고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / dre수학			

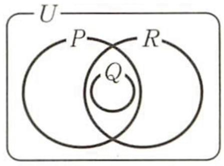
01 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{3\},\ \{4,\ 5\}\}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $n(A)=5$　② $1\in A$　③ $3\in A$
④ $\{4,\ 5\}\subset A$　⑤ $\{3,\ 4,\ 5\}\subset A$

02 전체집합 U의 공집합이 아닌
서로 다른 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여
$(B\cup A^C)^C\cup(A-B^C)$을 간단히 한 것은?

① A　② B　③ $A-B$
④ $A\cap B$　⑤ $A\cup B$

03 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 할 때 $P,\ Q$, R 사이의 포함 관계가 아래 그림과 같다. 다음 중 거짓인 명제는?
(단, U는 전체집합이다.)



① $q\rightarrow p$　② $q\rightarrow r$
③ $\sim p\rightarrow\ \sim r$　④ $\sim p\rightarrow\ \sim q$
⑤ $\sim r\rightarrow\ \sim q$

04 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의
세 함수 $f,\ g,\ h$가 다음 조건을 만족시킬 때,
$f(1)+g(2)+h(3)$의 값은?

> (가) f는 일대일대응, g는 항등함수,
> h는 상수함수이다.
> (나) $f(2)=g(2)=h(2)$
> (다) $f(3)=h(3)-g(1)$

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

05 두 조건 'p: $-3 \le x \le a$', 'q: $b < x < 3$'에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 상수 a, b의 값의 범위를 구하시오.

06 집합 $X=\{1,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x^2-4x+6$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

07 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응 중에서 $f(2)=a$, $f(4)=e$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

08 [2018년 3월 고2 문과 11번 변형]
실수 x에 대한 두 조건

p: $|x-a| \le 1$,

q: $x^2-2x-15>0$

에 대하여 $p \rightarrow \sim q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

09 $1<a<b$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\dfrac{1}{1-b} > \dfrac{1}{1-a}$ ㄴ. $\dfrac{b}{1-b} > \dfrac{a}{1-a}$

ㄷ. $\dfrac{b}{1-a} > \dfrac{a}{1-b}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$
④ 5 ⑤ 12

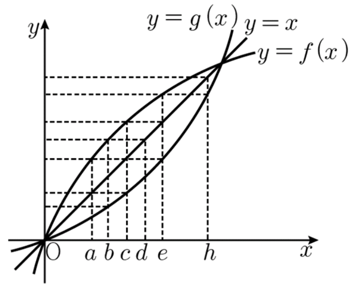
11 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=|x-2|+ax-6$이 역함수를 가질 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-1$
② $-1<a<0$
③ $0<a<1$
④ $a>1$
⑤ $a<-1$ 또는 $a>1$

12 실수 전체의 집합에서 정의된 일차함수 $f(x)$가 $f=f^{-1}$, $f(1)=4$를 만족한다. $y=f(x)$의 그래프의 x절편을 m, y절편을 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

13 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음 그림과 같을 때, $\left(g^{-1}\circ\left(f\circ g^{-1}\right)^{-1}\circ g\right)(e)$의 값은?
(단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

14 함수 $f(x)=\dfrac{bx+2}{x+a}$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=3$, $y=1$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

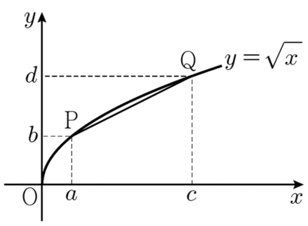
ㄱ. $f(x)=f^{-1}(x)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x-2$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $\dfrac{b+d}{2}=1$일 때, 직선 PQ의 기울기는? (단, $0<a<c$)



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

16 다음은 명제 '자연수 m, n에 대하여 m^2+3n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.'를 증명하는 과정이다.

> mn이 $\boxed{(가)}$라 가정하면
> m, n은 모두 $\boxed{(나)}$이어야 하므로
> $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때
> $m^2+3n^2=(2k-1)^2+3(2l-1)^2$
> $\qquad\qquad=2(2k^2-2k+6l^2-6l+2)$
> 이므로 m^2+3n^2은 $\boxed{(다)}$이다.
> 그런데 이것은 m^2+3n^2이 $\boxed{(라)}$라는 가정에 모순이다.
> 따라서 자연수 m, n에 대하여 m^2+3n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.

위의 과정에서 (가) ~ (라)에 알맞은 것을 써넣으시오.

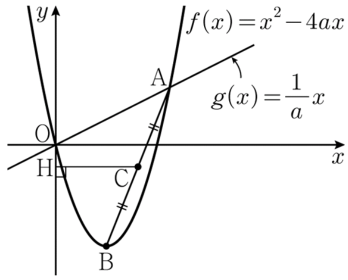
17 양수 a, b에 대하여 $a^2-8a+\dfrac{3a}{b}+\dfrac{25b}{3a}$의 값의 최솟값을 m, 그때 a, b의 값을 각각 α, β라 할 때, $m+\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

18 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+a & (x>3) \\ x-8 & (x \le 3) \end{cases}$의 역함수가 존재할 때, $f^{-1}(11)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

19 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{-7x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 성립할 때, $a+2b+3c$의 값을 구하여라.
(단, a, b, c는 상수이다.)

20 함수 $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$에 대하여
$f_1(x)=f(x), f_{n+1}(x)=(f \circ f_n)(x)$
(n은 자연수)로 정의할 때, $f_{2009}(2)$의 값을 구하시오.

21 다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-4ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 B라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하자. 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이의 최솟값은?
(단, O는 원점이다.)

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

22 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 X, Y에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 a, 집합 Y의 개수를 b라 하자. 이때 ab의 값을 구하시오.

(가) $\{2, 3, 5, 7\} \cap X=\{3, 5\}$
(나) $\{4, 6, 8\} \cup Y=\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

23 함수 $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{2-2x} & (x<-1) \\ 7-\sqrt{x+10} & (x\geq -1) \end{cases}$에 대하여 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=-7$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

24 함수 $y=4\sqrt{x-7}+6$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 접할 때, a의 값을 구하시오.

25 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, 방정식 $(f\circ f)(x)=2$의 모든 실근의 합을 구하시오.

> (가) 이차항의 계수는 양수이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 2이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 ①	03 ③
04 ④	05 $a \geq 3$, $-3 \leq b < 3$	
06 -4	07 6	08 ④
09 ②	10 ③	11 ⑤
12 ④	13 ①	14 ②
15 ④		
16 (가): 홀수, (나): 홀수, (다): 짝수, (라): 홀수		
17 $\frac{2}{5}$	18 7	19 -7
20 -5	21 ③	22 512
23 3	24 3	25 6

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [10회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{3\},\ \{4,\ 5\}\}$의 원소는
$1,\ 2,\ \{3\},\ \{4,\ 5\}$
① $n(A)=4$
② $1\in A$
③ $\{3\}\in A$이고 $3\not\in A$이다.
④ $\{4,\ 5\}\in A$이고 $\{4,\ 5\}\not\subset A$
⑤ $\{\{3\},\ \{4,\ 5\}\}\subset A$이고 $\{3,\ 4,\ 5\}\not\subset A$

02 정답 ①

해설
$$\begin{aligned}(B\cup A^C)^C\cup(A-B^C)&=(B^C\cap A)\cup(A\cap B)\\&=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\\&=A\cap(B^C\cup B)\\&=A\cap U\\&=A\end{aligned}$$

03 정답 ③

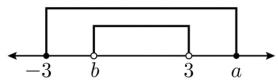
해설 주어진 벤 다이어그램에서 $Q\subset P,\ Q\subset R$이므로
$q\rightarrow p,\ q\rightarrow r$가 모두 참이다.
또한, $P^c\subset Q^c,\ R^c\subset Q^c$이므로
$\sim p\rightarrow\ \sim q,\ \sim r\rightarrow\ \sim q$도 모두 참이다.
그러나 $P^c\not\subset R^c$이므로 $\sim p\rightarrow\ \sim r$는 거짓이다.

04 정답 ④

해설 g는 항등함수이므로
$g(1)=1,\ g(2)=2,\ g(3)=3$
$\therefore\ f(2)=g(2)=h(2)=2$
이때 h는 상수함수이고 $h(2)=2$이므로
$h(1)=2,\ h(3)=2$
$\therefore\ f(3)=h(3)-g(1)=2-1=1$
한편 f는 일대일대응이므로 $f(1)=3$
$\therefore\ f(1)+g(2)+h(3)=3+2+2=7$

05 정답 $a\geq 3,\ -3\leq b<3$

해설 p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q\Rightarrow p$
즉, $\{x|b<x<3\}\subset\{x|-3\leq x\leq a\}$이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore\ a\geq 3,\ -3\leq b<3$

06 정답 -4

해설 $f(1)=g(1)$에서
$1-4+6=a+b$
$\therefore\ a+b=3$ $\cdots$ ㉠
$f(2)=g(2)$에서
$4-8+6=2a+b$
$\therefore\ 2a+b=2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=4$
$\therefore\ ab=-4$

07 정답 6

해설 $f(2)=a,\ f(4)=e$이고 함수 f는 일대일대응이므로
$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값은 다음과 같다.
(ⅰ) $f(1)=b,\ f(3)=c,\ f(5)=d$
(ⅱ) $f(1)=b,\ f(3)=d,\ f(5)=c$
(ⅲ) $f(1)=c,\ f(3)=b,\ f(5)=d$
(ⅳ) $f(1)=c,\ f(3)=d,\ f(5)=b$
(ⅴ) $f(1)=d,\ f(3)=b,\ f(5)=c$
(ⅵ) $f(1)=d,\ f(3)=c,\ f(5)=b$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 6이다.

08 정답 ④

해설 조건 $p : |x-a| \le 1$의 진리집합은

$P = \{x \mid a-1 \le x \le a+1\}$

조건 $q :\ x^2-2x-15>0$에 대하여

조건 $\sim q :\ x^2-2x-15 \le 0$이므로

조건 $\sim q$의 진리집합은

$Q^C = \{x \mid x^2-2x-15 \le 0\}$

$= \{x \mid -3 \le x \le 5\}$

따라서 $p \to \sim q$가 참이 되려면

$P \subset Q^C$이어야 하므로

$-3 \le a-1,\ a+1 \le 5$

$-2 \le a,\ a \le 4$

$-2 \le a \le 4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4

09 정답 ②

해설 $1 < a < b$이므로

$1-a<0,\ 1-b<0,\ b-a>0$ ……㉠

ㄱ. $\dfrac{1}{1-b} - \dfrac{1}{1-a}$

$= \dfrac{(1-a)-(1-b)}{(1-a)(1-b)}$

$= \dfrac{b-a}{(1-a)(1-b)} > 0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \dfrac{1}{1-b} > \dfrac{1}{1-a}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{b}{1-b} - \dfrac{a}{1-a}$

$= \dfrac{b(1-a)-a(1-b)}{(1-a)(1-b)}$

$= \dfrac{b-a}{(1-a)(1-b)} > 0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \dfrac{b}{1-b} > \dfrac{a}{1-a}$ (참)

ㄷ. $\dfrac{b}{1-a} - \dfrac{a}{1-b}$

$= \dfrac{b(1-b)-a(1-a)}{(1-b)(1-a)}$

$= \dfrac{(a-b)(a+b-1)}{(1-a)(1-b)} > 0$ ($\because a+b>2$)

$\therefore \dfrac{b}{1-a} < \dfrac{a}{1-b}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 정답 ③

해설 코시－슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2\right\} \ge (x+y)^2$

$13 \ge (x+y)^2$이므로

$-\sqrt{13} \le x+y \le \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

11 정답 ⑤

해설 $f(x) = |x-2|+ax-6$

$= \begin{cases} (a-1)x-4 & (x<2) \\ (a+1)x-8 & (x \ge 2) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서 직선의 기울기 $a-1$과 $a+1$은 모두 양수이거나 모두 음수이어야 하므로

$(a-1)(a+1) > 0$

$\therefore a < -1$ 또는 $a > 1$

12 정답 ④

해설 $f = f^{-1}$이므로 $f(1)=4$에서 $f(1)=f^{-1}(1)=4$

$f^{-1}(1)=4$이므로 $f(4)=1$

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \ne 0$)라 하면

$f(1)=a+b=4,\ f(4)=4a+b=1$

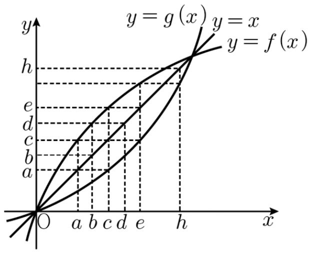
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=5$

$\therefore f(x)=-x+5$이므로 $y=f(x)$의 x절편은 5, y절편은 5이다.

따라서 $m=5,\ n=5$이므로 $m+n=10$

13 정답 ①

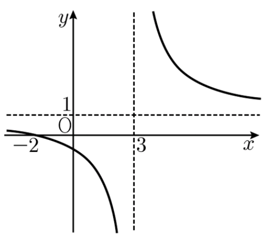
해설 $\left(g^{-1} \circ \left(f \circ g^{-1}\right)^{-1} \circ g\right)(e)$
$=\left(g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g\right)(e)$
$=\left(f^{-1} \circ g\right)(e)$
$=f^{-1}(g(e))$
$=f^{-1}(c)$



$f^{-1}(c)=k$라 하면
$f(k)=c$
$\therefore k=a$
$\therefore f^{-1}(c)=a$
$\therefore \left(g^{-1} \circ \left(f \circ g^{-1}\right)^{-1} \circ g\right)(e)=a$

14 정답 ②

해설 $f(x)=\dfrac{bx+2}{x+a}=\dfrac{-ab+2}{x+a}+b$
이때 점근선은 $x=-a$, $y=b$이므로
$-a=3$, 즉 $a=-3$이고, $b=1$이다.
$\therefore f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{5}{x-3}+1$
따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(4)=\dfrac{5}{4-3}+1=6$에서 $f^{-1}(6)=4$이고,
$f(6)=\dfrac{5}{6-3}+1=\dfrac{8}{3}$이므로
$f(x) \neq f^{-1}(x)$ (거짓)
ㄴ. $f(x)$의 점근선이 $x=3$, $y=1$이므로 두 점근선의 교점은 $(3, 1)$이다.
따라서 $f(x)$는 $y=\pm(x-3)+1$, 즉 $y=x-2$, $y=-x+4$에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. 함수의 그래프는 모든 사분면을 지난다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

15 정답 ④

해설 두 점 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$는
함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로
$b=\sqrt{a}$, $d=\sqrt{c}$
$\therefore a=b^2$, $c=d^2$
따라서 직선 PQ의 기울기는
$\dfrac{d-b}{c-a}=\dfrac{d-b}{d^2-b^2}=\dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)}=\dfrac{1}{d+b}$이고,
$\dfrac{b+d}{2}=1$에서 $b+d=2$이므로
(직선 PQ의 기울기)$=\dfrac{1}{2}$

16 정답 (가): 홀수, (나): 홀수, (다): 짝수, (라): 홀수

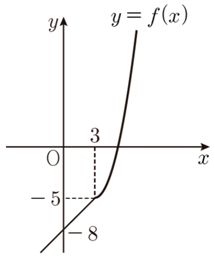
해설 mn이 $\boxed{\text{홀수}}$라 가정하면 m, n은 모두 $\boxed{\text{홀수}}$이어야 하므로 $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때
$m^2+3n^2=(2k-1)^2+3(2l-1)^2$
$=2\left(2k^2-2k+6l^2-6l+2\right)$
이므로 m^2+3n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.
그런데 이것은 m^2+3n^2이 $\boxed{\text{홀수}}$라는 가정에 모순이다.
따라서 자연수 m, n에 대하여 m^2+3n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.

17 정답 $\dfrac{2}{5}$

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$a^2-8a+\frac{3a}{b}+\frac{25b}{3a}=(a-4)^2+\frac{3a}{b}+\frac{25b}{3a}-16$$
$$\geq (a-4)^2+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{25b}{3a}}-16$$
$$=(a-4)^2-6$$
(단, 등호는 $3a=5b$일 때 성립)
이때 $(a-4)^2-6$는 $a=4$일 때 최솟값 -6을 갖는다.
$a=4$을 $3a=5b$에 대입하면 $b=\dfrac{12}{5}$
따라서 $m=-6$, $\alpha=4$, $\beta=\dfrac{12}{5}$
$\therefore m+\alpha+\beta=\dfrac{2}{5}$

18 정답 7

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



곡선 $y=x^2-6x+a$가 점 $(3,\ -5)$를 지나야 하므로

$9-18+a=-5$

$\therefore\ a=4$

$f^{-1}(11)=k$라 하면 $f(k)=11$이고,

$x>3$일 때, $f(x)>-5$,

$x\le 3$일 때 $f(x)\le -5$이므로 $k>3$

즉, $f(k)=11$에서 $k^2-6k+4=11$

$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$

$\therefore\ k=7\ (\because\ k>3)$

$\therefore\ f^{-1}(11)=7$

19 정답 -7

해설 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하여 정리하면

$a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)=-7x+1$

$\therefore\ (a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)$

$=-7x+1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ a-b+c=-7,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 정리하면

$a=-2,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ a+2b+3c=-2+2\cdot 2+3\cdot(-3)=-7$

20 정답 -5

해설 $f_1(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

$f_2(x)=f(f_1(x))$

$=\dfrac{\dfrac{x-3}{x+1}-3}{\dfrac{x-3}{x+1}+1}=-\dfrac{x+3}{x-1}$

$f_3(x)=f(f_2(x))$

$=\dfrac{-\dfrac{x+3}{x-1}-3}{-\dfrac{x+3}{x-1}+1}=\dfrac{-4x}{-4}=x$

$f_4(x)=f(f_3(x))=f(x)=f_1(x)$

$f_5(x)=f(f_4(x))=f(f_1(x))=f_2(x)$

$f_6(x)=f(f_5(x))=f(f_2(x))=f_3(x)$

$\vdots$

$\therefore\ f_{3k}(x)=f_3(x),\ f_{3k+1}(x)=f_1(x),$

$f_{3k+2}(x)=f_2(x)$ (단, k는 자연수)

$\therefore\ f_{2009}(2)=f_{3\cdot 669+2}(2)$

$=f_2(2)=-\dfrac{2+3}{2-1}=-5$

21 정답 ③

해설 이차함수 $f(x)=x^2-4ax$의 그래프와 직선

$g(x)=\frac{1}{a}x$의 교점 A의 x좌표는

$x^2-4ax=\frac{1}{a}x$에서

$x-4a=\frac{1}{a}$ ($\because x>0$)

$\therefore x=4a+\frac{1}{a}$

위의 식을 $y=\frac{1}{a}x$에 대입하면 $y=4+\frac{1}{a^2}$이므로

$\mathrm{A}\left(4a+\frac{1}{a},\ 4+\frac{1}{a^2}\right)$

$f(x)=x^2-4ax=(x-2a)^2-4a^2$에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점 B는

$\mathrm{B}(2a,\ -4a^2)$

선분 AB의 중점 C는

$\mathrm{C}\left(\frac{4a+\frac{1}{a}+2a}{2},\ \frac{4+\frac{1}{a^2}-4a^2}{2}\right)$, 즉

$\mathrm{C}\left(3a+\frac{1}{2a},\ 2+\frac{1}{2a^2}-2a^2\right)$이므로

점 H는

$\mathrm{H}\left(0,\ 2+\frac{1}{2a^2}-2a^2\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{CH}}=\left|3a+\frac{1}{2a}\right|=3a+\frac{1}{2a}$ ($\because a>0$)

$3a>0$, $\frac{1}{2a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+\frac{1}{2a}\ge 2\sqrt{3a\cdot\frac{1}{2a}}$$
$$=\sqrt{6}\ \left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{\sqrt{6}} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 선분 CH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다.

22 정답 512

해설 조건 (가)에서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고, 2, 7은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{10-2-2}=2^6=64$

조건 (나)에서 집합 Y는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 7, 9를 반드시 원소로 갖고, 1, 3, 5, 10은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 Y의 개수는 $2^{10-3-4}=2^3=8$

즉, $a=64$, $b=8$이므로 $ab=512$

23 정답 3

해설 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=-7$에서 $(f\circ f)^{-1}(a)=-7$

$\therefore (f\circ f)(-7)=a$

이때 $f(-7)=2+\sqrt{2-2\cdot(-7)}=6$이고,

$f(6)=7-\sqrt{6+10}=3$

$\therefore a=(f\circ f)(-7)=f(f(-7))=f(6)=3$

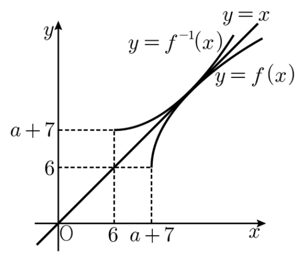
24 정답 3

해설 $y=4\sqrt{x-7}+6$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=4\sqrt{x-a-7}+6$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하려면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 접해야 한다.



$4\sqrt{x-a-7}+6=x$에서

$4\sqrt{x-a-7}=x-6$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16(x-a-7)=x^2-12x+36$

$\therefore x^2-28x+16a+148=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-14)^2-(16a+148)=0$

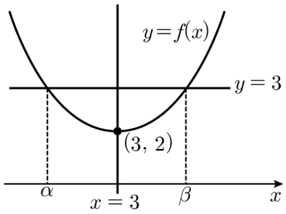
$-16a+48=0$

$\therefore a=3$

25

정답 6

해설 조건 (다)에서 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$가
$f(3-x)=f(3+x)$를 만족시키므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의
y좌표가 2이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.
즉, $f(3)=2$이므로 방정식 $(f \circ f)(x)=2$에서
$f(f(x))=2$
$\therefore\ f(x)=3$
이때 조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수가
양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$은
서로 다른 두 점에서 만난다.
즉, 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 두 실근을 갖고
두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=3$이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=3$$

$\therefore\ \alpha+\beta=6$