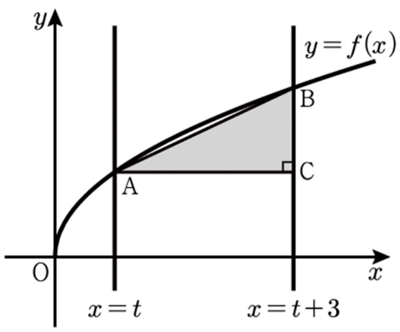
실시일자	2025.09.03	유형별 학습	이름
13문제 / DRE수학			

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) 27p_문제연습1

함수의 극한값의 계산

01 [2019년 11월 고2 문과 16번 변형]

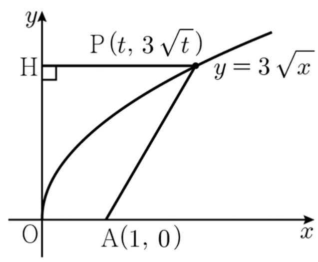
다음 그림과 같이 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$ 의 그래프가 두 직선 $x=t$, $x=t+3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 직선 $x=t+3$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times S(t)}{3}$ 의 값은?



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 3

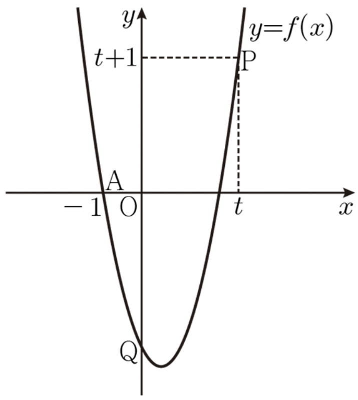
02

다음 그림과 같이 함수 $y=3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 3\sqrt{t})$ 와 x축 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ 이 있다. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PH}})$ 의 값을 구하시오.



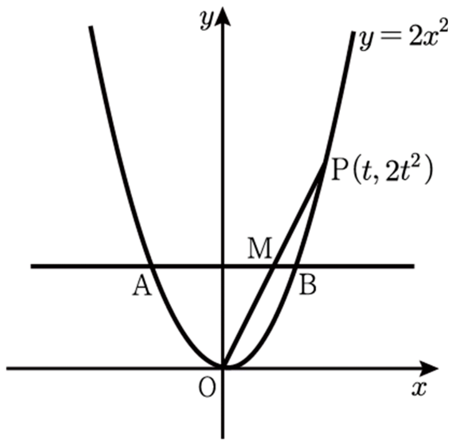
03 [2020년 3월 고3 문과 26번 변형]

최고차항의 계수가 1이고
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{P}(t,\ t+1)$을 지나는
이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과
만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}\right)$의 값을
구하시오. (단, $t\neq-1$)



04 [2017년 6월 고2 문과 18번 변형]

다음 그림과 같이 곡선 $y=2x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2)$와
원점 O에 대하여 선분 OP의 중점을 M이라 하고,
점 M을 지나면서 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2x^2$과
만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$의 값은?



① $\frac{6}{5}\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{4}{5}\sqrt{2}$
④ $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2}{5}\sqrt{2}$

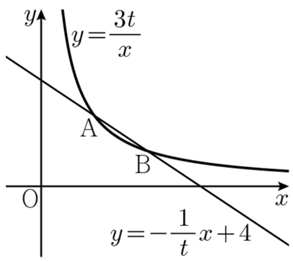
05 [2024년 10월 고2 27번 변형]

실수 $t\ (t>1)$에 대하여 곡선 $y=\frac{3t}{x}$와

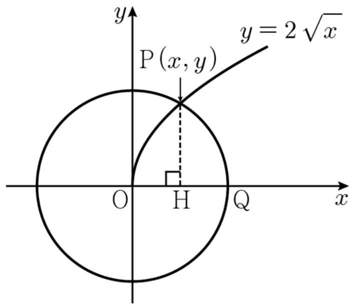
직선 $y=-\frac{1}{t}x+4$가 만나는 두 점을 A, B라 하자.

$\lim\limits_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}=k$라 할 때, $10k^2$의 값을 구하시오.

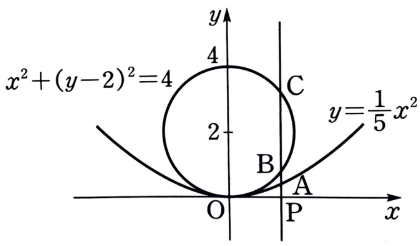
(단, O는 원점이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)



06 다음 그림에서 원점 O가 중심이고 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 지나는 원이 x축의 양의 부분과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}$의 값을 구하시오.



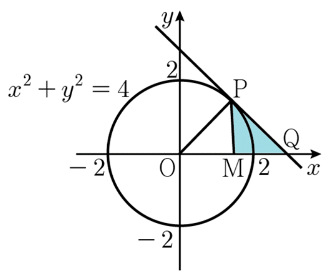
07 다음 그림과 같이 두 곡선 $x^2+(y-2)^2=4$, $y=\frac{1}{5}x^2$이 있다. x축 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,0)$ $(-2<t<2)$에 대하여 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선과 만나는 점을 y좌표가 작은 것부터 차례대로 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$라 할 때, $\lim_{t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}}$의 값은?



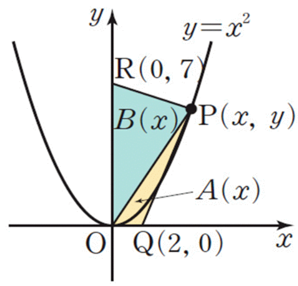
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

08 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \sqrt{4-t^2}\right)$ $(0<t<2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 선분 OQ의 중점을 M이라 하자. 삼각형 PMQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 2-}\frac{\{S(t)\}^2}{2-t}$의 값을 구하시오.



09 곡선 $y=x^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPQ의 넓이를 $A(x)$라 하고, 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{R}(0,\ 7)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR의 넓이를 $B(x)$라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{4xB(x)}{A(x)}$의 값은? (단, $x>0$)



① 8 ② 10

③ 12 ④ 14

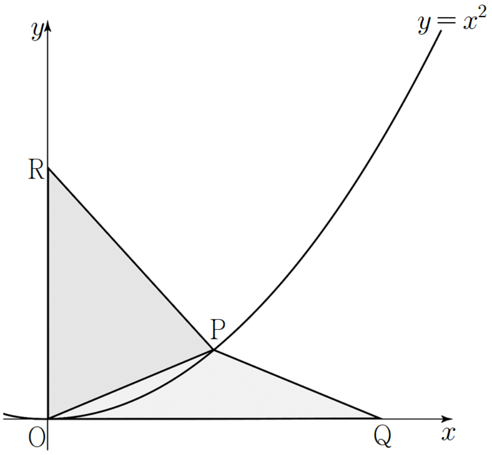
⑤ 16

10 [2017년 4월 고3 문과 21번/4점]

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

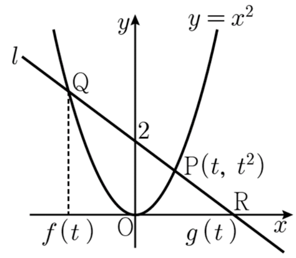
> (가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.
> (나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

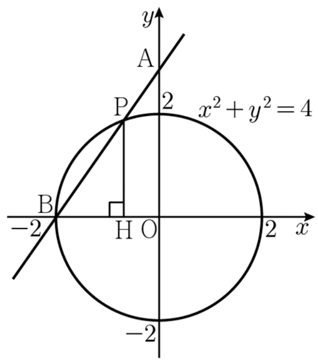


① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

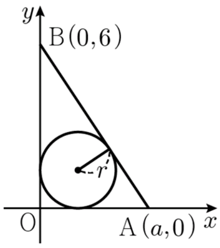
11 다음 그림과 같이 y축 위의 점 $(0,\ 2)$와 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (0<t<\sqrt{2})$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 직선 l이 x축과 만나는 점을 R라 하자.
두 점 Q, R의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}f(t)g(t)$의 값을 구하시오.



12 다음 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ t)\ (t>0)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$을 지나는 직선과 원 $x^2+y^2=4$의 교점 중에서 B가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 극한값 $\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}})$를 구하시오.



13 다음 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에 내접하는 원이 있다. 이 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, $\lim_{a \to 0+} \frac{r}{a}$의 값을 구하시오.



QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

실시일자	2025.09.03	유형별 학습	이름
13문제 / DRE수학			

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) 27p_문제연습1

함수의 극한값의 계산

정답

01 ②	02 $\frac{7}{2}$	03 2
04 ②	05 64	06 0
07 ⑤	08 1	09 ④
10 ②	11 -2	12 8
13 $\frac{1}{2}$		

실시일자	2025.09.03	유형별 학습	이름
13문제 / DRE수학			

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) 27p_문제연습1

함수의 극한값의 계산

01 정답 ②

해설 $\mathrm{A}(t,\ \sqrt{2t}),\ \mathrm{B}(t+3,\ \sqrt{2t+6}),\ \mathrm{C}(t+3,\ \sqrt{2t})$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=3,\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2t+6}-\sqrt{2t}$

삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times3\times(\sqrt{2t+6}-\sqrt{2t})$$

$$=\frac{3}{2}(\sqrt{2t+6}-\sqrt{2t})$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times S(t)}{3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\times\frac{1}{2}(\sqrt{2t+6}-\sqrt{2t})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times(\sqrt{2t+6}-\sqrt{2t})(\sqrt{2t+6}+\sqrt{2t})}{2(\sqrt{2t+6}+\sqrt{2t})}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\sqrt{t}}{2(\sqrt{2t+6}+\sqrt{2t})}=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2+\frac{6}{t}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

02 정답 $\frac{7}{2}$

해설 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(t-1)^2+9t},\ \overline{\mathrm{PH}}=t$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PH}})=\lim_{t\to\infty}\{\sqrt{(t-1)^2+9t}-t\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-1)^2+9t-t^2}{\sqrt{(t-1)^2+9t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{7t+1}{\sqrt{t^2+7t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{7+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{7}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}$$

$$=\frac{7}{2}$$

03 정답 2

해설 최고차항의 계수가 1이고

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{P}(t,\ t+1)$을 지나는 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+1)(x-t+1)$

따라서 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,\ 1-t)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\{t-(-1)\}^2+(t+1-0)^2}=|t+1|\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{(1-t)-0\}^2}$$

$$=\sqrt{t^2-2t+2}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(|t+1|-\sqrt{t^2-2t+2}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{|t+1|^2-(t^2-2t+2)}{|t+1|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t-1}{|t+1|+\sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4-\frac{1}{t}}{\left|1+\frac{1}{t}\right|+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$$

$$=\frac{4-0}{1+1}=2$$

04 정답 ②

해설 점 M의 좌표는 $\left(\frac{t}{2}, t^2\right)$이므로 직선 AB의 방정식은 $y=t^2$이다. 두 점 A, B는 곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=t^2$의 교점이고, 방정식 $2x^2=t^2$의 해는 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}t$이므로

두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-\frac{\sqrt{2}}{2}t$, $\frac{\sqrt{2}}{2}t$이다.

따라서 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cdot 2=\sqrt{2}t$이고,

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+4t^4}=t\sqrt{1+4t^2}$이다.

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{2}t}{t\sqrt{1+4t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+4t^2}}=\sqrt{2}$$

05 정답 64

해설 $\frac{3t}{x}=-\frac{1}{t}x+4$에서 $3t^2=-x^2+4tx$

$x^2-4tx+3t^2=0$, $(x-t)(x-3t)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=3t$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

A$(t, 3)$, B$(3t, 1)$

$\overline{OA}=\sqrt{t^2+9}$, $\overline{OB}=\sqrt{9t^2+1}$

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{OB}-\overline{OA}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{\left(\sqrt{9t^2+1}-\sqrt{t^2+9}\right)\left(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}\right)}{(t-1)\left(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{8(t^2-1)}{(t-1)\left(\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{8(t+1)}{\sqrt{9t^2+1}+\sqrt{t^2+9}}=\frac{4}{5}\sqrt{10}$$

$$\therefore 10k^2=10\cdot\left(\frac{4}{5}\sqrt{10}\right)^2=64$$

06 정답 0

해설 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $x^2+y^2=r^2$

점 P(x, y)는 원과 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$x^2+y^2=r^2$, $y=2\sqrt{x}$를 연립하여 r를 구하면

$x^2+4x=r^2$

$\therefore r=\sqrt{x^2+4x}$ $(\because r>0)$

$\therefore \overline{QH}=r-x=\sqrt{x^2+4x}-x$

또한, $\overline{PH}^2=y^2=(2\sqrt{x})^2=4x$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{QH}}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{4x\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)=0$$

07 정답 ⑤

해설 두 점 A, B의 y좌표를 구하여 $\overline{PA}, \overline{PB}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 A는 곡선 $y=\frac{1}{5}x^2$ 위의 점이므로 $\overline{PA}=\frac{1}{5}t^2$

$x^2+(y-2)^2=4$에서 $(y-2)^2=4-x^2$,

$y=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$\therefore \overline{PB}=2-\sqrt{4-t^2}$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t^2}}{\frac{1}{5}t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{5(2-\sqrt{4-t^2})}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{5t^2}{t^2(2+\sqrt{4-t^2})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{5}{2+\sqrt{4-t^2}}=\frac{5}{4}$$

[참고] $\overline{PC}=2+\sqrt{4-t^2}$

08 정답 1

해설 점 P에서의 접선의 방정식은 $tx+\sqrt{4-t^2}y=4$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{4}{t},\ 0\right)$, 점 M의 좌표는 $\left(\frac{2}{t},\ 0\right)$

삼각형 PMQ의 넓이는

$S(t)=\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}$이므로

$$\lim_{t\to 2-}\frac{\{S(t)\}^2}{2-t}=\lim_{t\to 2-}\frac{4-t^2}{t^2(2-t)}$$
$$=\lim_{t\to 2-}\frac{t+2}{t^2}=1$$

09 정답 ④

해설 $A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot y=y=x^2$

또한 삼각형 OPR의 넓이 $B(x)$는

$B(x)=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot x=\frac{7}{2}x$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4xB(x)}{A(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x^2}{x^2}=14$$

10 정답 ②

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로

점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times 2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$

$y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{4}(t^3+t)$

따라서 $$\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

11 정답 -2

해설 두 점 $(0,\ 2)$, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{t^2-2}{t-0}x+2,\ \text{즉}\ y=\left(t-\frac{2}{t}\right)x+2$$

$y=0$에서 $x=-\dfrac{2}{t-\dfrac{2}{t}}=\dfrac{2t}{2-t^2}$

즉, $\mathrm{R}\left(\dfrac{2t}{2-t^2},\ 0\right)$

직선 l은 곡선 $y=x^2$과 두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, Q에서 만나므로

$$x^2=\left(t-\frac{2}{t}\right)x+2$$

$$x^2-\left(t-\frac{2}{t}\right)-2=0$$

$$(x-t)\left(x+\frac{2}{t}\right)=0$$

$x=t$ 또는 $x=-\dfrac{2}{t}$

즉, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2}{t},\ \dfrac{4}{t^2}\right)$

$f(t)=-\dfrac{2}{t}$, $g(t)=\dfrac{2t}{2-t^2}$이므로

$$\lim_{t\to0+}f(t)g(t)=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{2}{t}\right)\left(\frac{2t}{2-t^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{4}{2-t^2}\right)=-2$$

12 정답 8

해설 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{t}{2}(x+2)$

점 P는 직선 $y=\dfrac{t}{2}(x+2)$와 원 $x^2+y^2=4$의 교점이므로 점 P의 y좌표를 구하면

$$\left(\frac{2y}{t}-2\right)^2+y^2=4,\ \frac{4}{t^2}y^2-\frac{8}{t}y+y^2=0$$

$$\therefore\ y=\frac{8t}{t^2+4}\ (\because\ y\neq0)$$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=t$, $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{8t}{t^2+4}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}})=\lim_{t\to\infty}\left(t\cdot\frac{8t}{t^2+4}\right)=8$$

13 정답 $\dfrac{1}{2}$

해설 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+36}$

$\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이에서

$$\frac{r}{2}\left(\sqrt{a^2+36}+a+6\right)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 6$$

$$\therefore\ \frac{r}{a}=\frac{6}{\sqrt{a^2+36}+a+6}$$

$$\therefore\ \lim_{a\to0+}\frac{r}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{6}{\sqrt{a^2+36}+a+6}=\frac{1}{2}$$