

## 1.

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x+1) - f(1) = x^3 + 13x^2 + 26x$$

를 만족시킬 때,  $f'(1)$ 의 값은?<sup>1)</sup> [3점]

- ① 26      ② 30      ③ 34      ④ 38      ⑤ 42

## 2.

다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{2h} = 1$$

을 만족시킬 때,  $f(3) + f'(3)$ 의 값은?<sup>2)</sup> [3점]

- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

## 3.

함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & (x < 2) \\ 4x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $ab$ 의 값은? (단,  $a$ 와  $b$ 는 상수이다.)<sup>3)</sup> [3점]

- ① 24      ② 26      ③ 28      ④ 30      ⑤ 32

## 4.

두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 5$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = 7$$

두 실수  $a$ ,  $b$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 일 때,  $ab$ 의 값은?

<sup>4)</sup> [4점]

- ① 4      ② 5      ③ 6      ④ 7      ⑤ 8

## 5.

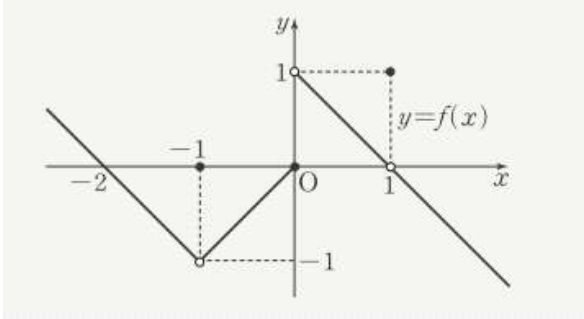
최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & (x \neq 4) \\ 2 & (x = 4) \end{cases}$$

에 대하여  $h(x) = f(x)g(x)$ 라 할 때, 함수  $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $h'(4) = 6$ 이다.  $f(0)$ 의 값을 구하시오.<sup>5)</sup> [4점]

6.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 6) [4점]



< 보 기 >

- ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = 0$   
 ㄴ. 함수  $y=f(x)f(-x)$ 는  $x=-1$ 에서 연속이다.  
 ㄷ. 함수  $y=f(x)f(-x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ    ② ㄷ    ③ ㄱ, ㄴ    ④ ㄴ, ㄷ    ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7.

두 함수

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여  $x=0$ 에서 미분가능한 함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 7) [4점]

< 보 기 >

- ㄱ.  $xf(x)$   
 ㄴ.  $f(x)g(x)$   
 ㄷ.  $|f(x)-g(x)|$

- ① ㄱ    ② ㄷ    ③ ㄱ, ㄴ    ④ ㄴ, ㄷ    ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8.

함수  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ 에서  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율이 7이다.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$ 의 값은?

(단,  $a$ 는 상수이다.) 8) [3점]

- ① 6    ② 8    ③ 10    ④ 12    ⑤ 14

9.

함수  $f(x) = 2x^2 + ax + b$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ 일 때,  $f(2)$ 의 값은? (단,  $a$ 와  $b$ 는 상수이다.) 9) [3점]

- ① 7    ② 8    ③ 9    ④ 10    ⑤ 11

10.

함수  $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 가  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-4}{h} = 3$ 을 만족시킬 때, 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. 10) [4점]

#### 11.

다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 12$$

를 만족시킨다.  $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 라 할 때,  $g'(1)$ 의 값을 구하시 오.<sup>11)</sup> [4점]

#### 12.

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 2$ 이고, 함수  $g(x) = x^2 + 3x$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - f(1)g(1)}{x - 1}$ 의 값은? <sup>12)</sup> [4점]

- ① 11            ② 12            ③ 13            ④ 14            ⑤ 15

#### 13.

두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x - 3) - 1}{x - 3} = 6$$

을 만족시킨다. 함수  $h(x) = f(x)g(x)$ 일 때,  $h'(0)$ 의 값을 구하시 오.<sup>13)</sup> [4점]

#### 14.

최고차항의 계수가 1인 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축에 접한다. 함수  $g(x) = (x - 3)f'(x)$ 에 대하여 곡선  $y = g(x)$ 가  $y$ 축에 대하여 대칭일 때,  $f(0)$ 의 값은? <sup>14)</sup> [3점]

- ① 1            ② 4            ③ 9            ④ 16            ⑤ 25

15.

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$f'(5)$ 의 값을 구하시오.<sup>15)</sup> [4점]

16.

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

를 만족시킨다. 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -1$$

일 때,  $f(2) + g(3)$ 의 값은? <sup>16)</sup> [4점]

- ① 8              ② 9              ③ 10              ④ 11              ⑤ 12

17.

삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

$$(나) 1 \text{이 아닌 상수 } \alpha \text{에 대하여 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha \text{이다.}$$

$\alpha \times f(4)$ 의 값을 구하시오.<sup>17)</sup> [4점]

18.

다항함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)f(x)$$

라 하자.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{2f(x) - 1} = -2$ 일 때,  $g'(2)$ 의 값은? <sup>18)</sup> [4점]

- ①  $\frac{1}{3}$               ②  $\frac{2}{3}$               ③ 1              ④  $\frac{4}{3}$               ⑤  $\frac{5}{3}$

19.

상수  $a$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = (x^2 - x + a)f(x)$ 라 할 때, 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(x)}{x - 1} = 0$$

$$(8) g'(1) \neq 0$$

$$(9) f(\alpha) = f'(\alpha) \text{이고 } g'(\alpha) = 2f'(\alpha) \text{인 실수 } \alpha \text{가 존재한다.}$$

$g(\alpha + 4) = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) <sup>19)</sup> [4점]

20.

실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-a) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

라 하자. 양의 실수  $t$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 0에서  $t$ 까지 변할 때의 평균변화율을  $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? <sup>20)</sup> [4점]

< 보 기 >

ㄱ.  $a = 1$ 일 때,  $g(1) = -1$ 이다.

ㄴ. 함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1일 때,  $g(2) = \frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ.  $g(k) = g(k+1) = g(k+2)$ 를 만족시키는  $0 < k < 2$ 인 실수  $k$ 가 존재할 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와

직선  $y = -\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

## <정답 및 해설>

1) [정답/모범답안]  
1

[해설] 201809고2 가 #13

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 13h^2 + 26h}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 13h + 26) = 26 \end{aligned}$$

2) [정답/모범답안]  
1

[해설] 2020040고3 나 #10

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{2h} &= 1 \text{ 이고 } \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0 \text{ 이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{f(3+h) - 4\} &= 0, \text{ 즉, } f(3) = 4 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{2h} &= \frac{1}{2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{1}{2} f'(3) = 1 \\ \text{이므로 } f'(3) &= 2 \times 1 = 2 \\ \text{따라서 } f(3) + f'(3) &= 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

3) [정답/모범답안]  
5

[해설] 201809 고2 가 #7

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=2$ 에서 미분 가능하다.

(i) 함수  $f(x)$ 가  $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \\ 8 + 2a &= 8 + b, \quad b = 2a \end{aligned}$$

(ii) 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 미분계수  $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2x^2 + ax - (8 + b)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2x^2 + ax - (8 + 2a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x - 2)(2x + 4 + a)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (2x + 4 + a) = 8 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{4x + b - (8 + b)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ 이므로} \\ 8 + a &= 4, \text{ 즉 } a = -4, \quad b = -8 \end{aligned}$$

따라서  $ab = (-4) \times (-8) = 32$

4) [정답/모범답안]  
3

[해설] 202103 고3 확통 #12

조건 (가)에서  $x \rightarrow 1$  일 때, (분모)  $\rightarrow 0$  이므로

(분자)  $\rightarrow 0$  이다. 즉,  $f(1) = g(1) \dots \dots \textcircled{1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1} = 5$$

즉,  $f'(1) - g'(1) = 5 \dots \dots \textcircled{2}$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} + \{g(x) - g(1)\}}{x - 1} = 7 \end{aligned}$$

즉,  $f'(1) + g'(1) = 7 \dots \dots \textcircled{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1) \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때,}$$

(분모)  $\rightarrow 0$  이므로 (분자)  $\rightarrow 0$  이다.

$$\text{즉, } a = f(1) \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$\textcircled{1}$ 에서  $f(1) = g(1)$  이므로  $f'(1) = b \times f(1) = ab$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립해서 풀면  $f'(1) = 6$

따라서  $ab = 6$

5) [정답/모범답안]  
32

[해설] 201811 고2 나 #29

$$\begin{aligned} h'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)g(x) - f(4)g(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) \times \frac{1}{x - 4} - 2f(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2(x - 4)f(4)}{(x - 4)^2} = 6 \dots \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에서  $\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4)^2 = 0$  이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} \{f(x) - 2(x - 4)f(4)\} = 0, \text{ 즉 } f(4) = 0$$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 를

$f(x) = (x - 4)(x^2 + ax + b)$  ( $a, b$ 는 상수)라 놓고  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x^2 + ax + b)}{(x - 4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x - 4} = 6 \dots \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서  $\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) = 0$  이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + ax + b) = 0, \text{ 즉 } 16 + 4a + b = 0$$

따라서  $b = -4a - 16$  이고 이를  $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax - 4a - 16}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + a + 4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x + a + 4) = a + 8 = 6 \end{aligned}$$

에서  $a = -2, \quad b = -8$

따라서  $f(x) = (x - 4)(x^2 - 2x - 8)$  이므로

$$f(0) = (-4) \times (-8) = 32$$

6) [정답/모범답안]  
3

[해설] 201411 고2 나 #20

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = 0$  (참)

$$\perp. -x = t \text{ 라 하면 } \lim_{x \rightarrow -1-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 0 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = 0$$

또한,  $f(-1)f(-(-1)) = f(-1)f(1) = 0 \times 1 = 0$ 이므로

함수  $y = f(x)f(-x)$ 는  $x = -1$ 에서 연속이다. (참)

$$\text{ㄷ. } f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leq 0) \\ -x+1 & (0 < x < 1) \end{cases} \text{이고}$$

$$f(-x) = \begin{cases} x+1 & (-1 < x < 0) \\ -x & (0 \leq x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x)f(-x) = \begin{cases} x^2+x & (-1 < x < 0) \\ 0 & (x=0) \\ x^2-x & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)f(-x)-f(0)f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)f(-x)-f(0)f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1) = -1$$

이므로  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7) [정답/모범답안]

3

[해설] 201311 고2나 #16

$$\text{ㄱ. } xf(x) = x|x| \text{에서 } xf(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$xf(x) = h_1(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

따라서 함수  $h_1(x)$ , 즉 함수  $xf(x)$ 의  $x = 0$ 에서의 미분계수가 존재하므로 함수  $xf(x)$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$\text{ㄴ. } f(x)g(x) = \begin{cases} |x| \times (2x+1) & (x \geq 0) \\ |x| \times (-x-1) & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2+x & (x \geq 0) \\ x^2+x & (x < 0) \end{cases}$$

$f(x)g(x) = h_2(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x^2+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2+x}{x} = 1$$

따라서 함수  $h_2(x)$ , 즉 함수  $f(x)g(x)$ 의  $x = 0$ 에서의 미분계수가 존재하므로 함수  $f(x)g(x)$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$\text{ㄷ. } f(x)-g(x) = \begin{cases} |x|-(2x+1) & (x \geq 0) \\ |x|-(-x-1) & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x-1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{에서 } |f(x)-g(x)| = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

$|f(x)-g(x)| = h(x)$ 라 할 때, 함수  $h(x)$ 가  $x = 0$ 에서 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x+1)-(0+1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-1}{x-0} = 0$$

이므로  $h'(0)$ 이 존재하지 않는다.

즉, 함수  $|f(x)-g(x)|$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서  $x = 0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

8) [정답/모범답안]

3

[해설] 202203 고3 확통 #6

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a} = 4a-1 = 7 \text{에서 } a = 2 \text{이다.}$$

한편  $f'(x) = 4x-3$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

$$= 2f'(a)$$

$$= 2f'(2) = 10$$

9) [정답/모범답안]

1

[해설] 201911 고2나 #12

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

따라서  $f(1) = 0$

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \text{에서 } f(1) = 2 + a + b = 0, \quad a + b = -2 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 5$$

$f'(x) = 4x + a$ 이므로

$$f'(1) = 4 + a = 5 \text{에서 } a = 1 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서  $a = 1, \quad b = -3$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + x - 3 \text{이므로 } f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$$

10) [정답/모범답안]

181

[해설] 201611 고2나 #26

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-4}{h} = 3 \text{에서 } \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \text{이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+h)-4\} = 0$$

따라서  $f(2) = 4$

$$f(x) = 3x^2 + ax + b \text{에서 } f(2) = 12 + 2a + b = 4$$

$$2a + b = -8 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = 3$$

$f'(x) = 6x + a$ 이므로

$$f'(2) = 12 + a = 3 \text{에서 } a = -9 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a = -9, \quad b = 10 \quad \text{따라서 } a^2 + b^2 = 81 + 100 = 181$$

11) [정답/모범답안]

28

[해설] 201809 고2나 #26

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 12 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\} = 0$$

따라서  $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 12$$

$$g(x) = (x^2+1)f(x) \text{에서 } g'(x) = 2xf(x) + (x^2+1)f'(x) \text{이므로}$$

$$g'(1) = 2f(1) + 2f'(1) = 2 \times 2 + 2 \times 12 = 28$$

12) [정답/모범답안]

3

[해설] 201509 고2 가 #15

함수  $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - f(1)g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = h'(1)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{이므로 } h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$g(x) = x^2 + 3x \text{에서 } g'(x) = 2x + 3$$

$$g(1) = 1 + 3 = 4, \quad g'(1) = 2 + 3 = 5$$

$$\text{따라서 } h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \times 4 + 1 \times 5 = 13$$

13) [정답/모범답안]

15

[해설] 201609 고2가 #26

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = 3 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이므로 (분자)} \rightarrow 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 2\} = 0 \text{에서 } f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-3}{x-3} = 6 \text{에서 } x-3 = t \text{라 놓으면 } x \rightarrow 3 \text{일 때 } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-3}{t} = 6 \text{에서 극한값이 존재하고 } t \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이므로 (분자)} \rightarrow 0$$

$$\text{즉, } \lim_{t \rightarrow 0} \{g(t) - 3\} = 0 \text{에서 } g(0) = 3$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0) = 6$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{이므로 } h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{따라서 } h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 3 \times 3 + 2 \times 6 = 15$$

14) [정답/모범답안]

3

[해설] 202003 고3 나 #13

이차함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축에 접하므로  $f(x) = (x-a)^2$  ( $a$ 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2(x-a)$$

$$g(x) = (x-3)f'(x) = 2(x-a)(x-3)$$

$$= 2x^2 - 2(a+3)x + 6a$$

함수  $y = g(x)$ 의 그래프가  $y$ 축에 대하여 대칭이므로  $x$ 의 계수가 0이다. 즉,  $a = -3$

$$\text{따라서 } f(x) = (x+3)^2 \text{에서 } f(0) = 3^2 = 9$$

15) [정답/모범답안]

40

[해설] 201509 고2나 #26

조건 (가)에서 함수  $f(x) - 2x^2$ 은 이차항의 계수가 2인 이차함수이고

조건 (나)에서  $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2x^2\} = 0$ 이므로 방정식  $f(x) - 2x^2 = 0$ 은

$x = 1$ 을 실근으로 갖는다.

즉,  $f(x) - 2x^2 = 2(x-1)(x-a)$  ( $a$ 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x-a)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-a)}{x+1} = 1 - a = 2$$

따라서  $a = -1$

$$f(x) = 2x^2 + 2(x-1)(x+1) = 4x^2 - 2$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 8x \text{이므로 } f'(5) = 40$$

16) [정답/모범답안]

2

[해설] 201709 고2가 #19

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고  $f(-x) = -f(x)$ ,  $g(-x) = -g(x)$ 이므로 두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 모든 항의 차수는 홀수이다.

두 홀수  $m$ ,  $n$ 에 대하여 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 최고차항을 각각  $x^m$ ,  $x^n$ 이라 하면, 두 도함수  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 의 최고차항은 각각  $mx^{m-1}$ ,  $nx^{n-1}$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3 \text{에서 } m-1 = 2 + (n-1), \text{ 즉 } m = n+2 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또, 최고차항의 계수의 비에서 } \frac{m}{n} = 3 \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } m = 3, n = 1$$

$$f(x) = x^3 + ax \text{ (} a \text{는 상수)}, g(x) = x \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + ax)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) = a = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - x, g(x) = x \text{이므로}$$

$$f(2) + g(3) = (8 - 2) + 3 = 9$$

17) [정답/모범답안]

18

[해설] 202111 고2 #28

조건 (가)에서  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x = 1 \text{에서 연속이므로 } f(1) = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha (\alpha \neq 1) \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f'(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x = 2 \text{에서 연속이므로 } f(2) = 0 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의해

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x+a) \text{ (} k, a \text{는 상수, } k \neq 0 \text{)}$$

$$f'(x) = k\{(x-2)(x+a) + (x-1)(x+a) + (x-1)(x-2)\}$$

$$a \neq -2 \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)} = \frac{2+a}{2+a} = 1 \neq \alpha$$

$$\text{그러므로 } a = -2 \text{이며 } f(x) = k(x-1)(x-2)^2$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2 + 2k(x-1)(x-2)\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)+2(x-1)}$$

$$= \frac{1}{0+2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 \text{ 이므로 } k = 3$$

$$\text{따라서 } \alpha \times f(4) = \frac{1}{2} \times (3 \times 3 \times 2^2) = 18$$

18) [정답/모범답안]

2

[해설] 202211 고2 #17

$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)f(x) \text{에서 } g(2) = 2f(2)$$

$$g'(x) = (2x-2)f(x) + (x^2 - 2x + 2)f'(x) \text{에서}$$

$$g'(2) = 2f(2) + 2f'(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = -2 \text{에서 } f(2) \neq \frac{1}{2} \text{이라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \frac{g(2)-1}{2f(2)-1} = \frac{2f(2)-1}{2f(2)-1} = 1 \neq -2$$

$$\text{이므로 } f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } g(2) = 2f(2) = 1 \text{이고 } g'(2) = 2f'(2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{2\{f(x)-f(2)\}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}{2 \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$

$$\text{이때 } f'(2) = 0 \text{이라 하면 } g'(2) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} \text{의 값이 존재하지 않는다. 그러므로 } f'(2) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \frac{g'(2)}{2f'(2)} = \frac{g'(2)}{g'(2)-1} = -2 \text{ 따라서 } g'(2) = \frac{2}{3}$$

19) [정답/모범답안]

61

{문제 풀이}

STEP 1 조건 ㉠, ㉡를 이용하여  $a$ 와  $f(1)$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = x^2 + bx + c \text{ (} b, c \text{는 상수)라 하자.}$$

조건 ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a)f(x) - f(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)f(x)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + a - 1)f(x) = (a-1)f(1) = 0$$

$$\text{따라서 } a = 1 \text{ 또는 } f(1) = 0$$

(i)  $a \neq 1$ 이라 하면  $f(1) = 0$ 이어야 하므로

$$c = -b - 1 \text{이고 } f(x) = (x-1)(x+b+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)(x-1)(x+b+1)}{x-1}$$

$$= (a-1)(b+2) = 0$$

$$\text{이므로 } b = -2, f(x) = (x-1)^2$$

$$g'(x) = (2x-1)(x-1)^2 + (x^2 - x + a)(2x-2) \text{에서}$$

$$g'(1) = 0 \text{이므로 조건 ㉡를 만족시키지 않는다.}$$

(ii)  $f(1) \neq 0$ 이라 하면  $a = 1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)f'(x)}{x-1} = f'(1) = 0$$

이므로 모순이다.

(i), (ii)에서  $a = 1$ 이고  $f(1) = 0$ 이며  $b \neq -2$

STEP 2  $\alpha$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = (x-1)(x+b+1) \text{에서 } f'(x) = 2x+b$$

$$g(x) = (x^2 - x + 1)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = (2x-1)f(x) + (x^2 - x + 1)f'(x)$$

조건 ㉡에서  $f(\alpha) = f'(\alpha)$ 이므로

$$(\alpha-1)(\alpha+b+1) = 2\alpha+b \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$g'(\alpha) = (2\alpha-1)f(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha)$$

$$g'(\alpha) = 2f'(\alpha) \text{이므로}$$

$$(2\alpha-1)f'(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha) = 2f'(\alpha)$$

$$(\alpha^2 + \alpha - 2)f'(\alpha) = 0$$

$$(\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b) = 0$$

$$\text{따라서 } \alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 1 \text{ 또는 } \alpha = -\frac{b}{2}$$

$$\text{이때 } \alpha = 1 \text{ 또는 } \alpha = -\frac{b}{2} \text{이면}$$

㉡에서  $b = -2$ 이므로  $b \neq -2$ 인 것에 모순이다.

$$\text{즉, } \alpha = -2 \text{이므로 } \textcircled{A} \text{에서 } b = \frac{7}{4} \text{이고}$$

$$g(x) = (x^2 - x + 1)(x-1) \left( x + \frac{11}{4} \right)$$

STEP 3  $p+q$ 의 값을 구한다.

$$g(\alpha+4) = g(2) = 3 \times 1 \times \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$$

$$\text{따라서 } p = 4, q = 57 \text{이므로 } p+q = 4+57 = 61$$

20) ④

$f(0) = a$ 이므로 양수  $t$ 에 대하여

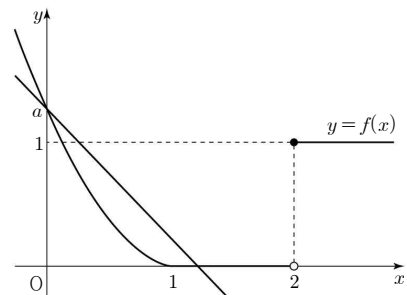
$$g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)-a}{t}$$

이고, 함수  $g(t)$ 의 값은 두 점  $(0, a)$ ,  $(t, f(t))$ 를

지나는 직선의 기울기와 같다.

$$\neg. a = 1 \text{일 때 } g(1) = \frac{f(1)-1}{1} = -1 \text{ (참)}$$

ㄴ. (i)  $a \geq 1$ 일 때

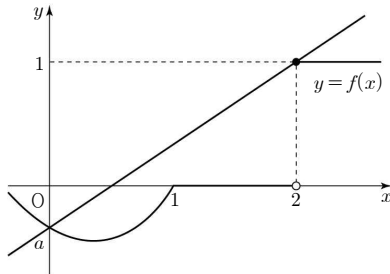


모든 양수  $t$ 에 대하여

$$f(t) \leq a \text{이므로 } g(t) = \frac{f(t)-a}{t} \leq 0$$

그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1이 될 수 없다.

(ii)  $-1 < a < 1$ 일 때

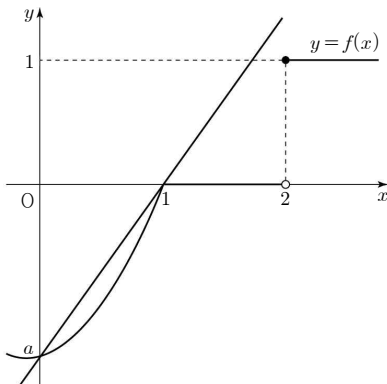


함수  $g(t)$ 는  $t=2$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-a}{2} < 1$$

그러므로 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 1보다 작다.

(iii)  $a \leq -1$ 일 때



함수  $g(t)$ 는  $t=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$g(1) = \frac{f(1)-a}{1} = -a$$

함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1이기 위해서는

$$a = -1$$

$$\text{이때 } g(2) = \frac{f(2)-a}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

함수  $g(t)$ 의 최댓값이 1일 때,  $g(2)=1$  (거짓)

c.  $0 < k < 2$ 인  $k$ 에 대하여

두 점  $(0, a)$ ,  $(k, f(k))$ 를 지나는 직선을  $l$ 이라

하자.  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인

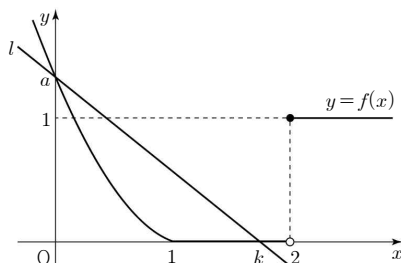
양수  $k(0 < k < 2)$ 가 존재하기 위해서는

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중

$(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이어야 하고,

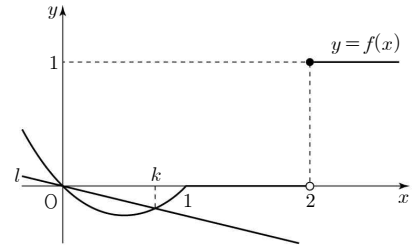
이 세 교점의  $x$ 좌표는  $k, k+1, k+2$ 이어야 한다.

(i)  $a > 0$ 일 때



함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $x$ 좌표가 양수인 점은  $(k, f(k))$ 뿐이므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가 존재하지 않는다.

(ii)  $a=0$ 일 때



$0 < k < 1$ 일 때, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중  $x$ 좌표가 양수인 점은  $(k, f(k))$ 뿐이므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가 존재하지 않는다.

$1 \leq k < 2$ 일 때, 직선  $l$ 의 기울기가 0이므로  $g(k)=0$

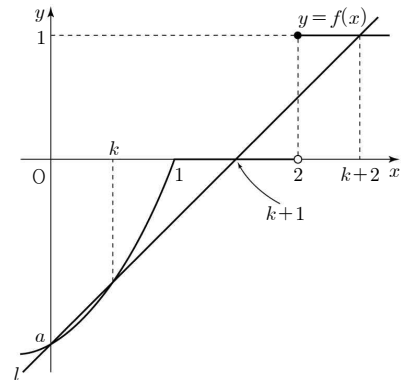
$$\text{이때 } g(k+1) = \frac{1-0}{(k+1)-0} = \frac{1}{k+1} > 0 \text{이므로}$$

$$g(k) \neq g(k+1)$$

그러므로  $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$ 인  $k$ 가

존재하지 않는다.

(iii)  $a < 0$ 일 때



함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $l$ 의 교점 중

$(0, a)$ 가 아닌 점이 3개이기 위해서는

$0 < k < 1$ 이고

$f(k+1)=0, f(k+2)=1$ 이어야 한다.

$$\frac{1-0}{(k+2)-(k+1)} = 1 \text{이므로 직선 } l \text{의}$$

기울기는 1

직선  $l$  위의 두 점  $(k, f(k)), (k+1, 0)$ 에

$$\text{대하여 } \frac{0-f(k)}{(k+1)-k} = 1 \text{에서 } f(k) = -1$$

$$\text{즉, } (k-1)(k-a) = -1 \dots \textcircled{1}$$

직선  $l$  위의 두 점  $(0, a), (k, f(k))$ 에

$$\text{대하여 } \frac{f(k)-a}{k-0} = \frac{-1-a}{k} = 1 \text{에서}$$

$$a = -k-1 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면

$$(k-1)(2k+1) = -1, 2k^2 - k = 0$$

$$0 < k < 1 \text{이므로 } k = \frac{1}{2}, a = -\frac{3}{2}$$

그러므로

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) & (x < 1) \\ 0 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이때

$$\begin{aligned} (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) &= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ &= \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16} \end{aligned}$$

함수  $y=f(x)$ 의 최솟값  $-\frac{25}{16}$ 가  $-\frac{3}{2}$ 보다

작으므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와

직선  $y=-\frac{3}{2}$ 은 서로 다른 두 점에서

만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ