

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
56문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

- 01** 두 집합 $A = \{2, 3, a\}$, $B = \{2, a-1, 2a-4\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

- ① $\{1, 2, 3, 10\}$ ② $\{1, 2, 3, 6\}$
③ $\{2, 3, 4, 5\}$ ④ $\{1, 2\}$
⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 20\}$

- 02** 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 20\text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cap B$ 는?

- ① $\{1, 2, 3, 10\}$ ② $\{1, 2, 3, 6\}$
③ $\{2, 3, 4, 5\}$ ④ $\{1, 2\}$
⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 20\}$

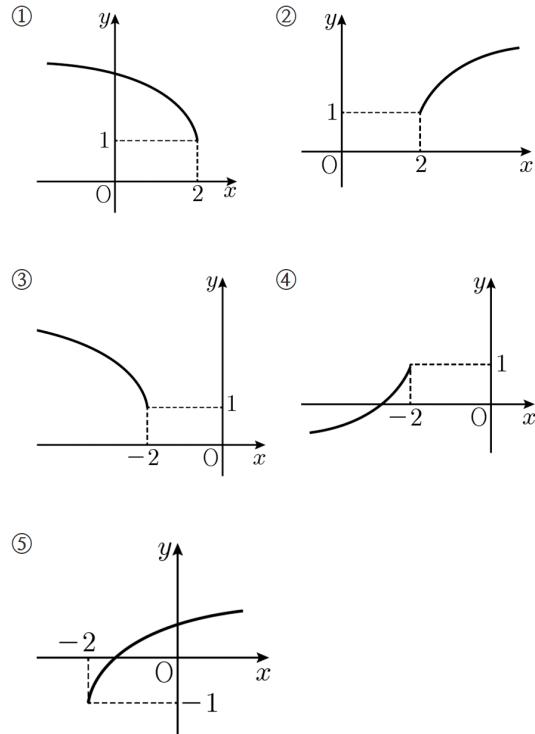
- 03** 다음 중 역이 거짓인 명제는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

- ① 두 집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$ 이다.
② $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.
③ x 가 3의 배수이면 x 는 9의 배수이다.
④ $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
⑤ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.

- 04** 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

- 05** 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6} + 1$ 의 그래프는?



숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

06 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 12, n(B) = 10, n(C) = 9, n(A \cap B) = 4, n(B \cup C) = 15, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하시오.

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

07 어느 화장품 가게에서 60명의 고객을 대상으로 A 화장품과 B 화장품을 구입해 본 경험을 조사하였더니 A 화장품과 B 화장품을 구입해 본 고객이 각각 42명, 36명이었다. B 화장품만 구입해 본 고객 수의 최댓값은?

- ① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

08 명제 ‘ $2x^2 - 8x + 3 \neq 0$ 이면 $x - a \neq 0$ 이다.’가 참이 되기 위한 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

09 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) = B \cap A^C$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?
(단, A^C 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합이다.)

- ① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$
④ $A \cap B = \emptyset$ ⑤ $A \cup B = \emptyset$

10 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 X 로의 함수가 아닌 것은?

- ① $x \rightarrow x$ ② $x \rightarrow |x^2|$
③ $x \rightarrow \frac{1}{2}|2x|$ ④ $x \rightarrow |x - 1|$
⑤ $x \rightarrow -|x|^3 + 1$

11 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a, g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 12** 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 세 함수 f, g, h 가 다음 조건을 만족시킬 때,
 $f(3) + g(2) + h(1)$ 의 값은?

(가) f 는 일대일 대응, g 는 항등함수, h 는 상수함수이다.

(나) $f(1) = g(1) = h(1)$

(다) $f(2) = h(3) + g(2)$

- ① 4
③ 6
⑤ 8

- ② 5
④ 7

- 13** 집합 $X = \{x | x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때,
상수 a 의 값은?

- ① 0
③ 2
④ 3
⑤ 4

- 14** $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 점 $(k, -2)$ 를 지난다.
 k 의 값을 구하시오.

- 15** $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = \frac{x+3}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① $\frac{5}{2}$
② 3
③ $\frac{7}{2}$
④ 4
⑤ $\frac{9}{2}$

- 16** 유리함수 $y = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나고
점근선이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

- 17** 함수 $y = \frac{ax+3}{x+b}$ 의 그래프가 직선 $y = x+2$ 와
직선 $y = -x-3$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값을
구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 18** $x = \sqrt{5}$ 일 때, $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} + \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}$ 의 값을 구하시오.

- 19** 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동하면 점(1, 3)을 지난다. 이 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

- 20** 두 함수 $f(x) = \sqrt{2x-3} - 3$, $g(x) = \sqrt{3x+4}$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)$ 의 값은?

- ① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

- 21** 점 (1, 2)가 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$)의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

- 22** [2016년 9월 고2 이과 13번/3점]
집합 $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A 의 모든 부분집합 X 의 개수는?

- (가) $n(X) \geq 2$
(나) 집합 X 의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

- ① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

- 23** 두 집합 A, B는 다음과 같고, 집합 X의 원소가 집합 A의 원소에는 속하지만 집합 B의 원소에는 속하지 않을 때 집합 X의 원소들의 합은?

보기
 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\},$
 $B = \{x | x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$

- ① 0 ② 2 ③ 5
④ 10 ⑤ 12

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 24** 두 집합 A, B 가 $A = \{1, a+1, 2a^2+1\}$,
 $B = \{0, 1, a+3\}$ 일 때,

$(A-B) \cup (B-A) = \{2, 3\}$ 이다. 집합 A 의 모든 원소의 합을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

- 25** 두 집합 $A = \{1, 3, 3a+1, a^2+1\}$,
 $B = \{3, a+3, 2a-8\}$ 에 대하여 $B-A = \{4, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하시오. (단, a 는 상수)

- 26** 세 집합 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$,
 $B = \{x | x^2 - 4x - 5 > 0\}$,
 $C = \{x | x^2 + ax + b > 0\}$ 에 대하여 $B \cup C = A$,
 $B \cap C = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 5\}$ 일 때, 상수 a, b 의 차 $a-b$ 의 값을?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

- 27** 다음 보기 중 참인 명제의 개수는?
(단, a, b, c 는 실수이다.)

- 〈보기〉
ㄱ. $|a| + |b| = 0$ 이면 $ab = 0$ 이고,
 $ab = 0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이다.
ㄴ. $a < b$ 이면 $ac < bc$ 이다.
ㄷ. $a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.
ㄹ. $a + b\sqrt{3} = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
ㅁ. $a < b$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이다.

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

- 28** 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

- ① $P \cap Q^c$ ② $P \cup Q^c$
③ $P \cap Q$ ④ $P^c \cap Q$
⑤ $P^c \cap Q^c$

- 29** 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서의 두 조건 $p : x$ 는 4의 약수이다,
 $q : 2x - 17 \leq 0$ 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \subset X \subset Q$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는?

- ① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

30

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 - 6x + a - 1 < 0$ 이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하시오.

31

자연수 n 에 대하여 세 조건 p, q, r 가
 $p : n \geq k, q : 3n - 7 \geq 1, r : n^2 - 12n \geq 28$
일 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이고 p 는 r 이기 위한
필요조건이다. 자연수 k 의 개수를 구하시오.

32

다음은 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2 + 2n}$ 이 무리수임을 증명하는 과정이다.

$$\sqrt{n^2 + 2n} = \sqrt{(n+1)^2 - 1} \text{ 이고}$$

$\sqrt{(n+1)^2 - 1}$ 이 유리수라 가정하면

$$\sqrt{(n+1)^2 - 1} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수}) \text{로}$$

놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하면

$$(n+1)^2 - 1 = \frac{q^2}{p^2} \quad \dots \textcircled{①}$$

①의 좌변은 자연수이고, p 와 q 는 서로소이므로

$$p^2 = \boxed{\text{(가)}} \quad \dots \textcircled{②}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$(n+1)^2 - q^2 = 1, (\boxed{\text{(나)}})(n+1-q) = 1$$

$$\therefore \boxed{\text{(나)}} = 0, n-q = 0 \text{ 또는}$$

$$\boxed{\text{(나)}} = -2, n-q = -2$$

그런데 이것은 n, q 가 자연수라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{n^2 + 2n}$ 은 무리수이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
--	-----	-----	-----

①	1	$n+1+q$	$p-n$
---	---	---------	-------

②	1	$n-1+q$	$n+q$
---	---	---------	-------

③	1	$n+1+q$	$n+q$
---	---	---------	-------

④	2	$n-1+q$	$p-n$
---	---	---------	-------

⑤	2	$n+1+q$	$p-n$
---	---	---------	-------

33

양의 실수 x, y 에 대하여 $2x + y = 1$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은?

① $4\sqrt{6}$

④ $5+2\sqrt{5}$

② $6\sqrt{6}$

⑤ $8\sqrt{6}$

③ $5+2\sqrt{6}$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

34 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

35 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 이용하여 다음 그림과 같은 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이때 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m^2 ② 70m^2 ③ 80m^2
④ 90m^2 ⑤ 100m^2

36 [2016년 3월 고3 문과 6번 변형]
두 집합 $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 일대일함수를 $f(x)$ 라 하자. $f(2) = 3$ 일 때, $f(6) - f(4)$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

37 집합 $X = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b - 1 & (0 \leq x < 3) \\ -2x + 10 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$ 가 일대일대응일 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$
④ 1 ⑤ $\frac{10}{9}$

38 두 집합 $X = \{3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 다음 조건을 만족할 때, 함수 f 의 개수를 구하시오.

- (가) $f(5) = 5$
(나) $x_1 \in X, x_2 \in X$ 일 때,
 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

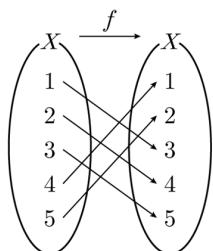
숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

39

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

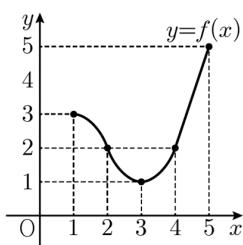
두 함수 $f: X \rightarrow X$, $g: X \rightarrow X$ 가 있다. 함수 f 가 다음 그림과 같이 정의되고 두 함수 f , g 가 $f \circ g = g \circ f$ 를 만족한다. $g(3) = 2$ 일 때, $g(5)$ 의 값은?



- ① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

40

$1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(a) = 2$ 를 만족시키는 모든 정수 a 의 값의 곱은?



- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

41

실수 전체의 집합에서 정의된

함수 $f(x) = \begin{cases} x+k & (x < 2) \\ 2x+5 & (x \geq 2) \end{cases}$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(9)$ 의 값을 m 이라 하자. 이때 m^2 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)

42

세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 2$, $h(x)$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h(4)$ 의 값은?

- ① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

43

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라

할 때, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는?

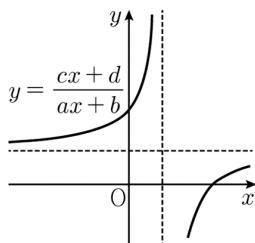
- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 44** 두 유리함수 $f(x) = \frac{x+7}{x-2}$, $g(x) = \frac{x-2}{3x+1}$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(5)$ 의 값을 구하시오.

- 45** 유리함수 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프가 지나는 사분면은? (단, $a < 0$ 이고, a, b, c, d 는 상수이다)



- ① 제1사분면
- ② 제1사분면, 제2사분면
- ③ 제1사분면, 제4사분면
- ④ 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면
- ⑤ 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

- 46** 무리함수 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대하여 $f(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수)

- 47** 함수 $y = 3 - \sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 제 1사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은?

- | | | |
|-----|-----|-----|
| ① 1 | ② 3 | ③ 5 |
| ④ 7 | ⑤ 9 | |

- 48** [2018년 11월 고1 28번/4점]
집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여
함수 $f : X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 7이다.
 (나) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 42$
 (다) 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X 의 어떤 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

49

[2021년 3월 고2 20번/4점]

세 집합

$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 f 는 일대일대응이다.
- (나) $x \in (X \cap Y)$ 이면 $g(x) - f(x) = 1$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. 함수 $g \circ f$ 의 치역은 Z 이다.
- ㄴ. $f^{-1}(5) \geq 2$
- ㄷ. $f(3) < g(2) < f(1)$ 이며 $f(4) + g(2) = 6$ 이다.

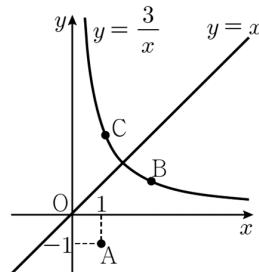
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

50

아래 그림과 같이 점 A(1, -1)과 곡선 $y = \frac{3}{x}$ 위의 두 점 B, C가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 점 B와 점 C는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
- (나) 삼각형 ABC의 넓이는 3이다.

점 B의 좌표를 (α, β) 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?
(단, $\alpha > \sqrt{3}$)



- ① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

51

[2019년 3월 고3 문과 17번/4점]

자연수 k 에 대하여 함수

$$f(x) = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right| \quad (x > 0)$$

의 그래프와 x 축의 교점을 A, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

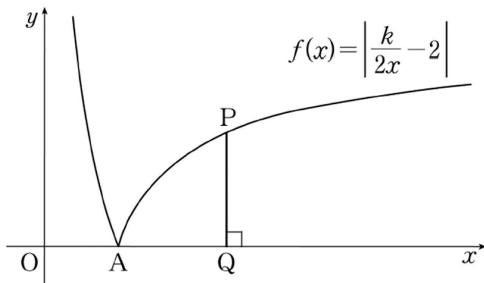
<보기>

ㄱ. 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ 이다.

ㄴ. 점 P의 x 좌표가 점 A의 x 좌표보다 클 때,

선분 PQ의 길이는 2보다 작다.

ㄷ. 점 P의 x 좌표가 k 일 때, 삼각형 AQP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 k 의 최솟값은 16이다.



① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

52

[2022년 3월 고2 19번/4점]

두 자연수 k, m ($k \geq m$)에 대하여

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } k \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } m \text{의 약수}\}$, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $B - A = \{4, 7\}$, $n(A \cup B^C) = 7$

(나) 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^C \cap B^C$ 의 모든 원소의 합은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

53

[2021년 11월 고1 20번/4점]

전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의

두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 집합 U의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은?

(가) $n(X) = 6$

(나) $A - X = B - X$

(다) $(X - A) \cap (X - B) \neq \emptyset$

① 26

② 27

③ 28

④ 29

⑤ 30

54

[2018년 3월 고2 문과 21번/4점]

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의

두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A \cup B) = 5$

(나) $n(A - B) = 2$

(다) $a \in A$ 이면 $\frac{a+1}{2} \in B$ 또는 $\frac{a+8}{2} \in B$ 이다.

집합 $B - A$ 에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 24

② 26

③ 28

④ 30

⑤ 32

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

55

[2019년 6월 고3 문과 21번/4점]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(ㄱ) f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 2) \\ -2x + 6 & (2 \leq x < 3) \\ 0 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = f(x) \text{이고, } f(x) = f(x-8) \text{이다.}$$

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + n & (x \neq 0) \\ n & (x = 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n 의 개수는?

- ① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

56

유리함수 $f(x) = \frac{5x-q}{2x+p}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$f^{-1}\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = f(x) \text{이다.}$$

(나) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 평행이동하면

$$y = -\frac{1}{x}$$
 의 그래프와 일치한다.

$p+q$ 의 값은? (단, p, q 는 상수이다.)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
56문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 4	02 ④	03 ②
04 ③	05 ①	06 23
07 ②	08 ②	09 ③
10 ④	11 ⑤	12 ②
13 ①	14 1	15 ⑤
16 1	$17 - \frac{5}{4}$	18 3
19 ①	20 ④	21 ④
22 ②	23 ④	24 3
25 60	26 ②	27 ①
28 ④	29 ④	30 10
31 12	32 ③	33 ③
34 ③	35 ④	36 ⑤
37 ③	38 9	39 ②
40 ④	41 25	42 ⑤
43 ③	$44 - \frac{6}{11}$	45 ③
46 -30	47 ④	48 7
49 ①	50 ②	51 ⑤
52 ⑤	53 ②	54 ②
55 ①	56 ⑤	



숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
56문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 4

해설 $a \neq a - 1$ 이므로 $a = 2a - 4$
 $\therefore a = 4$

02 정답 ④

해설 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$,
 $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 두 집합의 공통부분은
 $\{1, 2\}$ 이다.

03 정답 ②

해설 ① 역: 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = A$ 이면
 $B \subset A$ 이다. (참)
② 역: $x + y > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다. (거짓)
[반례] $x = -3, y = 5$ 이면
 $x + y = 2 > 0$ 이지만 $x < 0$
③ 역: x 가 9의 배수이면 x 는 3의 배수이다. (참)
④ 역: $x = y$ 이면 $xz = yz$ 이다. (참)
⑤ 역: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이면 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이다. (참)
따라서 역이 거짓인 명제는 ②이다.

04 정답 ③

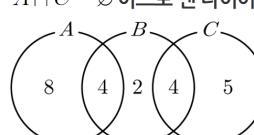
해설 $f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$ 이므로
 $2k - 3 = 2$
 $\therefore k = \frac{5}{2}$

05 정답 ①

해설 $y = 2\sqrt{-3x+6} + 1$
 $= 2\sqrt{-3(x-2)} + 1$
주어진 함수는 점 $(2, 1)$ 에서 시작하여
정의역이 $x \leq 2$ 이고 치역이 $y \geq 1$ 이므로 그레프는
①이다.

06 정답 23

해설 $n(B) = 10, n(C) = 9, n(B \cup C) = 15$ 이므로
 $n(B \cap C) = 10 + 9 - 15 = 4$
 $A \cap C = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램을 그려보면


$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 8 + 4 + 2 + 4 + 5 = 23$$

07 정답 ②

해설 고객 전체의 집합을 U , A 화장품을 구입해 본 고객의
집합을 A , B 화장품을 구입해 본 고객의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 60, n(A) = 42, n(B) = 36$
B 화장품만 구입해 본 고객의 집합은 $B - A$ 이고
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ … ⑦
 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때 $n(B - A)$ 는 최대가 된다.
 $A \cup B = U$ 일 때 $n(A \cap B)$ 가 최소이므로 $n(A \cap B)$ 의
최솟값을 m 이라 하면
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $60 = 42 + 36 - m$
 $\therefore m = 18$
따라서 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 18이므로
⑦에서 구하는 최댓값은 $36 - 18 = 18$

08 정답 ②

해설 주어진 명제가 참이 되기 위해서 그 명제의 대우
' $x - a = 0$ 이면 $2x^2 - 8x + 3 = 0$ 이다.'가 참이 되어야
한다.
 $x = a$ 일 때 $2x^2 - 8x + 3 = 0$ 을 만족하는 모든
상수 a 의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에
의하여
$$-\frac{-8}{2} = 4$$



숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

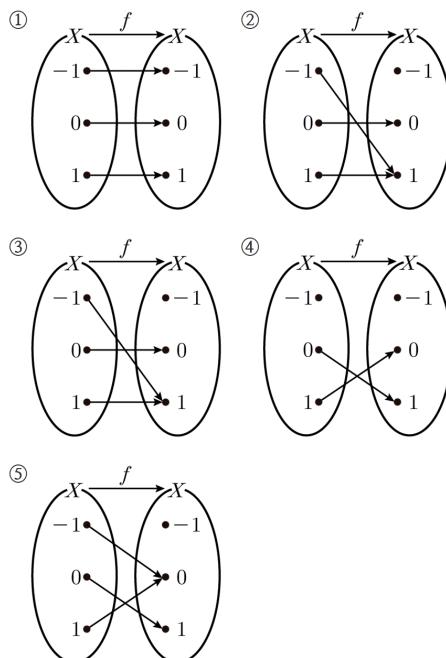
09 정답 ③

해설 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 $= (A - B) \cup (B - A)$

따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서
 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 가 성립하려면
 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야하는데
 $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로소이므로 $A - B = \emptyset$
 $\therefore A \subset B$

10 정답 ④

해설 주어진 집합 X 에서 집합 X 로의 대응을 그림으로 나타낸 후, 집합 X 의 각 원소에 집합 X 의 원소가 오직 하나씩 대응하지 않는 것을 찾는다.



- ①, ②, ③, ⑤ 집합 X 의 각 원소에 집합 X 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
 ④ 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
 따라서 함수가 아닌 것은 ④이다.

11 정답 ⑤

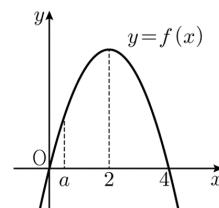
해설 정의역은 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로
 $f(1) = g(1), f(2) = g(2)$ 가 성립한다.
 $f(1) = g(1)$ 에서
 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$
 $\therefore a - b = -1$... ①
 $f(2) = g(2)$ 에서
 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$
 $\therefore a - 2b = -5$... ②
 ①, ②를 연립하여 풀면
 $a = 3, b = 4$
 $\therefore a + b = 3 + 4 = 7$

12 정답 ②

해설 g 는 항등함수이므로
 $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3$
 $\therefore f(1) = g(1) = h(1) = 1$
 이때, h 는 상수함수이고 $h(1) = 1$ 이므로
 $h(2) = 1, h(3) = 1$
 $\therefore f(2) = h(3) + g(2) = 1 + 2 = 3$
 한편, f 는 일대일 대응이므로 $f(3) = 2$
 $\therefore f(3) + g(2) + h(1) = 2 + 2 + 1 = 5$

13 정답 ①

해설 $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 이므로
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 는 일대일대응이어야 하므로 $a \leq 2$ 이다.
 또, 치역과 공역이 같아야 하므로

$$\begin{aligned}f(a) &= a \text{에서 } -a^2 + 4a = a \\a^2 - 3a &= 0, a(a-3) = 0 \\ \therefore a &= 0 (\because a \leq 2)\end{aligned}$$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

14 정답 1

해설 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 2,

y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{x-2} - 1$$

이 함수의 그래프가 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{1}{k-2} - 1 \quad \therefore k = 1$$

15 정답 ⑤

$$\text{해설} \quad y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{이므로}$$

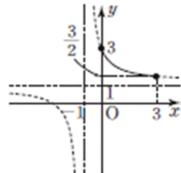
함수 $y = \frac{x+3}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1만큼
평행이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = \frac{x+3}{x+1}$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로 $x = 0$ 일 때 최댓값 3,

$x = 3$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.



따라서 구하는 합은 $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ 이다.

16 정답 1

해설 점근선이 $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$ 인 유리함수의 꼴은

$$y = \frac{k}{2x-1} - \frac{1}{3} \quad (k \neq 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = k - \frac{1}{3}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

$k = \frac{4}{3}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = \frac{\frac{4}{3}}{2x-1} - \frac{1}{3} = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

따라서 $a = -2$, $b = 6$, $c = -3$ 이므로

$$a+b+c = 1$$

17 정답 $-\frac{5}{4}$

$$\text{해설} \quad y = \frac{ax+3}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab+3}{x+b} = \frac{-ab+3}{x+b} + a$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선
 $x = -b$, $y = a$ 의 교점 $(-b, a)$ 를 지나고 기울기가 1
또는 -1 인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 점 $(-b, a)$ 가 두 직선 $y = x+2$, $y = -x-3$ 위의
점이므로

$$a = -b+2, a = b-3$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore ab = -\frac{5}{4}$$

18 정답 3

$$\text{해설} \quad \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} + \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = \frac{3-x+3+x}{\sqrt{(3+x)(3-x)}} = \frac{6}{\sqrt{9-x^2}}$$

$x = \sqrt{5}$ 를 대입하면

$$\frac{6}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{6}{\sqrt{9-5}} = \frac{6}{2} = 3$$

19 정답 ①

해설 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼

평행 이동한 함수의 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-2)}$$

이것을 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 함수의
그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$

이 때, 이 그래프가 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{-3a}, -3a = 9$$

$$\therefore a = -3$$

20 정답 ④

해설 $g^{-1}(2) = a$ 라 하면 $g(a) = 2$ 이므로

$$\sqrt{3a+4} = 2, 3a+4 = 4$$

$$\therefore a = 0$$

또, $f^{-1}(0) = b$ 라 하면 $f(b) = 0$ 이므로

$$\sqrt{2b-3} = 0, \sqrt{2b-3} = 3$$

$$2b-3 = 9 \quad \therefore b = 6$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{-1}(2)) = f^{-1}(0) = 6$$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

21 정답 ④

해설 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{ay+b}$

이 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로

$$1 = \sqrt{2a+b}$$

$$\therefore 2a+b=1$$

22 정답 ②

해설 부분집합의 개수 추론하기

(i) $6 \in X$ 인 경우 집합 X 의 개수는

$$2^4 - 1 = 15$$

(ii) $6 \notin X$ 인 경우 집합 X 는 3, 4를 반드시 포함해야

하므로 집합 X 의 개수는

$$2^{4-2} = 4$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수는 19이다.

23 정답 ④

해설 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$,

$\{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} = A - B$ 이므로

$$A - B = \{3, 7\}$$

$$\therefore 3 + 7 = 10$$

24 정답 3

해설 (i) $a+1=0$, 즉 $a=-1$ 인 경우

$$A = \{0, 1, 3\}, B = \{0, 1, 2\} \text{이므로}$$

$$(A-B) \cup (B-A) = \{2, 3\}$$

(ii) $2a^2+1=0$ 인 경우를 만족하는 a 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=-1$ 이고, $A = \{0, 1, 3\}$ 이므로

$$b=4$$

$$\therefore a+b=3$$

25 정답 60

해설 $B - A = \{4, 9\}$ 이므로 4, 9는 집합 B 의 원소이다.

(i) $a+3=4$, 즉 $a=1$ 일 때

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-6, 3, 4\} \text{이므로}$$

$$B - A = \{-6\}$$

(ii) $a+3=9$ 즉, $a=6$ 일 때

$$A = \{1, 3, 19, 37\}, B = \{3, 4, 9\} \text{이므로}$$

$$B - A = \{4, 9\}$$

(i), (ii)에 의하여 $a=6$, $A = \{1, 3, 19, 37\}$ 이므로

집합 A 의 모든 원소의 합은

$$1+3+19+37=60$$

26 정답 ②

해설 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\} = \{x | (x-2)(x+1) > 0\}$

$$\therefore A = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 2\}$$

$B = \{x | x^2 - 4x - 5 > 0\} = \{x | (x-5)(x+1) > 0\}$

$$\therefore B = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 5\}$$

$$B \cup C = A \text{이고}$$

$$B \cap C = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 5\} \text{이므로}$$

$$C = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 2\}$$

$$= \{x | (x+3)(x-2) > 0\} = \{x | x^2 + x - 6 > 0\}$$

따라서 $a=1, b=-6$ 이므로 $a-b=7$

27 정답 ①

해설 ㄱ. $|a| + |b| = 0$ 이면 $a=0, b=0$ 이므로 $ab=0$ 이다.

그런데 $ab=0$ 이면 $a=0$ 또는 $b=0$ 이므로

$ab=0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이 아닐 수 있다. (거짓)

ㄴ. $c \leq 0$ 이면 $a < b$ 일 때 $ac \geq bc$ 이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $a=-1, b=0$ (거짓)

ㄹ. [반례] $a=\sqrt{3}, b=-1$ (거짓)

ㅁ. [반례] $a=-1, b=1$ (거짓)

따라서 주어진 명제 중 참인 명제의 개수는 0이다.

28 정답 ④

해설 ' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 ' q 이면 p

이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \emptyset$

임을 보이면 된다.

따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

29 정답 ④

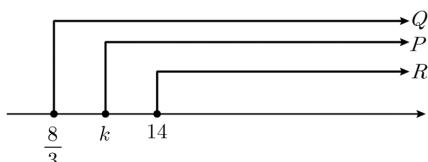
해설 조건의 진리집합 이해하기
전체집합 U 에서
 $P = \{1, 2, 4\}$,
 $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 $P \subset X \subset Q$ 이므로 집합 X 는 집합 Q 의
부분집합 중 1, 2, 4를 원소로 가지는 집합이다.
따라서, 집합 X 의 개수는 $2^{8-3} = 32$ (개)이다.

30 정답 10

해설 주어진 명제의 부정
'모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 6x + a - 1 \geq 0$ 이다.'가 참이
되어야 하므로 이차방정식 $x^2 - 6x + a - 1 = 0$ 의
판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-3)^2 - (a-1) \leq 0$
 $\therefore a \geq 10$
따라서 구하는 실수 a 의 최솟값은 10이다.

31 정답 12

해설 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면
 $q : 3n - 7 \geq 1$ 에서 $n \geq \frac{8}{3}$
 $\therefore Q = \{3, 4, 5, \dots\}$
 $r : n^2 - 12n \geq 28$ 에서 $n^2 - 12n - 28 \geq 0$
 $(n-14)(n+2) \geq 0$ 에서 $n \leq -2$ 또는 $n \geq 14$
 $\therefore R = \{14, 15, 16, \dots\}$
이때 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
 p 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $R \subset P$
즉, $R \subset P \subset Q$ $\dots \textcircled{1}$
 $P = \{n | n \geq k, n \text{은 자연수}\}$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 k 의 값은 $k = 3, 4, 5, \dots, 14$



따라서 자연수 k 의 개수는 12

32 정답 ③

해설 $\sqrt{n^2 + 2n} = \sqrt{(n+1)^2 - 1}$ 이고
 $\sqrt{(n+1)^2 - 1}$ 이 유리수라 가정하면
 $\sqrt{(n+1)^2 - 1} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)로 놓을
수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면
 $(n+1)^2 - 1 = \frac{q^2}{p^2} \dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 좌변은 자연수이고, p 와 q 는 서로소이므로
 $p^2 = 1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $(n+1)^2 - 1 = q^2$
 $(n+1)^2 - q^2 = 1, (|n+1+q|)(n+1-q) = 1$
따라서 $n+1+q = 1, n+1-q = 1$ 또는
 $n+1+q = -1, n+1-q = -1$
즉, $|n+q| = 0, n-q = 0$ 또는
 $|n+q| = -2, n-q = -2$
그런데 이것은 n, q 가 자연수라는 가정에 모순이므로
 $\sqrt{n^2 + 2n}$ 은 무리수이다.

33 정답 ③

해설 $2x+y=1$ 이므로 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은
 $(2x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right)$ 의 최솟값과 같다.
따라서 이 식을 전개하면
 $2 + \frac{6x}{y} + \frac{y}{x} + 3 = 5 + \frac{6x}{y} + \frac{y}{x}$ 에서
 $\frac{6x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{6x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2\sqrt{6}$ 이다.
따라서 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은
 $5 + 2\sqrt{6}$

34 정답 ③

해설 $\frac{D}{4} = 1-k < 0$ 이므로 $k-1 > 0$
 $f(k) = 2 + (k-1) + \frac{1}{k-1}$
 $\geq 2 + 2\sqrt{(k-1)\frac{1}{k-1}} = 4$
따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

35 정답 ④

해설 전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

이때 a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$40ab \leq 60^2$$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = ab \leq 90$$

따라서 넓이의 최댓값은 90m^2 이다.

36 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)$ 가 일대일함수이고 $f(2) = 3$ 이므로

3이 아닌 집합 Y 의 서로 다른 세 원소 a, b, c 에 대하여

$$f(4) = a, f(6) = b, f(8) = c$$
로 놓을 수 있다.

$f(6) - f(4)$ 의 최댓값은 $b - a$ 의 최댓값과 같다.

그런데 $b = 5, a = 0$ 일 때 $b - a$ 가 최대이다.

따라서 $f(6) - f(4)$ 의 최댓값은 5이다.

37 정답 ③

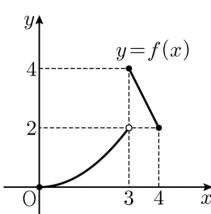
해설 집합 $\{x | 3 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수 $y = -2x + 10$ 의 치역은 $\{y | 2 \leq y \leq 4\}$ 이므로

함수 f 가 일대일대응이 되기 위해서는

집합 $\{x | 0 \leq x < 3\}$ 에서 정의된 함수

$$y = ax^2 + b - 1$$
의 치역이 $\{y | 0 \leq y < 2\}$ 이어야 하고

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$ 를 $g(x) = ax^2 + b - 1$ 이라 할 때

$$g(0) = 0, g(3) = 2$$

이때 $g(0) = 0$ 에서 $b - 1 = 0$

$$\therefore b = 1$$

$$\text{또, } g(3) = 2 \text{에서 } 9a + b - 1 = 2$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x^2 & (0 \leq x < 3) \\ -2x + 10 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = \frac{2}{9} \cdot 2^2 = \frac{8}{9}$$

38 정답 9

해설 $f(5) = 5$ 이고, $f(3) < f(5) = 5$ 이므로

집합 Y 의 원소 1, 2, 4 중 1개를 뽑아 집합 X 의 원소 3에 대응시키면 된다.

따라서 그 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

또, $f(5) = 5 < f(7) < f(9)$ 이므로

집합 Y 의 원소 6, 8, 9 중에서 2개를 뽑아 작은 것부터

차례대로 집합 X 의 원소 7, 9에 대응시키면 되므로

그 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$3 \cdot 3 = 9$$

39 정답 ②

해설 $f \circ g = g \circ f$ 이고 $g(3) = 20$ 이므로

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 4$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5)$$

$$\therefore g(5) = 4$$

40 정답 ④

해설 $f(a) = b$ 라 하면

$$(f \circ f)(a) = f(f(a))$$

$$= f(b) = 2$$

이때 $f(b) = 2$ 에서 $b = 2$ 또는 $b = 4$ 이므로

$$f(a) = 2 \text{ 또는 } f(a) = 4$$

또, 주어진 그래프에서 $f(a) = 4$ 를 만족시키는 정수 a 의 값이 없으므로 $f(a) = 2$ 이다.

따라서 $f(a) = 2$ 에서 $a = 2$ 또는 $a = 4$ 이므로

구하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$2 \cdot 4 = 8$$

41 정답 25

해설 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

따라서 $2+k = 4+5$ 이므로 $k = 7$

$$x < 2 \text{ 일 때, } f(x) = x+7 < 9$$

$$x \geq 2 \text{ 일 때, } f(x) = 2x+5 \geq 9$$

$$f^{-1}(9) = a \text{라 하면 } f(a) = 9 \text{이므로}$$

$$2a+5 = 9 \quad \therefore a = 2$$

$$f^{-1}(2) = b \text{라 하면 } f(b) = 2 \text{이므로}$$

$$b+7 = 2 \quad \therefore b = -5$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(9) = f^{-1}(f^{-1}(9))$$

$$= f^{-1}(2) = -5 \text{이므로}$$

$$m = -5 \text{이고 } m^2 = 25$$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

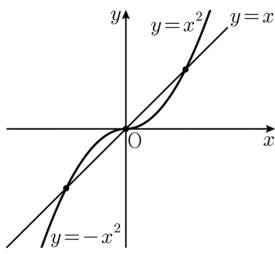
집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

42 정답 ⑤

해설 $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 에서
 $(f \circ g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = (f \circ g \circ f)(x)$
 $\therefore h(x) = (f \circ g \circ f)(x)$
 따라서 $h(4) = f(g(f(4))) = f(g(9)) = f(7) = 15$

43 정답 ③

해설 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의
 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 개수와
 같다. 따라서 다음 그림에서 교점의 개수는 3이다.



44 정답 $-\frac{6}{11}$

해설 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(5) = (g^{-1} \circ f)(5)$
 $= g^{-1}(f(5))$
 $f(5) = \frac{5+7}{5-2} = 4$ 이므로 $g^{-1}(f(5)) = g^{-1}(4)$
 $g^{-1}(4) = k$ 라 하면 $g(k) = 4$
 $\frac{k-2}{3k+1} = 4$ 에서 $k-2 = 12k+4$
 $\therefore k = -\frac{6}{11}$

45 정답 ③

해설 $y = \frac{cx+d}{ax+b} = \frac{\frac{c}{a}x + \frac{d}{a}}{x + \frac{b}{a}}$
 $= \frac{\frac{c}{a}\left(x + \frac{b}{a}\right) + \frac{d}{a} - \frac{bc}{a^2}}{x + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{d}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{c}{a}}{x + \frac{b}{a}}$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{a}, y = \frac{c}{a} \text{이다.}$$

또한, 그래프와 y 축의 교점의 y 좌표는 $x = 0$ 일 때의
 y 의 값이므로 $\frac{d}{b}$ 이다.

그런데 주어진 그래프에서 두 점근선의 교점의
 x 좌표는 양수, y 좌표는 양수이고, 그래프와 y 축의
 교점의 y 좌표는 양수이므로

$$-\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{d}{b} > 0$$

이때 $a < 0$ 이므로

$$b > 0, c < 0, d > 0$$

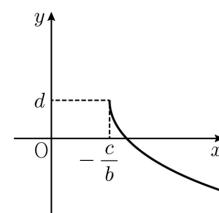
한편, $y = a\sqrt{bx+c} + d = a\sqrt{b\left(x + \frac{c}{b}\right)} + d$ 의

그래프는 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼
 평행이동한 것이다.

이때 $-\frac{c}{b} > 0, d > 0$ 이므로 무리함수

$y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 무리함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프는
 제1사분면, 제4사분면을 지난다.

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

46 정답 -30

해설 $f(1)=4$ 이므로 $\sqrt{a+b}=4$
 $\therefore a+b=16 \quad \cdots \textcircled{\text{①}}$
 $f^{-1}(3)=2$ 에서 $f(2)=3$ 이므로
 $\sqrt{2a+b}=3$
 $\therefore 2a+b=9 \quad \cdots \textcircled{\text{②}}$
①, ②를 연립하여 풀면
 $a = -7, b = 23$
 $\therefore a-b = -30$

47 정답 ④

해설 $y = 3 - \sqrt{1-x} = -\sqrt{-(x-1)} + 3$
이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한
것이고 y절편은 2이다.
또, 직선 $y = -x + k$ 는 기울기가 -1 이고 y절편이
k이다.
(i) 직선 $y = -x + k$ 가 점 $(1, 3)$ 을 지날 때,
 $3 = -1 + k$
 $\therefore k = 4$
(ii) 직선 $y = -x + k$ 가 점 $(0, 2)$ 를 지날 때,
 $2 = 0 + k$
 $\therefore k = 2$
(i), (ii)에 의하여 직선 $y = -x + k$ 가
 $y = 3 - \sqrt{1-x}$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나려면
 $2 < k \leq 4$
따라서 정수 k 는 3, 4이므로 구하는 합은
 $3+4=7$

48 정답 7

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기
조건 (가)에서 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 7이므로
집합 X 의 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여
 $f(a)=f(b)=n$ 을 만족하는 집합 X 의 원소 n 은
한 개 있다. 이때 집합 X 의 원소 중
합수값으로 사용되지 않은 원소를 m 이라 하자.
 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ 이므로
조건 (나)에서
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$
 $+f(8)=36+n-m=42$
 $\therefore n-m=6$
집합 X 의 원소 n, m 에 대하여 $n-m=6$ 인 경우는
다음 두 가지이다.
(i) $n=8, m=2$ 일 때
함수 f 의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로
조건 (다)를 만족시키지 않는다.
(ii) $n=7, m=1$ 일 때
함수 f 의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로
조건 (다)를 만족시킨다.
따라서 $n=7$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

49 정답 ①

해설 일대일대응과 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 함수 f 는 일대일대응이고

집합 $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$ 의 모든 원소 x 에 대하여 $g(x) - f(x) = 1$ 이므로 $f(x) = 5$ 인 x 가 존재하면 $g(x) = 6$ 이 되어 모순이다.

따라서 집합 $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$ 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq 4$ 이고

함수 f 는 일대일대응이므로

$\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$

이때 $g(x) = f(x) + 1$ 에서

$\{g(2), g(3), g(4)\} = \{3, 4, 5\}$

따라서 함수 g 의 치역은 Z 이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$ 이고

함수 f 는 일대일대응이므로

$f(1) = 5$

$\therefore f^{-1}(5) = 1$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $f(1) = 5$ 이므로

$f(3) < g(2) < f(1)$ 에서

$f(3) < g(2) < 5 \quad \dots \odot$

(i) $g(2) = 3$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 2$

함수 f 는 일대일대응이므로

$f(3) = 3$ 또는 $f(3) = 4$ 가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2) = 4$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 3 \quad \dots \odot$

㉠, ㉡에서 $f(3) < 3$ 이므로

$f(3) = 2$

함수 f 는 일대일대응이므로

$f(4) = 4$

$\therefore f(4) + g(2) = 4 + 4 = 8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

50 정답 ②

해설 조건 (가)에 의하여 점 $B(\alpha, \beta)$ 와 점 C 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $C(\beta, \alpha)$ 이고, 직선 BC 는 점 $B(\alpha, \beta)$ 를 지나고 기울기가 -1 이므로

직선의 방정식은 $x + y - \alpha - \beta = 0$ 이다.

한편, 점 $A(1, -1)$ 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{BC} = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}(\alpha - \beta)$$

$$\overline{AH} = \frac{|1 - 1 - \alpha - \beta|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}$$

조건 (나)에 의하여 삼각형 ABC 의 넓이는 3이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}(\alpha - \beta) \cdot \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} = 3 \text{에서}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 6$$

또한, 점 B 는 곡선 $y = \frac{3}{x}$ 위의 점이므로 $\beta = \frac{3}{\alpha}$ 즉, $\alpha\beta = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2)^2 &= (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 \\ &= 6^2 + 4 \cdot 3^2 = 72 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

51 정답 ⑤

해설 유리함수의 그래프의 여러 가지 성질을 추론한다.

ㄱ. 함수 $f(x) = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right|$ 의 그래프와 x 축의

교점의 x 좌표는 $0 = \left| \frac{k}{2x} - 2 \right|$ 에서 $\frac{k}{2x} = 2$

즉, $x = \frac{k}{4}$ 이므로 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ 이다. (참)

ㄴ. 자연수 k 에 대하여 점 P 의 x 좌표가

점 A 의 x 좌표보다 클 때, 점 P 는

함수 $y = 2 - \frac{k}{2x} \left(x > \frac{k}{4} \right)$ 의 그래프 위의 점이다.

직선 $y = 2$ 는 함수 $y = 2 - \frac{k}{2x}$ 의 그래프의

한 점근선이므로 점 P 의 y 좌표는 2보다 작다.

따라서 선분 PQ 의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P 의 x 좌표가 k 일 때, 점 P 의 좌표는

$\left(k, \frac{3}{2}\right)$ 이므로 삼각형 AQP 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(k - \frac{k}{4}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{9k}{16}$ 이다.

9와 16은 서로소이므로 $\frac{9k}{16}$ 가 자연수가 되기 위해서

자연수 k 는 16의 배수가 되어야 한다.

그러므로 자연수 k 의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

52 정답 ⑤

해설 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

드모르간의 법칙에 의하여

$$A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = (B - A)^C \text{ 이므로}$$

조건 (가)에서

$$n(A \cup B^C) = n((B - A)^C) = 7$$

$$B - A = \{4, 7\} \text{에서 } n(B - A) = 2$$

$$(B - A) \cup (B - A)^C = U,$$

$$(B - A) \cap (B - A)^C = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$n(U) = n(B - A) + n((B - A)^C)$$

$$= n(B - A) + n(A \cup B^C)$$

$$= 2 + 7 = 9$$

그러므로 $k = 9$ 이고 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $B - A = \{4, 7\}$ 이고 조건 (나)에서

집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의 합이

서로 같으므로 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은

집합 $B - A = \{4, 7\}$ 의 모든 원소의 합인 11이다.

따라서 m 은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고,

모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로

m 이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m = 6$ 일 때

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 6\}$ 이다.

이때 $A - B = \{2, 3, 6\}$ 이면 집합 $A - B$ 의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m = 9$ 일 때

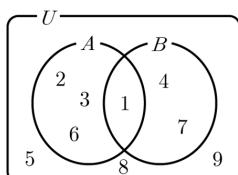
집합 A 는 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

이때 집합 $A - B$ 의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m = 6$ 이고 이때 $B = \{1, 4, 7\}$ 이다.

$$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$



$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5, 8, 9\} \text{ 이므로}$$

집합 $A^C \cap B^C$ 의 모든 원소의 합은

$$5 + 8 + 9 = 22$$

53 정답 ②

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$A - X \subset A, B - X \subset B$ 이고

조건 (나)에서 $A - X = B - X$ 이므로

$$A - X = B - X \subset A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

$$A - X = \{3, 4, 5\} \text{에서 } \{1, 2\} \subset X \text{이고}$$

$$B - X = \{3, 4, 5\} \text{에서 } \{6, 7\} \subset X \text{이므로}$$

$$\{1, 2, 6, 7\} \subset X$$

… ①

조건 (다)에서

$$(X - A) \cap (X - B) = (X \cap A^C) \cap (X \cap B^C)$$

$$= X \cap (A^C \cap B^C)$$

$$= X \cap (A \cup B)^C$$

$$= X \cap \{8, 9, 10\} \neq \emptyset$$

… ②

조건 (가)에서 $n(X) = 6$ 이고 ①에 의하여

$$n(X \cap \{3, 4, 5, 8, 9, 10\}) = 2$$

… ③

②에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는

집합 X 에 속해야 한다.

집합 X 의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8 \in X$ 이고

③에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는

집합 X 에 속해야 하므로

$$3 \in X$$

따라서 $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ 일 때 모든 원소의 합이

최소이고 집합 X 의 모든 원소의 합의 최솟값은

$$1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 = 27$$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

54 정답 ②

해설 조건을 만족시키는 집합에 속하는 원소의 합의 최댓값과 최솟값을 추론한다.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 원소 중에서

조건 (다)를 만족시키는 $a \in A, b \in B$ 를

순서쌍 (a, b) 로 나타내면 다음과 같다.

$(1, 1), (2, 5), (3, 2), (4, 6),$

$(5, 3), (6, 7), (7, 4), (8, 8)$

따라서 1과 8은 집합 $A - B$ 의 원소가 아니다.

$p \in A - B$ ($p \neq 1, p \neq 8$)이면

$(p, q) \in$

$\{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$ 인

q 가 집합 B 에 존재한다.

$q \in B - A$ 또는 $q \in A \cap B$

그런데 $q \in A \cap B$ 인 경우에는

$(q, r) \in$

$\{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$ 인

r 가 집합 $B - A$ 에 존재하게 된다.

그러므로 $r \neq 1, r \neq 8$

한편 $p \neq 1, p \neq 8$ 이므로

1과 8은 집합 $B - A$ 의 원소가 될 수 있다.

따라서 $n(A - B) \leq n(B - A)$

$n(A - B) = 2, n(A \cup B) = 5$ 이므로

$n(B - A) = 2$ 또는 $n(B - A) = 3$

(i) 집합 $B - A$ 에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 구하기 위해 $n(B - A) = 3$ 인 경우를 생각하자.

8은 집합 $B - A$ 의 원소가 될 수 있으므로

$8 \in B - A$,

$n(A - B) = 2, n(B - A) = 3$ 이고

$8 \in B - A$ 이므로 7이 집합 $B - A$ 의 원소가

되려면 $6 \in A - B$ 이다. 그러므로 $7 \in B - A$ 이면

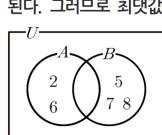
$6 \not\in B - A$

5가 집합 $B - A$ 의 원소가 되려면 $2 \in A - B$ 이다.

$A - B = \{2, 6\}, B - A = \{5, 7, 8\}$ 일 때,

집합 $B - A$ 에 속하는 모든 원소의 합이 최대가

된다. 그러므로 최댓값은 $5 + 7 + 8 = 20$



(ii) 집합 $B - A$ 에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값을 구하기 위해 $n(B - A) = 2$ 인 경우를 생각하자.

$n(A - B) = 2, n(B - A) = 20$ 이므로 $1 \in B - A$

2가 집합 $B - A$ 의 원소가 되려면 $3 \in A$

그러므로 $2 \in B - A$ 이면 $3 \in B - A$

4가 집합 $B - A$ 의 원소가 되려면 $7 \in A$ 이다.

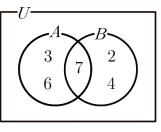
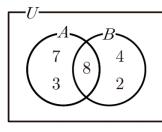
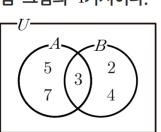
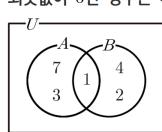
$B - A = \{2, 4\}$ 일 때, 집합 $B - A$ 에 속하는

모든 원소의 합이 최소이다.

그러므로 최솟값은 $2 + 4 = 6$

실제로 집합 $B - A$ 에 속하는 모든 원소의 합의

최솟값이 6인 경우는 다음 그림의 4가지이다.



따라서 $M = 20, m = 6$ 이므로

$M + m = 26$

55 정답 ①

해설 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = f(x)$ 이므로

$-4 \leq x \leq 0$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

$0 \leq x \leq 4$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에

대하여 대칭이동시킨 그래프와 같다.. 또한 모든 실수 x 에

대하여 $f(x) = f(x - 8)$ 이므로 $4 \leq x \leq 12$ 에서의

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서의 함수

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 8만큼

평행이동시킨 그래프와 같다. 이와 마찬가지로 정수 k 에

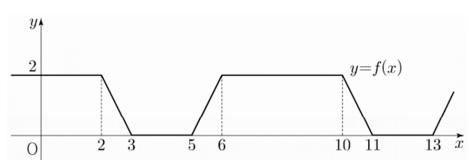
대하여

$-4 + 8k \leq x \leq 4 + 8k$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 $-4 \leq x \leq 4$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $8k$ 만큼 평행이동시킨 그래프와

같다.



한편, $x > 0$ 에서 $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ 이고,

$x < 0$ 에서 $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

$$g(x) = \begin{cases} n+1 & (x > 0) \\ n & (x=0) \\ n-1 & (x < 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(x)$ 의 치역은 $\{n-1, n, n+1\}$

실수 전체의 집합에서 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수이려면 $f(n-1) = f(n) = f(n+1)$ 을 만족시켜야 한다.

즉, 연속인 세 정수에 대하여 함수 f 의 값이 같은 경우는 다음과 같다.

(i) $(f \circ g)(x) = 2$ 일 때,

$-2 + 8k \leq n - 1, n + 1 \leq 2 + 8k$ (k 는 정수)

즉, $8k - 1 \leq n \leq 8k + 1$ (k 는 정수)

$k < 0$ 이면 $8k + 1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

$k = 0$ 이면 $-1 \leq n \leq 1$ 이므로 조건을 만족시키는

자연수 n 은 1에서 $k \geq \frac{61}{8}$ 이므로

$1 \leq k \leq 7$ 이면 $8k - 1 \leq n \leq 8k + 1$

(k 는 정수)이므로 조건을 만족시키는 60 이하의

자연수 n 은

$8k - 1, 8k, 8k + 1$

$k > 8$ 이면 $8k - 1 > 63$ 이므로 조건을 만족시키는

60 이하의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $(f \circ g)(x) = 0$ 일 때,

$3 + 8t \leq n - 1$ 이고 $n + 1 \leq 5 + 8t$ (t 는 정수)

즉, $4 + 8t \leq n \leq 4 + 8t$ 에서

$n = 4 + 8t$ (t 는 정수)

$1 \leq 4 + 8t \leq 60$ 에서 $-\frac{3}{8} \leq t \leq 7$ 이므로

$0 \leq t \leq 7$

즉, 조건을 만족시키는 60 이하의 자연수 n 의 개수는

$$(1 + 3 \times 7) + 8 = 30$$

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

56 정답 ⑤

$$\begin{aligned}\text{해설 } f(x) &= \frac{5x-q}{2x+p} \\ &= \frac{\frac{5}{2}(2x+p)-\frac{5}{2}p-q}{2x+p} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{\frac{5}{2}p+q}{2x+p}\end{aligned}$$

에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x = -\frac{p}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{p}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

이때 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점은

점 $\left(-\frac{p}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한

점이므로 그 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ 이다.

조건 (가)에서 함수 $y = f^{-1}\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}$ 의 그래프는

함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

함수 $y = f^{-1}\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}$ 의 그래프의 두 점근선의

교점의 좌표는 $\left(0, -\frac{p}{2} + \frac{5}{2}\right)$ 이다.

점 $\left(-\frac{p}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 과 점 $\left(0, -\frac{p}{2} + \frac{5}{2}\right)$ 가 같으므로

$p = 0$

한편, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{\frac{5}{2}p+q}{2x}$ 의

그래프를 평행이동한 그래프와 일치하고 조건 (나)에서

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 평행이동하면

함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프와 일치하므로

$$\frac{5}{2}p+q = q = 2$$

$$\therefore p+q = 0+2 = 2$$