최솟값이 3이므로 $a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

19 정답 18

해설 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -3, 5이므로

$f(x)=a(x+3)(x-5)$

$=a(x^2-2x-15)$

$=a(x-1)^2-16a$ $(a\neq 0)$

(ⅰ) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=6$에서 최댓값 $9a$를 가지므로

$9a=66$

$\therefore a=\frac{22}{3}$

이때 $a<0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $33a$를 가지므로

$33a=66$

$\therefore a=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$이므로

$f(x)=2(x+3)(x-5)$

$\therefore f(-4)=2\cdot(-1)\cdot(-9)=18$

20 정답 ④

해설 함수 $f(x)=(x-a)^2$이므로

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(a,\ 0)$이고 조건 (가)에 의하여 $3 \le a \le 15$

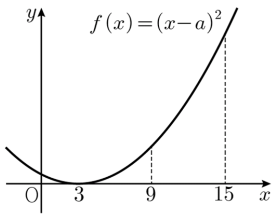
(ⅰ) $a=3$인 경우

$3 \le x \le 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과

$9 \le x \le 15$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(9)$로

같으므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$\therefore f(-2)=(-2-3)^2=25$



(ⅱ) $3<a \le 9$인 경우

$3 \le x \le 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)$ 또는 $f(9)$이고

$9 \le x \le 15$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

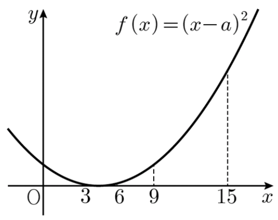
$f(9)$이므로

조건 (나)에 의하여 $f(3) \le f(9)$이다.

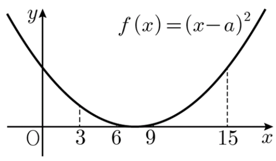
$(3-a)^2-(9-a)^2 \le 0$에서 $a \le 6$이므로

$3<a \le 6$

$f(-2)=(-2-a)^2$이므로 $25<f(-2) \le 64$



$(3<a \le 6$인 경우$)$



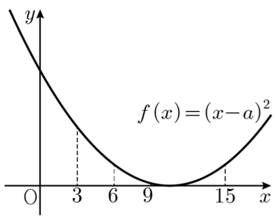
$(6<a \le 9$인 경우$)$

(ⅲ) $9<a \le 15$인 경우

$3 \le x \le 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)$이고

$9 \le x \le 15$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.

$f(3)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $25 \le f(-2) \le 64$

따라서 $M=64,\ m=25$이므로

$M+m=89$

21 정답 12

해설 점 B의 좌표를 $(a,\ 0)\ (a>0)$이라 하면

$C(a,\ -a^2+5)$

$\therefore \overline{AB}=2a,\ \overline{BC}=-a^2+5$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(-a^2+2a+5)=-2a^2+4a+10$

$=-2(a-1)^2+12$

이때 $0<a<\sqrt{5}$이므로 $a=1$일 때,

직사각형 ABCD의둘레의 길이의 최댓값은 12이다.

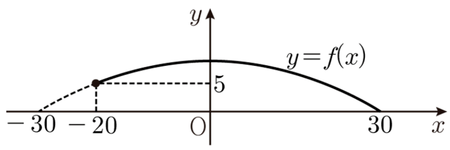
22 정답 9

해설 주어진 그림을 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 놓고,

물 로켓이 날아가는 모양의 이차함수의 식을 $y=f(x)$라

하면 축의 방정식은 $x=0$, x절편은 $-30,\ 30$이므로

$f(x)=a(x+30)(x-30)\ (a<0)$이라 하자.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-20,\ 5)$를 지나므로

$-500a=5,\ \therefore a=-\dfrac{1}{100}$

$f(x)=-\dfrac{1}{100}(x+30)(x-30)=-\dfrac{1}{100}x^2+9$이므로

$x=0$일 때 최댓값은 9이다.

따라서 물 로켓의 지면으로부터의 최고 높이는 9m이다.

$\therefore a=9$

23 정답 600원

해설 복숭아 한 개의 가격이 $(800-2x)$원일 때 하루 판매량은

$(200+x)$개이므로 하루 판매액을 y원이라 하면

$y=(800-2x)(200+x)$

$=-2x^2+400x+160000$

$=-2(x-100)^2+180000$

따라서 $x=100$일 때 y는 최대이고, 이때의 복숭아

한 개의 가격은 $800-200=600$원이다.

24 **정답** ④

해설 **이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제 해결하기**

점 P의 좌표는 $(-k,\ -k^2+4k)$

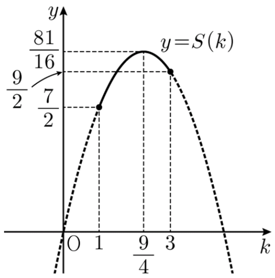
(사각형 PQOR의 넓이)

=(삼각형 PQO의 넓이)+(삼각형 POR의 넓이)

사각형 PQOR의 넓이를 $S(k)$라 하면

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-k^2+4k)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot k$$

$$=-\left(k-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{16}\ (1\le k\le 3)$$



따라서 $k=\frac{9}{4}$일 때, $S(k)$의 최댓값은 $\frac{81}{16}$이다.