마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 보기 중 절대부등식인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, x, y는 실수이다.)

<보기>

ㄱ. $x^2 \geq 0$　　ㄴ. $x^3 \geq 0$

ㄷ. $|x|+|y|>0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

02 두 실수 a, b에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a^2+3b^2 \geq 2ab$

ㄴ. $\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \leq \dfrac{a-b}{2}$

ㄷ. $|a-b| \geq ||a|-|b||$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 다음은 a, b, c가 실수일 때, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$를 증명하는 과정이다.

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$를 정리하면
$\boxed{\text{(가)}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\boxed{\text{(나)}}0$
따라서 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \geq 0$이므로
$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{2}$	$\leq$
②	$\frac{1}{2}$	$\geq$
③	2	$\leq$
④	2	$\geq$
⑤	2	$=$

04 다음은 실수 a, b에 대하여
부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
> $=2(|ab|-ab) \geq 0$
> 따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$이므로
> $|a|+|b| \geq |a+b|$

위의 증명과정에 사용되지 <u>않은</u> 성질은?

① $|a| \geq a$
② $a \geq b$, $b \geq c$이면 $a \geq c$
③ $|a|^2=a^2$
④ $a-b \geq 0$이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$이면 $a \geq b$

05 $a \geq 0$, $b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞을 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

> 증명
>
> $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\boxed{(나)}^2}{2}$ 이므로 부등식
> $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다. 이때
> 등호는 $\boxed{(다)}$ 일 때, 성립한다.

① $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
② $\geq$, $a-b$, $a=b=0$
③ $>$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
④ $>$, $a-b$, $a=b$
⑤ $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a \geq b$

06 $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때,
$\left(\dfrac{3a}{2b}+\dfrac{3b}{2c}\right)\left(\dfrac{3b}{2c}+\dfrac{3c}{2a}\right)\left(\dfrac{3c}{2a}+\dfrac{3a}{2b}\right)$의 최솟값은?

① 25　② 27　③ 29
④ 31　⑤ 33

07 a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

08 $x>0$, $y>0$, $z>0$일 때,
$\frac{3y+3z}{2x}+\frac{3z+3x}{2y}+\frac{3x+3y}{2z}$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

09 두 양수 a, b에 대하여 $2a+27b+\frac{8}{a}+\frac{3}{b}$의 최솟값은?

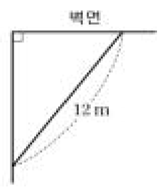
① 10 ② 14 ③ 18
④ 22 ⑤ 26

10 $a>0$, $b>0$이고 $x=2a+\frac{5}{b}$, $y=2b+\frac{5}{a}$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 α, 그때의 a, b의 값을 각각 β, γ라 하자. 이때 $\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 180 ② 190 ③ 200
④ 210 ⑤ 220

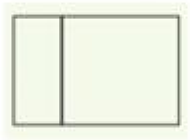
11 실수 x, y에 대하여
$2x^2+3y^2-2y+\frac{36}{2x^2+2y^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

12 다음 그림과 같이 수직으로 만나는 두 벽면에 길이가 12 m인 철망을 이용하여 직각삼각형 모양의 울타리를 만들려고 한다. 이때, 울타리의 넓이의 최댓값은?



① 28 m^2 ② 30 m^2
③ 32 m^2 ④ 34 m^2
⑤ 36 m^2

13 다음 그림과 같이 길이가 $36\ \mathrm{m}$인 철망으로 두 개의 작은 직사각형으로 이루어진 구역을 만들려고 한다. 구역의 전체 넓이가 최대가 되도록 할 때, 넓이의 최댓값은? (단, 철망의 굵기는 무시한다.)



① $48\ \mathrm{m}^2$　② $54\ \mathrm{m}^2$　③ $60\ \mathrm{m}^2$　④ $64\ \mathrm{m}^2$　⑤ $72\ \mathrm{m}^2$

14 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}=\sqrt{29}$ 일 때, a^2+b^2의 최솟값은?

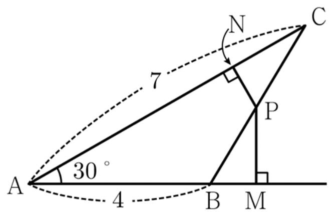
① 81　② 100　③ 121　④ 144　⑤ 169

15 두 양수 x, y에 대하여 $x^2+27y^2=108$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값을 구하시오.

16 대각선의 길이가 8인 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 M이라 하고, 그때의 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 k라 할 때, $\dfrac{M}{k}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

17 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=7$, $\angle CAB=30^\circ$ 인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에서
두 직선 AB, AC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$ 일 때,
$p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ①	02 ③	03 ②
04 ②	05 ①	06 ②
07 ⑤	08 ④	09 ⑤
10 ③	11 10	12 ⑤
13 ②	14 ②	15 4
16 ④	17 135	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (절대부등식) 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
17문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ①

해설 ㄱ. $x^2 \ge 0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다.

ㄴ. [반례] $x=-1$이면 $x^3<0$이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

ㄷ. [반례] $x=0,\ y=0$이면 $|x|+|y|=0$이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ뿐이다.

02 정답 ③

해설 ㄱ. $a^2+3b^2-2ab=(a-b)^2+2b^2 \ge 0$

$a^2+3b^2 \ge 2ab$ (참)

ㄴ. $\left(\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$=\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}-\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{(a+b)^2}{12} \ge 0$

이고 $\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \ge 0$이므로

$\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \ge \dfrac{a-b}{2}$ (거짓)

ㄷ. $(|a-b|)^2-(||a|-|b||)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=-2ab+2|a||b|$

$=2(|ab|-ab) \ge 0$

이고 $|a-b| \ge 0,\ ||a|-|b|| \ge 0$이므로

$|a-b| \ge ||a|-|b||$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 정답 ②

해설 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$를 정리하면

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

한편, $a,\ b,\ c$가 실수이므로

$(a-b)^2 \ge 0,\ (b-c)^2 \ge 0,\ (c-a)^2 \ge 0$

$\therefore \boxed{\dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\boxed{\ \ge\ }0$

따라서 $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \ge 0$이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\ge$이다.

04 정답 ②

해설 $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$ (③ 사용)

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \ge 0$ (① 사용)

따라서 $(|a|+|b|)^2 \ge (|a+b|)^2$이므로 (④ 사용)

$|a|+|b| \ge |a+b|$ (⑤ 사용)

그러므로 사용되지 않은 성질은 ②이다.

05 정답 ①

해설 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a}{2}-2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}+\dfrac{b}{2}$

$=\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{\boxed{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}^2}{2} \ge 0$

이므로 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \ge 0$에서 $\dfrac{a+b}{2}\boxed{\ge}\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$일 때이므로

등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

06 정답 ②

해설 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{3a}{2b}+\frac{3b}{2c}\right)\left(\frac{3b}{2c}+\frac{3c}{2a}\right)\left(\frac{3c}{2a}+\frac{3a}{2b}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3a}{2b}\cdot\frac{3b}{2c}}\cdot 2\sqrt{\frac{3b}{2c}\cdot\frac{3c}{2a}}\cdot 2\sqrt{\frac{3c}{2a}\cdot\frac{3a}{2b}}$$

$$=8\sqrt{\frac{9a}{4c}}\cdot\sqrt{\frac{9b}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{9c}{4b}}$$

$=27$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 27이다.

07 정답 ⑤

해설 $$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$

$$=4ab+\frac{1}{ab}+5$$

$a,\ b$가 양수이므로 $ab>0$이고

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4ab=\frac{1}{ab}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$$\therefore\ \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 4+5=9$$

08 정답 ④

해설 $x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3y+3z}{2x}+\frac{3z+3x}{2y}+\frac{3x+3y}{2z}$$

$$=\frac{3y}{2x}+\frac{3z}{2x}+\frac{3z}{2y}+\frac{3x}{2y}+\frac{3x}{2z}+\frac{3y}{2z}$$

$$=\left(\frac{3y}{2x}+\frac{3x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{3y}{2z}\right)+\left(\frac{3z}{2x}+\frac{3x}{2z}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3y}{2x}\cdot\frac{3x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{3y}{2z}}+2\sqrt{\frac{3z}{2x}\cdot\frac{3x}{2z}}$$

$=3+3+3=9$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다.

09 정답 ⑤

해설 $a>0,\ b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a+27b+\frac{8}{a}+\frac{3}{b}=2a+\frac{8}{a}+27b+\frac{3}{b}$$

$$\geq 2\sqrt{2a\cdot\frac{8}{a}}+2\sqrt{27b\cdot\frac{3}{b}}$$

$$=2\sqrt{16}+2\sqrt{81}=2\cdot4+2\cdot9$$

$$=26$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=2,\ b=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 26이다.

10 정답 ③

해설 $x^2>0,\ y^2>0,\ a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad\cdots ㉠$$

$$=2xy$$

$$=2\left(2a+\frac{5}{b}\right)\left(2b+\frac{5}{a}\right)$$

$$=2\left(4ab+\frac{25}{ab}+20\right)$$

$$\geq 2\left(2\sqrt{4ab\cdot\frac{25}{ab}}+20\right) \quad\cdots ㉡$$

$$=2\cdot(2\cdot10+20)$$

$$=80$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=\frac{5}{2}$일 때 성립한다.

$x=y$에서 $2a+\frac{5}{b}=2b+\frac{5}{a}$이므로 $a=b$

또, $ab=\frac{5}{2}$이므로 $a=b=\frac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 $\alpha=80,\ \beta=\frac{\sqrt{10}}{2},\ \gamma=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$\alpha\beta\gamma=200$

11 정답 10

해설 $2x^2+3y^2-2y+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$에서

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+y^2-2y-1$

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}+(y-1)^2-2$

이때 모든 실수 x, y에 대하여 $2x^2+2y^2+1>0$,

$\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x^2+2y^2+1+\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}\ge 2\sqrt{36}=12$

(단, 등호는 $2x^2+2y^2+1=\dfrac{36}{2x^2+2y^2+1}$,

즉 $2x^2+2y^2=5$일 때 성립)

또한, y는 실수이므로

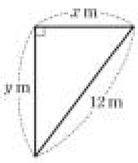
$(y-1)^2\ge 0$ (단, 등호는 $y=1$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y=1$일 때,

$12+0-2=10$이다.

12 정답 ⑤

해설



그림과 같이 직각삼각형의 두 변의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$x^2+y^2=12^2=144$

구하는 울타리의 넓이는 $\dfrac{1}{2}xy$이고,

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$144=x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

(단, 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때 성립한다.)

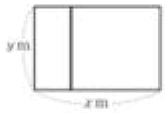
$72\ge xy$

$\therefore \dfrac{1}{2}xy\le 36$

따라서 울타리의 넓이의 최댓값은 36 m^2이다.

13 정답 ②

해설



위의 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 구역의 전체 넓이는 $xy\text{ m}^2$이고, 철망의 전체 길이가 36 m이므로

$2x+3y=36$

한편, $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$

(단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립한다.)

$36\ge 2\sqrt{6xy}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore xy\le 54$

이때, 등호는 $2x=3y$일 때 성립하므로

$2x+3y=36$에서 $2x=3y=18$

$\therefore x=9$, $y=6$

따라서 가로의 길이가 9 m, 세로의 길이가 6 m일 때, 구역의 전체 넓이 xy는 54 m^2로 최대이다.

14 정답 ②

해설 a, b가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right\}(a^2+b^2)\ge\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}\right)^2$

그런데 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}=\sqrt{29}$ 이므로

$\dfrac{29}{100}(a^2+b^2)\ge 29$

$\therefore\ a^2+b^2\ge 100$ (단, 등호는 $2a=5b$일 때 성립)

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 100

15 정답 4

해설 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{x^2+(3\sqrt{3}y)^2\right\}\geq(x+3y)^2$$

그런데 $x^2+27y^2=108$이므로

$$\frac{4}{3}\cdot108\geq(x+3y)^2$$

$(x+3y)^2\leq144$

이때 $x>0,\ y>0$이므로

$0<x+3y\leq12 \qquad \cdots ㉠$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}y\text{, 즉 }x=9y\text{일 때 성립}\right)$

또, 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\left\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$\therefore\ \frac{4}{3}(x+3y)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

㉠에서 $0<\frac{4}{3}(x+3y)\leq16$이므로

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\leq16$

이때 $x>0,\ y>0$이므로

$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq4$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3y}\text{, 즉 }x=9y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값은 4이다.

16 정답 ④

해설 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 $a,\ b,\ c$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=8$이므로 $a^2+b^2+c^2=64 \qquad \cdots ㉠$

이 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이다.

이때

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

즉, $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=64$

$2(ab+bc+ca)\leq128$이므로 $M=128$이다.

등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로

㉠에 대입하면 $3a^2=64,\ a^2=\frac{64}{3}$,

$$a=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

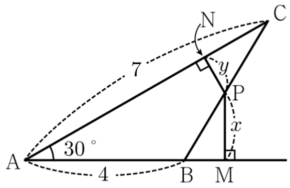
이때 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$k=4(a+b+c)=12a=32\sqrt{3}$ 이다.

$$\therefore\ \frac{M}{k}=\frac{128}{32\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

17 정답 135

해설 $\overline{PM}=x,\ \overline{PN}=y$라 하면



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$에서

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x+\frac{1}{2}\cdot7\cdot y$$

$$7=2x+\frac{7}{2}y$$

$\therefore\ 4x+7y=14 \qquad \cdots ㉠$

한편, $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{4}{x}+\frac{7}{y}$이고,

$$14\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right)=(4x+7y)\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right)\ (\because ㉠)$$

$$=65+\frac{28x}{y}+\frac{28y}{x}$$

$$=65+28\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

이때, $\frac{x}{y}>0,\ \frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$14\left(\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\right)=65+28\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$\geq65+28\cdot2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$$=65+56=121$$

즉, $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}\geq\frac{121}{14}$이므로 $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}$, 즉 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{121}{14}$이다.

따라서 $p=14,\ q=121$이므로

$p+q=135$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~230p

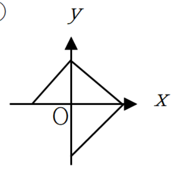
함수의 개념과 그래프

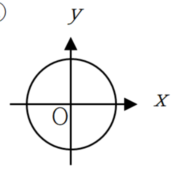
실시일자	-
30문제 / DRE수학	

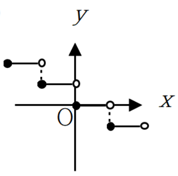
유형별 학습

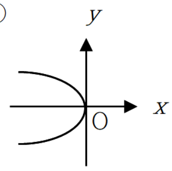
이름

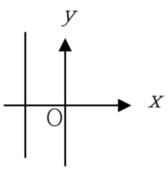
01 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


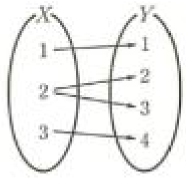
②


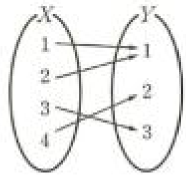
③


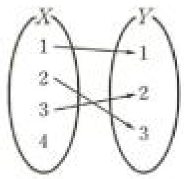
④


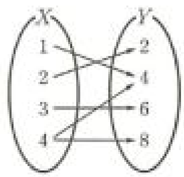
⑤


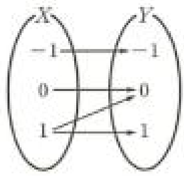
02 다음 대응 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

①


②


③


④


⑤


03 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f가

$f(x)=\begin{cases} x\ (x\text{는 유리수}) \\ 1-x\ (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 와 같을 때

$f(\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})$의 값은 얼마인지 구하시오.

04 실수 전체의 집합을 정의역으로 하고 양의 실수의 집합을 공역으로 하는 함수 $f(x)$ 가 $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(0)=1$　　ㄴ. $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

ㄷ. $f(3x)=3f(x)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)=x^2+3$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

06 집합 $\mathrm{X}=\{-1,\ 1,\ -i,\ i\}$ 에 대하여 $f\ :\ \mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{Y}$ 인 함수 $f(x)=x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1　② -2　③ 0
④ 1　⑤ 2

07 집합 $X=\{x \mid 1 \leq x \leq 6,\ x$는 자연수$\}$를 정의역으로 하는 함수 f를

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & (x\text{는 홀수}) \\ x-3 & (x\text{는 짝수}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 함수 f의 치역은?

① $\{-1,\ 1\}$　② $\{-1,\ 0,\ 1\}$
③ $\{-1,\ 1,\ 3\}$　④ $\{0,\ 1,\ 2\}$
⑤ $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

08 다음 보기 중 정의역이 $\{-2,\ 0,\ 2\}$인 두 함수 $f,\ g$가 $f=g$를 만족하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(x)=x^2,\ g(x)=2x$

ㄴ. $f(x)=2|x|,\ g(x)=2\sqrt{x^2}$

ㄷ. $f(x)=\sqrt{x^2},\ g(x)=x$

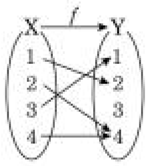
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

09 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=2x+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

10 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다. ㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다. ㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다. ㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다. ㉤ 일대일대응이다.



① 1개　② 2개　③ 3개
④ 4개　⑤ 5개

11 다음 중 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 a, b의 값으로 적당한 것을 고르면?

① $a=1$, $b=-1$　② $a=1$, $b=1$
③ $a=2$, $b=-1$　④ $a=2$, $b=0$
⑤ $a=-1$, $b=2$

12 두 집합 $X=\{1, 3, 5, 7\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이다. $f(1)=4$, $f(5)-f(7)=6$일 때, $f(7)+f(3)$의 값은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

13 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x<-1) \\ (3-a)x+b & (x \ge -1) \end{cases}$가 일대일대응일 때, 정수 b의 최솟값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

14 정의역이 집합 $X=\{x \mid x \ge k\}$인 함수 $f(x)=x^2+4x-4$가 일대일함수가 되도록 하는 k의 최솟값을 a, 함수 $f(x)$가 X에서 X로의 일대일대응이 되도록 하는 k의 값을 b라 할 때, $b-a$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

15 집합 $X=\{x|1 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, $ab \neq 0$)

16 두 집합 $X=\{x|-1 \le x \le 3\}$, $Y=\{y|1 \le y \le 9\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응일 때, 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

17 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases}(a-3)x+2 & (x \ge 0)\\ x+2 & (x<0)\end{cases}$이 일대일대응이 되도록 하는 a의 범위가 $a>k$일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, a, k는 상수이다.)

18 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases}(4-a)x+a+1 & (x \ge 1)\\ (5+a)x-a & (x<1)\end{cases}$$

이 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

19 집합 $X=\{1,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h는 각각 일대일대응, 항등함수, 상수함수이고 $f(1)=g(3)=h(4)$, $f(3)-f(4)=f(1)$일 때, $f(3)+g(4)+h(1)$의 값을 구하시오.

20 [2017년 6월 고2 이과 11번 변형]
집합 $X=\{-3,\ -1,\ 1\}$에 대하여 함수 $f:X \to X$가

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-3 & (x<0)\\ 1 & (x \ge 0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 항등함수가 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

21 임의의 양수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)+f(y)$이고 $f(2)=5$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

22 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

> (가) $f(1)=1$
> (나) $f(x+y)-f(y)=f(x)+xy$

23 함수 f가 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)+f(y)$를 만족하고 $f(2)=1$일 때, $f\left(\frac{1}{8}\right)$의 값을 구하시오.

24 두 집합 $X=\{a, b, c, d, e, f\}$, $Y=\{1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중 치역과 공역이 같은 것의 개수를 구하시오.

25 집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $f(b)=a$를 만족시키는 집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수를 구하시오.

26 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 $f(1)=b$인 것의 개수를 구하시오.

27 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$로 정의할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?

> (가) $f(5) \geq 6$
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

28 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f에 대하여 '$x \in A$이면 $2x-f(x) \in A$'를 만족할 때, 함수 f의 개수를 구하시오.

29 두 집합
$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$Y=\{2, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 20\}$
에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)=15$, $f(4)=14$이고 $f(1)>f(2)>f(3)$, $f(4)<f(5)<f(6)$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

30 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 치역과 공역이 일치하는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수는?

① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ②	03 1
04 ③	05 7	06 ③
07 ③	08 ②	09 ③
10 ②	11 ③	12 ③
13 3	14 ⑤	15 -5
16 7	17 9	18 8
19 11	20 ②	21 15
22 15	23 -3	24 62
25 64	26 4	27 ④
28 3	29 63	30 ②

실시일자	-
30문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 ①, ②, ④, ⑤ x의 값 1개에 y의 값이 2개가 대응되는 경우가 있으므로 함수가 아니다.
③ x의 값 하나에 y의 값이 하나씩만 정해져 있고 대응되지 못한 x가 없으므로 함수이다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

02 정답 ②

해설 ① X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 2, 3의 2개이므로 함수가 아니다.
② X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응하므로 함수이다.
③ X의 원소 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
④ X의 원소 4에 대응하는 Y의 원소가 4, 8 의 2개이므로 함수가 아니다.
⑤ X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 0, 1의 2개이므로 함수가 아니다.

03 정답 1

해설 $\sqrt{2}$와 $1-\sqrt{2}$는 모두 무리수이므로,
$f(\sqrt{2})=1-\sqrt{2}$
$f(1-\sqrt{2})=1-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}$
$\therefore f(\sqrt{2})+f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$

04 정답 ③

해설 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$이므로
ㄱ. $x=0$, $y=0$을 대입하면ㄴ $f(0)=\{f(0)\}^2$
$\therefore f(0)=1(\because f(0)>0)$(참)
ㄴ. $y=-x$를 대입하면
$f(0)=f(x)\cdot f(-x)$이므로 $1=f(x)\cdot f(-x)$
$\therefore f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$(참)
ㄷ. $y=x$를 대입하면 $f(2x)=\{f(x)\}^2$
$y=2x$를 대입하면
$f(3x)=f(x)\cdot f(2x)=\{f(x)\}^3$(거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

05 정답 7

해설 $\dfrac{1-2x}{3}=-1$에서 $1-2x=-3$
$\therefore x=2$
$f\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)=x^2+3$에 $x=2$를 대입하면
$f(-1)=2^2+3=7$

06 정답 ③

해설 치역 $\mathrm{Y}=\{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2+1^2+(-i)^2+i^2=1+1-1-1=0$

07 정답 ③

해설 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서
(ⅰ) x가 홀수, 즉 $x=1, 3, 5$일 때,
$f(x)=-x+4$이므로
$f(1)=3$, $f(3)=1$, $f(5)=-1$
(ⅱ) x가 짝수, 즉 $x=2, 4, 6$일 때,
$f(x)=x-3$이므로
$f(2)=-1$, $f(4)=1$, $f(6)=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 f의 치역은 $\{-1, 1, 3\}$이다.

08 정답 ②

해설 ㄱ. $f(-2)=4$, $g(-2)=-4$이므로 $f \neq g$
ㄴ. $f(-2)=g(-2)=4$, $f(0)=g(0)=0$,
$f(2)=g(2)=4$이므로 $f=g$
ㄷ. $f(-2)=2$, $g(-2)=-2$이므로 $f \neq g$
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

09 정답 ③

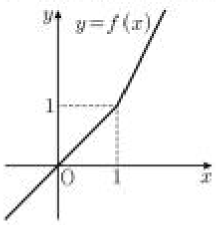
해설 두 함수 f, g가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$
$f(0)=b$, $g(0)=1$에서
$b=1$
$f(1)=1+a+b$, $g(1)=3$에서
$1+a+b=3$
$\therefore a=1$, $b=1$
따라서 $a-b=1-1=0$

10 정답 ②

해설 ㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가
1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 1, 2, 3, 4이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2)=f(4)=4$ 이고, $\mathrm{Y} \neq f(x)$ 이므로
일대일대응이 아니다.

11 정답 ③

해설 f가 일대일대응이 되려면
$y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



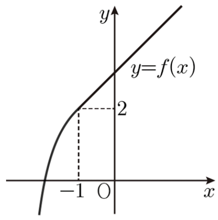
즉, 직선 $y=ax+b$가 점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로
$a+b=1$ $\cdots$ ㉠
또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선 $y=ax+b$의
기울기도 양이어야한다.
$\therefore a>0$ $\cdots$ ㉡
따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을 만족하는 것은 ③이다.

12 정답 ③

해설 $f(5)-f(7)=6$에서 $f(5)=8$, $f(7)=2$
이때 $f(1)=4$이고 함수 f가 일대일대응이므로
$f(3)=6$
$\therefore f(7)+f(3)=2+6=8$

13 정답 3

해설 함수 f가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음
그림과 같아야 한다.

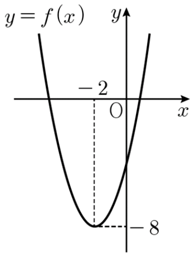


즉, 직선 $y=(3-a)x+b$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나야
하므로 $2=-3+a+b$ $\quad\therefore a=-b+5$
또, $x>-1$에서 직선 $y=(3-a)x+b$의 기울기가
양수이어야 하므로
$3-a>0$ $\quad\therefore a<3$
$a=-b+5<3$이므로 $b>2$
따라서 정수 b의 최솟값은 3이다.

14 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로 치역은 항상

$Y=\{y|y\geq -8\}$의 부분집합이다.

함수 f가 일대일함수이려면

이차함수 그래프의 축 $x=-2$를 기준으로 하여

어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

즉, $k\geq -2$이므로 k의 최솟값은 $a=-2$

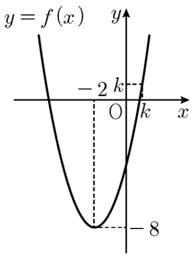
$f(x)=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

이 일대일함수가 되기 위한 k의 범위는

$k\geq -2$ $\cdots$ ㉠

또한, 일대일대응이 되기 위해 함수 f의 치역이

공역 $\{x|x\geq k\}$와 같으려면 $f(k)=k$이어야 한다.



$k^2+4k-4=k$, $k^2+3k-4=0$

$(k-1)(k+4)=0$

$\therefore$ $k=-4$ 또는 $k=1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값은 $b=1$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로 $b-a=1-(-2)=3$

15 정답 -5

해설 함수 $f(x)=ax+b$는 일대일함수이고, 공역과 치역이 서로 같으므로 일대일대응이다.

(ⅰ) $a>0$일 때

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$f(1)=1$, $f(4)=4$

$a+b=1$, $4a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

이때 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$f(1)=4$, $f(4)=1$

$a+b=4$, $4a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

$\therefore$ $ab=-5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $ab=-5$

16 정답 7

해설 $a>0$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면

$f(-1)=1$, $f(3)=9$

$-a+b=1$, $3a+b=9$

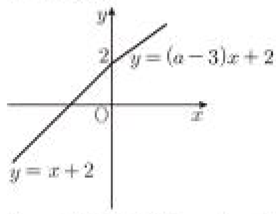
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

$\therefore$ $2a+b=7$

17 정답 9

해설 함수 f가 일대일대응이고 $x<0$에서 직선 $y=x+2$의 기울기가 양수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x\geq 0$에서 직선 $y=(a-3)x+2$의 기울기도 양수이어야 하므로

$a-3>0$

$\therefore$ $a>3$

따라서 $k=3$이므로

$k^2=9$

18 **정답** 8

해설 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x \geq 1$일 때와 $x < 1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
즉, $(4-a)(5+a) > 0$이므로
$(a+5)(a-4) < 0$
$\therefore\ -5 < a < 4$
따라서 정수 a는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$의 8개이다.

19 **정답** 11

해설 함수 g는 항등함수이므로 $g(1)=1$, $g(3)=3$, $g(4)=4$
$f(1)=g(3)=h(4)$에서 $f(1)=h(4)=3$이므로
$f(3)-f(4)=f(1)$에서 $f(3)-f(4)=3$
이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=4$, $f(4)=1$
또, 함수 h는 상수함수이므로 $h(1)=h(3)=h(4)=3$
$\therefore\ f(3)+g(4)+h(1)=4+4+3=11$

20 **정답** ②

해설 $f : X \to X$가 항등함수가 되기 위해서는
$f(-3)=-3$, $f(-1)=-1$, $f(1)=1$이어야 한다.
$x \geq 0$일 때, $f(1)=1$을 만족하고,
$x < 0$일 때, $f(x)=ax^2+bx-3$이므로
$f(-3)=9a-3b-3=-3$,
$f(-1)=a-b-3=-1$이다.
따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로 $a+b=-4$이다.

21 **정답** 15

해설 $x=2$, $y=2$이면
$f(4)=f(2)+f(2)$
$=5+5=10$
$x=4$, $y=2$이면
$f(8)=f(4)+f(2)$
$=10+5=15$

22 **정답** 15

해설 $f(x+y)-f(y)=f(x)+xy$에서
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ $\cdots$ ㉠
㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)+f(1)+1$
$=2f(1)+1=3$ $(\because f(1)=1)$
㉠에 $x=2$, $y=1$을 대입하면
$f(3)=f(2)+f(1)+2$
$=6$ $(\because f(2), f(1)=1)$
㉠에 $x=3$, $y=2$를 대입하면
$f(5)=f(3)+f(2)+6$
$=15$ $(\because f(3)=6, f(2)=3)$

23 **정답** -3

해설 임의의 두 양수 x, y에 대하여
$f(xy)=f(x)+f(y)$ $\cdots$ ㉠이므로
㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(1)=f(1)+f(1)$ $\quad\therefore\ f(1)=0$
$x=2$, $y=2$를 대입하면
$f(4)=f(2)+f(2)=1+1=2$ $\leftarrow f(2)=1$
$x=4$, $y=2$를 대입하면
$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$
$x=8$, $y=\frac{1}{8}$을 대입하면
$f(1)=f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)$
$0=3+f\left(\frac{1}{8}\right)$
$\therefore\ f\left(\frac{1}{8}\right)=-3$

24 **정답** 62

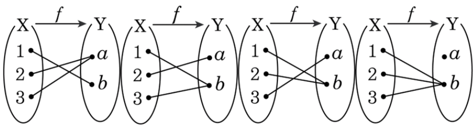
해설 집합 X의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 1, 2의 2개씩이므로 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6=64$
한편, 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수는 2이므로
치역과 공역이 같은 함수의 개수는
$64-2=62$

25 정답 64

해설 $f(b)=a$를 만족시키는 함수는 정의역의 원소 b에 대응하는 공역의 원소가 a로 정해져 있으므로 b를 제외한 정의역의 세 원소 a, c, d만 살펴보면 된다.
이때 a, c, d에 대응할 수 있는 공역의 원소는 a, b, c, d로 모두 4개씩이다. 따라서 $f(b)=a$를 만족시키는 함수 f의 개수는
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$

26 정답 4

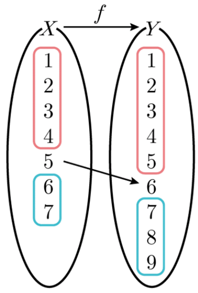
해설 $f(1)=b$인 함수 f는 다음과 같다.
따라서 구하는 함수 f는 4개이다.



27 정답 ④

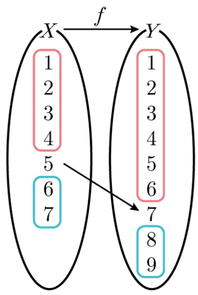
해설 조건 (가)에서 $f(5)$의 값은 6 또는 7이고
조건 (나)에 의하여
$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)<f(6)<f(7)$의
순서가 정해진다.

(ⅰ) $f(5)=6$일 때,



X의 원소 1, 2, 3, 4를 대응시키는 방법의 수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 네 수를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{C}_4=5$
또한, X의 원소 6, 7을 대응시키는 방법의 수는 Y의 원소 7, 8, 9 중에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
즉, 조건을 만족하는 함수의 개수는
${}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 5 \cdot 3 = 15$

(ⅱ) $f(5)=7$일 때,



X의 원소 1, 2, 3, 4를 대응시키는 방법의 수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 네 수를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_6\mathrm{C}_4=15$
또한, X의 원소 6, 7을 대응시키는 방법의 수는 Y의 원소 8, 9 중에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{C}_2=1$
즉, 조건을 만족하는 함수의 개수는
${}_6\mathrm{C}_4 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 = 15 \cdot 1 = 15$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수의 개수는 $15+15=30$

28 **정답** 3

해설 (ⅰ) $x=1$일 때, $2\cdot1-f(1)$의 값이 A에 포함되기 위해서 가능한 $f(1)$의 값은 1뿐이다.
(ⅱ) $x=2$일 때, $2\cdot2-f(2)$의 값이 A에 포함되기 위해서 가능한 $f(2)$의 값은 1, 2, 3이다.
(ⅲ) $x=3$일 때, $2\cdot3-f(3)$의 값이 A에 포함되기 위해서 가능한 $f(3)$의 값은 3뿐이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 함수의 개수는 $1\cdot3\cdot1=3$

29 **정답** 63

해설 $f(1)=15$이고 $f(1)>f(2)>f(3)$이므로
집합 Y의 원소 2, 5, 6, 9, 10, 11, 14 중에서
서로 다른 2개를 뽑아 크기가 큰 것부터 차례대로
집합 X의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.
즉, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_7C_2=21$
$f(4)=14$이고 $f(4)<f(5)<f(6)$이므로
집합 Y의 원소 15, 18, 20 중에서
서로 다른 2개를 뽑아 크기가 작은 것부터 차례대로
집합 X의 원소 5, 6에 대응시키면 된다.
즉, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$21\cdot3=63$

30 **정답** ②

해설 치역과 공역이 일치하기 위해서는 정의역 X를 3개조로 나누어 함숫값으로 각각 1, 2, 3을 갖도록 배정하면 된다.
(ⅰ) 정의역 X를 1개, 1개, 3개의 3개조로 나누어 공역 Y의 원소에 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$$\left({}_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot3!$$
$$=5\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=60$$

(ⅱ) 정의역 X를 1개, 2개, 2개의 3개조로 나누어 공역 Y의 원소에 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$$\left({}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\right)\cdot3!$$
$$=5\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=90$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$60+90=150$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 함수 중 그 그래프가 $y=|2x-6|$의 그래프와 만나는 것은?

① $y=-x^2+1$ ② $y=-2x^2$
③ $y=-2x+4$ ④ $y=\frac{1}{2}x-3$
⑤ $y=x-2$

02 함수 $f(x)=|2x-4|$에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=(f\circ f\circ f)(x)$의 서로 다른 실근의 합을 구하시오.

03 함수 $y=|x-1|-2$의 그래프와 직선 $y=mx+m-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m의 값의 범위는?

① $-1<m<0$ ② $-\frac{1}{2}<m<1$
③ $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$ ④ $0<m<1$
⑤ $1<m<2$

04 다음 중 함수 $y=|3x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$가 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는?

① $m>-3$
② $m\le\frac{3}{7}$
③ $-3<m<\frac{3}{7}$
④ $m<-3$ 또는 $m\ge\frac{3}{7}$
⑤ $m\le-3$ 또는 $m>\frac{3}{7}$

05 세 함수 f, g, h에 대하여 $f(x)=2x-1$, $(h\circ g)(x)=x+3$일 때, $(f\circ(h\circ g))(a)=11$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

06 두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+5$에 대하여 $(f\circ g)(k)=13$일 때, $(g\circ f)(k)$값을 구하시오.

07 일차함수 $f(x)=ax+2$에 대하여 함수 g를 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 하자. 직선 $y=f(x)$의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기의 곱이 27일 때, $g(2)$의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

08 자연수 전체의 집합에서 정의된

함수 $f(x)=\begin{cases} x+5 & (x\text{가 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} & (x\text{가 짝수}) \end{cases}$ 에 대하여

$(f\circ f\circ f)(a)=25$를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=|x|-4$,

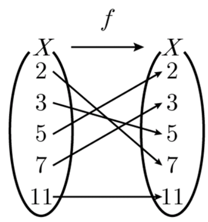
$g(x)=\begin{cases} -x^2+4 & (x\ge 0) \\ x^2+4 & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여

$g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k의 값을 α, β $(\alpha>\beta)$라고 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10 두 함수$f(x)=2x+a$, $g(x)=-x+1$에 대하여 $g\circ f=f\circ g$가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

11 집합 $X=\{2, 3, 5, 7, 11\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$가 다음 그림과 같다. 함수 $g: X\to X$가 $g(2)=5$, $f\circ g=g\circ f$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 11

12 두 함수 f, g가 일대일대응이고, $(g \circ f)(x) = 3x - 2$, $g(6) = 4$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

13 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : A \to A$를 $f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 5 & (x = 1) \end{cases}$로 정의하자.
$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
라 할 때, $f^{2020}(2) + f^{2023}(4)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

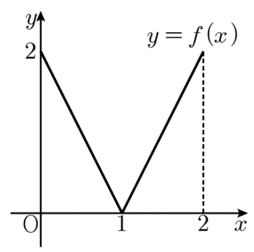
14 함수 $f(x) = -x + 3$에 대하여
$f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$으로 정의할 때,
$f^{100}(a) = 100$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.
(단, n은 자연수이다.)

15 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여
함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
(나) $2 \leq x \leq 4$일 때,
$(f \circ f)(x) = f(x) - 2x + 2$이다.

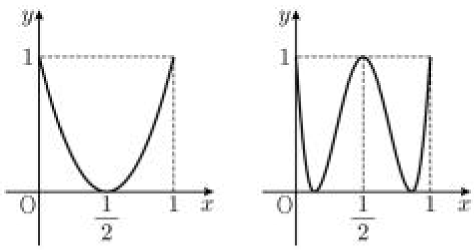
$f(1) + f(3) + f(4)$의 값을 구하시오.

16 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f^1 = f$,
$f^{n+1} = f \circ f^n$으로 정의할 때, $f^{2020}\left(\frac{3}{4}\right)$의 값을
구하시오. (단, n은 자연수이다.)



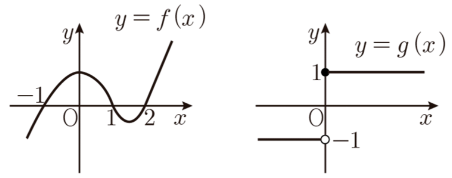
17 실수 전체의 집합에서 정의된
함수 $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & (x < -2) \\ x+2 & (x \geq -2) \end{cases}$에 대하여
함수 $y = (f \circ f)(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로
둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

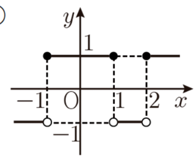
18 함수 $f(x)=4x^2-4x+1$ $(0 \le x \le 1)$에 대하여 $y=f(x)$와 $y=f(f(x))$의 그래프 개형은 다음과 같다. 이때 집합 $\{x \mid f(f(f(x)))=x,\ 0 \le x \le 1\}$의 원소의 개수는?

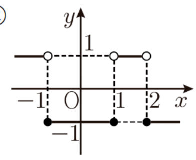


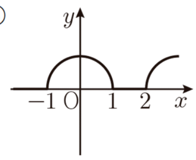
① 16　　② 12　　③ 8
④ 6　　⑤ 5

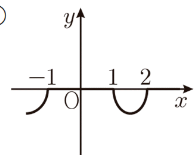
19 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f, g의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는?

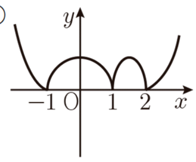


①


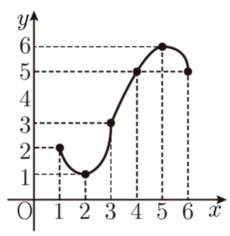
②


③


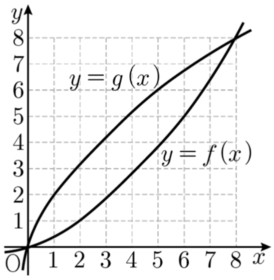
④


⑤


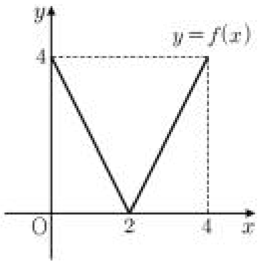
20 $1 \le x \le 6$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(a)=6$을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.



21 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f\circ g)(1)+(g\circ f)(6)$의 값을 구하시오.

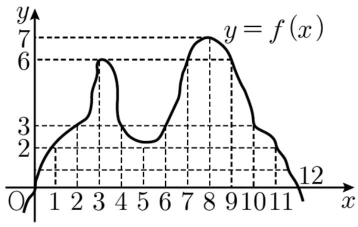


22 집합 $X=\{x|0\le x\le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x\le 2)\\ 2x-4 & (2<x\le 4)\end{cases}$의 그래프가 다음 그림과 같다. 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=x+2$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는?



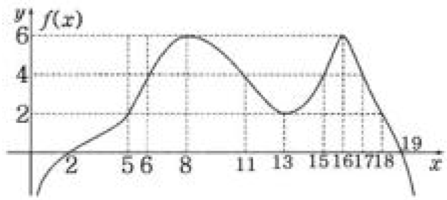
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

23 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.
함수 $g(x)$가 $g(x)=(f\circ f)(x+2)$일 때, $g(x)=6$을 만족시키는 실수 x의 개수는?
(단, $x<0$ 또는 $x>12$일 때, $f(x)<0$이다.)



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

24 다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적은 것은?
($x<2$ 또는 $x>19$일 때, $f(x)<0$이다.)



① 2, 20 ② 2, 22 ③ 3, 20
④ 4, 42 ⑤ 4, 50

25 함수 $f(x)$ 의 역함수는 $f^{-1}(x)=3x-3$ 이고, 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(2x-1)$ 로 정의할 때, $g(2)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

26 일차함수 $y=f(x)$에 대하여 $f(2)=3$, $f^{-1}(9)=5$일 때, $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

27 집합 $X=\{x \mid x \le a,\ x\text{는 실수}\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-x^2+4x$의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값은?

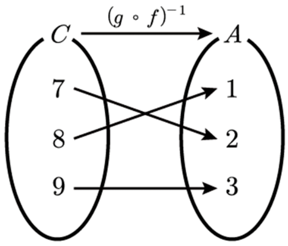
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

28 정의역이 $X=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$, 공역이 $Y=\{y \mid -1 \le y \le 5\}$인 함수 $f(x)=ax+b$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

29 함수 $f(x)=4x+3$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편을 a, y절편을 b라 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

30 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(2x-3)=4x+1$이다. $f^{-1}(x)=ax+b$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

31 [2017년 6월 고2 이과 15번 변형]
세 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$, $C=\{7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f: A \to B$와 $g: B \to C$가 일대일대응이다.
함수 $(g \circ f)^{-1}: C \to A$가 그림과 같고 $f(1)=5$, $g(6)=7$일 때, $f(2)+g(4)$의 값은?



① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

32 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+a & (x=1,\ 3)\ (a\text{는 상수}) \\ \dfrac{x^2}{4} & (x=2,\ 4) \end{cases}$$

이고, 함수 f의 역함수 g가 존재한다.
$g^1(x)=g(x)$, $g^{n+1}(x)=g(g^n(x))$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$
라 할 때, $2a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

33 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$f(x)=\begin{cases} -3x & (x \geq 0) \\ kx & (x<0) \end{cases}$에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$일 때, k의 값을 구하시오.

34 점 $(2,\ 4)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

35 $f(x)=2x-3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x)=2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

36 두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x+2$, $g(x)=2x-6$에 대하여 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)$의 값을 구하시오.

37 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수
$$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ 2x+k & (x<0) \end{cases}$$
이 $f^{-1}(-3)=-1$을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

38 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<3) \\ \frac{2}{3}x+a & (x \geq 3) \end{cases}$의 역함수를 g라고 하자. $g(g(8))=b$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

39 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=x+15$, $g(x)=\begin{cases} 4x & (x<5) \\ 2x+10 & (x \geq 5) \end{cases}$에 대하여 $f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))$의 값을 구하시오.

40 함수 $y=3x+2|x|$의 역함수는?

① $y=3x-2|x|$ ② $y=-3x+2|x|$
③ $y=-3x-2|x|$ ④ $y=\frac{3x-2|x|}{5}$
⑤ $y=\frac{-3x+2|x|}{5}$

41 두 함수 $f(x)=3x+4$, $g(x)=-\frac{1}{5}x+9$에 대하여 $((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=2$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

42 함수 $f(x)=x^2+4x+k\ (x\geq -2)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 점 $(4,\ 1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

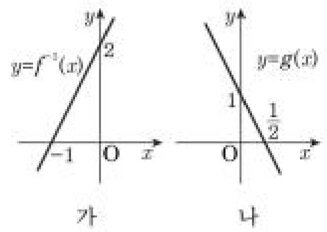
43 함수 $f(x)=x^2+2x+k\,(x\geq\ -1)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 점 $(4,\ \ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

44 함수 $f(x)=2x+3-\left|\frac{3}{2}x-3\right|$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 36 ② 44 ③ 52
④ 60 ⑤ 68

45 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$

② $y=f(x-1)$

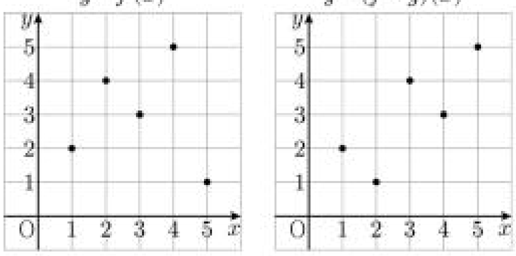
③ $y=-f(x-1)$

④ $y=f(x+1)$

⑤ $y=-f(1-x)$

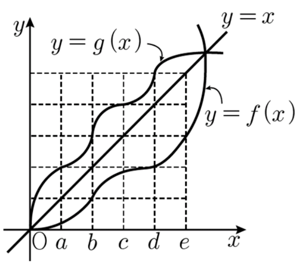
46 [2015년 9월 고2 이과 16번/4점]

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같을 때, $g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)$의 값은?



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

47 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음 그림과 같을 때, $(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(c)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 14	03 ②
04 ④	05 3	06 1
07 ④	08 385	09 ⑤
10 $-\frac{1}{2}$	11 ④	12 6
13 ①	14 100	15 17
16 2	17 7	18 ③
19 ①	20 10	21 7
22 ②	23 ③	24 ①
25 ⑤	26 $\frac{1}{4}$	27 ①
28 2	29 $\frac{9}{4}$	30 4
31 ⑤	32 ②	33 $-\frac{1}{3}$
34 ④	35 ④	36 5
37 ③	38 7	39 80
40 ④	41 1	42 ②
43 ⑤	44 ④	45 ①
46 ⑤	47 ⑤	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (합성함수와 역함수)233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

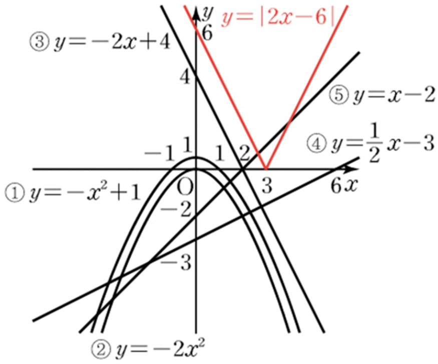
01 정답 ⑤

해설 $y=|2x-6|$에서

$x<3$일 때, $y=-2x+6$

$x \geq 3$일 때, $y=2x-6$

따라서 함수 $y=|2x-6|$의 그래프와 보기의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2x-6|$의 그래프와 만나는 것은 ⑤이다.

02 정답 14

해설 방정식 $(f \circ f)(x)=(f \circ f \circ f)(x)$에서

$(f \circ f)(x)=f((f \circ f)(x))$이므로

$(f \circ f)(x)=t$라 하면 $f(t)=t$이다.

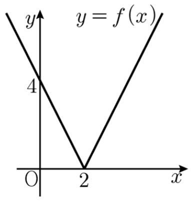
$|2t-4|=t$의 양변을 제곱하면 $(2t-4)^2=t^2$,

$3t^2-16t+16=0$, $(t-4)(3t-4)=0$

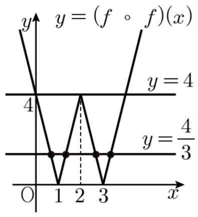
즉, $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$이므로 $(f \circ f)(x)=\frac{4}{3}$,

$(f \circ f)(x)=4$이다.

$f(x)=|2x-4|$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



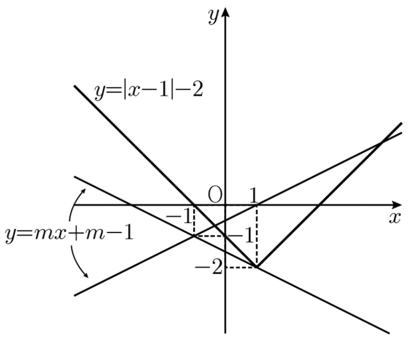
함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{4}{3}$의 교점의 x좌표가 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$이므로 방정식 $(f \circ f)(x)=\frac{4}{3}$의 서로 다른 실근의 합은

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=8$이고, 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 x좌표가 각각 0, 2, 4이므로 방정식 $(f \circ f)(x)=4$의 서로 다른 실근의 합은 $0+2+4=6$이다.

따라서 방정식 $(f \circ f)(x)=(f \circ f \circ f)(x)$의 서로 다른 실근의 합은 $8+6=14$이다.

03 정답 ②

해설 $y=|x-1|-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.

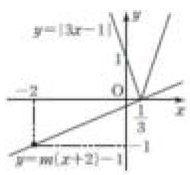


또한, 직선 $y=mx+m-1$, 즉 $y=m(x+1)-1$은 m의 값에 관계 없이 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 직선이다.
다라서 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{2}<m<1$

04 정답 ④

해설



위의 그림에서 함수 직선 $y=m(x+2)-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.
이때, 함수 $y=|3x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$이 만나려면

(i) $m<\frac{1}{-\frac{1}{3}}$ 에서 $m<-3$

(ii) $m\geq\frac{-1-0}{-2-\frac{1}{3}}$ 에서 $m\geq\frac{3}{7}$

(i), (ii)에서 $m<-3$ 또는 $m\geq\frac{3}{7}$

05 정답 3

해설 $(f\circ(h\circ g))(a)=f((h\circ g)(a))$
$=f(a+3)$
$=2(a+3)-1$
$=2a+5$

따라서 $2a+5=11$이므로
$a=3$

06 정답 1

해설 $(f\circ g)(k)=f(g(k))$
$=3g(k)-2$
$=3(2k+5)-2$
$=6k+13$

$6k+13=13$이므로 $k=0$
$\therefore (g\circ f)(k)=g(f(0))$
$=g(-2)$
$=2(-2)+5=1$

07 정답 ④

해설 $f(x)=ax+2$이므로
$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+2)$
$=a(ax+2)+2=a^2x+2a+2$
직선 $y=f(x)$의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기의 곱이 27이므로
$a\cdot a^2=27$
$\therefore a=3$
따라서 $g(x)=9x+8$이므로
$g(2)=18+8=26$

08 정답 385

해설 $(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=25$에서
$25=20+5$ 또는 $25=\frac{50}{2}$
20은 홀수가 아니고 50은 짝수이므로
$f(f(a))=50$
$50=45+5$ 또는 $50=\frac{100}{2}$
45는 홀수이고 100은 짝수이므로
$f(a)=45$ 또는 $f(a)=100$
(ⅰ) $f(a)=45$일 때
$45=40+5$ 또는 $45=\frac{90}{2}$
이때 40은 홀수가 아니고 90은 짝수이므로
$a=90$
(ⅱ) $f(a)=100$일 때
$100=95+5$ 또는 $100=\frac{200}{2}$
이때 95는 홀수이고 200은 짝수이므로
$a=95$ 또는 $a=200$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $(f\circ f\circ f)(a)=25$를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은
$90+95+200=385$

09 정답 ⑤

해설 (i) $f(k)<0$일 때,

$g(f(k))=\{f(k)\}^2+4=3$,

$\{f(k)\}^2=-1$

따라서 $f(k)<0$일 때 $g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $f(k)\ge 0$일 때,

$g(f(k))=-\{f(k)\}^2+4=3$

$\therefore \{f(k)\}^2=1,\ f(k)=1\ (\because f(k)\ge 0)$

$f(k)=|k|-4=1$에서

$|k|=5 \qquad \therefore k=\pm 5$

즉 $\alpha=5,\ \beta=-5$이므로 $\qquad \alpha-\beta=10$

10 정답 $-\dfrac{1}{2}$

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+a)$

$=-(2x+a)+1=-2x-a+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$

$=2(-x+1)+a=-2x+2+a$

이 때, $g\circ f=f\circ g$이므로

$-2x-a+1=-2x+a$

$2a=-1$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

11 정답 ④

해설 $f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ $\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2)),\ f(5)=g(7)$

$\therefore g(7)=2$

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

$f(g(7))=g(f(7)),\ f(2)=g(3)$

$\therefore g(3)=7$

12 정답 6

해설 $(g\circ f)(2)=3\cdot 2-2=4$에서

$g(f(2))=4$

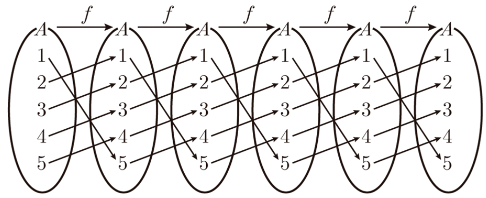
이때 함수 g가 일대일대응이므로

$g(f(2))=4=g(6)$이면

$f(2)=6$

13 정답 ①

해설 $f(1)=5,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=3,\ f(5)=4$이므로 $f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4,\ f^5$의 대응관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $f^5(x)=x$이므로

$f^{2020}(2)=f^{5\cdot 404}(2)=f^5(2)=2$

$f^{2023}(4)=f^{5\cdot 404+3}(4)=f^3(4)=1$

$\therefore f^{2020}(2)+f^{2023}(4)=2+1=3$

14 정답 100

해설 $f^1(x)=f(x)=-x+3$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+3)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+3$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여

$f^{2n-1}(x)=-x+3,\ f^{2n}(x)=x$

따라서 $f^{100}(x)=x$이므로 $f^{100}(a)=a=100$

15 정답 17

해설 조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일대응이다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$1 \le f(x) \le 7$

조건 (나)에서 $2 \le x \le 4$일 때,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) - 2x + 2$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $x=4$를 대입하면

$f(f(4)) = f(4) - 8 + 2 \ge 1$

즉, $f(4) \ge 7$이므로

$f(4) = 7$

$f(f(4)) = f(7) = 7 - 8 + 2 = 1$

$\therefore f(4) = 7,\ f(7) = 1$ $\cdots$ ㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면

$f(f(3)) = f(3) - 6 + 2 \ge 2$

즉, $f(3) \ge 6$이고 $f(4) = 7$이므로

$f(3) = 6$

$f(f(3)) = f(6) = 6 - 6 + 2 = 2$

$\therefore f(3) = 6,\ f(6) = 2$ $\cdots$ ㉢

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(f(2)) = f(2) - 4 + 2 \ge 3$

즉, $f(2) \ge 5$이고 $f(3) = 6,\ f(4) = 7$이므로

$f(2) = 5$

$f(f(2)) = f(5) = 5 - 4 + 2 = 3$

$\therefore f(2) = 5,\ f(5) = 3$ $\cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$f(1) = 4$

$\therefore f(1) + f(3) + f(4) = 4 + 6 + 7 = 17$

16 정답 2

해설 $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (0 \le x < 1) \\ 2x-2 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$이므로

$f^1\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f^3\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^2)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(1) = 0$

$f^4\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^3)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(0) = 2$

$f^5\left(\frac{3}{4}\right) = (f \circ f^4)\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f(2) = 2$

$\vdots$

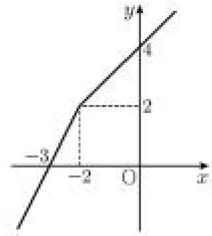
즉, $f^n\left(\frac{3}{4}\right) = 2\ (n \ge 4)$이므로 $f^{2020}\left(\frac{3}{4}\right) = 2$

17 정답 7

해설 $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & (x < -2) \\ x+2 & (x \ge -2) \end{cases}$에서

$f(f(x)) = \begin{cases} 2(2x+4)+4 & (x < -3) \\ (2x+4)+2 & (-3 \le x < -2) \\ (x+2)+2 & (x \ge -2) \end{cases}$

$= \begin{cases} 4x+12 & (x < -3) \\ 2x+6 & (-3 \le x < -2) \\ x+4 & (x \ge -2) \end{cases}$



$f(f(x)) = 0$에서

$4x + 12 = 0,\ x = -3$

$f(f(-2)) = 2$

$f(f(0)) = 4$

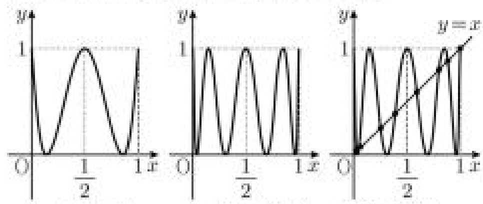
이므로

함수 $y = (f \circ f)(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 1 + 2 + 4 = 7$

18 정답 ③

해설 다음 그림에서 구하는 원소의 개수는 8개이다.



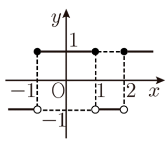
$y = f(f(x))$ $y = f(f(f(x)))$ $f(f(f(x))) = x$

19 정답 ①

해설 $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$이므로

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ 1 & (-1 \le x \le 1) \\ -1 & (1 < x < 2) \\ 1 & (x \ge 2) \end{cases}$

따라서 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는 ①이다.



20 정답 10

해설 $f(a)=b$라 하면

$(f \circ f)(a)=f(f(a))$

$\quad\quad\quad\quad =f(b)=6$

이때 $f(b)=6$에서 $b=5$이므로

$f(a)=5$

$f(a)=5$에서 $a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$4+6=10$

21 정답 7

해설 $(f \circ g)(1)+(g \circ f)(6)=f(g(1))+g(f(6))$

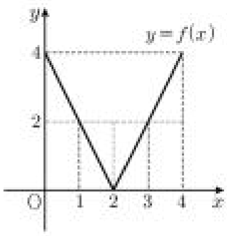
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad =f(2)+g(5)$

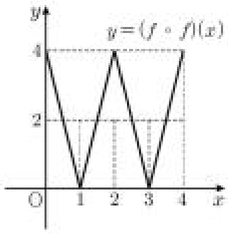
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad =1+6$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad =7$

22 정답 ②

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)=f(3)=2$이므로



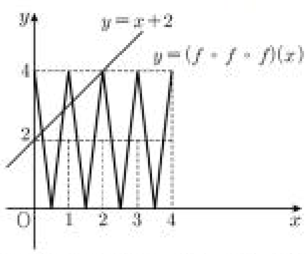


함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프에서

$(f \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)=(f \circ f)\left(\frac{3}{2}\right)=(f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right)$

$\quad\quad =(f \circ f)\left(\frac{7}{2}\right)$

이므로 $y=(f \circ f \circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 함수 $y=(f \circ f \circ f)(x)$의 그래프와

직선 $y=x+2$의 교점의 개수가 4이므로

방정식 $(f \circ f \circ f)(x)=x+2$의 서로 다른 실근의

개수는 4이다.

23 정답 ③

해설 $g(x)=6$에서 $(f \circ f)(x+2)=6$이므로

$f(f(x+2))=6$

$x+2=t$로 놓으면 $f(f(t))=6$

$\therefore f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$ 또는 $f(t)=9$

그런데 $f(t) \le 7$이므로

$f(t)=3$ 또는 $f(t)=7$

(i) $f(t)=3$일 때

$t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=6$ 또는 $t=10$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

(ii) $f(t)=7$일 때, $t=8$

$\therefore x=6$

(i), (ii)에서 실수 x의 개수는 0, 2, 4, 6, 8의 5이다.

24 정답 ①

해설 $f(x+2)=t$라 하면

주어진 그래프에서 $f(t)=4$인 t의 값은

$t=6,\ 11,\ 15,\ 17$

한편, 다음을 만족하는 x의 값을 구한다.

$f(x+2)=6,\ 11,\ 15,\ 17 \quad \cdots ㉠$

이때 그래프에서 $f(x) \le 6$이므로 ㉠ 중에서 실근을 갖는

것은 $f(x+2)=6$일 때뿐이다.

따라서 그래프에서 $f(8)=6,\ f(16)=6$이므로

$x+2=8,\ 16$

$\therefore x=6,\ 14$

따라서 조건을 만족하는 서로 다른 실근은 2개이고 그 합은

$6+14=20$

25 정답 ⑤

해설 $g(2)=f(2 \cdot 2-1)=f(3)$ 이다.

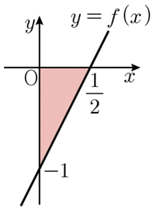
$f^{-1}(x)=3x-3=3$ 에서 $x=2$

$\therefore f(3)=2$

따라서 $g(2)=2$

26 정답 $\frac{1}{4}$

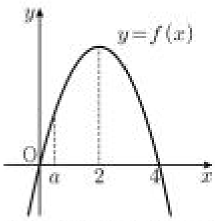
해설 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)라 하면
$f(2)=3$이므로
$2a+b=3$ ⋯ ㉠
$f^{-1}(9)=5$에서 $f(5)=9$이므로
$5a+b=9$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$
$\therefore f(x)=2x-1$
$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$

27 정답 ①

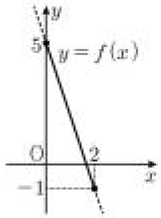
해설 $f(x)=-(x-2)^2+4$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는
일대일대응이어야 하므로 $a \leq 2$이다.
또, 치역과 공역이 같아야 하므로
$f(a)=a$에서 $-a^2+4a=a$
$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$
$\therefore a=0$ ($\because a \leq 2$)

28 정답 2

해설 $f(x)=ax+b$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는
일대일 대응이어야 하므로 증가 또는 감소함수이어야 된다.
이때 $a<0$이므로 다음 그림과 같이 감소함수이고 치역과
공역이 같아야 한다.



즉, $f(0)=5$, $f(2)=-1$이므로
$b=5$, $2a+b=-1$에서 $a=-3$
$\therefore a+b=-3+5=2$

29 정답 $\frac{9}{4}$

해설 $y=4x+3$로 놓으면 $4x=y-3$
$\therefore x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$
직선 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$의 x절편이 3, y절편이 $-\frac{3}{4}$이므로
$a=3$, $b=-\frac{3}{4}$
$\therefore a+b=\frac{9}{4}$

30 정답 4

해설 $2x-3=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$
따라서 $f(t)=2t+7$
$\therefore f(x)=2x+7$
$y=2x+7$이라 하면 $2x=y-7$
$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$이므로 $a-b=4$이다.

31 정답 ⑤

해설 $(g \circ f)(1)=8$, $(g \circ f)(2)=7$, $(g \circ f)(3)=9$
이때 $g(6)=7$이고, 함수 g는 일대일대응이므로
$f(2)=6$이다.
또한, $f(1)=5$, $f(2)=6$이고 함수 f는
일대일대응이므로 $f(3)=4$이다.
$(g \circ f)(3)=9$에서 $f(3)=4$이므로 $g(4)=9$이다.
$\therefore f(2)+g(4)=6+9=15$

32 정답 ②

해설 함수 f의 역함수 g가 존재하므로
함수 f는 일대일대응이다.
$f(2)=1$, $f(4)=4$이므로
$f(1)=2$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=2$
$f(1)=2$, $f(3)=3$일 때 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
$f(1)=3$, $f(3)=2$일 때 $a=\frac{7}{2}$
$g^1(2)=3$, $g^2(2)=1$, $g^3(2)=2$, $g^4(2)=3$, $\cdots$
이므로
n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 1일 때 $g^n(2)=3$
n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2일 때 $g^n(2)=1$
n이 3으로 나누어떨어졌을 때 $g^n(2)=2$
$g^{10}(2)=g^{3\cdot3+1}(2)=3$, $g^{11}(2)=g^{3\cdot3+2}(2)=1$
$\therefore 2a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=7+3+1=11$

33 정답 $-\frac{1}{3}$

해설 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 함수 $y=kx$는 $y=-3x$의 역함수이어야 한다.
$\therefore k=-\frac{1}{3}$

34 정답 ④

해설 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나면
$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지난다.
그런데 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$를 지난다.
$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$라 하면
$2a+b=4$, $4a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$
따라서 $f(x)=-x+6$이므로
$f(-1)=7$

35 정답 ④

해설 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x \longrightarrow (g\circ f)(2x)=x$
$\longrightarrow g(f(2x))=x$
$f(2x)=2\cdot 2x-3=4x-3$
$\therefore g(f(2x))=g(4x-3)=x$
$4x-3=1$ 에서 $x=1$ 이므로
$g(4x-3)=x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1$

36 정답 5

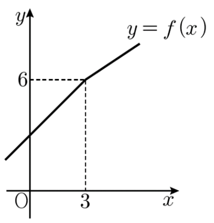
해설 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)=(g^{-1}\circ f)(6)=g^{-1}(f(6))$
$=g^{-1}(4)$
$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로
$2k-6=4$ $\therefore k=5$
$(f^{-1}\circ g)^{-1}(6)=g^{-1}(4)=5$

37 정답 ③

해설 $f^{-1}(-3)=-1$에서 $f(-1)=-3$이므로
$f(-1)=-2+k=-3$
$\therefore k=-1$
따라서 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq 0) \\ 2x-1 & (x<0)\end{cases}$이므로
$f(5)=5-1=4$

38 정답 7

해설 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.
이때 함수 f가 $x=3$에서 오직 하나의 값을 가져야 하므로
$f(3)=6$이어야 한다.
즉, $f(3)=\frac{2}{3}\cdot 3+a=6$
$\therefore a=4$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $g(8)=k$라고 하면 $f(k)=8$이고,
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $k>3$이므로
$f(k)=\frac{2}{3}k+4=8$
$\therefore k=6$
또, $g(g(8))=g(6)=b$에서
$f(b)=6$이고, $f(3)=6$이므로
$b=3$
따라서 $a=4$, $b=3$이므로
$a+b=7$

39 정답 80

해설 $g^{-1}(30)=k$라 하면 $g(k)=30$
(ⅰ) $k<5$일 때, $g(k)=4k$이므로
$4k=30$
$\therefore k=\frac{15}{2}$
이때 $k<5$이므로 k의 값은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $k\geq 5$일 때, $g(k)=2k+10$이므로
$2k+10=30$
$\therefore k=10$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=10$, 즉 $g^{-1}(30)=10$이므로
$f(g^{-1}(30))=f(10)=10+15=25$
또, $g(30)=70$에서 $f^{-1}(70)=l$이라 하면
$f(l)=70$이므로
$l+15=70$
따라서 $l=55$이므로
$f^{-1}(70)=55$
$\therefore f(g^{-1}(30))+f^{-1}(g(30))=25+55=80$

40 정답 ④

해설 $y=3x+2|x|=\begin{cases}5x & (x\geq 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$이므로
(ⅰ) $x\geq 0$일 때, $y\geq 0$이고
$y=5x$에서 $x=\frac{1}{5}y$
x, y를 바꾸면 $y=\frac{1}{5}x$ $(x\geq 0)$
(ⅱ) $x<0$일 때, $y<0$이고
$y=x$의 역함수는 그대로 $y=x$ $(x<0)$
(ⅰ), (ⅱ)에 따라 구하는 역함수는
$y=\begin{cases}\frac{1}{5}x & (x\geq 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$, 즉 $y=\frac{3x-2|x|}{5}$

41 정답 1

해설 $((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=(f^{-1}\circ g^{-1})(f(a))$
$=(g\circ f)^{-1}(f(a))$
$=(g\circ f)^{-1}(3a+4)$
$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=2$이므로
$(g\circ f)^{-1}(3a+4)=2$에서
$(g\circ f)(2)=3a+4$
즉, $g(f(2))=g(10)=3a+4$이므로
$-\frac{1}{5}\cdot 10+9=3a+4$, $7=3a+4$
$\therefore a=1$

42 정답 ②

해설 점 $(4, 1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로
점 $(1, 4)$는 함수 $y=f(x)$ 위의 점이다.
즉, $f(1)=4$이므로
$f(1)=1^2+4+k=4$
$\therefore k=-1$

43 정답 ⑤

해설 점 $(4,\ -1)$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로 점 $(-1,\ 4)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.
즉, $f(-1)=4$이므로 $1-2+k=4$
$\therefore k=5$

44 정답 ④

해설 (i) $\frac{3}{2}x-3 \geq 0$에서 $x \geq 2$일 때,

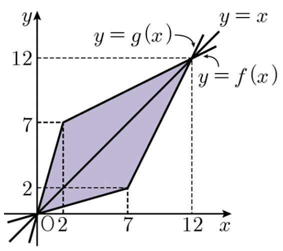
$f(x)=2x+3-\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{1}{2}x+6$

(ii) $\frac{3}{2}x-3<0$에서 $x<2$일 때,

$f(x)=2x+3+\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{7}{2}x$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+6 & (x \geq 2)\\ \frac{7}{2}x & (x<2)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=30$

따라서 구하는 넓이는 $30\cdot 2=60$

45 정답 ①

해설 그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 그림 (나)의 그래프와 일치한다.

즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면

$y=f^{-1}(-x)\cdots$㉠이다.

㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$㉡이다.

㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$㉢이므로

㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.

$\therefore y=-f(x+1)$

$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

46 정답 ⑤

해설 역함수의 성질 추론하기

$f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

이와 같은 방법으로

$g(2)=5,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ g(5)=4$

$g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+f^{-1}(g^{-1}(1))$

$=5+f^{-1}(1)$

$=5+5=10$

47 정답 ⑤

해설 $g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$

$\therefore m=b$

$f^{-1}(b)=n$이라 하면 $f(n)=b$

$\therefore n=d$

따라서 $(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(c)=g(f^{-1}(g^{-1}(c)))$

$=g(f^{-1}(b))$

$=g(d)$

$=e$

마플시너지(2025) - 공통수학2(무리함수) 299~322p

무리함수의 그래프

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수는?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

02 무리식 $y=\sqrt{6-3x}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{3-x}$의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정할 때, x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 Mm의 값은?

① -4　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 4

03 $a<0$, $b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

04 $\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$을 간단히 하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

05 양수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$일 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$의 값은?

① $6-4\sqrt{2}$　② $6-2\sqrt{2}$　③ 6　④ $6+4\sqrt{2}$　⑤ $6+6\sqrt{2}$

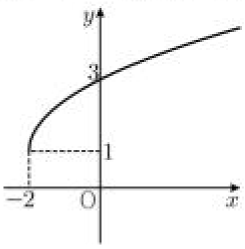
06 두 수 x, y가 각각
$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 일 때,
$2x^2-5xy+2y^2$ 의 값은?

① 185 ② 187 ③ 189
④ 191 ⑤ 193

07 $x=\sqrt{2}+1$일 때, x^3-2x^2+2x+1의 값은?

① $4+3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$
③ 0 ④ $4-3\sqrt{2}$
⑤ $-3\sqrt{2}$

08 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.



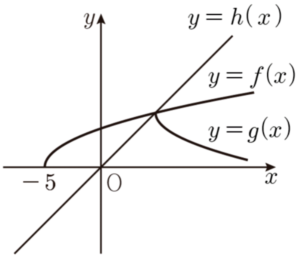
09 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{y|y\le-3\}$ ② $\{y|y\ge-3\}$ ③ $\{y|y\le3\}$
④ $\{y|y\ge3\}$ ⑤ $\{y|y\le9\}$

10 함수 $y=\sqrt{3x-k}+6$의 정의역이 $\{x|x\ge a\}$, 치역이 $\{y|y\ge b\}$이고 그래프가 점 $(2,\ 8)$을 지날 때, 상수 a, b, k에 대하여 $ab+k$의 값을 구하시오.

11 함수 $y=2-\sqrt{2x-5}$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축, y축 방향으로 각각 m, n만큼 평행 이동한 것이다. mn의 값을 구하시오.

12 두 함수 $f(x)=\sqrt{3x+15}$, $g(x)=-\sqrt{3x-15}+5$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

13 함수 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 실수 a, b의 차 $a-b$ 의 값을 구하여라.

14 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하였다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

15 다음 함수 중 그 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은?

① $y=\sqrt{x+1}-1$ ② $y=-\sqrt{x+1}$
③ $y=-\sqrt{-x+1}+1$ ④ $y=\sqrt{-x-1}-1$
⑤ $y=-\sqrt{x}+1$

16 함수 $y=-\sqrt{6-2x}+k$의 그래프가 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

17 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 점 $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$을 지난다.
② 정의역은 $\{x \mid x \le -3\}$이다.
③ 치역은 $\{y \mid y \ge -2\}$이다.
④ $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 제2사분면을 지나지 않는다.

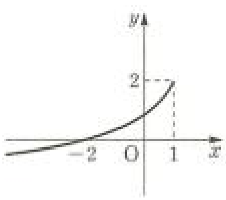
18 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a \neq 0)$의 그래프에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

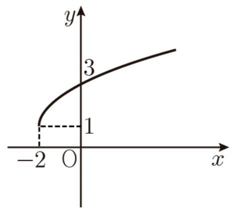
ㄱ. $a>0$이면 제2 사분면을 지난다.
ㄴ. $a<0$일 때, x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다.
ㄷ. $|a|$의 값이 작을수록 x축에 가까워진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오.

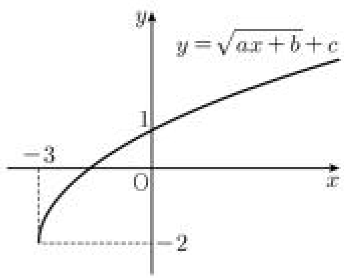


20 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?



① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

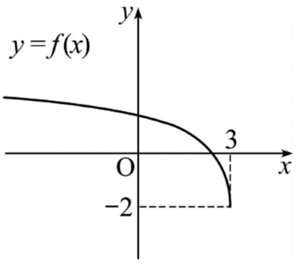
21 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?



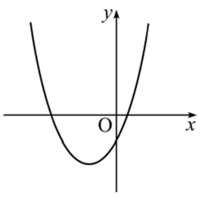
① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

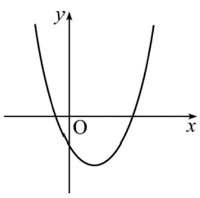
22 [2006년 3월 고2 13번]

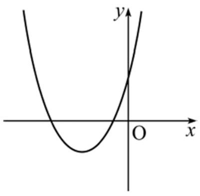
무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때,

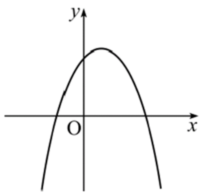


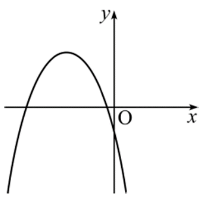
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.)

①


②


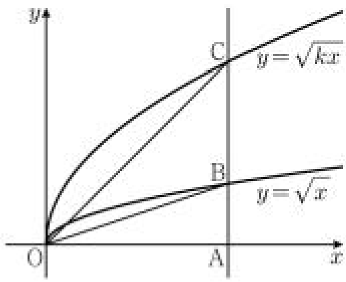
③


④


⑤


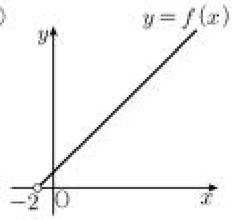
23 [2024년 3월 고2 14번/4점]

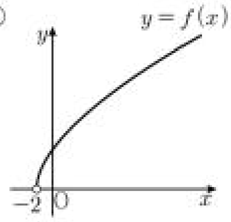
그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

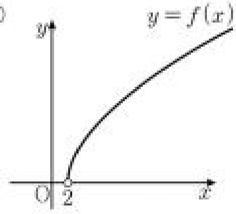


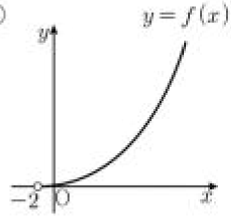
① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

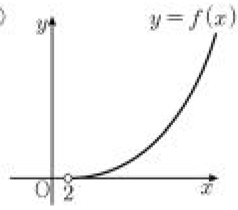
24 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$가 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이를 $f(k)$라 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은?

①


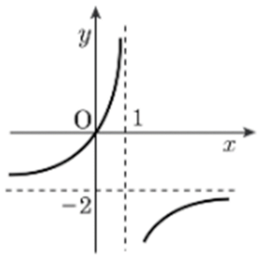
②


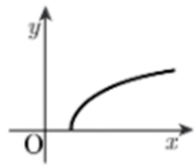
③


④


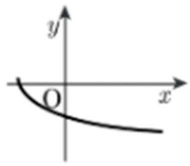
⑤


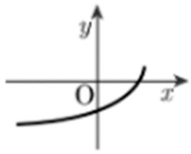
25 함수 $y=\frac{bx+c}{ax-1}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은?

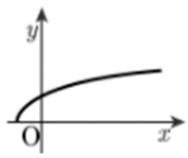


①


②


③


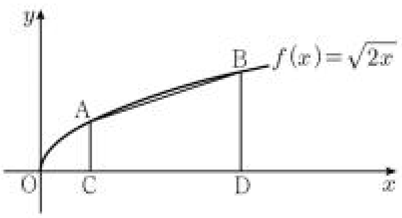
④


⑤


26 함수 $y=\sqrt{3x+9}+k$의 그래프가 제4사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

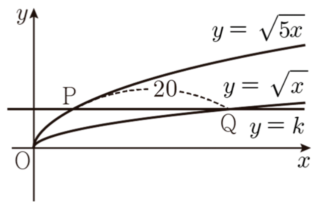
27 함수 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

28 [2025년 3월 고2 10번/3점]
그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(k,\ f(k))$, $\mathrm{B}(4k,\ f(4k))$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 넓이가 18일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 값은?



① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{55}$

29 다음 그림과 같이 직선 $y=k$와
두 함수 $y=\sqrt{5x}$, $y=\sqrt{x}$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 P, Q 사이의 거리가 20일 때, 양수 k의 값을 구하시오.



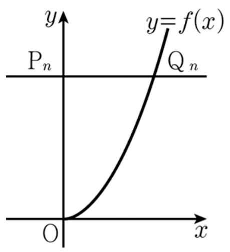
30 $3\le x\le 8$에서 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

31 $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=\sqrt{a-2x}+b$의 최댓값이 4, 최솟값이 2일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>4$)

32 $y=\sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y=g(x)$라 하면, $g(-3)$의 값은?

① 4 ② $\sqrt{-5}$ ③ -5
④ 없다 ⑤ -3

33 [2016년 3월 고3 문과 13번 변형]
자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 4n+1)$인 점을 P_n,
함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ (x \geq 0)$이라 하자.
점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 하자.
점 Q_n의 y좌표를 a_n이라 할 때, $f^{-1}(a_1)\cdot f^{-1}(a_{11})$의 값은?



① 15 ② $15\sqrt{2}$ ③ $15\sqrt{3}$
④ 30 ⑤ $30\sqrt{2}$

34 함수 $y=9-\sqrt{3x-6}$ 의 역함수가 $y=a(x+b)^2+c$ $(x \leq d)$일 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 곱 $abcd$의 값을 구하시오.

35 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-10}+2 & (x \geq 5)\\ -\sqrt{-x+5}+2 & (x<5)\end{cases}$에 대하여 $f^{-1}(4)+f^{-1}(-2)$의 값을 구하시오.

36 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}$ 와 그 역함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값을 구하시오.

37 두 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x+4}$에 대하여 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)$의 값은?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ -1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

38 [2019년 3월 고3 문과 12번/3점]
$x\geq-1$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}+1$과 $x\geq1$에서 정의된 함수 $g(x)=(x-1)^2-1$에 대하여 $(g\circ f\circ f)(15)$의 값은?

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

39 함수 $f(x)=\sqrt{x+6}$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

40 [2018년 3월 고3 문과 17번 변형]
무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 4)$에서 만날 때, $g(6)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -6　② -5　③ -4
④ -3　⑤ -2

41 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이다. 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

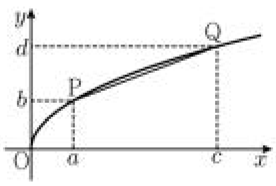
42 두 함수 $y=\sqrt{x+3}$과 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1\leq k<\frac{13}{4}$　② $2\leq k<\frac{13}{4}$
③ $3\leq k\leq\frac{13}{4}$　④ $3<k<\frac{13}{4}$
⑤ $3\leq k<\frac{13}{4}$

43 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

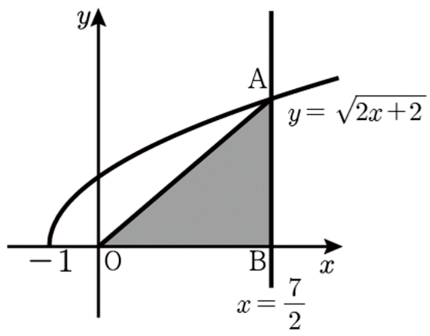
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

44 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 $\dfrac{b+d}{3}=1$을 만족시킬 때, 직선 PQ의 기울기를 구하시오. (단, $0<a<c$)



45 [2018년 6월 고2 문과 8번 변형]

다음 그림과 같이 직선 $x=\dfrac{7}{2}$ 과 곡선 $y=\sqrt{2x+2}$ 가 만나는 점을 A, 직선 $x=\dfrac{7}{2}$ 과 x 축이 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{9}{2}$ ② $\dfrac{19}{4}$ ③ 5
④ $\dfrac{21}{4}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}$

46 [2019년 11월 고3 문과 10번/3점]

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

47 [2019년 6월 고3 문과 12번/3점]

두 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

48 두 집합

$A=\{(x, y)\,|\,-2\le x\le 2,\ 2\le y\le 5\}$,
$B=\{(x, y)\,|\,y=\sqrt{x-k}\}$

에 대하여 $A\cap B\ne\varnothing$을 만족시키는 실수 k의 최솟값은?

① -29 ② -27 ③ -25
④ -23 ⑤ -21

49 함수 $f(x)=x^2+7\ (x\ge 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.)

① $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ①	03 ③
04 ①	05 ④	06 ④
07 ①	08 8	09 ③
10 6	11 5	12 ④
13 0	14 10	15 ⑤
16 2	17 ⑤	18 ⑤
19 2	20 ④	21 ⑤
22 ①	23 ⑤	24 ②
25 ①	26 2	27 1
28 ②	29 5	30 3
31 6	32 ④	33 ④
34 -54	35 -4	36 8
37 ②	38 ③	39 ④
40 ③	41 -8	42 ⑤
43 ②	44 $\frac{1}{3}$	45 ④
46 ③	47 ①	48 ②
49 ④		

마플시너지(2025) - 공통수학2(무리함수) 299~322p

무리함수의 그래프

실시일자	-
49문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ④

해설 $x+4 \geq 0$에서 $x \geq -4$

$5-2x>0$에서 $x<\dfrac{5}{2}$

$\therefore -4 \leq x < \dfrac{5}{2}$를 만족시키는 정수 x는

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$의 7개이다.

02 **정답** ①

해설 무리식 $y=\sqrt{6-3x}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{3-x}$의 값이 실수가 되려면

$6-3x \geq 0,\ 3-x \neq 0,\ x+2 \geq 0$에서

$x \leq 2,\ x \neq 3,\ x \geq -2$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

따라서 $M=2,\ m=-2$이므로

$Mm=-4$

03 **정답** ③

해설 ① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$

$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}\,i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

04 **정답** ①

해설 (주어진 식) $=\dfrac{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

05 **정답** ④

해설 양수 x에 대하여

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(x+2)-x}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50}$

$=6+4\sqrt{2}$

06 정답 ④

해설 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$
$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$
따라서 $x+y=10$, $xy=1$이므로
$2x^2-5xy+2y^2=2(x^2+y^2)-5xy$
$=2\{(x+y)^2-2xy\}-5xy$
$=2(10^2-2)-5\cdot1$
$=191$

07 정답 ①

해설 $x=\sqrt{2}+1$에서 $x-1=\sqrt{2}$ 이고
양변을 제곱하면
$x^2-2x+1=2$
$\therefore x^2-2x=1 \quad \cdots ㉠$
$\therefore x^3-2x^2+2x+1=x(x^2-2x)+2x+1$
$=x+2x+1(\because ㉠)$
$=3x+1$
$=3(\sqrt{2}+1)+1$
$=4+3\sqrt{2}$

08 정답 8

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼
평행이동한 것이므로
$y=\sqrt{a(x+2)}+1 \quad \cdots ㉠$
로 놓을 수 있다.
㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$
$\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{2(x+2)}+1$
$\therefore y=\sqrt{2x+4}+1$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=1$이므로 $abc=8$

09 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a, a)$를
지나므로
$a=-\sqrt{-a+a}-a+6$, $2a=6$
$\therefore a=3$
따라서 $y=-\sqrt{x+3}-3+6$, 즉
$y=-\sqrt{x+3}+3$이므로 이 함수의 치역은
$\{y|y\le3\}$이다.

10 정답 6

해설 함수 $y=\sqrt{3x-k}+6$의 그래프가 점 $(2, 8)$을 지나므로
$8=\sqrt{6-k}+6$, $\sqrt{6-k}=2$
$\therefore k=2$
함수 $y=\sqrt{3x-2}+6$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\ge\dfrac{2}{3}\right\}$,
치역은 $\{y|y\ge6\}$이므로
$a=\dfrac{2}{3}$, $b=6$
$\therefore ab+k=\dfrac{2}{3}\cdot6+2=6$

11 정답 5

해설 $y=2-\sqrt{2x-5}=-\sqrt{2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}+2$이므로
$y=2-\sqrt{2x-5}$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축 방향으로 $\dfrac{5}{2}$, y축 방향으로 2만큼 평행이동한
것이다.
$\therefore m=\dfrac{5}{2}$, $n=2$
$\therefore mn=\dfrac{5}{2}\cdot2=5$

12 정답 ④

해설 함수 $g(x)=-\sqrt{3x-15}+5=-\sqrt{3(x-5)}+5$의
그래프는 함수 $f(x)=\sqrt{3x+15}=\sqrt{3(x+5)}$ 의
그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후
x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 5만큼
평행이동한 것이다.
$\therefore m=10$, $n=5$
$\therefore m+n=15$

13 정답 0

해설 $y=\sqrt{2x+6}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

따라서 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-3$, $b=-3$ 이므로

$a-b=-3-(-3)=0$

14 정답 10

해설 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$

$y=\sqrt{a(x-1)+b}+c+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x-1)+b}+c+2$

$=\sqrt{-ax-a+b}+c+2$

위의 함수의 그래프가

$y=\sqrt{-3x+2}+4$의 그래프와 일치하므로

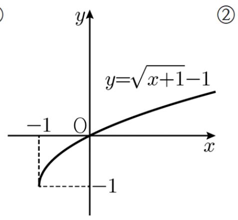
$-a=-3$, $-a+b=2$, $c+2=4$

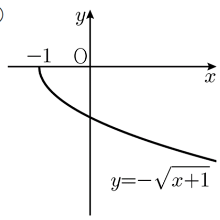
따라서 $a=3$, $b=5$, $c=2$이므로

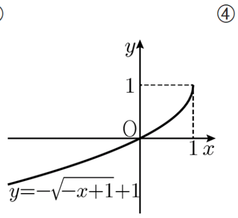
$a+b+c=10$

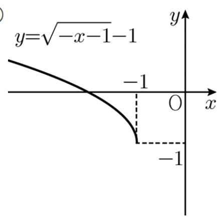
15 정답 ⑤

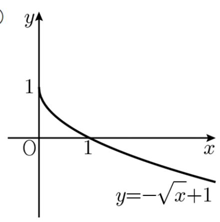
해설 각 함수의 그래프는 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


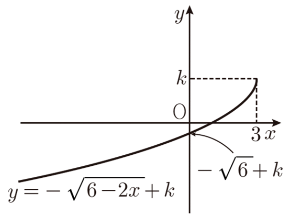
따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은 ⑤이다.

16 정답 2

해설 $y=-\sqrt{6-2x}+k=-\sqrt{-2(x-3)}+k$이므로

이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{6-2x}+k$의 그래프가 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



그러므로 $k>0$ ⋯ ㉠

또, 그래프의 y절편이 음수이어야 하므로

$-\sqrt{6}+k<0$

$\therefore k<\sqrt{6}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다.

17 정답 ⑤

해설 ① $y=\sqrt{6+2x}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{6+2x}-3$, $3=\sqrt{6+2x}$

$9=6+2x$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지난다.

② $6+2x\ge 0$에서 $x\ge -3$

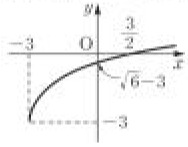
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{6+2x}\ge 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge -3\}$ 이다.

④ $y=\sqrt{6+2x}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

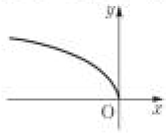
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향-3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{6+2x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.

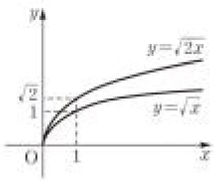


18 정답 ⑤

해설 ㄱ. $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프는 $a>0$이면 제1사분면에 존재하고 $a<0$이면 제2사분면에 존재한다. (거짓)
ㄴ. $a<0$일 때 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다. (참)



ㄷ. 오른쪽 그림에서 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프가 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프보다 x축에 더 가깝다.
즉, $|a|$의 값이 작을수록 x축에 가까워진다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19 정답 2

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a(-2-1)}+2$, $\sqrt{-3a}=2$

$\therefore a=-\dfrac{4}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}(x-1)}+2$

$=-\sqrt{-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}}+2$

따라서 $a=-\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{4}{3}$, $c=2$이므로

$a+b+c=2$

20 정답 ④

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+2)}+1$ $\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$

$2a=4$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $b=4$, $c=1$

$\therefore a+b+c=7$

21 정답 ⑤

해설 주어진 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+3)}-2$ $(a>0)$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{3a}-2$

$3=\sqrt{3a}$

$9=3a$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{3(x+3)}-2$

$\therefore y=\sqrt{3x+9}-2$

따라서 $a=3$, $b=9$, $c=-2$이므로

$a+b+c=3+9+(-2)=10$

22 정답 ①

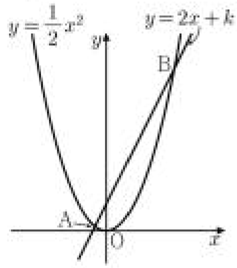
해설 조건을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 구하는 문제이다.
무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c$ 의 그래프가 주어진 그림과 같으므로 상수 a, b, c 의 값(부호)은
$a>0$, $b=3$, $c=-2$이다.
이때 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 꼭짓점의 x좌표가
$-\dfrac{b}{2a}<0$이고, y절편이 $c<0$이므로
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은
①번 그림과 같다.

23 정답 ⑤

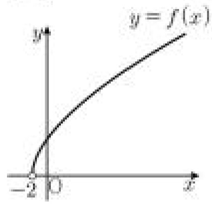
해설 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.
점 $B(k, \sqrt{k})$, 점 $C(k, k)$이고 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로
$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BC}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AB}$
$\overline{BC}=2\overline{AB}$이므로
$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3\overline{AB}$
이때 $\overline{AB}=\sqrt{k}$, $\overline{AC}=k$에서
$k=3\sqrt{k}$, $k^2-9k=0$
$k>1$이므로
$k=9$
따라서 삼각형 OBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$

24 정답 ②

해설 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=2x+k$가 두 점에서 만나므로
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2=2x+k$, 즉 $x^2-4x-2k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4+2k>0$에서 $k>-2$이다.



방정식 $x^2-4x-2k=0$의 두 실근을 α, β라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2k$ $\cdots$ ㉠
두 점 A, B의 좌표가 $(\alpha, 2\alpha+k)$, $(\beta, 2\beta+k)$이므로
선분 AB의 길이는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}$
$=\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$ $\cdots$ ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{5(16+8k)}$
즉, $f(k)=\sqrt{5(16+8k)}=\sqrt{40(k+2)}$ $(k>-2)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

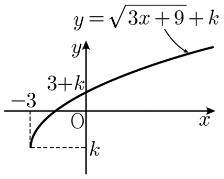


25 정답 ①

해설 유리함수의 그래프의 점근선이 $x=1$, $y=-2$이므로
$y=\frac{k}{x-1}-2$ $\cdots$ ㉠
㉠이 원점을 지나므로
$0=-k-2$
$\therefore\ k=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$y=\frac{-2}{x-1}-2=\frac{-2x}{x-1}$
따라서 $a=1$, $b=-2$ $c=0$이므로
$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{x-2}$
따라서 구하는 함수의 그래프의 개형은 ①이다.

26 정답 2

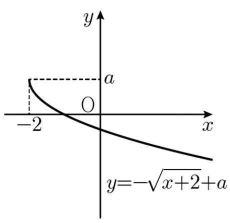
해설 $y=\sqrt{3x+9}+k=\sqrt{3(x+3)}+k$이므로
이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\sqrt{3x+9}+k$의 그래프가 제4사분면을 제외한 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



그러므로 $k<0$ $\cdots$ ㉠
또, 그래프의 y절편이 양수이어야 하므로
$3+k>0$
$\therefore k>-3$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-3<k<0$
따라서 정수 k는 -1, -2의 2개이다.

27 정답 1

해설 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=-\sqrt{x+2}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 다음 그림과 같이 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$-\sqrt{2}+a<0$ $\quad\therefore a<\sqrt{2}$
따라서 자연수 a의 최댓값은 1이다.

28 정답 ②

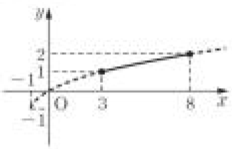
해설 무리함수의 그래프를 이해하여 선분의 길이를 구한다.
점 $\mathrm{A}(k, \sqrt{2k})$, 점 $\mathrm{B}(4k, 2\sqrt{2k})$, 점 $\mathrm{C}(k, 0)$, 점 $\mathrm{D}(4k, 0)$이고 사각형 ACDB는 넓이가 18인 사다리꼴이므로
$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2k}+2\sqrt{2k})\cdot 3k=18$
$9k\sqrt{2k}=36$, $2k^3=16$
$k^3=8$에서 $k=2$이므로
$\mathrm{A}(2, 2)$, $\mathrm{B}(8, 4)$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(8-2)^2+(4-2)^2}$
$=2\sqrt{10}$

29 정답 5

해설 직선 $y=k$와 $y=\sqrt{5x}$, $y=\sqrt{x}$의 교점은 모두 y좌표가 k이다.
즉, $k=\sqrt{5x}$에서 $x=\frac{k^2}{5}$, $k=\sqrt{x}$에서 $x=k^2$
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{k^2}{5}, k\right)$, $\mathrm{Q}(k^2, k)$에서
$\overline{\mathrm{PQ}}=k^2-\frac{k^2}{5}=\frac{4}{5}k^2$이므로
$\frac{4}{5}k^2=20$, $k^2=25$
$\therefore k=5$ ($\because k>0$)

30 정답 3

해설 함수 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
$3\le x\le 8$에서 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.

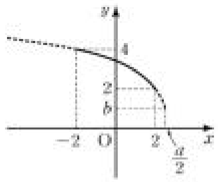


$x=3$일 때, 최솟값 $m=\sqrt{3+1}-1=1$
$x=8$일 때 최댓값 $M=\sqrt{8+1}-1=2$
$\therefore M+m=2+1=3$

31 정답 6

해설 $f(x)=\sqrt{a-2x}+b=\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+b$

에서 $\frac{a}{2}>2$ ($\because a>4$)이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 4, $x=2$일 때 최솟값 2를 가지므로

$f(-2)=\sqrt{a+4}+b=4$ ……㉠

$f(2)=\sqrt{a-4}+b=2$ ……㉡

㉠에서 $\sqrt{a+4}=4-b$

$\therefore a+4=(4-b)^2$ ……㉢

㉡에서 $\sqrt{a-4}=2-b$

$\therefore a-4=(2-b)^2$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$(2-b)^2+8=(4-b)^2$

$b^2-4b+12=b^2-8b+16$

$4b=4$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉣에 대입하면

$a-4=(2-1)^2$ $\quad\therefore a=5$

$\therefore a+b=5+1=6$

32 정답 ④

해설 역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.
$y=\sqrt{2x+1}$의 역함수 $y=g(x)$의 정의역은
$y=\sqrt{2x+1}$의 치역이 되어야 하는데
이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로
$g(-3)$의 값은 존재하지 않는다.

33 정답 ④

해설 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.
$a_n=4n+1$이므로 $a_1=5,\ a_{11}=45$

$y=\frac{1}{2}x^2\ (x\ge 0)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\sqrt{2x}\ (x\ge 0)$이다.

그러므로 $f^{-1}(a_1)=\sqrt{10},\ f^{-1}(a_{11})=\sqrt{90}$

$\therefore f^{-1}(a_1)\cdot f^{-1}(a_{11})=\sqrt{10}\cdot\sqrt{90}$

$=\sqrt{10\cdot 90}$

$=\sqrt{900}$

$=30$

34 정답 -54

해설 함수 $y=9-\sqrt{3x-6}$의 치역이 $\{y\,|\,y\le 9\}$이므로
역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 9\}$이다.
$y=9-\sqrt{3x-6}$에서 $y-9=-\sqrt{3x-6}$
양변을 제곱하면 $(y-9)^2=3x-6$

x에 대하여 정리하면 $x=\frac{1}{3}(y-9)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=\frac{1}{3}(x-9)^2+2\ (x\le 9)$

따라서 $a=\frac{1}{3},\ b=-9,\ c=2,\ d=9$이므로

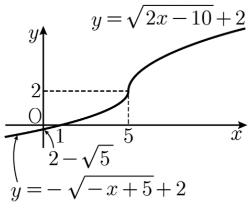
$abcd=\frac{1}{3}\cdot(-9)\cdot 2\cdot 9=-54$이다.

35 정답 -4

해설 $x \geq 5$에서 $f(x)=\sqrt{2x-10}+2$ $\cdots$ ㉠

$x<5$에서 $f(x)=-\sqrt{-x+5}+2$ $\cdots$ ㉡

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(4)=a$라 하면 $f(a)=4$

위의 그림에서 $f(a)=4$를 만족시키는 함수의 식은 ㉠이므로

$\sqrt{2a-10}+2=4$, $\sqrt{2a-10}=2$

$2a-10=4$

$\therefore a=7$

$\therefore f^{-1}(4)=7$

$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $f(b)=-2$

위의 그림에서 $f(b)=-2$를 만족시키는 함수의 식은 ㉡이므로

$-\sqrt{-b+5}+2=-2$, $\sqrt{-b+5}=4$

$-b+5=16$

$\therefore b=-11$

$\therefore f^{-1}(-2)=-11$

$\therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=7-11=-4$

36 정답 8

해설 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}$에서 $y=\sqrt{2x-4}$라 하고, 양변을 제곱하면

$y^2=2x-4$, $x=\dfrac{1}{2}y^2+2$

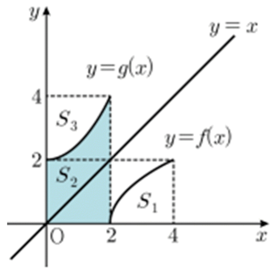
x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$ $(x \geq 0)$

이때 $f(4)=\sqrt{2\cdot4-4}=2$이므로 $g(2)=4$이다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.



이때 두 직선 $x=2$, $y=4$와 x축, y축으로 둘러싸인 직사각형에서 S_2를 뺀 영역을 S_3이라 하면 $S_1=S_3$

$\therefore S_1+S_2=S_3+S_2=2\cdot4=8$

37 정답 ②

해설 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f)(2)$

$=g^{-1}(f(2))$

$=g^{-1}(1)$ ($\because f(2)=\sqrt{2-1}=1$)

이때 $g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$이므로

$g(k)=\sqrt{2k+4}=1$

$2k+4=1$

$\therefore k=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(1)=-\dfrac{3}{2}$

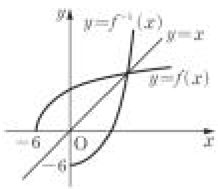
38 정답 ③

해설 합성함수와 역함수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.
함수 f와 함수 g는 서로 역함수이므로
$g\circ f=I$(단, I는 항등함수)이다.
그러므로 $g\circ f\circ f=(g\circ f)\circ f=I\circ f=f$
따라서
$(g\circ f\circ f)(15)=((g\circ f)\circ f)(15)$
$=(I\circ f)(15)$
$=f(15)$
$=\sqrt{15+1}+1$
$=5$

[다른 풀이]
$f(15)=\sqrt{15+1}+1=5$,
$f(5)=\sqrt{5+1}+1=\sqrt{6}+1$,
$g(\sqrt{6}+1)=(\sqrt{6}+1-1)^2-1=5$이므로
$(g\circ f\circ f)(15)=g(f(f(15)))$
$=g(f(5))$
$=g(\sqrt{6}+1)$
$=5$

39 정답 ④

해설



함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면 $x+6=x^2$
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$
따라서 교점의 좌표가 $(3,\ 3)$이므로
$a=3$, $b=3$ $\quad\therefore\ a+b=6$

40 정답 ③

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 4)$에서 만나므로 $f(2)=4$이고 $g(2)=4$이다.
이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(2)=4$에서 $f(4)=2$
$f(2)=\sqrt{2a+b}+2=4$에서
$2a+b=4$ $\quad\cdots$ ㉠
$f(4)=\sqrt{4a+b}+2=2$에서
$4a+b=0$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $a=-2$, $b=8$
$\therefore\ f(x)=\sqrt{-2x+8}+2$
$g(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로
$f(k)=\sqrt{-2k+8}+2=6$에서
$\sqrt{-2k+8}=4$, $-2k+8=16$ $\quad\therefore\ k=-4$
$\therefore\ g(6)=-4$

41 정답 -8

해설 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 한 점의 x좌표가 8이므로
$\sqrt{8a}=8$, $8a=64$ $\therefore\ a=8$
따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{8x+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접하므로 $\sqrt{8x+b}=x$의 양변을 제곱하면
$8x+b=x^2$ $\quad\therefore\ x^2-8x-b=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(-b)=0$
$16+b=0$ $\quad\therefore\ b=-16$
$\therefore\ a+b=-8$

42 정답 ⑤

해설 직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3}=x+k$

$\therefore\ x+3=(x+k)^2$

$x^2+(2k-1)x+(k^2-3)=0$ 에서

$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+12=0$

$\therefore\ -4k+13=0$

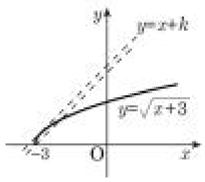
$\therefore\ k=\frac{13}{4}$

또, 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0=-3+k\quad\therefore\ k=3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3\le k<\frac{13}{4}$



43 정답 ②

해설 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $x=3$일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3}-2$가 1과 5 사이에 있어야 한다.

즉, $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$

$\sqrt{3k+3}-2\ge1$에서

$\sqrt{3k+3}\ge3,\ 3k+3\ge9$

$\therefore\ k\ge2$

또, $\sqrt{3k+3}-2\le5$에서

$\sqrt{3k+3}\le7,\ 0\le3k+3\le49$

$\therefore\ 2\le k\le\frac{46}{3}$

따라서 $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$를 만족하는 k의 범위는

$2\le k\le\frac{46}{3}$ 이므로 구하는 정수 k는 $2, 3, 4, \cdots, 15$의 14개이다.

44 정답 $\frac{1}{3}$

해설 점 P, Q가 함수 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$b=\sqrt{a}$, $d=\sqrt{c}$, 즉 $a=b^2$, $c=d^2$이 성립한다.

또, 직선 PQ의 기울기는 $\frac{d-b}{c-a}$이므로

$a=b^2$, $c=d^2$을 대입하여 정리하면

$\frac{d-b}{d^2-b^2}=\frac{1}{b+d}$

이때 $b+d=3$이므로 직선 PQ의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

45 정답 ④

해설 $\overline{AB}=\sqrt{2\cdot\frac{7}{2}+2}=3$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot3=\frac{21}{4}$

46 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

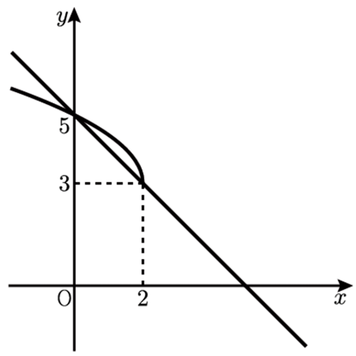
함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한

필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.

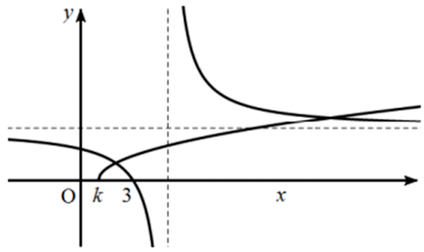
따라서 구하는 k의 최솟값은

$3=-2+k$

$\therefore\ k=5$

47 정답 ①

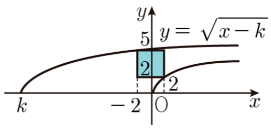
해설 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 점근선은 두 직선 $x=5$, $y=3$
$y=0$일 때 $x=3$이므로 그래프는 다음과 같다.



위 그림에서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$k \le 3$이어야 한다.
따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3

48 정답 ②

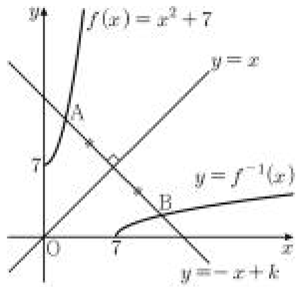
해설 다음 그림과 같이 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 점 $(-2,\ 5)$를 지날 때 k의 값이 최소가 된다.



따라서 $5=\sqrt{-2-k}$이므로 k의 최솟값은 -27이다.

49 정답 ④

해설 다음 그림과 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는
$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고
직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로
두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

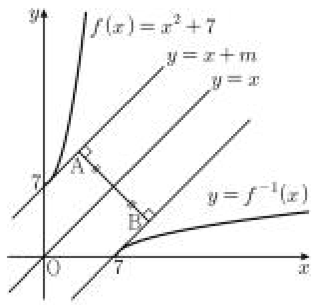


즉, 선분 AB의 길이의 최솟값은 함수 $f(x)=x^2+7$
$(x \ge 0)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 최솟값의 2배이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+7)$ $(a>0)$이라 하면 점 P와
직선 $y=x$, 즉 $-x+y=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-a+a^2+7|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

이므로 d의 최솟값은 $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$이다.
따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은
$2d=2\cdot\dfrac{27\sqrt{2}}{8}=\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$

[다른 풀이]
다음 그림과 같이 직선 $y=x$와 평행하고,
함수 $f(x)=x^2+7$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을
$y=x+m$이라 하자.



이차방정식 $x^2+7=x+m$, 즉 $x^2-x+7-m=0$의
판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로
$D=(-1)^2-4(7-m)=0$, $4m-27=0$
$\therefore m=\dfrac{27}{4}$
이때 두 직선 $y=x$와 $y=x+\dfrac{27}{4}$은 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과
직선 $y=x+\dfrac{27}{4}$, 즉 $4x-4y+27=0$ 사이의 거리와
같으므로 거리 d는

$d=\dfrac{|27|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\dfrac{27}{4\sqrt{2}}=\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$2d=2\cdot\dfrac{27\sqrt{2}}{8}=\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 분수식 $\dfrac{x}{x^2-4} \cdot \dfrac{x-2}{x^2+2x}$를 간단히 하면?

① $-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ② $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ③ $\dfrac{2}{(x+2)^2}$
④ $-\dfrac{1}{x(x+2)^2}$ ⑤ $\dfrac{1}{x(x+2)^2}$

02 $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{x^2+16}=\dfrac{a}{f(x)}$일 때, $f\left(\dfrac{a}{64}\right)$의 값을 구하시오.
(단, $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, a는 상수이다.)

03 $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+1}$가 x에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c의 값을 정하였을 때, abc의 값은? (단, $x \neq \pm 1$)

① 2 ② 3 ③ 6
④ 12 ⑤ 24

04 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여
등식 $\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{3x+10}{x+3}+\dfrac{3x+13}{x+4}-\dfrac{2x+11}{x+5}$
$=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
가 성립할 때, $ab+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수)

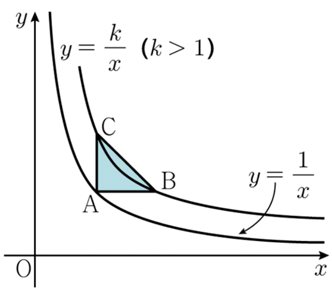
05 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$일 때,
$\dfrac{2a}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{2b}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{2c}{(c+a)(b+c)}$의 값을 구하시오.

06 세 실수 x, y, z에 대하여 $x:y:z=1:4:3$일 때,
$\dfrac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2}$의 값을 구하시오. (단, $xyz \neq 0$)

07 다음 중 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-3}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \neq -3$인 실수$\}$이다.
② 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=1$이다.
④ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$이다.
⑤ 그래프는 모든 사분면을 지난다.

08 다음 그림과 같이 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점 A에서 x축과 y축에 평행한 직선을 그어 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 8일 때, 상수 k의 값을 구하시오.



09 $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a$, $y=b$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

10 두 유리함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-a}$, $y=\dfrac{-ax+2}{x-2}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 32일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

11 빈칸에 알맞은 말로 올바른 것을 고르면?

$$y=\frac{2x+1}{x-5},\ y=\frac{x^2+3}{x-2},\ y=\frac{5x-5}{x+1}$$

위 주어진 함수들은 $\boxed{}$함수 이면서 $\boxed{}$함수가 아니다.

① 다항, 유리
② 상수, 다항
③ 유리, 다항
④ 항등, 다항
⑤ 항등, 유리

12 함수 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고 동시에 $y=x+r$에 대하여 대칭이다. 이때 $p+q+r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

13 유리함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=\frac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

14 두 함수 $y=\frac{-2x+5}{x-a}$, $y=\frac{ax+3}{x+4}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 80일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

15 함수 $y=\frac{3x+1}{x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{5x+28}{x+3}$의 그래프와 일치한다. 상수 $p,\ q$의 합 $p+q$의 값을 구하시오.

16 유리함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=\frac{ax+b}{x-c}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc의 값을 구하시오.

17 함수 $y=\frac{3x-9}{x-2}$의 정의역이 $\{-1\le x<2\}$일 때, 치역은?

① $\{y\mid y<4\}$ ② $\{y\mid y\le 4\}$
③ $\{y\mid y\ge 4\}$ ④ $\{y\mid y>4\}$
⑤ $\{y\mid -1\le y<4\}$

18 [2019년 10월 고3 문과 5번 변형]

함수 $f(x)=-\dfrac{2}{3x-5}+a$의 정의역과 치역이 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{7}{3}$

19 함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-3,\ 5)$를 지나고 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭일 때, abc의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

20 좌표평면에서 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

21 유리함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}$ $(b\neq-3)$에 대하여 $(f\circ f)(a)=a$를 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재할 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

22 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$의 그래프가 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 동시에 직선 $y=x+a$에 대하여 대칭이다. 이때 $a+p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

23 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{3x-1}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+3\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최댓값을 구하시오.

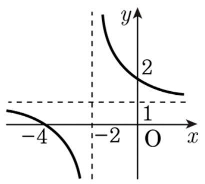
24 함수 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5　② 7　③ 9
④ 11　⑤ 13

25 유리함수 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p의 최솟값은?

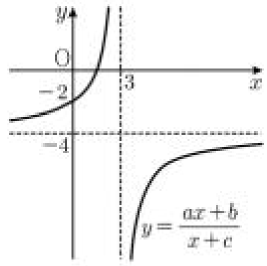
① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

26 함수 $y=\dfrac{c-x}{ax+b}$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① -1　② -2　③ -4
④ -7　⑤ 0

27 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $ac \neq b$)



① -5　② -4　③ -3
④ -2　⑤ -1

28 [2018년 9월 고2 이과 8번/3점]
두 상수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x|2 \leq x \leq a\}$인 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$의 치역이 $\{y|-1 \leq y \leq b\}$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>2$, $b>-1$)

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

29 $0 \leq x \leq a$에서 함수 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}$의 최댓값이 6, 최솟값이 5일 때, 상수 a, k에 대하여 $a+k$의 값을 구하시오. (단, $k>12$)

30 다음 보기 중 함수 $f(x)=\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.
ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0,\ x\neq 2$인 실수$\}$이다.
ㄷ. 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

31 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동 한 것이다.
ㄷ. 모든 사분면을 지난다.

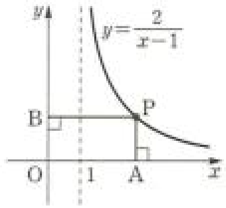
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

32 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{2x+3}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+2\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

33 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가 한 점에서 만날 때, 모든 k의 값의 합을 구하시오.

34 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+2\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

35 다음 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 위의 한 점 P와 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소가 될 때, 이 사각형의 넓이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 1 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ 4

36 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+1998}$가 정의역의 임의의 x에 대하여

$f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시킬 때 상수 a의 값은? (단 $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이고 $x\neq1998$)

① 1998 ② -1998 ③ 1
④ -1 ⑤ 0

37 두 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $g(x)=1-x$에 대하여 $g(x)=f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)$이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

38 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{-x+c}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

39 함수 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$를 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. 이때 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

40 두 함수 $f(x)=\frac{2x-4}{x+1}$, $g(x)=-x+3$의 역함수를 각각 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$라 할 때, $(f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 3　⑤ 5

41 함수 $f(x)=\frac{ax+5}{bx+1}$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 $(f\circ f)(1)=2$, $g(3)=1$일 때, $(g\circ g)\left(\frac{8}{3}\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

42 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$으로 정의할 때, $f^{2020}(202)$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

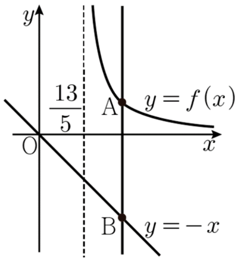
① 0　② 2　③ 20
④ 202　⑤ 2020

43 두 함수 $f(x)=\frac{3x+1}{2x+3}$, $g(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 함수 $h(x)$가 $(h\circ g)(x)=f(x)$를 만족할 때, $h(-1)$의 값을 구하시오.

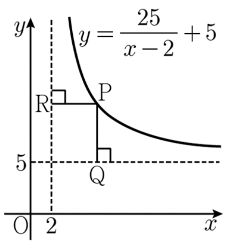
44 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$에 대하여 $f_1(x)=f(x)$, $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$로 정의한다. 이때 $f_{180}(f_{600}(3))$의 값을 구하시오.

45 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}(x)=(f^n\circ f)(x)$ (n은 자연수)로 정의할 때, $\frac{1}{f^{199}(2)}$의 값을 구하시오.

46 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{20}{5x-13}\left(x>\dfrac{13}{5}\right)$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하시오.



47 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{25}{x-2}+5\ (x>2)$의 그래프 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값은?



① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

48 함수 $f(x)=\dfrac{bx+6}{x+a}$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=5$, $y=2$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

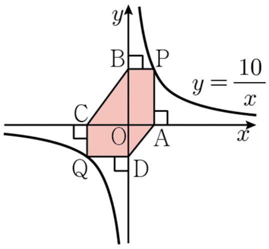
<보기>

ㄱ. $f(x)=f^{-1}(x)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+7$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49 함수 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 점 A$(2,\ 0)$에 대하여 두 선분 AP, AQ의 길이가 각각 최소가 될 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오.
(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

50 다음 그림과 같이 함수 $y=\frac{10}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 제1사분면 위에 있는 점을 P, 제3사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값을 구하시오.



51 $2 \le x \le 4$인 모든 x에 대하여
부등식 $ax+1 \le \frac{3x}{x-1} \le bx+1$이 항상 성립할 때,
상수 a의 최댓값과 상수 b의 최솟값의 합을 구하시오.

52 두 유리함수 $y=\frac{6x+2}{x+a}$, $y=\frac{ax+4}{2-x}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $y=4x-7$에 의해 이등분될 때, a의 값을 구하시오.
$\left(\text{단, } a\text{는 } a \ne -8,\ a \ne -6,\ a \ne -2,\ a \ne \frac{1}{3}\text{인 상수이다.}\right)$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 0	03 ③
04 54	05 0	06 $-\frac{12}{35}$
07 ④	08 5	09 2
10 6	11 ③	12 ③
13 3	14 6	15 -5
16 -18	17 ③	18 ③
19 ④	20 ②	21 ⑤
22 ③	23 -1	24 ②
25 ④	26 ④	27 ⑤
28 ①	29 21	30 ③
31 ④	32 1	33 2
34 1	35 ②	36 ②
37 -9	38 3	39 ①
40 ⑤	41 9	42 ④
43 -2	44 3	45 2
46 $\frac{33}{5}$	47 ②	48 ④
49 8	50 30	51 $\frac{13}{4}$
52 -4		

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 $\dfrac{x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2+2x}=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}\cdot\dfrac{x-2}{x(x+2)}$
$=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

02 정답 0

해설 $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{x^2+16}$
$=\dfrac{x+4-(x-4)}{(x+4)(x-4)}-\dfrac{8}{x^2+16}$
$=\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{8}{x^2+16}$
$=\dfrac{8(x^2+16)-8(x^2-16)}{(x^2+16)(x^2-16)}$
$=\dfrac{256}{x^4-256}$

따라서 $f(x)=x^4-256,\ a=256$이므로

$f\left(\dfrac{a}{64}\right)=f(4)=4^4-256=0$

03 정답 ③

해설 $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+1}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$을 곱하면

$4x^2=a(x-1)(x+1)+b(x+1)+c(x-1)^2$

$4x^2=a(x^2-1)+b(x+1)+c(x^2-2x+1)$

$4x^2=(a+c)x^2+(b-2c)x+(-a+b+c)$ ⋯ ㉡

이때 ㉡이 x에 대한 항등식이므로

$a+c=4,\ b-2c=0,\ -a+b+c=0$

따라서 세 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=2,\ c=1$이므로

$abc=6$

04 정답 54

해설 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{3x+10}{x+3}+\dfrac{3x+13}{x+4}-\dfrac{2x+11}{x+5}$

$=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{3(x+3)+1}{x+3}+\dfrac{3(x+4)+1}{x+4}-\dfrac{2(x+5)+1}{x+5}$

$=\left(2+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(3+\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(3+\dfrac{1}{x+4}\right)-\left(2+\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{x+5-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{2x^2+14x+26}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

따라서 $a=2,\ b=14,\ c=26$이므로

$ab+c=54$

05 정답 0

해설 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$에서

$\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore\ ab+bc+ca=0$

$\therefore\ \dfrac{2a}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{2b}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{2c}{(c+a)(b+c)}$

$=\dfrac{2a(b+c)+2b(c+a)+2c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$

06 정답 $-\frac{12}{35}$

해설 $x:y:z=1:4:3$이므로
$x=k,\ y=4k,\ z=3k\ (k\neq 0)$으로 놓으면

$$\frac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2}=\frac{k\cdot 4k\cdot 3k}{k^2\cdot 4k-(4k)^2\cdot 3k+k\cdot(3k)^2}=\frac{12k^3}{4k^3-48k^3+9k^3}=-\frac{12k^3}{35k^3}=-\frac{12}{35}$$

07 정답 ④

해설 $y=\frac{2x-2}{x-3}=\frac{4}{x-3}+2$

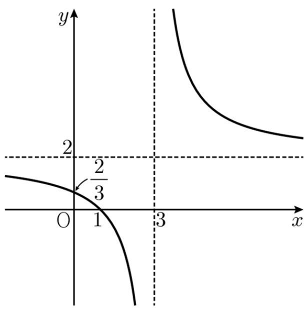
① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$이다.

② 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=2$이다.

④ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$이다.

⑤ 함수 $y=\frac{2x-2}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



08 정답 5

해설 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right)\ (\alpha>0)$이라 하면

두 점 B, C는 $B\left(k\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right)$, $C\left(\alpha,\ \frac{k}{\alpha}\right)$이고, $k>1$이므로

$\overline{AB}=k\alpha-\alpha=\alpha(k-1)$, $\overline{AC}=\frac{k}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}=\frac{k-1}{\alpha}$

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot\alpha(k-1)\cdot\frac{k-1}{\alpha}=\frac{1}{2}(k-1)^2$$

즉, $\frac{1}{2}(k-1)^2=8$이므로

$(k-1)^2=16$

$k-1=\pm 4$

$\therefore\ k=5\ (\because\ k>1)$

09 정답 2

해설
$$y=\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

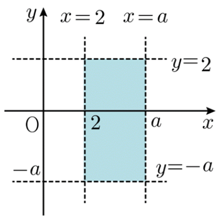
따라서 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=2$

10 정답 6

해설 $y=\dfrac{2x-4}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-4}{x-a}=\dfrac{2a-4}{x-a}+2$이므로
이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은
$x=a$, $y=2$이고,
$y=\dfrac{-ax+2}{x-2}=\dfrac{-a(x-2)-2a+2}{x-2}=\dfrac{-2a+2}{x-2}-a$
이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은
$x=2$, $y=-a$이다.
그런데 $0<a<2$이면 네 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 32보다 작으므로 다음 그림과 같이 $a>2$이어야 한다.



이때 넓이는 32이므로 $(a-2)(a+2)=32$에서
$a^2-4=32$, $a^2=36$
$\therefore a=6$ ($\because a>2$)

11 정답 ③

해설 주어진 함수들은 유리함수면서 다항함수가 아닌 분수함수이다.

12 정답 ③

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-5}{x+4}=\dfrac{-5}{x+4}+2$

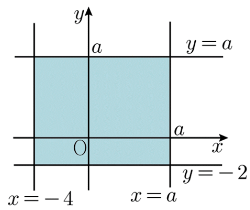
따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(-4,\ 2)$에 대하여 대칭이고 점 $(-4,\ 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x+6$에 대하여 대칭이다.
$\therefore p=-4,\ q=2,\ r=6$
$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

13 정답 3

해설 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\dfrac{2}{x-2}-3=\dfrac{-3x+8}{x-2}$
이 식이 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$와 같아야 하므로
$a=-3,\ b=8,\ c=-2$
$\therefore a+b+c=3$

14 정답 6

해설 $y=\dfrac{-2x+5}{x-a}=-2+\dfrac{5-2a}{x-a}$이므로
점근선의 방정식은 $x=a,\ y=-2$
$y=\dfrac{ax+3}{x+4}=a+\dfrac{3-4a}{x+4}$이므로
점근선의 방정식은 $x=-4,\ y=a$
따라서 두 함수의 점근선은 다음 그림과 같다.



색칠한 부분의 넓이가 80이므로
$(a+4)(a+2)=80$
$a^2+6a-72=0$
$(a+12)(a-6)=0$
$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

15 정답 -5

해설 두 함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$, $y=\dfrac{5x+28}{x+3}$에서
$y=\dfrac{3x+1}{x-4}=\dfrac{13}{x-4}+3$ $\cdots$ ㉠
$y=\dfrac{5x+28}{x+3}=\dfrac{13}{x+3}+5$ $\cdots$ ㉡
이때 함수 ㉠을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 함수는
$y-q=\dfrac{13}{(x-p)-4}+3$
$y=\dfrac{13}{x-p-4}+3+q$ $\cdots$ ㉢
두 함수 ㉡과 ㉢이 일치해야 하므로
$-p-4=3$, $3+q=5$에서 $p=-7$, $q=2$
$\therefore p+q=-7+2=-5$

16 정답 -18

해설 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행 이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{3}{x-3}-2=\dfrac{-2x+3}{x-3}$

$\therefore a=-2, b=3, c=3$

$\therefore abc=-18$

17 정답 ③

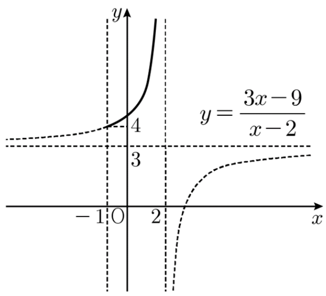
해설 $y=\dfrac{3x-9}{x-2}=\dfrac{3(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}+3$이므로

$y=\dfrac{3x-9}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x<2$에서 $y=\dfrac{3x-9}{x-2}$의 그래프는

다음 그림과 같으므로 치역은 $\{y|y\ge 4\}$이다.



18 정답 ③

해설 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \middle| x\ne\dfrac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$이고

치역은 $\{y|y\ne a\text{인 실수}\}$

따라서 정의역과 치역이 서로 같아야 하므로

$a=\dfrac{5}{3}$

19 정답 ④

해설 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-3, 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{3\cdot(-3)+b}{-3+a}$, $5=\dfrac{-9+b}{-3+a}$

$-15+5a=-9+b$

$\therefore b=5a-6$ $\cdots$ ㉠

한편,

$y=\dfrac{3x+b}{x+a}=\dfrac{3(x+a)-3a+b}{x+a}=\dfrac{-3a+b}{x+a}+3$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-a=-2$, $c=3$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore abc=24$

20 정답 ②

해설 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=k$

이때 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$(5, k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\therefore k=5$

21 정답 ⑤

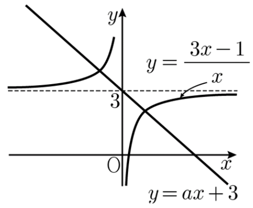
해설 $b\neq -3$이면 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.
$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$에서 $f(a)=f^{-1}(a)$이므로
$x=a$는 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
그런데 함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}(b\neq -3)$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로
$f(a)=f^{-1}(a)=a$에서
$\dfrac{3a-3}{3a+b}=a$
$3a-3=3a^2+ab$
$\therefore\ 3a^2+(b-3)a+3=0$ $\cdots$ ㉠
이때 조건을 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재한다고 하였으므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(b-3)^2-4\cdot 3\cdot 3=0$에서
$(b-3)^2=36,\ b-3=\pm 6$
$\therefore\ b=9\ (\because\ b\neq -3)$
이것을 ㉠에 대입하면
$3a^2+6a+3=0,\ a^2+2a+1=0$
$(a+1)^2=0$
$\therefore\ a=-1$
$\therefore\ a+b=(-1)+9=8$

22 정답 ③

해설 $y=\dfrac{3x-1}{x+2}=-\dfrac{7}{x+2}+3$
이므로 점근선의 방정식은 $x=-2,\ y=3$
따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2,\ 3)$에 대하여 대칭이므로
$p=-2,\ q=3$
또, 직선 $y=x+a$가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로
$3=-2+a$ $\qquad\therefore\ a=5$
$\therefore\ a+p+q=6$

23 정답 -1

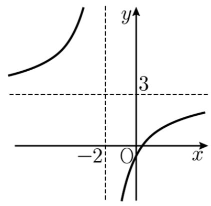
해설 $y=\dfrac{3x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+3$이므로 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 3)$을 지난다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만나야 한다.
따라서 a의 값의 범위는 $a<0$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다.

24 정답 ②

해설 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+k-14}{x+2}=\dfrac{k-14}{x+2}+3$
이므로 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{k-14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 다음 그림과 같이 $k-14<0$이어야 하므로



$k<14$ $\cdots$ ㉠
또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로
$\dfrac{k-8}{2}<0$
$\therefore\ k<8$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k<8$
따라서 자연수 k는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$의 7개이다.

25 정답 ④

해설 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=p,\ y=2$

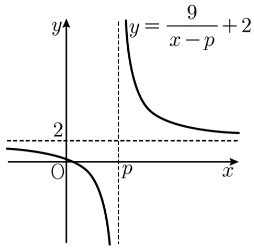
이때 $p \le 0$이면 함수 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가

제3사분면을 지나므로 $p>0$이어야 한다.

$p>0$일 때 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을

지나지 않으려면 다음 그림과 같아야 하므로 $x=0$에서의

함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다.



즉, $\dfrac{9}{-p}+2 \ge 0$이므로 $\dfrac{9}{-p} \ge -2$

$-p<0$이므로 양변에 $-p$를 곱하면

$9 \le 2p$

$\therefore\ p \ge \dfrac{9}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 5이다.

26 정답 ④

해설 점근선이 $x=-2,\ y=1$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+1 \quad \cdots ㉠$

㉠이 $(0,\ 2)$를 지나므로 대입하면 $k=2$이다.

$y=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{-x-4}{-x-2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-4$

$\therefore\ a+b+c=-7$

27 정답 ⑤

해설 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=3,\ y=-4$이므로 주어진 함수를

$y=\dfrac{k}{x-3}-4\ (k \ne 0) \quad \cdots ㉠$

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{-3}-4$

에서 $k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-6}{x-3}-4=\dfrac{-4x+6}{x-3}$

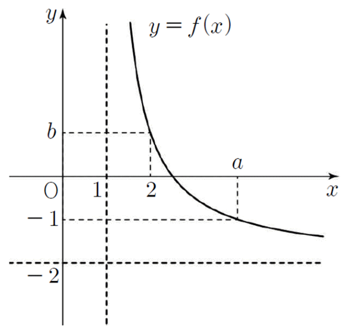
따라서 $a=-4,\ b=6,\ c=-3$이므로

$a+b+c=-4+6+(-3)=-1$

28 정답 ①

해설 유리함수의 성질 이해하기

$f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$이라 하면



$f(2)=b=1,\ f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2=-1$

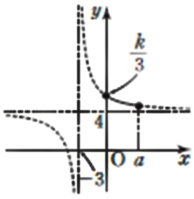
따라서 $a=4,\ b=1$이므로 $a+b=5$

29 정답 21

해설 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}=\dfrac{4(x+3)+k-12}{x+3}=\dfrac{k-12}{x+3}+4$

$k>12$이므로 $k-12>0$이다.

따라서 $0\le x\le a$에서 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=0$일 때 최댓값을 가지며 그 값이 6이므로 $6=\dfrac{k}{3}$

$\therefore k=18$

$x=a$에서 최솟값이 5이므로

$5=\dfrac{4a+18}{a+3}$

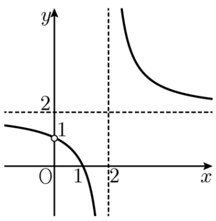
$\therefore a=3$

$\therefore a+k=3+18=21$

30 정답 ③

해설 $f(x)=\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\dfrac{2x-2}{x}}{\dfrac{x-2}{x}}=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나고, 제3사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0,\ x\neq 2$인 실수$\}$이다. (참)

ㄷ. 그래프가 점 $(4,\ 3)$은 지나지만 점 $(0,\ 1)$은 지나지 않으므로
점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

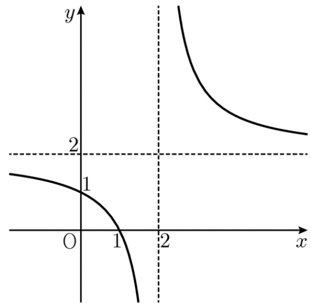
31 정답 ④

해설 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$이므로

ㄱ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이다.

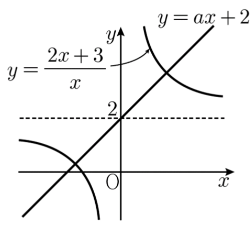
ㄷ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같고 제1, 2, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32 정답 1

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x}=\dfrac{3}{x}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지난다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로

$y=\dfrac{2x+3}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 만나야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $a>0$이므로

정수 a의 최솟값은 1이다.

33 정답 2

해설 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가

한 점에서 만나므로 $\dfrac{x-2}{x+4}=kx+2$에서

$x-2=(kx+2)(x+4)$

$x-2=kx^2+2(2k+1)x+8$

$\therefore\ kx^2+(4k+1)x+10=0 \quad \cdots ㉠$

(ⅰ) $k=0$인 경우

㉠에 $k=0$을 대입하면 $x+10=0$

$\therefore\ x=-10$

따라서 한 개의 근을 가지므로

함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선이 한 점에서 만난다.

(ⅱ) $k\neq 0$인 경우

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(4k+1)^2-40k=0$

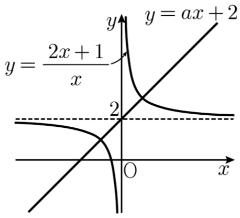
$16k^2-32k+1=0$

이차방정식에서 근과 계수와의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 k의 값의 합은 2이다.

34 정답 1

해설 $y=\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$을 지난다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 만나야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $a>0$이므로 정수 a의 최솟값은 1이다.

35 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{2}{t-1}\right)$로 놓으면 $t>1$이므로

사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$2\left(t+\dfrac{2}{t-1}\right)=2\left(1+t-1+\dfrac{2}{t-1}\right)$

$\geq 2\left\{1+2\sqrt{(t-1)\cdot\dfrac{2}{t-1}}\right\}$

$=2(1+2\sqrt{2})$

이때 등호는 $t-1=\dfrac{2}{t-1}$일 때 성립하므로

$t=\sqrt{2}+1$일 때 둘레의 길이가 최소가 된다.

따라서 이때의 사각형 OAPB의 넓이는

$t\cdot\dfrac{2}{t-1}=(\sqrt{2}+1)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

36 정답 ②

해설 $y=\dfrac{ax+1}{x+1998}$의 역함수는 $y^{-1}=\dfrac{-1998x+1}{x-a}$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$a=-1998$

37 정답 -9

해설 먼저 $f^{-1}(x)$를 구해보면

$y=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

$\longrightarrow\quad x=1-\dfrac{1}{y}$

$\longrightarrow\quad y=\dfrac{1}{1-x}=f^{-1}(x)$

$\therefore\quad f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)=10$

$\longrightarrow\quad g(x)=1-x=10 \qquad x=-9$

38 정답 3

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x+4} \Leftrightarrow xy+4y=2x+3$

$\Leftrightarrow x(y-2)=-4y+3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+3}{y-2}$

이때, x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{-4x+3}{x-2}$이다.

따라서 $(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로

$f(x)=\dfrac{-4x+3}{x-2}=\dfrac{4x-3}{-x+2}$에서

$a=4,\ b=-3,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=3$

39 정답 ①

해설 $y=\dfrac{x+6}{x+2}$에서 $x=\dfrac{-2y+6}{y-1}$이므로

$g(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$

즉, $f(x)=1+\dfrac{4}{x+2},\ g(x)=-2+\dfrac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=f(x)$와 일치하므로

$a=-3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-3+3=0$

40 정답 ⑤

해설 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1},\ g(x)=-x+3$에 대하여

$(f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(g(f^{-1}(0)))$이므로

$f^{-1}(0)=k$로 놓으면 $f(k)=0$

$f(k)=\dfrac{2k-4}{k+1}=0,\ 2k-4=0$

$\therefore\ k=2$

이므로 $f^{-1}(g(f^{-1}(0)))=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)$

또, $f^{-1}(1)=l$로 놓으면 $f(l)=1$

$f(l)=\dfrac{2l-4}{l+1}=1,\ 2l-4=l+1$

$\therefore\ l=5$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(1)=5$

41 정답 9

해설 $g(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$\dfrac{a+5}{b+1}=3,\ a+5=3b+3$

$\therefore\ a-3b=-2 \quad \cdots ㉠$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$이므로

$\dfrac{3a+5}{3b+1}=2,\ 3a+5=6b+2$

$\therefore\ a-2b=-1 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{x+5}{x+1}$

$g\left(\dfrac{8}{3}\right)=k$로 놓으면 $f(k)=\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{k+5}{k+1}=\dfrac{8}{3},\ 3k+15=8k+8,\ 5k=7$

$\therefore\ k=\dfrac{7}{5}$

$g\left(\dfrac{7}{5}\right)=l$로 놓으면 $f(l)=\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{l+5}{l+1}=\dfrac{7}{5},\ 5l+25=7l+7,\ 2l=18$

$\therefore\ l=9$

따라서 $(g\circ g)\left(\dfrac{8}{3}\right)=g\left(g\left(\dfrac{8}{3}\right)\right)=g\left(\dfrac{7}{5}\right)=9$

42 정답 ④

해설 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-(x-1)}{x-1}}$$

$$=\dfrac{2x}{2}=x$$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^2(x)=f^4(x)=\cdots=f^{2n}(x)=x$이므로

$f^{2020}(202)=202$

43 정답 -2

해설 $(h \circ g)(x)=f(x)$에서

$h(g(x))=f(x)$이므로 $h\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x+1}{2x+3}$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$h(t)=\frac{3\cdot\frac{1}{t}+1}{2\cdot\frac{1}{t}+3}=\frac{3+t}{2+3t}$$

$$\therefore h(x)=\frac{3+x}{2+3x}$$

$$\therefore h(-1)=-2$$

44 정답 3

해설 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 분수함수 중에 순환성을 가지는 것이 있다.

이때 순환마디를 찾는 것이 기본이다.

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x-3}{x+1}$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)-3}{f_1(x)+1}$$

$$=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}=-\frac{x+3}{x-1}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)-3}{f_2(x)+1}$$

$$=\frac{-\frac{x+3}{x-1}-3}{-\frac{x+3}{x-1}+1}=x$$

$f_3(x)=x$이므로 $f_n(x)$의 순환마디는 3

따라서 다음이 성립한다.

$f_{3n}(x)=f_3(x)$, $f_{3n+1}(x)=f_1(x)$,

$f_{3n+2}(x)=f_2(x)$ (단, n은 자연수)

또, 두 자연수 m, n에 대하여

$f_m(f_n(x))=f_{m+n}(x)$

따라서

$$f_{180}(f_{600}(3))=f_{780}(3)$$
$$=f_{3\cdot 260}(3)$$
$$=f_3(3)=3$$

45 정답 2

해설 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$\frac{1}{f^{199}(2)}=\frac{1}{f^{3\cdot 66+1}(2)}=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

46 정답 $\frac{33}{5}$

해설 점 A의 x좌표를 k $\left(k>\frac{13}{5}\right)$이라 하면

$\mathrm{A}\left(k,\ \frac{20}{5k-13}\right)$, $\mathrm{B}(k,\ -k)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\frac{20}{5k-13}-(-k)=\frac{20}{5k-13}+k$$

이때 $k>\frac{13}{5}$에서 $5k-13>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{20}{5k-13}+k=\frac{20}{5k-13}+\frac{1}{5}(5k-13)+\frac{13}{5}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{20}{5k-13}\cdot\frac{1}{5}(5k-13)}+\frac{13}{5}$$
$$=2\sqrt{4}+\frac{13}{5}=\frac{33}{5}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{20}{5k-13}=\frac{1}{5}(5k-13)\text{일 때 성립}\right)$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\frac{33}{5}$이다.

47 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(k, \dfrac{25}{k-2}+5\right)$ $(k>2)$라 하면

$\mathrm{Q}(k, 5)$, $\mathrm{R}\left(2, \dfrac{25}{k-2}+5\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{25}{k-2}+5\right)-5=\dfrac{25}{k-2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=k-2$이고

$k>2$에서 $k-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\frac{25}{k-2}+k-2\\&\ge 2\sqrt{\frac{25}{k-2}\cdot(k-2)}\\&=2\cdot 5\\&=10\ (\text{단, 등호는 } k=7\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 10이다.

48 정답 ④

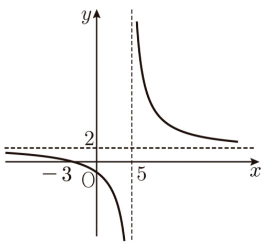
해설 $f(x)=\dfrac{bx+6}{x+a}=\dfrac{-ab+6}{x+a}+b$

이때 점근선은 $x=-a$, $y=b$이므로

$-a=5$, 즉 $a=-5$이고, $b=2$이다.

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x+6}{x-5}=\dfrac{16}{x-5}+2$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. [반례] $f(9)=\dfrac{16}{9-5}+2=6$에서 $f^{-1}(6)=9$이고,

$f(6)=\dfrac{16}{6-5}+2=18$이므로

$f(x)\neq f^{-1}(x)$ (거짓)

ㄴ. $f(x)$의 점근선이 $x=5$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점은 $(5, 2)$이다.

따라서 $f(x)$는 $y=\pm(x-5)+2$, 즉 $y=x-3$, $y=-x+7$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수의 그래프는 모든 사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

49 정답 8

해설 함수 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프 위의 점 P를

$\mathrm{P}\left(\alpha, \dfrac{1}{\alpha-2}\right)$이라 하면 점 $\mathrm{A}(2, 0)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(\alpha-2)^2+\left(\dfrac{1}{\alpha-2}-0\right)^2}$

이때

$(\alpha-2)^2+\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2\ge 2\sqrt{(\alpha-2)^2\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2}=2$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\ge\sqrt{2}$이고, $(\alpha-2)^2=\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2$일 때

등호가 성립한다.

즉, $\alpha-2=1$ 또는 $\alpha-2=-1$일 때 등호가 성립하므로

$\alpha=3$ 또는 $\alpha=1$

에서 두 선분 AP, AQ의 길이가 각각 최소가 되는 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(1, -1)$, $\mathrm{Q}(3, 1)$

이고 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 8이다.

50 정답 30

해설 두 점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}\left(a, \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b, -\dfrac{10}{b}\right)$ $(a>0, b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b, 0)$, $\mathrm{D}\left(0, -\dfrac{10}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}\\&=a\cdot\frac{10}{a}+b\cdot\frac{10}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{10}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{10}{b}\\&=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}S&=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\\&\ge 20+5\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})\\&=20+5\cdot 2\\&=30\end{aligned}$$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 30이다.

51 정답 $\frac{13}{4}$

해설 $f(x)=ax+1$, $g(x)=\frac{3x}{x-1}$, $h(x)=bx+1$이라 하자.

$2 \le x \le 4$인 모든 x에 대하여

부등식 $ax+1 \le \frac{3x}{x-1} \le bx+1$이 성립하려면

직선 $y=f(x)$는 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에,

직선 $y=h(x)$는 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에

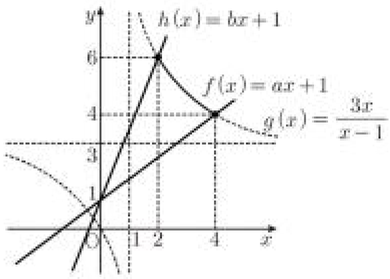
있어야 한다.

$g(x)=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$이므로

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고 $x=2$일 때 $y=6$, $x=4$일 때 $y=4$이므로

$2 \le x \le 4$에서 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=f(x)$는 기울기 a의 값에 관계없이

점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이고 a의 값이 최대가 될 때는

직선이 점 $(4,\ 4)$를 지날 때이므로

$a \le \frac{3}{4}$

또, 직선 $y=h(x)$도 기울기 b의 값에 관계없이

점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이고 b의 값이 최소가 될 때는

직선이 점 $(2,\ 6)$을 지날 때이므로

$b \ge \frac{5}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{4}$, b의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{13}{4}$

52 정답 -4

해설 함수 $y=\frac{6x+2}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=6$

함수 $y=\frac{ax+4}{2-x}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-a$

네 점근선으로 둘러싸인 부분은 직사각형이고,

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-a+2}{2},\ \frac{6-a}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=4x-7$ 위에 있으므로

$\frac{6-a}{2}=4\cdot\left(\frac{-a+2}{2}\right)-7$

$6-a=-4a+8-14$

$\therefore\ a=-4$