교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p_대단원

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

실시일자	-
39문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\frac{2x-3}{x}<f(x)<\frac{2x^2+x-2}{x^2}$$

을 만족할 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

02 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$2x^2-3 \le (x^2+1)f(x) \le 2x^2+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 함수 $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$에 대하여

$\lim_{x\to 2+} f(x)=a$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=b$라 할 때,

실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

04 $x=1$에서의 극한값이 존재하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=7$, $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=12$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+8}{5g(x)-7}$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } \lim_{x\to 1}f(x)>\lim_{x\to 1}g(x)\right)$

05 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=1$, $\lim_{x\to a}g(x)=3$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\lim_{x\to a}\{-3f(x)\}=-3$

② $\lim_{x\to a}2f(x)g(x)=6$

③ $\lim_{x\to a}\frac{3f(x)}{g(x)}=1$

④ $\lim_{x\to a}[\{f(x)\}^2+3g(x)]=10$

⑤ $\lim_{x\to a}f(g(x))=3$

06 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+7}{x-4}=2$

② $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x}-x}=-1$

③ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{1}{4}$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})=0$

⑤ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5|x|+1}{2x-4|x|+1}=-3$

07 [2005년 6월 고3 이과 4번]
곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t, \sqrt{t})$에서 점 $(1, 0)$까지의 거리를 d_1, 점 $(2, 0)$까지의 거리를 d_2라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ 0

08 다음 두 등식을 동시에 만족하는 이차함수 $f(x)$를 구하면?

식 : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=-2$

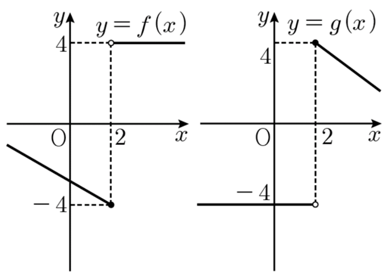
① x^2-3x
② x^2+2x+1
③ x^2+2x
④ x^2-2x
⑤ x^2-2x+1

09 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} & (x\neq4)\\ a & (x=4)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

10 [2011년 4월 고3 이과 24번/3점]
함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} & (x\neq2)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오.

11 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{5(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $f(x)\neq0$)

12 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)g(x)$의 값을 구하시오.



13 삼차방정식 $x^3-x-2=0$은 오직 하나의 실근 α를 갖는다. 다음 열린 구간 중 α가 존재하는 구간은?

① $(-2,\ -1)$ ② $(-1,\ 0)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $(1,\ 2)$ ⑤ $(2,\ 3)$

14 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $|2x-1|-2=0$
ㄴ. $\sqrt{4x-1}-2=0$
ㄷ. $\dfrac{4}{3x-1}-1=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{는 유리수}) \\ -x^3 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, n은 자연수이다.)

① $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1$
② $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)=-1$
③ $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(-1-\dfrac{1}{n}\right)=1$
④ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$
⑤ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

16 $0<a<5$일 때, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x^2-a|+a-25}{x-5}$의 값을 구하시오.

17 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x-\alpha)}{x-\alpha} = 2$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{2x+5f(x)}{x^2+2f(x)}$의 값을 구하시오.

18 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $\lim_{x \to 2} f(x)$와 $\lim_{x \to 2} g(x)$가 존재하고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2} \{f(x)+g(x)\} = 6$
(나) $\lim_{x \to 2} \{(x+1)f(x)+2xg(x)\} = 15$

$\lim_{x \to 2} f(x)g(x)$의 값은?

① -7　② -12　③ -16
④ -20　⑤ -27

19 함수의 극한에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.
(단, $g(x) \neq 0$)

ㄴ. $\lim_{x \to a} g(x)$와 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\}$의 값도 존재한다.
(단, $g(x) \neq 0$)

ㄷ. $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하고 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

20 함수 $f(x) = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$가 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$을 만족할 때, $a+b+c+d$의 값은?

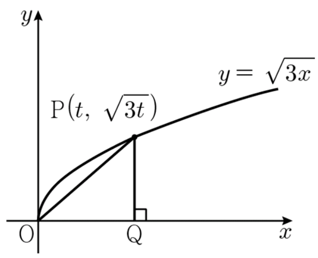
① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 4

21 [2008년 4월 고3 이과 21번]

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2$일 때,

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

22 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{t},\ \sqrt{3\mathrm{t}})$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점)



23 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(5x-1,\ 12x+1)$ 사이의 거리를 $d(x)$라 할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\{d(x)-13x\}$의 값을 구하시오.

24 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^2-1)f(x)=x^3+6x^2-x-6$을 만족할 때, $f(-1)+f(1)$의 값을 구하시오.

25 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 $(x^2-x-2)f(x)=x^4+ax+b$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

26 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $2f(23)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)=\begin{cases} x+3 & (0\le x<6) \\ a(x-6)^2+b & (6\le x\le 8) \end{cases}$
(단, a, b는 상수)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$이다.

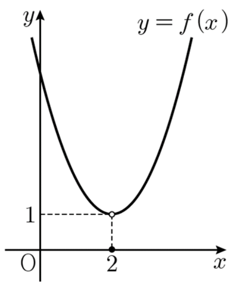
교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p_대단원

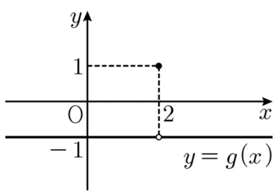
함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

27 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(15)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

> (가) 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서
> $$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 2) \\ x^2+ax+b & (2 \le x \le 6) \end{cases}$$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-3)=f(x+3)$

28 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?





〈보기〉

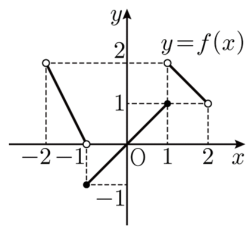
ㄱ. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

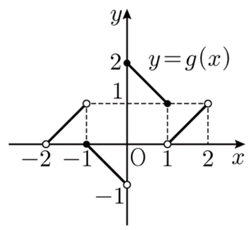
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

29 다음 그림은 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





〈보기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)g(x)=0$

ㄴ. 열린구간 $(-2,\ a)$에서 함수 $y=f(x)g(x)$가 연속일 때, a의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=a$, $f(3)=a-7$일 때, 방정식 $f(x)=4$가 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오.

31 방정식 $x^2-4x+a=0$이 구간 $(-2,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

32 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-2x}{ax+b}=-5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값은?

① $-\dfrac{1}{5}$ ② $-\dfrac{1}{8}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

33 자연수 n과 상수 a에 대하여
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x}\right)}{\sqrt{x^8+16}-4}=a$일 때, $a+n$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

34 [2020년 3월 고3 이과 12번/3점]
두 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (x<1)\\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq1)\end{cases}$,
$g(x)=2x^3+ax+b$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

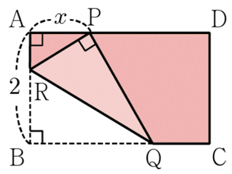
35 함수 $f(x)$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)$가 수렴하면 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이다.
ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$가 수렴하면 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left\{1-\dfrac{f(x)}{x}\right\}$가 수렴하면 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 $\overline{\mathrm{RQ}}$를 접는 선으로 하여 꼭짓점 B가 $\overline{\mathrm{AD}}$ 위의 점 P에 오도록 접었다. $\overline{\mathrm{AP}}=x$, 삼각형 ARP의 넓이를 $S(x)$라 할 때, $\lim_{x\to0+}\frac{\{S(x)\}^2}{x^2}$의 값은? (단, 종이의 가로의 길이는 충분히 길다.)



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

37 [2023년 경찰대 19번 변형]
실수 $t(3<t<11)$에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-3)^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 위의 한 점 R를 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$가 되도록 잡는다. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to3+}\frac{S(t)}{(t-3)^2}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

38 함수 $f(x)$는 연속함수이고 $f(0)=4$, $f(1)=a^2-3a-4$, $f(2)=9$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 5 ② 9 ③ 10
④ 13 ⑤ 17

39 [2008년 4월 고3 이과 23번]
두 함수 $f(x)=x^5+x^3-3x^2+k$, $g(x)=x^3-5x^2+3$에 대하여 구간 $(1,\ 2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p_대단원

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

실시일자	-
39문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ②	03 2
04 2	05 ⑤	06 ⑤
07 ①	08 ③	09 8
10 32	11 $\frac{5}{2}$	12 16
13 ④	14 ⑤	15 ④
16 10	17 3	18 ⑤
19 ⑤	20 ①	21 48
22 1	23 $\frac{7}{13}$	24 12
25 9	26 15	27 0
28 ⑤	29 ⑤	30 6
31 11	32 ①	33 ④
34 ①	35 ③	36 ③
37 ②	38 ⑤	39 36

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p_대단원

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

실시일자	-
39문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 $\frac{2x-3}{x}<f(x)<\frac{2x^2+x-2}{x^2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2}=2$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

02 정답 ②

해설 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2-3}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

03 정답 2

해설 (ⅰ) $x>2$일 때, $f(x)=\frac{x-2}{x-2}=1$

(ⅱ) $x<2$일 때, $f(x)=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\lim_{x\to2+}f(x)=1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=-1$이므로

$a=1$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

04 정답 2

해설 $x=1$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=a$, $\lim_{x\to1}g(x)=b$라 하자. (단, $a>b$)

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)=a+b$

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)=ab$

$a+b=7$, $ab=12$이므로 $a=4$, $b=3$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=4$, $\lim_{x\to1}g(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{2f(x)+8}{5g(x)-7}=\frac{2\cdot4+8}{5\cdot3-7}=2$

05 정답 ⑤

해설 ① $\lim_{x\to a}\{-3f(x)\}=-3\lim_{x\to a}f(x)$

$=-3\cdot1=-3$

② $\lim_{x\to a}2f(x)g(x)=2\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

$=2\cdot1\cdot3=6$

③ $\lim_{x\to a}\frac{3f(x)}{g(x)}=3\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

$=3\cdot\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=3\cdot\frac{1}{3}=1$

④ $\lim_{x\to a}[\{f(x)\}^2+3g(x)]$

$=\{\lim_{x\to a}f(x)\}^2+3\lim_{x\to a}g(x)$

$=1^2+3\cdot3=10$

⑤ $\lim_{x\to a}g(x)=3$이므로 $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(3)$

그런데 $f(3)$의 값을 알 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

06 정답 ⑤

해설

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+7}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{1-\frac{4}{x}}=2$

② $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2+3t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}=-1$$

③ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=0$$

⑤ $x\to-\infty$일 때, $x<0$이므로 $|x|=-x$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5|x|+1}{2x-4|x|+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5x+1}{2x+4x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}$$

이때 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t+1}{-6t+1}=-\frac{2}{3}$$

07 정답 ①

해설 함수의 극한과 연속성

점$(t,\ \sqrt{t})$에서 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$까지의 거리 d_1, d_2는

$$d_1=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$
$$d_2=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

08 정답 ③

해설

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=-2$$

주어진 조건식에서

$f(0)=0,\ f(-2)=0$이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x+2)$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax(x+2)}{x}=2$$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2+2x$

09 정답 8

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=4$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$
$$=\lim_{x\to4}(x+4)$$
$$=4+4=8$$

따라서 $a=8$

10 정답 32

해설 연속함수의 뜻 이해하기

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로

$2a+b=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=2$$

따라서 $a=8,\ b=-16$이므로

$2a-b=32$

11 정답 $\frac{5}{2}$

해설 $\lim_{x\to1}\frac{5(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2+x+1)}{(x+1)f(x)}$

$=\frac{15}{2f(1)}=3$

$\therefore f(1)=\frac{5}{2}$

12 정답 16

해설 $\lim_{x\to2+}f(x)=4,\ \lim_{x\to2+}g(x)=4$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\cdot\lim_{x\to2+}g(x)$

$=4\cdot4=16$

$\lim_{x\to2-}f(x)=-4,\ \lim_{x\to2-}g(x)=-4$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\cdot\lim_{x\to2-}g(x)$

$=(-4)\cdot(-4)=16$

따라서 $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=16$

13 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-2)=-8+2-2=-8<0$

$f(-1)=-1+1-2=-2<0$

$f(0)=-2<0$

$f(1)=1-1-2=-2<0$

$f(2)=8-2-2=4>0$

$f(3)=27-3-2=22>0$

이때 $f(1)f(2)<0$이므로 중간값 정리에 의하여 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 실근 α를 갖는다.

14 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=|2x-1|-2$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=-1<0,\ f(2)=1>0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=\sqrt{3}-2<0,\ f(2)=\sqrt{7}-2>0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=\frac{4}{3x-1}-1$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=1>0,\ f(2)=-\frac{1}{5}<0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 적어도 하나의 실근을 갖는다.

15 정답 ④

해설 ① $1+\frac{2}{n}$는 유리수이므로

$\lim_{n\to\infty}f\left(1+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2=1$

② $1-\frac{\sqrt{3}}{n}$은 무리수이므로

$\lim_{n\to\infty}f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^3\right\}=-1$

③ $-1-\frac{1}{n}$이 유리수이므로

$\lim_{n\to\infty}f\left(-1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{n}\right)^2=1$

④ x가 유리수이면 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x^2=1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(-x^3)=-1$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ x가 유리수이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}x^2=1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(-x^3)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=1$

16 정답 10

해설 $0<a<5$이므로 $x\to5$일 때, $x^2-a>0$

$$\lim_{x\to5}\frac{|x^2-a|+a-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{x^2-a+a-25}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}(x+5)=10$$

17 정답 3

해설 $x-\alpha=t$라 놓으면 $x\to\alpha$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x-\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+5f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2+5\frac{f(x)}{x}}{x+2\frac{f(x)}{x}}=\frac{12}{4}=3$$

18 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to2}f(x)$와 $\lim_{x\to2}g(x)$가 존재하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to2}g(x)=\beta$라 하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{x\to2}g(x)$$
$$=\alpha+\beta$$

이므로 $\alpha+\beta=6$ ······㉠

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\{(x+1)f(x)+2xg(x)\}$$
$$=\lim_{x\to2}\{(x+1)f(x)\}+2\lim_{x\to2}\{xg(x)\}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+1)\times\lim_{x\to2}f(x)+2\lim_{x\to2}x\times\lim_{x\to2}g(x)$$
$$=3\alpha+4\beta$$

이므로 $3\alpha+4\beta=15$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=9,\ \beta=-3$

따라서

$$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}f(x)\times\lim_{x\to2}g(x)$$
$$=\alpha\beta=9\times(-3)=-27$$

19 정답 ⑤

해설 ㄱ. [반례] $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=1$이면

$\lim_{x\to2}g(x)=2$이므로 값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)=p$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=q$ (p, q는 상수)라고

하면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=pq$이다.

$\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의

값도 존재한다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라

하고 $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=\beta$이다.

$f(x)\neq0$일 때, $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20 정답 ①

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=1$에서 극한값이 1이므로

분자, 분모는 같은 차수이고, 극한값은 최고차항의 계수이다.

따라서 $a=0,\ b=1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+d}{x^2-x-2}=1$$
··· ㉠

$x\to-1$일 때, 분모$\to0$이므로 분자$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}x^2+cx+d=0,\ (-1)^2+c(-1)+d=0$

$1-c+d=0 \qquad \therefore d=c-1$

㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+(c-1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+c-1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+c-1}{x-2}$$
$$=\frac{-1+c-1}{-1-2}=1$$

$c=-1,\ d=-2$이므로

$a+b+c+d=0+1-1-2=-2$

21 정답 48

해설 무리함수의 극한값 구하기

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$ 이고 $b=3a$ 이다.

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\frac{a}{6}=2$

$\therefore a=12,\ b=36$

22 정답 1

해설 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$, $\overline{OQ}=t$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}}{1}=1$$

23 정답 $\frac{7}{13}$

해설 $d(x)=\overline{OP}$

$=\sqrt{(5x-1)^2+(12x+1)^2}$

$=\sqrt{169x^2+14x+2}$

이므로

$\lim_{x\to\infty}\{d(x)-13x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{169x^2+14x+2}-13x\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{169x^2+14x+2}-13x\right)\left(\sqrt{169x^2+14x+2}+13x\right)}{\sqrt{169x^2+14x+2}+13x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{14x+2}{\sqrt{169x^2+14x+2}+13x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\frac{2}{x}}{\sqrt{169+\frac{14}{x}+\frac{2}{x^2}}+13}=\frac{14}{13+13}=\frac{7}{13}$

24 정답 12

해설 $x\neq-1,\ x\neq1$일 때,

$f(x)=\frac{x^3+6x^2-x-6}{x^2-1}=x+6$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서도 연속이다.

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x),\ f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x+6)=5$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+6)=7$

$\therefore f(-1)+f(1)=12$

25 정답 9

해설 $x\neq-1,\ x\neq2$일 때,

$f(x)=\frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2}=\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

$x\to-1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^4+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$ 가 $x=2$에서 연속이려면

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다

즉, $\lim_{x\to2}(x^4+ax+b)=0$이므로

$16+2a+b=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-5,\ b=-6$

따라서 $x\neq-1,\ x\neq2$일 때,

$f(x)=\frac{x^4-5x-6}{(x+1)(x-2)}$

$=\frac{(x+1)(x-2)(x^2+x+3)}{(x+1)(x-2)}=x^2+x+3$

$\therefore f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x^2+x+3)=9$

26 정답 15

해설 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 연속이므로

$\lim_{x\to6-}f(x)=\lim_{x\to6+}f(x)=f(6)=b$이다.

이때

$\lim_{x\to6-}f(x)=\lim_{x\to6-}(x+3)=9$

$\lim_{x\to6+}f(x)=\lim_{x\to6+}\{a(x-6)^2+b\}=b$이므로

$b=9$이다.

또, 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 연속이므로

$\lim_{x\to8-}f(x)=\lim_{x\to8+}f(x)=f(8)=4a+9$이다.

이때

$\lim_{x\to8-}f(x)=\lim_{x\to8-}\{a(x-6)^2+9\}=4a+9$

$\lim_{x\to8+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x+3)=3$이므로

$a=-\frac{3}{2}$이다.

즉, $f(x)=\begin{cases}x+3 & (0\le x<6)\\ -\frac{3}{2}(x-6)^2+9 & (6\le x\le 8)\end{cases}$이므로

$f(23)=f(15)=f(7)=\frac{15}{2}$

$\therefore\ 2f(23)=15$

27 정답 0

해설 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$4=4+2a+b$

$\therefore\ 2a+b=0 \quad \cdots ㉠$

$f(x-3)=f(x+3)$에 $x=3$을 대입하면

$f(0)=f(6)$이므로

$0=36+6a+b \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9,\ b=18$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<2)\\ x^2-9x+18 & (2\le x\le 6)\end{cases}$이므로

$f(15)=f(9)=f(3)=0$

28 정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to2}f(x)g(x)=-1$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to2}f(x)=1,\ f(2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)\ne f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=-1$이고,

$f(2)g(2)=0\cdot1=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)\ne f(2)g(2)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

29 정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\cdot\lim_{x\to-1+}g(x)$

$=(-1)\cdot0=0$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\cdot\lim_{x\to-1-}g(x)$

$=0\cdot1=0$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1,\ x=0$에서 연속,

$x=1$에서 불연속이므로 a의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$

$=2+0=2$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1+1=2$

$f(1)+g(1)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}$

$=f(1)+g(1)$

즉, 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30 정답 6

해설 $g(x)=f(x)-4$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로
$g(x)$도 연속함수이다.
사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$이
구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면
$g(1)g(3)<0$이어야 하므로
$g(1)=f(1)-4=a-4$,
$g(3)=f(3)-4=a-7-4=a-11$
에서 $(a-4)(a-11)<0$
$\therefore\ 4<a<11$
따라서 정수 a는 $5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$의 6개이다.

31 정답 11

해설 $f(x)=x^2-4x+a$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $(-2,\ 0)$에서 연속이고
$f(-2)=12+a,\ f(0)=a$이므로
$f(-2)f(0)<0$에서
$(12+a)a<0$
$\therefore\ -12<a<0$
따라서 정수 a는 $-11,\ -10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,$
$-4,\ -3,\ -2,\ -1$의 11개이다.

32 정답 ①

해설 $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이
존재하므로 (분모) $\to0$이다.
즉, $\lim\limits_{x\to1}(ax+b)=0$이므로 $a+b=0$
$\therefore\ b=-a \qquad \cdots$ ㉠
㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2+2x^2}-2x}{ax-a}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{2+2x^2}-2x)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}{(ax-a)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)(x-1)}{a(x-1)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)}{a(\sqrt{2+2x^2}+2x)}=-\frac{1}{a}$$

$-\dfrac{1}{a}=-5$에서 $a=\dfrac{1}{5}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$b=-\dfrac{1}{5}$
$\therefore\ a+2b=-\dfrac{1}{5}$

33 정답 ④

해설 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x})}{\sqrt{x^8+16}-4}$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로
극한이 상수 a로 수렴하려면 분자의 최고차항 차수가
분모의 최고차항의 차수보다 작거나 같아야 한다.
분모 $\sqrt{x^8+16}-4$에서 최고차항의 차수는 4차이고,
분자 $x^n(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x})$에서 최고차항의 차수는
$(n+1)$차이므로 $n+1\le4$이어야 한다.
(i) $n+1\le3$인 경우
분자의 최고차항 차수가 분모의 최고차항 차수보다
작으므로 극한값이 0으로 수렴한다.
$\therefore\ a=0$
(ii) $n+1=4$인 경우

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x})}{\sqrt{x^8+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^8+x^7}-\sqrt{4x^7})}{\sqrt{x^8+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{4}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{16}{x^8}}-\frac{1}{x^4}}=1\text{이므로 } a=1$$

(i), (ii)에서 $n=3,\ a=1$일 때, $n+a$의 값이 최대가
되므로
$3+1=4$

34 정답 ①

해설 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$x\neq 1$일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 연속이므로

함수 $h(x)$도 연속이다.

그러므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1-}h(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하므로

$2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}h(x)&=\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax-a-2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(2x^2+2x+a+2)=a+6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}h(x)&=\lim_{x\to1+}\frac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{2x+1}=0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to1+}h(x)=\lim\limits_{x\to1-}h(x)=h(1)$이므로

$a+6=0$, 즉 $a=-6$

$b=-a-2$에서 $b=4$

$\therefore\ b-a=10$

35 정답 ③

해설 ㄱ. $xf(x)=g(x)$로 놓으면 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)$가

수렴하므로 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\alpha$ (α는 상수)

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ ∴참

ㄴ. [반례] $x\to\infty$일 때, $f(x)=1$이면

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$이지만 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$이다. ∴거짓

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left\{1-\dfrac{f(x)}{x}\right\}$가 수렴하면

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1-\dfrac{f(x)}{x}\right\}=0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

∴참

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

36 정답 ③

해설 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고

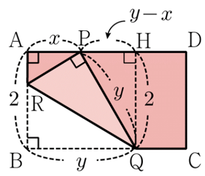
$\overline{\mathrm{BQ}}=y$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=y-x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=y$이므로

직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+2^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+4$

$\therefore\ y=\dfrac{x^2+4}{2x}$ $\cdots$ ㉠



△RPA와 △PQH에서

$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{H}=90^\circ$, $\angle\mathrm{APR}=\angle\mathrm{HQP}$

이므로 △RPA∽△PQH (AA 닮음)

이때 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QP}}$에서

$x:2=\overline{\mathrm{PR}}:y$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}xy$

$\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{PR}}^2-x^2=\dfrac{1}{4}x^2y^2-x^2$이므로

$S(x)=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2(y^2-4)}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0+}\frac{\{S(x)\}^2}{x^2}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}x^2(y^2-4)\right\}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{1}{16}x^2\left\{\frac{(x^2+4)^2}{(2x)^2}-4\right\}\ (\because\ ㉠)\\&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x^6+8x^4+16x^2}{64x^2}-\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

37 정답 ②

해설 $f(x)=(x-3)^2$에서 $f'(x)=2(x-3)$

$f'(t)=2(t-3)$

이차함수 $f(x)=(x-3)^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,f(t))$에서의

접선의 방정식은 $y-(t-3)^2=2(t-3)(x-t)$이고

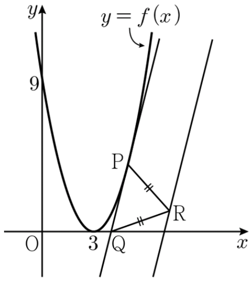
이 접선이 x축과 만나는 점이 Q이므로 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+3}{2},0\right)$

한편 $y=2(t-3)(x-7)$은 이차함수 $f(x)=(x-3)^2$

위의 점 $\mathrm{P}(t,f(t))$에서의 접선과 평행하고

직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 위의 한 점 R를 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$가

되도록 잡으면 다음 그림과 같다.



두 직선 $y-(t-3)^2=2(t-3)(x-t)$,
$y=2(t-3)(x-7)$은 서로 평행하므로 삼각형 PQR의 높이는 두 직선 사이의 거리, 즉 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$와 직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 사이의 거리 d와 같다.

$$d=\frac{|2(t-3)t-(t-3)^2-14(t-3)|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|(t-3)\{2t-(t-3)-14\}|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$
$$=\frac{|(t-3)(t-11)|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$
$$=\frac{-(t-3)(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(t-\frac{t+3}{2}\right)^2+\{(t-3)^2\}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+\{(t-3)^2\}^2}$$
$$=\sqrt{(t-3)^2\left\{\frac{1}{4}+(t-3)^2\right\}}$$
$$=(t-3)\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$

$S(t)$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times(t-3)\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)^2(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$

따라서

$$\lim_{t\to3+}\frac{S(t)}{(t-3)^2}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)^2(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}}{(t-3)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}\left\{\frac{(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}\frac{(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$
$$\times\lim_{x\to3+}\sqrt{\frac{1}{4}+(3-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\times(3-11)\times\sqrt{\frac{1}{4}}=2$$

38 정답 ⑤

해설 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1)<0$이면
방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서
각각 한 개의 실근을 가진다.
즉, $a^2-3a-4<0$에서 $(a+1)(a-4)<0$
$\therefore\ -1<a<4$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로
$\alpha^2+\beta^2=1+16=17$

39 정답 36

해설 중간값의 정리 이해하기
$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면
$h(x)=x^5+2x^2+k-3$
$x>0$에서 $h(x)$는 연속이고 증가하므로
$h(1)h(2)=k(k+37)<0$이면
구간$(1, 2)$에서 실근을 갖는다.
$-37<k<0$인 정수 k는 36개