마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수) 299~322p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$을 간단히 하면?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

02 $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x})$를 계산하시오.

03 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{y|y\le -3\}$ ② $\{y|y\ge -3\}$ ③ $\{y|y\le 3\}$
④ $\{y|y\ge 3\}$ ⑤ $\{y|y\le 9\}$

04 $1\le x\le 4$에서 함수 $y=\sqrt{5-x}+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

05 $\sqrt{6-|x-3|}+\sqrt{|x-5|-2}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오.

06 무리식 $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x+2}}$의 값이 실수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

07 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$ 일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}$ 의 값은?

① -2　② $2a$　③ $2a-2$
④ $-2a$　⑤ 2

08 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|b|$를 간단히 하면?

① $-2a$　② $-a$　③ $a-2b$
④ a　⑤ 0

09 $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

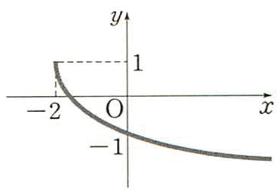
① -3　② -1　③ 5
④ 8　⑤ 10

10 $x=\sqrt{2}+3$일 때, x^3-6x^2+8x+1의 값은?

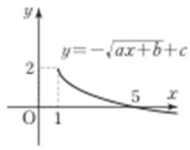
① $4+\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$
③ 0　④ $4-\sqrt{2}$
⑤ $-3\sqrt{2}$

11 $x=3+2\sqrt{2}$, $y=3-2\sqrt{2}$일 때, $\sqrt{2x}+\sqrt{2y}$의 값을 구하시오.

12 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.



13 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

14 [2017년 11월 고1 4번 변형]
무리함수 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에 대하여 $f(-2)=3$일 때, 상수 k의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역을 A, 함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

16 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

17 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{2x+6}-2$과 일치한다. $n-m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18 다음 세 함수의 그래프가 모두 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

$$y=\sqrt{x}+1,\ y=-\sqrt{x}+3,$$
$$y=-\sqrt{-x-4}-2$$

① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면 ④ 제4사분면 ⑤ 제1, 4사분면

19 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지난다.

② 정의역은 $\{x|x \geq 4\}$이다.

③ 치역은 $\{y|y \geq -5\}$이다.

④ 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1사분면을 지나지 않는다.

20 $0 \leq x \leq 3$에서 함수 $y=-\sqrt{x+a}+4$의 최솟값이 2일 때, 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21 $y=\sqrt{x-1}+2$의 역함수는?

① $y=x^2+4x+3\ (x \geq 2)$

② $y=x^2-4x+5\ (x \geq 2)$

③ $y=x^2+4x+3\ (x \geq 1)$

④ $y=x^2-4x+5\ (x \geq 1)$

⑤ $y=x^2-3x+2\ (x \geq 3)$

22 무리함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)=4$이다. 이때 $g(4)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수)

23 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & (x\text{는 양의 유리수}) \\ 3x^2 & (x\text{는 양의 무리수}) \end{cases}$$ 일 때,

$(f \circ f \circ f)(3)$의 값은?

① 1　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

24 정의역이 $\{x|x>4\}$인
두 함수 $f(x)=\frac{3x-4}{x-3}$, $g(x)=\sqrt{2x-7}$에 대하여
$(g \circ f^{-1})^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

25 정의역이 $\{x|x>2\}$인
두 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{2x-3}$ 에 대하여
$(g \circ f^{-1})^{-1}(5)$의 값을 구하시오.

26 $x=2+\sqrt{3}$ 일 때,
$\left|\dfrac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\right|$ 의 값을 구하시오.

27 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ 일 때,
$\dfrac{1}{f(3)}+\dfrac{1}{f(4)}+\dfrac{1}{f(5)}+\cdots+\dfrac{1}{f(2023)}$ 의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

28 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가
두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는
정수 k의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

29 함수 $y=-\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가
제 4사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

30 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의
거리가 $2\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

31 함수 $f(x)=\sqrt{3x+6}-2$의 그래프와 역함수 f^{-1}의 그래프는 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 길이는? (단, P의 x좌표는 Q의 x좌표보다 작다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

32 [2015년 11월 고2 문과 15번/4점]
좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{x+4}+1$이 두 직선 $x=0$, $y=-\frac{1}{4}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

33 무리함수 $y=\sqrt{x+3}+4$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y=\sqrt{x+3}+4 \\ y=g(x) \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. 이때 $\alpha^2-9\beta$의 값을 구하시오.

34 두 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k\ (x\geq 0)$, $g(x)=\sqrt{7x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

35 함수 $f(x)=\sqrt{6x-3}+a$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 이 두 점 사이의 거리가 8일 때, 상수 a의 값은? (단, $-1<a\leq 1$)

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수) 299~322p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 -4	03 ③
04 9	05 10	06 14
07 ⑤	08 ④	09 ③
10 ①	11 4	12 8
13 ②	14 ③	15 ②
16 8	17 ①	18 ②
19 ⑤	20 ③	21 ②
22 1	23 ③	24 4
25 $\frac{29}{12}$	26 2	27 ③
28 ②	29 ③	30 4
31 ②	32 ①	33 -13
34 ④	35 ③	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수) 299~322p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{-1}{\sqrt{2}-1}}=1-\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{-1}{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{2}$

$\therefore (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$

02 정답 -4

해설 $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x})$

$=(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x})^2$

$=x-4-x$

$=-4$

03 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지나므로

$a=-\sqrt{-a+a}-a+6,\ 2a=6$

$\therefore\ a=3$

따라서 $y=-\sqrt{x+3}-3+6$, 즉

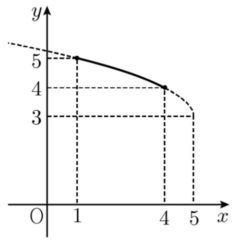
$y=-\sqrt{x+3}+3$이므로 이 함수의 치역은

$\{y|y\leq 3\}$이다.

04 정답 9

해설 $y=\sqrt{5-x}+3=\sqrt{-(x-5)}+3$이므로

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $1\leq x\leq 4$에서 $y=\sqrt{5-x}+3$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x=1$일 때, $M=5$,

최솟값은 $x=4$일 때, $m=4$

$\therefore\ M+m=9$

05 정답 10

해설 $6-|x-3|\geq 0$이므로 $|x-3|\leq 6$

$-6\leq x-3\leq 6$

$\therefore\ -3\leq x\leq 9$ $\cdots$ ㉠

$|x-5|-2\geq 0$이므로 $|x-5|\geq 2$

$x-5\leq -2$ 또는 $x-5\geq 2$

$\therefore\ x\leq 3$ 또는 $x\geq 7$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{6-|x-3|}+\sqrt{|x-5|-2}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-3\leq x\leq 3$ 또는 $7\leq x\leq 9$

따라서 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9$의 10개이다.

06 정답 14

해설 $5-x\geq 0$이므로

$x\leq 5$ $\cdots$ ㉠

$x+2>0$이므로 $x>-2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\leq 5$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3+4+5=14$

07 정답 ⑤

해설 $\sqrt{\dfrac{B}{A}}=-\dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}$ 이려면 $B\ge0,\ A<0$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$ 에서 $a+1\ge0$,

$a-1<0$이다.

$\therefore\ -1\le a<1$

$\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}$

$=|a+1|+|a-1|$

$=a+1-(a-1)=2$

08 정답 ④

해설 $a\ge0,\ b<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-|b|=|a-b|-|b|$

$=(a-b)-(-b)=a$

09 정답 ③

해설 $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{-4+2\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$

10 정답 ①

해설 $x=\sqrt{2}+3$에서 $x-3=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$x^2-6x+9=2$ $\quad\therefore x^2-6x=-7$ ……㉠

$\therefore\ x^3-6x^2+8x+1=x(x^2-6x)+8x+1$

$=-7x+8x+1$ ($\because$㉠)

$=x+1$

$=\sqrt{2}+3+1$

$=4+\sqrt{2}$

11 정답 4

해설 $x+y=6,\ xy=1$

$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}$를 제곱하면

$(\sqrt{2x}+\sqrt{2y})^2=2x+2\sqrt{4xy}+2y$

$=2(x+y)+4\sqrt{xy}$

$=2\cdot6+4\sqrt{1}$

$=16$

$\therefore\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=\sqrt{16}=4$ ($\because\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y}>0$)

12 정답 8

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1\ (a>0)$로 놓으면

이 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2$

$2a=4$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ y=-\sqrt{2(x+2)}+1$

$=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $-\sqrt{2x+4}+1=-\sqrt{ax+b}+c$이므로

$a=2,\ b=4,\ c=1$

$\therefore\ abc=8$

13 정답 ②

해설 주어진 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는

$y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2\quad(a>0)$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(5,0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{4a}+2$

$\sqrt{4a}=2\qquad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{x-1}+2$

따라서 $a=1,\ b=-1,\ c=2$이므로

$abc=1\cdot(-2)\cdot2=-2$

14 정답 ③

해설 $f(-2)=3$이므로 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에서

$\sqrt{-4+k}=3$

$\therefore\ k=13$

15 정답 ②

해설 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역은

$5x+2\geq 0$에서 $x\geq -\dfrac{2}{5}$ 이므로

$\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{2}{5}\right\}$ 이다.

$\therefore A=\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{2}{5}\right\}$

함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역은

$16-4x\geq 0$에서 $x\leq 4$이므로 $\{x\mid x\leq 4\}$이다.

따라서 $A\cap B=\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{2}{5}\leq x\leq 4\right\}$이므로 $A\cap B$에 속하는 정수는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 5개이다.

16 정답 8

해설 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-2)}+3$

이 함수의 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지나므로

$7=\sqrt{2a}+3,\ \sqrt{2a}=4$

$2a=16\quad \therefore\ a=8$

17 정답 ①

해설 $y=\sqrt{2x+6}-2=\sqrt{2(x+3)}-2$이므로

$y=\sqrt{2x}$ 를 x축으로 -3만큼

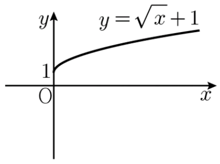
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.

따라서 $m=-3,\ n=-2$ 이므로

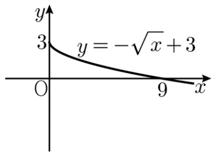
$\therefore n-m=1$

18 정답 ②

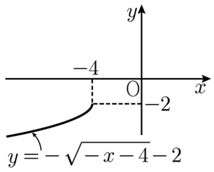
해설 세 함수 $y=\sqrt{x}+1,\ y=-\sqrt{x}+3,$
$y=-\sqrt{-x-4}-2$의 그래프와 그 그래프가 지나지 않는 사분면은 다음과 같다.



⇨ 제$2,\ 3,\ 4$사분면



⇨ 제$2,\ 3$사분면



⇨ 제$1,\ 2,\ 4$사분면

따라서 주어진 세 함수의 그래프가 모두 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.

19 정답 ⑤

해설 ① $y=\sqrt{8-2x}-3$에 $y=0$을 대입하면 $0\neq\sqrt{7}-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$의 그래프는

점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지나지 않는다. (거짓)

② $8-2x\geq 0$에서 $x\leq 4$

따라서 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$이다. (거짓)

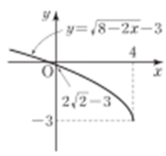
③ $\sqrt{8-2x}\geq 0$이므로

$y=\sqrt{8-2x}-3\geq 0-3=-3$

따라서 치역은 $\{y|y\geq -3\}$이다. (거짓)

④ $y=\sqrt{8-2x}-3=\sqrt{-2(x-4)}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

⑤ 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제 1사분면을 지나지 않는다. (참)



따라서 옳은 것은 ⑤이다.

20 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}+4$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로
$x=3$에서 최솟값 $-\sqrt{3+a}+4$를 갖는다.
따라서 $-\sqrt{3+a}+4=2$이므로
$\sqrt{3+a}=2,\ 3+a=4$
$\therefore a=1$
함수 $y=-\sqrt{x+1}+4$는 $x=0$일 때 최댓값을 가지므로
구하는 최댓값은 $-\sqrt{0+1}+4=3$이다.

21 정답 ②

해설 $y-2=\sqrt{x-1}$에서 $\sqrt{x-1}\geq 0$이므로 $y\geq 2$이다.
또, 양변을 제곱하면 $(y-2)^2=x-1$
$\therefore x=y^2-4y+5\ (y\geq 2)$
x와 y를 바꾸면 $y=x^2-4x+5\ (x\geq 2)$

22 정답 1

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(3)=4$이므로
$f(4)=3$
즉, $f(4)=\sqrt{-4+a}+2=3$이므로
$\sqrt{-4+a}=1,\ -4+a=1$
$\therefore a=5$
$\therefore f(x)=\sqrt{-x+5}+2$
$g(4)=k$라 하면 $f(k)=4$
$f(k)=\sqrt{-k+5}+2=4$
$\sqrt{-k+5}=2,\ -k+5=4$
$\therefore k=1$
$\therefore g(4)=1$

23 정답 ③

해설 $f(3)=\sqrt{3},\ f(\sqrt{3})=3(\sqrt{3})^2=9$이고,
$f(9)=\sqrt{9}=3$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f\circ f)(3)&=f(f(f(3)))\\&=f(f(\sqrt{3}))\\&=f(9)=3\end{aligned}$$

24 정답 4

해설 $(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$
$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로
$\sqrt{2a-7}=3,\ 2a-7=9$
$\therefore a=8$
$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(3)=f(8)=\dfrac{24-4}{8-3}=4$

25 정답 $\frac{29}{12}$

해설 $(g\circ f^{-1})^{-1}(5)=(f\circ g^{-1})(5)=f(g^{-1}(5))$
$g^{-1}(5)=a$라 하면 $g(a)=5$이므로
$\sqrt{2a-3}=5,\ 2a-3=25$
$\therefore a=14$
$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(5)=f(14)=\dfrac{28+1}{14-2}=\dfrac{29}{12}$

26 정답 2

해설 $x=2+\sqrt{3}$에서 $x-2=\sqrt{3}$
위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=3$
$\therefore x^2-4x+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\\&=\frac{(x^2-4x+1)(x^2+x+2)-2x+2\sqrt{3}}{x^2-4x+1+x-\sqrt{3}}\\&=\frac{-2x+2\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\\&=\frac{-4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}\\&=\frac{-4}{2}\\&=-2\end{aligned}$$

$$\therefore \left|\frac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\right|=|-2|=2$$

27 정답 ③

해설 $f(n)=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(5)}+\cdots+\frac{1}{f(2023)}$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})$$
$$=\sqrt{2025}-\sqrt{4}$$
$$=45-2$$
$$=43$$

28 정답 ②

해설 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $x=3$일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3}-2$가 1과 5 사이에 있어야 한다.

즉, $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$

$\sqrt{3k+3}-2\ge1$에서

$\sqrt{3k+3}\ge3$, $3k+3\ge9$

$\therefore k\ge2$

또, $\sqrt{3k+3}-2\le5$에서

$\sqrt{3k+3}\le7$, $0\le3k+3\le49$

$\therefore 2\le k\le\frac{46}{3}$

따라서 $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$를 만족하는 k의 범위는 $2\le k\le\frac{46}{3}$ 이므로 구하는 정수 k는 $2, 3, 4, \cdots, 15$의 14개이다.

29 정답 ③

해설 $y=-\sqrt{1-x}-3=-\sqrt{-(x-1)}-3$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고 y절편은 -4이다.

또, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, -3)$을 지날 때,

$-3=-1+k$

$\therefore k=-2$

(ⅱ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, -4)$를 지날 때,

$-4=0+k$

$\therefore k=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 직선 $y=-x+k$가 $y=-\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 제 4사분면에서 만나려면

$-4<k\le-2$

따라서 정수 k는 $-3, -2$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)=-5$

30 정답 4

해설 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-6x+4+a=0$ $\cdots$ ㉠

그런데 두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)

이때 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$ $\cdots$ ㉡

두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$

$(\alpha-\beta)^2=4$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$ $\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$6^2-4(4+a)=4$

$\therefore a=4$

31 정답 ②

해설 무리함수 $f(x)=\sqrt{3x+6}-2$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 함수 f의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 위에서 만난다.

$\sqrt{3x+6}-2=x$

$\sqrt{3x+6}=x+2$

양변을 각각 제곱하면

$3x+6=x^2+4x+4$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 교점의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,\ -2)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$이므로

선분 PQ의 길이는

$\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

32 정답 ①

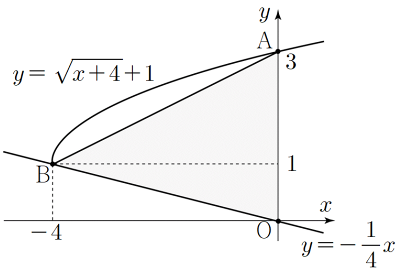
해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프는

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$을 지난다.

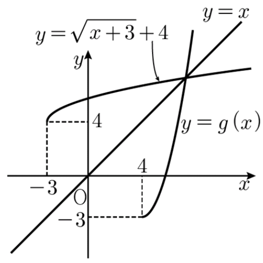
직선 $y=-\dfrac{1}{4}x$는 원점 O와 점 B를 지난다.



$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

33 정답 -13

해설 두 함수 $y=\sqrt{x+3}+4$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 그 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



즉, 연립방정식 $\begin{cases} y=\sqrt{x+3}+4 \\ y=g(x) \end{cases}$의 해는

직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\alpha=\beta$이다.

따라서 $y=\sqrt{x+3}+4$와 $y=x$를 연립하면

$\sqrt{x+3}+4=x$에서

$\sqrt{x+3}=x-4$

양변을 제곱하면

$x+3=x^2-8x+16$

$\therefore\ x^2-9x+13=0$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2-9\alpha+13=0$, 즉 $\alpha^2-9\alpha=-13$

$\therefore\ \alpha^2-9\beta=\alpha^2-9\alpha$ ($\because\ \alpha=\beta$)

$=-13$

34 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k\ (x\geq 0)$는

집합 $\{x\mid x\geq 0\}$에서 집합 $\left\{y \,\middle|\, y\geq \frac{1}{7}k\right\}$로의

일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k$에서

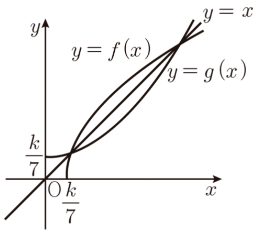
$\frac{1}{7}x^2=y-\frac{1}{7}k$, $x^2=7y-k$

$\therefore\ x=\sqrt{7y-k}\ (\because\ x\geq 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{7x-k}$

즉, 함수 $g(x)=\sqrt{7x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k=x$에서

$x^2-7x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$k\geq 0$, $D=(-7)^2-4k>0$

$\therefore\ 0\leq k<\frac{49}{4}$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 12$의 13개이다.

35 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\sqrt{6x-3}+a$가 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하는 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 교점의 좌표를 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하자.

$\sqrt{6x-3}+a=x$에서 $\sqrt{6x-3}=x-a$

양변을 제곱하면

$6x-3=x^2-2ax+a^2$

$x^2-2(a+3)x+a^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$-1<a\leq 1$에서

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+3)=6a+6>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖고,

이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 α, β이다.

두 점 A, B 사이의 거리가 8이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=8$

$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=8$

$\beta-\alpha=4\sqrt{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(a+3)$

$\alpha\beta=a^2+3$

이므로

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{\{2(a+3)\}^2-4(a^2+3)}\\&=\sqrt{24a+24}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $24a+24=32$에서

$a=\frac{1}{3}$