

[공통수학2] 보충자료

II. 집합과 명제

학번 ()

이름 ()

집합의 뜻과 표현

1

다음 보기에서 집합이 아닌 것의 개수를 구하시오.

보기

- ㄱ. 방정식 $3x(x-2)=0$ 의 해의 모임
- ㄴ. 우리나라의 낮은 산의 모임
- ㄷ. 50에 가까운 6의 배수의 모임
- ㄹ. 우리 학교에서 박씨 성을 가진 학생의 모임

2

12와 18의 공약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $1 \in A$ ② $2 \in A$ ③ $3 \in A$
- ④ $4 \notin A$ ⑤ $6 \notin A$

3

다음 보기에서 집합을 원소나열법으로 나타낸 것은 조건제시법으로, 조건제시법으로 나타낸 것은 원소나열법으로 바르게 나타낸 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$
 $\Rightarrow \{1, 2, 3, 5, 7\}$
- ㄴ. $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$
 $\Rightarrow \{x|x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\}$
- ㄷ. $\{x|x^2=4, x \text{는 실수}\}$
 $\Rightarrow \{-2, 2\}$
- ㄹ. $\{7, 14, 21, 28\}$
 $\Rightarrow \{x|x \text{는 } 30 \text{보다 작은 } 7 \text{의 배수}\}$

4

다음 보기에서 원소의 개수가 5인 집합을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $A = \{5\}$
- ㄴ. $B = \{x|x \text{는 } 16 \text{의 약수}\}$
- ㄷ. $C = \{x|x \text{는 } 30 \text{보다 작은 } 7 \text{의 배수}\}$

5

두 집합 $A = \{10, 20, 30, \dots, 100\}$,

$B = \{x|x \text{는 } |x| < 2 \text{인 정수}\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 를 구하시오.

6

15의 약수의 집합을 A , 8 이하의 짝수의 집합을 B 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $2 \notin A$ ② $5 \in A$ ③ $5 \notin B$
- ④ $6 \notin B$ ⑤ $8 \in B$

7

두 집합

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 15\},$$

$$B = \{x|x^2 + 2 = 0, x \text{는 실수}\}$$

에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하시오.

8

집합 $A = \{2^k | k = 1, 2, 3\}$ 일 때, 집합

$B = \{x + y | x \in A, y \in A\}$ 를 구하시오.

9

다음 중 집합 $\{x|x \text{는 } 24 \text{와 } 36 \text{의 공약수}\}$ 의 원소가 아닌 것은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 12

10

두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$,

$B = \{x|x \text{는 } x^2 + x - 6 < 0 \text{인 정수}\}$ 에 대하여
 $n(A) - n(B)$ 는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 집합 B 의 개수를 구하시오.

- (㉠) $B \subset A$
(㉡) $\{1, 3, 5\} \subset B$

12

다음 중 집합 $\{1, 3\}$ 을 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은? [3점]

- ① $\{x|x \text{는 } 3 \text{의 약수}\}$
② $\{x|x \text{는 } 4 \text{ 이하의 홀수}\}$
③ $\{x|(x-1)(x-3)=0\}$
④ $\{x|1 \leq x \leq 3, x \text{는 홀수}\}$
⑤ $\{x|x \text{는 } 5 \text{ 미만의 소수}\}$

13

서로 다른 세 자연수를 원소로 갖는 집합

$A = \{a, b, c\}$ 에 대하여 집합 B 를

$B = \{x+y|x \in A, y \in A, x \neq y\}$

라고 하자. 집합 $B = \{5, 8, 9\}$ 일 때, $a-b+c$ 의 값을 구하시오. (단, $a < b < c$) [5점]

집합 사이의 포함 관계

14

두 집합

$$A = \{x \mid -2 < x < 6\},$$

$$B = \{x \mid -3 < x < a+1\}$$

에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 정수 a 의 최솟값을 구하시오.

15

집합 $A = \{w, x, y, z\}$ 에 대하여 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $\emptyset \subset A$
- ㄴ. 집합 A 의 부분집합의 개수는 16이다.
- ㄷ. 집합 A 의 부분집합 중에서 원소 w 를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 8이다.

16

두 집합 $A = \{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$, $B = \{-1, a\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하시오.

17

집합 $\{m, a, t, h\}$ 의 진부분집합을 모두 구하시오.

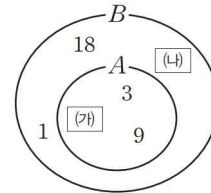
18

다음은 두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$$

를 벤 다이어그램으로 나타낸 것이다. 이때 ㉠, ㉡에 알맞은 수의 합을 구하시오.



19

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 인 것만을 다음 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $A = \{-1, 3, 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 3, 5\}$
- ㄴ. $A = \{x \mid x \text{는 } 2 < x < 10 \text{인 소수}\}$,
 $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$
- ㄷ. $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 배수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$

20

두 집합 $A = \{-1, 4, a\}$, $B = \{-1, 3, b^2 - 5\}$ 에 대하여 $A = B$ 이다. 이때 실수 a , b 에 대하여 ab 의 값을 구하시오. (단, $b > 0$)

21

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 의 세 부분집합 A , B , X 에 대하여 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 일 때, $A \cup X = B \cup X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하시오.

22

두 집합 $A = \{0, a - 1\}$, $B = \{b, 2a + 4\}$ 에 대하여 $A = B$ 이다. 이때 실수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

23

집합 $A = \{x | x \text{는 } k \text{ 이하의 짝수}\}$ 의 부분집합 중에서 가장 작은 원소가 6인 부분집합의 개수가 16일 때, 모든 자연수 k 의 값의 합은? (단, $k \geq 6$)

[5점]

- ① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

24

두 집합 $A = \{1, 2, 2a\}$, $B = \{2, 3a - 3, a - 2\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하시오.

[4점]

집합의 연산

25

두 집합

$$A = \{0, 2, 5\},$$

$$B = \{x | x^2 - 3x - 10 = 0\}$$

에 대하여 $A \cup B$, $A \cap B$ 를 구하시오.

26

두 집합 A , B 가 서로소인 것만을 다음 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

$$\text{ㄱ. } A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$$

$$\text{ㄴ. } A = \{x | x^2 - 25 = 0\}, B = \{-10, 10, 25\}$$

$$\text{ㄷ. } A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 소수}\}, \\ B = \{1, 3, 5, 9\}$$

27

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 집합 A^C 의 모든 원소의 합을 구하시오.

28

전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 다음 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

$$\text{ㄱ. } \emptyset^C = U$$

$$\text{ㄴ. } (A^C)^C = \emptyset$$

$$\text{ㄷ. } A \cup A^C = A$$

$$\text{ㄹ. } A - B = A \cap B^C$$

29

전체집합 U 의 두 부분집합 A , B 에 대하여

$$n(U) = 30, n(A) = 19, n(B) = 15,$$

$$n(A \cap B) = 7 \text{ 일 때, } n(A^C \cap B^C) \text{을 구하시오.}$$

30

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A^C \cup B^C$ 을 구하시오.

31

세 집합 A, B, C 에 대하여

$$A \cap B = \{x \mid x = 4k - 1, k = 1, 2, 3\},$$

$A \cap C = \{3, 7, 9\}$ 일 때, $A \cap (B \cup C)$ 를 구하시오.

32

두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 10$,

$n(A \cup B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$ 일 때, $n(B - A)$ 를 구하시오.

33

어느 학급의 학생 25명을 대상으로 육류와 생선류에 대한 선호도를 조사하였더니 육류를 좋아하는 학생은 18명, 생선류를 좋아하는 학생은 10명, 육류와 생선류를 모두 좋아하는 학생은 6명이었다. 이때 육류와 생선류를 모두 좋아하지 않는 학생 수를 구하시오.

34

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 X 에 대하여 $m(X)$ 를 X^C 의 원소의 개수라고 하자. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

$$\neg. m(U) = 0$$

$$\sqsubset. m(A) \leq m(A \cap B)$$

$$\sqsubset. m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

35

두 집합 $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 3 < x \leq 8\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x \mid 2 \leq x \leq k\}$ 라고 할 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

36

전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

② $A \cap B = \{c\}$

③ $A^C = \{a, e\}$

④ $B^C = \{a, b, e\}$

⑤ $A - B = \{a, b\}$

37

두 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset$ 일 때, 다음 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

㉠. $A \cap B = A$

㉡. $B \subset A$

㉢. $A = B$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

38

체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B) \cup A = \{1, 3, 5\}$,

$B^C - A^C = \{1, 3\}$ 을 만족시키는 집합 B 의 개수는?

- ① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

39

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(U) = 47, n(A) = 29, n(B) = 22,$$

$$n(A^C \cap B) = 17 \text{ 일 때, } n(A^C \cap B^C) \text{을 구하시오.}$$

40

집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 두 집합

$$B = \left\{ \frac{12}{x} \mid x \in A \right\}, C = \{xy \mid x \in A, y \in A\}$$

에 대하여 $B \cup C$ 를 구하시오.

41

현주네 반 학생 40명을 대상으로 강릉과 경주를 방문해 본 학생을 조사하였더니 각각 25명, 29명이었다. 이때 강릉과 경주를 모두 방문해 본 학생은 최소 몇 명인지 구하시오.

42

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 의 부분집합 A_n 을 $A_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 배수}\}$ 라고 할 때, 집합

$A_{12} \cap (A_8 \cup A_6)$ 의 원소의 개수는?

(단, n 은 자연수) [4점]

- ① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

43

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - (A \cap B) = \{2, 5\}$,

$B - (A \cap B) = \{3, 9\}$ 일 때, 집합 B^C 의 모든 원소의 합은? [4점]

- ① 7 ② 12 ③ 19
④ 36 ⑤ 45

44

수진이네 반 학생 22명 중에서 야구 동아리와 축구 동아리에 모두 가입한 학생은 4명, 야구 동아리와 축구 동아리에 모두 가입하지 않은 학생은 2명이다. 야구 동아리에 가입한 학생 수가 축구 동아리에 가입한 학생 수의 2배라고 할 때, 축구 동아리에 가입한 학생 수를 구하시오. [6점]

명제와 조건

45

다음 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $\sqrt{4}$ 는 유리수이다.
- ㄴ. 해는 서쪽에서 뜬다.
- ㄷ. $\sqrt{3} + \sqrt{7} = \sqrt{10}$
- ㄹ. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

46

전체집합 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 조건 ' $p: |x-1|=2$ '일 때, 조건 $\sim p$ 의 진리집합의 모든 원소의 합을 구하시오.

47

전체집합 $U = \{-5, -4, -3\}$ 에 대하여 $x \in U, y \in U$ 일 때, 명제 '어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 25$ 이다.'의 참, 거짓을 판별하시오.

48

다음 보기에서 그 부정이 거짓인 명제만을 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2 \leq 5$ 이다.
- ㄴ. 어떤 실수 x 에 대하여 $x \geq |x|$ 이다.
- ㄷ. 어떤 무리수 x 에 대하여 $\sqrt{5}x$ 는 유리수이다.

49

다음은 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 할 때, 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정을 구하는 과정이다. (가)~(다)에 알맞은 것을 써넣으시오.

조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은 $P^c \cup Q$ 이므로
 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정의 진리집합은
 $(P^c \cup Q)^c$ 이다.
 이때 드모르간의 법칙에 의하여
 $(P^c \cup Q)^c = \boxed{(가)} \cap \boxed{(나)}$
 이므로 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은
 ' $\boxed{(다)}$ '이다.

50

다음 중 참인 명제는?

- ① 코벨소는 크다.
- ② 10의 약수는 4개이다.
- ③ $3x = 6$
- ④ 소수는 모두 홀수이다.
- ⑤ 8은 3의 배수이다.

51

명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.’의 참, 거짓을 판별하시오.

52

명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + k \leq 0$ 이다.’의 부정이 참이 되도록 하는 정수 k 의 최솟값을 구하시오.

53

전체집합이 $U = \{x | x \text{는 정수}\}$ 일 때, 다음 중 조건 ‘ $p: x^2 - 2x - 15 \leq 0$ ’의 진리집합의 원소가 아닌 것은?

- ① -3 ② -1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

54

전체집합이 $U = \{-2, 0, 1, 2\}$ 일 때, 다음 중 거짓인 명제는?

- ① 모든 x 에 대하여 $x^2 \leq 4$ 이다.
② 모든 x 에 대하여 $|x - 1| \leq 3$ 이다.
③ 모든 x 에 대하여 x^2 은 짝수이다.
④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 = 1$ 이다.
⑤ 어떤 x 에 대하여 $x + 1$ 은 소수이다.

55

다음 중 거짓인 명제인 것은? [3점]

- ① π 는 유리수이다.
② $2 + 7 \neq 10$
③ $3 \times 4 > 5$
④ 9는 홀수이다.
⑤ 정사각형의 네 변의 길이는 같다.

56

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 p 가 ‘ $p: x^2 < 5$ ’일 때, 조건 $\sim p$ 의 진리집합의 모든 원소의 합은? [4점]

- ① 3 ② 6 ③ 10
④ 12 ⑤ 15

명제 $p \rightarrow q$

57

다음 보기에서 명제의 가정과 결론을 바르게 말한 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $x \geq 0$ 이면 $x > 1$ 이다.

⇒ 가정: $x > 1$

결론: $x \geq 0$

ㄴ. x 가 홀수이면 $x+1$ 은 홀수이다.

⇒ 가정: x 는 홀수이다.

결론: $x+1$ 은 홀수이다.

ㄷ. $ab=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.

⇒ 가정: $ab=0$

결론: $a=0$ 이고 $b=0$

58

명제 ' $x=4$ 이면 $x^2-ax+20=0$ 이다.'가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오.

59

명제 ' $x \leq y$ 이면 $x^2 \leq y^2$ 이다.'의 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

60

두 조건 ' $p: x \leq 2a-1$ ', ' $q: 2 \leq x \leq 5$ '에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하시오.

61

두 조건 p, q 에 대하여 다음 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고르시오.

(단, x, y 는 실수)

보기

ㄱ. $p: -1 \leq x < 1$

$q: x+3 \geq 2$

ㄴ. $p: |x|-x=0$

$q: x \geq 0$

ㄷ. $p: |x|+|y|=0$

$q: x^2+y^2=0$

62

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제를 고르시오.

$p \rightarrow q, \sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim p, \sim q \rightarrow p$

63

두 조건 ' $p: x+3=0$ ', ' $q: x^2-a=0$ '에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오.

64

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } -2 \leq x \leq 2 \text{인 정수}\}$ 에 대하여 조건 ' $p: |2x-1|=3$ '일 때, 조건 $\sim p$ 의 진리집합의 모든 원소의 합을 구하시오.

65

두 조건

$$'p: 2x^2 + ax + b = 0',$$

$$'q: x = -2 \text{ 또는 } x = 1'$$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 의 역이 참이다. 이때 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

66

두 실수 a, b 에 대하여 명제 ' $a+b < 10$ 이면 $a < 1$ 또는 $b < k$ 이다.'가 참이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

67

세 조건 p, q, r 에 대하여 두 명제 $\sim p \rightarrow q$ 와 $p \rightarrow \sim r$ 가 참일 때, 다음 보기에서 항상 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

보기

$$\neg. q \rightarrow \sim p$$

$$\neg. r \rightarrow q$$

$$\neg. \sim p \rightarrow r$$

$$\neg. \sim q \rightarrow \sim r$$

- ① \neg, \neg ② \neg, \neg ③ \neg, \neg
 ④ \neg, \neg, \neg ⑤ \neg, \neg, \neg

68

세 조건 ' $p: |x-a| \leq 3$ ', ' $q: x \leq 10$ ', ' $r: |x| < 2$ '에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, p 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 하자. 이때 $M+m$ 의 값을 구하시오.

69

전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = Q$,

$Q \cap R = Q$ 일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

- ① $p \rightarrow \sim q$ ② $p \rightarrow r$ ③ $p \rightarrow \sim r$
 ④ $q \rightarrow \sim p$ ⑤ $r \rightarrow p$

70

다음 보기에서 그 역이 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 실수)

보기

- ㄱ. $a^2 = b^2$ 이면 $a = b$ 이다.
 ㄴ. $ab > 0$ 이면 $a > 0, b > 0$ 이다.
 ㄷ. $-2 < a < 1$ 이면 $a^2 - 2a - 3 < 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71

다음 두 조건 p, q 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

(단, x, y 는 실수)

- ① $p: x^2 = 4$ $q: |x| = 2$
 ② $p: x^2 - 6x + 5 = 0$ $q: x^2 - x = 0$
 ③ $p: x^2 + y^2 = 0$ $q: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$
 ④ $p: 1 \leq x \leq 3$ $q: x^2 - 3x - 4 \leq 0$
 ⑤ $p: xy < 0$ $q: x > 0, y < 0$

72

두 조건 ' $p: x \neq 2$ ', ' $q: ax^2 + 14x \neq 20$ '에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -4 ② -3 ③ -2
 ④ -1 ⑤ 1

73

전체집합 $U = \{-3, -1, 1, 3\}$ 에 대하여 두 조건 ' $p: x^2 \geq 4$ ', ' $q: x^2 - 4x + 3 = 0$ '의 진리집합을 각각 P, Q 라고 할 때, $P^C \cup Q^C$ 의 모든 원소의 합을 구하시오.

74

두 조건 ' $p: 3 < x < a^2 + 5$ ', ' $q: 3a < x < 3a + 15$ '에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

75

명제 ‘ $1 \leq x \leq 5$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + n \geq 0$ 이다.’가 참이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은? [5점]

- ① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

76

두 실수 a , b 에 대하여 명제 ‘ $a + 2b < k$ 이면 $a < 4$ 또는 $b < 3$ 이다.’가 참이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

77

두 조건 ‘ $p: -2 \leq x \leq 3$ ’, ‘ $q: a \leq x \leq b$ ’에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건일 때, ab 의 최댓값은? [4점]

- ① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

78

명제 ‘ $a < x < 2$ 이면 $-2 < x < -a - 2$ 이다.’의 역이 참이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

명제의 증명

79

다음은 명제 ‘자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.’
가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가)~(라)
에 알맞은 것을 써넣으시오.

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 a, b, c 에 대하여
 a, b, c 가 모두 (가)이면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.’
이다.

a, b, c 가 모두 (가)이면 a^2, b^2, c^2 도 모두
(나)이다.

이때 $a^2 + b^2$ 은 (타)이고, c^2 은 (라)이므로
 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진
명제도 참이다.

80

다음은 명제 ‘ $2 + \sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다.’가 참임을 귀
류법을 이용하여 증명하는 과정이다. (가)~(라)에 알맞은 것
을 써넣으시오.

$2 + \sqrt{3}$ 이 (가)라고 가정하면

$2 + \sqrt{3} = a$ (a 는 (가))

로 나타낼 수 있다.

이때 $\sqrt{3} = a - 2$ 이고 우변의 $a - 2$ 는 (나)이다.

그런데 좌변의 $\sqrt{3}$ 은 (타)이므로 모순이다.

따라서 $2 + \sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다.

81

a, b 가 실수일 때, 부등식

$$(ab - 1)^2 \geq (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

이 성립함을 증명하시오.

82

다음 보기에서 절대부등식인 것만을 있는 대로 고르시오.
(단, a, b 는 실수)

보기

ㄱ. $a^2 - b^2 \geq 0$

ㄴ. $|a| + |b| \geq |a - b|$

ㄷ. $a^2 + 36 > 12a$

83

$a > 0, b > 0$ 일 때, $\frac{3a}{b} + \frac{3b}{a}$ 의 최솟값을 구하시오.

84

다음은 명제 ‘두 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 가 무리수이면 x 또는 y 는 무리수이다.’가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 (가)는 ‘두 실수 x, y 에 대하여 x, y 가 무리수가 아니면 $x+y$ 는 무리수가 아니다.’ 즉 ‘두 실수 x, y 에 대하여 x, y 가 (나)이면 $x+y$ 는 (나)이다.’이다.
 x, y 가 (나)이면
 $x = \frac{q}{p}, y = \frac{s}{r}$ (p, q, r, s 는 정수, $p \neq 0, r \neq 0$)
 로 나타낼 수 있으므로
 $x+y = \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = \frac{qr+ps}{pr}$
 이때 pr 와 $qr+ps$ 는 (다)이고 $pr \neq 0$ 이므로
 $x+y$ 는 (라)이다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 (마)이다.

위의 증명에서 (가)~(마)에 알맞은 것으로 옳지 않은 것은?

- ① (가): 대우 ② (나): 유리수 ③ (다): 자연수
 ④ (라): 유리수 ⑤ (마): 참

85

다음 보기에서 절대부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 실수)

보기

- ㄱ. $2a-1 < 2a+2$ ㄴ. $-a^2-2a-2 \leq 0$
 ㄷ. $|a+b| \geq |a-b|$ ㄹ. $a^2+3b^2 \geq 3ab$

- ① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
 ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

86

다음은 명제 ‘ $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2-1}$ 은 무리수이다.’가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다.

$\sqrt{n^2-1}$ 이 유리수라고 가정하면
 $\sqrt{n^2-1} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)
 로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면
 $n^2-1 = \frac{q^2}{p^2}$ ①
 ①의 좌변은 자연수이고, p 와 q 는 서로소이므로
 $p^2 =$ (가) ②
 ②를 ①에 대입하여 정리하면
 $n^2-q^2 =$ (나), $(n+q)(n-q) =$ (나)
 이므로 $n+q$ 와 $n-q$ 의 값은 모두 1 또는 -1이다.
 이것은 n 은 $n \geq 2$ 인 자연수, q 는 자연수라는 가정에 모순이다.
 따라서 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2-1}$ 은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 수는?

- ① (가): -1 (나): -1
 ② (가): -1 (나): 1
 ③ (가): 1 (나): -1
 ④ (가): 1 (나): 1
 ⑤ (가): 2 (나): 2

87

$x > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{9}{x}\right)$ 의 최솟값은 a 이고 그때의 x 의 값은 b 이다. 이때 ab 의 값을 구하시오.

88

다음은 a, b 가 실수일 때, 부등식

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0 \text{임을 보이면 된다.}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(a^2 + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\boxed{㉠}}{4} \geq 0$$

$$\text{즉, } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

여기서 등호는 $\boxed{㉡}$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [5점]

- ① $(a+b)^2, a=-b$
- ② $(a+b)^2, a=b$
- ③ $(a-b)^2, a=b-1$
- ④ $(a-b)^2, a=-b$
- ⑤ $(a-b)^2, a=b$

89

명제 ‘두 자연수 m, n 에 대하여 mn 이 홀수이면 m 과 n 은 홀수이다.’가 참임을 증명하시오. [4점]

[답안지]

- 1) 2
- 2) ⑤
- 3) \perp , \sqsubset , \sqsupset
- 4) \perp
- 5) 13
- 6) ④
- 7) 8
- 8) {4, 6, 8, 10, 12, 16}
- 9) ④
- 10) ②
- 11) 4
- 12) ⑤
- 13) 5
- 14) 5
- 15) \neg , \perp , \sqsubset
- 16) 5
- 17) \emptyset , $\{m\}$, $\{a\}$, $\{t\}$, $\{h\}$, $\{m, a\}$, $\{m, t\}$, $\{m, h\}$,
 $\{a, t\}$, $\{a, h\}$, $\{t, h\}$, $\{m, a, t\}$, $\{m, a, h\}$, $\{m, t, h\}$,
 $\{a, t, h\}$
- 18) 8
- 19) \neg , \perp , \sqsubset
- 20) 9
- 21) 8
- 22) ①
- 23) ③
- 24) 3
- 25) $A \cup B = \{-2, 0, 2, 5\}$
- 26) \perp
- 27) 45
- 28) \neg , \sqsupset
- 29) 3
- 30) {2, 4, 5, 6, 7}
- 31) {3, 7, 9, 11}
- 32) 3
- 33) 3
- 34) \neg , \perp , \sqsubset
- 35) 8
- 36) ③
- 37) ①
- 38) ②
- 39) 1
- 40) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12}
- 41) 14명
- 42) ②
- 43) ④
- 44) 8
- 45) \neg , \sqsupset
- 46) 1
- 47) 참
- 48) \perp , \sqsubset
- 49) ㉠ P ㉡ Q^C ㉢ p 이고 $\sim q$
- 50) ②
- 51) 참
- 52) 17
- 53) ⑤
- 54) ③
- 55) ①
- 56) ④
- 57) \perp , \sqsubset
- 58) 9
- 59) $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다. (거짓)
- 60) 3
- 61) \perp , \sqsubset
- 62) $q \rightarrow \sim p$
- 63) 9
- 64) -1
- 65) 20
- 66) 9
- 67) ③
- 68) 0
- 69) ②
- 70) ③
- 71) ④
- 72) ③
- 73) -3
- 74) 4
- 75) ①
- 76) ③
- 77) ④

- 78) 3
- 79) ㉠ 홀수 ㉡ 홀수 ㉢ 짝수 ㉣ 홀수
- 80) ㉠ 유리수 ㉡ 유리수 ㉢ 무리수
- 81) $(ab-1)^2 - (a^2-1)(b^2-1)$
 $= (a^2b^2 - 2ab + 1) - (a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)$
 $= a^2 - 2ab + b^2$
 $= (a-b)^2 \geq 0$
 즉, $(ab-1)^2 \geq (a^2-1)(b^2-1)$
 여기서 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.
- 82) \perp
- 83) 6
- 84) ③
- 85) ④
- 86) ④
- 87) $16\sqrt{3}$
- 88) ⑤
- 89) 주어진 명제의 대우는 '두 자연수 m, n 에 대하여 m 또는 n 이 짝수이면 mn 은 짝수이다.'이다.
 (i) m 이 짝수인 경우
 $m = 2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있다.
 이때 $mn = 2kn$ 이므로 mn 은 짝수이다.
 (ii) n 이 짝수인 경우
 $n = 2l$ (l 은 자연수)로 나타낼 수 있다.
 이때 $mn = 2ml$ 이므로 mn 은 짝수이다.
 (i), (ii)에서 m 또는 n 이 짝수이면 mn 은 짝수이다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.