

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{3, 4\}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $\{1\} \subset A$
- ㄴ. $\{3, 4\} \not\subset A$
- ㄷ. $\emptyset \subset A$
- ㄹ. $\{\emptyset\} \not\subset A$
- ㅁ. $\{\emptyset, 1, 2, \{3, 4\}\} \subset A$

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ, ㅁ
- ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

02 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 집합 $(A - B) \cup (A - C)$ 와 항상 같은 집합은?

- ① $(A \cap B) - C$
- ② $(A \cup C) - B$
- ③ $A - (B - C)$
- ④ $A - (B \cap C)$
- ⑤ $A - (B \cup C)$

03 다음 보기 중 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)의 개수는?

〈보기〉

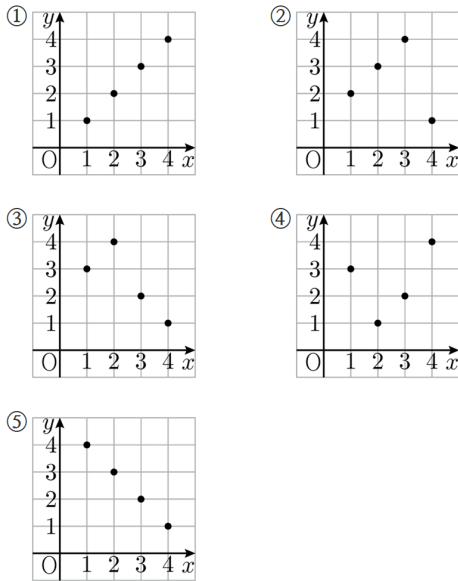
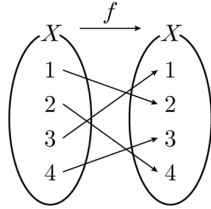
- (가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (나) $x^2 - x + 1 > 0$
- (다) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- (마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- (바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개
- ② 5개
- ③ 4개
- ④ 3개
- ⑤ 2개

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 04** 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 대응관계가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프로 알맞은 것은?



- 05** $x > 1$ 일 때, $x - 1 + \frac{4}{x-1} \geq a$ 가 항상 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 구하시오.

- 06** 집합 A 에 대하여 $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ 라 하자. $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것의 개수는?

〈보기〉

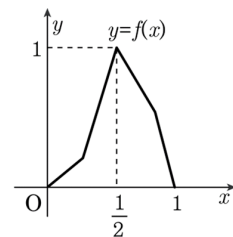
- ㄱ. $\{\{1, 2\}\} \in P(A)$
 ㄴ. $\{\{1, 2\}\} \subset P(A)$
 ㄷ. $\emptyset \in P(A)$
 ㄹ. $\emptyset \subset P(A)$

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 없다.

- 07** 두 실수 a, b 에 대하여 두 집합 $A = \{6, a^2\}$, $B = \{16, b^2 - b\}$ 가 서로 같을 때, $a + b$ 의 최솟값은?

- ① -8 ② -6 ③ -1
 ④ 2 ⑤ 6

- 08** 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \leq x \leq 1$ 을 만족하는 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는?



- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

09

[2023년 11월 고1 25번/3점]

정수 k 에 대한 두 조건 p, q 가 모두 참인 명제가 되도록 하는 모든 k 의 값의 합을 구하시오.

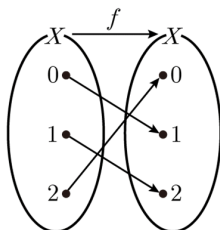
p : 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2 + 2kx + 4k + 5 > 0$ 이다.
 q : 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 = k - 2$ 이다.

10

실수 x 에 대하여 분수식 $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하시오.

11

집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 가 다음 그림과 같다.
 $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의할 때, $f^{99}(0) + 2f^{100}(1) + 3f^{101}(2)$ 의 값을 구하시오.



12

세 조건 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이고, $\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 집합 $\{(Q \cap R^C) \cup P\}^C \cap (Q \cap R)$ 를 간단히 한 것은? (단, 집합 P, Q, R 는 전체집합 U 의 부분집합이다.)

- ① P ② Q ③ R
 ④ $Q - P$ ⑤ $R - Q$

13

$f(x-1) = \frac{x+1}{x-1}$ 일 때, f 의 역함수 f^{-1} 에 대하여 다음 중 $f^{-1}(p-1)$ 과 같은 것은? (단, $p \neq 1, p \neq 2$)

- ① $-\frac{2}{p-2}$ ② $-\frac{1}{p-1}$ ③ $\frac{1}{p-1}$
 ④ $\frac{1}{p-2}$ ⑤ $\frac{2}{p-2}$

14

함수 f 에 대하여 $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f^2(x)), \dots$ 로 정의하자. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 세 조건 $f(1) = 3, f(2) = 1, f^4 = I$ (I 는 항등함수)를 만족시킨다. 함수 f 의 역함수를 g 라 할 때, $g^{13}(3) + g^{14}(4)$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

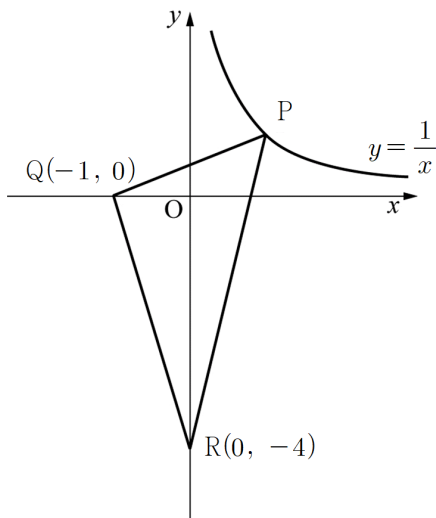
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 15** a, b 가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$ 을 만족하는 임의의 실수 x 에 대하여 $ax + 2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq bx + 2$ 가 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

- 16** [2008년 6월 고2 이과 15번]
유리함수 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 위의 임의의 점 P와 점 Q(-1, 0), R(0, -4)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이의 최솟값은?



- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

- 17** 함수 $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와 직선 $y = -kx + 2 + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

- 18** 세 집합 $A = \{(x, y) | y = m(x+1) - 1, m \text{은 실수}\}$,
 $B = \{(x, y) | y = \left| \frac{1}{x-1} + 2 \right|, x \neq 1 \text{인 실수}\}$,
 $C = \{(x, y) | y = 2 - \sqrt{x-n}, x \geq n \text{이고 } n \text{은 실수}\}$
에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한 m 의 값의 범위는
[가] 이고, $n(B \cap C) = 0$ 이기 위한 n 의 값의 범위는
[나] 이다. 빈 칸에 들어갈 식을 알맞게 짝지은 것은?

- | | (가) | (나) |
|---|----------------------|----------------------|
| ① | $m > \frac{1}{2}$ | $n \geq 1$ |
| ② | $m > \frac{1}{2}$ | $n > 1$ |
| ③ | $m > \frac{2}{3}$ | $n \geq \frac{3}{4}$ |
| ④ | $m > \frac{2}{3}$ | $n > \frac{3}{4}$ |
| ⑤ | $m \geq \frac{2}{3}$ | $n > \frac{3}{4}$ |

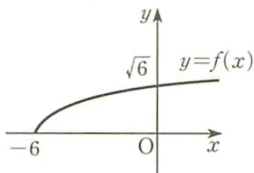
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

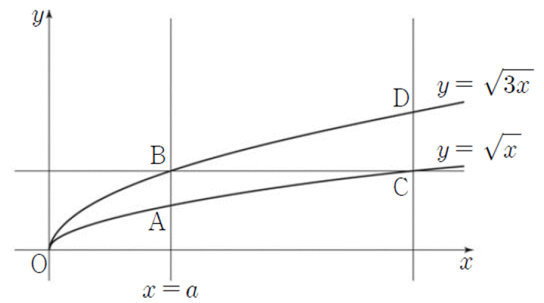
- 19** 두 조건 $p: 2 < x < 6$, $q: x < 5$ 또는 $x > k$ 에 대하여 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 정수인 반례가 6뿐이다. 이때 실수 k 의 값의 범위를 구하시오. (단, $k > 5$)

- 20** 양수 a, b 에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 차례대로 구하여라.

- 21** 무리함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점을 P라 하고 두 그래프 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 가 각각 x 축, y 축과 만나는 점을 A, B라 할 때, $\triangle ABP$ 의 넓이를 구하시오.



- 22** [2016년 11월 고2 문과 27번/4점]
그림과 같이 양수 a 에 대하여 직선 $x = a$ 와 두 곡선 $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x}$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 와 만나는 점을 D라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하시오.

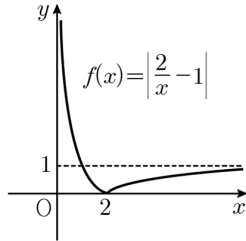


고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

23

아래 그림은 함수 $f(x) = \left| \frac{2}{x} - 1 \right|$ ($x > 0$)의 그래프이다.



$0 < a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b)$ 가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

㉠. $f(b) > 1$

㉡. $1 < a < 2$

㉢. $f(a)f(b) = -\frac{(a-2)(b-2)}{ab}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

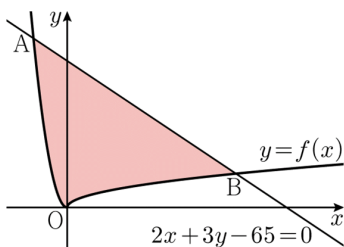
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

24

함수 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 그래프와

직선 $2x + 3y - 65 = 0$ 이

두 점 $A(-5, 25)$, $B(25, 5)$ 에서 만난다. 다음 그림과 같이 주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (단, O 는 원점)



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 ③	03 ③
04 ⑤	05 4	06 ④
07 ②	08 ④	09 9
10 5	11 7	12 ④
13 ⑤	14 ①	15 ①
16 ①	17 ⑤	18 ④
19 $6 \leq k < 7$	20 최솟값 = 7, $a = 1, b = 2$	
21 36	22 16	23 ④
24 325		



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $\because \emptyset \in A$ 이므로 $\{\emptyset\} \subset A$ (거짓)

02 정답 ③

해설 $(A-B) \cup (A-C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$
 $= A - (B \cap C)$

03 정답 ③

해설 (가) $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ 이므로
 실수 x, y 에 대하여 항상 성립한다.
 (나) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로
 실수 x, y 에 대하여 항상 성립한다.
 (다) $|a+b|^2 - (|a|+|b|)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + 2|ab| + b^2)$
 $= 2(ab - |ab|) \leq 0$ (단, 등호는 $ab \geq 0$ 일 때 성립)
 따라서 실수 a, b 에 대하여 항상 성립한다.
 (라) [반례] $a = b = -1$ 인 경우 $a + b = -2$,
 $2\sqrt{ab} = 2$ 이므로
 부등식이 성립하지 않는다.
 (마) [반례] $a = b = -1, c = 1$ 인 경우
 $(a+b)(b+c)(c+a) = 0, 8abc = 8$ 이므로
 부등식이 성립하지 않는다.
 (바) 코시-슈바르츠 부등식은 모든 실수에 대하여 항상 성립한다.
 따라서 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식은
 (가), (나), (다), (바)의 4개이다.

04 정답 ⑤

해설 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 4$
 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 3$
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$
 $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(3) = 1$
 따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 ⑤이다.

05 정답 4

해설 $x > 1$ 이므로 $x-1 > 0$
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$ 이므로
 $a \leq 4$ 이어야 한다.
 따라서 a 의 최댓값은 4

06 정답 ④

해설 $P(A)$ 는 집합 A 의 부분집합으로 이루어진 집합이므로
 $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}\}$
 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 모두 옳다.

07 정답 ②

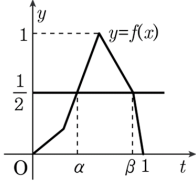
해설 $A = B$ 이므로
 $a^2 = 16, b^2 - b = 6$
 $a^2 = 16$ 에서 $a = -4$ 또는 $a = 4$
 $b^2 - b = 6$ 에서 $b^2 - b - 6 = 0$
 $(b-3)(b+2) = 0$
 $\therefore b = -2$ 또는 $b = 3$
 따라서 $a = -4, b = -2$ 일 때 $a+b$ 의 값은 최소이고
 그 값은 -6 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

08 정답 ④

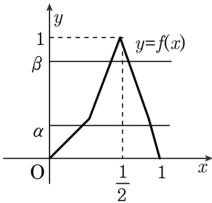
해설 $f(x)=t$ 라 하면



$$f(f(x)) = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}$$

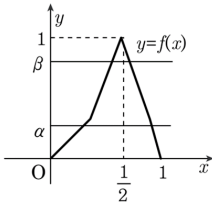
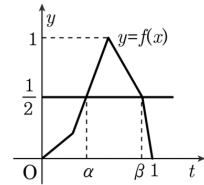
$$t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1 \right)$$



(i) $t = \alpha$ 일 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 는 두 개

(ii) $t = \beta$ 일 때, $f(x) = \beta$ 를 만족하는 x 는 두 개

따라서 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 4이다.



09 정답 9

해설 '모든', '어떤'을 포함한 명제 이해하기

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2kx + 4k + 5 > 0$ 이므로
이차방정식 $x^2 + 2kx + 4k + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라
하면

$$D = (2k)^2 - 4(4k + 5) < 0$$

$$4k^2 - 16k - 20 = 4(k+1)(k-5) < 0$$

$$-1 < k < 5$$

어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 = k - 2$ 이므로 $k - 2 \geq 0$ 에서
 $k \geq 2$

이때 정수 k 에 대한 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각

P, Q 라 하자.

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}, Q = \{2, 3, 4, \dots\}$$

이때 $P \cap Q = \{2, 3, 4\}$ 이므로 두 조건 p, q 가 모두 참인
명제가 되도록 하는 정수 k 의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은 9이다.

10 정답 5

$$\begin{aligned} \text{해설 } \frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1} &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1} \\ &= x^2 + 1 + \frac{4}{x^2 + 1} + 1 \end{aligned}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 항상

$$x^2 + 1 > 0, \frac{4}{x^2 + 1} > 0 \text{이므로}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{4}{x^2 + 1} + 1$$

$$\geq 2\sqrt{(x^2 + 1) \cdot \frac{4}{x^2 + 1}} + 1$$

$$= 4 + 1 = 5 \left(\text{단, 등호는 } x^2 + 1 = \frac{4}{x^2 + 1} \text{ 일 때 성립} \right)$$

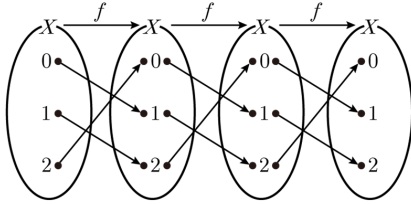
따라서 구하는 최솟값은 5이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

11 정답 7

해설 함수 f 를 연속하여 3번 합성하면 다음 그림과 같다.



따라서 $f^3(x) = x$ 이므로

$$f^{3n}(x) = x, f^{3n+1}(x) = f(x), f^{3n+2}(x) = f^2(x)$$

이때 $f^{99}(0) = 0, f^{100}(1) = f(1) = 2,$

$f^{101}(2) = f^2(2) = f(0) = 1$ 이므로

$$f^{99}(0) + 2f^{100}(1) + 3f^{101}(2) = 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

12 정답 ④

해설 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q$$

$$\therefore P \subset Q$$

또한, $\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이므로

$$\sim r \Rightarrow \sim q$$

명제가 참이면 그 대우도 참이므로 $q \Rightarrow r$

$$\therefore Q \subset R$$

즉, 세 집합 P, Q, R 의 포함 관계는

$$P \subset Q \subset R, R^C \subset Q^C \subset P^C$$

$$\therefore \{(Q \cap R^C) \cup P\}^C \cap (Q \cap R)$$

$$= \{(Q \cap R^C)^C \cap P^C\} \cap (Q \cap R)$$

$$= (\emptyset^C \cap P^C) \cap (Q \cap R)$$

$$(\because Q \cap R^C = Q - R = \emptyset)$$

$$= (U \cap P^C) \cap Q (\because \emptyset^C = U, Q \subset R)$$

$$= P^C \cap Q$$

$$= Q - P$$

13 정답 ⑤

해설 $x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이므로

$$f(t) = \frac{t+2}{t}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$y = \frac{x+2}{x} \text{에서 } xy = x+2$$

$$x(y-1)=2, x = \frac{2}{y-1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{2}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1}$$

위의 식에 x 대신에 $p-1$ 을 대입하면

$$f^{-1}(p-1) = \frac{2}{(p-1)-1}$$

$$= \frac{2}{p-2}$$

14 정답 ①

해설 $f(1)=3, f(2)=1$ 이고 함수 f 가 일대일대응이므로 $f(3)=2, f(4)=4$ 또는 $f(3)=4, f(4)=2$ 이다.

(i) $f(3)=2, f(4)=4$ 이면

$$f(1)=3, f^2(1)=2, f^3(1)=1, f^4(1)=3$$

이므로 $f^4 \neq I$ 가 되어 성립하지 않는다.

(ii) $f(3)=4, f(4)=2$ 이면

$$f(1)=3, f^2(1)=4, f^3(1)=2, f^4(1)=1$$

$$f(2)=1, f^2(2)=3, f^3(2)=4, f^4(2)=2$$

$$f(3)=4, f^2(3)=2, f^3(3)=1, f^4(3)=3$$

$$f(4)=2, f^2(4)=1, f^3(4)=3, f^4(4)=4$$

이므로 $f^4 = I$ 가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=4, f(4)=2 \text{이므로}$$

$$g(1)=2, g(2)=4, g(3)=1, g(4)=3 \text{이고,}$$

$$f^4 = I \text{에서 } g^4 = (f^{-1})^4 = I \text{이다.}$$

따라서 $g^{13} = g^{4 \cdot 3 + 1} = g, g^{14} = g^{4 \cdot 3 + 2} = g^2$ 이므로

$$g^{13}(3) + g^{14}(4) = g(3) + g(g(4))$$

$$= 1 + g(3) = 1 + 1 = 2$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

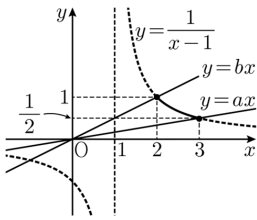
집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

15 정답 ①

해설 $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ ($2 \leq x \leq 3$)이므로

$$ax + 2 \leq 2 + \frac{1}{x-1} \leq bx + 2$$

$$ax \leq \frac{1}{x-1} \leq bx$$



위의 그래프에 의하여 $a \leq \frac{1}{6}, b \geq \frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore (a \text{의 최댓값}) + (b \text{의 최솟값}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

16 정답 ①

해설 유리함수와 직선 사이의 최단거리 구하기
직선 QR의 방정식은 $4x + y + 4 = 0$ 이고

점 $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 에서 직선 QR까지의 거리 h 는

$$h = \frac{\left|4a + \frac{1}{a} + 4\right|}{\sqrt{17}}$$

a 는 양수이므로 $4a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4$

$$\text{따라서 } h = \frac{\left|4a + \frac{1}{a} + 4\right|}{\sqrt{17}} \geq \frac{8}{\sqrt{17}} \text{ 이다.}$$

$\therefore \triangle PQR$ 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{8}{\sqrt{17}} = 4$$

17 정답 ⑤

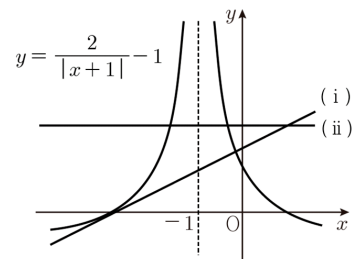
해설

$$y = \frac{2}{|x+1|} - 1 = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1 & (x > -1) \\ -\frac{2}{x+1} - 1 & (x < -1) \end{cases}$$

이고 직선 $y = -kx + 2 + k$ 는 k 의 값에 관계없이

점 $(1, 2)$ 를 지나므로 함수 $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와

직선 $y = -kx + 2 + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면
다음 그림과 같아야 한다.



(i) 함수 $y = \frac{2}{|x+1|} - 1$ 의 그래프와

직선 $y = -kx + 2 + k$ 가 접할 때,

$$-\frac{2}{x+1} - 1 = -kx + 2 + k \text{에서}$$

$$kx^2 - 3x - k - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 3^2 - 4k \cdot (-k - 5) = 0 \text{에서}$$

$$(2k+9)(2k+1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } k = -\frac{1}{2}$$

이때 직선 $y = -kx + 2 + k$ 의 y 절편이 0보다
크므로

$$k = -\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $y = -kx + 2 + k$ 가 x 축에 평행할 때

$$k = 0$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은

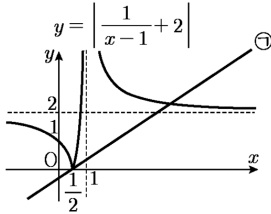
$$-\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 ④

해설 (가): 아래 그림과 같이 직선 $y = m(x+1) - 1$ 의 기울기가 직선 ㉠의 기울기보다 클 때 교점이 3개이다.



직선 $y = m(x+1) - 1$ 이 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지날때의 기울기를 구하면

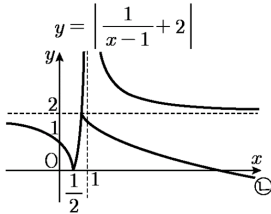
$$0 = m\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 1, \frac{3}{2}m - 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{2}{3}$$

따라서 m 의 값의 범위는 $m > \frac{2}{3}$ 이다.

(나): 무리함수 $y = 2 - \sqrt{x-n}$ 의 정의역은 $x \geq n$ 이고 치역은 $y \leq 2$ 이다.

따라서 아래 그림과 같이 무리함수의 그래프가 ㉠보다 오른쪽에 있어야 교점이 없다.



$y = 2$ 일 때 곡선 $y = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|$ 의 x 좌표를

구하면

$$2 = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|, \frac{1}{x-1} = -4 \left(\because \frac{1}{x-1} \neq 0\right)$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

즉, 곡선 $y = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|$ 는 $(\frac{3}{4}, 2)$ 를 지나고 무리함수의 그래프가 이 점보다 오른쪽에 있어야 한다.

따라서 n 의 값의 범위는 $n > \frac{3}{4}$ 이다.

19 정답 $6 \leq k < 7$

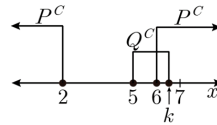
해설 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{x | 2 < x < 6\}$, $Q = \{x | x < 5 \text{ 또는 } x > k\}$ 이때 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^C 에는 속하고 집합 Q 에는 속하지 않으므로 집합 $P^C \cap Q^C$ 의 원소이다.

$$P^C = \{x | x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 6\},$$

$$Q^C = \{x | 5 \leq x \leq k\} \text{이므로}$$

집합 $P^C \cap Q^C$ 의 정수인 원소가 6뿐이려면

다음 그림에서 $6 \leq k < 7$



20 정답 최솟값 = 7, $a = 1, b = 2$

해설 $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$

$$= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \frac{16}{2a+b}$$

$$= -1 + (a-1)^2 + (2a+b + \frac{16}{2a+b}) \quad \dots \quad ①$$

$$2a+b + \frac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})} = 8 \text{에서}$$

$$\text{등호는 } 2a+b = \frac{16}{2a+b} \text{ 일 때 성립하고}$$

$$\text{이때, } 2a+b=4 \text{ (} a, b \text{는 양수)} \quad \dots \quad ②$$

①에서 최소는 $a=1$ 일 때이다.

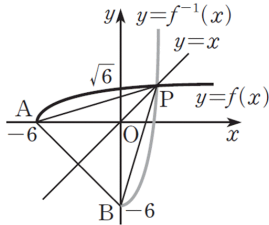
\therefore ②에서 $a=1, b=2$ 일 때 최솟값 : 7

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [2회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

21 정답 36

해설 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 는 $y=x$ 에 대하여 대칭인 그래프이므로 점 P는 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점도 된다.



이때 $f(x) = \sqrt{x+6}$ 이므로

$$\sqrt{x+6} = x$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because x \geq 0) \text{ 이므로 교점 } P(3, 3)$$

$$\triangle ABP = 2 \cdot \triangle AOP + \triangle AOB$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$

$$= 36$$

22 정답 16

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$$A(a, \sqrt{a}), B(a, \sqrt{3a})$$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$$\sqrt{x} = \sqrt{3a}, x = 3a$$

$$\text{따라서 } C(3a, \sqrt{3a}), D(3a, 3\sqrt{a})$$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

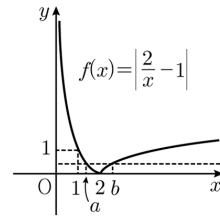
$$\frac{3\sqrt{a} - \sqrt{a}}{3a - a} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} (\because a > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } \sqrt{a} = 4$$

$$\therefore a = 16$$

23 정답 ④

해설 $\because 0 < a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b)$ 가 성립하므로 다음 그림과 같이 $a < 2 < b$ 이고,



$x > 2$ 일 때 $0 < f(x) < 1$ 이므로 $0 < f(b) < 1$ 이다.

(거짓)

$$\therefore \left| \frac{2}{x} - 1 \right| = 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$1 < a < 2, b > 2$ 이다. (참)

$$\therefore f(a) = \left| \frac{2}{a} - 1 \right| = \frac{2}{a} - 1 = \frac{2-a}{a}$$

$$f(b) = \left| \frac{2}{b} - 1 \right| = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b} (\because \neg) \text{ 이므로}$$

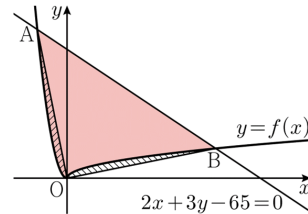
$$f(a)f(b) = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{b-2}{b}$$

$$= -\frac{(a-2)(b-2)}{ab} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \square 이다.

24 정답 325

해설 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 $y = x^2 (x \leq 0)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다. 이때 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



$$AB = \sqrt{(25+5)^2 + (5-25)^2} = 10\sqrt{13}$$

원점과 직선 $2x+3y-65=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-65|}{\sqrt{2^2+3^2}} = 5\sqrt{13}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{13} \cdot 5\sqrt{13} = 325$$