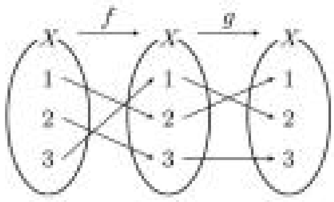
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
24문제 / dre수학			

01 두 함수 f, g의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때 $(f^{-1} \circ g)(2)$의 값은?

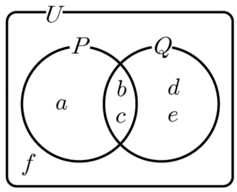


① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

02 집합 $A=\{\varnothing, 1, 2, \{1, 2\}\}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\{1\} \in A$　④ $\{1, 2\} \in A$　⑤ $\{1, 2\} \subset A$

03 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, P, Q의 포함관계가 다음과 같다. 명제 $q \rightarrow \sim p$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 원소를 구한 것은?



① 없음　② a　③ b, c　④ d, e　⑤ f

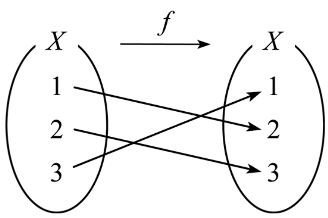
04 $x>3$일 때, $\dfrac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3　② 5　③ 12　④ 15　⑤ 17

05 [2007년 3월 고2 20번]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여

함수 $f: X \to X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 라 할 때, $f^{100}(1)-f^{200}(3)$의 값은?

① -2 ② 2 ③ -1

④ 1 ⑤ 0

06

무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}-3$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ -2)$에서 만날 때, $g(5)$의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4

④ -3 ⑤ -2

07 [2015년 6월 고2 이과 9번/3점]

일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

함수 $y=f(2x+3)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다.

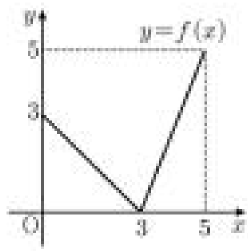
두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

08

$0 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)+1$을 만족시키는 서로 다른 실근의 합은?



① 5 ② $\frac{27}{5}$ ③ $\frac{29}{5}$

④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{33}{5}$

09 함수 $y=\sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-2<k\le -\frac{7}{4}$　② $-2\le k<-\frac{7}{4}$
③ $k>-\frac{7}{4}$　④ $k\le -2$
⑤ $k>-2$

10 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 A^C과 B가 서로소이고 A와 C^C이 서로소일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $A\cap B=B$
ㄴ. $(B\cap C)^C\cap A=B$
ㄷ. $C\cup(A\cup B)^C=U$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 전체집합 U에 대하여 서로 다른 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하고,
r는 'p 이고 $\sim q$'이기 위한 충분조건일 때,
다음 중 항상 옳은 것이 아닌 것은?

① $P\cap R=R$　② $(Q-P)\cap R=\varnothing$
③ $R\cap P^C=\varnothing$　④ $(R\cap Q)\subset P$
⑤ $R\subset(P\cap Q)$

12 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b|\le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
$=2\boxed{㉠}\ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2\ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$ 이므로
$|a|+|b|\ge |a+b|$ (단, 등호는 $\boxed{㉡}$, 즉 $\boxed{㉢}$ 일 때, 성립)

① $|ab|+ab$,　$|ab|=ab$,　$ab\le 0$
② $|ab|+ab$,　$|ab|=-ab$,　$ab\ge 0$
③ $|ab|-ab$,　$|ab|=-ab$,　$ab\le 0$
④ $|ab|-ab$,　$|ab|=ab$,　$ab\ge 0$
⑤ $|ab|-ab$,　$|ab|=ab$,　$ab\le 0$

13 두 곡선 $y=\sqrt{x+4}$, $y=\sqrt{x}$ 와 x축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

14 $a^2-4a+\dfrac{3a}{b}+\dfrac{3b}{a}$의 값이 최소가 되도록 하는 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

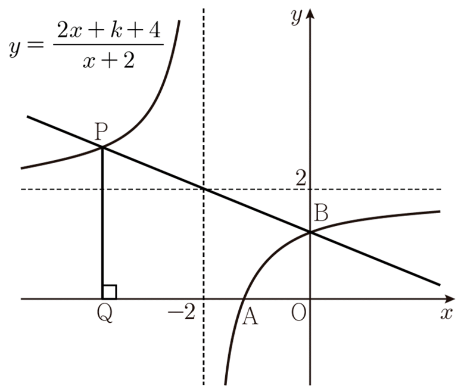
15 임의의 집합 S에 대하여 P(S)를 $P(S)=\{X\mid X\subset S\}$로 정의할 때, $P(P(\varnothing))$와 같은 것은?

① $\varnothing$ ② $\{\varnothing\}$
③ $\{\{\varnothing\}\}$ ④ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
⑤ $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

16 직선 $y=x-1$이 x축과 만나는 점을 A, 이 직선과 함수 $y=\sqrt{ax-4}$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 B, C라 하자. 점 B가 선분 AC를 $1:2$로 내분할 때, 상수 a의 값은?

① $\dfrac{8}{3}$ ② 3 ③ $\dfrac{10}{3}$
④ $\dfrac{11}{3}$ ⑤ 4

17 아래 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x+k+4}{x+2}$ $(-4<k<0)$의 그래프와 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $k=-2$일 때, 점 P의 좌표는 $(-4, 3)$이다.
ㄴ. $-4<k<0$인 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.
ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, k의 값은 $-4+2\sqrt{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 [2019년 3월 고3 문과 17번/4점]

자연수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\left|\frac{k}{2x}-2\right|\ (x>0)$$

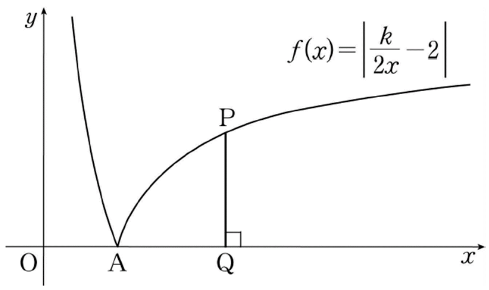
의 그래프와 x축의 교점을 A, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$이다.

ㄴ. 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 선분 PQ의 길이는 2보다 작다.

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 삼각형 AQP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 k의 최솟값은 16이다.

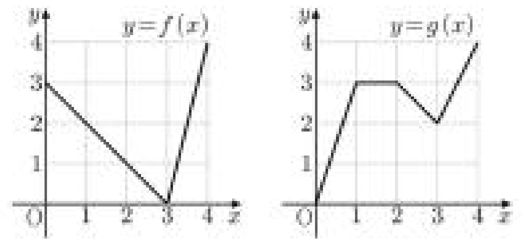


① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19 [2016년 10월 고3 문과 26번 변형]

유리함수 $y=\frac{3}{x}\ (x>0)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리가 4일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

20 $0\le x\le 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



21 세 조건 $p: x>a$, $q: -1<x\le 3$ 또는 $x>6$, $r: x>b$에 대하여 두 명제 $q\to p$, $r\to q$가 참이 되도록 하는 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하시오.

22 자연수 n에 대하여 집합 $A(n)$을

$A(n)=\{x\,|\,x$는 n^k의 일의 자리의 수, k는 자연수$\}$

라 하자. 예를 들면 $n=5$일 때, $5^1=5$, $5^2=25$, $5^3=125$, $\cdots$이므로 $A(5)=\{5\}$이다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

<보기>

ㄱ. $n(A(2))=5$

ㄴ. $A(4)\subset A(2)$

ㄷ. $A(2^m)=A(2)$인 2 이상의 자연수 m이 존재한다.

23 $x>-2$일 때, $\dfrac{x+2}{x^2+3x+3}$의 최댓값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

24 함수 $f(x)=\dfrac{3-2x}{|x|}$와 실수 a에 대하여 $g(a)$를 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수라 할 때, 함수 $y=g(a)$에 대하여 두 집합 A, B를 다음과 같이 정의하자.

$A=\{(a,\ y)\,|\,y=g(a)\}$,

$B=\{(a,\ y)\,|\,a^2+(y-1)^2=r$이고 $r>0\}$

이때 $n(A\cap B)=1$이 되도록 하는 모든 양의 실수 r의 값의 합을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ③	03 ③
04 ⑤	05 ⑤	06 ①
07 ④	08 ②	09 ②
10	11	12
13 8	14 4	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤
19 26	20 $\frac{13}{4}$	21 5
22 ㄴ, ㄷ	23 ④	24 9

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [1회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ③

해설 $f(3)=1$, $g(2)=1$이므로
$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)=3$

02

정답 ③

해설 ① 공집합은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing \in A$
② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$
③ $\{1\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1\} \notin A$
④ $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\} \in A$
⑤ $1, 2$는 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\}$는 A의 부분집합이다.
$\therefore \{1, 2\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

03

정답 ③

해설 명제 $q \to \sim p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q에는 속하지만 집합 P^C에는 속하지 않는 원소를 찾으면 된다.
이것을 만족시키는 원소로 이루어진 집합은
$P \cap Q = \{b, c\}$이다.

04

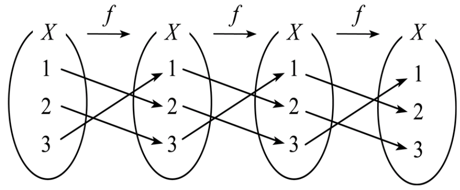
정답 ⑤

해설 $\dfrac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$
이때 $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\dfrac{3}{x-3}>0$이고
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$
$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\dfrac{3}{x-3}}+11$
$=2\cdot 3+11=17$
$\left(\text{단, 등호는 } 3(x-3)=\dfrac{3}{x-3}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 17이다.

05

정답 ⑤

해설 합성함수의 성질을 이용하여 함수값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면
$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$
같은 방법으로 $f^3(2)=2$, $f^3(3)=3$이다.
$\therefore f^3(x)=x$
$f^{100}(x)=(f^{3\cdot 33}\circ f)(x)=f(x)$,
$f^{200}(x)=(f^{3\cdot 66}\circ f^2)(x)=f^2(x)$
$\therefore f^{100}(1)=f(1)=2$
$f^{200}(3)=f^2(3)=f(f(3))=f(1)=2$
$\therefore f^{100}(1)-f^{200}(3)=2-2=0$

06

정답 ①

해설 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ -2)$에서 만나므로
$f(3)=-2$, $g(3)=-2$
이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(3)=-2$, 즉 $f^{-1}(3)=-2$에서 $f(-2)=3$
$f(3)=-2$에서 $\sqrt{3a+b}-3=-2$
$\therefore 3a+b=1 \quad \cdots ㉠$
$f(-2)=3$에서 $\sqrt{-2a+b}-3=3$
$\therefore -2a+b=36 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-7$, $b=22$
$\therefore f(x)=\sqrt{-7x+22}-3$
$g(5)=k$, 즉 $f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로
$\sqrt{-7k+22}-3=5$
$\sqrt{-7k+22}=8$, $-7k+22=64$
$\therefore k=-6$
$\therefore g(5)=-6$

07 정답 ④

해설 역함수 이해하기

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(2y+3)$이다.

그러므로

$2y+3=g(x)$

역함수는 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore a+b=-1$

08 정답 ②

해설 주어진 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0 \le x \le 3) \\ \frac{5}{2}x-\frac{15}{2} & (3 < x \le 5) \end{cases}$$

방정식 $f(f(x))=f(x)+1$에서 $f(x)=t\ (0 \le t \le 5)$라 하면 방정식 $f(t)=t+1$에서

$0 \le t \le 3$일 때, $-t+3=t+1$이므로 $t=1$

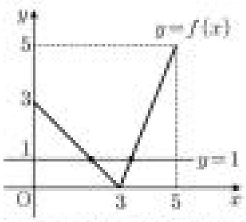
$3 < t \le 5$일 때, $\frac{5}{2}t-\frac{15}{2}=t+1$이므로 $t=\frac{17}{3}$

이때 $0 \le t \le 5$이므로 $t=1$, 즉 $f(x)=1$이다.

방정식 $f(x)=1$의 해는

$0 \le x \le 3$일 때, $-x+3=1$에서 $x=2$

$3 < x \le 5$일 때, $\frac{5}{2}x-\frac{15}{2}=1$에서 $x=\frac{17}{5}$



따라서 구하는 서로 다른 실근의 합은

$2+\frac{17}{5}=\frac{27}{5}$

09 정답 ②

해설 (ⅰ) 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x-2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x-2=x^2+2kx+k^2$

$x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$

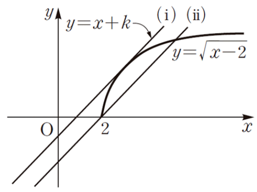
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$

$-4k-7=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{7}{4}$

(ⅱ) 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=2+k \qquad \therefore\ k=-2$



(ⅰ), (ⅱ)에서 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$-2 \le k < -\frac{7}{4}$

10 정답 ③

해설 A^C과 B가 서로소이므로 $A^C \cap B=B-A=\varnothing$,

$\therefore\ B \subset A$ … ㉠

A와 C^C이 서로소이므로 $A \cap C^C=A-C=\varnothing$,

$\therefore\ A \subset C$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $B \subset A \subset C$ … ㉢

ㄱ. ㉠에 의하여 $B \subset A$ 이므로

$A \cap B=B$ (참)

ㄴ. $(B \cap C)^C \cap A=B^C \cap A$ ($\because$ ㉢)

$=A-B$ (거짓)

ㄷ. $C \cup (A \cup B)^C=C \cup (A^C \cap B^C)$

$=(C \cup A^C) \cap (C \cup B^C)$

이때 ㉢에 의해 $B \subset A \subset C$이므로

$C \cup A^C=C \cup B^C=U$

$\therefore\ C \cup (A \cup B)^C=U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

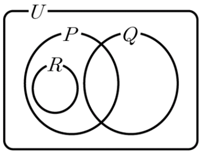
11 정답 ⑤

해설 r는 'p 이고 $\sim q$'이기 위한 충분조건이므로

$R \subset (P \cap Q^C)$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

⑤ $R \not\subset (P \cap Q)$



12 정답 ④

해설 ㉠ : $|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|a||b|+b^2-a^2-b^2-2ab$

$=2(|ab|-ab)$

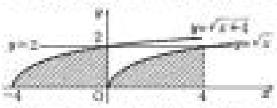
㉡ : 등호는 $|ab|-ab=0$ 일 때 성립

$\longrightarrow |ab|=ab$

㉢ : $|ab|=ab$ 이려면 $ab \geq 0$ 이어야 한다

13 정답 8

해설 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x+4}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 같다.



따라서 구하는 넓이는 네 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(4,\ 2)$, $(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

$4 \cdot 2=8$

14 정답 4

해설 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2-4a+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}=(a-2)^2+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}-4$$
$$\geq (a-2)^2+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{3b}{a}}-4$$
$$=(a-2)^2+2$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $(a-2)^2+2$는 $a=2$일 때 최소이므로 주어진 식은 $a=b=2$일 때 최소이다.

$\therefore\ a+b=4$

15 정답 ④

해설 $\mathrm{P}(\varnothing)=\{X \mid X \subset \varnothing\}$에서 $\varnothing$의 부분집합은 $\varnothing$ 뿐이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$ 이다.

또한, 집합 $\{\varnothing\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로

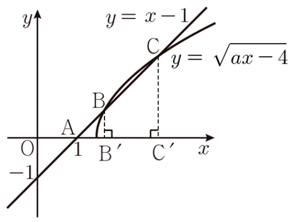
$\mathrm{P}(\mathrm{P}(\varnothing))=\{X \mid X \subset \mathrm{P}(\varnothing)\}$

$=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$

16 정답 ①

해설 $a<0$이면 함수 $y=\sqrt{ax-4}$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$가 한 점에서 만나거나 만나지 않으므로 $a>0$이다.

함수 $y=\sqrt{ax-4}$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$은 다음 그림과 같다.



두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{B}'(b,\ 0)$, $\mathrm{C}'(c,\ 0)$이라 하자.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고 점 B가 선분 AC를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{AB}'}:\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$

즉, $b-1:c-b=1:2$이므로

$c-b=2b-2$

$\therefore\ c=3b-2 \qquad \cdots ㉠$

직선 $y=x-1$과 함수 $y=\sqrt{ax-4}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로

$x-1=\sqrt{ax-4}$ 에서 양변을 제곱하면

$x^2-2x+1=ax-4$

$\therefore\ x^2-(2+a)x+5=0$

이 이차방정식의 두 근이 b, c이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$b+c=2+a \qquad \cdots ㉡$

$bc=5 \qquad \cdots ㉢$

㉢에 ㉠을 대입하면

$b(3b-2)=5$, $3b^2-2b-5=0$

$(3b-5)(b+1)=0$

$\therefore\ b=\frac{5}{3}$ ($\because\ b>0$)

㉠에 $b=\frac{5}{3}$를 대입하면 $c=3$이므로 ㉡에서

$\frac{5}{3}+3=2+a$

$\therefore\ a=\frac{8}{3}$

17 정답 ⑤

해설 $y=\dfrac{2x+k+4}{x+2}=2+\dfrac{k}{x+2}$에서 $y=0$이면

$x=-2-\dfrac{k}{2}$이므로 $\mathrm{A}\left(-2-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=\dfrac{k}{2}+2$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{k}{2}+2\right)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(-2,\ 2)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(-4,\ 2-\dfrac{k}{2}\right)$이다.

ㄱ. $k=-2$이면 $\mathrm{P}(-4,\ 3)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\frac{k}{2}+2}{2+\frac{k}{2}}=1$

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{2-\frac{k}{2}}{-2+\frac{k}{2}}=-1$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 서로 수직이다. (참)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{2}+2\right)^2$$
$$=8-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}+2\right)^2$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 2보다 작으므로,

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{2}+2\right)^2=1$이어야 한다.

따라서 방정식 $\left(\dfrac{k}{2}+2\right)^2=2$의 해는

$k=-4+2\sqrt{2}$ ($\because\ -4<k<0$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

18 정답 ⑤

해설 유리함수의 그래프의 여러 가지 성질을 추론한다.

ㄱ. 함수 $f(x)=\left|\dfrac{k}{2x}-2\right|$의 그래프와 x축의

교점의 x좌표는 $0=\left|\dfrac{k}{2x}-2\right|$에서 $\dfrac{k}{2x}=2$

즉, $x=\dfrac{k}{4}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{4},\ 0\right)$이다. (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 점 P의 x좌표가

점 A의 x좌표보다 클 때, 점 P는

함수 $y=2-\dfrac{k}{2x}$ $\left(x>\dfrac{k}{4}\right)$의 그래프 위의 점이다.

직선 $y=2$는 함수 $y=2-\dfrac{k}{2x}$의 그래프의

한 점근선이므로 점 P의 y좌표는 2보다 작다.

따라서 선분 PQ의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 점 P의 좌표는

$\left(k,\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 AQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(k-\dfrac{k}{4}\right)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9k}{16}$이다.

9와 16은 서로소이므로 $\dfrac{9k}{16}$가 자연수가 되기 위해서

자연수 k는 16의 배수가 되어야 한다.

그러므로 자연수 k의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 정답 26

해설 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 유리함수 $y=\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$의 그래프 위의

점이므로 $b=\dfrac{3}{a}$에서 $ab=3$ $(a>0,\ b>0)$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$에서 $a+b=4\sqrt{2}$

$$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=(4\sqrt{2})^2-2\cdot3$$
$$=26$$

20 정답 $\frac{13}{4}$

해설 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0 \le x \le 3) \\ 4x-12 & (3 < x \le 4) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} 3x & (0 \le x < 1) \\ 3 & (1 \le x < 2) \\ -x+5 & (2 \le x < 3) \\ 2x-4 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$ 이므로

$(f \circ g)(x)=\begin{cases} -g(x)+3 & (0 \le g(x) \le 3) \\ 4g(x)-12 & (3 < g(x) \le 4) \end{cases}$

(i) $0 \le x < 1$일 때, $0 \le g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=-3x+3$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $g(x)=3$이므로

$(f \circ g)(x)=-3+3=0$

(iii) $2 \le x < 3$일 때, $2 < g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=x-2$

(iv) $3 \le x \le \frac{7}{2}$일 때, $2 \le g(x) \le 3$이므로

$(f \circ g)(x)=-2x+7$

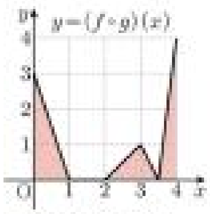
(v) $\frac{7}{2} < x \le 4$일 때, $3 < g(x) \le 4$이므로

$(f \circ g)(x)=8x-28$

이상에서

$(f \circ g)(x)=\begin{cases} -3x+3 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x < 2) \\ x-2 & (2 \le x < 3) \\ -2x+7 & \left(3 \le x \le \frac{7}{2}\right) \\ 8x-28 & \left(\frac{7}{2} < x \le 4\right) \end{cases}$ 이므로

함수 $y=(f \circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3+\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4=\frac{13}{4}$

21 정답 5

해설 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

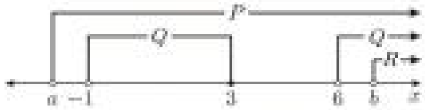
$P=\{x \mid x > a\}$

$Q=\{x \mid -1 < x \le 3$ 또는 $x > 6\}$

$R=\{x \mid x > b\}$

두 명제 $q \rightarrow p$, $r \rightarrow q$가 참이 되려면 $Q \subset P$, $R \subset Q$

즉, $R \subset Q \subset P$이어야 한다.



다음 그림에서 $a \le -1$, $b \ge 6$이어야 하므로

a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 6이다.

따라서 그 합은 $-1+6=5$이다.

22 정답 ㄴ, ㄷ

해설 ㄱ. $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$,

$2^6=64$, $\cdots$이므로 $A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore n(A)=4$ (거짓)

ㄴ. $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, $\cdots$이므로

$A(4)=\{4, 6\}$ 즉, $A(4) \subset A(2)$ (참)

ㄷ. $m=3$이면 $A(2^3)=A(8)=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A(2^3)=A(2)$

즉, $A(2^m)=A(2)$인 2 이상의 자연수 m이

존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23 정답 ④

해설 $\dfrac{x+2}{x^2+3x+3}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{(x+1)(x+2)+1}{x+2}}$

$=\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x+2}}$

$=\dfrac{1}{x+2+\dfrac{1}{x+2}-1}$ $\cdots$ ㉠

$x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2+\dfrac{1}{x+2}-1\geq 2\sqrt{(x+2)\cdot\dfrac{1}{x+2}}-1=1$

(단, 등호는 $x=-1$일 때 성립한다.)

㉠에서

$\dfrac{1}{x+2+\dfrac{1}{x+2}-1}\leq 1$

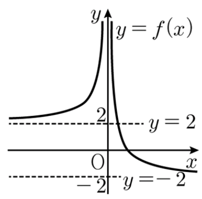
따라서 주어진 식은 $x=-1$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

24 정답 9

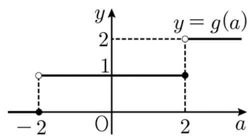
해설 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-2x}{x} & (x>0)\\ \dfrac{3-2x}{-x} & (x<0)\end{cases}$

$=\begin{cases}\dfrac{3}{x}-2 & (x>0)\\ 2-\dfrac{3}{x} & (x<0)\end{cases}$

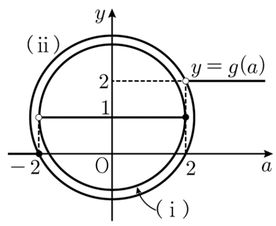
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같고, 이 값이 $g(a)$이므로 함수 $y=g(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $n(A\cap B)=1$이 되려면 함수 $y=g(a)$의 그래프와 원 $a^2+(y-1)^2=r$가 한 점에서 만나야 하므로 원은 다음 그림과 같이 (ⅰ) 또는 (ⅱ)의 경우와 같아야 한다.



(ⅰ) 원 $a^2+(y-1)^2=r$가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$r=4$

(ⅱ) 원 $a^2+(y-1)^2=r$가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$4+1=r$
$\therefore r=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 r의 값의 합은 $4+5=9$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
24문제 / dre수학			

01 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{3,\ 4\}\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\{1\} \subset A$
ㄴ. $\{3,\ 4\} \not\subset A$
ㄷ. $\varnothing \subset A$
ㄹ. $\{\varnothing\} \not\subset A$
ㅁ. $\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{3,\ 4\}\} \subset A$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ, ㅁ　④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

02 전체집합 U의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 다음 중 집합 $(A-B)\cup(A-C^C)$와 항상 같은 집합은?

① $(A\cap B)-C$　② $(A\cup C)-B$
③ $A-(B-C)$　④ $A-(B\cap C)$
⑤ $A-(B\cup C)$

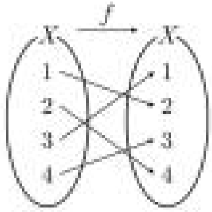
03 다음 보기 중 실수 $a,\ b,\ c,\ x,\ y$에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)의 개수는?

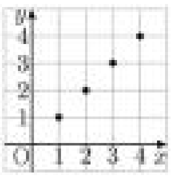
〈보기〉

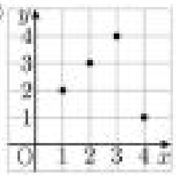
(가) $x^2-xy+y^2 \ge 0$
(나) $x^2-x+1>0$
(다) $|a+b| \le |a|+|b|$
(라) $a+b \ge 2\sqrt{ab}$
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$
(바) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$

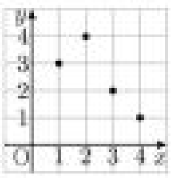
① 6개　② 5개　③ 4개
④ 3개　⑤ 2개

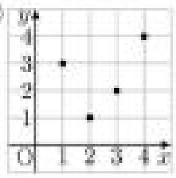
04 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$의 대응관계가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프로 알맞은 것은?

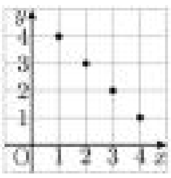


①


②


③


④


⑤


05 $x>1$일 때, $x-1+\dfrac{4}{x-1} \geq a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

06 집합 A에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\{X \mid X \subset A\}$라 하자. $A=\{1, 2, \{1, 2\}\}$일 때, 다음 보기 중 옳은 것의 개수는?

〈보기〉

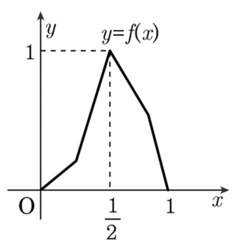
ㄱ. $\{\{1, 2\}\} \in \mathrm{P}(A)$
ㄴ. $\{\{1, 2\}\} \subset \mathrm{P}(A)$
ㄷ. $\varnothing \in \mathrm{P}(A)$
ㄹ. $\varnothing \subset \mathrm{P}(A)$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 없다.

07 두 실수 a, b에 대하여 두 집합 $A=\{6, a^2\}$, $B=\{16, b^2-b\}$가 서로 같을 때, $a+b$의 최솟값은?

① -8　② -6　③ -1
④ 2　⑤ 6

08 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \leq x \leq 1$을 만족하는 방정식 $f(f(x))=\dfrac{1}{2}$의 실근의 개수는?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

09 [2023년 11월 고1 25번/3점]

정수 k에 대한 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

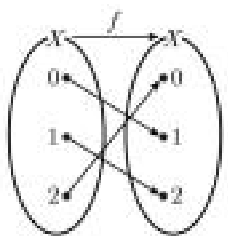
> p : 모든 실수 x에 대하여
> $x^2+2kx+4k+5>0$이다.
> q : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이다.

10

실수 x에 대하여 분수식 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

11

집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가 다음 그림과 같다.
$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때, $f^{99}(0)+2f^{100}(1)+3f^{101}(2)$의 값을 구하시오.



12

세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때,
집합 $\{(Q\cap R^C)\cup P\}^C\cap(Q\cap R)$를 간단히 한 것은?
(단, 집합 P, Q, R는 전체집합 U의 부분집합이다.)

① P ② Q ③ R
④ $Q-P$ ⑤ $R-Q$

13

$f(x-1)=\dfrac{x+1}{x-1}$일 때, f의 역함수 f^{-1}에 대하여 다음 중 $f^{-1}(p-1)$과 같은 것은? (단, $p\neq 1$, $p\neq 2$)

① $-\dfrac{2}{p-2}$ ② $-\dfrac{1}{p-1}$ ③ $\dfrac{1}{p-1}$
④ $\dfrac{1}{p-2}$ ⑤ $\dfrac{2}{p-2}$

14

함수 f에 대하여
$f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $\cdots$로 정의하자.
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 세 조건 $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f^4=I$ (I는 항등함수)를 만족시킨다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때,
$g^{13}(3)+g^{14}(4)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

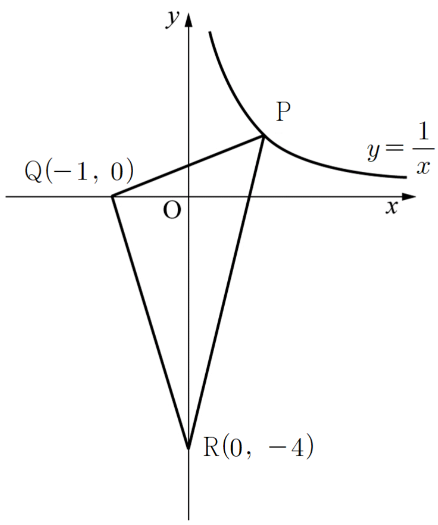
15 a, b가 양수일 때, $2 \le x \le 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2 \le \dfrac{2x-1}{x-1} \le bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

16 [2008년 6월 고2 이과 15번]

유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 위의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이의 최솟값은?



① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

17 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

18 세 집합

$A=\{(x,\ y)\,|\,y=m(x+1)-1,\ m$은 실수$\}$,

$B=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\left|\dfrac{1}{x-1}+2\right|,\ x \ne 1\text{인 실수}\right\}$,

$C=\{(x,\ y)\,|\,y=2-\sqrt{x-n},\ x \ge n$이고 n은 실수$\}$

에 대하여 $n(A\cap B)=3$이기 위한 m의 값의 범위는 (가) 이고, $n(B\cap C)=0$이기 위한 n의 값의 범위는 (나) 이다. 빈 칸에 들어갈 식을 알맞게 짝지은 것은?

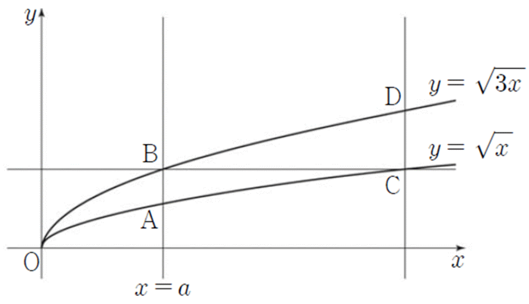
	(가)	(나)
①	$m>\dfrac{1}{2}$	$n\ge 1$
②	$m>\dfrac{1}{2}$	$n>1$
③	$m>\dfrac{2}{3}$	$n\ge\dfrac{3}{4}$
④	$m>\dfrac{2}{3}$	$n>\dfrac{3}{4}$
⑤	$m\ge\dfrac{2}{3}$	$n>\dfrac{3}{4}$

19 두 조건 $p: 2<x<6$, $q: x<5$ 또는 $x>k$에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow q$가 거짓임을 보이는 정수인 반례가 6뿐이다. 이때 실수 k의 값의 범위를 구하시오. (단, $k>5$)

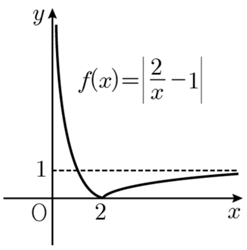
20 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2+b+\dfrac{16}{2a+b}$의 최솟값과 그 때의 a, b의 값을 차례대로 구하여라.

21 무리함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 P라 하고 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 각각 x축, y축과 만나는 점을 A, B라 할 때, △ABP의 넓이를 구하시오.

22 [2016년 11월 고2 문과 27번/4점]
그림과 같이 양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x}$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{3x}$와 만나는 점을 D라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{1}{4}$일 때, a의 값을 구하시오.



23 아래 그림은 함수 $f(x)=\left|\frac{2}{x}-1\right|$ $(x>0)$의 그래프이다.



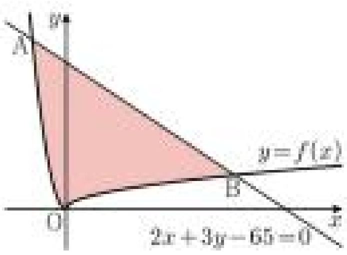
$0<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(b)>1$
ㄴ. $1<a<2$
ㄷ. $f(a)f(b)=-\frac{(a-2)(b-2)}{ab}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\geq 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$의 그래프와 직선 $2x+3y-65=0$이 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ 25)$, $\mathrm{B}(25,\ 5)$에서 만난다. 다음 그림과 같이 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ③	03 ③
04 ⑤	05 4	06
07 ②	08 ④	09 9
10 5	11 7	12
13 ⑤	14 ①	15 ①
16 ①	17 ⑤	18 ④
19 $6 \le k < 7$	20 최솟값$=7$, $a=1$, $b=2$	
21 36	22 16	23
24 325		

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ④

해설 ㄹ. $\varnothing \in A$이므로 $\{\varnothing\} \subset A$ (거짓)

02 **정답** ③

해설 $(A-B)\cup(A-C^c)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=A\cap(B^c\cup C)$
$=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A-(B-C)$

03 **정답** ③

해설 (가) $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(나) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(다) $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$
$=a^2+2ab+b^2-(a^2+2|ab|+b^2)$
$=2(ab-|ab|)\leq 0$ (단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립)
따라서 실수 a, b에 대하여 항상 성립한다.
(라) [반례] $a=b=-1$인 경우 $a+b=-2$,
$2\sqrt{ab}=2$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(마) [반례] $a=b=-1$, $c=1$인 경우
$(a+b)(b+c)(c+a)=0$, $8abc=8$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(바) 코시-슈바르츠 부등식은 모든 실수에 대하여 항상 성립한다.
따라서 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식은
(가), (나), (다), (바)의 4개이다.

04 **정답** ⑤

해설 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=3$
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2$
$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(3)=1$
따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 ⑤이다.

05 **정답** 4

해설 $x>1$이므로 $x-1>0$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x-1+\frac{4}{x-1}\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=4$이므로
$a\leq 4$이어야 한다.
따라서 a의 최댓값은 4

06 **정답** ④

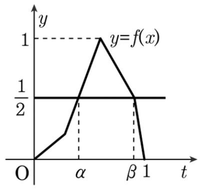
해설 $\mathrm{P}(A)$는 집합 A의 부분집합으로 이루어진 집합이므로
$\mathrm{P}(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\},$
$\{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}\}$
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 모두 옳다.

07 **정답** ②

해설 $A=B$이므로
$a^2=16$, $b^2-b=6$
$a^2=16$에서 $a=-4$ 또는 $a=4$
$b^2-b=6$에서 $b^2-b-6=0$
$(b-3)(b+2)=0$
$\therefore b=-2$ 또는 $b=3$
따라서 $a=-4$, $b=-2$일 때 $a+b$의 값은 최소이고
그 값은 -6이다.

08 정답 ④

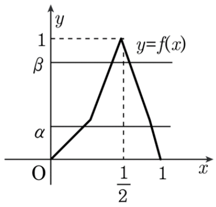
해설 $f(x)=t$라 하면



$f(f(x))=\dfrac{1}{2}$

$f(t)=\dfrac{1}{2}$

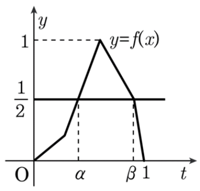
$t=\alpha$ 또는 $t=\beta\left(0<\alpha<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<\beta<1\right)$

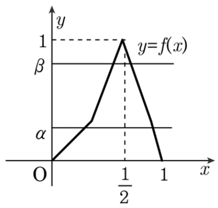


(i) $t=\alpha$일 때, $f(x)=\alpha$를 만족하는 x는 두 개

(ii) $t=\beta$일 때, $f(x)=\beta$를 만족하는 x는 두 개

따라서 방정식 $f(f(x))=\dfrac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.





09 정답 9

해설 '모든', '어떤'을 포함한 명제 이해하기

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로

이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k)^2-4(4k+5)<0$

$4k^2-16k-20=4(k+1)(k-5)<0$

$-1<k<5$

어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이므로 $k-2\geq 0$에서

$k\geq 2$

이때 정수 k에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$P=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{2, 3, 4, \cdots\}$

이때 $P\cap Q=\{2, 3, 4\}$이므로 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 9이다.

10 정답 5

해설 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}=\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^2+1}$

$=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}+1$

이때 모든 실수 x에 대하여 항상

$x^2+1>0,\ \dfrac{4}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}+1$

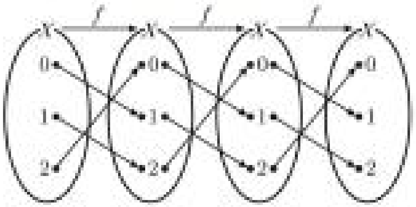
$\geq 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\dfrac{4}{x^2+1}}+1$

$=4+1=5\left(\text{단, 등호는 } x^2+1=\dfrac{4}{x^2+1}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

11 정답 7

해설 함수 f를 연속하여 3번 합성하면 다음 그림과 같다.



따라서 $f^3(x)=x$이므로

$f^{3n}(x)=x$, $f^{3n+1}(x)=f(x)$, $f^{3n+2}(x)=f^2(x)$

이때 $f^{99}(0)=0$, $f^{100}(1)=f(1)=2$,

$f^{101}(2)=f^2(2)=f(0)=1$이므로

$$\begin{aligned} f^{99}(0)+2f^{100}(1)+3f^{101}(2)&=0+2\cdot 2+3\cdot 1\\ &=7\end{aligned}$$

12 정답 ④

해설 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$

$\therefore\ P\subset Q$

또한, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim q$

명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $q \Longrightarrow r$

$\therefore\ Q\subset R$

즉, 세 집합 P, Q, R의 포함 관계는

$P\subset Q\subset R$, $R^C\subset Q^C\subset P^C$

$$\begin{aligned} &\therefore\ \{(Q\cap R^C)\cup P\}^C\cap(Q\cap R)\\ &=\{(Q\cap R^C)^C\cap P^C\}\cap(Q\cap R)\\ &=(\varnothing^C\cap P^C)\cap(Q\cap R)\\ &\qquad\qquad(\because\ Q\cap R^C=Q-R=\varnothing)\\ &=(U\cap P^C)\cap Q\ (\because\ \varnothing^C=U,\ Q\subset R)\\ &=P^C\cap Q\\ &=Q-P\end{aligned}$$

13 정답 ⑤

해설 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로

$f(t)=\dfrac{t+2}{t}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{x+2}{x}$

$y=\dfrac{x+2}{x}$에서 $xy=x+2$

$x(y-1)=2$, $x=\dfrac{2}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{2}{x-1}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-1}$

위의 식에 x 대신에 $p-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} f^{-1}(p-1)&=\frac{2}{(p-1)-1}\\ &=\frac{2}{p-2}\end{aligned}$$

14 정답 ①

해설 $f(1)=3$, $f(2)=1$이고, 함수 f가 일대일대응이므로

$f(3)=2$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=2$이다.

(ⅰ) $f(3)=2$, $f(4)=4$이면

$f(1)=3$, $f^2(1)=2$, $f^3(1)=1$, $f^4(1)=3$

이므로 $f^4\neq I$가 되어 성립하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=4$, $f(4)=2$이면

$f(1)=3$, $f^2(1)=4$, $f^3(1)=2$, $f^4(1)=1$

$f(2)=1$, $f^2(2)=3$, $f^3(2)=4$, $f^4(2)=2$

$f(3)=4$, $f^2(3)=2$, $f^3(3)=1$, $f^4(3)=3$

$f(4)=2$, $f^2(4)=1$, $f^3(4)=3$, $f^4(4)=4$

이므로 $f^4=I$가 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=2$이므로

$g(1)=2$, $g(2)=4$, $g(3)=1$, $g(4)=3$이고,

$f^4=I$에서 $g^4=(f^{-1})^4=I$이다.

따라서 $g^{13}=g^{4\cdot 3+1}=g$, $g^{14}=g^{4\cdot 3+2}=g^2$이므로

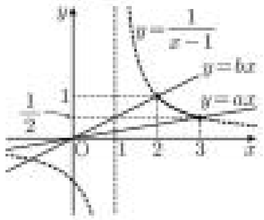
$$\begin{aligned} g^{13}(3)+g^{14}(4)&=g(3)+g(g(4))\\ &=1+g(3)=1+1=2\end{aligned}$$

15 정답 ①

해설 $\dfrac{2x-1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$ $(2 \le x \le 3)$이므로

$ax+2 \le 2+\dfrac{1}{x-1} \le bx+2$

$ax \le \dfrac{1}{x-1} \le bx$



위의 그래프에 의하여 $a \le \dfrac{1}{6}$, $b \ge \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore$ (a의 최댓값)+(b의 최솟값)$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

16 정답 ①

해설 유리함수와 직선 사이의 최단거리 구하기

직선 QR의 방정식은 $4x+y+4=0$이고,

점 $\mathrm{P}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$에서 직선 QR까지의 거리 h는

$h=\dfrac{\left|4a+\dfrac{1}{a}+4\right|}{\sqrt{17}}$

a는 양수이므로 $4a+\dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{4a\dfrac{1}{a}}=4$

따라서 $h=\dfrac{\left|4a+\dfrac{1}{a}+4\right|}{\sqrt{17}} \ge \dfrac{8}{\sqrt{17}}$이다.

$\therefore$ $\triangle$PQR의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\dfrac{8}{\sqrt{17}}=4$

17 정답 ⑤

해설

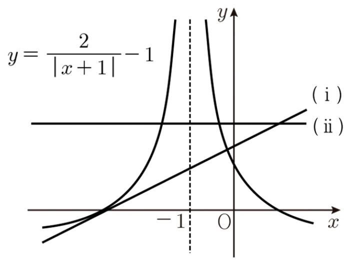
$$y=\frac{2}{|x+1|}-1=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-1 & (x>-1) \\ -\dfrac{2}{x+1}-1 & (x<-1) \end{cases}$$

이고 직선 $y=-kx+2+k$는 k의 값에 관계없이

점 $(1,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와

직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

다음 그림과 같아야 한다.



(i) 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와

직선 $y=-kx+2+k$가 접할 때,

$-\dfrac{2}{x+1}-1=-kx+2+k$에서

$kx^2-3x-k-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4k\cdot(-k-5)=0$에서

$(2k+9)(2k+1)=0$

$\therefore$ $k=-\dfrac{9}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{1}{2}$

이때 직선 $y=-kx+2+k$의 y절편이 0보다

크므로

$k=-\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=-kx+2+k$가 x축에 평행할 때

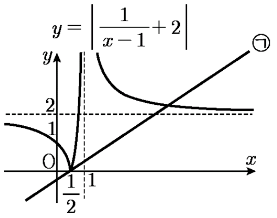
$k=0$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\dfrac{1}{2}+0=-\dfrac{1}{2}$

18 정답 ④

해설 (가): 아래 그림과 같이 직선 $y=m(x+1)-1$의 기울기가 직선 ㉠의 기울기보다 클 때 교점이 3개이다.



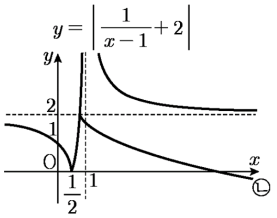
직선 $y=m(x+1)-1$이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지날때의 기울기를 구하면

$0=m\left(\frac{1}{2}+1\right)-1,\ \frac{3}{2}m-1=0$

$\therefore\ m=\frac{2}{3}$

따라서 m의 값의 범위는 $m>\frac{2}{3}$이다.

(나): 무리함수 $y=2-\sqrt{x-n}$의 정의역은 $x\geq n$이고 치역은 $y\leq 2$이다.
따라서 아래 그림과 같이 무리함수의 그래프가 ㉡보다 오른쪽에 있어야 교점이 없다.



$y=2$일 때 곡선 $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$의 x좌표를 구하면

$2=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|,\ \frac{1}{x-1}=-4\ \left(\because\ \frac{1}{x-1}\neq 0\right)$

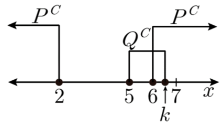
$\therefore\ x=\frac{3}{4}$

즉, 곡선 $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$는 $\left(\frac{3}{4},\ 2\right)$를 지나고 무리함수의 그래프가 이 점보다 오른쪽에 있어야 한다.

따라서 n의 값의 범위는 $n>\frac{3}{4}$이다.

19 정답 $6\leq k<7$

해설 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$P=\{x\mid 2<x<6\},\ Q=\{x\mid x<5$ 또는 $x>k\}$
이때 명제 $\sim p\rightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는
집합 P^C에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로
집합 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.
$P^C=\{x\mid x\leq 2$ 또는 $x\geq 6\}$,
$Q^C=\{x\mid 5\leq x\leq k\}$이므로
집합 $P^C\cap Q^C$의 정수인 원소가 6뿐이려면
다음 그림에서 $6\leq k<7$



20 정답 최솟값$=7$, $a=1$, $b=2$

해설 $a^2+b+\frac{16}{2a+b}$

$=-1+(a^2-2a+1)+2a+b+\frac{16}{2a+b}$

$=-1+(a-1)^2+(2a+b+\frac{16}{2a+b})$ ⋯ ①

$2a+b+\frac{16}{2a+b}\geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})}=8$에서

등호는 $2a+b=\frac{16}{2a+b}$일 때 성립하고

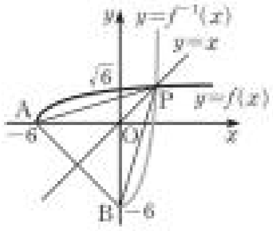
이때, $2a+b=4$ ($a,\ b$는양수) ⋯ ②

①에서 최소는 $a=1$일 때이다.

$\therefore$ ②에서 $a=1,\ b=2$일 때 최솟값 : 7

21 정답 36

해설 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 $y=x$에 대하여 대칭인 그래프이므로 점 P는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점도 된다.



이때 $f(x)=\sqrt{x+6}$이므로

$\sqrt{x+6}=x$

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x \geq 0$)이므로 교점 P$(3,\ 3)$

$\triangle ABP = 2\cdot\triangle AOP+\triangle AOB$

$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\right)+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6$

$=36$

22 정답 16

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

A$(a,\ \sqrt{a})$, B$(a,\ \sqrt{3a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{x}=\sqrt{3a}$, $x=3a$

따라서 C$(3a,\ \sqrt{3a})$, D$(3a,\ 3\sqrt{a})$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

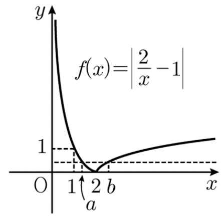
$\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because a>0$)

$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{4}$이므로 $\sqrt{a}=4$

$\therefore a=16$

23 정답 ④

해설 ㄱ. $0<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립하므로 다음 그림과 같이 $a<2<b$이고,



$x>2$일 때 $0<f(x)<1$이므로 $0<f(b)<1$이다. (거짓)

ㄴ. $\left|\frac{2}{x}-1\right|=1$에서 $x=1$이므로

$1<a<2$, $b>2$이다. (참)

ㄷ. $f(a)=\left|\frac{2}{a}-1\right|=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}$

$f(b)=\left|\frac{2}{b}-1\right|=1-\frac{2}{b}=\frac{b-2}{b}$ ($\because$ ㄴ)이므로

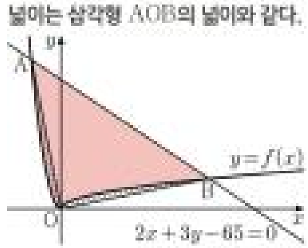
$f(a)f(b)=\frac{2-a}{a}\cdot\frac{b-2}{b}$

$=-\frac{(a-2)(b-2)}{ab}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24 정답 325

해설 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 $y=x^2$ $(x\leq 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.
이때 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



$\overline{AB}=\sqrt{(25+5)^2+(5-25)^2}=10\sqrt{13}$

원점과 직선 $2x+3y-65=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-65|}{\sqrt{2^2+3^2}}=5\sqrt{13}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{13}=325$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1\in A$ ② $\{2\}\in A$ ③ $\{2\}\subset A$
④ $\{1,\ 2\}\in A$ ⑤ $\{1,\ \{2\}\}\in A$

02 두 집합 $A=\{5,\ 9,\ a-2\}$, $B=\{5,\ 7,\ b+3\}$에 대하여 집합 A는 집합 B에 포함되고, 집합 B는 집합 A에 포함될 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 3 ② 7 ③ 11
④ 15 ⑤ 19

03 세 조건 $p,\ q,\ r$에 대하여 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이고, $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이다. 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는?

① $P^C\subset Q\subset R$ ② $P\subset R^C\subset Q$
③ $Q\subset P^C\subset R$ ④ $R\subset P^C\subset Q$
⑤ $R^C\subset Q\subset P$

04 $\sqrt{5x+10}+\sqrt{3x-9}$의 값이 실수가 되도록 하는 실수 x의 최솟값을 구하시오.

05 부등식 $|x+y|\le|x|+|y|$에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$
③ $xy\ge0$ ④ $x\ge0,\ y\ge0$
⑤ $x\le0,\ y\le0$

06 집합 $A=\{\varnothing, 1, 2, \{3, 4\}\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\{1\}\subset A$
ㄴ. $\{3, 4\}\not\subset A$
ㄷ. $\varnothing\subset A$
ㄹ. $\{\varnothing\}\not\subset A$
ㅁ. $\{\varnothing, 1, 2, \{3, 4\}\}\subset A$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ, ㅁ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

07 점 $(1, 2)$가 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

08 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 a, 일대일대응의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

09 함수 $f(x)=x+2$에 대하여

$$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, $f^{10}(a)=27$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

10 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+m$이 만나지 않도록 하는 정수 m의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P\cap Q^c$ ② $P\cup Q^c$
③ $P\cap Q$ ④ $P^c\cap Q$
⑤ $P^c\cap Q^c$

12 [2019년 11월 고3 문과 10번/3점]

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

13 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가질 때, $a+\dfrac{9}{a+1}$의 최솟값을 m, 그때의 a의 값을 n이라 하자. 이때 $m+n$의 값을 구하시오. (단, a는 실수)

14 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a+2<0$이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

15 실수 x에 대하여 분수식 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

16 일차함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $y=f\left(\dfrac{1}{3}x-6\right)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

17 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $\{(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\}\cap\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}$를 간단히 하면?

① $\varnothing$ ② A ③ B
④ B^C ⑤ U

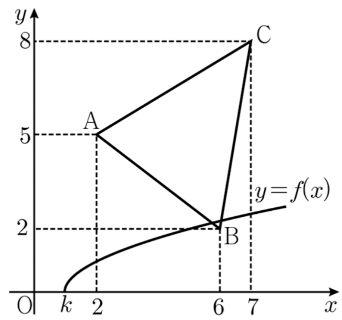
18 함수 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=kx+3k+4\ (k\neq 0)$의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-3<k<-1$
② $-3\le k<-1$
③ $-3<k\le -1$
④ $k<-3$ 또는 $k>-1$
⑤ $k<-3$ 또는 $k\ge -1$

19 두 실수 x, y에 대하여 $3x^2+2y^2-4x+\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$은 $x=a$, $y=b$일 때, 최솟값 m을 갖는다. 세 상수 a, b, m에 대하여 $a+b+m$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$, $\mathrm{C}(7,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

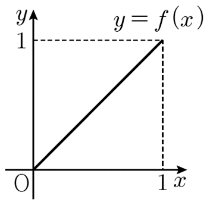
21 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-2b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 한 점에서 만날 때, 양수 a, b에 대하여 ab의 최댓값은?

① $\dfrac{1}{256}$ ② $\dfrac{1}{128}$ ③ $\dfrac{1}{64}$
④ $\dfrac{1}{32}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$

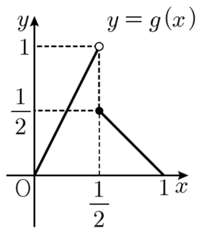
22 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$, $g(x)$는 모두 주기가 2인 함수이다.
> (나) 임의의 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)$의 값을 구하시오.



[그림 1]



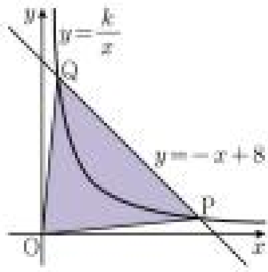
[그림 2]

23 [2019년 3월 고2 이과 21번/4점]

두 이차함수 $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=x^2+2x+a$가 있다. x에 대한 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

24 그림과 같이 유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+8$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{21}{4}$　② $\frac{87}{16}$　③ $\frac{45}{8}$
④ $\frac{93}{16}$　⑤ 6

25 [2023년 3월 고2 30번 변형]

두 실수 a $(a<2)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2-a}{x-2}+3 & (x\le a) \\ bx(x-a)+2 & (x>a) \end{cases}$$

라 하자.

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 모든 순서쌍이 (a_1, b_1), (a_2, b_2)일 때, $-18(a_1+b_1+a_2+b_2)$의 값을 구하시오.

> (가) $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)\ge f(-3)$이다.
> (나) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ④	03 ③
04 3	05 ③	06 ④
07 ④	08 ③	09 ④
10 ①	11	12 ③
13 7	14 2	15 5
16 54	17 ①	18 ②
19 ②	20	21 ②
22 $\frac{1}{2}$	23 ④	24
25 160		

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ⑤

해설 ⑤ $1 \in A$, $\{2\} \in A$이므로

$\{1, \{2\}\} \subset A$

02

정답 ④

해설 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

$7 \in A$ 이므로 $a - 2 = 7$

$\therefore a = 9$

$9 \in B$ 이므로 $b + 3 = 9$

$\therefore b = 6$

$\therefore a + b = 9 + 6 = 15$

03

정답 ③

해설 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset P^C$

$\sim r$는 p이기 위한 충분조건이므로

$\sim r \Rightarrow p$

명제 $\sim r \rightarrow p$가 참이므로

그 대우인 $\sim p \rightarrow r$도 참이다.

즉, $\sim p \Rightarrow r$이므로

$\sim p$는 r이기 위한 충분조건이다.

따라서 $P^C \subset R$

$\therefore Q \subset P^C \subset R$

04

정답 3

해설 $5x + 10 \geq 0$, $3x - 9 \geq 0$이어야 하므로

$5x + 10 \geq 0$에서

$x \geq -2$ $\cdots$ ㉠

$3x - 9 \geq 0$에서

$x \geq 3$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x \geq 3$

따라서 실수 x의 최솟값은 3이다.

05

정답 ③

해설 $|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(ⅰ) $xy = |xy|$

$\rightarrow xy \geq 0$

(ⅱ) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \rightarrow xy = |xy|$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$xy = |xy| \leftrightarrow xy \geq 0$

06

정답 ④

해설 ㄹ. $\varnothing \in A$이므로 $\{\varnothing\} \subset A$ (거짓)

07

정답 ④

해설 무리함수 $y = \sqrt{ax + b}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{ay + b}$

이 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$1 = \sqrt{2a + b}$

$\therefore 2a + b = 1$

08

정답 ③

해설 집합 X에서 Y로의 함수의 개수는

$a = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

집합 X에서 Y로의 일대일대응의 개수는

$b = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$

09 정답 ④

해설 $f^1(x)=f(x)=x+2$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x+2)+2$
$=x+4$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=(x+4)+2$
$=x+6$

$\vdots$

$\therefore f^{10}(x)=x+20$

$f^{10}(a)=27$에서 $a+20=27$

$\therefore a=7$

10 정답 ①

해설 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+m$이 만나지 않으므로

$\dfrac{x-3}{x+1}=mx+m$에서

$x-3=m(x+1)^2$

$\therefore mx^2+(2m-1)x+m+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2m-1)^2-4m(m+3)<0$

따라서 $m>\dfrac{1}{16}$이므로 정수 m의 최솟값은 1이다.

11 정답 ④

해설 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q\subset P$ 가 거짓이므로 $Q-P\neq\varnothing$ 임을 보이면 된다.

따라서 $Q\cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

12 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

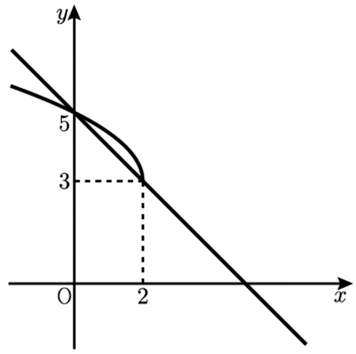
함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한

필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와

직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, 조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.

따라서 구하는 k의 최솟값은

$3=-2+k$

$\therefore k=5$

13 정답 7

해설 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4a<0$

$\therefore a>\dfrac{1}{4}$

$a+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{9}{a+1}=(a+1)+\frac{9}{a+1}-1$$
$$\geq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{9}{a+1}}-1$$
$$=2\cdot 3-1=5$$

이때 등호는 $a+1=\dfrac{9}{a+1}$일 때 성립하므로

$(a+1)^2=9,\ a+1=3\ (\because a+1>0)$

$\therefore a=2$

따라서 $a+\dfrac{9}{a+1}$는 $a=2$일 때 최솟값 5를 가지므로

$m=5,\ n=2$

$\therefore m+n=7$

14 정답 2

해설 주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a+2\ge 0$이다.'가 참이 되어야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a+2)\le 0$

$\therefore a\ge 2$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 2이다.

15 정답 5

해설 $\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}$

$=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+1$

이때 모든 실수 x에 대하여 항상

$x^2+1>0,\ \frac{4}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+1$

$\ge 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}+1$

$=4+1=5$ $\left(\text{단, 등호는 } x^2+1=\frac{4}{x^2+1}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

16 정답 54

해설 $h(x)=\frac{1}{3}x-6$이라 하면 함수 $y=f\left(\frac{1}{3}x-6\right)$

즉, $y=f(h(x))$의 역함수는

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(g(x))$

$h(x)=\frac{1}{3}x-6$에서 $y=\frac{1}{3}x-6$으로 놓으면

$\frac{1}{3}x=y+6\qquad\therefore x=3y+18$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3x+18$

즉, $h^{-1}(x)=3x+18$이므로

$h^{-1}(g(x))=3g(x)+18$

따라서 $y=f\left(\frac{1}{3}x-6\right)$의 역함수는

$y=3g(x)+18$이므로 $a=3,\ b=18$

$\therefore ab=54$

17 정답 ①

해설 $\{(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\}\cap\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}$

$=\{(A\cap A^C)\cup B\}\cap\{(A\cup A^C)\cap B^C\}$

$=(\varnothing\cup B)\cap(U\cap B^C)$

$=B\cap B^C=\varnothing$

18 정답 ②

해설 $y=-\frac{|2x|-2}{|x+1|}$

$=\begin{cases}-\frac{-2x-2}{-(x+1)} & (x<-1)\\ -\frac{-2x-2}{x+1} & (-1<x<0)\\ -\frac{2x-2}{x+1} & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<0)\\ \frac{4}{x+1}-2 & (x\ge 0)\end{cases}$

에서 유리함수 $y=\frac{4}{x+1}-2$의 그래프는

두 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이고

x절편이 1, y절편이 2이다.

또한, 직선 $y=kx+3k+4$,

즉 $y=k(x+3)+4\ (k\ne 0)$은 k의 값에 관계없이

항상 점 $(-3,\ 4)$를 지난다.

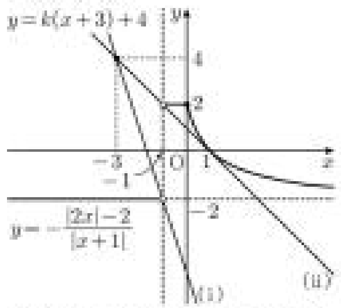
따라서 함수 $y=-\frac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와

직선 $y=k(x+3)+4$의 교점이 존재하지 않으려면

다음 그림과 같이 직선 $y=k(x+3)+4$가

직선 (i)이거나 두 직선 (i)과 (ii)의 두 가지 경우 사이에

존재해야 한다.



(i) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 경우

$-2=2k+4,\ 2k=-6$

$\therefore k=-3$

(ii) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나거나

유리함수 $y=\frac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하는 경우

직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나면

$2=2k+4,\ 2k=-2$

$\therefore k=-1$

직선 $y=k(x+3)+4$가 유리함수

$y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하면

방정식 $k(x+3)+4=\dfrac{4}{x+1}-2$가 오직 하나의

근을 가져야 하므로 이 방정식의 양변에 $x+1$을

곱하면

$k(x+3)(x+1)+4(x+1)=4-2(x+1)$

$kx^2+4kx+3k+4x+4=4-2x-2$,

$kx^2+2(2k+3)x+3k+2=0$

$k\neq 0$이므로 이 이차방정식이 중근을 가져야 하고,

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k+3)^2-k(3k+2)=0$

$k^2+10k+9=0$, $(k+1)(k+9)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=-9$

그런데 직선 $y=k(x+3)+4$가 $x\geq 0$에서

유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접해야 하므로

$k=-1$

따라서 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1, 2)$를

지나거나 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$ $(x\geq 0)$의

그래프와 접하는 경우는 같은 직선이다.

즉, $k=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 상수 k의 값의 범위는 $-3\leq k<-1$

19 정답 ②

해설 x, y는 실수이므로 $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$이다.

따라서 $x^2+2y^2+3>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x^2+2y^2-4x+\frac{16}{x^2+2y^2+3}$$

$$=x^2+2y^2+3+\frac{16}{x^2+2y^2+3}+2x^2-4x-3$$

$$\geq 2\sqrt{(x^2+2y^2+3)\cdot\frac{16}{x^2+2y^2+3}}+2x^2-4x-3 \quad \cdots ㉠$$

$$=2x^2-4x+5$$

$$=2(x-1)^2+3\geq 3 \quad \cdots ㉡$$

㉠에서 등호는 $x^2+2y^2+3=\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$에서

$x^2+2y^2=1$일 때 성립하고

㉡에서 이 값은 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 $x=1$일 때 $x^2+2y^2=1$에서 $y=0$이므로

$a=1$, $b=0$, $m=3$이다.

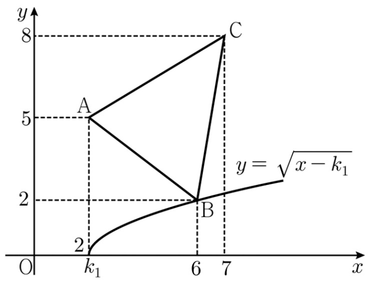
$\therefore a+b+m=1+0+3=4$

20 정답

해설 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와

점 B에서 만날때의 k의 값을 k_1이라 하면

$y=\sqrt{x-k_1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(x)=\sqrt{x-k}$에서 $k>k_1$이면

곡선 $y=f(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

즉, k는 곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 최대이고

최댓값은 k_1이다.

곡선 $y=\sqrt{x-k_1}$이 점 B$(6, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{6-k_1}$, $6-k_1=4$

$\therefore k_1=2$

또한, 곡선 $y=f(x)$가 점 C$(7, 8)$ 지날 때 최소이므로

$8=\sqrt{7-k}$, $64=7-k$

$\therefore k=-57$

따라서 $-57\leq k\leq 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가

삼각형 ABC와 만난다. $\cdots ㉠$

한편, $y=\sqrt{x-k}$에서

$y^2=x-k$, $x=y^2+k$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=x^2+k$

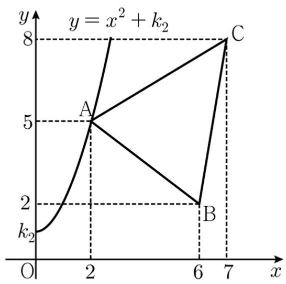
즉, 함수 $y=f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=x^2+k$ $(x\geq 0)$

같은 방법으로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와

점 A에서 만날 때의 k의 값을 k_2라 하면

$y=x^2+k_2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f^{-1}(x)=x^2+k$에서 $k>k_2$이면

곡선 $y=f^{-1}(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

즉, k는 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 A를 지날 때 최대이고

최댓값은 k_2이다.

곡선 $y=x^2+k_2$가 점 A$(2, 5)$를 지나므로

$5=2^2+k_2$

$\therefore\ k_2 = 1$

또한 곡선 $y = f^{-1}(x)$가 점 $\mathrm{C}(7,\ 8)$을 지날 때 최소이므로

$8 = 49 + k$

$\therefore\ k = -41$

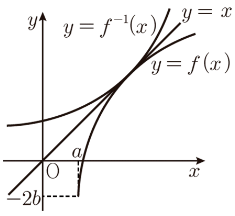
따라서 $-41 \le k \le 1$일 때,

함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만난다. ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 동시에 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-41 \le k \le 1$이므로 구하는 최댓값은 1이다.

21 정답 ②

해설 함수 $f(x) = \sqrt{x-a} - 2b$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만날 때, 다음 그림과 같이 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 접한다.



$\sqrt{x-a} - 2b = x$에서

$\sqrt{x-a} = x + 2b$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x - a = x^2 + 4bx + 4b^2$

$\therefore\ x^2 + (4b-1)x + 4b^2 + a = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = (4b-1)^2 - 4(4b^2 + a) = 0$

$-4(a+2b) + 1 = 0$

$\therefore\ a + 2b = \dfrac{1}{4}$

이때 $a,\ b$가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a + 2b \ge 2\sqrt{2ab}$, $\dfrac{1}{4} \ge 2\sqrt{2ab}$

$\therefore\ ab \le \dfrac{1}{128}$ $\left(\text{단, 등호는 } a = \dfrac{1}{8},\ b = \dfrac{1}{16} \text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 $\dfrac{1}{128}$ 이다.

22 정답

해설 주어진 그림에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 각각 구하면

$f(x) = x\ (0 \le x \le 1)$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \le x < \dfrac{1}{2}\right) \\ -x+1 & \left(\dfrac{1}{2} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 주기가 2이고, $g(-x) = -g(x)$이므로

$g\left(-\dfrac{9}{4}\right) = -g\left(\dfrac{9}{4}\right) = -g\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$f(-x) = f(x)$이므로

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f\left(g\left(-\dfrac{9}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$

23 정답 ④

해설 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$이므로

$x^2+2x+a=x$

$x^2+x+a=0$ $\cdots$ ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$

$x^2+3x+a-2=0$ $\cdots$ ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(i) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서 $a<\dfrac{1}{4}$

$D_2<0$에서 $a>\dfrac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서 $a=\dfrac{1}{4}$

$D_2=0$에서 $a=\dfrac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1<0$에서 $a>\dfrac{1}{4}$

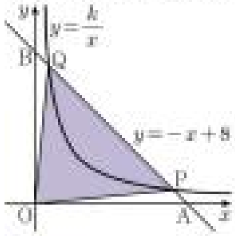
$D_2>0$에서 $a<\dfrac{17}{4}$

따라서 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{17}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 정수 a는 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4

24 정답 ②

해설 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A(8, 0), B(0, 8)



삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot8=32$

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26이므로

$\triangle OAP=\triangle OQB=\dfrac{1}{2}(32-26)=3$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot b=3$에서 $b=\dfrac{3}{4}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8=\dfrac{3}{4}$에서 $a=\dfrac{29}{4}$이다.

또, 점 P는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\dfrac{29}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{87}{16}$

25 정답 160

해설 $a<2$, 즉 $2-a>0$이므로

$x\le a$에서 함수 $f(x)=\dfrac{2-a}{x-2}+3$은 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다. $\cdots$ ㉠

이때 $x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$을 점근선으로 가지므로 $x\le a$이면

$f(a)\le f(x)<3$ $\cdots$ ㉡

조건 (가)에 의하여 $x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최소이므로 a의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $-3<a<2$인 경우

㉠에서 $f(-3)>f(a)$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-3$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-2}+3 & (x\le-3)\\ bx(x+3)+2 & (x>-3)\end{cases}$$

㉠에서 $x\le-3$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq f(-3)$

$f(-3)=f(0)=2$이고

$-3<x \leq 0$에서 $f(x)=bx(x+3)+2$이므로

조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$이어야 한다.

또, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-3$과 만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.

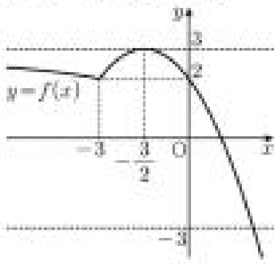
㉡에서 $f(-3)=2 \leq f(x)<3$이므로

$x \leq -3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$ 또는 $y=-3$과 만나지 않는다.

$x>-3$에서

함수 $f(x)=bx(x+3)+2$ $(b<0)$의 그래프는 직선 $y=-3$과 한 점에서 만난다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 1]과 같이 함수 $f(x)=bx(x+3)+2$의 그래프는 직선 $y=3$에 접해야 한다.



[그림 1]

함수 $f(x)=bx(x+3)+2$는 $x=-\frac{3}{2}$에서 최대이므로 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=b \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}+2=3$에서

$b=-\frac{4}{9}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-3,\ -\frac{4}{9}\right)$이다.

(iii) $a<-3$인 경우

$f(a)=f(0)=2$이고 ㉠, ㉡에서

$x \leq a$일 때 $2 \leq f(x)<3$

$a<x \leq 0$에서 $f(x)=bx(x-a)+2$이므로

조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최소이어야 한다.

따라서 $b>0$이고 $\frac{a}{2}=-3$이어야 한다.

$a=-6$이고 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \frac{8}{x-2}+3 & (x \leq -6) \\ bx(x+6)+2 & (x>-6) \end{cases}$$

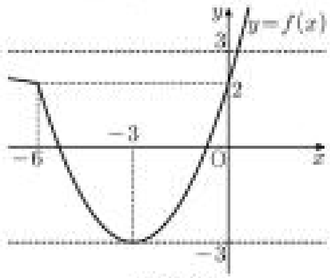
또, ㉡에서

$f(-6)=2 \leq f(x)<3$이므로

$x \leq -6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$ 또는 $y=-3$과 만나지 않는다.

$x>-6$에서 함수 $f(x)=bx(x+6)+2$의 그래프는 직선 $y=-3$과 한 점에서 만난다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 2]와 같이 $x>-6$에서 함수 $f(x)=bx(x+6)+2$의 그래프는 직선 $y=-3$에 접해야 한다.



[그림 2]

함수 $f(x)=bx(x+6)+2$는 $x=-3$에서 최소이므로 $f(-3)=-3$

$f(-3)=b \cdot (-3) \cdot 3+2=-3$에서

$b=\frac{5}{9}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-6,\ \frac{5}{9}\right)$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a_1, b_1), (a_2, b_2)는

$\left(-3,\ -\frac{4}{9}\right)$, $\left(-6,\ \frac{5}{9}\right)$이다.

$\therefore -18(a_1+b_1+a_2+b_2)$

$=-18 \cdot \left\{-3+\left(-\frac{4}{9}\right)+(-6)+\frac{5}{9}\right\}=160$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{2,\ 3\},\ 3\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \subset A$ ② $\varnothing \in A$ ③ $\{1,\ 2\} \in A$
④ $\{2,\ 3\} \in A$ ⑤ $\{2,\ 3\} \subset A$

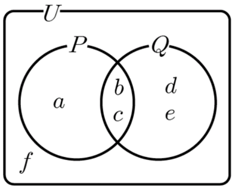
02 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수의 개수는?

① 15 ② 60 ③ 240
④ 960 ⑤ 3840

03 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 $A\cap(A-B)^C$과 항상 같은 집합은?

① $(A\cap B)\cup A$ ② $A-(A\cap B)$
③ $(A\cup B)-A$ ④ $(A\cup B)-(A-B)$
⑤ $B\cap(B-A)^C$

04 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, P, Q의 포함관계가 다음과 같다. 명제 $q \to \sim p$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 원소를 구한 것은?



① 없음 ② a
③ $b,\ c$ ④ $d,\ e$
⑤ f

05 $a>2$일 때, $4a-3+\dfrac{9}{a-2} \geq k$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

06 명제 '모든 실수 x에 대하여 $4x^2+5x+a>0$이다.'가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $(P-R^C)\cup(Q-R)=\varnothing$이 성립할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① p는 r이기 위한 필요충분조건이다.
② $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
③ q는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.
④ $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
⑤ r는 $\sim p$이기 위한 필요충분조건이다.

08 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x-1)=6x+1$일 때, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는?

① $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ② $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
③ $g(x)=2x-1$ ④ $g(x)=2x+3$
⑤ $g(x)=2x+1$

09 자연수 n에 대하여 $\sqrt{2n+x}-\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)$의 값은?

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

10 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ 4

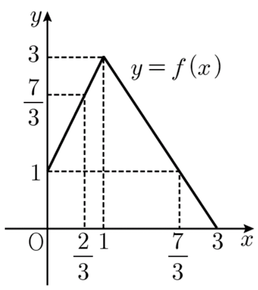
11 두 집합 $A=\{(x, y)\,|\,y=\sqrt{4-x}\}$, $B=\{(x, y)\,|\,y=mx+1$, m은 실수$\}$에 대하여 $n(A\cap B)=2$일 때, m의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{2}\le m<0$ ② $-\frac{1}{3}\le m<0$
③ $-\frac{1}{4}\le m<0$ ④ $-\frac{1}{5}\le m<0$
⑤ $-\frac{1}{6}\le m<0$

12 임의의 집합 S에 대하여 P(S)를 $P(S)=\{X \mid X \subset S\}$로 정의할 때, $P(P(\varnothing))$와 같은 것은?

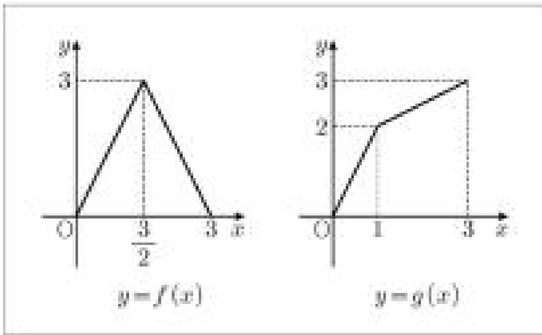
① $\varnothing$
② $\{\varnothing\}$
③ $\{\{\varnothing\}\}$
④ $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$
⑤ $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\}\}$

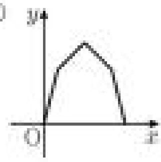
13 $0 \le x \le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라고 할 때, $f^{2021}\left(\frac{2}{3}\right)$의 값은?

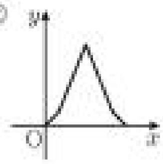


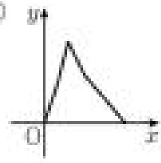
① 0
② $\frac{2}{3}$
③ 1
④ $\frac{7}{3}$
⑤ 3

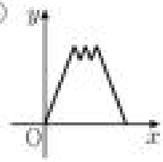
14 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같다. 다음 중 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프의 개형은?

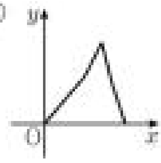


①


②


③


④


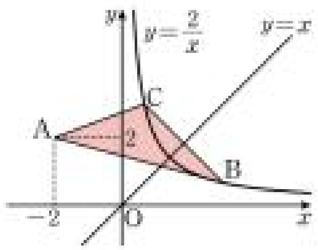
⑤


15 [2015년 3월 고2 문과 21번/4점]

그림과 같이 점 $A(-2,\ 2)$와 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> (나) 삼각형 ABC 의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha>\sqrt{2}$)



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

16 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-3}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $a+f(b)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

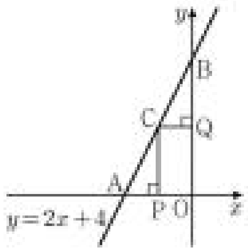
17 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

18 $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y,\ z$가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

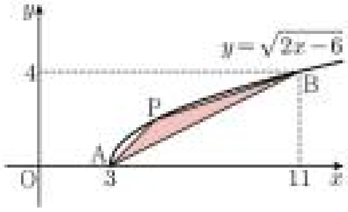
> ㉠ $a^2+b^2\geq ab$
> ㉡ $a^2+b^2+1<2(a+b-1)$
> ㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\leq(ax+by+cz)^2$
> ㉣ $|a+b|\leq|a|+|b|$
> ㉤ $|a|-|b|\geq|a-b|$
> ㉥ $|a+b|\geq|a|-|b|$

19 다음 그림과 같이 직선 $y=2x+4$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고 직선 위의 한 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, 두 삼각형 BQC, CPA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+S_1+S_2+4$의 최솟값을 구하시오.
(단, 점 C는 제2사분면 위의 점이다.)



20 실수 k에 대하여 함수 $y=\left|\dfrac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $f(-2)+f(-1)+f(0)+\cdots+f(6)$의 값을 구하시오.

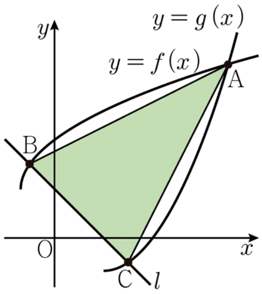
21 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{2x-6}$의 그래프 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(11,\ 4)$ 사이를 움직일 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.



22 함수 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x+4 & (x<3) \\ x & (x\geq 3) \end{cases}$에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프가 이차함수 $y=x^2-6x+k$의 그래프와 오직 한 점에서 만나기 위한 상수 k의 값은?

① 10　② $\dfrac{43}{4}$　③ $\dfrac{23}{2}$
④ $\dfrac{49}{4}$　⑤ 13

23 다음 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\sqrt{3x+4}+2$, $g(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}$ $(x \geq 2)$의 그래프의 교점을 A라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 l이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

24 집합 $\{x \mid |x|<7,\ x$는 정수$\}$의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$가 다음 조건을 모두 만족한다.

> (가) $n(A)=2$
> (나) $B=\{x^2-2 \mid x \in A\}$
> (다) $C=\{2x-k \mid x \in A,\ k$는 2 이하의 정수$\}$

$B=C$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 α, k의 값을 β라 하자. $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ②	03 ⑤
04 ③	05 ②	06 ①
07 ④	08 ②	09
10 ⑤	11 ③	12 ④
13	14	15
16 ⑤	17	18 ㉠, ㉣, ㉥
19 8	20 12	21 4
22 ④	23	24 4

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [4회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ③

해설 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$

② $\varnothing \in A$이므로 $\varnothing \in A$

③ $1 \in A,\ 2 \in A$이므로 $\{1,\ 2\} \subset A$

⑤ $2 \in A,\ 3 \in A$이므로 $\{2,\ 3\} \subset A$

02

정답 ②

해설 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수는 일대일함수이므로

$X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

일대일함수의 개수는

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

03

정답 ⑤

해설

$$\begin{aligned} A\cap(A-B)^C &= A\cap(A\cap B^C)^C \\ &= A\cap\{A^C\cup(B^C)^C\} \\ &= A\cap(A^C\cup B) \\ &= (A\cap A^C)\cup(A\cap B) \\ &= \varnothing\cup(A\cap B) = A\cap B \end{aligned}$$

① $(A\cap B)\subset A$이므로 $(A\cap B)\cup A = A$

② $A-(A\cap B) = A-B$

③ $(A\cup B)-A = B-A$

④ $$\begin{aligned} (A\cup B)-(A-B) &= (A\cup B)-(A\cap B^C) \\ &= (A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C \\ &= (A\cup B)\cap(A^C\cup B) \\ &= (A\cap A^C)\cup B = \varnothing\cup B \\ &= B \end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned} B\cap(B-A)^C &= B\cap(B\cap A^C)^C \\ &= B\cap\{B^C\cup(A^C)^C\} \\ &= B\cap(B^C\cup A) \\ &= (B\cap B^C)\cup(B\cap A) \\ &= \varnothing\cup(B\cap A) = B\cap A \\ &= A\cap B \end{aligned}$$

04

정답 ③

해설 명제 $q \rightarrow \sim p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q에는 속하지만 집합 P^C에는 속하지 않는 원소를 찾으면 된다.

이것을 만족시키는 원소로 이루어진 집합은

$P\cap Q=\{b,\ c\}$이다.

05

정답 ②

해설 $4a-3+\dfrac{9}{a-2}=4(a-2)+\dfrac{9}{a-2}+5$

$a-2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4(a-2)+\frac{9}{a-2}+5 &\geq 2\sqrt{4(a-2)\cdot\frac{9}{a-2}}+5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4(a-2)=\dfrac{9}{a-2}\text{, 즉 } a=\dfrac{7}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4a-3+\dfrac{9}{a-2}\geq k$가 항상 성립하려면

$k\leq 17$이어야 하므로 k의 최댓값은 17이다.

06

정답 ①

해설 주어진 명제가 거짓이 되려면 그 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $4x^2+5x+a\leq 0$이다.'

이차방정식 $4x^2+5x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

주어진 명제의 부정이 참이 되려면

$D=5^2-4\cdot 4a\geq 0$

$\therefore a\leq\dfrac{25}{16}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

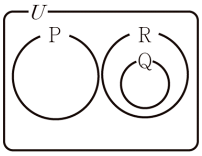
07 정답 ④

해설 $(P-R^C)\cup(Q-R)=\varnothing$에서

$P-R^C=\varnothing$, $Q-R=\varnothing$

$\therefore P\cap R=\varnothing$, $Q\subset R$

즉, 세 집합 P, Q, R의 포함관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $P\neq R$이므로 p는 r이기 위한 필요충분조건이 아니다.

② $P^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 아니다.

③ $Q\subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

④ $R^C\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $R\subset P^C$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

08 정답 ②

해설 $3x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{3}$

이를 $f(3x-1)=6x+1$에 대입하면

$f(t)=6\cdot\dfrac{t+1}{3}+1=2t+3$

$\therefore f(x)=2x+3$

$y=2x+3$으로 놓으면

$2x=y-3 \qquad \therefore x=\dfrac{y-3}{2}$

x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{x-3}{2}$

$\therefore g(x)=\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

09 정답 ③

해설 $2n+x\geq 0$이므로 $x\geq -2n \cdots$ ㉠

$2n-x\geq 0$이므로 $x\leq 2n \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{2n+x}-\sqrt{2n-x}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-2n\leq x\leq 2n$

$n=2$일 때 x의 값의 범위는 $-4\leq x\leq 4$이므로

$f(2)=9$

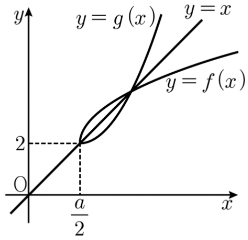
$n=3$일 때 x의 값의 범위는 $-6\leq x\leq 6$이므로

$f(3)=13$

$\therefore f(2)+f(3)=22$

10 정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 (α, α), (β, β)라 하면

두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=4 \quad \cdots$ ㉠

한편, $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$와 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-6x+4+a=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

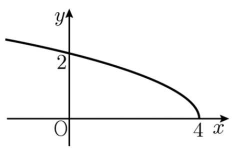
㉠에 대입하면

$4=36-4(4+a)$, $4+a=8$

$\therefore a=4$

11 정답 ③

해설 $y=\sqrt{4-x}$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+1$은 점 $(0, 1)$을 지나므로 두 그래프의 교점이 2개이려면 $m<0$이고, 직선이 점 $(4, 0)$을 지날 때 m의 값이 최소이다.

즉, m의 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 m의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{4}\leq m<0$

12 정답 ④

해설 $P(\varnothing)=\{X \mid X \subset \varnothing\}$에서 $\varnothing$의 부분집합은 $\varnothing$ 뿐이므로 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ 이다.

또한, 집합 $\{\varnothing\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이므로

$$P(P(\varnothing))=\{X \mid X \subset P(\varnothing)\}$$
$$=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$$

13 정답 ③

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3}$, $f\left(\frac{7}{3}\right)=1$, $f(1)=3$, $f(3)=0$, $f(0)=1$

이므로

$$f^2\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{7}{3}\right)=1$$
$$f^3\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(1)=3$$
$$f^4\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^3\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(3)=0$$
$$f^5\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^4\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(0)=1$$
$$f^6\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(f^5\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(1)=3$$
$$\vdots$$

$f^n\left(\frac{2}{3}\right)$의 값은 $n \geq 2$일 때, $1, 3, 0$이 반복된다.

따라서 $f^{2021}\left(\frac{2}{3}\right)=f^{3\cdot 673+2}\left(\frac{2}{3}\right)=f^2\left(\frac{2}{3}\right)=1$

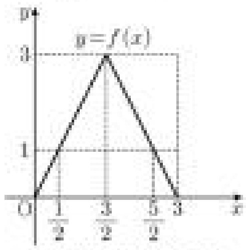
14 정답 ①

해설

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \\ 6-2x & \left(\frac{3}{2} \leq x \leq 3\right) \end{cases}$$ 이고

$$y=g(x)=\begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$ 이므로

$$y=(g \circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=\begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) \leq 1) \\ \frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2} & (1 \leq f(x) \leq 3) \end{cases}$$



그런데 위 그림에서와 같이

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$일 때,

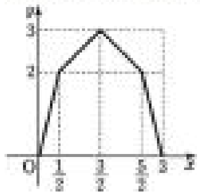
$0 \leq f(x) \leq 1$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$일 때,

$1 \leq f(x) \leq 3$이므로

$$y=(g \circ f)(x)$$
$$=\begin{cases} 2 \cdot 2x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{3}{2} & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(6-2x)+\frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right) \\ 2(6-2x) & \left(\frac{5}{2} \leq x \leq 3\right) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 4x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \\ x+\frac{3}{2} & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \\ \frac{9}{2}-x & \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right) \\ 12-4x & \left(\frac{5}{2} \leq x \leq 3\right) \end{cases}$$

따라서 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



15

정답 ④

해설 점의 대칭이동과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

점 B가 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$\beta=\frac{2}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta=2$ $\cdots$ ㉠

$\alpha>\sqrt{2}$이므로 $0<\beta<\sqrt{2}$, 즉 $0<\beta<\alpha$

두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$\mathrm{C}(\beta,\ \alpha)$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)$

$(\because \alpha>\beta)$

직선 BC와 직선 $y=x$가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1이다.

또한, 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은

$y-\beta=-(x-\alpha)$, 즉 $x+y-(\alpha+\beta)=0$

점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|-2+2-(\alpha+\beta)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$

$(\because \alpha>0,\ \beta>0)$

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot h\\&=\frac{1}{2}\cdot(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\alpha^2-\beta^2=4\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)^2&=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2\\&=(4\sqrt{3})^2+4\cdot2^2=64\end{aligned}$$

$\alpha^2+\beta^2>0$이므로

$\alpha^2+\beta^2=8$

16

정답 ⑤

해설 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\frac{a}{x-3}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=b$이므로

$y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-a$, $y=b+\frac{a}{3}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{x-3}-1$이므로

$f(b)=f(-1)=\frac{3}{-4}-1=-\frac{7}{4}$

$\therefore a+f(b)=3+\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}$

17 정답 ⑤

해설

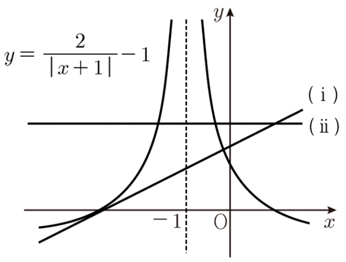
$$y=\frac{2}{|x+1|}-1=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}-1 & (x>-1)\\ -\dfrac{2}{x+1}-1 & (x<-1)\end{cases}$$

이고 직선 $y=-kx+2+k$는 k의 값에 관계없이

점 $(1, 2)$를 지나므로 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와

직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와

직선 $y=-kx+2+k$가 접할 때,

$-\dfrac{2}{x+1}-1=-kx+2+k$에서

$kx^2-3x-k-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4k\cdot(-k-5)=0$에서

$(2k+9)(2k+1)=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{9}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{1}{2}$

이때 직선 $y=-kx+2+k$의 y절편이 0보다 크므로

$k=-\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) 직선 $y=-kx+2+k$가 x축에 평행할 때

$k=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\dfrac{1}{2}+0=-\dfrac{1}{2}$

18 정답 ㉠, ㉣, ㉥

해설 부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠ $a^2+b^2-ab=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2\geq ab$: 맞음

㉡ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+b^2-2b+3$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0$

$\therefore\ a^2+b^2+1>2(a+b-1)$: 틀림

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2$

$+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+$
$c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2\geq 0$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$:
틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=a^2 2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2|ab|-2ab\geq 0(\because\ |ab|\geq ab)$

$\therefore\ |a|+|b|\geq|a+b|$: 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2|ab|+2ab\leq 0(\because|ab|\geq ab)$

$\therefore\ |a|-|b|\leq|a-b|$: 틀림

㉥ $|a+b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2ab+2|ab|\geq 0$

$\therefore\ |a+b|\geq|a|-|b|$: 맞음

19

정답 8

해설 두 점 A, B는 각각 직선 $y=2x+4$와 x축, y축과의 교점이므로

A$(-2, 0)$, B$(0, 4)$

점 C는 직선 $y=2x+4$ 위에 있으므로

$b=2a+4$

$\overline{\mathrm{AP}}=a+2$, $\overline{\mathrm{CQ}}=-a$, $\overline{\mathrm{CP}}=b$, $\overline{\mathrm{BQ}}=4-b$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot(-a)\cdot(4-b)=(-a)^2=a^2$,

$S_2=\frac{1}{2}b(a+2)=\frac{b^2}{4}$

$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+S_1+S_2+4$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+a^2+\frac{b^2}{4}+4$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right)^2$

a, b는 0이 아닌 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{(-1)^2+1^2\}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right)^2\right\}$$
$$\geq\left\{-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{b}{2}+\frac{2}{b}\right\}^2$$

(단, $a<0$, $b>0$이므로 등호는 $-\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{b}{2}+\frac{2}{b}$일 때 성립)

이때 $b=2a+4$이므로

$-a-\frac{1}{a}=a+2+\frac{1}{a+2}$

$2a+2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}=0$

$(2a+2)\left\{1+\frac{1}{a(a+2)}\right\}=\frac{2(a+1)^3}{a(a+2)}=0$

따라서 $a=-1$, $b=2$일 때 최솟값을 가지므로

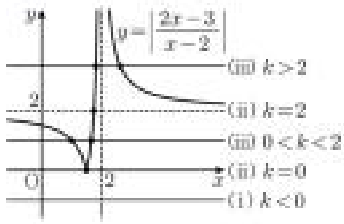
구하는 최솟값은 $(-2)^2+2^2=8$이다.

20

정답 12

해설 함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

함수 $y=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=2$이므로 함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프는 그림과 같고, k의 값에 따라 $f(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.



(i) $k<0$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않으므로

$f(k)=0$

(ii) $k=0$ 또는 $k=2$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나므로

$f(k)=1$

(iii) $0<k<2$ 또는 $k>2$일 때

함수 $y=\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나므로

$f(k)=2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 값은

$f(-2)+f(-1)+f(0)+\cdots+f(6)$

$=0\cdot2+1\cdot2+2\cdot5=12$

21 정답 4

해설 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다. 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{4-0}{11-3}(x-3)$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을

$y=\frac{1}{2}x+k$ (k는 실수)라 하면

$\sqrt{2x-6}=\frac{1}{2}x+k$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2x-6=\frac{1}{4}x^2+kx+k^2$

$\therefore x^2+4(k-2)x+4k^2+24=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-(4k^2+24)=0,\ -16k-8=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 사이의 거리는

직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 위의 점 $(3,\ 0)$과

직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, 즉 $x-2y-1=0$ 사이의 거리와

같으므로

$\frac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

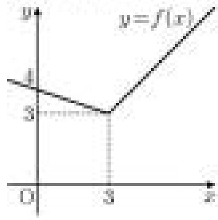
이때 $\overline{AB}=\sqrt{(11-3)^2+4^2}=4\sqrt{5}$ 이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=4$

22 정답 ④

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}f(x)+4 & (f(x)<3)\\ f(x) & (f(x)\ge3)\end{cases}$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge3$이므로

$(f\circ f)(x)=f(x)$이다.

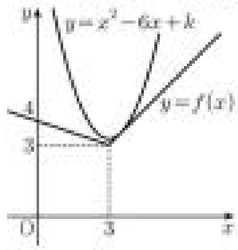
이차함수 $y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$의

그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서 만나기

위해서는 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-6x+k$의

그래프와 직선 $y=x$가 접해야 한다.



$x^2-6x+k=x$에서

이차방정식 $x^2-7x+k=0$이 중근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=49-4k=0,\ 4k=49$

$\therefore k=\frac{49}{4}$

23 정답 ②

해설 $y=f(x)=\sqrt{3x+4}+2$ $(y\geq 2)$라 하면

$(y-2)^2=3x+4$, $x=\frac{1}{3}(y-2)^2-\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}$ $(x\geq 2)$

즉, 함수 $g(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3}$ $(x\geq 2)$는

함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의

교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{3x+4}+2=x$에서

$3x+4=(x-2)^2$

$x^2-7x=x(x-7)=0$

$\therefore x=7$ $(\because x\geq 2)$

$\therefore \mathrm{A}(7,\ 7)$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{C}(3,\ -1)$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로

직선 l의 방정식은

$y=-(x+1)+3$

$x+y-2=0$

점 $\mathrm{A}(7,\ 7)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|7+7-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=6\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=24$

24 정답 4

해설 $B=\{x^2-2\,|\,x\in A\}\subset\{x\,|\,|x|<7,\ x$는 정수$\}$

이므로 $-7<x^2-2<7$, $0\leq x^2<9$

$\therefore\ -3<x<3$

그런데 x는 정수이므로 $V=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$라

하면 $A\subset V$

조건 (가)에서 $n(A)=2$이므로

$A=\{x_1,\ x_2\}$ $(x_1\neq x_2,\ x_1\in V,\ x_2\in V)$라 하면

$B=\{{x_1}^2-2,\ {x_2}^2-2\}$, $C=\{2x_1-k,\ 2x_2-k\}$

$B=C$이므로

${x_1}^2-2=2x_1-k$, ${x_2}^2-2=2x_2-k$ 또는

${x_1}^2-2=2x_2-k$, ${x_2}^2-2=2x_1-k$

(ⅰ) ${x_1}^2-2=2x_1-k$, ${x_2}^2-2=2x_2-k$일 때

${x_1}^2-2=2x_1-k$에서 ${x_1}^2-2x_1+k-2=0$

$x_1=1\pm\sqrt{3-k}$

이때 $x_1\in V$이므로 $\sqrt{3-k}=-1,\ 0,\ 1$

k는 2 이하의 정수이므로 $k=2$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=2$

마찬가지로 ${x_2}^2-2=2x_2-k$일 때에도

$x_2=0$ 또는 $x_2=2$

$x_1\neq x_2$이므로 $x_1=0,\ x_2=2$ 또는

$x_1=2,\ x_2=0$

$\therefore A=\{0,\ 2\}$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=2$이므로

$\alpha\beta=2\cdot 2=4$

(ⅱ) ${x_1}^2-2=2x_2-k$, ${x_2}^2-2=2x_1-k$일 때

위의 두 식을 변끼리 빼면

${x_1}^2-{x_2}^2=2(x_2-x_1)$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(x_1-x_2)=0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0$

$\therefore x_1+x_2+2=0$ $(\because x_1\neq x_2)$

이 식을 만족시키는 x_1, x_2는 $x_1=-2,\ x_2=0$

또는 $x_1=0,\ x=-2$

$\therefore A=\{-2,\ 0\},\ k=-2$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=-2$이므로

$\alpha\beta=-2\cdot(-2)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha\beta=4$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

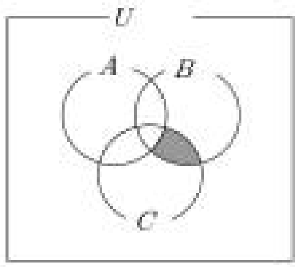
01 명제 '이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.'의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.
② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.
③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.
④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.
⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

02 두 집합 $X=\{x|-1 \le x \le 3\}$, $Y=\{y|a \le y \le b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=2x+3$의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -27　② -12　③ 0
④ 9　⑤ 24

03 다음은 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대한 벤 다이어그램이다. 어두운 부분을 집합으로 옳게 표현한 것은?

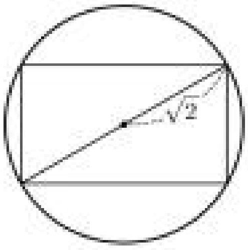


① $(A\cap C)-B$
② $(B\cap C)-A$
③ $A-(B\cup C)$
④ $B-(A\cup C)^c$
⑤ $B-(A\cap C)^c$

04 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B=A$일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?

① $A\subset B$　② $A\cup B=B$
③ $A-B=\varnothing$　④ $A\cup B^c=U$
⑤ $B^c\subset A^c$

05 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

06 함수 $y=\sqrt{2x+5}$의 정의역을 A,
함수 $y=\sqrt{12-3x}$의 정의역을 B라고 할 때,
$A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

07 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 ▷를
$A \triangleright B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$으로 약속할 때,
다음 중 $(A\triangleright B)\triangleright B$와 항상 같은 집합은?

① A　② B　③ $A\cap B$
④ $A\cup B$　⑤ $A-B$

08 [2017년 4월 고3 문과 15번 변형]
다음은 어느 고등학교 학생 100명을 대상으로 봉사 활동과 동아리 활동에 대한 참가 희망 조사를 한 결과이다.

> • 봉사 활동을 희망한 학생은 42명이다.
> • 동아리 활동을 희망하지 않은 학생은 25명이다.

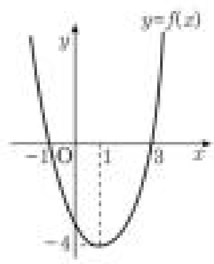
봉사 활동과 동아리 활동을 모두 희망한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

① 57　② 59　③ 61
④ 63　⑤ 65

09 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여
$f(mn)=f(m)+f(n)$, $f(2)=1$일 때, $f(2^{2006})$의
값은 얼마인가?

① 1003　② 2006　③ 4012
④ 2^{1003}　⑤ 2^{2006}

10 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
방정식 $f(|f(x)|)=0$의 실근의 개수는?



① 2개　② 4개　③ 6개
④ 8개　⑤ 0개

11 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x)=2g(x)+1$
② $h(x)=2g(x)-1$
③ $h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$
④ $h(x)=g\left(\frac{x}{2}+1\right)$
⑤ $h(x)=\frac{1}{2}g(2x-1)+1$

12 $\sqrt{x+2}=x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

① $2<k<\frac{9}{4}$　② $2\le k<\frac{9}{4}$
③ $k>\frac{9}{4}$　④ $k<2$
⑤ $2<k\le\frac{9}{4}$

13 다음은 임의의 네 실수 a, b, x, y에 대하여 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$이 성립함을 증명하는 과정이다. 이때 (가), (나)에 알맞은 것을 쓰시오.

> $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
> $=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$
> $\qquad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
> $=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
> $=(\boxed{\text{(가)}})^2\ge 0$
> $\therefore\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$
> (단, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$일 때 성립한다.)

14 두 함수 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$의 그래프의 교점의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, pq의 값을 구하시오.

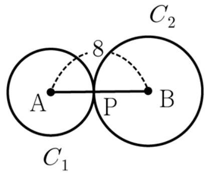
15 [2009년 9월 고1 18번]
집합 $S=\{a,\ b,\ c\}$의 부분집합을 원소로 갖는 집합 X가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) $A\in X$ 이면 $S-A\in X$
> (나) $A\in X,\ B\in X$이면 $A\cup B\in X$

이 때, 집합 X의 개수는? (단, $X\ne\varnothing$)

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

16 길이가 8인 선분 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 중심이 A이고 반지름이 선분 AP인 원을 C_1, 중심이 B이고 반지름이 선분 BP인 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $9S_1+S_2$의 최솟값은?



① $\dfrac{573}{10}\pi$　② $\dfrac{288}{5}\pi$　③ $\dfrac{579}{10}\pi$
④ $\dfrac{291}{5}\pi$　⑤ $\dfrac{117}{2}\pi$

17 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-6 & (x<-3) \\ x & (-3\le x<1) \\ -x+2 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

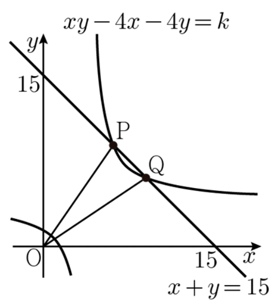
18 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$\mathrm{A}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$\mathrm{B}=\{(x,y)\,|\,y=ax\}$$

① $a<0$　② $a>0$
③ $0<a<1$　④ $0\le a\le 1$
⑤ $a<0, a>1$

19 집합 $P=\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$에 대하여 $f(P)=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n$이라 정의한다. 집합 $A=\{3, 6, 9, 12\}$의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$이라 할 때, $f(A_1)+f(A_2)+f(A_3)+\cdots+f(A_{16})$의 값을 구하시오.

20 다음 그림과 같이 곡선 $xy-4x-4y=k$가 직선 $x+y=15$와 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 54일 때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오. (단, $k<0$)



21 함수 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x-2}$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$가 만나지 않도록 하는 m의 값 또는 범위를 구하시오.

22 함수 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}x+3}$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $3\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ ② $2\sqrt{3}-1$ ③ $3\sqrt{2}-1$
④ $2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}$

23 유리함수 $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+2}$에 대하여 $g(x)=|f(x)+q|$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재할 때, 양의 정수 q의 최솟값을 구하시오.

(가) $-2<x_1<x_2<0$
(나) $g(x_1)<4$, $g(x_2)>4$

24 두 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=px+q$ $(p>0)$에 대하여 부등식 $f(x-2)<g(x)<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위가 $1<x<2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02	03 ②
04 ④	05 ③	06
07	08	09 ②
10	11 ③	12 ②
13 (가) $bx-ay$	(나) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$	14 25
15 ④	16 ②	17 ④
18 ①	19 240	20 117
21 $m=0$ 또는 $m<-\frac{1}{12}$		22 ④
23 6	24 1	

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [5회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	유형별 학습	이름
24문제 / dre수학			

01

정답 ③

해설 명제 $p \Rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이다.

02

정답 ④

해설 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일 대응이어야 한다.

$y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

$f(-1)=a,\ f(3)=b$

이때 $f(-1)=2\cdot(-1)+3=1$

$f(3)=2\cdot3+3=9$이므로

$a=1,\ b=9$

$\therefore\ ab=9$

03

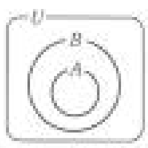
정답 ②

해설 벤 다이어그램의 어두운 부분은 $B\cap C$에서 A를 제외하면 되므로 구하고자 하는 집합은 $(B\cap C)-A$이다.

04

정답

해설



$A\cap B=A$에서 $A\subset B$

$A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B$

$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$\Leftrightarrow A\cap B^c=\varnothing$

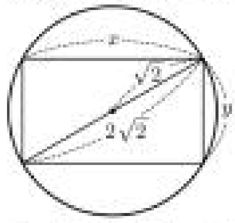
$\Leftrightarrow A^c\cup B=U$

$\Leftrightarrow B^c\cup A^c$

05

정답 ③

해설 다음 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y\ (x>0,\ y>0)$이라 하면



$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$이고

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2\le(2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\cdot8=64$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

$\therefore\ -8\le 2x+2y\le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

06

정답 ④

해설 $2x+5\ge0$에서 $x\ge-\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ A=\left\{x\ \middle|\ x\ge-\dfrac{5}{2}\right\}$

$12-3x\ge0$에서 $x\le4$ $\quad\therefore\ B=\{x\mid x\le4\}$

따라서 $A\cap B=\left\{x\ \middle|\ -\dfrac{5}{2}\le x\le4\right\}$이므로

이 집합에 속하는 정수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

07

정답 ②

해설 $A\triangleright B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

$=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$

$\therefore\ (A\triangleright B)\triangleright B=B\triangleright B$

$=(B\cap B)\cup(B^C\cap B)$

$=B\cup\varnothing=B$

08 정답 ②

해설 학생 100명 전체집합을 U라 하면 $n(U)=100$

봉사 활동을 희망한 학생들의 집합을 A라 하면 $n(A)=42$

동아리 활동을 희망한 학생들의 집합을 B라 하면

$n(B^C)=25$이므로 $n(B)=75$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$\qquad =42+75-n(A\cup B)$

$\qquad =117-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때, 최솟값 75를 갖는다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 42

$n(A\cup B)$는 $A\cup B=U$일 때, 최댓값 100을 갖는다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 17

$\therefore\ M+m=42+17=59$

09 정답 ②

해설 $f(2^{2006})=f(2\times2\times\cdots\times2)$

$\qquad =f(2)+f(2)+\cdots+f(2)$

$\qquad =2006f(2)=2006$

10 정답 ②

해설 $|f(x)|=t\ (t\geq0)$ 로 놓으면

$f(|f(x)|)=0$ — $f(t)=0$

$\therefore t=3(\because t\geq0)$

$\therefore |f(x)|=3$

ⅰ) $f(x)=3$ 일 때

$y=f(x)$ 와 $y=3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.

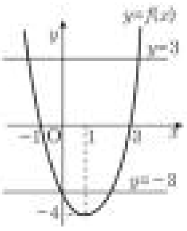
$\therefore$ 2개

ⅱ) $f(x)=-3$ 일 때

$y=f(x)$ 와 $y=-3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.

$\therefore$ 2개

따라서 방정식 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는 4개다.



11 정답 ③

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}(x)=g(x)$

이때 $y=f(2x-1)$의 역함수를 구하기 위해

$x,\ y$를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(2y-1),\ f^{-1}(x)=2y-1$

$\therefore\ g(x)=2y-1$

위의 식을 y에 관하여 정리하면

$g(x)+1=2y$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}g(x)+\dfrac{1}{2}$

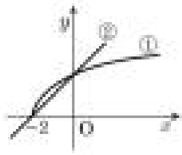
따라서 구하는 역함수 $y=h(x)$는

$h(x)=\dfrac{1}{2}g(x)+\dfrac{1}{2}$

12 정답

해설 $y=\sqrt{x+2}$ ········· ①

$y=x+k$ ········· ② 라 하면



그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1이고 k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는

$\sqrt{x+2}=x+k \Rightarrow x+2=(x+k)^2 \Rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$

$\Rightarrow x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$ ········· ③

①, ②가 서로 접하려면 ③의 D=0 이어야 한다.

$\therefore\ (2k-1)^2-4(k^2-2)=0,\ 4k^2-4k+1-4k^2+8=0$

$-4k+9=0,\ 4k=9$

$\therefore\ k=\dfrac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$을 지날 경우

$0=-2+k$

$\therefore\ k=2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2\leq k<\dfrac{9}{4}$

13

정답 (가) $bx-ay$ (나) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

해설 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$\quad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2=\boxed{(bx-ay)^2}\geq 0$

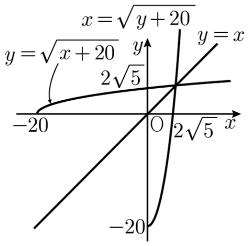
$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq (ax+by)^2$

(단, 등호는 $\boxed{(bx-ay)^2}$, $\boxed{\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}}$ 일 때 성립한다.)

14

정답 25

해설 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 함수 $y=\sqrt{x+20}$, $x=\sqrt{y+20}$ 의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{x+20}$ 의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+20}=x$의 양변을 제곱하면

$x+20=x^2$, $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x\geq 0$)

따라서 주어진 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(5,\ 5)$이므로

$p=5$, $q=5$

$\therefore pq=25$

15

정답 ④

해설 집합의 포함관계를 이해하고 조건을 만족하는 집합 구하기

X는 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{a,\ b\}, \{a,\ c\}, \{b,\ c\}, S$의 일부를 원소로 하고 주어진 조건을 만족하는 집합이므로

$\{S,\ \varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{b\},\ \{a,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{c\},\ \{a,\ b\},\ S,\ \varnothing\}$,

$\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ S,\ \varnothing\}$

그러므로 5개

16

정답 ②

해설 길이가 8인 선분 AB 위를 점 P가 움직이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=8$이고,

$9S_1+S_2=9\pi\overline{\mathrm{AP}}^2+\pi\overline{\mathrm{BP}}^2=\pi\left(9\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\right)$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$는 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+1^2\right\}\left(9\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\right)\geq\left(\dfrac{1}{3}\cdot 3\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\right)^2$

(단, 등호는 $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{5}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{36}{5}$ 일 때 성립)

$\dfrac{10}{9}\left(9\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\right)\geq\left(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\right)^2$

$9\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\geq\dfrac{9}{10}\cdot 8^2=\dfrac{288}{5}$

($\because \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=8$)

$\therefore 9S_1+S_2=\pi\left(9\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\right)\geq\dfrac{288}{5}\pi$

따라서 $9S_1+S_2$의 최솟값은 $\dfrac{288}{5}\pi$이다.

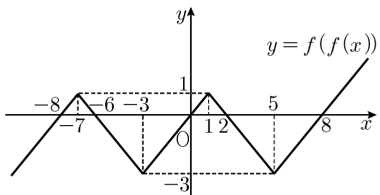
17

정답 ④

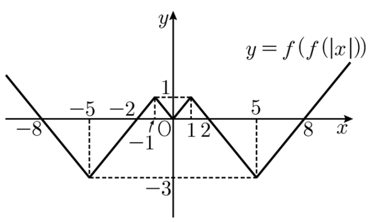
해설

$$f(f(x))=\begin{cases}x+8 & (x<-7)\\ -x-6 & (-7\leq x<-3)\\ x & (-3\leq x<1)\\ -x+2 & (1\leq x<5)\\ x-8 & (x\geq 5)\end{cases}$$

이므로 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(f(|x|))$의 그래프는 $y=f(f(x))$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\right)=20$

18 정답 ①

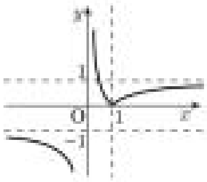
해설 $y=\dfrac{|x-1|}{x}$에서

$x \geq 1$일 때,

$y=\dfrac{x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+1$

$x<1$일 때,

$y=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}-1$



$A \cap B=\varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y=ax$가 만나지 않아야 하므로, 윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a<0$

19 정답 240

해설 $A=\{3, 6, 9, 12\}$의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$이라 하면, 집합 A의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1}=8$(번)씩 나온다.

$\therefore f(A_1)+f(A_2)+f(A_3)+\cdots+f(A_{16})$
$=8 \cdot (3+6+9+12)=240$

20 정답 117

해설 $xy-4x-4y=k$ $\cdots$ ㉠

곡선 ㉠과 직선 $x+y=15$의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하고, $y=15-x$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-15x+(60+k)=0$ $\cdots$ ㉡

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=60+k=54$

$\therefore k=-6$

$k=-6$을 ㉡에 대입하여 풀면 $x=6$ 또는 $x=9$

$\therefore$ P(6, 9), Q(9, 6)

$\therefore \overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}^2=6^2+9^2=117$

21 정답 $m=0$ 또는 $m<-\dfrac{1}{12}$

해설 $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x-2}$

$=\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x+1}{x-2}\ (x \neq -1,\ x \neq 2)$ $\cdots$ ㉠

㉠의 그래프는 다음 그림과 같다.

$y=m(x-2)$ $\cdots$ ㉡

㉡은 정점 (2, 0)을 지나고 기울기가 m인 직선이므로, ㉠과 만나지 않는 경우는 다음의 두 경우이다.

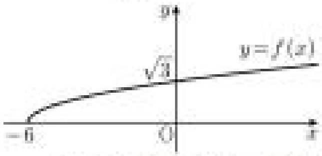
(ⅰ) $m=0$일 때,
직선이 곡선 위의 빈 점 $(-1, 0)$을 지나므로 만나지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $\dfrac{x+1}{x-2}=m(x-2)$이 실근을 갖지 않으면 교점이 없다.
㉠의 양변에 $x-2$를 곱하여 정리하면
$mx^2-(4m+1)x+(4m-1)=0$
$D=(4m+1)^2-4m(4m-1)<0$에서
$m<-\dfrac{1}{12}$

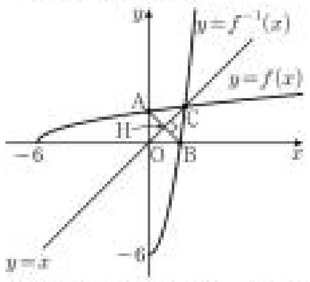
(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=0$ 또는 $m<-\dfrac{1}{12}$

22 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ 의 그래프는 다음과 같다.



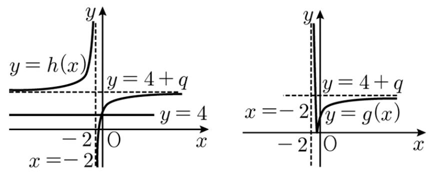
$x=0$일 때 함숫값이 $\sqrt{3}$ 이므로 A$(0,\ \sqrt{3})$이다.
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$에 대하여 대칭이므로 B$(\sqrt{3},\ 0)$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하는 형태이므로 함수의 그래프가 역함수의 그래프와 만나는 교점은 직선 $y=x$와의 교점과 같다.
$\sqrt{\frac{1}{2}x+3}=x$에서 양변을 각각 제곱하면
$\frac{1}{2}x+3=x^2$, $2x^2-x-6=0$,
$(2x+3)(x-2)=0$이므로 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$
이때 점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이 아니므로 C$(2,\ 2)$이다.



한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
점 H는 선분 AB의 중점이므로 H$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.
$\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{CH}=\sqrt{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=2\sqrt{3}-\frac{3}{2}$이다.

23 정답 6

해설 $h(x)=f(x)+q$라 하면 $g(x)=|h(x)|$
$f(x)=\frac{4x-3}{x+2}=\frac{4(x+2)-11}{x+2}=-\frac{11}{x+2}+4$
에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=4$이므로
함수 $y=h(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=4+q$이다.
이때 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재하려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $-2<x<0$에서 증가하고 직선 $y=4$와 만나야 한다.

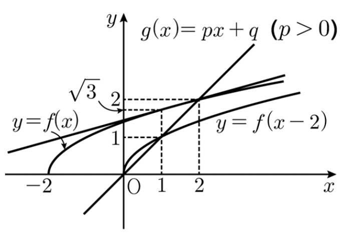


[그림 1]

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같아야 하므로 $h(0)>4$에서
$q-\frac{3}{2}>4$
$\therefore\ q>\frac{11}{2}$
따라서 조건을 만족시키는 양의 정수 q의 최솟값은 6이다.

24 정답 1

해설 $f(x)=\sqrt{x+2}$ 에서
$f(x-2)=\sqrt{(x-2)+2}=\sqrt{x}$
이때 부등식 $f(x-2)<g(x)<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위가 $1<x<2$이려면
다음 그림과 같이 함수 $g(x)=px+q$ $(p>0)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$ 또는 $(1,\ \sqrt{3})$, $(2,\ 2)$를 지나야 한다.



이때 p, q가 정수이므로 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선이고,
이 직선의 방정식은 $y-1=\frac{2-1}{2-1}(x-1)$에서
$y=x$
$\therefore\ g(x)=x$
따라서 $p=1$, $q=0$이므로
$p+q=1+0=1$