실시일자	-	유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 73,75~88p_문제연습

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

01 직선 $x+y=r$에 원 $x^2+y^2=r$이 접할 때, 양수 r의 값을 구하시오.

02 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=x-4\sqrt{2}$가 한 점에서 만날 때, 양수 r의 값을 구하시오.

03 중심의 좌표가 $(2,\ -5)$이고 직선 $x+y+k=0$에 접하는 원의 넓이가 24π일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

04 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)

05 점 $(-5,\ 7)$에서 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$에 이르는 거리의 최댓값이 15일 때, 양수 r의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

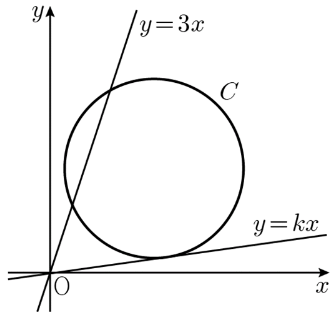
06 점 $\mathrm{P}(5,\ 7)$에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$에 그은 두 접선의 접점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

07 점 $\mathrm{P}(1, 4)$에서 중심이 점 $(3, 6)$인 원에 그은 접선의 길이가 2일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

08 두 원
$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-4)^2+(y-1)^2=4$의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

09 [2024년 9월 고1 16번 변형]
다음 그림과 같이 좌표평면 위에
원 $C: (x-a)^2+(y-a)^2=72$가 있다. 원 C의 중심과 직선 $y=3x$ 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이고 직선 $y=kx$가 원 C에 접할 때, 상수 k의 값은? (단, $a>0,\ 0<k<1$)



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$
④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

10 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$
④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

11 두 점 $(-1,\ 7)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선과 평행하고, 제1사분면에서 원 $x^2+y^2=8$에 접하는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

12 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=r^2$ 밖의 한 점 $\mathrm{A}(3,\ 9)$에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 r의 값을 구하시오.

13 원 $x^2+y^2+8x-4y+16=0$ 위의 점 P와 직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리가 정수인 점 P의 개수를 구하시오.

14 원 $x^2+y^2=24$와 직선 $7x-y+a=0$이 두 점 P, Q에서 만날 때, 삼각형 OPQ가 정삼각형이 되도록 하는 양수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

15 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$에 그은 두 접선이 서로 수직이 되도록 하는 a의 값들의 합은?

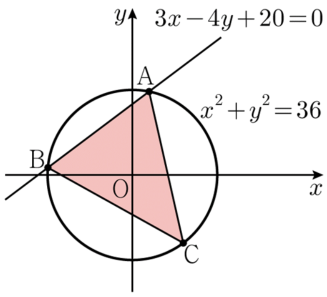
① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

16 [2019년 3월 고2 이과 27번 변형]
원 C : $x^2+y^2-13x=0$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OP}}=5$
(나) 점 P는 제1사분면 위의 점이다.

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

17 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=36$과 직선 $3x-4y+20=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되도록 원 위에 점 C를 잡을 때, 점 C를 지나고 원에 접하는 직선의 방정식은 $ax-4y+b=0$이다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

18 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,-1)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2-6x-4y+a=0$과 접할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

19 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$에 그은 두 접선의 접점 사이의 거리는?

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{6}$ ④ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

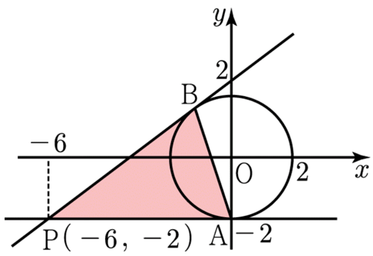
20 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

21 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 10

22 다음 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(-6,\ -2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{A}(0,\ -2)$, B라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하시오.



실시일자	-	유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 73,75~88p_문제연습

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

빠른정답

01 2	02 4	03 ⑤
04 $\frac{25}{4}$	05 ③	06 $\frac{24}{5}$
07 2	08 ③	09 ①
10 ①	11 8	12 5
13 8	14 ⑤	15 ⑤
16 239	17 ①	18 $\frac{64}{5}$
19 ④	20 ②	21 ③
22 $\frac{54}{5}$		

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 73,75~88p_문제연습

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

01 정답 2

해설 $x^2+y^2=r$, $x+y=r$이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2+2rx+r^2-r=0$

$\frac{D}{4}=r^2-2(r^2-r)=0$에서

$-r^2+2r=0$

$\therefore r=0$ 또는 $r=2$

따라서 양수 r의 값은 2이다.

02 정답 4

해설 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x-4\sqrt{2}$, 즉 $x-y-4\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$r=4$

03 정답 ⑤

해설 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\pi r^2=24\pi$

$\therefore r=2\sqrt{6}$ $(\because r>0)$

원의 중심 $(2, -5)$와 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|2-5+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-3+k|}{\sqrt{2}}$이므로

원과 직선이 접하려면 $\frac{|-3+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

$|-3+k|=4\sqrt{3}$, $-3+k=\pm4\sqrt{3}$

$\therefore k=3\pm4\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(3+4\sqrt{3})+(3-4\sqrt{3})=6$

04 정답 $\frac{25}{4}$

해설 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식은

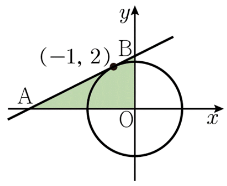
$(-1)\cdot x+2\cdot y=5$

$\therefore x-2y+5=0$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{A}(-5, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{5}{2}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$



05 정답 ③

해설 점 $(-5, 7)$에서 원의 중심 $(1, -1)$에 이르는 거리는

$\sqrt{(-5-1)^2+\{7-(-1)\}^2}=\sqrt{100}=10$이고,

원의 반지름의 길이는 r이므로 점 $(-5, 7)$에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $10+r$이다.

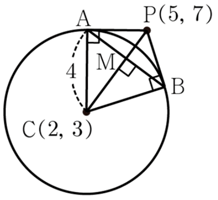
따라서 $10+r=15$이므로

$r=5$

06 정답 $\dfrac{24}{5}$

해설 원의 중심 $\mathrm{C}(2, 3)$과 점 $\mathrm{P}(5, 7)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$



$\triangle\mathrm{CAP}$는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{CP}}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CP}}$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{AM}}$에서

$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{\mathrm{AM}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{12}{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{24}{5}$

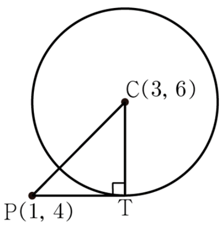
07 정답 2

해설 다음 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(3, 6)$이라 하면

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(1-3)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{2}$

또, 접점을 T라 하면 접선의 길이는 2이므로

$\overline{\mathrm{PT}}=2$



따라서 구하는 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CT}}$의 길이이므로

직각삼각형 CPT에서

$\overline{\mathrm{CT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{PT}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$

08 정답 ③

해설 두 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$,

$(x-4)^2+(y-1)^2=4$의 중심을 각각

C, C'이라 하면 $\mathrm{C}(-1, 1)$, $\mathrm{C}'(4, 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CC}'}=5$

두 접점을 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{\mathrm{C}'\mathrm{B}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

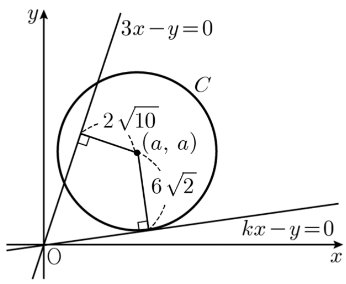
$\overline{\mathrm{C}'\mathrm{H}}=1+2=3$

따라서 구하는 공통내접선의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

09 정답 ①

해설



원 C의 중심 (a, a)와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로

$\dfrac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

$\therefore\ a=10$

원 C의 중심 $(10, 10)$과 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{|10k-10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=6\sqrt{2}$

$|10k-10|=\sqrt{72k^2+72}$

$28k^2-200k+28=0$

$7k^2-50k+7=0$

$(7k-1)(k-7)=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{7}$ 또는 $k=7$

이때 $0<k<1$이므로

$k=\dfrac{1}{7}$

10 정답 ①

해설 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ ……㉠

$y=x+2$ ……㉡

에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+4(1-a)x+4=0$

$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$

㉠, ㉡이 많나지 않으려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$

$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서

직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,|a+1|$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\sqrt{2}\,|a+1|=|2a|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-1<0 \qquad \therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

11 정답 8

해설 두 점 $(-1, 7)$, $(3, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

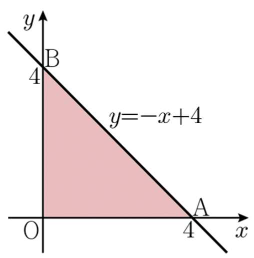
$\frac{3-7}{3-(-1)}=-1$이므로 직선 AB의 기울기는 -1이고,

원 $x^2+y^2=8$에 접하므로 접선의 방정식은

$y=-x\pm2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1}=-x\pm4$

이때 직선이 제1사분면에서 원에 접하므로 $y=-x+4$

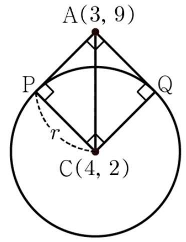
따라서 다음 그림과 같이 $A(4, 0)$, $B(0, 4)$이다.



$\therefore$ (삼각형 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

12 정답 5

해설 원의 중심을 $C(4, 2)$, 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.



따라서 직각삼각형 CAP에서

$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2$이므로

$(3-4)^2+(9-2)^2=r^2+r^2$

$2r^2=50,\ r^2=25$

$\therefore r=5\ (\because r>0)$

13 정답 8

해설 $x^2+y^2+8x-4y+16=0$에서

$(x+4)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심 $(-4, 2)$와 직선 $x-2y-2=0$ 사이의

거리는 $\frac{|-4-4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

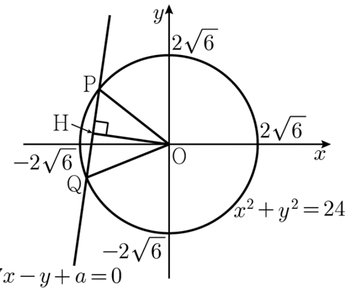
이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-2\le d\le 2\sqrt{5}+2$

$4<2\sqrt{5}<5$이므로 d가 될 수 있는 정수는 3, 4, 5, 6이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 8이다.

14 정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 직선 $7x-y+a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\dfrac{a}{5\sqrt{2}}\ (\because\ a>0)$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{6}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{6}$

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}$는 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$ 인 정삼각형 OPQ의 높이이므로

$\dfrac{a}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{6}$

$\therefore\ a=30$

15 정답 ⑤

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+a$이다.

이때 원의 중심 $(0,\ 2)$에서 직선 $mx-y+a=0$에 이르는 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|m\cdot 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$|a-2|=3\sqrt{m^2+1^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$9m^2-(a^2-4a-5)=0\quad \cdots$ ㉠

이때 ㉠은 m에 관한 이차방정식이고, ㉠의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$

$a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm3\sqrt{2}$

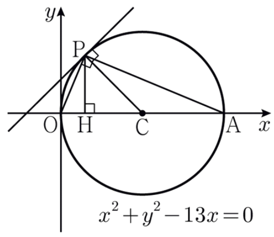
따라서 구하는 a의 값들의 합은

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

16 정답 239

해설 원 $\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{13}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면

좌표는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{13}{2},\ 0\right)$이다.



원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로

$\angle\mathrm{OPA}=90^\circ$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OHP}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POH}$

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OPH}$ ($\because$ AA 닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=5$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=13$이므로

$13:5=5:\overline{\mathrm{OH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{25}{13}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}},\ \dfrac{25}{13}:\overline{\mathrm{HP}}=5:12$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HP}}=\dfrac{60}{13}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{25}{13},\ \dfrac{60}{13}\right)$이다.

$\mathrm{C}\left(\dfrac{13}{2},\ 0\right)$이므로 직선 CP의 기울기는

$$\frac{-\dfrac{60}{13}}{\dfrac{13}{2}-\dfrac{25}{13}}=\frac{-\dfrac{120}{26}}{\dfrac{119}{26}}=-\frac{120}{119}$$

점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이고 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{119}{120}$

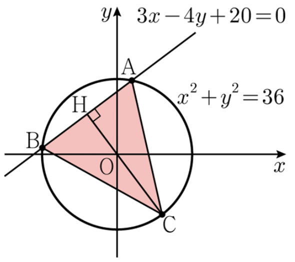
따라서 $p=120,\ q=119$이므로

$p+q=239$

17 정답 ①

해설 다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH}$



S가 최대가 되려면 $\overline{CH}$가 최대가 되어야 하므로 점 C는 직선 AB와 평행하면서 원에 접하는 직선 위의 점이다.

그 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$ (k는 상수)라 하자.

원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6$

$\therefore\ k=\pm 30$

이때 직선의 y절편이 음수이므로 직선의 방정식은 $3x-4y-30=0$이고

$a=3,\ b=-30$이므로

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{-30}{3}=-10$

18 정답 $\frac{64}{5}$

해설 원 $x^2+y^2-6x-4y+a=0$을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-2)^2=13-a$

이다. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,-1)$에서의 접선의 방정식은 $2x-y=5$

이다. 이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=13-a$에 접하려면 원의 중심 $(3,2)$에서 직선 $2x-y-5=0$까지 거리가 원의 반지름과 같으면 된다.

$\frac{|6-2-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{13-a}$

$\sqrt{5}\sqrt{13-a}=1$

$5(13-a)=1$

$\therefore\ a=\frac{64}{5}$

19 정답 ④

해설 오른쪽 그림과 같이 점 P$(2,\ 3)$에서 원에 그은 접선의 두 접점을 Q, R라 하자.

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$이므로 원의 중심은 C$(-2,\ 1)$이다.

$\overline{CP}=2,\ \overline{CP}=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$

삼각형 CPQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2\sqrt{5})^2=2^2+\overline{PQ}^2,\ \overline{PQ}^2=16$

$\therefore \overline{PQ}=4\left(\because \overline{PQ}>0\right)$

또한,

$\triangle CPQ=\frac{1}{2}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{QM}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\overline{QM}\qquad \therefore QM=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{QR}=2\overline{QM}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

20 정답 ②

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-ma$이다. 원의 중심 $(3,\ 1)$에서 직선 $y=mx-ma$에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|3m-1-ma|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$\therefore\ |(3-a)m-1|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(3-a)^2m^2-2(3-a)m+1=9m^2+9,$

$(a^2-6a)m^2-2(3-a)m-8=0$

이 이차방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 두 접선이 수직이므로

$m_1m_2=-\frac{8}{(a^2-6a)}=-1,\ a^2-6a-8=0$

$a^2-6a-8=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=6$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다.

21 정답 ③

해설 점 $A(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서 접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

⇐ 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, 두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

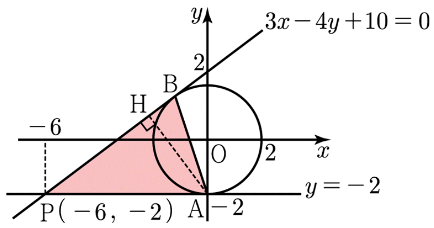
$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0,\ (a-7)(a+1)=0$

$\therefore a=7(\because a>0)$

22 정답 $\dfrac{54}{5}$

해설 점 P를 지나는 원 $x^2+y^2=4$의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x+6)-2$, 즉 $mx-y+6m-2=0$



원과 직선이 접하려면

$$\frac{|6m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ |6m-2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $36m^2-24m+4=4m^2+4$

$32m^2-24m=0,\ 8m(4m-3)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\dfrac{3}{4}$

따라서 접선의 방정식은

$y=-2$ 또는 $3x-4y+10=0$이다.

점 $A(0,\ -2)$에서 직선 $3x-4y+10=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{|8+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{18}{5}$$

이때 $\overline{BP}=\overline{AP}=6$이므로

$$\therefore\ \triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{18}{5}$$
$$=\frac{54}{5}$$