

# 마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~232p

## 함수의 개념과 그래프

실시일자	-
20문제 / DRE수학	

### 유형별 학습

이름

**01** 집합  $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수

$f(x) = ax - 3$ ,  $g(x) = 2x + b$ 가 있을 때,  $f = g$ 가 되도록 하는 상수  $a$ ,  $b$ 에 대하여  $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① -3      ② -1      ③ 1  
④ 3      ⑤ 5

**02** 두 집합  $X = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $Y = \{y | 3 \leq y \leq 7\}$ 에

대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f(x) = ax + b$ 가  
일대일대응일 때, 상수  $a$ ,  $b$ 의 곱  $ab$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a > 0$ )

**03** 임의의 실수  $x$ ,  $y$ 에 대하여 함수  $f$ 가

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하고,  $f(1) = 2$ 일 때,  
 $f(-2)$ 의 값을 구하시오.

**04** 두 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여

치역과 공역이 일치하는  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수의 개수를  
구하시오.

**05** 두 집합  $X = \{0, 2, 4\}$ ,  $Y = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여

$f(x) = ax^2 + (1-2a)x + 1$ 이  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수가  
되도록 하는 모든 상수  $a$ 의 값의 합을 구하시오.

**06** 2 이상의 자연수의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가)  $x$ 가 소수일 때,  $f(x) = x$   
(나)  $f(xy) = f(x) + f(y)$

이때  $f(1000)$ 의 값을 구하시오.



**07** 집합  $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의  
함수  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b - 1 & (0 \leq x < 3) \\ -2x + 10 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$  가  
일대일대응일 때,  $f(2)$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- |                 |                  |                 |
|-----------------|------------------|-----------------|
| ① $\frac{2}{3}$ | ② $\frac{7}{9}$  | ③ $\frac{8}{9}$ |
| ④ 1             | ⑤ $\frac{10}{9}$ |                 |

**10** 임의의 실수  $x, y$ 에 대하여 함수  $f$ 가  
 $f(x+y) = f(x)f(y)$ ,  $f(x) > 0$ 을 만족하고,  
 $f(2) = 9$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른  
것은?

〈보기〉

ㄱ.  $f(0) = 1$   
 ㄴ.  $f(1) = 1$   
 ㄷ.  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$  이다.

- |        |           |        |
|--------|-----------|--------|
| ① ㄱ    | ② ㄱ, ㄴ    | ③ ㄱ, ㄷ |
| ④ ㄴ, ㄷ | ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ |        |

**08** [2017년 9월 고2 이과 11번 변형]

### 두 집합

$$X = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\},$$

$$Y = \{y \mid |y| \leq a, a > 0\}$$

에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f(x) = 4x + b$   
가 일대일대응이다. 두 상수  $a, b$ 에 대하여  
 $a^2 + b^2$ 의 값은?

- |      |      |      |
|------|------|------|
| ① 36 | ② 40 | ③ 44 |
| ④ 48 | ⑤ 52 |      |

**11**

### 두 집합

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 함수  $f : A \rightarrow B$ 의  
개수를 구하시오.

- |  |
|--|
| (가) $a < b$ 이면 $f(a) < f(b)$ 이다.               |
| (나) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ 는 홀수이다. |

**09** 집합  $X = \{a, b, c\}$ 를 정의역으로 하는 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (x < 4) \\ 2x - 5 & (4 \leq x < 7) \\ x^2 - 6x - 8 & (x \geq 7) \end{cases}$$

$a+b+c$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b, c$ 는 서로 다른 상수이다.)

[2018년 11월 고1 28번/4점]

집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여  
함수  $f : X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- |  |
|--|
| (가) 함수 $f$ 의 치역의 원소의 개수는 7이다.                                    |
| (나) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 42$ |
| (다) 함수 $f$ 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의<br>차는 6이다.                       |

집합  $X$ 의 어떤 두 원소  $a, b$ 에 대하여  $f(a) = f(b) = n$   
을 만족하는 자연수  $n$ 의 값을 구하시오. (단,  $a \neq b$ )

- 13** 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 에 대하여  
함수  $f : X \rightarrow X$ 는 일대일대응이다.  
 $1 \leq n \leq 7$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $f(n)f(n+2)$ 의  
값이 짝수일 때,  $f(5)+f(8)$ 의 최댓값을 구하시오.

- 14** 실수 전체의 집합에서 정의된  
함수  $f(x) = a|x+2| - x + 5$ 가 일대일대응이 되도록  
하는 실수  $a$ 의 값의 범위는?

- ①  $a < 0$       ②  $a < -1$       ③  $a > 1$   
④  $-1 < a < 1$     ⑤  $a < -1$  또는  $a > 1$

- 15** 실수 전체의 집합  $R$ 에 대하여 함수  $f : R \rightarrow R$ 가  
 $f(x) = a|x-3| + 2x$ 로 정의될 때, 이 함수가  
일대일대응이 되도록 하는 정수  $a$ 의 개수를 구하시오.

- 16** 실수 전체의 집합  $R$ 에 대하여 함수  $f : R \rightarrow R$ 가  
 $f(x) = a|x-5| + 3x$ 로 정의될 때, 이 함수가  
일대일대응이 되도록 하는 정수  $a$ 의 개수를 구하시오.

- 17** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  
다음 조건을 모두 만족할 때,  $f(9999)$ 의 값을 구하시오.

- (가) 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여  $f(5x) = 5f(x)$   
(나)  $f(x) = |4-x| - 1$  ( $1 \leq x < 5$ )

**18**

두 집합  $A = \{x | x\text{는 }2\text{ 이상의 자연수}\}$ ,  
 $B = \{x | x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 함수  $f : A \rightarrow B$ 를  
 $n \in A$ 일 때  $n = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_s^{b_s}$  ( $a_i$ 는 서로 다른 소수,  
 $b_s$ 는 자연수,  $1 \leq s \leq i$ )이면  $f(n) = i$ 로 정의하자.  
 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ.  $f(100) = 2$
- ㄴ. 두 자연수  $k, l$ 에 대하여  
 $f(2^{k+l}) = f(2^k) + f(2^l)$
- ㄷ.  $n \in A$ 에 대하여  $f(2n) = f(n) + 1$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**19**

[2019년 7월 고3 문과 28번 변형]

집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 일대일대응인  
 함수  $f : X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수  $f$ 의  
 개수를 구하시오.

- (가)  $p$ 가 소수일 때,  $f(p) \leq p$ 이다.
- (나)  $a < b$ 이고  $a$ 가  $b$ 의 약수이면  
 $f(a) < f(b)$ 이다.

**20**

집합  $X = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여  
 $X$ 에서  $X$ 로의 함수  $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  
 $|f(x) + f(-x)| = 2$ 이다.
- (나)  $x > 0$ 이면  $f(x) < 0$ 이다.

함수  $f(x)$ 의 개수를 구하시오.

# 마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~232p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
20문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

이름

### 빠른정답

01 ⑤	02 2	03 -4
04 150	05 $-\frac{3}{4}$	06 21
07 ③	08 ②	09 16
10 ③	11 66	12 7
13 17	14 ④	15 3
16 5	17 -624	18 ①
19 12	20 625	



# 마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~232p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
20문제 / DRE수학	

## 유형별 학습

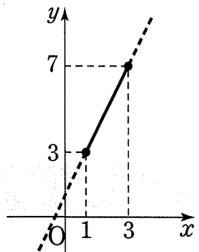
이름

### 01 정답 ⑤

**해설**  $f(1)=g(1)$ 에서  $a-3=2+b$   
 $\therefore a-b=5 \quad \dots \textcircled{1}$   
 $f(2)=g(2)$ 에서  $2a-3=4+b$   
 $\therefore 2a-b=7 \quad \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  $a=2, b=-3$   
 $\therefore a-b=2-(-3)=5$

### 02 정답 2

**해설**  $a > 0$ 이므로  $f(x) = ax + b$ 가 일대일대응이 되려면  $y = f(x)$ 의 그래프는 증가하는 모양으로 다음 그림과 같아야 한다.



즉,  $f(1)=3, f(3)=7$   
 $\therefore a+b=3, 3a+b=7$   
 두 식을 연립하여 풀면  $a=2, b=1$   
 $\therefore ab=2$

### 03 정답 -4

**해설**  $f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \dots \textcircled{1}$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=0, y=0$ 을 대입하면  
 $f(0)=f(0)+f(0)$   
 $\therefore f(0)=0$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $y$  대신  $-x$ 를 대입하면  
 $f(0)=f(x)+f(-x)$   
 $\therefore f(-x)=-f(x) \quad \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변에  $x=1, y=1$ 을 대입하면  
 $f(2)=f(1)+f(1)=2+2=4$   
 $\therefore f(-2)=-f(2)=-4$

### 04 정답 150

**해설** 함수가 되려면 정의역  $X$ 의 모든 원소가 공역  $Y$ 의 함수에 대응되면 된다.  
 또한, 치역과 공역이 일치하려면 정의역의 원소들이 공역의 원소에 빠짐없이 대응하여야 한다.  
 따라서 치역과 공역이 일치하는  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수의 개수는

(i)  $X$ 의 원소 중 3개가 같은 합수값을 갖는 경우는  ${}_5C_3$

택한 3개의 원소를 한 원소로 생각하여 집합  $X$ 의 원소 3개를  $Y$ 의 각 원소에 대응하는 방법의 수는  
 $3 \times 2 \times 1 = 6$   
 $\therefore {}_5C_3 \times 6 = 60$

(ii)  $X$ 의 원소 중 같은 합수값을 갖는 2개의 원소를 2세트

뽑는 경우의 수는  $\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!}$  이고, 같은 합수값을 갖는 두 쌍의 원소를 각각 하나로 생각하고, 집합  $X$ 의 원소 3개를  $Y$ 의 각 원소에 대응하는 방법의 수는  $3 \times 2 \times 1 = 6$   
 $\therefore \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!} \times 6 = 90$   
 $\therefore$  (i), (ii)에서 모든 경우의 수는 150

### 05 정답 $-\frac{3}{4}$

**해설** 집합  $X$ 의 각 원소의 합수값을 구하면

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 4a + 2(1-2a) + 1 = 3 \\ f(4) &= 16a + 4(1-2a) + 1 = 8a + 5 \end{aligned}$$

이므로  $f(4)$ 의 값은 1, 3, 5 중 하나이다.

$$\begin{aligned} (\text{i}) f(4) &= 1 \text{ 일 때, } 8a + 5 = 1 & \therefore a = -\frac{1}{2} \\ (\text{ii}) f(4) &= 3 \text{ 일 때, } 8a + 5 = 3 & \therefore a = -\frac{1}{4} \\ (\text{iii}) f(4) &= 5 \text{ 일 때, } 8a + 5 = 5 & \therefore a = 0 \\ (\text{i}), (\text{ii}), (\text{iii}) \text{에서 모든 } a \text{의 값의 합은} & \\ -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$



## 06 정답 21

**해설** 1000을 소인수분해하면  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1000) &= f(2^3 \cdot 5^3) \\ &= f(2^3) + f(5^3) \\ &= f(2) + f(2^2) + f(5) + f(5^2) \\ &= f(2) + f(2) + f(2) + f(5) + f(5) + f(5) \\ &= 3\{f(2) + f(5)\} \\ &= 3(2+5) (\because f(2)=2, f(5)=5) \\ &= 21 \end{aligned}$$

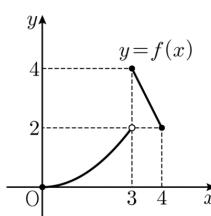
## 07 정답 ③

**해설** 집합  $\{x | 3 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수  $y = -2x + 10$ 의 치역은  $\{y | 2 \leq y \leq 4\}$ 이므로

함수  $f$ 가 일대일대응이 되기 위해서는

집합  $\{x | 0 \leq x < 3\}$ 에서 정의된 함수

$y = ax^2 + b - 1$ 의 치역이  $\{y | 0 \leq y < 2\}$ 이어야 하고  
함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수  $g(x)$ 를  $g(x) = ax^2 + b - 1$ 이라 할 때  
 $g(0) = 0, g(3) = 2$

이때  $g(0) = 0$ 에서  $b - 1 = 0$

$$\therefore b = 1$$

$$\text{또, } g(3) = 2 \text{에서 } 9a + b - 1 = 2$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x^2 & (0 \leq x < 3) \\ -2x + 10 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = \frac{2}{9} \cdot 2^2 = \frac{8}{9}$$

## 08 정답 ②

**해설** 함수  $f(x) = 4x + b$ 가 일대일대응이므로  
치역과 공역이 같다.

직선  $y = f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(-2) = -8 + b = -a \quad \dots \textcircled{\text{D}}$$

$$f(1) = 4 + b = a \quad \dots \textcircled{\text{D}}$$

$$\textcircled{\text{D}}, \textcircled{\text{D}} \text{에서 } a = 6, b = 2$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 40$$

## 09 정답 16

**해설** 함수  $f$ 가 항등함수이므로

$$(i) x < 4 \text{일 때, } x = 3$$

$$(ii) 4 \leq x < 7 \text{일 때, } 2x - 5 = x, x = 5$$

$$\therefore x = 5$$

$$(iii) x \geq 7 \text{일 때, } x^2 - 6x - 8 = x, x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$(x+1)(x-8) = 0 \quad \therefore x = 8 (\because x \geq 7)$$

이상에서  $X = \{3, 5, 8\}$ 이므로

$$a+b+c = 16$$

## 10 정답 ③

**해설**  $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \dots \textcircled{\text{D}}$

ㄱ. ①의 양변에  $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0)f(0), f(0)(f(0)-1) = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ 또는 } f(0) = 1 \text{이다. } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$\therefore f(0) = 1$$

ㄴ. ①의 양변에  $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(2) = f(1)f(1), \{f(1)\}^2 = f(2) = 9$$

$$f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$\therefore f(1) = 3$$

ㄷ. ①의 양변의  $y$ 에  $-x$ 를 대입하면

$$f(x-x) = f(x)f(-x)$$

$$\therefore f(0) = f(x)f(-x)$$

이때 ㄱ에서  $f(0) = 1$ 이고,  $f(x) > 0$ 이므로

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 11 정답 66

**해설** 조건 (가)에서  $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5)$

조건 (나)에서  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ 는  
홀수이므로 다섯 자연수의 합이 홀수가 되려면

다섯 자연수 중 홀수가 1개 또는 3개 또는 5개가 있어야 한다.

이때 집합  $B$ 의 원소에서 짝수는 4개, 홀수는 5개이므로

(i) 홀수가 한 개인 경우의 수는

$${}_4C_4 \cdot {}_5C_1 = 5$$

(ii) 홀수가 세 개인 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_5C_3 = 60$$

(iii) 홀수가 다섯 개인 경우의 수는

$${}_4C_0 \cdot {}_5C_5 = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$5 + 60 + 1 = 66$$

## 12 정답 7

### 해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수  $f$ 의 치역의 원소의 개수가 7이므로

집합  $X$ 의 서로 다른 두 원소  $a, b$ 에 대하여

$f(a)=f(b)=n$ 을 만족하는 집합  $X$ 의 원소  $n$ 은

한 개 있다. 이때 집합  $X$ 의 원소 중

합수값으로 사용되지 않은 원소를  $m$ 이라 하자.

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36 \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$$

$$+f(8)=36+n-m=42$$

$$\therefore n-m=6$$

집합  $X$ 의 원소  $n, m$ 에 대하여  $n-m=6$ 인 경우는 다음 두 가지이다.

(i)  $n=8, m=2$ 일 때

함수  $f$ 의 치역은  $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $n=7, m=1$ 일 때

함수  $f$ 의 치역은  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로

조건 (다)를 만족시킨다.

따라서  $n=7$

## 13 정답 17

### 해설 1 이상 7 이하의 자연수 $n$ 에 대하여

$f(n)f(n+2)$ 의 값이 짹수이므로

$f(1) \cdot f(3), f(2) \cdot f(4), f(3) \cdot f(5), f(4) \cdot f(6),$

$f(5) \cdot f(7), f(6) \cdot f(8), f(7) \cdot f(9)$ 는 모두 짹수이다.

집합  $X$ 의 원소 중 짹수인 것은 2, 4, 6, 8뿐이므로

짜수이려면

$f(2), f(3), f(6), f(7)$  또는  $f(3), f(4), f(6), f(7)$  또는  $f(3), f(4), f(7), f(8)$ 이 짹수가 되어야 한다.

(i)  $f(2), f(3), f(6), f(7)$  또는

$f(3), f(4), f(6), f(7)$ 이 짹수인 경우,

$f(5), f(8)$ 은 모두 홀수이므로  $f(5)+f(8)$ 의

최댓값은  $f(5)=7, f(8)=9$  또는

$f(5)=9, f(8)=7$ 일 때  $7+9=16$ 이다.

(ii)  $f(3), f(4), f(7), f(8)$ 이 짹수인 경우,  $f(8)$ 이

될 수 있는 최댓값은 8이고,  $f(5)$ 가 될 수 있는

최댓값은 9이므로  $f(5)+f(8)$ 의 최댓값은 17이다.

(i), (ii)에 의하여  $f(5)+f(8)$ 의 최댓값은 17이다.

## 14 정답 ④

### 해설 함수 $f(x)=a|x+2|-x+5$ 에서

(i)  $x \geq -2$ 일 때,

$$f(x)=ax+2a-x+5=(a-1)x+2a+5$$

(ii)  $x < -2$ 일 때,

$$f(x)=-ax-2a-x+5=-(a+1)x-2a+5$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} (a-1)x+2a+5 & (x \geq -2) \\ -(a+1)x-2a+5 & (x < -2) \end{cases}$$

함수  $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면  $x \geq -2$ 일 때와

$x < -2$ 일 때 일차함수  $f(x)$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$-(a+1)(a-1) > 0, (a+1)(a-1) < 0$$

따라서  $-1 < a < 1$

## 15 정답 3

### 해설 (i) $x < 3$ 일 때, $x-3 < 0$ 이므로

$$f(x)=-a(x-3)+2x=-(a-2)x+3a$$

(ii)  $x \geq 3$ 일 때,  $x-3 \geq 0$ 이므로

$$f(x)=a(x-3)+2x=(a+2)x-3a$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} -(a-2)x+3a & (x < 3) \\ (a+2)x-3a & (x \geq 3) \end{cases}$$

함수  $f$ 가 일대일대응이 되려면 두 직선

$$y=-(a-2)x+3a, y=(a+2)x-3a$$

부호가 서로 같아야 하므로

$$-(a-2)(a+2) > 0, (a-2)(a+2) < 0$$

$\therefore -2 < a < 2$

따라서 정수  $a$ 는  $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

## 16 정답 5

### 해설 함수 $f(x)=a|x-5|+3x$ 에서

(i)  $x < 5$ 일 때,

$$f(x)=a(-x+5)+3x=(3-a)x+5a$$

(ii)  $x \geq 5$ 일 때,

$$f(x)=a(x-5)+3x=(a+3)x-5a$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} (3-a)x+5a & (x < 5) \\ (a+3)x-5a & (x \geq 5) \end{cases}$$

이때 함수  $f$ 가 일대일대응이 되려면

두 직선  $y=(3-a)x+5a$ 와  $y=(a+3)x-5a$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

$$\therefore (3-a)(a+3) > 0$$

$\therefore -3 < a < 3$

따라서 정수  $a$ 는  $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

**17 정답** – 624

**해설** 조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned}f(9999) &= f\left(5 \cdot \frac{9999}{5}\right) \\&= 5f\left(\frac{9999}{5}\right) \\&= 5^2f\left(\frac{9999}{5^2}\right) \\&\vdots \\&= 5^5f\left(\frac{9999}{5^5}\right)\end{aligned}$$

이때  $3 < \frac{9999}{5^5} < 4$  이므로 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f\left(\frac{9999}{5^5}\right) &= \left|4 - \frac{9999}{5^5}\right| - 1 \\&= 4 - \frac{9999}{5^5} - 1 = 3 - \frac{9999}{5^5} \\&\therefore f(9999) = 5^5f\left(\frac{9999}{5^5}\right) \\&= 5^5\left(3 - \frac{9999}{5^5}\right) \\&= 9375 - 9999 = -624\end{aligned}$$

**18 정답** ①

**해설** ㄱ.  $100 = 2^2 \cdot 5^2$  이므로  $f(100) = 2$  (참)

ㄴ.  $f(2^{k+l}) = 1$ ,  $f(2^k) = f(2^l) = 1$  이므로

$f(2^{k+l}) \neq f(2^k) + f(2^l)$  (거짓)

ㄷ.  $n = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_s^{b_s}$  ( $a_s$ 는 서로 다른 소수,  $b_s$ 는

자연수,  $1 \leq s \leq i$ )가 짝수인 경우

$a_1 = 2$ 라 하면

$$n = 2^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_i^{b_i}, 2n = 2^{b_1+1} a_2^{b_2} \cdots a_i^{b_i}$$

$$f(2n) = f(n) = i$$
 이므로

$$f(2n) \neq f(n) + 1$$
 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

**19 정답** 12

**해설**  $f(2) \leq 2, f(3) \leq 3, f(5) \leq 5, f(7) \leq 7$

$$f(1) < f(2) < f(4)$$

함수  $f$ 가 일대일대응이므로

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$$

$f(5)$ 가 될 수 있는 값은 4, 5

$f(7)$ 이 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7

(i)  $f(5) = 4$ 인 경우

$f(4), f(6), f(7)$ 이 될 수 있는 값은 5, 6, 7이므로

경우의 수는  $3! = 6$

(ii)  $f(5) = 5$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 함수  $f$ 의 개수는 6

(i), (ii)에 의하여 함수  $f$ 의 개수는

$$6 + 6 = 12$$

**20 정답** 625

**해설**  $|f(x) + f(-x)| = 2$ 에서

$$f(x) + f(-x) = 2 \text{ 또는 } f(x) + f(-x) = -2$$

$x > 0$ 인 집합  $X$ 의 원소  $x$ 에 대하여

(i)  $f(x) = -1$ 일 때,  $f(-x) = 3$  또는  $f(-x) = -1$

(ii)  $f(x) = -2$ 일 때,  $f(-x) = 4$

(iii)  $f(x) = -3$ 일 때,  $f(-x) = 1$

(iv)  $f(x) = -4$ 일 때,  $f(-x) = 2$

(i) ~ (iv)에 의하여  $f(x)$ 의 값에 따라

$f(-x)$ 의 값이 정해진다.

따라서  $f(1)$ 과  $f(-1)$ ,  $f(2)$ 와  $f(-2)$ ,  $f(3)$ 과  $f(-3)$ ,

$f(4)$ 와  $f(-4)$ 의 값을 정하는 경우의 수가 각각 5이므로

구하는 함수  $f(x)$ 의 개수는  $5^4 = 625$