개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (극대극소) 93~112p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2021년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x+\frac{41}{3}$ 이 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

02 [2023년 11월 고3 7번 변형]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$이 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

03

함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-6)x+8$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

04

함수 $f(x)=x^3-3x^2+3(a+1)x$가 $-2<x<2$에서 감소하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -5 ② -6 ③ -7
④ -8 ⑤ -9

05

함수 $f(x)=-x^3-9x^2-15x+a$의 극솟값이 -17일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

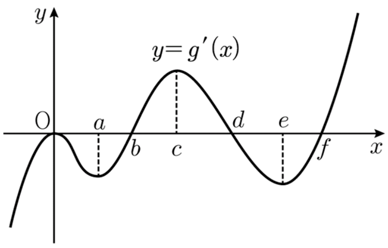
① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

06

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값 1을 가질 때, 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

07 함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖는 x의 개수를 m, 극솟값을 갖는 x의 개수를 n이라 할 때, $2m+n$의 값을 구하시오.



08 함수 $f(x)=x^3+3ax^2+(12-9a)x+5$가 극값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

09 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+5$가 극솟값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

10 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

11 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+ax-3$이 $0<x<1$에서 극댓값을 갖고, $x>1$에서 극솟값을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

12 사차함수 $f(x)=3x^4+4ax^3-6(a-8)x^2$이 극댓값을 가질 때, 한 자리의 자연수 a의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

13 닫힌 구간 $[-4,\ 0]$에서 함수 $f(x)=-x^4-4x^3+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 26 ② 27
③ 28 ④ 29
⑤ 30

14 함수 $f(x)=x^4-8x^2+12$는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$에서 최솟값 γ를 갖는다고 한다. 이때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$)

15 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=ax^3-9ax^2+b$의 최댓값이 4이고, 최솟값이 -24일 때, 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값을 구하시오.

16 [2024년 3월 고3 7번/3점]
함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$의
닫힌구간 $[a,\ b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은?
(단, $a,\ b$는 $a<b$인 실수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

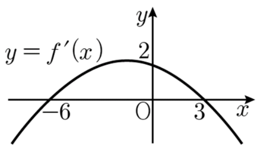
17 함수 $y=x^3-6x^2+12x$의 증가하는 구간은?

① 없다.
② $x<-2$
③ $x>2$
④ $-2<x<2$
⑤ 모든 실수

18 실수 전체의 집합에서 정의된
함수 $f(x)=2x^3+kx^2+6kx-5$의 역함수가 존재하기 위한 정수 k의 개수를 구하시오.

19 함수 $f(x)=x^3+ax^2+5$가 구간 $(2,\ 4)$에서 감소하고, 구간 $(5,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

20 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오.



21 함수 $f(x)=x^3-12x+6$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 14)$ ③ $(0,\ 7)$
④ $(1,\ 7)$ ⑤ $(1,\ 14)$

22 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3ax$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 다음 중 실수 a의 값이 될 수 없는 것은?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

23 $0<a\le 4$인 상수 a에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+a$의 최댓값이 2이고 최솟값이 m일 때, $a-m$의 값은?

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

24 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가질 때, 점 $(-1, 3)$에서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선에 이르는 거리는?

① $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

25 두 실수 a, b에 대하여 사차함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x)=-(x-a)^2(x-b)$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b$)

〈보기〉

ㄱ. $f(b)<0$이면 부등식 $f(x)>0$ 의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $f(a)=0$ 이면 부등식 $f(x)\geq 0$을 만족시키는 x의 최솟값은 a이다.

ㄷ. $f(a)=-f(b)$ 이면 방정식 $|f(x)|=f(b)$는 서로 다른 세 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 5

해설 $f'(x)=2x^2-8$

$=2(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

$\therefore a=2$

따라서 $f(a)=f(2)=\frac{2}{3}\cdot 2^3-8\cdot 2+\frac{41}{3}=3$이므로

$a+f(a)=5$

02 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-24$

$=3(x+2)(x-4)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=4$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$\beta-\alpha=4-(-2)=6$

03 정답 ②

해설 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-6)x+8$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+(a^2-6)$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 x에 대한 이차방정식 $3x^2+2ax+(a^2-6)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)=-2a^2+18\leq 0$

$a^2-9\geq 0$, $(a+3)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -3$ 또는 $a\geq 3$

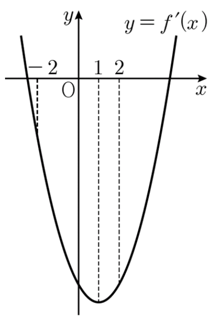
따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

04 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3-3x^2+3(a+1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3a+3$

$=3(x-1)^2+3a$



함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 감소하려면

이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 위의 그림에서

$f'(-2)=27+3a\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -9$ $\cdots$ ㉠

$f'(2)=3+3a\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$a\leq -9$

따라서 실수 a의 최댓값은 -9이다.

05 정답 ⑤

해설 $f(x)=-x^3-9x^2-15x+a$에서

$f'(x)=-3x^2-18x-15=-3(x+1)(x+5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-5$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$a-25$	↗	$a+7$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극솟값 $a-25$를 가지므로 $a-25=-17$

$\therefore a=8$

또, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+7$을 가지므로 구하는 극댓값은 $8+7=15$

06 정답 ⑤

해설 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고, 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$

$f'(2)=12+4a=0$, 즉 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+c$

또, $f(2)=1$이므로

$f(2)=8-12+c=1$, $c=5$

따라서 $a+b+c=2$

07 정답 4

해설 주어진 도함수 $y=g'(x)$의 그래프에서

$g'(0)=0$, $g'(b)=0$, $g'(d)=0$, $g'(f)=0$

(ⅰ) $x=d$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

(ⅱ) $x=b$, $x=f$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x=b$, $x=f$에서 극솟값을 갖는다.

(ⅲ) $x=0$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호는 음$(-)$에서 음$(-)$,

즉 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $m=1$, $n=2$이므로

$2m+n=2+2=4$

08 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+3ax^2+(12-9a)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+12-9a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3(12-9a)>0$

$9a^2+27a-36>0$, $a^2+3a-4>0$

$(a+4)(a-1)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

09 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3+ax^2+3x+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

주어진 삼차함수가 극솟값을 가지기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

10 정답 5

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$ 에서

$f'(x)=x^2+2(a-1)x+4$

$f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$ 의 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2+2(a-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D\le 0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-4\le 0$

$a^2-2a-3\le 0$, $(a+1)(a-3)\le 0$

$-1\le a\le 3$

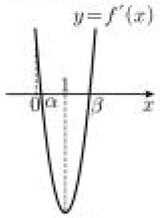
따라서 정수 a 는 -1, 0, 1, 2, 3 의 5 개다.

11 정답 5

해설 $f(x)=2x^3-6x^2+ax-3$에서

$f'(x)=6x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값, $x>1$에서 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, $0<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.



(ⅰ) $f'(0)>0$에서 $a>0$

(ⅱ) $f'(1)<0$에서 $6-12+a<0$

$\therefore\ a<6$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $0<a<6$이므로

정수 a는 $1, 2, \cdots, 5$의 5개이다.

12 정답 ①

해설 $f(x)=3x^4+4ax^3-6(a-8)x^2$에서

$f'(x)=12x^3+12ax^2-12(a-8)x$

$=12x\{x^2+ax-(a-8)\}$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2+ax-(a-8)=0$ 이 0 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 0 이 아닌 근을 가져야 하므로

$x=0$ 을 대입하면

$0^2+a\times0-(a-8)\neq0$

즉, $a\neq8$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$x^2+ax-(a-8)=0$ 의 판별식

$D>0$ 이어야 한다.

즉, $D=a^2+4(a-8)=a^2+4a-32$

$=(a+8)(a-4)>0$

에서 $a<-8$ 또는 $a>4$

따라서 구하고자 하는 한 자리의 자연수 a는 5, 6, 7, 9 의 4 개다.

13 정답 ②

해설 $f(x)=-x^4-4x^3+3$에서

$f'(x)=-4x^3-12x^2=-4x^2(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$(중근)

닫힌 구간 $[-4, 0]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	3	↗	30	↘	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 30, $x=-4$ 또는 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$M=30,\ m=3$

$\therefore\ M-m=30-3=27$

14 정답 24

해설 $f(x)=x^4-8x^2+12$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	12	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 최솟값 -4를 가지므로

$\alpha=-2,\ \beta=2,\ \gamma=-4$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-2)^2+2^2+(-4)^2=24$

15 정답 4

해설 $f(x)=ax^3-9ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-18ax=3ax(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ ($\because a>0, -1\le x\le2$)

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-10a+b$	↗	b	↘	$-28a+b$

이때 a, b는 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-28a+b$를 갖는다.

즉, $b=4$, $-28a+b=-24$이므로

$a=1, b=4$

$\therefore\ ab=1\cdot4=4$

16 정답 ①

해설 함수의 증가와 감소를 이해하여 구간의 길이의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$-1 \le a < b \le 5$일 때,

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

따라서 $b-a$의 최댓값은

$5-(-1)=6$

17 정답 ⑤

해설 $y=x^3-6x^2+12x$에서,

$y'>0$ 일 때, 함수는 증가한다.

$y'=3x^2-12x+12$

$=3(x-2)^2 \ge 0$

∴ 모든 실수 구간에서 증가하는 함수이다.

18 정답 37

해설 삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=2x^3+kx^2+6kx-5$에서

$f'(x)=6x^2+2kx+6k$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-6 \cdot 6k=k^2-36k \le 0$

$k(k-36) \le 0$

$\therefore\ 0 \le k \le 36$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 36$의 37개이다.

19 정답 2

해설 $f(x)=x^3+ax^2+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(2, 4)$에서 감소하고,

구간 $(5, \infty)$에서 증가하려면

$2<x<4$에서 $f'(x) \le 0$,

$x>5$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

$f'(2)=12+4a \le 0$에서 $a \le -3$

$f'(4)=48+8a \le 0$에서 $a \le -6$

$f'(5)=75+10a \ge 0$에서 $a \ge -\frac{15}{2}$

따라서 a의 값의 범위는

$-\frac{15}{2} \le a \le -6$이므로

정수 a는 $-7, -6$의 2개다.

20 정답 $\frac{27}{2}$

해설 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

($a \ne 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$f'(0)=c=2$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -6, 3이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -6과 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-6+3=-\frac{2b}{3a}$, $(-6)\cdot 3=\frac{c}{3a}=\frac{2}{3a}$

$\therefore\ a=-\frac{1}{27}$, $b=-\frac{1}{6}$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=-\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{6}x^2+2x+d$이므로 구하는 차는

$f(3)-f(-6)$

$=\left(-1-\frac{3}{2}+6+d\right)-(8-6-12+d)$

$=\frac{27}{2}$

21 정답 ②

해설 $f(x)=x^3-12x+6$에서
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	22	$\searrow$	-10	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 22, $x=2$에서 극솟값 -10을 가지므로
$\mathrm{A}(-2,\ 22)$, $\mathrm{B}(2,\ -10)$
따라서 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는
$$\left(\frac{1\cdot 2+3\cdot(-2)}{1+3},\ \frac{1\cdot(-10)+3\cdot 22}{1+3}\right)$$
즉, $(-1,\ 14)$

22 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+ax^2+3ax$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+3a$
함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-9a>0,\ a(a-9)>0$
$\therefore\ a<0$ 또는 $a>9$
(ⅱ) $f'(-1)=3-2a+3a>0$에서 $a>-3$
(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은
$x=-\frac{a}{3}$이므로
$-\frac{a}{3}>-1\qquad \therefore\ a<3$
이상에서 실수 a의 값의 범위는
$-3<a<0$
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

23 정답 ③

해설 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+a$에서
$f'(x)=12x^3+12x^2-72x=12x(x+3)(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
$0<a\le 4$에서 $0<\frac{a}{2}\le 2$이므로
닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(-\frac{a}{2}\right)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$f\left(\frac{a}{2}\right)$

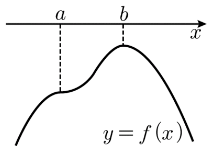
닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a를 가지므로 $a=2$
따라서 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+2$에서
$f(-1)=3-4-36+2=-35$,
$f(1)=3+4-36+2=-27$ 이므로
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -35를 갖는다.
즉, $m=-35$이므로
$a-m=2-(-35)=37$

24 정답 ④

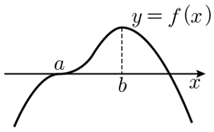
해설 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로
$f(-1)=3,\ f'(-1)=0$
이때, $g(x)=xf(x)$로 놓으면
$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로
$g(-1)=-f(-1)=-3$
$g'(-1)=f(-1)-f'(-1)=3$
즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ -3)$이고, 접선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은
$y-(-3)=3\{x-(-1)\}$
$\therefore\ y=3x$
따라서 점 $(-1, 3)$에서 직선 $3x-y=0$에 이르는 거리는
$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

25 **정답** ⑤

해설 ㄱ. $f(b)<0$이면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$인 해는 존재하지 않는다. (거짓)



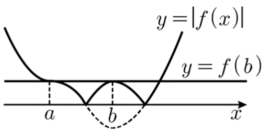
ㄴ. $f(a)=0$일 때 $f(x)=0$을 만족시키는 a가 아닌 값을 $\beta(b<\beta)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\geq 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $a\leq x\leq \beta$이다.



따라서 x의 최솟값은 a이다. (참)

ㄷ. $f(a)<f(b)$이므로 $f(a)=-f(b)$가 성립하려면 $f(a)<0$, $f(b)>0$이고 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=0$이다.

즉, $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $|f(x)|=f(b)$는 서로 다른 세 실근을 가진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (함수의 그래프)
106~111~116p

함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+ax$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

02 함수 $f(x)=2x^3-9ax^2+18ax-1$이 극값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

03 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+6kx-1$이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

04 함수 $f(x)=5x^3-ax^2+ax+7$이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

05 함수 $f(x)=x^3+(k-3)x^2+(2-k)x-3$이 $0<x<1$에서 극댓값을 갖고, $1<x<2$에서 극솟값을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a<k<b$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

06 함수 $f(x)=x^3+3ax^2-(a+1)x+4$가 $-1<x<1$에서 극댓값, 극솟값을 모두 가질 때, 정수 a의 개수를 구하시오.

07 다음 중 함수 $f(x)=-x^4+2x^3+ax^2$이 극솟값을 갖도록 하는 실수 a의 값이 될 수 있는 것은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

08 [2021년 경찰대 17번 5점 변형]
자연수 n에 대하여
함수 $f(x)=|x^2-9|(x^2+n)$이 $x=a$에서 극값을 갖는 a의 개수가 4 이상일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

09 함수 $f(x)=2x-x^2\ (0\le x\le 3)$의 최솟값을 구하시오.

10 [2017년 6월 고3 문과 10번/3점]
닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서
함수 $f(x)=x^3-3x+5$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11 닫힌구간 $[0,\ 10]$에서 함수 $f(x)=ax(x-6)^2+b$의 최댓값이 48, 최솟값이 8일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

12 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서
함수 $f(x)=2x^3-21x^2+72x+a$의 최댓값이 60일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

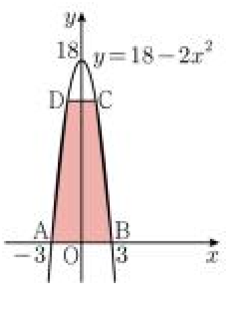
13 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$가 $-2 \le x \le 3$에서 최댓값 9, 최솟값 -11을 가질 때 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① -10 ② -2 ③ 2
④ 10 ⑤ 20

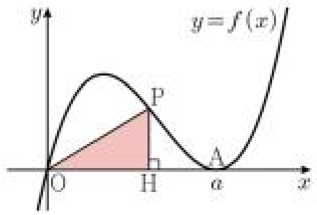
14 두 함수 $f(x)=x^4-2x^2+4$, $g(x)=-x^2+6x+k$가 있다. 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f(a) \ge g(b)$가 성립할 때, 실수 k의 최댓값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

15 다음 그림과 같이 곡선 $y=18-2x^2$과 x축의 교점을 A, B라 할 때, 곡선 $y=18-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하는 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하시오.

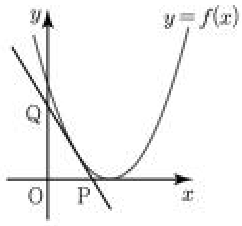


16 다음 그림과 같이 곡선 $f(x)=x(x-a)^2$이 x축과 만나는 두 점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자.
이 곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 POH의 넓이의 최댓값은? (단, $a>0$이고, $0<t<a$이다.)



① $\frac{a^2}{64}$ ② $\frac{a^2}{32}$ ③ $\frac{a^4}{64}$
④ $\frac{a^4}{32}$ ⑤ $\frac{a^4}{16}$

17 함수 $f(x)=x^2-4x+4$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$ $(0<a<2)$에서의 접선이 x축 및 y축과 만나는 점을 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

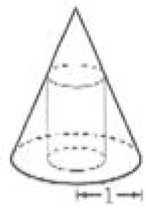


① $\frac{61}{27}$ ② $\frac{62}{27}$ ③ $\frac{7}{3}$

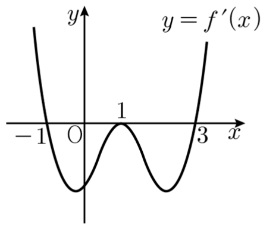
④ $\frac{64}{27}$ ⑤ $\frac{65}{27}$

18 반지름의 길이가 9인 구에 내접하는 직원뿔의 부피가 최대가 될 때의 직원뿔의 높이를 구하시오.

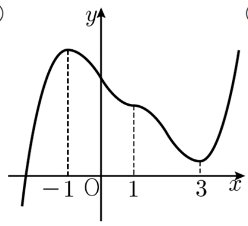
19 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 1인 원뿔에 원기둥을 내접시킬 때, 이 원기둥의 부피가 최대가 되려면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 얼마로 하면 되는지 구하시오.



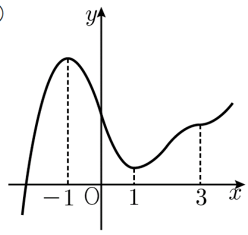
20 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은?



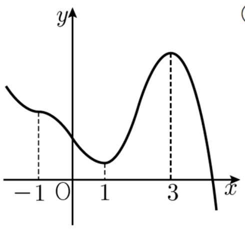
①



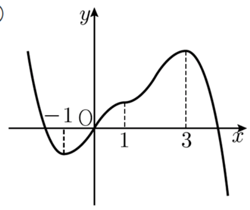
②



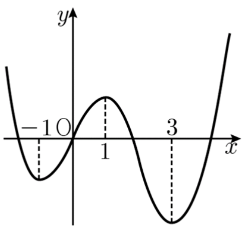
③



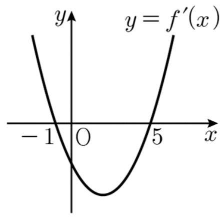
④



⑤

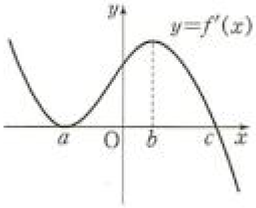


21 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

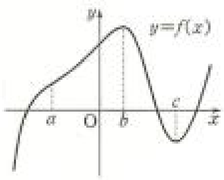


① $f(x)$는 $x<-1$에서 감소한다.
② $f(x)$는 $-1<x<5$에서 감소한다.
③ $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
④ $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값을 갖는다.
⑤ $f(x)$는 $x>5$에서 증가한다.

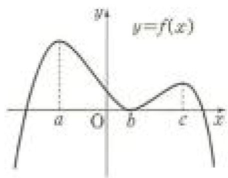
22 사차함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?



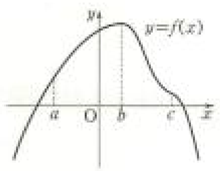
①



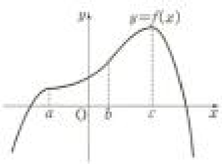
②



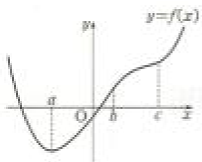
③



④



⑤



23 곡선 $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2-x+2$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{15}{4}$ ② 4 ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

24 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -3)$, $\mathrm{B}(10,\ -3)$에 대하여 점 P가 곡선 $y=x^2-2$위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하시오.

25 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. (나) 함수 $\lvert f(x)-f(0)\rvert$은 오직 $x=a$ $(a>3)$에서만 미분가능하지 않다.

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (함수의 그래프) 106~111~116p

함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 5

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+ax$ 에서 $f'(x)=x^2-ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면
이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4a>0,\ a(a-4)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>4$
따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

02 정답 ①

해설 $f(x)=2x^3-9ax^2+18ax-1$에서
$f'(x)=6x^2-18ax+18a$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=81a^2-6\cdot18a>0$
$27a(3a-4)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{4}{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

03 정답 $\frac{1}{6}$

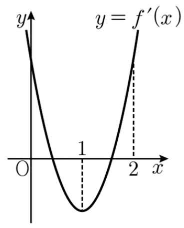
해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+6kx-1$에서
$f'(x)=x^2+2x+6k$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면
이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-6k\le0$
$\therefore k\ge\frac{1}{6}$
따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{6}$이다.

04 정답 15

해설 $f(x)=5x^3-ax^2+ax+7$에서
$f'(x)=15x^2-2ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면
방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-15a\le0,\ a(a-15)\le0$
$\therefore 0\le a\le15$
따라서 실수 a의 최댓값은 15, 최솟값은 0이므로 구하는 값은
$15+0=15$

05 정답 $\frac{1}{3}$

해설 $f'(x)=3x^2+2(k-3)x+(2-k)$
함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값,
$1<x<2$에서 극솟값을 가지므로
도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



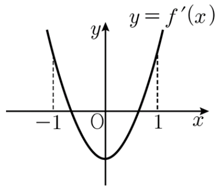
(i) $f'(0)=2-k>0$에서 $k<2$ … ㉠
(ii) $f'(1)=k-1<0$에서 $k<1$ … ㉡
(iii) $f'(2)=3k+2>0$에서 $k>-\frac{2}{3}$ … ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통범위를 구하면
$-\frac{2}{3}<k<1$
따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $b=1$이므로
$a+b=\frac{1}{3}$

06 정답 1

해설 $f(x)=x^3+3ax^2-(a+1)x+4$에서

$f'(x)=3x^2+6ax-(a+1)$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값, 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2+3(a+1)$$
$$=9a^2+3a+3$$
$$=9\left(a+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{4}>0$$

따라서 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

(ⅱ) $f'(-1)=3-6a-a-1>0$에서

$a<\frac{2}{7}$

(ⅲ) $f'(1)=3+6a-a-1>0$에서

$a>-\frac{2}{5}$

(ⅳ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로 $-1<-a<1$에서

$-1<a<1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{2}{5}<a<\frac{2}{7}$

따라서 정수 a는 0의 1개이다.

07 정답 ④

해설 $f(x)=-x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2+2ax=-2x(2x^2-3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면

삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9+8a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{8}$

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2-3x-a=0$의 근이 아니어야 하므로 $a\neq 0$

$\therefore -\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ④이다.

08 정답 ⑤

해설 $f(x)=\begin{cases}(x^2-9)(x^2+n) & (x<-3 \text{ 또는 } x>3)\\ -(x^2-9)(x^2+n) & (-3\le x\le 3)\end{cases}$

에서 양변을 미분하면

$f'(x)=\begin{cases}4x^3+2(n-9)x & (x<-3 \text{ 또는 } x>3)\\ -4x^3-2(n-9)x & (-3<x<3)\end{cases}$

즉, $f(x)=|x^2-9|(x^2+n)$에서 $x=-3$과 $x=3$에서 항상 극소이고

$f'(x)=2x\{2x^2+(n-9)\}$에서 $x=0$에서 극값을 가지며 극값의 개수가 4 이상이므로 $n<9$가 된다.

따라서 만족하는 자연수 n은 $1, 2, 3, \cdots, 8$이고

$f(x)=|x^2-9|(x^2+n)\ge 0$이므로 극값의 합이 최대가 되는 경우는 $n=8$일 때이다.

09 정답 -3

해설 $f(x)=2x-x^2 \ (0\le x\le 3)$에서

$f'(x)=2-2x=2(1-x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 아래의 증감표에 의하면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-3

따라서, $x=1$일 때 최댓값 1을 가지고 $x=3$일 때 최솟값 -3을 가진다.

10 정답 ③

해설 미분법을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$에서

$f'(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=1$

즉, $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소를 가진다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=1-3+5=3$,

$f(3)=27-9+5=23$

이므로 3이다.

11 정답 2

해설 $f(x)=ax(x-6)^2+b=ax^3-12ax^2+36ax+b$

이므로

$f'(x)=3ax^2-24ax+36a=3a(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$	10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	$\nearrow$	$32a+b$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$160a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 최댓값 $160a+b$,

$x=0$과 $x=6$에서 최솟값 b를 가지므로

$160a+b=48$, $b=8$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=8$이므로

$ab=2$

12 정답 -21

해설 $f(x)=2x^3-21x^2+72x+a$에서

$f'(x)=6x^2-42x+72$

$\quad=6(x-3)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	$\nearrow$	$a+81$	$\searrow$	$a+80$

이때 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)=a+81$이므로

$a+81=60$

$\therefore a=-21$

13 정답 ④

해설 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ $(a>0)$에서

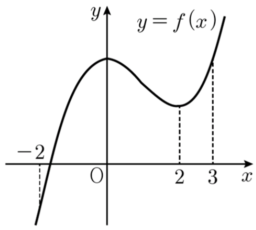
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-20a$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b-4a$	$\nearrow$	b

이때 $a>0$이므로 $b-20a<b-4a$



함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=3$에서 최댓값 b,

$x=-2$에서 최솟값 $b-20a$를 가지므로

$b-20a=-11$, $b=9$

따라서 $a=1$, $b=9$이므로

$a+b=10$

14 정답 ①

해설 주어진 조건을 만족시키려면

(함수 $f(x)$의 최솟값) $\geq$ (함수 $g(x)$의 최댓값)

이어야 한다.

$f(x)=x^4-2x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(-1)=3$, $f(0)=4$, $f(1)=3$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이다.

$g(x)=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$에서

함수 $g(x)$의 최댓값은 $k+9$이다.

$k+9\leq 3$에서 $k\leq -6$

따라서 실수 k의 최댓값은 -6이다.

15 정답 64

해설 $\mathrm{C}(t,\ 18-2t^2)\ (0<t<3)$이라 하면,
$\overline{\mathrm{CD}}=2t$, $\overline{\mathrm{AB}}=6$, 사다리꼴의 높이가 $18-2t^2$이다.
사다리꼴 ABCD의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(18-2t^2)$$
$$=2(t+3)(9-t^2)$$
$$f'(t)=2\{(9-t^2)-2t(t+3)\}$$
$$=-6(t^2+2t-3)$$
$$=-6(t+3)(t-1)$$

$f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=1\ (\because 0<t<3)$
$0<t<3$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	64	↘	

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최댓값 64를 가지므로
사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 64이다.

16 정답 ④

해설 점 P의 좌표를 $(t,\ t(t-a)^2)$이라 하고 삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t(t-a)^2=\frac{1}{2}t^4-at^3+\frac{a^2}{2}t^2$$

(단, $0<t<a$)

$$S'(t)=2t^3-3at^2+a^2t=t(t-a)(2t-a)$$

$S'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\dfrac{a}{2}$ 또는 $t=a$

$0<t<a$에서 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	(a)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	극대	↘	

$S(t)$는 $t=\dfrac{a}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4-a\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3+\frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^4}{32}$$

17 정답 ④

해설 $f(x)=x^2-4x+4$에서
$f'(x)=2x-4$
점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
$y-(a^2-4a+4)=(2a-4)(x-a)$
$y=2(a-2)x+4-a^2$
이때 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+2}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}(0,\ 4-a^2)$이므로
삼각형 OPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{4}(a+2)(4-a^2)$$
$$S'(a)=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$$

$0<a<2$이므로
$S'(a)=0$에서 $a=\dfrac{2}{3}$
함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

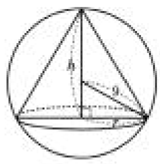
a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{64}{27}$	↘	

$S(a)$는 $a=\dfrac{2}{3}$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{27}$$

18 정답 12

해설



구에 내접하는 직원뿔의 반지름의 길이를 r,
높이를 h라 하면 직원뿔의 부피 V는 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$이다.
$r^2=9^2-(h-9)^2=18h-h^2$이므로

$$V=\frac{1}{3}\pi(18h-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(18h^2-h^3)$$
$$\therefore \frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}(36h-3h^2)=\pi h(12-h)=0$$에서

$h=12$일 때 부피 V는 극대이면서 최대가 된다.

19 정답 $\frac{2}{3}$

해설 원기둥의 반지름의 길이를 x, 원기둥의 높이를 y라 하고 원뿔의 높이를 h라 하면 $(h-y):x=h:1$에서

$h-y=hx$

$\therefore y=h(1-x)$

원기둥의 부피를 V라 하면

$V=\pi x^2 y=\pi x^2 h(1-x)$

$=\pi h(x^2-x^3)$ $(0<x<1)$

$V'=\pi h(2x-3x^2)$

$=-3\pi hx\left(x-\frac{2}{3}\right)$

따라서 부피가 최대이려면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}$이어야 한다.

20 정답 ①

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

또, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

21 정답 ①

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 5이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x<-1$ 또는 $x>5$에서 증가하고, $-1<x<5$에서 감소한다.

또, $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=5$에서 극솟값을 갖는다.

22 정답 ④

해설 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, c이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x<c$일 때, 증가하고, $x>c$일 때, 감소하므로 $x=c$에서 극대이다.

또, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ④이다.

23 정답 ①

해설 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2-t+2\right)$ $(t>0)$이라 하면 $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2-t+2$에서

$y'=2t^3-t-1=(t-1)(2t^2+2t+1)$이므로

함수 $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2-t+2$는 $t=1$에서 최솟값 1을 갖는다. 즉, $t>0$에서 $\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2-t+2>0$이다.

사각형 OQPR의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=2t+2\left(\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2-t+2\right)=t^4-t^2+4$

에서 $f'(t)=4t^3-2t=4t\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$t>0$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

$t>0$에서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최소이고

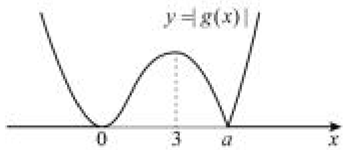
최솟값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4=\frac{15}{4}$

24 정답 90

해설 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$로 놓으면
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$
$=2t^4+6t^2-20t+102$
$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$ 로 놓으면
$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$
$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ ($\because 2t^2+2t+5>0$)
따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극소이면서 최대이므로
구하는 최솟값은 $f(1)=90$

25 정답 ②

해설 $g(x)=f(x)-f(0)$이라 하자.
$g'(x)=f'(x)$이므로 $g(x)$도 $x=3$에서 극값을
가진다. 따라서 $g'(3)=0$, $g(0)=0$



또한, $|g(x)|$는 $x=a$ $(a>3)$에서만 미분이 가능하지
않으므로 그래프는 다음과 같다.
$g(x)$는 $x=0$에서 삼중근 $x=a$에서 실근을 가지므로
$g(x)=f(x)-f(0)=x^3(x-a)$이다.
$g'(x)=f'(x)=4x^3-3ax^2$이고, $f'(3)=0$이므로
$f'(3)=4\times3^3-3a\times3^2=0$
$\therefore a=4$

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부등식의 활용) 118~126p

방정식과 부등식에서의 활용

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 방정식 $2x^4-4x^2+3=0$의 서로 다른 실근은 몇 개인가?

① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

02 방정식 $x^4-2x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

03 방정식 $2x^4-4x^3=-x^4+12x^2+2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

04 방정식 $x^3+3x^2-9x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 k의 값의 곱을 구하시오.

05 x에 대한 삼차방정식 $x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+k=0$이 중근과 다른 한 개의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 값을 구하시오.

06 직선 $y=2x+k$와 곡선 $y=x^3-x$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-4<k<0$ ② $-3<k<1$
③ $-2<k<2$ ④ $-1<k<3$
⑤ $0<k<4$

07 [2022년 6월 고3 9번/4점]
두 함수 $f(x)=x^3-x+6$, $g(x)=x^2+a$가 있다.
$x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \ge g(x)$가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

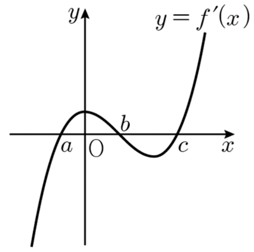
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 두 함수 $f(x)=2x^3-20x+k$, $g(x)=3x^2+16x-5$가 있다. 열린구간 $(1,\ 4)$에서 부등식 $f(x) \ge g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.

09 [2017년 11월 고2 이과 15번 변형]
모든 실수 x에 대하여
부등식 $x^4-4x-a^2+2a+11 \ge 0$이
항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

10 다항함수 $y=f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다. $f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=2$일 때, 방정식 $f(x)-4=0$의 실근의 개수를 구하시오.



11 삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x+2a=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

12 x에 대한 삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x+p=0$이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖도록 하는 정수 p의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 13
④ 19 ⑤ 26

13 x에 대한 방정식 $2x^3+18x^2+14x=3x^2-10x+k$가 서로 다른 세 개의 음근을 가질 때, 다음 중 실수 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -10 ② -7 ③ -4
④ -1 ⑤ 2

14 x에 대한 방정식 $2x^3+3x^2-12x+p=0$이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 갖도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-20<p<0$ ② $-20<p<7$
③ $-7<p<20$ ④ $0<p<7$
⑤ $0<p<20$

15 x에 대한 방정식 $x^3-9x^2+15x+k=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 21 ② 22
③ 23 ④ 24
⑤ 25

16 x에 대한 방정식 $x^3+4x^2-6x+k=x^2+3x$가 오직 한 개의 음근만을 갖도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.

17 두 함수
$f(x)=3x^3+x^2-6x$, $g(x)=2x^3+4x^2+3x+a$
에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오.

18 곡선 $y=x^3-kx$ 밖의 점 $(2,\ 1)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k\neq\frac{7}{2}\right)$

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

19 다음 보기 중 '$x > a$일 때, $f'(x) > 0$이고 $f(a)=0$이면 $f(x)>0$이다.'라는 성질을 이용하여 증명할 수 있는 부등식만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $x>1$일 때, $2x^3+1>3x^2$
ㄴ. $x>2$일 때, $x^3+4>3x^2$
ㄷ. $x>-2$일 때, $x^3-3x+3>0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

20 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4+4(a-1)x^2+8ax+44 \geq -\frac{4}{3}x^3-8ax$$

가 성립하도록 하는 자연수 a의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21 [2023년 사관학교 19번/3점]

x에 대한 방정식 $x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

22 [2016년 9월 고3 문과 20번 변형]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-4)=f'(4)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(3)$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선은 점 $(-2, f(-2))$를 지난다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23 [2019년 10월 고3 문과 27번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=0$
(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

24 [2020년 6월 고3 문과 19번 변형]

방정식 $-2x^3-9x^2+a=0$이 $-3 \le x \le 3$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

25 [2020년 6월 고3 문과 19번/4점]

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부등식의 활용)
118~126p

방정식과 부등식에서의 활용

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ①

해설 $f(x)=2x^4-4x^2+3$ 이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)$

$=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는

$x=1$ 이므로 아래 증감표에 의하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	3	↘	1	↗

이 함수의 최댓값은 존재하지 않고 최솟값은 1 이 된다. 따라서, 이 함수는 실근을 가지지 않는다.

02 **정답** 0

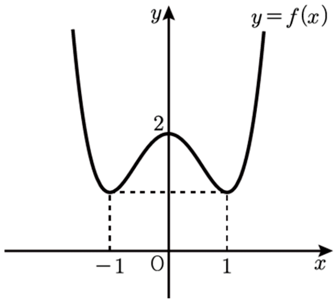
해설 $f(x)=x^4-2x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘	1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.



03 **정답** 2

해설 $2x^4-4x^3=-x^4+12x^2+2$에서

$3x^4-4x^3-12x^2-2=0$

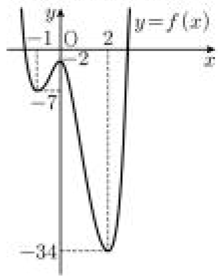
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2-2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↗	-2	↘	-34	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



04 **정답** -135

해설 $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-3)f(1)=0$이어야 하므로

$(27+k)(-5+k)=0$

$\therefore k=-27$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 모든 k의 값의 곱은

$(-27)\cdot 5=-135$

05 정답 -22

해설 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3x-18=3(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=22+k$,

극솟값은 $f(3)=k-\frac{81}{2}$

삼차방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$f(-2)\cdot f(3)=0$ 이어야 하므로

$(22+k)\left(k-\frac{81}{2}\right)=0$이고 k는 정수이므로

$k=-22$

06 정답 ③

해설 직선 $y=2x+k$와 곡선 $y=x^3-x$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x+k=x^3-x$, 즉 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x-k$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2-k$	$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)<0$, $(2-k)(-2-k)<0$

$(k+2)(k-2)<0$ $\quad\therefore -2<k<2$

07 정답 ⑤

해설 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$\therefore h'(x)=3x^2-2x-1$

$\quad=(3x+1)(x-1)$

따라서 $h'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

이때 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a\leq 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

08 정답 76

해설 $h(x)=f(x)-g(x)=2x^3-3x^2-36x+5+k$가 열린구간 $(1, 4)$에서 $h(x)\geq 0$이 되는 최솟값 k를 구한다.

$h'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=3$

$h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$k-32$	$\searrow$	$k-76$	$\nearrow$	$k-59$

따라서 열린구간 $(1, 4)$에서 $h(x)$의 최솟값은 $k-76$이므로 $h(x)\geq 0$이려면 $k-76\geq 0$이어야 한다.

따라서 k의 최솟값은 76이다.

09 정답 ②

해설 $f(x)=x^4-4x-a^2+2a+11$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

$f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-a^2+2a+8$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a^2+2a+8\geq 0,\ a^2-2a-8\leq 0$

$(a-4)(a+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq a\leq 4$

따라서 정수 a의 개수는 7

10 정답 2

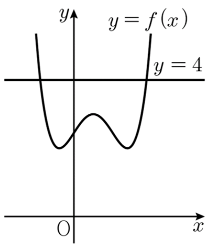
해설 $f(x)-4=0$, 즉 방정식 $f(x)=4$의 실근의 개수는

$y=f(x)$, $y=4$의 교점의 개수와 같다.

$y=f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

아래의 그림에서 $y=f(x)$와 $y=4$의 교점의 개수가 2이므로 $f(x)-4=0$의 실근의 개수도 2이다.

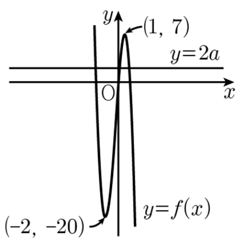


11 정답 ①

해설 $2a=-2x^3-3x^2+12x$ 에서 $-2x^3-3x^2+12x$를 $f(x)$라 하면

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x-1)(x+2)$

따라서 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x+2a=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖기 위해선 $0<2a<7$ 이어야 하므로 자연수 a의 최댓값은 3이다.

12 정답 ④

해설 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+p$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$p+7$	↘	$p-20$	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음을 만족해야 한다.

(ⅰ) (극댓값)>0, (극솟값)<0에서

$p+7>0,\ p-20<0$

$\therefore\ -7<p<20$ …… ㉠

(ⅱ) (y절편)>0에서

$f(0)=p>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<p<20$

따라서 정수 p는 1, 2, 3, $\cdots$, 19의 19개이다.

13 정답 ⑤

해설 $2x^3+18x^2+14x=3x^2-10x+k$에서

$2x^3+15x^2+24x=k$

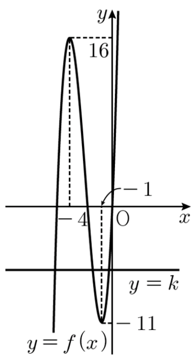
$f(x)=2x^3+15x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+30x+24=6(x+1)(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-11	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 개의 음수이어야 하므로

$-11<k<0$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

14 정답 ①

해설 $2x^3+3x^2-12x+p=0$에서

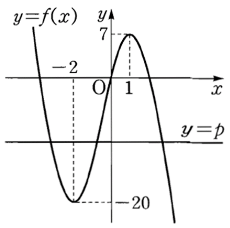
$p=-2x^3-3x^2+12x$

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 p의 값의 범위는 $-20<p<0$

15 정답 ④

해설 $x^3-9x^2+15x+k=0$에서 $x^3-9x^2+15x=-k$

$f(x)=x^3-9x^2+15x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

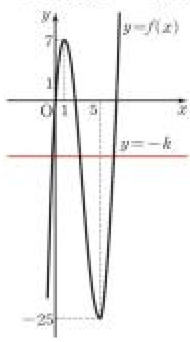
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 k의 값의 범위는 $-25<-k<0$

$\therefore 0<k<25$

따라서 정수 k의 최댓값은 24이다.

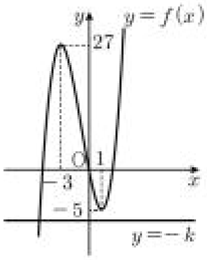


16 정답 6

해설 $x^3+4x^2-6x+k=x^2+3x$에서
$x^3+3x^2-9x=-k$
$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



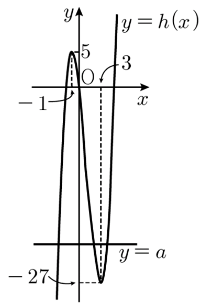
주어진 방정식이 한 개의 음근만을 가지려면
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고,
교점의 x좌표가 음수이어야 하므로
$-k<-5$
$\therefore k>5$
따라서 정수 k의 최솟값은 6이다.

17 정답 26

해설 $f(x)=g(x)$에서
$3x^3+x^2-6x=2x^3+4x^2+3x+a$
이 식을 정리하면 $x^3-3x^2-9x=a$
이때 $h(x)=x^3-3x^2-9x$로 놓으면
$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수가 되는 실수 a의 값의 범위는 $-27<a<0$이다.
즉, 구하는 정수 a의 개수는 26이다.

18 정답 ②

해설 $y=x^3-kx$에서 $y'=3x^2-k$
점 $(2,\ 1)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-kt)$라 하면
접선의 방정식은 $y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$
이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$1-(t^3-kt)=(3t^2-k)\cdot(2-t)$
$2t^3-6t^2+1+2k=0 \qquad \cdots ㉠$
점 $(2,\ 1)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3-6t^2+1+2k$로 놓으면
$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$
삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$f(0)f(2)=0$이어야 하므로 $(1+2k)(-7+2k)=0$
따라서 상수 k의 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

19 정답 ③

해설 ㄱ. $g(x)=2x^3-3x^2+1$로 놓으면

$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$x>1$일 때, $g'(x)>0$이고 $g(1)=0$이므로

$g(x)>0$, 즉 $2x^3+1>3x^2$이다. (참)

ㄴ. $h(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x>2$일 때, $h'(x)>0$이고 $f(2)=0$이므로

$h(x)>0$, 즉 $x^3+4>3x^2$이다. (참)

ㄷ. $i(x)=x^3-3x+3$으로 놓으면

$i'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$x>-2$에서 $i'(x)$의 부호를 정할 수 없으므로

$i(x)>0$을 증명할 수 없다. (거짓)

따라서 주어진 성질을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은 ㄱ, ㄴ이다.

20 정답 ②

해설 $x^4+4(a-1)x^2+8ax+44\geq-\dfrac{4}{3}x^3-8ax$에서

$x^4+\dfrac{4}{3}x^3+4(a-1)x^2+16ax+44\geq0\cdots㉠$

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하므로

$f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3+4(a-1)x^2+16ax+44$로

놓으면 함수 $f(x)$의 최솟값을 m이라 할 때,

$m\geq0$이어야 한다.

$f'(x)=4x^3+4x^2+8(a-1)x+16a$

$=4\{x^3+x^2+2(a-1)x+4a\}$

$=4(x+2)(x^2-x+2a)$

a는 자연수이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+2a=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+2a-\dfrac{1}{4}>0$

따라서 $f'(x)=0$에서 $x=-2$이고,

$x<-2$일 때 $f'(x)<0$, $x>-2$일 때

$f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-2)=16-\dfrac{32}{3}+16(a-1)-32a+44$

$=-16a+\dfrac{100}{3}$

이므로 $-16a+\dfrac{100}{3}\geq0$에서 $a\leq\dfrac{25}{12}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 2이다.

21 정답 12

해설 $f(x)=x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3nx=3x(x-n)$

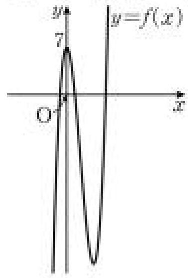
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7=0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편과 같으므로 x에 대한 방정식 $x^3-\dfrac{3n}{2}x^2+7=0$의 1보다 큰 서로 다른 두 실근의 개수가 2가 되려면 $f(1)>0$이고 $f(n)<0$을 만족시켜야 한다. $f(1)=8-\dfrac{3n}{2}>0$이고

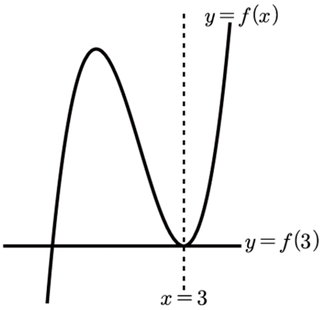
$f(n)=n^3-\dfrac{3n}{2}\cdot n^2+7=-\dfrac{1}{2}n^3+7<0$

즉, $\sqrt[3]{14}\leq n<\dfrac{16}{3}$이므로 이를 만족하는 자연수 $n=3$, 4, 5이고 그 합은 $3+4+5=12$이다.

22 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$라고 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(-4)=f'(4)$에서 $b=0$이고
$x=-3$에서 극댓값을 가지므로
$f'(-3)=27a+c=0$에서 $c=-27a$이다.
따라서 $f'(x)=3ax^2-27a$ $(a>0)$이므로
$f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

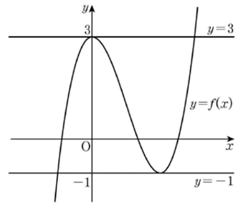
ㄴ. $f'(x)=3ax^2-27a$
$=3a(x+3)(x-3)$
조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 다음 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(3)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(x)=ax^3-27ax+d$ $(a>0)$이고,
$f'(x)=3ax^2-27a$이므로
점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은
$y-(-26a+d)=-24a(x-1)$
$y=-24ax-2a+d$ $\cdots$ ㉠
이때 ㉠에 점 $(-2,\ f(-2))$, 즉 $(-2,\ 46a+d)$를 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은 점 $(-2,\ f(-2))$를 지난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23 정답 19

해설 조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.
조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.
그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$
$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서
$a=-3$
그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$
따라서 $f(4)=19$

24 정답 ④

해설 $f(x)=-2x^3-9x^2+a$라 하면

$f'(x)=-6x^2-18x$

$=-6x(x+3)$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$이고,

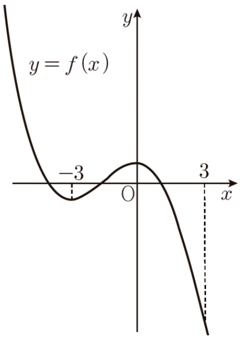
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$	a	$\searrow$

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-3\le x\le 3$에서

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(3)=a-135$이므로 $f(-3)>f(3)$이다.

그러므로 조건을 만족시키기 위해서는

$f(-3)\le 0$이고 $f(0)>0$이어야 한다.

$f(-3)\le 0$에서

$a-27\le 0,\ a\le 27$ $\cdots$ ㉠

또, $f(0)>0$에서

$a>0$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $0<a\le 27$이므로

구하는 정수 a의 개수는 27이다.

25 정답 ③

해설 미분을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건 구하기

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+12x$

$=6x(x+2)$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이고,

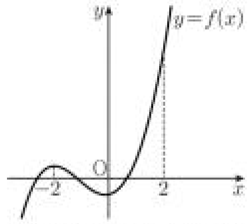
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$8+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(2)=40+a$이므로 $f(2)>f(-2)$이다.

그러므로 조건을 만족시키기 위해서는

$f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.

$f(-2)\ge 0$에서

$8+a\ge 0,\ a\ge -8$ $\cdots$ ㉠

또, $f(0)<0$에서

$a<0$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$이므로

구하는 정수 a의 개수는 8이다.

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (속도와 가속도) 128~136p

속도와 가속도

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=5t^2-4t+11$일 때, $t=5$에서의 점 P의 가속도를 구하시오.

02 수면으로부터 높이가 $12.8\,\mathrm{m}$인 인공 폭포의 꼭대기에서 수면과 수직으로 떨어지기 시작한 물방울의 t초 후의 높이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면 $x=-5t^2+12.8$이다. 폭포의 꼭대기에서 떨어진 물방울이 수면에 닿을 때의 속도를 구하시오.

03 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치는 각각 $P(t)=\frac{1}{3}t^3+16t-5$, $Q(t)=4t^2-7$이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 구하시오.

04 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-7t^2+10t$일 때, 점 P가 마지막으로 원점을 지날 때의 가속도를 구하시오.

05 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표가 $x=t^3-5t^2+t$로 주어질 때, $t=2$에서의 속도, 속력 및 가속도의 합을 구하면?

① -7　② 0　③ 2
④ 7　⑤ 16

06 [2017년 10월 고3 문과 12번 변형]
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=-t^2+12t$이다. $t=a$에서의 점 P의 가속도가 0일 때, 상수 a의 값은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

07 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=\frac{5}{3}t^3+pt^2+qt$이다.

$t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도가 각각 20, 10일 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

08 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

$x=t^3-9t^2+kt$ (k는 상수)

이다. 점 P의 시각 $t=5$에서의 속도가 0일 때, 점 P의 시각 $t=k$에서의 가속도를 구하시오.

09 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)=-2t^3+12t^2-14t$로 주어질 때, $1\le t\le 5$에서 점 P의 속력의 최댓값은?

① 10　② 20　③ 32
④ 44　⑤ 56

10 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-\frac{3}{2}t^2+4$ $(t\ge 0)$일 때, 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꿀 때의 시각을 구하시오.

11 직선 도로를 달리는 어떤 자동차의 운전자가 $400\,\mathrm{m}$ 앞의 정지 신호를 발견하고 브레이크를 밟았다. 브레이크를 밟은 후 t초 동안 달린 거리 $x\,\mathrm{m}$가 $x=40t-ct^2$이라고 한다. 이때 정지선을 넘지 않고 멈추기 위한 양수 c의 최솟값을 구하시오.

12 직선 철로를 달리는 어떤 기차가 제동을 걸기 시작한 시점부터 멈출 때까지의 위치는 제동을 건 후 t초일 때 $x=30t-t^2(\mathrm{m})$라고 한다. 기관사가 철로에 있는 장애물을 보고 즉시 제동을 걸어 장애물에 부딪히지 않으려면 최소한 몇 m 전에 장애물을 발견해야 하는지 구하면?

① $180\,\mathrm{m}$　② $195\,\mathrm{m}$　③ $200\,\mathrm{m}$
④ $225\,\mathrm{m}$　⑤ $250\,\mathrm{m}$

13 처음속도 $29.4(\text{m}/\text{초})$의 속도로 지면에서 수직하게 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 $h(\text{m})$라 할 때, 관계식 $h=29.4t-4.9t^2$을 만족한다. 이 때 몇 초 후에 최고높이에 도달하는지 구하시오.

14 한 변의 길이가 1 cm인 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 1 cm씩 길어질 때, 3초 후의 이 정삼각형의 넓이의 변화율은? (단, 단위는 $\text{cm}^2/$초이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ④ $\sqrt{3}$
⑤ $2\sqrt{3}$

15 시각 t에서의 반지름의 길이가 $2t$인 원이 있다.
원의 넓이가 16π가 되는 순간의 원의 넓이의 변화율은?

① 10π ② 12π ③ 14π
④ 16π ⑤ 18π

16 밑면의 반지름의 길이가 4cm, 높이가 8cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 매초 1cm씩 일정한 비율로 길어지고, 높이는 매초 2cm씩 일정한 비율로 짧아진다. 이 원기둥의 부피의 변화율이 0이 되는 것은 몇 초 후인가?

① 1초 ② $\frac{4}{3}$초 ③ $\frac{5}{3}$초
④ 2초 ⑤ $\frac{7}{3}$초

17 밑변의 반지름의 길이가 5cm, 높이가 10cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 매초 1cm씩 길어지고 높이는 매초 1cm씩 짧아진다. 이 원기둥의 부피의 변화율이 0이 될 때, 원기둥의 부피는?

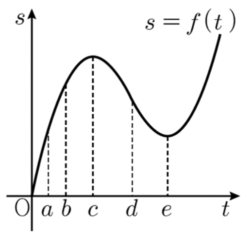
① $100\pi\text{cm}^3$ ② $200\pi\text{cm}^3$ ③ $300\pi\text{cm}^3$
④ $400\pi\text{cm}^3$ ⑤ $500\pi\text{cm}^3$

18 정수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가
$x(t)=\frac{1}{6}t^4-4t^2+(5-m)t$이다. 점 P가
시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 후, 운동 방향이 두 번 바뀌도록 하는 모든 m의 값의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

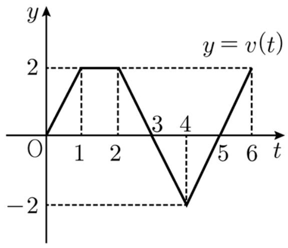
19 높이가 $80\mathrm{m}$인 건물의 옥상에서 $10\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직하게 쏘아 올린 장난감 로켓의 t초 후의 높이 $x\mathrm{m}$가 $x=80+10t-5t^2$일 때, 장난감 로켓은 쏘아 올린 후 α초 만에 최고 높이에 도달하고, 그때의 높이는 $\beta\mathrm{m}$이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

20 수직선 위를 움직이는 물체에 대하여 물체와 출발점 사이의 거리 s와 시각 t 사이의 관계식 $s=f(t)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 설명 중 옳은 것은?



① $t=b$일 때 속도의 크기가 가장 작다.
② $t=b$일 때와 점 $t=d$일 때의 속도는 같다.
③ $t=c$일 때 속도의 크기가 가장 크다.
④ 물체는 시간이 흐름에 따라 출발점에서 계속 멀어지기만 한다.
⑤ 물체의 진행 방향은 2번 바뀐다.

21 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0\le t\le 6)$에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프는 아래 그림과 같다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

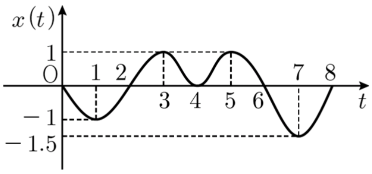


〈보기〉

ㄱ. $t=3$일 때, 점 P의 위치는 원점이다.
ㄴ. $2<t<4$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄷ. 점 P는 출발한 후 6초 동안 움직이는 방향을 2번 바꾼다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 위치 $x(t)$의 그래프가 아래 그림과 같다.



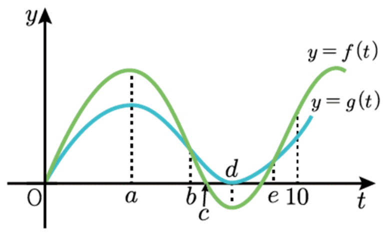
다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $t=5$일 때, 점 P의 속력이 최대이다.
ㄴ. 출발할 때와 같은 방향으로 움직인 총 시간은 4초이다.
ㄷ. $t=6$일 때, 점 P는 운동 방향이 바뀐다.
ㄹ. $t=7$일 때, 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄹ

23 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 t초 후의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(a)=f'(d)=0$, $g'(a)=g'(d)=0$)

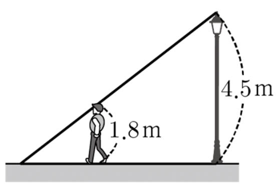


〈보기〉

ㄱ. 두 점 A, B는 $0<t<10$에서 두 번 만난다.
ㄴ. 점 A는 $b<t<10$에서 운동방향을 두 번 바꾼다.
ㄷ. 두 점 A, B는 $c<t<d$에서 서로 반대 방향으로 움직인다.

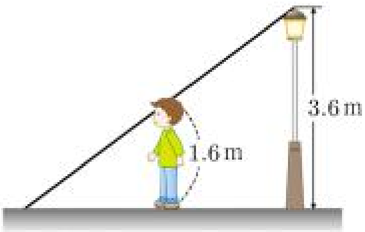
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24 다음 그림과 같이 키가 1.8m인 사람이 높이가 4.5m인 가로등 바로 밑에서 출발하여 매초 3m의 속도로 일직선으로 걸어가고 있다. 이때 이 사람의 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는?



① 3m/s ② 3.5m/s ③ 4m/s
④ 4.5m/s ⑤ 5m/s

25 다음 그림과 같이 키가 $1.6\mathrm{m}$인 사람이 높이가 $3.6\mathrm{m}$인 가로등 바로 밑에서 출발하여 매초 $2\mathrm{m}$의 속도로 일직선으로 걸어가고 있다. 이때 이 사람의 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도를 구하시오.



개념+유형 개념편 - 수학 II (2025) (속도와 가속도) 128~136p

속도와 가속도

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** 10

해설 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=10t-4$

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=10$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 가속도는

$a=10$

02 **정답** -16m/s

해설 물방울이 수면에 닿을 때 $x=0$이므로

$-5t^2+12.8=0,\ 5t^2=\dfrac{64}{5}$

$t^2=\dfrac{64}{25}$

이때 $t>0$이므로 $t=\dfrac{8}{5}$

t초 후의 물방울의 속도를 $v\text{m/s}$라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t$

따라서 물방울이 수면에 닿을 때의 속도는

$-10\cdot\dfrac{8}{5}=-16(\text{m/s})$

03 **정답** 4

해설 시각 t에서 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\text{P}}=\dfrac{d}{dt}P(t)=t^2+16,$

$v_{\text{Q}}=\dfrac{d}{dt}Q(t)=8t$

$t^2+16=8t$에서

$t^2-8t+16=(t-4)^2=0$

따라서 두 점의 속도가 같아지는 시각은 4이다.

04 **정답** 16

해설 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-14t+10,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6t-14$

점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로

$x=t^3-7t^2+10t=0$에서

$t(t-2)(t-5)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=5$

따라서 점 P가 출발한 후 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=5$일 때이므로 $t=5$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot5-14=16$

05 **정답** ③

해설 점 P의 좌표 $x=t^3-5t^2+t$이므로

점 P의 속도 $V=x'=3t^2-10t+1$

속력$=|$속도$|$

점 P의 가속도 $a=x''=6t-10$

$V_{x=2}=-7,\ a_{x=2}=2$

$\therefore\ V+|V|+a=-7+7+2=2$

06 **정답** ③

해설 속도 $v(t)$를 미분하면 가속도이므로

$t=a$에서의 가속도는 $v'(a)$이다.

$v'(a)=-2a+12=0$

따라서 $a=6$

07 정답 25

해설 $x=\frac{5}{3}t^3+pt^2+qt$이므로

$v=\frac{dx}{dt}=5t^2+2pt+q$에서 $t=3$일 때, 속도가 20이므로

$6p+q=-25$ $\cdots$ ㉠

$a=\frac{dv}{dt}=10t+2p$에서 $t=3$일 때, 가속도가 10이므로

$p=-10$

$p=-10$을 ㉠에 대입하면

$-60+q=-25$

$\therefore q=35$

따라서 $p=-10$, $q=35$이므로

$p+q=25$

08 정답 72

해설 점 P 의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+k$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-18$

점 P 의 시각 $t=5$에서의 속도는 $75-90+k=k-15$ 이므로 $k-15=0$에서 $k=15$

따라서 점 P 의 시각 $t=15$에서의 가속도는

$6\times15-18=90-18=72$

09 정답 ④

해설 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-6t^2+24t-14=-6(t-2)^2+10$

$1\le t\le5$에서 $-44\le f'(t)\le10$이므로

$0\le|f'(t)|\le44$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 44이다.

10 정답 1

해설 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3t=3t(t-1)$에서 $3t(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서 점 P가 운동방향을 바꾼다.

11 정답 1

해설 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 $v\,\mathrm{m/s}$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=40-2ct$

한편, 자동차가 정지할 때의 속도는 $0\,\mathrm{m/s}$이므로

$v=0$에서 $t=\frac{20}{c}$

즉, 자동차가 멈출 때까지 걸린 시간은 $\frac{20}{c}$초이고

그때까지 달린 거리가 $400\,\mathrm{m}$ 이내이어야 하므로

$40\cdot\frac{20}{c}-c\cdot\frac{400}{c^2}\le400$, $\frac{800}{c}-\frac{400}{c}\le400$

즉, $c\ge1$

따라서 구하는 양수 c의 최솟값은 1이다.

12 정답 ④

해설 위치가 $x=30t-t^2$이므로 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=\frac{dx}{dt}=30-2t$

한편, 기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$t=15$

즉, 기차가 정지할 때까지 걸리는 시간은 15초이므로

15초 동안 움직인 거리는

$30\cdot15-15^2=225(\mathrm{m})$

따라서 장애물에 부딪히지 않으려면 최소한

$225\,\mathrm{m}$ 전에 장애물을 발견해야 한다.

13 정답 3 초 후

해설 $h(t)=29.4t-4.9t^2$ 이면,

최고높이에서는 속도가 0 이므로,

$v(t)=\frac{d}{dt}h(t)=29.4-9.8t=0$ 에서,

$t=\frac{29.4}{9.8}=3$ (초 후)

14 정답 ⑤

해설 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는
$(1+t)$ cm 이므로 정삼각형의 넓이를 S cm^2 라 하면
$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2+2t+1)$
$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}(t+1)$
따라서 $t=3$ 일 때 정삼각형의 넓이의 변화율은
$\frac{\sqrt{3}}{2}(3+1))=2\sqrt{3}$ (cm^2/초)

15 정답 ④

해설 시각 t에서의 원의 반지름의 길이가 $2t$이므로 원의 넓이를 S라 하면
$S=\pi(2t)^2=4\pi t^2$
$\therefore \frac{dS}{dt}=8\pi t$
원의 넓이가 16π인 순간은 $4\pi t^2=16\pi$에서
$t^2=4$
$\therefore t=2$ ($\because t>0$)
따라서 구하는 원의 넓이의 변화율은
$8\pi \cdot 2=16\pi$

16 정답 ②

해설 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$cm, 높이를 $h$cm라 하면
$r=4+t,\ h=8-2t$
t초 후의 원기둥의 부피를 Vcm^{3}라 하면
$V=\pi r^2h=\pi(4+t)^2(8-2t)$
$\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(4+t)(8-2t)-2\pi(4+t)^2$
$=2\pi(4+t)(4-3t)$
$\frac{dV}{dt}=0$에서 $t=\frac{4}{3}$ ($\because 0<t<4$)
따라서 원기둥의 부피의 변화율이 0이 되는 것은
$\frac{4}{3}$초 후이다.

17 정답 ⑤

해설 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$cm, 높이를 $h$cm라 하면
$r=5+t,\ h=10-t$
원기둥의 부피를 Vcm^{3}라 하면
$V=\pi r^2h=\pi(5+t)^2(10-t)$ ($0\le t<10$)
$\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(5+t)(10-t)+\pi(5+t)^2\cdot(-1)$
$=3\pi(5+t)(5-t)$
$\frac{dV}{dt}=0$에서 $t=5$ ($\because 0\le t<10$)
따라서 구하는 부피는
$\pi\cdot(5+5)^2\cdot 5=500\pi$(cm^3)

18 정답 ③

해설 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$
$$=\frac{2}{3}t^3-8t+5-m$$

점 P가 출발한 후 운동 방향이 두 번 바뀌려면 t에 대한 방정식 $\frac{2}{3}t^3-8t+5-m=0$,

즉 $\frac{2}{3}t^3-8t+5=m$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=\frac{2}{3}t^3-8t+5$라 하자.

$f'(t)=2t^2-8$
$=2(t+2)(t-2)$

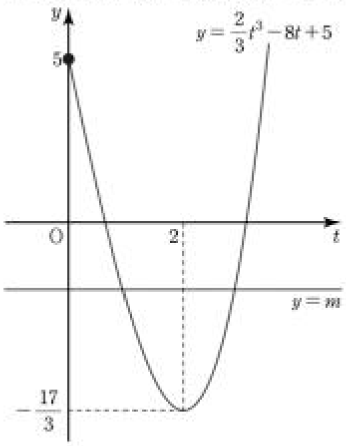
$f'(t)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=2$

$t\ge0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	5	↘	$-\frac{17}{3}$	↗

$t\ge0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다



방정식 $\frac{2}{3}t^3-8t+5=m$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 실수 m의 값의 범위는

$-\frac{17}{3}<m<5$이어야 한다. 따라서 구하는 정수 m의 값은 $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$이고 그 합은

$(-5)+(-4)+\cdots+(-1)+0+1+\cdots+3+4$
$=-5$

19 정답 86

해설 t초 후의 로켓의 속도를 $v\,\mathrm{m/s}$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=10-10t$$

장난감 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$10-10t=0$

$\therefore t=1$

따라서 장난감 로켓은 쏘아 올린 후 1초만에 최고 높이에 도달한다.

$\therefore \alpha=1$

그때 장난감 로켓의 최고 높이는

$80+10\cdot1-5\cdot1^2=85(\mathrm{m})$

$\therefore \beta=85$

$\therefore \alpha+\beta=1+85=86$

20 정답 ⑤

해설 ①, ③ $t=b$일 때의 접선의 기울기보다 $t=c$일 때의 접선의 기울기가 더 작으므로 $t=b$일 때 속도의 크기보다 $t=c$일 때 속도의 크기가 더 작다. (거짓)

② $t=b$일 때 속도는 양이고 $t=d$일 때 속도는 음이다. (거짓)

④ $c<t<e$에서 출발점 쪽으로 되돌아오므로 물체는 출발점과 가까워진다. (거짓)

⑤ 물체의 진행 방향은 $t=c$, $t=e$일 때 2번 바뀐다. (참)

21 정답 ④

해설 ㄱ. 점 P는 원점을 출발한 후 3초까지 수직선의 양의 방향으로 움직이므로 $t=3$일 때, 점 P의 위치는 원점이 아니다. (거짓)

ㄴ. $0<t<3$일 때 $v(t)>0$이므로 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직이고, $3<t<5$일 때 $v(t)<0$이므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P의 운동방향이 $t=3$에서 바뀌므로 $2<t<4$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄷ. $t=3$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌고, $t=5$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P는 출발한 후 6초 동안 움직이는 방향을 2번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22 정답 ⑤

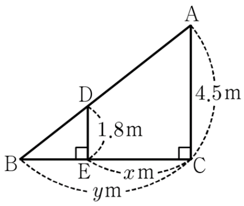
해설 ㄱ. 주어진 그래프에서 $t=5$일 때의 접선의 기울기가 0이므로 출발한 지 5초 후의 점 P의 속력은 0이다.
ㄴ. 출발할 때의 점 P의 속도는 음수이고, 주어진 그래프에서 $0<t<1$, $3<t<4$, $5<t<7$일 때, 접선의 기울기가 음수이므로 출발할 때와 같은 방향으로 움직인 총 시간은 4초이다.
ㄷ. $t=6$일 때의 접선의 기울기가 음수이므로 $t=6$일 때 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.
ㄹ. $t=7$일 때, 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

23 정답 ①

해설 ㄱ. 두 점은 $t=b$, $t=e$에서 만난다.
ㄴ. 주어진 구간에서 기울기가 0인 점은 한 점이다.
ㄷ. 주어진 구간에서 두 그래프의 기울기가 모두 음수이므로 운동 방향이 서로 같다.
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

24 정답 ⑤

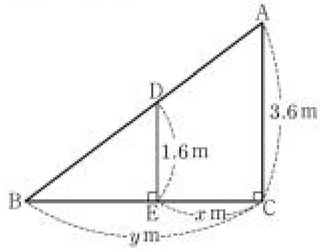
해설 다음 그림에서 t초 동안 사람이 움직인 거리를 xm, t초 후 사람의 그림자의 앞 끝은 ym라 떨어져 있다고 하면 다음 그림에서



$\triangle ABC \equiv \triangle DBE$이므로
$4.5:1.8=y:(y-x)$, $4.5(y-x)=1.8y$,
$5(y-x)=2y$, $5y-5x=2y$
$\therefore y=\frac{5}{3}x$
이때 $x=3t$이므로 $y=5t$
$\therefore \frac{dy}{dt}=5$
따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 5m/s이다.

25 정답 3.6m/s

해설 t초 동안 사람이 움직인 거리를 xm, t초 후 사람의 그림자의 앞 끝이 가로등에서 ym 떨어져 있다고 하면 다음 그림에서



$\triangle ABC \equiv \triangle DBE$이므로
$3.6:1.6=y:(y-x)$, $3.6(y-x)=1.6y$,
$9(y-x)=4y$, $9y-9x=4y$
$\therefore y=\frac{9}{5}x$
이때 $x=2t$이므로 $y=3.6t$
$\therefore \frac{dy}{dt}=3.6$
따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 3.6m/s이다.

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부정적분)
139~151p

부정적분

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 함수 $f(x)=3x^2-6x+5$를 도함수로 가질 수 있는 함수 $F(x)$는?

① $F(x)=6x-6$
② $F(x)=(3x-1)(x-5)$
③ $F(x)=(x-2)^3$
④ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$
⑤ $F(x)=x^3-3x^2+5x+8$

02 함수 $f(x)$에 대하여
$\int f(x)dx=x^3+2x^2-7x+C$일 때, $f(1)$의 값은?
(단, C는 적분상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

03 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(3x^3+4x+5)dx$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

04 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(x^3-2x+3)dx$일 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.

05 함수 $f(x)$가 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19}$을 만족하고 $f(0)=0$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

06 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=0$이고 $f'(x)=2x+2$이다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=4$일 때, $F(-3)$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

07 부정적분 $\int \frac{6x^4}{x^2+1}dx - 6\int \frac{1}{x^2+1}dx$는?
(단, C는 적분상수)

① $2x^3-6x+C$ ② $2x^3+C$ ③ $3x^3+C$
④ $3x^3+6x+C$ ⑤ $6x^3+3x+C$

08 함수 $f(x)=\int x^3dx$에 대하여 $f(2)=7$일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

09 함수 $f(x)=\int (3x^2-2x)dx$에 대하여 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

10 다항함수 $f(x)=\int \left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx$에 대하여 $f(0)=5$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

11 함수 $f(x)=\int \left\{\frac{d}{dx}(4x-x^2)\right\}dx$에 대하여 $f(x)$의 최댓값이 12일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

12 함수 $f(x)$가
$\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=3x^4+3x^3+3x^2+3x$를
만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

13 함수 $f(x)=x^3+4x$에 대하여

$F(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int xf(x)dx\right\}$일 때, $F(x)$의 모든 항의 계수의 합을 구하시오.

14 $f(x)=42\displaystyle\int x(x+1)^5dx$에 대하여 $f(-1)=0$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

15 함수 $f(x)=\displaystyle\int ax^4dx-\int bx^2dx$이고 $f(0)=f(1)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오.

16 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $-2x+a$이고, 이 이차함수의 그래프는 점 $(2,\ 1)$을 지나고 y절편이 -1이다. $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x)=xf(x)-x^3+9x^2$을 만족시킬 때, $f(x)$의 최솟값은? (단, $f(0)=5$)

① -50 ② -49 ③ -48
④ -47 ⑤ -46

18 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$2\int f(x)dx=f(x)+xf(x)-8x+10$$

이 성립한다. $f(1)=-2$일 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19 모든 실수 x에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)+g(x)=\int(x^2-4x)dx,$$
$$f(x)-g(x)=\int(x^2+12x)dx$$

이고 $f(0)=2$, $g(0)=4$일 때, $f(-3)g(2)$의 값을 구하시오.

20 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$f'(x)=\begin{cases}4x+3 & (x>1)\\ k & (x<1)\end{cases}$이고 $f(0)=5$, $f(2)=7$일 때, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -7 ② -5
③ 3 ④ 5
⑤ 7

21 함수 $f(x)$의 도함수가
$f'(x)=\begin{cases}x+3 & (x>-1)\\ k & (x<-1)\end{cases}$이고, $f(0)=-1$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$일 때, $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -5 ② $-\dfrac{9}{2}$ ③ -4
④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ -3

22 함수 $f(x)=\int(x^2+2x+k)dx$에 대하여
$f(0)=1$이고, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=2$일 때, $f(3)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

23 [2012년 7월 고3 문과 24번/3점]
곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이고 함수 $f(x)$의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

24 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3에 정비례하고, 이 곡선이 두 점 $(-1,\ -11)$, $(2,\ 4)$를 지날 때, $f(-3)$의 값은?

① 67 ② 68
③ 69 ④ 70
⑤ 71

25 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x-8$

$f(0)=-4$, $g(0)=-2$ 이다.

함수 $h(x)=\int \frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}dx$에 대하여

$h(1)=-1$일 때, $h(6)$의 값을 구하시오.

(단, $f(x)+g(x) \neq 0$)

26 $f(x)=\int(3x^3-2x^2+5)dx$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

27 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=1$

(나) 임의의 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+3$

28 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)+1$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f'(0)=f(1)$

ㄴ. $f'(0)=0$이면 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 극댓값과 극솟값의 합은 -2이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+5}{h}=4$

(나) 임의의 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+5$

30 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=5$

(나) 임의의 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+2$

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (부정적분) 139~151p

부정적분

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ⑤

해설 $F(x)$가 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=f(x)$

① $F'(x)=6$

② $F'(x)=3(x-5)+(3x-1)=6x-16$

③ $F'(x)=3x^2-12x+12$

④ $F'(x)=x^2-3$

⑤ $F(x)=3x^2-6x+5$

따라서 $F'(x)=f(x)$를 만족하는 함수는 ⑤이다.

02

정답 ③

해설 $\int f(x)dx=x^3+2x^2-7x+C$에서

$f(x)=(x^3+2x^2-7x+C)'=3x^2+4x-7$

$\therefore f(1)=3+4-7=0$

03

정답 13

해설 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(3x^3+4x+5)dx=3x^3+4x+5$

따라서 $f'(x)=9x^2+4$이므로

$f'(1)=13$

04

정답 10

해설 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(x^3-2x+3)dx=x^3-2x+3$

따라서 $f'(x)=3x^2-2$이므로

$f'(2)=3\cdot2^2-2=10$

05

정답 20

해설 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19})dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{20}+C$

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{20}$이므로

$f(1)=1+1+1+\cdots+1=20$

06

정답 ⑤

해설 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C_1$

$f(2)=0$이므로 $4+4+C_1=0$

$\therefore C_1=-8$

따라서 $f(x)=x^2+2x-8$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int(x^2+2x-8)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+C_2$

$F(0)=4$이므로 $C_2=4$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+4$이므로

$F(-3)=28$

07

정답 ①

해설 $\int\frac{6x^4}{x^2+1}dx-6\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{6x^4-6}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{6(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx$

$=\int(6x^2-6)dx$

$=2x^3-6x+C$

08

정답 ③

해설 $f(x)=\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(2)=7$이므로 $4+C=7$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+3$이므로

$f(0)=3$

09 정답 7

해설 $f(x)=\int(3x^2-2x)dx$에서

$f(x)=x^3-x^2+C$(단, C는 적분상수)

$f(1)=1-1+C=3$, $C=3$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+3$이므로

$f(2)=8-4+3=7$

10 정답 5

해설 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx$에서

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx=x^2+x+C$이므로

$f(x)=x^2+x+C$

그런데 $f(0)=5$이므로

$f(0)=C=5$

따라서 $f(x)=x^2+x+5$이므로

$f(-1)=(-1)^2-1+5=5$

11 정답 11

해설 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(4x-x^2)\right\}dx$

$=4x-x^2+C$

$=-(x^2-4x+4)+4+C$

$=-(x-2)^2+4+C$ (단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$의 최댓값이 12이므로

$4+C=12$에서 $C=8$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+8$이므로

$f(1)=-1+4+8=11$

12 정답 12

해설 $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$이므로

$xf(x)=3x^4+3x^3+3x^2+3x$

$=x(3x^3+3x^2+3x+3)$

따라서 $f(x)=3x^3+3x^2+3x+3$이므로

$f(1)=3+3+3+3=12$

13 정답 5

해설 $F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$

$=x(x^3+4x)$

$=x^4+4x^2$

따라서 $F(x)$의 모든 항의 계수의 합은 $1+4=5$

14 정답 -1

해설 $f(x)=42\int x(x+1)^5dx$

$=42\int(x+1-1)(x+1)^5dx$

$=42\int\{(x+1)^6-(x+1)^5\}dx$

$=42\left[\int(x+1)^6dx-\int(x+1)^5dx\right]$

$=42\left[\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C\right]$

$f(-1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=6(x+1)^7-7(x+1)^6$에서

$f(0)=-1$

15 정답 $\frac{3}{5}$

해설 $f(x)=\int ax^4dx-\int bx^2dx=\frac{a}{5}x^5-\frac{b}{3}x^3+C$

$f(0)=f(1)$이므로 $C=\frac{a}{5}-\frac{b}{3}+C$에서

$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{5}$

16 정답 ①

해설 $f'(x)=-2x+a$이므로

$f(x)=\int(-2x+a)dx=-x^2+ax+C$

(단, C는 적분상수)

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 1)$을 지나고

y절편이 -1이므로 $f(2)=1$, $f(0)=-1$이다.

$f(2)=1$에서 $-4+2a+C=1$ ······㉠

$f(0)=-1$에서 $C=-1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$

17 정답 ②

해설 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+18x$
$xf'(x)=3x^2-18x$
$f'(x)=3x-18$
$f(x)=\int(3x-18)dx=\frac{3}{2}x^2-18x+C$
이때 $f(0)=5$이므로 $C=5$
즉,
$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-18x+5$$
$$=\frac{3}{2}(x^2-12x)+5$$
$$=\frac{3}{2}(x^2-12x+36)-49$$
$$=\frac{3}{2}(x-6)^2-49$$
이므로
$f(x)$의 최솟값은 -49

18 정답 ①

해설 $2\int f(x)dx=f(x)+xf(x)-8x+10$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2f(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)-8$
$f(x)=(1+x)f'(x)-8$ $\cdots$ ㉠
$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$으로 놓으면
$f'(x)=a$이고 ㉠에서
$ax+b=a(1+x)-8$, $ax+b=ax+a-8$
$\therefore b=a-8$ $\cdots$ ㉡
이때 $f(1)=-2$이므로
$a+b=-2$ $\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-5$
따라서 $f(x)=3x-5$이므로
$f(2)=6-5=1$

19 정답 -132

해설 $f(x)+g(x)=\int(x^2-4x)dx$ $\cdots$ ㉠
$f(x)-g(x)=\int(x^2+12x)dx$ $\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$$2f(x)=\int(x^2-4x)dx+\int(x^2+12x)dx$$
$$=\int(2x^2+8x)dx=\frac{2}{3}x^3+4x^2+C_1$$
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+\frac{C_1}{2}$
이때 $f(0)=2$이므로 $C_1=4$
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+2$
㉠−㉡을 하면
$$2g(x)=\int(x^2-4x)dx-\int(x^2+12x)dx$$
$$=\int(-16x)dx$$
$$=-8x^2+C_2$$
$\therefore g(x)=-4x^2+\frac{C_2}{2}$
이때 $g(0)=4$이므로 $C_2=8$에서
$g(x)=-4x^2+4$
$\therefore f(-3)g(2)=11\cdot(-12)=-132$

20 정답 ①

해설 $f'(x)=\begin{cases}4x+3 & (x>1)\\ k & (x<1)\end{cases}$이므로
$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+C_1 & (x>1)\\ kx+C_2 & (x<1)\end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)
이때, $f(0)=5$이므로
$C_2=5$
또한 $f(2)=7$이므로
$8+6+C_1=7$ $\quad\therefore C_1=-7$
$\therefore f(x)=\begin{cases}2x^2+3x-7 & (x>1)\\ kx+5 & (x<1)\end{cases}$
한편, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to1+}(2x^2+3x-7)=\lim_{x\to1-}(kx+5)=f(1)$
$-2=k+5$ $\quad\therefore k=-7$

21 정답 ①

해설 $f'(x)=\begin{cases} x+3 & (x>-1) \\ k & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+3x+C_1 & (x\geq -1) \\ kx+C_2 & (x<-1) \end{cases}$

$f(0)=-1$이므로 $C_1=-1$

$f(-2)=\frac{3}{2}$이므로 $-2k+C_2=\frac{3}{2}$ $\cdots$ ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1-}(kx+C_2)$

$\therefore -\frac{7}{2}=-k+C_2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=-\frac{17}{2}$, $k=-5$

22 정답 ③

해설 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=f'(-1)=2$

$f(x)=\int(x^2+2x+k)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x+k$

$f'(-1)=1-2+k=2$ $\quad\therefore k=3$

$f(x)=\int(x^2+2x+3)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1$이므로

$f(3)=9+9+9+1=28$

23 정답 35

해설 함수의 극대 · 극소 이해하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+C$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

극솟값은 $f(2)=8-24+C=3$

$\therefore C=19$

극댓값은 $f(-2)=35$

24 정답 ③

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3에 정비례하므로

$f'(x)=ax^3$ ($a\neq 0$인 실수)으로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^3dx$

$=\frac{a}{4}x^4+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, -11)$, $(2, 4)$를 지나므로

$f(-1)=\frac{a}{4}+C=-11$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=4a+C=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $C=-12$

따라서 $f(x)=x^4-12$이므로

$f(-3)=81-12=69$

25 정답 4

해설 $\frac{d}{dx}p(x)=q(x)$이면 $p(x)=\int q(x)dx$이다.

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$에서

$f(x)+g(x)=\int 3\,dx=3x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=-4$, $g(0)-2$이므로

$C_1=-6$

$\therefore f(x)+g(x)=3(x-2)$

또 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x-8$에서

$f(x)g(x)=\int(4x-8)dx=2x^2-8x+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=-4$, $g(0)=-2$이므로

$C_2=8$

$\therefore f(x)g(x)=2(x-2)^2$

$\therefore h(x)=\int\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int\frac{2(x-2)^2}{3(x-2)}dx$

$=\int\frac{2(x-2)}{3}dx=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+C$

이때 $h(1)=-1$이므로

$\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+C=1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $h(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x$이므로

$h(6)=12-8=4$

26 정답 12

해설 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)$

$=2f'(1)$

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^3-2x^2+5)dx\right\}=3x^3-2x^2+5$

$f'(1)=3-2+5=6$이므로

$2f'(1)=2\cdot6=12$

27 정답 $-\frac{3}{2}$

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+3$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+3$ $\therefore f(0)=-3$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh+3-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}+x$

$=x+1$ ($\because$ (가))

$\therefore f(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$

이때 $f(0)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-3$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+1-3=-\frac{3}{2}$

28 정답 ③

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)+1$이므로

$x=0,\ y=0$을 대입하면 $f(0)=-1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh(x+h)+1}{h}$

$=3x^2+f'(0)$

이므로

$f(x)=\int\{3x^2+f'(0)\}dx$

$=x^3+f'(0)x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$

$\therefore f(x)=x^3+f'(0)x-1$

ㄱ. $f(1)=1+f'(0)-1$ $\therefore f'(0)=f(1)$ (참)

ㄴ. $f'(0)=0$이면 $f(x)=x^3-1$

따라서 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 극값을 가지면

방정식 $f'(x)=3x^2+f'(0)=0$이

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(0)<0$

이때 방정식 $3x^2+f'(0)=0$의 한 실근을

α ($\alpha>0$)라 하면 다른 실근은 $-\alpha$이다.

따라서 $x=-\alpha$에서 극댓값 $-\alpha^3-f'(0)\alpha-1$을

갖고, $x=\alpha$에서 극솟값 $\alpha^3+f'(0)\alpha-1$을

갖는다.

$\therefore(-\alpha^3-f'(0)\alpha-1)+(\alpha^3+f'(0)\alpha-1)=-2$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

29 정답 $-\frac{1}{2}$

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+5$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+5$ $\therefore f(0)=-5$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh+5-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+5}{h}+x$

$=x+4$ ($\because$ (가))

$\therefore f(x)=\int(x+4)dx=\frac{1}{2}x^2+4x+C$

이때 $f(0)=-5$이므로 $C=-5$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-5$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+4-5=-\frac{1}{2}$

30 정답 $\frac{7}{2}$

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+2$ ∴ $f(0)=-2$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh+2-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}+x$$
$$=x+5\ (\because\ (가))$$

∴ $f(x)=\int(x+5)dx=\frac{1}{2}x^2+5x+C$

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x-2$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+5-2=\frac{7}{2}$

개념+유형 개념편 - 수학 II (2025) (정적분) 154~172p

정적분

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

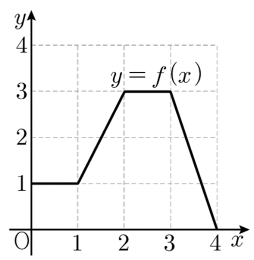
유형별 학습

이름

01 다음을 x에 대하여 미분하여라.

$$\int_{x}^{x+1}(2t-3)dt$$

02 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $F(x)$가 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$일 때, $F'(2)$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

03 $\int_{0}^{3}4x^5dx$의 값을 구하시오.

04 [2022년 10월 고3 2번/2점]

$\int_{0}^{2}(2x^3+3x^2)dx$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

05 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{0}^{6}x(x-3)dx+\int_{0}^{6}(y^2+3y)dy$$

06 $\int_{0}^{2}(6x+4)^2dx-\int_{0}^{2}(6x-4)^2dx$의 값을 구하시오.

07 $\int_{-3}^{-2}(x^2+2x-4)dx-\int_{1}^{-2}(y^2+2y-4)dy$의 값을 구하시오.

08 함수 $f(x)=\begin{cases}7x-5 & (x\ge 1)\\ -x+3 & (x\le 1)\end{cases}$에 대하여

정적분 $\int_{0}^{2}f(x)dx$의 값을 구하시오.

09 [2012년 9월 고3 문과 23번/3점]

$\int_{-2}^{2}x(3x+1)dx$의 값을 구하시오.

10 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t-1)^3dt$의 값을 구하시오.

11 $\int_{0}^{a}(7x^5+3x^2-8x-1)dx$

$-\int_{0}^{-a}(7t^5+3t^2-8t-1)dt=12$를

만족시키는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12 다음 정적분의 값을 계산하시오.

$$\int_{-1}^{2} |t^2-4t+3|\,dt$$

13 $\int_{0}^{3} x|x-1|\,dx$ 의 값은?

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{29}{6}$ ⑤ 5

14 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족할 때, 정적분 $\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (나) $\int_{0}^{3} xf(x)dx=2$, $\int_{0}^{3} f(x)dx=1$

15 [2004년 9월 고3 이과 8번]
함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $-2 \le x \le 2$일 때, $f(x)=x^3-4x$ (나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

정적분 $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ 와 같은 것은?

① $\int_{2004}^{2005} f(x)dx$ ② $-\int_{2004}^{2005} f(x)dx$
③ $\int_{2005}^{2006} f(x)dx$ ④ $-\int_{2005}^{2006} f(x)dx$
⑤ $\int_{2006}^{2007} f(x)dx$

16 연속함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-6}^{6} f(x)dx$의 값은?

(가) $-1 \le x \le 1$일 때, $f(x)=x^2$ (나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$

① 2 ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

17 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=3x^3-\int_0^1 (x-1)f(t)dt$를 만족시킬 때, 정적분 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구하시오.

18 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=2x^4+3x\int_{-1}^1 f(t)dt$를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

19 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x$를 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

20 [2023년 3월 고3 4번 변형]
다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=x^3+ax+3$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

21 함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2-6t-9)dt$의 극댓값을 구하시오.

22 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-3h}^{2+h}(x^3+x^2-4x-3)dx$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

23 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{3-x}^{3+x} |t^2 - 1| dt$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

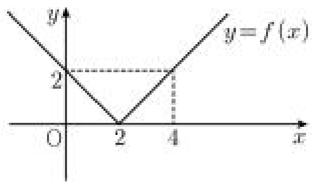
24 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{1-2h}^{1+3h} (x^3 + 4x^2 - 5x + 2) dx$의 값은?

① 6 ② 8
③ 10 ④ 12
⑤ 14

25 함수 $f(x) = x^3 - 4x + a$에 대하여
$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2 - 9} \int_3^x f(t) dt = 6$일 때, 상수 a의 값은?

① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

26 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^5 (x-2) f(x) dx$의 값을 구하시오.



27 정적분 $\int_{-2}^{2} |3x^3| (x^3 + x^2 + 1) dx$의 값은?

① 82 ② 84 ③ 86
④ 88 ⑤ 90

28 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x+5) = f(x)$, $f(-x) = f(x)$, $\int_0^5 f(x) dx = 3$
을 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-30}^{30} f(x) dx$의 값을 구하시오.

29 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=3x+\int_0^2 tf'(t)dt$가 성립할 때, $f(-2)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

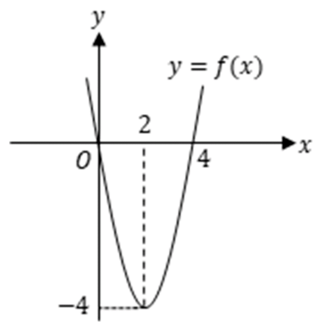
30 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x^3+ax^2-x+1$일 때,
$f(4)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

31 미분가능한 함수 $f(x)$가
$\int_a^x (x-t)f(t)dt=2x^3+3x^2-x+1$
을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

32 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가
$\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+16x-12$를
만족시킨다. $f(2)=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

33 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같고, 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=\int_1^{x+2} f(t)dt$가 성립할 때, $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은?



① $-\frac{28}{3}$ ② $-\frac{25}{3}$ ③ $-\frac{22}{3}$
④ $-\frac{19}{3}$ ⑤ $-\frac{16}{3}$

34 [2020년 7월 고3 문과 14번/4점]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$
(나) $f(0)=-1$

$\int_{-3}^{3}f(x)dx$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

35 [2015년 7월 고3 문과 29번/4점]

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{3}f(x)\,dx$의 최솟값을 m이라 할 때, $4m$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f'(2-x)=f'(2+x)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq-3$이다.

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (정적분) 154~172p

정적분

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 2

해설 $g(x)=2x-3$이라 하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}g(t)dt=g(x+1)-g(x)$$

$$=\{2(x+1)-3\}-(2x-3)=2$$

02 정답 ④

해설 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$에서

$F'(x)=f(x)$이므로

$F'(2)=f(2)=3$

03 정답 486

해설 $\int_{0}^{3}4x^5dx=\left[\frac{2}{3}x^6\right]_{0}^{3}=486$

04 정답 ②

해설 다항함수의 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_{0}^{2}(2x^3+3x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}+x^3\right]_{0}^{2}$$

$$=16$$

05 정답 144

해설 $\int_{0}^{6}x(x-3)dx+\int_{0}^{6}(y^2+3y)dy$

$=\int_{0}^{6}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{6}(x^2+3x)dx$

$=\int_{0}^{6}(x^2-3x+x^2+3x)dx$

$=\int_{0}^{6}2x^2dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{6}=144$

06 정답 192

해설 $\int_{0}^{2}(6x+4)^2dx-\int_{0}^{2}(6x-4)^2dx$

$=\int_{0}^{2}(36x^2+48x+16)dx$

$\quad-\int_{0}^{2}(36x^2-48x+16)dx$

$=\int_{0}^{2}(36x^2+48x+16-36x^2+48x-16)dx$

$=\int_{0}^{2}96x\,dx$

$=\left[48x^2\right]_{0}^{2}$

$=192$

07 정답 $-\frac{44}{3}$

해설 $\int_{-3}^{-2}(x^2+2x-4)dx-\int_{1}^{-2}(y^2+2y-4)dy$

$=\int_{-3}^{-2}(x^2+2x-4)dx+\int_{-2}^{1}(y^2+2y-4)dy$

$=\int_{-3}^{-2}(x^2+2x-4)dx+\int_{-2}^{1}(x^2+2x-4)dx$

$=\int_{-3}^{1}(x^2+2x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right]_{-3}^{1}$

$=-\frac{8}{3}-12=-\frac{44}{3}$

08 정답 8

해설 $\int_0^2 f(x)dx$

$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

$= \int_0^1 (-x+3)dx + \int_1^2 (7x-5)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1 + \left[\frac{7}{2}x^2-5x\right]_1^2$

$= \left\{\left(-\frac{1}{2}+3\right)-(-0+0)\right\}+\left\{(14-10)-\left(\frac{7}{2}-5\right)\right\}$

$=8$

09 정답 16

해설 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$\int_{-2}^2 x(3x+1)dx$

$= \int_{-2}^2 (3x^2+x)dx$

$= \int_{-2}^2 3x^2 dx$

$= 2\int_0^2 3x^2 dx = 2\left[x^3\right]_0^2 = 2(8-0) = 16$

10 정답 1

해설 $F'(x) = (x-1)^3$라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x (t-1)^3 dt$

$= \lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x F'(t)dt$

$= \lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left[F(t)\right]_2^x$

$= \lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$= F'(2) = (2-1)^3 = 1$

11 정답 ②

해설 $\int_0^a (7x^5+3x^2-8x-1)dx - \int_0^{-a}(7t^5+3t^2-8t-1)dt$

$= \int_0^a (7x^5+3x^2-8x-1)dx + \int_{-a}^0 (7x^5+3x^2-8x-1)dx$

$= \int_{-a}^a (7x^5+3x^2-8x-1)dx$

$= 2\int_0^a (3x^2-1)dx$

$= 2\left[x^3-x\right]_0^a = 2a^3-2a$

즉, $2a^3-2a=12$에서

$a^3-a-6=0$, $(a-2)(a^2+2a+3)=0$

따라서 $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$이므로

조건을 만족시키는 양수 a의 값은 2이다.

12 정답 $\frac{22}{3}$

해설 $t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$ 이므로,

$-1<t<1$에서, $|t^2-4t+3| = t^2-4t+3$,

$1<t<2$에서, $|t^2-4t+3| = -t^2+4t-3$

∴ (준식)

$= \int_{-1}^1 (t^2-4t+3)dt - \int_1^2 (t^2-4t+3)dt$

$= 2\int_0^1 (t^2+3)dt - \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^2$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}+3\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{22}{3}$

13 정답 ④

해설 $\int_{0}^{3} x|x-1|\,dx$

$$=\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left\{\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{14}{3}=\frac{29}{6}$$

14 정답 4

해설 $\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$

$h(x)=xf(x)$라고 하면

$h(-x)=-xf(-x)=xf(x)=h(x)$이므로

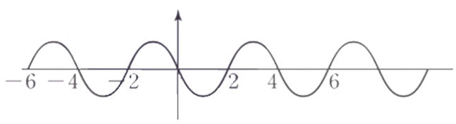
$$\int_{-3}^{3}h(x)dx=2\int_{0}^{3}h(x)dx$$

또, $f(-x)=-f(x)$이므로 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=0$

$$\therefore \int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=2\int_{0}^{3}xf(x)dx=4$$

15 정답 ③

해설 $y=f(x)$는 주기가 4인 함수이므로



$$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{5}^{6}f(x)dx=\int_{9}^{10}f(x)dx=\cdots$$
$$=\int_{4k+1}^{4k+2}f(x)dx$$
$$\therefore \int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2005}^{2006}f(x)dx$$

16 정답 ④

해설 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx$

$$=2\int_{0}^{1}x^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-6}^{6}f(x)dx=6\int_{-1}^{1}f(x)dx=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

17 정답 $\frac{3}{2}$

해설 $f(x)=3x^3-\int_{0}^{1}(x-1)f(t)dt$

$$=3x^3-x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$$

이때 $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^3-kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(3t^3-kt+k)dt=k,\ \left[\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}kt^2+kt\right]_0^1=k$$
$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k+k=k$$
$$\therefore k=\frac{3}{2}$$
$$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx=k=\frac{3}{2}$$

18 정답 $\frac{22}{5}$

해설 $\int_{-1}^{1}f(t)dt=k$ (단, k는 상수)라 하면

$f(x)=2x^4+3kx$

$$\therefore k=\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}(2t^4+3kt)dt$$
$$=2\int_{0}^{1}2t^4dt=4\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{4}{5}$$

따라서 $f(x)=2x^4+\frac{12}{5}x$이므로

$$f(1)=\frac{22}{5}$$

19 정답 2

해설 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$a^2-2a=0,\ a(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-2$
$\therefore f(a)=f(2)=2\cdot 2-2=2$

20 정답 ①

해설 $\int_1^x f(t)dt=x^3+ax+3 \quad \cdots ㉠$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1+a+3=0$
$\therefore a=-4$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하고 $a=-4$를 대입하면
$f(x)=3x^2-4$이므로
$f(2)=12-4=8$

21 정답 5

해설 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은
$f(-1)=\int_0^{-1}(3t^2-6t-9)dt$
$=\left[t^3-3t^2-9t\right]_0^{-1}=5$

22 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+x^2-4x-3$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면
$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-3h}^{2+h}(x^3+x^2-4x-3)dx$
$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2-3h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(2+h)-F(2)\}-\{F(2-3h)-F(2)\}}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{F(2-3h)-F(2)}{-3h}$
$=F'(2)+3F'(2)$
$=4F'(2)=4f(2)$
$=4(8+4-8-3)=4$

23 정답 ②

해설 $f(t)=|t^2-1|$로 놓고
$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{3-x}^{3+x}|t^2-1|dt$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{3-x}^{3+x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{F(3+x)-F(3-x)}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{F(3+x)-F(3)+F(3)-F(3-x)}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{F(3+x)-F(3)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(3-x)-F(3)}{-x}$
$=F'(3)+F'(3)=2F'(3)$
이때 $F'(x)=f(x)$이므로
$2F'(3)=2f(3)=2\cdot 8=16$

24 정답 ③

해설 $f(x)=x^3+4x^2-5x+2$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+3h}(x^3+4x^2-5x+2)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(1+3h)-F(1)\}-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$$
$$=3\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{3h}+2\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}$$
$$=3F'(1)+2F'(1)$$
$$=5F'(1)=5f(1)$$
$$=5(1+4-5+2)=10$$

25 정답 ③

해설 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x^2-9}\int_3^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{6}F'(3)=\frac{1}{6}f(3)$$
$$=\frac{a+15}{6}$$

이때 $\frac{a+15}{6}=6$이므로

$a=21$

26 정답 $\frac{19}{3}$

해설 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\ge2)\\ 2-x & (x\le2)\end{cases}$

$$\therefore \int_0^5(x-2)f(x)dx$$
$$=\int_0^2-(x-2)^2dx+\int_2^5(x-2)^2dx$$
$$=\int_0^2(-x^2+4x-4)dx+\int_2^5(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^5$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)+\left\{\left(\frac{125}{3}-50+20\right)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)\right\}$$
$$=\frac{19}{3}$$

27 정답 ④

해설
$$\int_{-2}^2|3x^3|(x^3+x^2+1)dx$$
$$=\int_{-2}^2(x^3|3x^3|+x^2|3x^3|+|3x^3|)dx$$
$$=2\int_0^2(x^2|3x^3|+|3x^3|)dx=2\int_0^2(3x^5+3x^3)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{4}x^4\right]_0^2=88$$

28 정답 36

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x+5)=f(x)$이므로

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_5^{10} f(x)\,dx=\int_{10}^{15} f(x)\,dx=\int_{15}^{20} f(x)\,dx=\int_{20}^{25} f(x)\,dx=\int_{25}^{30} f(x)\,dx=3$$

$$\therefore \int_0^{30} f(x)dx=\int_0^5 f(x)dx+\int_5^{10} f(x)dx+\int_{10}^{15} f(x)dx+\int_{15}^{20} f(x)dx+\int_{20}^{25} f(x)dx+\int_{25}^{30} f(x)dx=3\cdot 6=18$$

또, $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-30}^{30} f(x)dx=2\int_0^{30} f(x)dx=2\cdot 18=36$$

29 정답 ③

해설 $\int_0^2 tf'(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x+k$

$\therefore f'(x)=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 3tdt=k$, $\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=k$

$\therefore k=6$

따라서 $f(x)=3x+6$이므로

$f(-2)=0$

30 정답 22

해설 주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-1+1$, $a=-1$

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-x^2-x+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-x^2-x+1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-1$

$\int_1^x f(t)dt=3x^2-2x-1$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$이므로 $f(4)=22$

31 정답 ②

해설 $\int_a^x (x-t)f(t)dt=2x^3+3x^2-x+1$에서

$x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=2x^3+3x^2-x+1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+6x-1$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=6x^2+6x-1$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x+6$

$\therefore f(1)=12+6=18$

32 정답 -9

해설 $\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+16x-12$의 양변에

$x=2$를 대입하면 $8+4a+32-12=0$

$\therefore a=-7$

$\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3-7x^2+16x-12$에서

$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=x^3-7x^2+16x-12$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-14x+16$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-14x+16$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-14$ $\quad\therefore b=f(2)=-2$

$\therefore a+b=-9$

33 정답 ③

해설 $g(-1)=0$ 이고 $f(x)=(x-2)^2-4$ 이다.

$g'(x)=f(x+2)=x^2-4=(x+2)(x-2)$이므로

극댓값 : $g(-2)=\frac{5}{3}$

극솟값 : $g(2)=-9$

이므로 $\frac{5}{3}+(-9)=-\frac{22}{3}$ 이다.

34 **정답** ⑤

해설 정적분의 성질을 활용하여 문제 해결하기
다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
($a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$은 실수)라 하면
$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$
k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^{3}x^kdx=0$이므로
$\int_{-3}^{3}f(-x)dx=\int_{-3}^{3}f(x)dx$
조건 (가)에 의하여
$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)이고
$f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로
$a=0$
조건 (나)에 의하여
$f(0)+f(0)=-2=b$
그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$
$\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$
$=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}f(-x)dx=2\int_{-3}^{3}f(x)dx$
$\therefore \int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$
$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx$
$=21$

35 **정답** 27

해설 정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)
라 하면
조건 (가)에 의하여 $c=0$
$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서
조건 (나)에 의하여 $a=-6$
$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$
조건 (다)에 의하여 $b\geq 9$이고
$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)dx$
$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$
$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\geq\frac{27}{4}$ ($\because$ $b\geq 9$)
$b=9$일 때, 최솟값 $m=\frac{27}{4}$
따라서 $4m=27$

개념+유형 개념편 - 수학 II (2025) (넓이와 속도) 177~192p

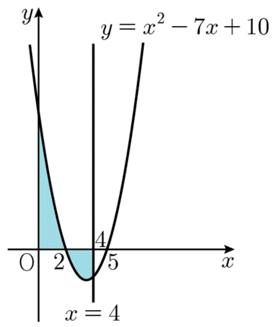
넓이 ~ 속도와 거리

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

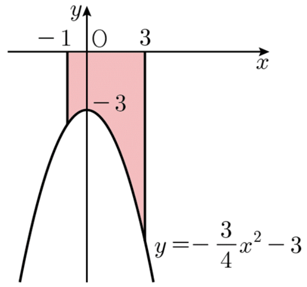
이름

01 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2-7x+10$과 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① 4　② 8　③ 12
④ 16　⑤ 20

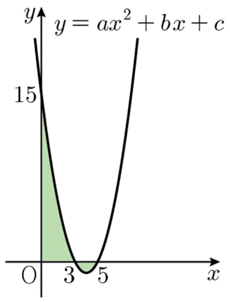
02 다음 그림과 같이 곡선 $y=-\frac{3}{4}x^2-3$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



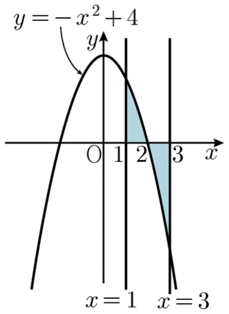
03 곡선 $y=-2x^2+6x+8$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 22　② $\frac{67}{3}$　③ $\frac{68}{3}$
④ 23　⑤ $\frac{70}{3}$

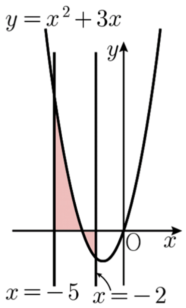
04 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=ax^2+bx+c$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 색칠한 도형의 넓이를 구하시오.



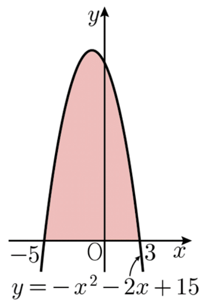
05 다음 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+4$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



06 다음 그림에서 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



07 다음 그림에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



08 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4t+1$ $(t \geq 0)$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오.

09 좌표가 2인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t+3$ $(t \geq 0)$일 때, $t=2$에서 점 P의 위치를 구하시오.

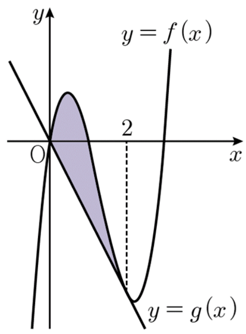
10 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=3t^2-6t\ (t\geq 0)$일 때, $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

11 [2020년 10월 고3 문과 10번/3점]

양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

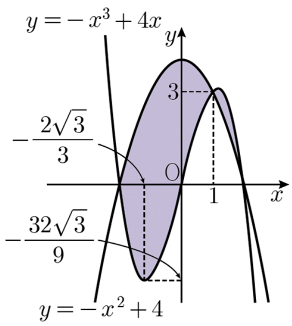
① $\dfrac{a^3}{12}$　② $\dfrac{a^3}{8}$　③ $\dfrac{a^3}{6}$
④ $\dfrac{a^3}{4}$　⑤ $\dfrac{a^3}{3}$

12 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{8}{3}$　③ 4
④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{20}{3}$

13 다음 그림과 같이 두 곡선 $y=-x^3+4x$와 $y=-x^2+4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $12(S_1+S_2)$의 값을 구하시오.



14 곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은? (단, $k>1$)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

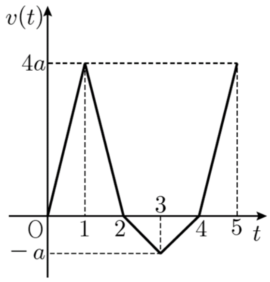
15 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=40-at$이다. 시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌었을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 90 ② 95 ③ 100
④ 105 ⑤ 110

16 지상 $120\mathrm{m}$ 높이에서 $50\mathrm{m/s}$의 속도로 지면과 수직하게 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=50-10t$ $(0\le t\le 12)$일 때, 이 물체의 지면으로부터의 최고 높이를 구하시오.

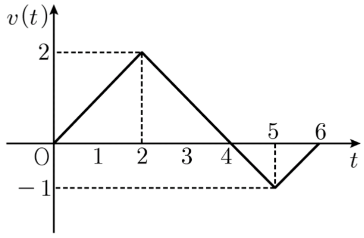
17 지상에서 처음 속도 $20\mathrm{m/s}$로 똑바로 위로 발사한 물체의 t초 후의 속도가 $v(t)=-4t+20(\mathrm{m/s})$라 할 때, 발사 후 8초 동안 물체가 움직인 거리를 구하시오.

18 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $t=3$에서의 점 P의 위치가 14일 때, $t=5$에서 점 P의 위치는? (단, $0\le t\le 5$)



① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

19 좌표가 -1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \leq t \leq 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져있을 때, 점 P의 위치를 구하시오.



20 [2019년 11월 고3 문과 26번/4점]

두 함수

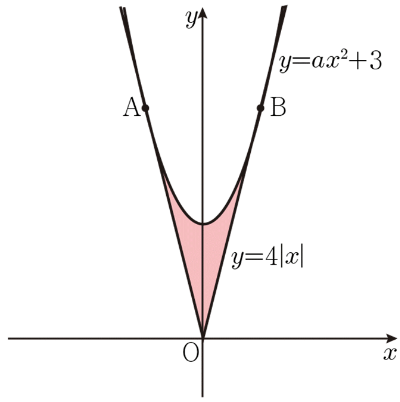
$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

21 [2020년 3월 고3 이과 10번 변형]

다음 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=4|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다.

두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=4|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3

④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

22 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

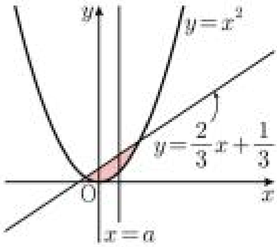
(가) $f(0)=f'(0)=4$
(나) $f(1)=f'(1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$

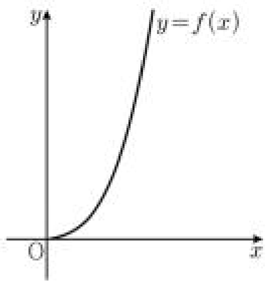
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

23 다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{3}{4}$ ④ 1
⑤ $\frac{5}{4}$

24 함수 $f(x)=\frac{1}{5}x(x^2+1)$ $(x\geq 0)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 정적분 $\int_2^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.



25 함수 $f(x)=x^3$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^3 f(x)\,dx+\int_1^{27} g(x)\,dx$의 값은?

① 20 ② 40 ③ 41
④ 80 ⑤ 81

26 함수 $f(x)=x^3+2\,(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$의 값은?

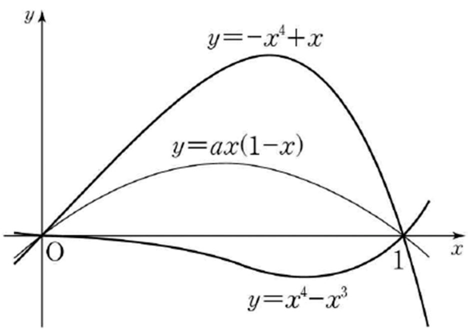
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

27 함수 $f(x)=\frac{1}{12}x^2$ $(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

28 함수 $f(x)=x^4-(2+a)x^3+2ax^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은? (단, $a\neq 2$)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

29 [2009년 9월 고3 이과 7번]
두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$)



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

30 [2023년 11월 고3 12번 변형]
함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$과 실수 t $(0<t<3)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -2(x-t)+f(t) & (x\geq t) \end{cases}$$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{20}{3}$　② $\frac{61}{9}$　③ $\frac{62}{9}$　④ 7　⑤ $\frac{64}{9}$

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (넓이와 속도) 177~192p

넓이 ~ 속도와 거리

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 $\int_0^4 |x^2-7x+10|dx$

$=\int_0^2 (x^2-7x+10)dx+\int_2^4 (-x^2+7x-10)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-10x\right]_2^4$

$=12$

02 정답 19

해설 $\int_{-1}^3 \left\{-\left(-\frac{3}{4}x^2-3\right)\right\}dx=\int_{-1}^3 \left(\frac{3}{4}x^2+3\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^3+3x\right]_{-1}^3$

$=\frac{63}{4}-\left(-\frac{13}{4}\right)=19$

03 정답 ③

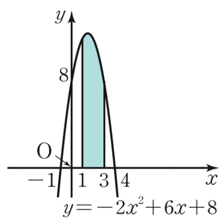
해설 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3 (-2x^2+6x+8)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_1^3$

$=(-18+27+24)-\left(-\frac{2}{3}+3+8\right)$

$=\frac{68}{3}$



04 정답 $\frac{58}{3}$

해설 곡선 $y=ax^2+bx+c$의 y절편이 15이므로

$c=15$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $x=3$ 또는

$x=5$이므로

$a(x-3)(x-5)=0$

$ax^2-8ax+15a=0$

$15a=c=15$이므로

$a=1$

$-8a=b$이므로

$b=-8$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3 (x^2-8x+15)dx-\int_3^5 (x^2-8x+15)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_0^3-\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_3^5$

$=18+\frac{4}{3}=\frac{58}{3}$

05 정답 4

해설 $\int_1^3 |-x^2+4|dx$

$=\int_1^2 (-x^2+4)dx+\int_2^3 (x^2-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$

$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$

06

정답 $\dfrac{59}{6}$

해설 $\displaystyle\int_{-5}^{-2}|x^2+3x|dx$

$\displaystyle=\int_{-5}^{-3}(x^2+3x)dx+\int_{-3}^{-2}(-x^2-3x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-5}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-2}$

$\displaystyle=\frac{26}{3}+\frac{7}{6}=\frac{59}{6}$

07

정답 $\dfrac{256}{3}$

해설 $\displaystyle\int_{-5}^{3}(-x^2-2x+15)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+15x\right]_{-5}^{3}$

$\displaystyle=(-9-9+45)-\left(\frac{125}{3}-25-75\right)$

$\displaystyle=\frac{256}{3}$

08

정답 21

해설 $\displaystyle\int_{0}^{3}(4t+1)dt=\left[2t^2+t\right]_{0}^{3}=21$

09

정답 10

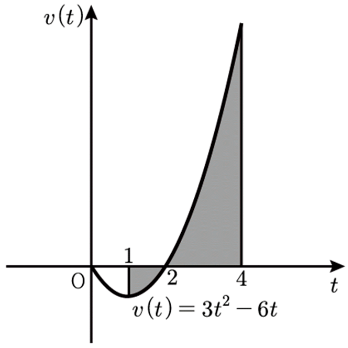
해설 $\displaystyle 2+\int_{0}^{2}(t+3)dt=2+\left[\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{0}^{2}$

$=2+8=10$

10

정답 22

해설 $v(t)=3t^2-6t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\displaystyle\therefore \int_{1}^{4}|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_{1}^{2}(-3t^2+6t)dt+\int_{2}^{4}(3t^2-6t)dt$

$\displaystyle=\left[-t^3+3t^2\right]_{1}^{2}+\left[t^3-3t^2\right]_{2}^{4}$

$=2+20=22$

11

정답 ③

해설 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 좌표는

방정식 $x^2=ax$에서 $(0,\ 0)$, $(a,\ a^2)$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{0}^{a}|ax-x^2|dx=\left[\frac{a}{2}x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a}$

$\displaystyle=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$

12

정답 ②

해설 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이고, 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 원점에서 만나므로

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근 2와 다른 한 근 $x=0$을 갖는다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)-g(x)=2x(x-2)^2=2x^3-8x^2+8x$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{2}(2x^3-8x^2+8x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{8}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle=\frac{8}{3}$

13 정답 142

해설 두 곡선 $y=-x^3+4x$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는

$-x^3+4x=-x^2+4$에서

$x^3-x^2-4x+4=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 두 도형의 넓이는

$$S_1=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(-x^3+4x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{45}{4}$$

$$S_2=\int_{1}^{2}\{(-x^3+4x)-(-x^2+4)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

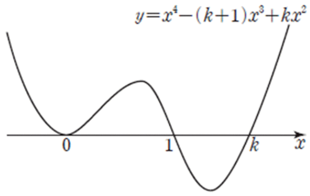
$$=\frac{7}{12}$$

$$\therefore 12(S_1+S_2)=12\left\{\frac{45}{4}+\frac{7}{12}\right\}=142$$

14 정답 ②

해설 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2=x^2(x-k)(x-1)$이므로

곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$은 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=x^4-(k+1)x^3+kx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k\{x^4-(k+1)x^3+kx^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+1}{4}\cdot x^4+\frac{k}{3}x^3\right]_0^k$$

$$=\frac{k^5}{5}-\frac{(k+1)k^4}{4}+\frac{k^4}{3}=0$$

이때 $k>1$이므로 $\frac{k}{5}-\frac{k+1}{4}+\frac{1}{3}=0$

$12k-15(k+1)+20=0$, $-3k+5=0$

따라서 $k=\frac{5}{3}$이다.

15 정답 ③

해설 시각 $t=4$에서 점 P 의 운동 방향이 바뀌므로

$v(4)=0$이다.

$v(4)=40-4a=0$에서 $a=10$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^6|40-10t|dt$$

$$=\int_0^4(20-10t)dt+\int_4^6(10t-40)dt$$

$$=[40t-5t^2]_0^4+[5t^2-40t]_4^6=80+20=100$$

16 정답 245 m

해설 $v(t)=50-10t=0$에서 $t=5$이다.

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$120+\int_0^5(50-10t)dt=120+\left[50t-5t^2\right]_0^5$$

$$=120+125$$

$$=245(\mathrm{m})$$

17 정답 68 m

해설 움직인 거리는 $\int_0^8|-4t+20|dt$이므로

$$\int_0^5(-4t+20)dt+\int_5^8(4t-20)dt$$

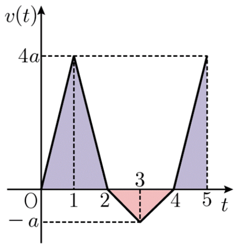
$$=\left[-2t^2+20t\right]_0^5+\left[2t^2-20t\right]_5^8$$

$$=68(\mathrm{m})$$

18 정답 ④

해설 $t=3$일 때의 점 P의 위치가 14이므로

$$14=\int_0^3 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4a-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a$$
$$=2a+2a-\frac{1}{2}a=\frac{7}{2}a$$



즉, $\frac{7}{2}a=14$이므로 $a=4$

$t=5$일 때의 점 P의 위치를 구하면

$$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt+\int_4^5 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4a-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4a$$
$$=4a-a+2a$$
$$=5a$$
$$=4\cdot 5$$
$$=20$$

19 정답 3

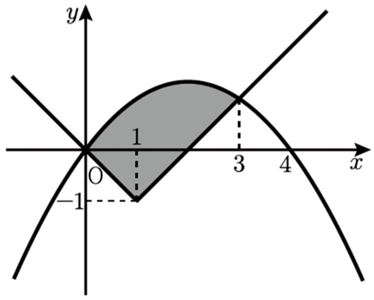
해설 점 P는 $t=4$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고 그때의 점 P의 위치는

$$-1+\int_0^4 v(t)dt=-1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2$$
$$=-1+4$$
$$=3$$

20 정답 14

해설 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서

$x=0$

$x\geq 1$일 때, $g(x)=x-2$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$

$x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}$$
$$=\frac{7}{2}$$

$\therefore\ 4S=14$

21 정답 ③

해설 $x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+3$과 $y=-4x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+3=-4x$, 즉 $ax^2+4x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-3a=0$

따라서 $a=\frac{4}{3}$이므로 접점 A의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로

접점 B의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3}x^2+3-4x\right)dx$

$=2\left[\frac{4}{9}x^3+3x-2x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$

$=2\left\{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}$

$=2\cdot\frac{3}{2}=3$

22 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f(0)=c=4$, $f'(0)=b=4$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+4x+4$, $f'(x)=3x^2+2ax+4$

조건 (나)에서 $f(1)=1+a+4+4=a+9$

$f'(1)=3+2a+4=2a+7$이므로

$a+9=2a+7$에서

$a=2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2+4x+4$, $f'(x)=3x^2+4x+4$

$f(x)=f'(x)$에서 $f(x)-f'(x)=0$이므로

$x^3-x^2=0$, $x^2(x-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$에서 $f(x)\le f'(x)$이므로

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1\{(3x^2+4x+4)-(x^3+2x^2+4x+4)\}dx$

$=\int_0^1(x^2-x^3)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

23 정답 ①

해설 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$의 교점의 x좌표는

$x^2=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$에서

$3x^2-2x-1=0$, $(3x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-\frac{1}{3}}^1\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-x^2\right)dx$

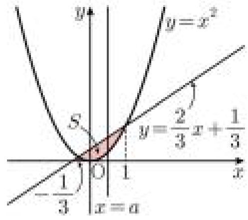
그런데 S는 곡선

$y=-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$와 x축으로

둘러싸인 부분의 넓이이므로 대칭축 $x=\frac{1}{3}$에 의하여

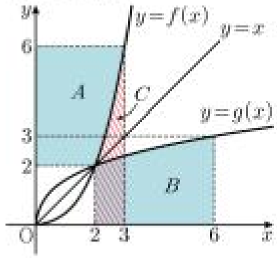
이등분된다.

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$



24 정답 $\frac{41}{4}$

해설 함수 $f(x)=\frac{1}{5}x(x^2+1)\ (x \ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
다음 그림에서



(B의 넓이)=(A의 넓이)

$=3\cdot6-2\cdot2-$(C의 넓이)

$=14-\int_2^3 f(x)dx$

$=14-\int_2^3 \frac{1}{5}x(x^2+1)dx$

$=14-\frac{1}{5}\int_2^3 (x^3+x)dx$

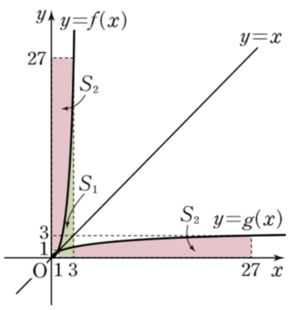
$=14-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$

$=14-\frac{1}{5}\cdot\frac{75}{4}=\frac{41}{4}$

$\therefore \int_2^6 g(x)dx=$($B$의 넓이)$=\frac{41}{4}$

25 정답 ④

해설 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



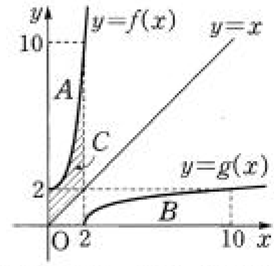
$S_1=\int_1^3 f(x)dx$, $S_2=\int_1^{27} g(x)dx$라고 하면

$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^{27} g(x)dx=S_1+S_2$

$=3\cdot27-1\cdot1=80$

26 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)=x^3+2\ (x \ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



그림에서 (A의 넓이)=(B의 넓이)이므로

$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$

$=$(C의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=$(C의 넓이)$+$(A의 넓이)

$=2\cdot10=20$

27 정답 48

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=12$
닫힌구간 $[0, 12]$에서 $x \ge \frac{1}{12}x^2$이므로
구하는 도형의 넓이는

$2\int_0^{12}\left(x-\frac{1}{12}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{36}x^3\right]_0^{12}=48$

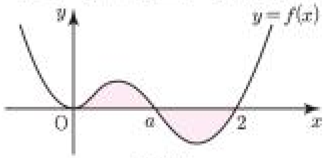
28 정답 ③

해설 $f(x)=x^4-(2+a)x^3+2ax^2$

$=x^2(x-2)(x-a)$

(ⅰ) $0<a<2$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림 1]과 같다.



[그림1]

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\{x^4-(2+a)x^3+2ax^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2+a}{4}x^4+\frac{2a}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}-4(2+a)+\frac{16a}{3}$$

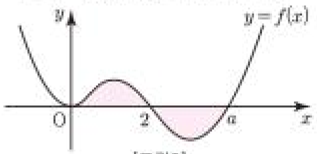
$$=\frac{20a-24}{15}$$

에서 $20a-24=0$

$\therefore a=\frac{6}{5}$

(ⅱ) $a>2$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림2]와 같다.



[그림2]

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\{x^4-(2+a)x^3+2ax^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2+a}{4}x^4+\frac{2a}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{5}a^5-\frac{2+a}{4}\cdot a^4+\frac{2}{3}a^4$$

$$=a^4\left(-\frac{a}{20}+\frac{1}{6}\right)=0$$

에서 $a\neq 0$이므로 $a=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}=4$

29 정답 ④

해설 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-(ax-ax^2)\}dx$$

$$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$

$$=2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx$$

$$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx-$$

$$2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx=0$$

$$\int_0^1[(-2x^4+x^3+x)-2\{x^4+ax^2+(1-a)x\}]dx$$

$=0$

$$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}ax^3+\frac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}a+a-\frac{1}{2}=0$$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

30 정답 ⑤

해설 함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 -2인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $\left(t+\frac{f(t)}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{f(t)}{2}-t\right)\cdot f(t)$$

$$=\int_0^t f(x)dx+\frac{\{f(t)\}^2}{4}$$

이때 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+\frac{f(t)\cdot f'(t)}{2}$$

$$=f(t)\left\{1+\frac{f'(t)}{2}\right\}$$

한편, $f(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$이므로 $0<t<3$에서

$f(t)>0$

이때 $1+\frac{f'(t)}{2}$를 정리하면

$1+\frac{f'(t)}{2}$

$=1+\frac{1}{6}\{(t-3)(t-6)+t(t-6)+t(t-3)\}$

$=1+\frac{1}{6}\{(t^2-9t+18)+(t^2-6t)+(t^2-3t)\}$

$=1+\frac{1}{6}(3t^2-18t+18)$

$=1+\frac{1}{2}(t^2-6t+6)$

$=\frac{1}{2}(t^2-6t+8)$

$=\frac{1}{2}(t-2)(t-4)$

따라서 $0<t<3$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	(극대)	$\searrow$	

따라서 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S(2)=\int_0^2 f(x)dx+\frac{\{f(2)\}^2}{4}$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx+\frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-4)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^2(x^3-9x^2+18x)dx+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 16-3\cdot 8+9\cdot 4\right)+\frac{16}{9}$$
$$=\frac{64}{9}$$