

교과서_미래엔 - 공통수학2 (함수) 136~138p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

교재 오답

이름

01 집합 $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 에 대하여 함수 $f: A \rightarrow A$ 를 $f(x) = (2x^2 \text{을 } 4\text{로 나누었을 때의 나머지})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역은?

- ① $\{0\}$ ② $\{0, 2\}$ ③ $\{0, 1, 2\}$
 ④ $\{0, 2, 3\}$ ⑤ $\{0, 1, 2, 3\}$

02 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & (x < 0) \\ x^2 - 2x + 3 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.
 ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 정의역이 $\{1, 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 - 2x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

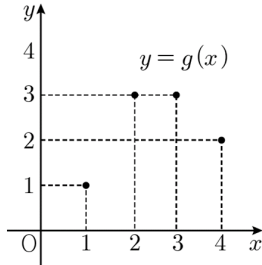
04 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 가 성립하도록 하는 집합 X 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
 ④ 4개 ⑤ 5개

05 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = a|x + 2| - x + 5$ 가 일대일대응이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < 0$ ② $a < -1$ ③ $a > 1$
 ④ $-1 < a < 1$ ⑤ $a < -1$ 또는 $a > 1$

- 06** 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여
두 함수 $f: X \rightarrow X, g: X \rightarrow X$ 가 있다.
함수 $y = f(x)$ 는 $f(2) = 1$ 을 만족시키고
함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 에 대하여
함수 $h: X \rightarrow X$ 를 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (g(x) > f(x)) \end{cases}$ 라
정의하자. 함수 $y = h(x)$ 가 일대일대응일 때,
 $f(1) + h(3)$ 의 값을 구하시오.

- 07** 자연수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에
대하여 f 는 항등함수, g 는 상수함수이다. $g(2) = 2$ 일
때, $f(5) + g(5)$ 의 값은?

- ① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

- 08** 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는
항등함수이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -3$ 일 때,
 $f(5) + g(-2)$ 의 값을 구하시오.

- 09** 집합 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의
함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 1) \\ 4-x & (x \geq 2) \end{cases}$ 이고,
 $f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ 로 정의할 때,
 $f^{30}(2)$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.)

- 10** 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 일 때, X 에서 X 로의 함수 $f_1, f_2,$
 f_3 은 다음과 같다.

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = |x-1|, f_3(x) = 1$$

이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를

$$a_{ij} = \begin{cases} (f_i \circ f_{j+1})(j) & (i = j) \\ (f_{i+1} \circ f_j)(i) & (i \neq j) \end{cases} \text{로 정의할 때,}$$

행렬 A^{50} 의 모든 성분의 합을 구하시오.

11

[2016년 6월 고3 문과 4번 변형]

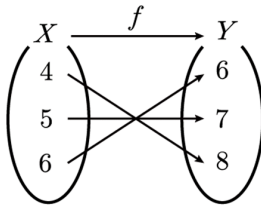
함수 $f(x) = 5x - 6$ 에 대하여 $f^{-1}(9)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12

[2018년 9월 고3 문과 4번 변형]

다음 그림은 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다.



$f(5) + f^{-1}(6)$ 의 값은?

- ① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

13

일차함수 f 에 대하여 $f^{-1}(2) = 4$, $(f \circ f)(4) = 8$ 일 때, $f(-1)$ 의 값은?

- ① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

14

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가

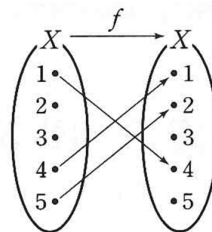
$f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = x + 5$ 를 만족시킬 때, $f^{-1}(13)$ 의 값을 구하시오.

15

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 역함수 f^{-1} 가 존재하고 $f(3) = 2$, $f^{-1}(3) = f(1) = 4$, $(f \circ f)(2) = 1$ 일 때, $f^{-1}(5) + (f \circ f)(3)$ 의 값을 구하시오.

16

그림은 X 에서 X 로의 함수 f 의 대응 관계 중 일부를 나타낸 것이다. f 가 일대일 대응이고 $(f \circ f)(5) = 3$ 일 때, $f^{-1}(4) + f^{-1}(5)$ 의 값을 구하시오.



- 17** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(4x-1)=12x+5$ 이다. $f^{-1}(x)=ax+b$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수)

- 18** 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)=2x+1$ 이고 $f^{-1}(x)=g\left(\frac{1}{4}x+1\right)$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는?

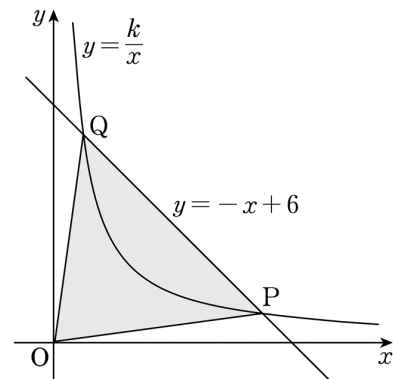
- ① $g(x)=-2x-5$ ② $g(x)=-2x-\frac{5}{2}$
 ③ $g(x)=2x-5$ ④ $g(x)=2x-\frac{5}{2}$
 ⑤ $g(x)=2x+5$

- 19** 유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프는 점 $(1, -2)$ 에 대하여 대칭이고, 점 $(2, -4)$ 를 지난다. 이때 세 수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 를 구하시오.

- 20** 함수 $y=\frac{3x+b}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나고 점 $(1, c)$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

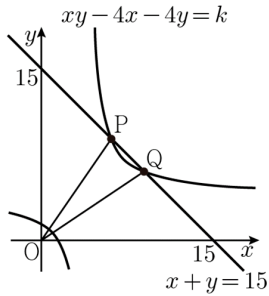
- ① 0 ② 1 ③ 2
 ④ 3 ⑤ 4

- 21** [2016년 3월 고2 이과 18번/4점]
 그림과 같이 유리함수 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$)의 그래프가 직선 $y=-x+6$ 과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 14일 때, 상수 k 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① $\frac{32}{9}$ ② $\frac{34}{9}$ ③ 4
 ④ $\frac{38}{9}$ ⑤ $\frac{40}{9}$

- 22** 다음 그림과 같이 곡선 $xy - 4x - 4y = k$ 가 직선 $x + y = 15$ 와 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x 좌표의 곱이 54일 때, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값을 구하시오. (단, $k < 0$)



- 23** 무리함수 $y = -\sqrt{2x-4} + 1$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은 $\{x | x \geq 2\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y | y \leq 1\}$ 이다.
- ③ 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
- ④ 그래프는 제1, 4사분면을 지난다.
- ⑤ 역함수는 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$ ($x \leq 1$)이다.

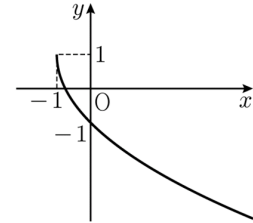
- 24** 다음 중 함수 $y = \sqrt{4-2x} - 3$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

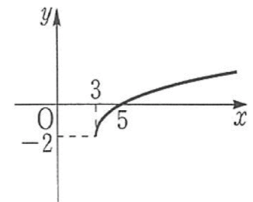
- ㄱ. 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$, 치역은 $\{y | y \geq -3\}$ 이다.
- ㄴ. 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다.
- ㄷ. 제3사분면을 지난다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 25** 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하시오.



- 26** 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하시오.



- 27** 공기의 온도가 $x^\circ\text{C}$ 일 때, 공기 중에서 소리의 전달 속도를 $y\text{m/s}$ 라 하면 x 와 y 사이에 $y = 21\sqrt{269+x}$ 인 관계가 성립한다고 한다. 소리의 전달 속도가 357m/s 일 때, 공기의 온도를 구하시오.

- 28** 높이가 32m인 어느 탑에서 물체를 떨어뜨릴 때, 물체가 떨어진 지 t 초 후의 높이를 h m라고 하면 $h = -2t^2 + 32$ ($0 \leq t \leq 4$)와 같은 관계식이 성립한다. 이때 물체가 14m 높이까지 떨어지는데 걸리는 시간은 24m 높이까지 떨어지는데 걸리는 시간의 몇 배인지 구하시오.

- 29** 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
- ① -20 ② -10 ③ 0
④ 10 ⑤ 20

- 30** 두 함수 $f(x) = ax + 3$, $g(x) = -x + 4$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수)

- 31** 함수 $f(x) = \frac{ax+1}{x-b}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?
- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

- 32** 함수 $g(x) = \frac{3x}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재할 때, $f(2)$ 의 값은?
- ① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

- 33** $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 과 그 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 와 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?
- ① $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$), $\sqrt{3}$
② $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$), $\sqrt{2}$
③ $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ($x \geq 1$), $\sqrt{2}$
④ $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ($x \geq 1$), $\sqrt{3}$
⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ($x \geq 1$), $\sqrt{5}$

34

[2018년 3월 고3 문과 17번 변형]

무리함수 $f(x) = \sqrt{ax+b} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.
곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 가 점 $(2, 4)$ 에서 만날 때,
 $g(6)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① - 6
- ② - 5
- ③ - 4
- ④ - 3
- ⑤ - 2

교과서_미래엔 - 공통수학2 (함수) 136~138p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

교재 오답

이름

빠른정답

01 ②	02 ①	03 ①
04 ③	05 ④	06 5
07 ⑤	08 2	09 2
10 2	11 ③	12 ①
13 ③	14 5	15 7
16 4	17 3	18 ④
19 -3	20 ①	21 ①
22 117	23 ⑤	24 ⑤
25 0	26 -6	27 20℃
28 $\frac{3}{2}$ 배	29 ①	30 2
31 ①	32 ⑤	33 ②
34 ③		

교과서_미래엔 - 공통수학2 (함수) 136~138p_대단원

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

교재 오답

이름

01 정답 ②

해설 음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $x = 2k$ 일 때,

$$2x^2 = 2 \cdot (2k)^2 = 8k^2 = 4 \cdot 2k^2$$

$$\therefore f(x) = 0$$

(ii) $x = 2k+1$ 일 때,

$$2x^2 = 2(2k+1)^2 = 8k^2 + 8k + 2$$

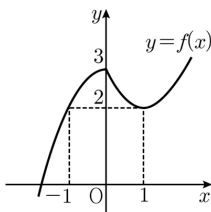
$$= 4(2k^2 + 2k) + 2$$

$$\therefore f(x) = 2$$

(i), (ii)에 의하여 함수 f 의 치역은 $\{0, 2\}$ 이다.

02 정답 ①

해설 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & (x < 0) \\ x^2 - 2x + 3 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x < 0$ 인 모든 실수에서 $f(x) < 3$ 이고
 $x \geq 0$ 인 모든 실수에서 $f(x) \geq 2$ 이므로
 함수 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 위의 그림에서 $f(-1) = f(1) = 2$ 이므로
 서로 다른 x 의 값에 대응하는 함수값이 같다.
 즉, 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니다. (거짓)

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) = f(-x)$ 가 성립하지 않으므로 함수
 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이 아니다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

03 정답 ①

해설 두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(1) = g(1), f(2) = g(2)$

$f(1) = a + b, g(1) = 4$ 에서

$$a + b = 4$$

$f(2) = 2a + b, g(2) = 5$ 에서

$$2a + b = 5$$

$$\therefore a = 1, b = 3$$

따라서 $ab = 1 \cdot 3 = 3$

04 정답 ③

해설 두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x 값에 대하여 그 함수값이 같다는 것이다.

그러므로 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.

$$\text{따라서 } 2x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 1, x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 3$$

따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.

즉, $\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}$

05 정답 ④

해설 함수 $f(x) = a|x+2| - x + 5$ 에서

(i) $x \geq -2$ 일 때,

$$f(x) = ax + 2a - x + 5 = (a-1)x + 2a + 5$$

(ii) $x < -2$ 일 때,

$$f(x) = -ax - 2a - x + 5 = -(a+1)x - 2a + 5$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 2a + 5 & (x \geq -2) \\ -(a+1)x - 2a + 5 & (x < -2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $x \geq -2$ 일 때와

$x < -2$ 일 때 일차함수 $f(x)$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$-(a+1)(a-1) > 0, (a+1)(a-1) < 0$$

따라서 $-1 < a < 1$

06 정답 5

해설 $f(2)=1$ 이고 주어진 그래프에서 $g(2)=3$ 이므로
 $g(2)>f(2)$ 에서 $h(2)=g(2)=3$
 그런데 함수 $h(x)$ 는 일대일대응이므로 $h(3)\neq 3$
 이때 $g(3)=3$ 이므로 $h(3)\neq g(3)$
 즉, $h(3)=f(3)$ 이고 $f(3)>g(3)=3$ 이므로 $f(3)=4$
 $\therefore h(3)=4$
 이때 $h(2)=3, h(3)=4$ 이므로
 $h(1), h(4)$ 는 각각 1, 2 중 하나의 값을 갖고 $h(1)\neq h(4)$
 (i) $h(1)=1$ 인 경우
 $h(1)$ 은 $f(1)$ 과 $g(1)$ 중 작지 않은 값을 가지는데
 $g(1)=1$ 이므로 $f(1)=1$ 이면 만족한다.
 $\therefore f(1)=1$
 (ii) $h(4)=1$ 인 경우
 $h(4)$ 는 $f(4)$ 와 $g(4)$ 중 작지 않은 값을 가지는데
 $g(4)=2$ 이므로 $h(4)$ 의 값은 $f(4)$ 의 값에 관계없이
 2 이상이 되어 모순이다.
 따라서 $f(1)+h(3)=1+4=5$

07 정답 ⑤

해설 함수 f 는 항등함수이므로
 $f(x)=x \quad \therefore f(5)=5$
 또한 함수 g 는 상수함수이고 $g(2)=2$ 이므로
 $g(x)=2 \quad \therefore g(5)=2$
 $\therefore f(5)+g(5)=5+2=7$

08 정답 2

해설 함수 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x$
 $\therefore f(5)=5$
 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=-3$ 이므로 $g(x)$ 는
 상수함수이다. 즉, $g(-2)=-3$
 $\therefore f(5)+g(-2)=5+(-3)$
 $=2$

09 정답 2

해설 $f^1(2)=f(2)=2$
 $f^2(2)=f(f^1(2))=f(2)=2$
 $f^3(2)=f(f^2(2))=f(2)=2$
 \vdots
 즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $f^n(2)=2$ 이므로
 $f^{30}(2)=2$

10 정답 2

해설 $a_{11}=(f_1 \circ f_2)(1)=f_1(f_2(1))=f_1(0)=0$
 $a_{12}=(f_2 \circ f_2)(1)=f_2(f_2(1))=f_2(0)=1$
 $a_{21}=(f_3 \circ f_1)(2)=f_3(f_1(2))=f_3(0)=1$
 $a_{22}=(f_2 \circ f_3)(2)=f_2(f_3(2))=f_2(1)=0$
 $\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$
 $\therefore A^{50}=(A^2)^{25}=E^{25}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 A^{50} 의 모든 성분의 합은
 $1+0+0+1=2$

11 정답 ③

해설 $f^{-1}(9)=k$ 로 놓으면 $f(k)=9$
 따라서 $5k-6=9$ 에서 $k=3$ 이다.

12 정답 ①

해설 $f(5)=7$ 이고, $f^{-1}(6)=6$ 이므로
 $f(5)+f^{-1}(6)=7+6=13$

13 정답 ③

해설 $f(x)=ax+b$ 라 하자.
 $f^{-1}(2)=4$ 에서 $f(4)=2$ 이므로
 $4a+b=2 \quad \dots \textcircled{1}$
 또, $f(f(4))=8$ 에서 $f(4)=2$ 이므로
 $f(2)=8$, 즉 $2a+b=8 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면 $a=-3, b=14$ 이므로
 $f(x)=-3x+14$
 $\therefore f(-1)=-3 \cdot (-1)+14=17$

14 정답 5

해설 $\frac{2x-1}{3}=t$ 라 하면 $x=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$
 따라서 $f(t)=\frac{3}{2}t+\frac{11}{2}$
 $f^{-1}(13)=k$ 라 하면 $f(k)=13$ 이므로
 $\frac{3}{2}k+\frac{11}{2}=13, \frac{3}{2}k=\frac{15}{2}$
 $\therefore k=5$

15 정답 7

해설 주어진 조건에 따라

$$f(3)=2$$

$$f(1)=4$$

$$f^{-1}(3)=4 \Leftrightarrow f(4)=3$$

$$(f \circ f)(2)=f(f(2))=1$$

따라서 $f(2)$, $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 5이다. $f(2)=1$ 이면 $f(f(2))=f(1)=1$ 이고 f 는 함수이므로 $f(1)=4$ 인 동시에 $f(1)=1$ 일 수 없다.

$$\therefore f(2)=5$$

따라서 $f(5)=1$ 이므로 ($\because f^{-1}$ 가 존재한다.)

$$\begin{aligned} f^{-1}(5)+(f \circ f)(3) &= f^{-1}(5)+f(f(3)) \\ &= f^{-1}(5)+f(2) \\ &= 2+5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

16 정답 4

해설 $(f \circ f)(5)=f(f(5))=f(2)$ 이므로 $f(2)=3$ 또한, f 는 일대일 대응이므로 $f(3)=5$

$$\therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(5)=1+3=4$$

17 정답 3

해설 $4x-1=t$ 로 놓으면

$$x = \frac{t+1}{4}$$

$$\text{따라서 } f(t) = 12 \cdot \frac{t+1}{4} + 5 = 3t + 8$$

$$\therefore f(x) = 3x + 8$$

 $y = 3x + 8$ 이라 하면

$$3x = y - 8$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}y - \frac{8}{3}$$

 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{8}{3} \text{ 이므로}$$

$$a - b = 3$$

18 정답 ④

해설 $y = 2x + 1$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$2x = y - 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{4}x + 1 = t \text{로 놓으면}$$

$$x = 4t - 4$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2}(4t - 4) - \frac{1}{2} = 2t - \frac{5}{2}$$

$$\therefore g(x) = 2x - \frac{5}{2}$$

19 정답 -3

해설 점 $(1, -2)$ 에 대하여 대칭인 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이므로 분수함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} - 2 \text{ (단, } k \neq 0 \text{)} \text{로 놓을 수 있다.}$$

$$y = \frac{k}{x-1} - 2 \text{의 그래프가 점 } (2, -4) \text{를 지나므로}$$

$$-4 = \frac{k}{2-1} - 2 \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore y = \frac{-2}{x-1} - 2 = \frac{-2x}{x-1}$$

이 식이 $\frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로

$$a = -2, b = 0, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = (-2) + 0 + (-1) = -3$$

20 정답 ①

해설 $y = \frac{3x+b}{x+a}$ 의 그래프가 점 (2, 4)를 지나므로

$$4 = \frac{3 \cdot 2 + b}{2 + a} = \frac{6 + b}{2 + a}$$

$$8 + 4a = 6 + b$$

$$\therefore b = 4a + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{한편, } y &= \frac{3x+b}{x+a} = \frac{3(x+a) - 3a + b}{x+a} \\ &= \frac{-3a+b}{x+a} + 3 \end{aligned}$$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = 3 \text{ 이므로}$$

그래프는 점 $(-a, 3)$ 에 대하여 대칭이다.

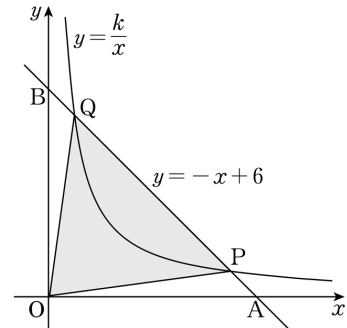
따라서 $-a = 1, c = 3$ 이므로 $a = -1$ 이다.

$a = -1$ 을 ①에 대입하면 $b = -2$

$$\therefore a + b + c = 0$$

21 정답 ①

해설 유리함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족하는 상수의 값을 구한다.



직선 $y = -x + 6$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A(6, 0), B(0, 6)

삼각형 OAB의 넓이는

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 6$ 은 모두

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$$\triangle OAP = \triangle OQB = \frac{1}{2}(18 - 14) = 2$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} \times 6 \times b = 2 \text{ 에서 } b = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

점 P는 직선 $y = -x + 6$ 위의 점이므로

$$b = -a + 6 = \frac{2}{3} \text{ 에서 } a = \frac{16}{3} \text{ 이다.}$$

또, 점 P는 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$k = ab = \frac{16}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$$

22 정답 117

$$xy - 4x - 4y = k \quad \dots \textcircled{1}$$

곡선 ①과 직선 $x + y = 15$ 의 두 교점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하고, $y = 15 - x$ 를 ①에 대입하여 정리하면

$$x^2 - 15x + (60 + k) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = 60 + k = 54$$

$$\therefore k = -6$$

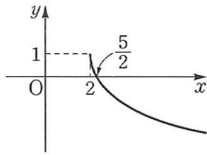
$k = -6$ 을 ②에 대입하여 풀면 $x = 6$ 또는 $x = 9$

$$\therefore P(6, 9), Q(9, 6)$$

$$\therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP}^2 = 6^2 + 9^2 = 117$$

23 정답 ⑤

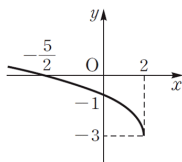
해설 $y = -\sqrt{2x-4}+1 = -\sqrt{2(x-2)}+1$
 이므로 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



- ① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$ 이다. (참)
 ② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다. (참)
 ③ $y = -\sqrt{2x-4}+1$ 의 그래프는
 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)
 ④ 그래프는 제1, 4사분면을 지난다. (참)
 ⑤ $y = -\sqrt{2x-4}+1$ 에서
 $y-1 = -\sqrt{2x-4}$
 양변을 제곱하면 $(y-1)^2 = 2x-4$
 $\therefore x = \frac{1}{2}(y-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{5}{2}$
 따라서 역함수는 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \ (x \leq 1)$
 (거짓)

24 정답 ⑤

- 해설** ㄱ. $4-2x \geq 0$ 에서 $x \leq 2$
 따라서 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
 $\sqrt{4-2x} \geq 0$ 이므로 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$ (참)
 ㄴ. $y = \sqrt{4-2x}-3 = \sqrt{-2(x-2)}-3$
 이므로 주어진 함수의 그래프는
 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한
 것이다. (참)
 ㄷ. 함수 $y = \sqrt{4-2x}-3$ 의 그래프는 다음 그림과
 같으므로 제3사분면을 지난다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25 정답 0

해설 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는 함수 $y = a\sqrt{x}$ 의
 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼
 평행이동한 것이므로
 $-b = -1, c = 1$, 즉 $b = 1, c = 1$
 $\therefore y = a\sqrt{x+1}+1$
 이때 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로
 $-1 = a+1$
 $\therefore a = -2$
 따라서 $a = -2, b = 1, c = 1$ 이므로
 $a+b+c = 0$

26 정답 -6

해설 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax} \ (a > 0)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼
 평행이동한 것이므로
 $y = \sqrt{a(x-3)}-2 \quad \dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(5, 0)$ 을 지나므로 $0 = \sqrt{2a}-2$
 $2 = \sqrt{2a}, 2a = 4$
 $\therefore a = 2$
 $a = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $y = \sqrt{2(x-3)}-2$
 $= \sqrt{2x-6}-2$
 따라서 $a = 2, b = -6, c = -2$ 이므로
 $a+b+c = -6$

27 정답 20℃

해설 주어진 조건에 따라
 $357 = 21\sqrt{269+x}$
 $357 = 21\sqrt{269+x}$
 $17 = \sqrt{269+x}$
 양변을 제곱하면
 $289 = 269+x$
 $\therefore x = 20$

28 정답 $\frac{3}{2}$ 배

해설 $h = -2t^2 + 32$ 에서

$$2t^2 = 32 - h, t^2 = 16 - \frac{h}{2}$$

$$t = \sqrt{16 - \frac{h}{2}} \quad (\text{단, } 0 \leq h \leq 32)$$

$h = 14$ 일 때의 시간 t_1 은

$$t_1 = 3$$

또, $h = 24$ 일 때의 시간 t_2 는

$$t_2 = 2$$

따라서 물체가 14m 높이까지 떨어지는데 걸리는 시간은

24m 높이까지 떨어지는데 걸리는 시간의 $\frac{3}{2}$ 배이다.

29 정답 ①

해설 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서

$$-6x + 2k + 5 = -6x - 15 + k$$

$$\therefore k = -20$$

30 정답 2

해설 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= f(-x+4) = a(-x+4)+3$$

$$= -ax + 4a + 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(ax+3)$$

$$= -(ax+3)+4 = -ax+1$$

$$f \circ g = g \circ f \text{이므로 } (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \text{이다.}$$

$$\therefore -ax + 4a + 3 = -ax + 1$$

$$4a + 3 = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ 이므로

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 2$$

31 정답 ①

해설 $f(x) = \frac{ax+1}{x-b}$ 의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$$3 = \frac{2a+1}{2-b} \quad \therefore 2a+3b=5 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, $f(x) = \frac{ax+1}{x-b}$ 의 역함수의 그래프가 점 (2, 3)을

지나므로 $f(x) = \frac{ax+1}{x-b}$ 의 그래프는 점 (3, 2)를

지난다.

$$\text{즉, } 2 = \frac{3a+1}{3-b} \quad \therefore 3a+2b=5 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 $ab=1$

32 정답 ⑤

해설 $(g \circ f)(x) = x$ 에서 $g(f(2)) = 2$ 이므로

$$f(2) = k \text{라 하면 } g(k) = 2$$

$$g(x) = \frac{3x}{2x-1} \text{이므로 } g(k) = \frac{3k}{2k-1} = 2$$

$$3k = 4k - 2 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore f(2) = 2$$

33 정답 ②

해설 $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 에 대하여

$y = \sqrt{x-1} + 1$ 로 놓고 역함수를 구하면

$$y-1 = \sqrt{x-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

①을 제곱하면

$$(y-1)^2 = x-1$$

$$y^2 - 2y + 1 = x - 1$$

$$x = y^2 - 2y + 2$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 2x + 2 \quad (x \geq 1)$$

이때 $f(x)$ 와 역함수 $g(x)$ 의 교점은

$f(x)$ 와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$ 의 교점을 구하면 된다.

$$g(x) = x \text{에서 } x^2 - 2x + 2 = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=1$$

즉, $x=2$ 일 때, $y=2$ 이고, $x=1$ 일 때, $y=1$ 이다.

따라서 두 점 (1, 1), (2, 2) 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

34 정답 ③

해설 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 가 점 $(2, 4)$ 에서 만나므로 $f(2) = 4$ 이고 $g(2) = 4$ 이다.
 이때 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 $g(2) = 4$ 에서 $f(4) = 2$
 $f(2) = \sqrt{2a+b} + 2 = 4$ 에서
 $2a+b=4 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $f(4) = \sqrt{4a+b} + 2 = 2$ 에서
 $4a+b=0 \quad \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의해 $a = -2, b = 8$
 $\therefore f(x) = \sqrt{-2x+8} + 2$
 $g(6) = k$ 라 하면 $f(k) = 6$ 이므로
 $f(k) = \sqrt{-2k+8} + 2 = 6$ 에서
 $\sqrt{-2k+8} = 4, -2k+8 = 16 \quad \therefore k = -4$
 $\therefore g(6) = -4$