마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)235~265p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 함수

$f(x)=x+a$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<a) \\ -x & (x \geq a) \end{cases}$

에 대하여 $(g \circ f)(-2)+(f \circ g)(3)=41$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

02 [2020년 3월 고2 14번/4점]

함수 $f(x)=x^2-2x+a$가

$(f \circ f)(2)=(f \circ f)(4)$를 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

03 [2013년 11월 고1 21번/4점]

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (x>2) \\ x & (|x| \leq 2) \\ -2 & (x<-2) \end{cases}, \quad g(x)=x^2-2$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

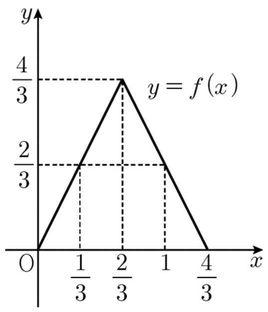
ㄱ. $(f \circ g)(2)=2$

ㄴ. $(g \circ f)(-x)=(g \circ f)(x)$

ㄷ. $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$

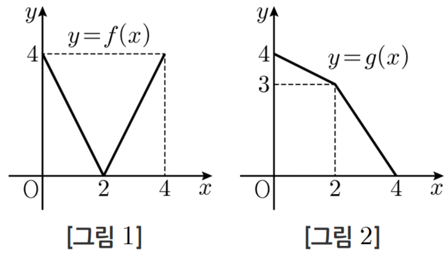
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

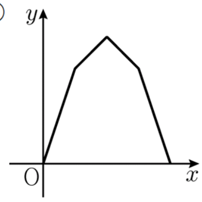
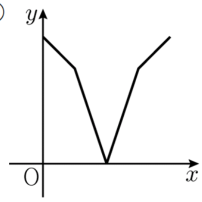
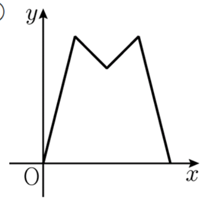
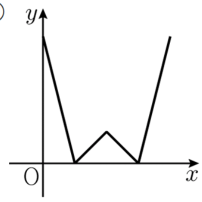
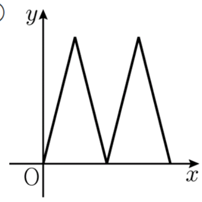
04 집합 $A=\left\{x \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{4}{3}\right\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.
$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라고 할 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+f^3\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{20}\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은?



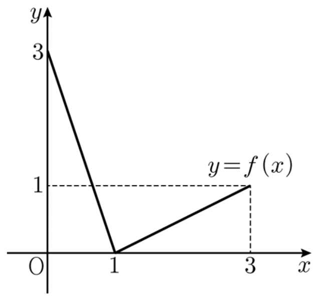
① $\frac{4}{3}$　② 2　③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{10}{3}$　⑤ 4

05 $0 \le x \le 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래와 같다. 다음 중 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형은?



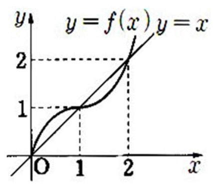
①

②

③

④

⑤


06 [2014년 3월 고2 이과 20번/4점]
그림은 $0 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. 합성함수 $f \circ f$를 f^2, $f^2 \circ f$를 f^3, $\cdots$, $f^n \circ f$를 f^{n+1}으로 나타내기로 할 때, $f^n\left(\frac{3}{2}\right)$이 n이 커짐에 따라 한없이 가까이 가는 값은?



① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

08 [2021년 11월 고1 28번 변형]
실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$f(x)=\begin{cases} x+5 & (x<1) \\ x^2-7x+12 & (x \ge 1) \end{cases}$에 대하여
$(f \circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

09 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=6x-5$를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은 얼마인가?

① -8 ② -3 ③ 1
④ 4 ⑤ 9

10 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$f(x)=3x+2-a|x-1|$의 역함수가 존재하도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

11 집합 $S=\{n|1 \le n \le 100,\ n$은 8의 배수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X와 집합 $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$를 $f(n)$은 'n을 5로 나눈 나머지'로 정의하자. 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오.

12 함수 f에 대하여
$f^2(x)=f(f(x)),\ f^3(x)=f(f(f(x)))$로 정의하자.
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 두 조건 $f(1)=2,\ f^3=I$ (I는 항등함수)를 만족시킨다.
함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{21}(2)+g^{26}(1)$의 값을 구하시오.

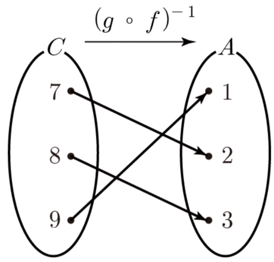
13 [2015년 11월 고2 문과 19번/4점]
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x=1,\ 2) \\ x+a & (x=3,\ 4) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

이고, 함수 f의 역함수 g가 존재한다.
$g^1(x)=g(x),\ g^{n+1}(x)=g(g^n(x))\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
라 할 때, $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14 세 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{4,\ 5,\ 6\}$, $C=\{7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f : A \to B$와 $g : B \to C$가 일대일대응이다.
함수 $(g \circ f)^{-1} : C \to A$가 그림과 같고 $f(3)=4,\ g(5)=9$일 때, $f(1)+g(6)$의 값은?



① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

15 [2018년 10월 고3 문과 28번/4점]
두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f는 일대일대응이다.
> (나) $f(1) \ne 2$
> (다) 등식 $\dfrac{1}{2}f(a)=(f \circ f^{-1})(a)$를 만족시키는 a의 개수는 2이다.

$f(2) \cdot f^{-1}(2)$의 값을 구하시오.

16 다음 보기의 중 $f=f^{-1}$를 만족하는 함수인 것을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)=x+2$
ㄴ. $f(x)=-x-2$
ㄷ. $f(x)=-|x|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 함수 $f(x)=x^2-4x+2a$ $(x \geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

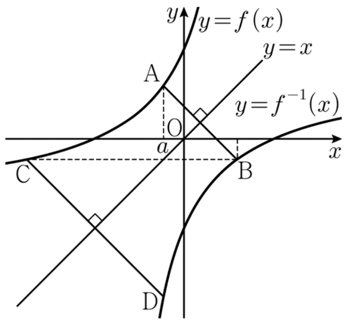
18 집합 $X=\{x|x \leq k\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-2x^2+20x-45$가 일대일함수가 되도록 하는 k의 최댓값을 구하시오.

19 집합 $X=\{x \mid x \geqq a\}$ 에서 X 로의 함수 $f(x)=x^2-2x$ 가 일대일 대응이기 위한 상수 a 의 값을 구하시오.

20 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x & (x \geq 2) \\ -x^2+5x & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $(f \circ f)(3)+f^{-1}(-6)$의 값을 구하시오.

21 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를
$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x<0) \end{cases}$으로 정의할 때,
$f^{-1}(2)+f^{-1}(a)=5$를 만족하는 상수 a의 값을 구하시오.

22 다음 그림은 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하고 실선은 직선 $y=x$에 수직이다.)



① $-f(a)$ ② $f^{-1}(a)$ ③ $-f^{-1}(a)$
④ $f^{-1}\left(f^{-1}(a)\right)$ ⑤ $-f^{-1}\left(f^{-1}(a)\right)$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)235~265p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 2	02 ①	03 ⑤
04 ②	05 ①	06 ③
07 ③	08 11	09 ④
10 2	11 72	12 4
13 ③	14 ③	15 12
16 ②	17 $3 \leq a < \frac{25}{8}$	
18 5	19 3	20 26
21 15	22 ②	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)235~265p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
22문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 2

해설 $f(-2)=a-2$이므로 $(g\circ f)(-2)=(a-2)^2$

(i) $a\le 3$일 때

$g(3)=-3$이므로 $(f\circ g)(3)=a-3$

$(a-2)^2+a-3=41$이므로

$a^2-3a-40=0$

$(a-8)(a+5)=0$

$a\le 3$이므로 $a=-5$

(ii) $a>3$일 때

$g(3)=9$이므로 $(f\circ g)(3)=a+9$

$(a-2)^2+a+9=41$이므로

$a^2-3a-28=0$

$(a-7)(a+4)=0$

$a>3$이므로 $a=7$

(i), (ii)에 의하여 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$7+(-5)=2$

02 정답 ①

해설 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(2)=2^2-4+a=a$

$f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서

$f(f(2))=f(f(4))$

$f(a)=f(a+8)$

이때 함수 $f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(x)=(x-1)^2+a-1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 축이 직선 $x=1$이고,

직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$a\ne a+8$이므로 $f(a)=f(a+8)$이려면

$\dfrac{a+(a+8)}{2}=1$

$a=-3$

따라서 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=6^2-2\cdot 6-3=21$

03 정답 ⑤

해설 합성함수의 성질 추론하기

ㄱ. $f(g(2))=f(2)=2$ (참)

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는

i) $x>2$일 때, $g(f(x))=g(2)=2$

ii) $|x|\le 2$일 때, $g(f(x))=g(x)=x^2-2$

iii) $x<-2$일 때, $g(f(x))=g(-2)=2$

함수 $(g\circ f)(-x)$는

i) $x>2$일 때, $g(f(-x))=g(-2)=2$

ii) $|x|\le 2$일 때, $g(f(-x))=g(-x)=x^2-2$

iii) $x<-2$일 때, $g(f(-x))=g(2)=2$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$ (참)

ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$는

i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

ii) $|x|\le 2$일 때, $-2\le x^2-2\le 2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=x^2-2$

iii) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

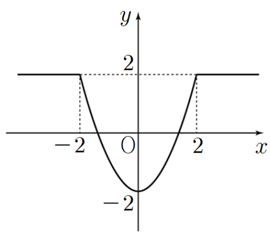
$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

$\therefore (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

[참고]

함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



04 정답 ②

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{2}{3}\right) \\ -2x+\frac{8}{3} & \left(\frac{2}{3} < x \le \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$ 이다.

$f^1\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=0$

$f^4\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f(0)=0$

$\vdots$

이므로 $n \ge 3$일 때, $f^n\left(\frac{1}{3}\right)=0$

따라서 $f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+f^3\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{20}\left(\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+0 \cdot 18=2$

05 정답 ①

해설 $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & (0 \le x \le 2) \\ 2x-4 & (2 \le x \le 4) \end{cases}$,

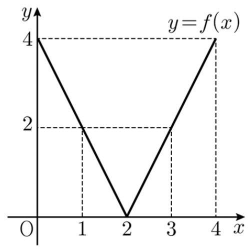
$g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+4 & (0 \le x \le 2) \\ -\frac{3}{2}x+6 & (2 \le x \le 4) \end{cases}$

$\therefore (g \circ f)(x)=g(f(x))$

$=\begin{cases} -\frac{1}{2}f(x)+4 & (0 \le f(x) \le 2) \\ -\frac{3}{2}f(x)+6 & (2 \le f(x) \le 4) \end{cases}$

$1 \le x \le 2,\ 2 \le x \le 3$일 때, $0 \le f(x) \le 2$

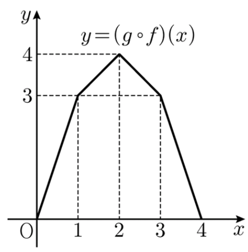
$0 \le x \le 1,\ 3 \le x \le 4$일 때, $2 \le f(x) \le 4$



$\therefore (g \circ f)(x)=\begin{cases} -\frac{3}{2}(-2x+4)+6 & (0 \le x \le 1) \\ -\frac{1}{2}(-2x+4)+4 & (1 \le x \le 2) \\ -\frac{1}{2}(2x-4)+4 & (2 \le x \le 3) \\ -\frac{3}{2}(2x-4)+6 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3x & (0 \le x \le 1) \\ x+2 & (1 \le x \le 2) \\ -x+6 & (2 \le x \le 3) \\ -3x+12 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$

따라서 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



06 정답 ③

해설 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구한다.

$$f(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\le x<1)\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

이므로 $f(x)=t\ (0\le t\le 3)$이라 하면

$f(f(x))=2-f(x)$에서

$f(t)=2-t$

(ⅰ) $0\le t<1$일 때

$-3t+3=2-t$

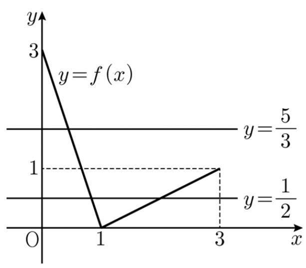
$\therefore\ t=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $1\le t\le 3$일 때

$\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=2-t$

$\therefore\ t=\frac{5}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{3}$



그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{5}{3}$는 한 점에서 만나므로 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

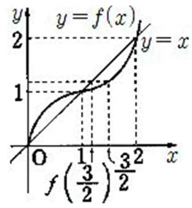
07 정답 ③

해설 $f(f(\cdots f(a)))$를 구하려면

(ⅰ) $f(a)$의 값을 y축 위에 잡는다.

(ⅱ) 그 값을 $y=x$를 통해 x축 위에 잡는다.

위의 과정을 반복한다.



$1<f\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{3}{2}$이고 $1<f^2\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$

이와 같이 계속하면

$1<f^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)<f^{n}\left(\frac{3}{2}\right)<\cdots<f\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{3}{2}\ \cdots$ ㉠

㉠에서 $f^n\left(\frac{3}{2}\right)$의 값은 n이 커짐에 따라 1에 한없이 가까이 감을 알 수 있다.

08 정답 11

해설 $(f\circ f)(a)=f(a)$에서

$f(a)=t$로 치환하면 $f(t)=t$

$t<1$일 때, $t+5=t$를 만족시키는 t는 존재하지 않는다.

$t\ge 1$일 때, $t^2-7t+12=t$에서

$t^2-8t+12=0,\ (t-6)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=6$

(ⅰ) $t=2$인 경우

$f(a)=2$에서

(a) $a<1$일 때,

$a+5=2$이므로 $a=-3$

(b) $a\ge 1$일 때,

$a^2-7a+12=2$에서

$a^2-7a+10=0,\ (a-5)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=5$

(ⅱ) $t=6$인 경우

$f(a)=6$에서

(a) $a<1$일 때,

$a+5=6$이므로 $a=1$이므로 $a<1$에 모순이다.

(b) $a\ge 1$일 때,

$a^2-7a+12=6$에서

$a^2-7a+6=0,\ (a-6)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값은 $-3,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6$이므로 그 합은 11이다.

09 정답 ④

해설 $f(2x+1)=6x-5 \cdots\cdots$ ㉠ 에서
$2x+1=4$ 를 만족시키는 x 의 값은
$x=\frac{3}{2}$
따라서, $x=\frac{3}{2}$ 을 ㉠에 대입하면,
$f(4)=6\times\frac{3}{2}-5=4$

10 정답 2

해설 $f(x)=3x+2-a|x-1|$ 에서
(ⅰ) $x \geq 1$일 때
$f(x)=3x+2-a(x-1)$
$=(3-a)x+2+a$
(ⅱ) $x<1$일 때
$f(x)=3x+2+a(x-1)$
$=(3+a)x+2-a$
(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면
함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로
$x \geq 1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가
서로 같아야 한다.
즉, $(3-a)(3+a)>0$, $(a-3)(a+3)<0$
$\therefore\ -3<a<3$
따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

11 정답 72

해설 $S=\{n|1 \leq n \leq 100,\ n$은 8의 배수$\}$
$=\{8,\ 16,\ 24,\ \cdots,\ 96\}$
이므로
$f(8)=f(48)=f(88)=3$
$f(16)=f(56)=f(96)=1$
$f(24)=f(64)=4$
$f(32)=f(72)=2$
$f(40)=f(80)=0$
함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 $f(n)$이
일대일대응이어야 하므로
$f^{-1}(0)=40$ 또는 $f^{-1}(0)=80$
$f^{-1}(1)=16$ 또는 $f^{-1}(1)=56$ 또는 $f^{-1}(1)=96$
$f^{-1}(2)=32$ 또는 $f^{-1}(2)=72$
$f^{-1}(3)=8$ 또는 $f^{-1}(3)=48$ 또는 $f^{-1}(3)=88$
$f^{-1}(4)=24$ 또는 $f^{-1}(4)=64$
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2=72$

12 정답 4

해설 $f(2)=1,\ f(3)=3$이면 $f^2=I$이므로 모순이다.
즉, $f(2)=3,\ f(3)=1$이어야 한다.
이때 $f^3=I$이므로 역함수 g에 대하여
$g(1)=3,\ g(2)=1,\ g(3)=2$이고 $g^3=I$이므로
$g=g^4=g^7=\cdots,\ g^2=g^5=g^8=\cdots,$
$I=g^3=g^6=g^9=\cdots$
따라서 $g^{21}(2)=I(2)=2,$
$g^{26}(1)=g^2(1)=g(g(1))=g(3)=2$이므로
$g^{21}(2)+g^{26}(1)=2+2=4$

13 정답 ③

해설 역함수를 활용하여 문제해결하기
$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$이고
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
그러므로 $a=-1$
역함수 $g(x)$는
$g(1)=1,\ g(2)=3,\ g(3)=4,\ g(4)=2$이므로
$g^3(x)=g^6(x)=g^9(x)=x$이다.
$\therefore\ g^{10}(x)=g(g^9(x))=g(x),$
$g^{11}(x)=g(g^{10}(x))=g(g(x))=g^2(x)$
따라서 $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=a+g(2)+g^2(2)$
$=-1+3+4$
$=6$

14 정답 ③

해설 $(g\circ f)(1)=9,\ (g\circ f)(2)=7,\ (g\circ f)(3)=8$
이때 $g(5)=9$이고, 함수 g는 일대일대응이므로
$f(1)=5$이다.
또한, $f(1)=5,\ f(3)=4$이고 함수 f는 일대일대응이므로
$f(2)=6$이다.
$(g\circ f)(2)=7$에서 $f(2)=6$이므로 $g(6)=7$이다.
$\therefore\ f(1)+g(6)=5+7=12$

15 **정답** 12

해설 일대일대응을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (다)에서 역함수의 성질에 의하여

$(f\circ f^{-1})(a)=f\left(f^{-1}(a)\right)=a$이므로

$\frac{1}{2}f(a)=a$

$\therefore\ f(a)=2a$

한편, 함수 $f: X\to Y$의 정의역은 집합 X이고

역함수 $f^{-1}: Y\to X$의 정의역은 집합 Y이므로

조건 (다)에서 a는 $a\in X$, $a\in Y$이어야 한다.

즉, $a\in X\cap Y$이어야 한다.

이때 a의 개수가 2이므로 $f(2)=4$, $f(4)=8$

또, 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이고

조건 (나)에서 $f(1)\neq 2$이므로

$f(1)=6$, $f(3)=2$

따라서 $f^{-1}(2)=3$이므로

$f(2)\cdot f^{-1}(2)=4\cdot 3=12$

16 **정답** ②

해설 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

ㄱ. $f(x)=x+2$이므로

$f(f(x))=(x+2)+2=x+4$

ㄴ. $f(x)=-x-2$이므로

$f(f(x))=-(-x-2)-2=x$

ㄷ. $f(x)=-|x|$이므로

$f(f(x))=-|-|x||$

이때 모든 실수 x에 대하여 $-|x|\leq 0$이므로

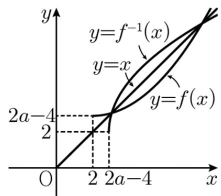
$$f(f(x))=-|x|=\begin{cases} x & (x<0) \\ -x & (x\geq 0)\end{cases}$$

따라서 $f=f^{-1}$인 것은 ㄴ뿐이다.

17 **정답** $3\leq a<\frac{25}{8}$

해설 $f(x)=x^2-4x+2a=(x-2)^2+2a-4\ (x\geq 2)$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=f^{-1}(x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-4x+2a=x$,

즉, $x^2-5x+2a=0$이 2보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot 2a>0$

$\therefore\ a<\frac{25}{8}$

(ⅱ) $4-10+2a\geq 0$이므로 $a\geq 3$

(ⅲ) $-\frac{-5}{2}>2$

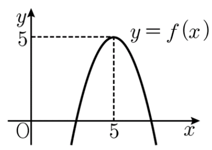
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $3\leq a<\frac{25}{8}$

18 **정답** 5

해설 $f(x)=-2x^2+20x-45$

$=-2(x-5)^2+5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 f가 일대일함수가 되려면

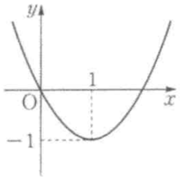
$x\leq k$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해야 하므로

$k\leq 5$

따라서 k의 최댓값은 5이다.

19 **정답** 3

해설 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같고, $f(x)$ 가 일대일 대응이려면 $a \geqq 1$ 이어야 한다. 또한 공역과 치역이 같아야 하므로 $f(a)=a$ 이어야 한다. 따라서,
$a^2-2a=a$ 에서 $a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$
$\therefore$ $a=0$ 또는 $a=3$ $a \geqq 1$ 이므로 $a=3$



20 **정답** 26

해설 $(f \circ f)(3)=f(f(3))=f(9)=27$
$f^{-1}(-6)=a$라 하면 $f(a)=-6$
(i) $a \geq 2$일 때,
$f(a)=3a=-6$
$\therefore a=-2$
이때 $a \geq 2$이므로 a의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $a<2$일 때,
$f(a)=-a^2+5a=-6$, $a^2-5a-6=0$
$(a+1)(a-6)=0$
$\therefore a=-1$ ($\because a<2$)
(i), (ii)에 의해 $f^{-1}(-6)=-1$
$\therefore (f \circ f)(3)+f^{-1}(-6)=27-1$
$=26$

21 **정답** 15

해설 $x \geq 0$일 때 $f(x) \geq 3$, $x<0$일 때 $f(x)<3$이다.
$f^{-1}(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$
즉, $k<0$이므로 $f(k)=-k^2+3=2$
$k^2=1$
$\therefore k=-1$ ($\because k<0$)
$f^{-1}(2)+f^{-1}(a)=5$에서 $-1+f^{-1}(a)=5$
$\therefore f^{-1}(a)=6$
$\therefore a=f(6)$
$=2 \cdot 6+3$
$=15$

22 **정답** ②

해설 $\mathrm{A}(a, f(a))$라 하면 $\mathrm{B}(f(a), a)$이고 점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{C}(f^{-1}(a), a)$, $\mathrm{D}(a, f^{-1}(a))$