

2학년 2024년 장충고 1학기 기말 수 I

1. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{n+1}{n}$ 일 때, $a_3 + a_6$ 의 값은?

[24장충]

- ① $\frac{7}{3}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 3

2. 첫째항이 12, 공차가 -5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 -58 은 제몇 항인가? [24장충]

- ① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

3. 네 수 6, a , 54, b 가 주어진 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은? [24장충]

- ① 160 ② 165 ③ 170
④ 175 ⑤ 180

4. $1 + 4 + 7 + \dots + 22$ 를 합의 기호 \sum 를 사용하여 옳게 나타낸 것은? [24장충]

- ① $\sum_{k=1}^{22} k$ ② $\sum_{k=1}^{11} (2k-1)$ ③ $\sum_{k=1}^8 (3k-2)$
④ $\sum_{k=1}^{22} (2k-1)$ ⑤ $\sum_{k=1}^{22} (3k-2)$

5. 삼각형 ABC에서 $a=5$, $b=3$, $C=120^\circ$ 일 때, 이 삼각형의 변 c 의 길이는? [24장충]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

6. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (k+2)^2 a_k = 100, \quad \sum_{k=1}^n (k+1)a_k = 21$$

일 때, $\sum_{k=1}^n (k^2 \times a_k)$ 의 값은? [24장충]

- ① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 = 4$, $a_6 - a_3 = \frac{a_6}{a_4}$ 라고 한다.

이때 a_{10} 의 값은? [24장충]

- ① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ 9
④ $\frac{64}{9}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

8. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = -n^2 - n$$

을 만족시킨다. a_{10} 의 값은? [24장충]

- ① 79 ② 82 ③ 85
④ 88 ⑤ 91

9. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10} 의 값은? [24장충]

(가) $a_6 + a_8 = 0$	(나) $ a_4 = a_9 + 4$
---------------------	-------------------------

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

10. 삼각형 ABC에서 $b = \sqrt{2}$, $c = 1$, $A = \theta$, $B = \frac{3}{4}\pi$ 이고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R 일 때, $\theta \times R$ 의 값은? [24장충]

- ① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
 ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

11. 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 항 a_2 , a_k , a_8 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_1 , a_2 , a_k 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k + a_k$ 의 값은? [24장충]

- ① 32 ② 36 ③ 40
 ④ 44 ⑤ 48

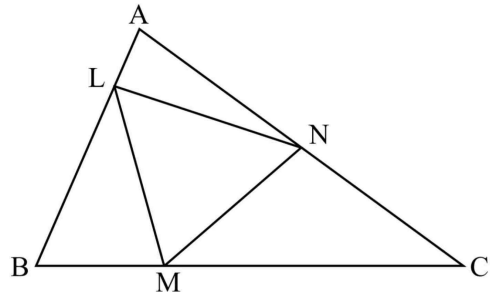
12. 삼각형 ABC가 $b \cos A = a \cos B - c$ 를 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은? [24장충]

- ① 정삼각형 ② $a = b$ 인 이등변삼각형
 ③ $b = c$ 인 이등변삼각형 ④ a 가 빗변인 직각삼각형
 ⑤ b 가 빗변인 직각삼각형

13. 그림과 같이 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 각 변 위의 점 L, M, N은

$$3\overline{AL} = \overline{BL}, \quad 2\overline{BM} = \overline{MC}, \quad \overline{AN} = \overline{CN}$$

을 만족할 때, 삼각형 LMN의 넓이는? [24장충]



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

14. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, 어떤 자연수 k 에 대하여

$$a_k + a_{k+2} = 38, \quad S_k = 36, \quad S_{k+2} = 77$$

을 만족시킨다. $|a_1|$ 의 값은? [24장충]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

15. $\sum_{k=1}^{10} k(k^3 + k) - \sum_{k=2}^9 k(k^3 - 1)$ 의 값은? [24장충]

- ① 10430 ② 10530 ③ 10630
④ 10730 ⑤ 10830

16. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$3^n > n^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=3, (\text{우변})=1^2+1=2$$

이므로 ①이 성립

(ii) $n=k$ 일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$$3^k > k^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②의 양변에 3을 곱하면

$$3^{\boxed{(가)}} > 3k^2 + 3$$

이때

$$3k^2 + 3 = \boxed{(나)} + 2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > \boxed{(나)}$$

따라서 $n = \boxed{(다)}$ 일 때도 ①이 성립

\therefore (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$, (다)에 알맞은 식을 $h(k)$ 라고 할 때, $f(3)+g(4)+h(5)$ 의 값은? [24장충]

- ① 30 ② 33 ③ 36
④ 39 ⑤ 42

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + kx + 72 = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $k - \alpha$ 의 값은? (단, $\alpha < 0$) [24장충]

- ① -24 ② -18 ③ 12
④ 18 ⑤ 24

18. 어느 부부 동반 모임에 참석한 사람들은 서로 인사를 할 때 다음 규칙을 따른다.

(가) 부부끼리는 서로 악수나 포옹하지 않는다.
 (나) 부부가 아닌 사람끼리는 반드시 악수나 포옹을 한다.
 (다) 남자끼리, 이성끼리는 악수를 한다.
 (라) 여자끼리는 포옹을 한다.

n 쌍의 부부가 모인 모임에서 이루어진 악수의 총 횟수를 a_n 이라 할 때, a_2 의 값과 a_n 과 a_{n+1} 의 관계식을 옳게 짝지은 것은?

(단, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$) [24장충]

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $a_2 = 3, a_{n+1} = a_n + 3$ | ② $a_2 = 3, a_{n+1} = a_n + 3n$ |
| ③ $a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 1$ | ④ $a_2 = 4, a_{n+1} = a_n + 4$ |
| ⑤ $a_2 = 4, a_{n+1} = a_n + 4n$ | |

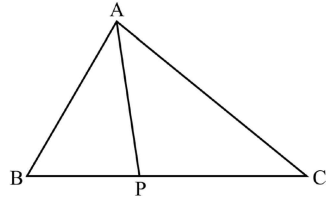
19. 일반항이

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

인 두 수열 $\{S_n\}, \{T_n\}$ 에 대하여 이차방정식 $x^2 - T_n x + S_n = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라 할 때, $\alpha_2^2 + \beta_2^2$ 의 값은? [24장충]

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| ① $\frac{7}{8}$ | ② $\frac{8}{9}$ | ③ $\frac{9}{10}$ |
| ④ $\frac{10}{11}$ | ⑤ $\frac{11}{12}$ | |

20. 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서
 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC = 75^\circ$,
 $\angle ABC = 60^\circ$ 이다.
 이때 \overline{BC} 위를 움직이는 점
 P가 있을 때, $\triangle APC$ 의
 외접원의 반지름의 길이의
 최솟값은? [24장충]



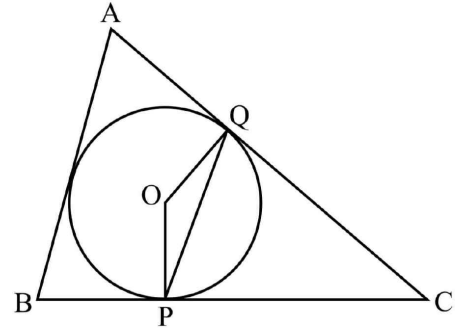
- ① $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$
 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

21. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2n^2 + 4n$ 을 만족시킬 때,

$\sum_{k=1}^8 a_{3k-1}$ 의 값은? [24장충]

- ① 208 ② 216 ③ 224
 ④ 232 ⑤ 240

22. 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 7$ 인 삼각형 ABC에
 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 CA와
 만나는 점을 Q, 내접원의 중심을 O라 할 때, 삼각형 OPQ의
 둘레의 길이가 $a\sqrt{6} + b\sqrt{7}$ 이라고 한다. 이때 ab 의 값은?
 (단, a, b 는 유리수) [24장충]



- ① $\frac{7}{6}$
 ② $\frac{25}{18}$
 ③ $\frac{32}{21}$
 ④ $\frac{45}{32}$
 ⑤ $\frac{54}{25}$

23. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자.

$$S_6 - S_3 = 6, \quad S_{12} - S_6 = 72$$

일 때, $S_{12} - S_9 - S_3$ 의 값을 구하시오. [24장충]

25. 모든 자연수 n 에 대하여 $5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ 은 8의 배수임을 보이시오. [24장충]

24. 사각형 ABCD에서

$$\overline{AB} = 5, \quad \overline{CD} = 6, \quad \overline{AD} = 3(\sqrt{3} + 1),$$

$$\angle BAD = 105^\circ, \quad \angle ADC = 60^\circ$$

일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. [24장충]

2학년 2024년 장충고 1학기 기말 수 I

1) ③

2) ①

3) ⑤

4) ③

5) ②

6) ②

7) ④

8) ⑤

9) ③

10) ①

11) ①

12) ④

13) ②

14) ②

15) ①

16) ③

17) ⑤

18) ②

19) ⑤

20) ④

21) ④

22) ③

23) 52

24) $\frac{27}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{45\sqrt{2}}{4}$

25) 풀이 참조

(i) $n = 1$ 일 때,

$$5 + 2 \times 3^0 + 1 = 8 \text{ 이므로 성립}$$

(ii) $n = k$ 일 때,

$$5^k + 2 \times 3^{k-1} + 1 \text{ 이 } 8 \text{ 의 배수라고 가정하면}$$

$$5^k + 2 \times 3^{k-1} + 1 = 8m$$

$n = k + 1$ 일 때,

$$5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1 = 5 \times 5^k + 6 \times 3^{k-1} + 1$$

$$= 4 \times 5^k + 4 \times 3^{k-1} + 5^k + 2 \times 3^{k-1} + 1$$

$$= 4(5^k + 3^{k-1}) + 8m$$

이때 $5^k, 3^{k-1}$ 은 모두 홀수이므로 $5^k + 3^{k-1}$ 은 짝수

즉, $4(5^k + 3^{k-1})$ 은 8 의 배수

따라서 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ 은 8 의 배수이다.