교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (집합명제) 97~99p_대단원

두 집합 사이의 포함관계 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

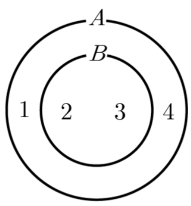
유형별 학습

이름

01 5의 양의 배수의 집합을 A, 9의 양의 약수의 집합을 B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $1 \in A$　② $3 \notin B$　③ $5 \notin A$
④ $7 \in B$　⑤ $9 \notin A$

02 두 집합 A, B가 다음 벤다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $2 \in B$　② $4 \in A$
③ $\{1,\ 2,\ 3\} \not\subset B$　④ $\{4\} \not\subset A$
⑤ $\{2,\ 3\} \subset B$

03 세 집합
$A = \{0,\ 1,\ 2\}$,
$B = \{-x+2y \mid x \in A,\ y \in A\}$,
$C = \{x+y \mid x \in A,\ y \in A\}$
사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$　② $A \subset C \subset B$
③ $B \subset A \subset C$　④ $B \subset C \subset A$
⑤ $C \subset B \subset A$

04 자연수 전체의 집합을 N, 정수 전체의 집합을 Z, 유리수 전체의 집합을 Q라 할 때, 다음 중 N, Z, Q 사이의 포함 관계로 옳은 것은?

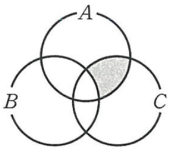
① $Q \subset Z \subset N$　② $N \subset Q \subset Z$
③ $Z \subset N \subset Q$　④ $Z \subset Q \subset N$
⑤ $N \subset Z \subset Q$

05 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$의 세 부분집합 $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,
$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$,
$C = \{x \mid x$는 10의 양의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$
② $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$
③ $C - A = \{1, 10\}$
④ $(A \cap B) \cup C = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10\}$
⑤ $(A \cup B) \cap C^C = \{3, 4, 6, 10\}$

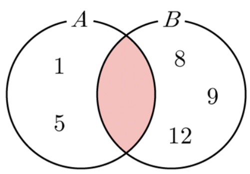
06 전체집합 $U=\{x|x$는 자연수$\}$의 부분집합 $A_k=\{x|x$는 k의 약수$\}$에 대하여 $A_3 \cap A_6 \cap A_{12}$의 원소의 개수를 구하시오. (단, k는 자연수)

07 다음 중 아래 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합이 아닌 것은?



① $A\cap(C-B)$ ② $C\cap(A-B)$
③ $(B\cap C)-A$ ④ $(A\cap C)-(B\cap C)$
⑤ $(A\cap C)-(A\cap B)$

08 다음 벤 다이어그램에서 $A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12\}$일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하시오.



09 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U)=30$, $n(A)=9$, $n(B-A)=10$일 때, $n(A^C\cap B^C)$의 값은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

10 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 3 의 배수도 아니고 5 의 배수도 아닌 수의 개수는?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

11 [2023년 3월 고2 2번 변형]
실수 x에 대한 조건 'x는 양이 아닌 실수이다.'의 진리집합은?

① $\{x|x<0\}$ ② $\{x|x\le 0\}$ ③ $\{x|x\ne 0\}$
④ $\{x|x\ge 0\}$ ⑤ $\{x|x>0\}$

12 [2013년 9월 고1 25번/3점]
실수 전체의 집합에 대하여
명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k<0$'의 부정이 참이 되도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.

13 두 조건 $p: |x+1| \geq 4$, $q: |x| \leq k$에 대하여
명제 $q \rightarrow \sim p$가 참이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14 다음 중 그 역이 참인 명제를 모두 고르면? (정답 2개)
(단, x, y는 실수)

① $3x-2>0$ 이면 $x=1$ 이다.
② 사다리꼴은 평행사변형이다.
③ 삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\angle A=60^\circ$ 이다.
④ x, y가 짝수이면 $x+y$ 도 짝수이다.
⑤ $x+y>0$ 이면 $xy>0$ 이다.

15 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim p$
④ $\sim q \rightarrow p$ ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

16 두 조건 $p: 1-k<x<1+k$, $q: -7<x<3$에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 양수 k의 최댓값을 구하시오.

17 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : k+1<x<2k+3, \quad q : 3<x<13$$

이때 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되게 하는 모든 자연수 k의 값들의 합을 구하시오.

18 다음 보기 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 있는 대로 고른 것은? (단, x, y, z는 실수이다.)

[보 기]

ㄱ. $p: x > z$, $q: x > y$ 이고 $y > z$

ㄴ. $p: xy = 0$, $q: x = 0$ 또는 $y = 0$

ㄷ. $p: |x| + |y| = 0$

$q: x^2 + y^2 = 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19 다음 중 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은? (단, x, y는 실수이다.)

① $p: x^2 = 1$ $q: x = 1$
② p: x는 4의 양의 약수 q: x는 12의 양의 약수
③ $p: x = y$ $q: xz = yz$
④ $p: x = 2$, $y = 3$ $q: xy = 6$
⑤ $p: x < 1$ $q: x \leq 2$

20 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ. p: $|a| + |b| = 0$, q: $ab = 0$

ㄴ. p: $(a-b)(b-c) = 0$,

q: $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

ㄷ. p: $0 < x < y$, q: $x^2 < y^2$

ㄹ. p: $x < y$, q: $[x] < [y]$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

21 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하자. 두 명제 $p \to q$와 $\sim p \to r$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 명제 $\sim q \to r$는 참이다.

ㄴ. $P \subset R$

ㄷ. $(P \cup R^C) \subset Q$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22 네 조건 p, q, r, s에 대하여 세 명제 $p \to q$, $r \to s$, $\sim p \to r$가 모두 참일 때, 다음 보기 중 항상 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\sim s \to \sim r$

ㄴ. $r \to p$

ㄷ. $\sim q \to \sim r$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

23 두 집합 $A = \{x | x$는 6 이하의 짝수$\}$, $B = \{x | x^2 - 7x - 8 < 0$인 자연수$\}$에 대하여 $A \cap X = A$, $B \cup X = B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

24 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$일 때, 다음 두 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는?

(가) $(A\cap B)\cup X=X$
(나) $(A\cup B)\cap X=X$

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 32

25 다음은 자연수 m, n에 대하여 명제 'm^2+n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.'가 참임을 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{(가)}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
mn이 $\boxed{(가)}$이면 m, n이 모두 $\boxed{(가)}$이므로
$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $m^2+n^2=\boxed{(다)}$이므로 m^2+n^2은 $\boxed{(나)}$이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
② 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l)$
③ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
④ 짝수, 홀수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$
⑤ 홀수, 짝수, $2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)+1$

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (집합명제)
97~99p_대단원

두 집합 사이의 포함관계 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ④	03 ②
04 ⑤	05 ⑤	06 2
07 ③	08 2	09 ②
10 ③	11 ②	12 81
13 ②	14 ①, ②	15 ③
16 2	17 14	18 ⑤
19 ①	20 ③	21 ③
22 ①	23 16	24 ④
25 ③		

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (집합명제) 97~99p_대단원

두 집합 사이의 포함관계 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ⑤

해설 집합 A의 원소는 $5, 10, 15, \cdots$이고,
집합 B의 원소는 $1, 3, 9$이므로
① $1 \not\in A$
② $3 \in B$
③ $5 \in A$
④ $7 \not\in B$
⑤ $9 \not\in A$, $9 \in B$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

02 정답 ④

해설 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3\}$
④ $\{4\} \subset A$

03 정답 ②

해설 $x \in A$, $y \in A$인 x, y에 대하여 $-x+2y$, $x+y$의 값을 구하면 각각 다음 [표 1], [표 2]와 같다.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	2	4
1	-1	1	3
2	-2	0	2

[표 1]

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

[표 2]

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
$C=\{0, 1, 2, 3, 4\}$이므로
$A \subset C \subset B$

04 정답 ⑤

해설 ⑤ $N \subset Z \subset Q$

05 정답 ⑤

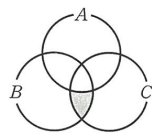
해설 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,
$C=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
④ $(A \cap B) \cup C=\{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 5, 10\}$
$=\{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$
⑤ $(A \cup B) \cap C^{C}$
$=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\} \cap \{3, 4, 6, 8\}$
$=\{3, 4, 6, 8\}$

06 정답 2

해설 $A_3 \cap A_6 \cap A_{12}=(A_3 \cap A_6) \cap A_{12}$
$=A_3 \cap A_{12}$
$=A_3$
따라서 $A_3 \cap A_6 \cap A_{12}=\{1, 3\}$이므로
구하는 원소의 개수는 2이다.

07 정답 ③

해설



③ $(B \cap C)-A$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합이 아닌 것은 ③이다.

08 정답 2

해설 색칠한 부분은 집합 A와 집합 B의 공통 부분인 교집합에 해당한다.
$A \cup B=\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12\}$이므로 벤 다이어그램에 표시되어 있지 않은 원소를 말한다.
따라서 색칠한 부분의 원소는 3, 7이므로 2개이다.

09 정답 ②

해설 $n(A)=9$, $n(B-A)=10$이므로

$n(A\cup B)=19$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=30-19$

$=11$

10 정답 ③

해설 1부터 100까지의 자연수 전체의 집합을 U, 1부터 100까지의 자연수 중 3의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라고 하면 $A\cap B$는 15의 배수의 집합이므로

$n(U)=100$, $n(A)=33$, $n(B)=20$, $n(A\cap B)=6$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=33+20-6=47$

따라서 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 자연수의 개수는

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=100-47=53$

11 정답 ②

해설 실수 x에 대한 조건 'x는 양이 아닌 실수이다.'의 진리집합은 $\{x|x\le 0\}$이다.

12 정답 81

해설 명제를 이용하여 수학내적문제 해결하기

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge 0$'

실수 전체의 집합에서 모든 실수 x에 대하여

이차부등식 $x^2-18x+k\ge 0$이 성립하려면

판별식 $D=18^2-4k\le 0$, $k\ge 81$

따라서 k의 최솟값은 81이다.

13 정답 ②

해설 $\sim p: |x+1|<4$이므로

$|x+1|<4$에서 $-5<x<3$

$|x|\le k$에서 $-k\le x\le k$

$q\to\sim p$가 참이 되려면

$\{-k\le x\le k\}\subset\{-5<x<3\}$이어야 하므로

$-k>-5$, $k<3$

따라서 $k<3$이므로 자연수 k의 최댓값은 2이다.

14 정답 ①, ②

해설 ① 역 : $x=1$ 이면 $3x-2>0$ 이다. (참)

② 역 : 평행사변형이면 사다리꼴이다. (참)

③ 역 : $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\angle\mathrm{A}=60^\circ$ 이면 $\triangle\mathrm{ABC}$ 는 정삼각형이다. (거짓)

[반례] $\angle\mathrm{A}=60^\circ$, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$ 이면 $\triangle\mathrm{ABC}$ 는 직각삼각형이다.

④ 역 : $x+y$가 짝수이면 x, y 는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=1$ 이면 $x+y=2$ 는 짝수이지만 x, y 는 홀수이다.

⑤ 역 : $xy>0$ 이면 $x+y>0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=-1$ 이면 $xy>0$ 이지만 $x+y<0$ 이다.

따라서 역이 참인 것은 ①, ②이다.

15 정답 ③

해설 명제 $p\to\sim q$가 참이므로 항상 참인 명제는 그 대우인 $q\to\sim p$이다.

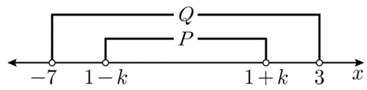
16 정답 2

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|1-k<x<1+k\}$, $Q=\{x|-7<x<3\}$

이때 명제 $p\to q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

두 집합 P, Q가 $P\subset Q$를 만족하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-7\le 1-k$, $1+k\le 3$

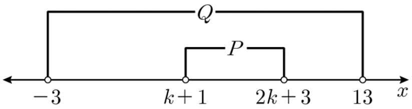
$\therefore k\le 2$

이때 k는 양수이므로 $0<k\le 2$이므로 실수 k의 최댓값은 2이다.

17 정답 14

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\to q$가 참이 되기 위해서는 $P\subset Q$를 만족시켜야 한다.

$P\subset Q$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$k+1\ge 3$에서 $k\ge 2$

$2k+3\le 13$에서 $k\le 5$

$\therefore\ 2\le k\le 5$

따라서 구하고자 하는 모든 자연수 k의 값들의 합은

$2+3+4+5=14$

18 정답 ⑤

해설 ㄱ. $x>z\ \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}\ x>y$이고 $y>z$

$\therefore$ 필요조건 $[\to$의 반례$]$ $x=1,\ y=2, z=-1$

ㄴ. $xy=0\ \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}\ x=0$ 또는 $y=0$

$\therefore$필요충분조건

ㄷ. $|x|+|y|=0\ \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}\ x^2+y^2=0$

$(\Leftrightarrow x=y=0)$

$\therefore$ 필요충분조건

따라서 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

19 정답 ①

해설 ① $\{x|x^2=1\}=\{1,-1\}\supset\{1\}$

$\therefore$ 필요조건

② $\{1,\ 2,\ 4\}\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$\therefore$ 충분조건

③ $p: x=y\ \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}\ q: xz=yz$

$\therefore$ 충분조건 $[\leftarrow$의 반례$]$ $x=2,\ y=1,\ z=0$

④ $x=2,\ y=3\ \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}\ xy=6$

$\therefore$ 충분조건$[\leftarrow$의 반례$]$ $x=6,\ y=1$

⑤ $\{x\,|\,x<1\}\subset\{x\,|\,x\le 2\}$

$\therefore$ 충분조건

20 정답 ③

해설 ㄱ. p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

q: $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이고,

p가 q이기 위한 필요조건은 아니다.

ㄴ. p: $(a-b)(b-c)=0$에서 $a=b$ 또는 $b=c$

q: $(a-b)^2+(b-c)^2=0$에서 $a=b$이고 $b=c$

따라서 p가 q이기 위한 충분조건은 아니고,

p가 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $0<x<y$에서 x, y 모두 양수이므로 $x^2<y^2$

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이다.

한편, $x=-1$, $y=3$일 때, $x^2<y^2$은 $1<9$이므로 참이지만 $0<x<y$는 성립하지 않으므로

p가 q이기 위한 필요조건은 아니다.

ㄹ. $x<y$에서 $x=1$, $y=1.5$일 때,

$[x]=[y]$ 이므로 p가 q이기 위한 충분조건은 아니다.

한편, q는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 정답 ③

해설 두 명제 $p\to q$, $\sim p\to r$가 참이므로 $P\subset Q$, $P^C\subset R$이다.

또한, 두 명제의 대우인 $\sim q\to\ \sim p$, $\sim r\to p$도 참이므로 $Q^C\subset P^C$, $R^C\subset P$이다.

ㄱ. $Q^C\subset P^C$, $P^C\subset R$에서 $Q^C\subset R$이므로

명제 $\sim q\to r$는 참이다. (참)

ㄴ. $P^C\subset R$이므로 $P\not\subset R$ (거짓)

ㄷ. $R^C\subset P$에서 $P\cup R^C=P$이고, $P\subset Q$이므로

$(P\cup R^C)\subset Q$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22 정답 ①

해설 세 명제 $p\to q$, $r\to s$, $\sim p\to r$가 모두 참이므로

각각의 대우인 $\sim q\to\ \sim p$, $\sim s\to\ \sim r$, $\sim r\to p$도 참이다.

또, $\sim q\to\ \sim p$, $\sim p\to r$에서 $\sim q\to r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

23 **정답** 16

해설 $A=\{2, 4, 6\}$
$x^2-7x-8<0$에서 $(x+1)(x-8)<0$
즉, $-1<x<8$이므로
$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
이때 $A\cap X=A$에서 $A\subset X$,
$B\cup X=B$에서 $X\subset B$이므로
$A\subset X\subset B$
따라서 집합 X는 $2, 4, 6$을 포함하는 집합 B의 부분집합이므로 그 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

24 **정답** ④

해설 (가)와 (나)에서 $(A\cap B)\subset X$, $X\subset(A\cup B)$이므로
$(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$
$\therefore\ \{4, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 원소 $4, 5$를 반드시 포함하는 부분집합이다.
$\therefore$ (집합 X의 개수)$=2^4=16$

25 **정답** ③

해설 주어진 명제의 대우 'mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
mn이 $\boxed{\text{홀수}}$이면 m, n이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$이므로
$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 $m^2+n^2=\boxed{2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)}$이므로
m^2+n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다.