마플시너지(2025) - 공통수학2 (집합) 122~137p

집합의 개념과 표현 ~ 집합의 연산과 벤 다이어그램

실시일자	-	유형별 학습	이름
34문제 / DRE수학			

01 다음 중 집합이 될 수 없는 것은?

① $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$
② 한글 자음의 모임
③ $\{x \mid x$는 $x \times 0 = 0$을 만족하는 자연수$\}$
④ 키가 나보다 큰 사람들의 모임
⑤ 나보다 착한 학생의 모임

02 다음 중 집합인 것은?

① 수학을 잘하는 사람의 모임
② 작은 자연수의 모임
③ 음악에 소질이 있는 사람의 모임
④ 나이가 17세 이상인 사람의 모임
⑤ -1에 가까운 수의 모임

03 10보다 작은 홀수의 집합을 A라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2 \in \mathrm{A}$　② $3 \in \mathrm{A}$　③ $4 \in \mathrm{A}$
④ $5 \notin \mathrm{A}$　⑤ $6 \in \mathrm{A}$

04 다음 중 옳지 않은 것은?

① $2 \notin \{0,\ 1\}$
② $1 \in \{1,\ 5\}$
③ $4 \notin \{1,\ 2,\ 3\}$
④ $3 \in \{1,\ 5,\ 9\}$
⑤ $10 \notin \{1,\ 2,\ 5,\ 7\}$

05 집합 $A = \{a,\ \{b,\ c\},\ d\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\{a\} \in A$　② $\{b\} \in A$　③ $\{a,\ b\} \subset A$
④ $\{b,\ c\} \in A$　⑤ $\{c,\ d\} \subset A$

06 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{1\} \in A$　② $2 \in A$
③ $\{1,\ 2\} \subset A$　④ $\{\{1\},\ \{2\}\} \subset A$
⑤ $\varnothing \in A$

07 [2021년 11월 고1 22번/3점]
두 집합 $A=\{2,\ 5\}$ $B=\{2,\ 4,\ a\}$에 대하여 $A\subset B$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

08 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{x|x$는 5보다 작은 자연수$\}=\{1,\ 3,\ 5\}$
② $\{x|x$는 10 이하의 홀수$\}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
③ $\{x|x$는 12의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
④ $\{x|x$는 20 미만의 4의 배수$\}=\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$
⑤ $\{x|x=2\times n+1,\ 1\le n\le 3,\ n$은 자연수$\}$ $=\{3,\ 5,\ 7\}$

09 다음 중 유한집합이 아닌 것은?

① $\{x|x$는 10의 약수$\}$
② $\{x|x$는 10보다 작은 홀수$\}$
③ $\{x|x$는 5보다 큰 자연수$\}$
④ $\{x|x$는 30보다 작은 5의 배수$\}$
⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 49,\ 50\}$

10 집합 $A=\{x|x$는 8보다 작은 짝수$\}$ 일 때, 다음 중 A의 진부분집합이 아닌 것은?

① $\varnothing$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$
④ $\{4,\ 6\}$ ⑤ $\{2,\ 4,\ 6\}$

11 방정식 $x^3+2x^2-x-2=0$의 해의 집합을 A라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $-2\not\in A$ ② $-1\in A$ ③ $0\not\in A$
④ $1\in A$ ⑤ $2\not\in A$

12 다음 중 옳은 것은?

① $\{\varnothing\}\subset\varnothing$
② $A\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 $A\subset B$이면 $\{1,\ 5\}\subset B$
③ $\{4,\ 5\}\subset\{5,\ 2\cdot 2\}$
④ $\{a,\ b,\ c,\ e\}\subset\{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}$
⑤ $A=\{x|x$는 5보다 작은 홀수$\}$이면 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}\subset A$

13 두 집합 $A=\{0,\ 1,\ \{\varnothing\},\ \{0,\ 1,\ \varnothing\}\}$, $B=\{a,\ b,\ \{a,\ b,\ c\}\}$에 대하여 $n(A)-n(B)$의 값은? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

14 집합 $A=\{2a-b|3a+2b\le 10,\ a,\ b$는 자연수$\}$일 때, 다음 중 집합 A와 서로 같은 것은?

① $\{x|-1<x<3,\ x$는 정수$\}$
② $\{x|-1\le x\le 3,\ x$는 정수$\}$
③ $\{x|1<x<5,\ x$는 자연수$\}$
④ $\{x|1\le x\le 3,\ x$는 자연수$\}$
⑤ $\{x|1\le x\le 5,\ x$는 자연수$\}$

15 $n(\varnothing)+n(\{0\})+n(\{\varnothing\})$을 구하시오.

16 집합 $S=\{x|4ax+3x+7=-5x+3b-2\}$가 무한집합이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

17 세 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7\}$,
$B=\{x|x\}$는 9보다 작은 홀수$\}$,
$C=\{x|x=2n+1,\ n=0,\ 1\}$

에 대하여 A, B, C 사이의 포함관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C\subset A\subset B$ ② $A\subset B\subset C$
③ $B\subset A\subset C$ ④ $C\subset B\subset A$
⑤ $A\subset C\subset B$

18 자연수 전체의 집합을 N, 유리수 전체의 집합을 Q, 실수 전체의 집합을 R라 할 때, 다음 중 N, Q, R 사이의 포함 관계로 옳은 것은?

① $Q\subset N\subset R$ ② $N\subset Q\subset R$
③ $R\subset N\subset Q$ ④ $R\subset Q\subset N$
⑤ $N\subset R\subset Q$

19 두 집합 $A=\{x|x$는 15의 양의 약수$\}$, $B=\{1,\ 5,\ a+1,\ b\}$에 대하여 $A\subset B$, $B\subset A$일 때, 정수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

20 두 집합
$A=\{x|x$는 14의 양의 약수$\}$,
$B=\{1,\ 14,\ a+2,\ b-3\}$
가 서로 같을 때, 자연수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

21 다음 보기 중 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 진부분집합인 것을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $\varnothing$
ㄴ. $\{x|x$는 5의 양의 약수$\}$
ㄷ. $\{x|x$는 6 미만의 자연수$\}$
ㄹ. $\{x|x$는 $0<x<4$인 자연수$\}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

22 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소 4, 6을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64개 일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

23 [2015년 9월 고2 이과 23번/3점]
전체집합 $U=\{x\ |\ x$는 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{x\ |\ x$는 4의 약수$\}$,
$B=\{x\ |\ x$는 12의 약수$\}$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

24 다음 조건을 만족하는 집합 X의 개수는?

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\cup X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$\{2,\ 4\}\cap X=\{2,\ 4\}$

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

25 자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$A_n = \{x \mid x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$

$A_n \subset A_{81}$을 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

26 원소의 개수가 3인 집합 S가 다음 조건을 모두 만족할 때, $\frac{1}{3}$과 1을 제외한 집합 S의 나머지 원소를 구하시오.

(가) $\frac{1}{3} \in S,\ 1 \in S,\ 0 \notin S$
(나) $p \in S,\ q \in S$이면 $pq \in S$ (단, $p \neq q$)

27 자연수를 원소로 갖는 집합 A가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 A의 개수는? (단, $A \neq \varnothing$)

$x \in A$이면 $\frac{16}{x} \in A$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

28 자연수 전체의 집합의 부분집합 A에 대하여 '$a \in A$이면 $\frac{81}{a} \in A$이다.'를 만족하는 집합 A의 개수를 구하시오. (단, $A \neq \varnothing$)

29 두 유한집합 $A,\ B$에 대하여 $A \subset B,\ A \neq B$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) < n(B)$
② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 가능한 집합 A의 개수는 8이다.
③ $n(B) = 3$이면 $n(A) = 1$이다.
④ $n(A) + 2 = n(B)$
⑤ $n(A) = n(B)$

30 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 부분집합 중 원소의 최솟값이 4인 부분집합의 개수를 구하시오.

31 집합 $A=\{x|2x^2-7x-4<0,\ x$는 정수$\}$에 대하여 $X \subset A,\ X \neq A,\ X \neq \varnothing$인 집합 X의 개수를 구하시오.

32 $\{2, 3\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$ 이고 원소의 개수가 4 개인 집합 X 의 원소들의 합은?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

33 서로 다른 세 자연수 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$를 원소로 하는 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 $B=\{x+y|x \in A,\ y \in A\}$라 하면 집합 B의 원소 중 최솟값은 8이고 최댓값은 24이다. $n(B)=5$일 때, b의 값을 구하시오.

34 집합 $A=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$의 부분집합 X에 대하여 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자.
집합 X가 다음 조건을 모두 만족할 때, $S(X)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\{1, 5, 9\} \subset X,\ \{5, 8, 10\} \not\subset X$
(나) $S(X)$의 값은 짝수이다.
(다) $n(X)=6$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (집합) 122~137p

집합의 개념과 표현 ~ 집합의 연산과 벤 다이어그램

실시일자	-	유형별 학습	이름
34문제 / DRE수학			

01 정답 ⑤

해설 ⑤ '나보다 착한 학생'은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이라고 할 수 없다.

02 정답 ④

해설 ①, ②, ③, ⑤ '잘하는', '작은', '소질이 있는', '가까운'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ④이다.

03 정답 ②

해설 집합 A의 원소는 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$이므로 옳은 것은 ②이다.

04 정답 ④

해설 ④ $3 \notin \{1,\ 5,\ 9\}$

05 정답 ④

해설 ① a는 집합 A의 원소이므로 $\{a\} \subset A$
② $\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b\} \notin A$
③ $b \notin A$이므로 $\{a,\ b\} \not\subset A$
④ $\{b,\ c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{b,\ c\} \in A$
⑤ $c \notin A$이므로 $\{c,\ d\} \not\subset A$

06 정답 ⑤

해설 ⑤ $\varnothing \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

07 정답 5

해설 집합의 포함 관계 이해하기
$5 \in A,\ A \subset B$이므로
$5 \in B$
$\therefore\ a = 5$

08 정답 ①

해설 ① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

09 정답 ③

해설 ③ $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \cdots\}$이므로 무한집합

10 정답 ⑤

해설 $\mathrm{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$ 이므로 ⑤는 A 의 진부분집합이 아니다.

11 정답 ①

해설 $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$에서
$(x+2)(x+1)(x-1) = 0$
$\therefore\ x = -2$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 1$
즉, $A = \{-2,\ -1,\ 1\}$이므로 $-2 \in A$
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

12 정답 ③

해설 ① $\{\varnothing\} \not\subset \varnothing$
② $A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 $A \subset B$이면 $\{1,\ 5\} \not\subset B$
④ $\{a,\ b,\ c,\ e\} \not\subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}$
⑤ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 홀수$\}$이면 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \not\subset A$
따라서 옳은 것은 ③이다.

13 정답 ⑤

해설 집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 생각하여 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4,\ n(B) = 3$이므로
$n(A) - n(B) = 1$

14 정답 ②

해설 $3a+2b \leq 10$을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$이므로
$2a-b$의 값은 $1, 0, -1, 3, 2$이다.
$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
따라서 집합 A와 같은 것은 ②이다.

15 정답 2

해설 $n(\varnothing)=0$, $n(\{0\})=1$, $n(\{\varnothing\})=1$
$n(\varnothing)+n(\{0\})+n(\{\varnothing\})=2$

16 정답 13

해설 $4ax+3x+7=-5x+3b-2$에서
$(4a+8)x=3b-9$
집합 S가 무한집합이 되려면 위의 방정식의 해가 무수히 많아야 하므로
$4a+8=0$, $3b-9=0$
$\therefore a=-2, b=3$
$\therefore a^2+b^2=13$

17 정답 ④

해설 $B=\{1, 3, 5, 7\}$, $C=\{1, 3\}$
따라서 $C\subset B\subset A$의 포함관계가 성립한다.

18 정답 ②

해설 ② $N\subset Q\subset R$

19 정답 ④

해설 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$
$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 5, a+1, b\}$에서 $3\in A$, $15\in A$이므로 $3\in B$, $15\in B$이어야 한다.
(i) $a+1=3$, $b=15$일 때
$a=2$, $b=15$
$\therefore a+b=2+15=17$
(ii) $a+1=15$, $b=3$인 경우
$a=14$, $b=3$
$\therefore a+b=14+3=17$
(i), (ii)에 의하여 $a+b=17$

20 정답 ⑤

해설 $A=\{1, 2, 7, 14\}$, $B=\{1, 14, a+2, b-3\}$이고
$A=B$이므로
$a+2=2$, $b-3=7$ 또는 $a+2=7$, $b-3=2$
$\therefore a=0$, $b=10$ 또는 $a=5$, $b=5$
그런데 a, b는 자연수이므로 $a=5$, $b=5$
$\therefore ab=25$

21 정답

해설 ㄱ. $\varnothing\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\varnothing\neq\{1, 2, 3, 4, 5\}$
ㄴ. $\{x|x$는 5의 양의 약수$\}=\{1, 5\}$이므로
$\{1, 5\}\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$\{1, 5\}\neq\{1, 2, 3, 4, 5\}$
ㄷ. $\{x|x$는 6 미만의 자연수$\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
ㄹ. $\{x|x$는 $0<x<4$인 자연수$\}=\{1, 2, 3\}$이므로
$\{1, 2, 3\}\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$\{1, 2, 3\}\neq\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 진부분집합인 것은
ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

22 정답 8

해설 집합 A의 원소의 개수가 n개이므로 원소 4, 6을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2}(개)이다.
$2^{n-2}=64$, $2^{n-2}=2^6$
$n-2=6$이므로 $n=8$

23 정답 8

해설 집합의 포함관계 이해하기
$\{1, 2, 4\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^3=8$

24 정답 ④

해설 $\{1, 2, 3, 4, 5\}\cup X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$X\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{2, 4\}\cap X=\{2, 4\}$이므로 $\{2, 4\}\subset X$
즉, X는 원소 2, 4를 반드시 포함하는
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이다.
따라서 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소 2, 4를 제외한 $\{1, 3, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^{5-2}=2^3=8$

25 정답 120

해설 $A_{81}=\{x|x$는 $\sqrt{81}$ 이하의 홀수$\}$에서
$\sqrt{81}=9$이므로
$A_{81}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A_n=\{x|x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$에서 $A_n \subset A_{81}$을
만족시키려면 $\sqrt{n}<11$이어야 한다.
이때 n은 자연수이므로
$1 \leq \sqrt{n}<11$
$\therefore 1 \leq n<121$
따라서 자연수 n의 최댓값은 120이다.

26 정답 3

해설 집합 S의 원소가 3개이므로
$S=\left\{\frac{1}{3}, 1, a\right\}$ $\left(a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}, a \neq 1\right)$라 하자.
조건 (나)에 의하여 $\frac{1}{3}a \in S$이므로
$\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}a=1$ 또는 $\frac{1}{3}a=a$
$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=0$
그런데 $a \neq 0, a \neq 1$이므로 $a=3$
따라서 $S=\left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}$이므로
$\frac{1}{3}$과 1을 제외한 집합 S의 나머지 원소는 3이다.

27 정답 ④

해설 $1 \in A$이면 $\frac{16}{1}=16 \in A$
$2 \in A$이면 $\frac{16}{2}=8 \in A$
$4 \in A$이면 $\frac{16}{4}=4 \in A$
따라서 집합 A는 $\{4\}, \{1, 16\}, \{2, 8\}, \{1, 4, 16\}$,
$\{2, 4, 8\}, \{1, 2, 8, 16\}, \{1, 2, 4, 8, 16\}$의 7개이다.

28 정답 7

해설 a, $\frac{81}{a}$이 모두 자연수이므로 a는 81의 양의 약수이다.
즉, 집합 A의 원소가 될 수 있는 수는
1, 3, 9, 27, 81이다.
(ⅰ) 집합 A의 원소의 개수가 1일 때,
집합 A는 $\{9\}$의 1개이다.
(ⅱ) 집합 A의 원소의 개수가 2일 때,
집합 A는 $\{1, 81\}, \{3, 27\}$의 2개이다.
(ⅲ) 집합 A의 원소의 개수가 3일 때,
집합 A는 $\{1, 9, 81\}, \{3, 9, 27\}$의 2개이다.
(ⅳ) 집합 A의 원소의 개수가 4일 때,
집합 A는 $\{1, 3, 27, 81\}$의 1개이다.
(ⅴ) 집합 A의 원소의 개수가 5일 때,
집합 A는 $\{1, 3, 9, 27, 81\}$의 1개이다.
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 집합 A의 개수는
$1+2+2+1+1=7$

29 정답 ①

해설 ① A는 B의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A)+1$이다.
따라서 $n(A)<n(B)$가 된다.
② $B=\{1, 2, 3\}$일 때, 가능한 집합 A는 집합 B의
진부분집합이므로 $2^3-1=7$(개)
③ A는 B의 진부분집합이므로 $n(B)=3$이면
$n(A) \leq 2$이다.
④, ⑤ A는 B의 진부분집합이므로 $n(A)<n(B)$이다.

30 정답 32

해설 원소의 최솟값이 4이려면 4 미만의 원소를 갖지 않고,
원소 4를 포함하는 부분집합이므로 원소 1, 2, 3을
포함하지 않고, 원소 4를 반드시 포함하는 부분집합의
개수와 같다.
$\therefore 2^{9-4}=2^5=32$

31 정답 14

해설 $2x^2-7x-4<0$에서
$(2x+1)(x-4)<0$
$\therefore -\frac{1}{2}<x<4$, 즉 $A=\{0, 1, 2, 3\}$
이때 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을
제외한 것이므로 그 개수는
$2^4-1-1=14$

32 정답 ①

해설 $\{2, 3\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

원소로 2, 3 을 포함하는 $\{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합을 구하면 된다.

원소 2, 3 을 제외한 $\{5, 7\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{5, 7\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합에는 $\{2, 3\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 원소의 합은 $2+3+5+7=17$ 이다.

33 정답 8

해설 $a<b<c$이므로 집합 B의 원소 중 최솟값은
$a+a=2a$, 최댓값은 $c+c=2c$이다.
즉, $2a=8$, $2c=24$이므로 $a=4$, $c=12$
따라서 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x \ y	4	b	12
4	8	$4+b$	16
b	$4+b$	$2b$	$12+b$
12	16	$12+b$	24

$4<b<12$이므로
$8<4+b<2b<12+b<24$,
$8<4+b<16<12+b<24$
이때 $n(B)=5$이므로
8, $4+b$, $2b$, 16, $12+b$, 24 중 2개가 같은 수이어야 한다.
따라서 $2b=16$이므로 $b=8$

34 정답 38

해설 조건 (가)에서 $\{1, 5, 9\} \subset X$이므로
$1 \in X$, $5 \in X$, $9 \in X$ $\cdots$ ㉠
또, $\{5, 8, 10\} \not\subset X$이므로
$8 \notin X$ 또는 $10 \notin X$ $\cdots$ ㉡
조건 (다)에서 $n(X)=6$이므로
㉠에 의하여 집합 X는 집합 A의 원소 중 1, 5, 9를 제외한 3개의 원소를 더 갖는다.
이때 $1+5+9=15$는 홀수이고
조건 (나)에서 $S(X)$의 값이 짝수이므로 나머지 3개의 합은 홀수이다.
3개의 수의 합이 홀수가 되는 경우는 짝수가 2개, 홀수가 1개 또는 홀수가 3개일 때이므로
㉡을 만족시키면서 $S(X)$가 최대가 되는 경우는
$6 \in X$, $7 \in X$, $10 \in X$
따라서 $X=\{1, 5, 6, 7, 9, 10\}$일 때, $S(X)$가 최대가 되므로 $S(X)$의 최댓값은
$1+5+6+7+9+10=38$

마플시너지(2025) - 공통수학2 140~168p

집합의 연산과 벤 다이어그램

실시일자	-
37문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 집합 $A=\{2,\ x,\ 8\}$, $B=\{1,\ 4,\ x+3\}$에 대하여 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8\}$일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

02 다음 중 두 집합 A, B가 서로소인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A=\{1,\ 3,\ 7\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
② $A=\varnothing$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
③ $A=\{x\,|\,x$는 짝수인 자연수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 10 미만의 소수$\}$
④ $A=\{x\,|\,x$는 3의 양의 배수$\}$,
$B=\{x\,|\,x=2^n$, n은 자연수$\}$
⑤ $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$,
$B=\{x\,|\,|x|>1$, x는 정수$\}$

03 다음 중 집합 $\{1,\ 6,\ 7\}$과 서로소가 아닌 집합은?

① $\varnothing$
② $\{-7,\ -6,\ -1\}$
③ $\{1,\ 5,\ 7\}$
④ $\{x\,|\,x$는 5의 음의 약수$\}$
⑤ $\{x\,|\,x$는 4의 양의 배수$\}$

04 세 집합 $A=\{x\,|\,x$는 4의 약수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 24의 약수$\}$,
$C=\{x\,|\,x$는 10 이상 20 미만의 자연수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (정답 2개)

① $A\cap B\cap C=\{4\}$
② $A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 24\}$
③ $A\cap(B\cup C)=\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $(A\cup B)\cap C=\{1,\ 2,\ 4,\ 12\}$
⑤ $(A\cup B)\cap C=\{12\}$

05 [2019년 6월 고3 문과 3번 변형]
두 집합 $A=\{3,\ 4,\ a\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 $A\cup B=\{1,3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$일 때, 실수 a의 값은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

06 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $B \subset U^C$　② $U \cap B^C = A$
③ $A^C \cap B = \varnothing$　④ $U - B^C = B$
⑤ $(A \cup B) \subset (A \cap B)$

07 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $B \subset A$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cup B = B$　② $A \cap B = A$　③ $B - A = B$
④ $A \cup B^C = U$　⑤ $B^C \subset A^C$

08 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$일 때, $B^c - A^c$은?

① $\{3\}$　② $\{3, 5\}$　③ $\{4\}$
④ $\{4, 5\}$　⑤ $\{4, 5, 6\}$

09 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A - B = \{1, 5\}$
② $B^c = \{1, 5, 6, 7\}$
③ $A \cap B = \{3\}$
④ $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$
⑤ $B - A^c = \{3\}$

10 $U = \{x \mid x$는 10이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여
$A - B = \{2, 4\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{1, 6, 7, 9\}$
일 때, 집합 B는?

① $\{3, 5\}$　② $\{5, 7\}$
③ $\{3, 5, 8\}$　④ $\{3, 5, 10\}$
⑤ $\{3, 5, 8, 10\}$

11 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A^c - B^c = \{4, 6\}$, $(A \cup B) \cap B = \{1, 3, 4, 6\}$, $A^c \cap B^c = \{5, 7\}$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오.

12 [2024년 3월 고2 11번(3점)]
전체집합 $U=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cap B=\{2, 8\}$
(나) $A^{C}\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$

집합 A의 모든 원소의 합은?

① 26 ② 31 ③ 36
④ 41 ⑤ 46

13 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 $A\cap(B-A)^{C}$과 항상 같은 집합은?

① $(A\cap B)\cup A$ ② $A-(A\cap B)$
③ $(A\cup B)-A$ ④ $(A\cup B)-(A-B)$
⑤ $B\cap(B-A)^{C}$

14 전체집합 $U=\{x|x$는 15보다 작은 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여
$A\cup B=U$, $A-(A\cap B)^{C}=A$를 만족시킬 때, 집합 B의 원소의 개수를 구하시오.

15 전체집합 U의 서로 다른 두 부분집합 A, B에 대하여 $B^{C}\subset A^{C}$일 때, 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

① $A\cap B$ ② $A\cap(A\cup B)$
③ $(A\cap B)\cap B$ ④ $A\cup(B-A)$
⑤ $(A\cup B)\cap(A\cap B)$

16 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x|x$는 9의 약수$\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $7\not\in A\cap B$
ㄴ. $n(B-A)=2$
ㄷ. U의 부분집합 중 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합의 개수는 64이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=20$, $n(B)=15$, $n(A\cap B)=6$일 때, $n(A-B)+n(B-A)$의 값을 구하시오.

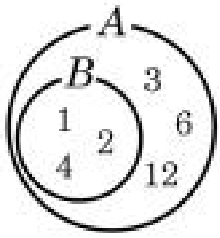
18 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는? (단, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$)

① $(A^C - B)^C$　② $(U - B^C) \cup A$
③ $A \cap (A^C \cup B)$　④ $(A \cup A^C) \cap (A \cup B)$
⑤ $(B^C)^C \cup (U \cap A^C)^C$

19 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 $A \cup (B - A^C)$와 항상 같은 집합은?

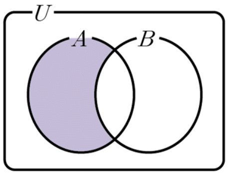
① A　② B　③ $A \cup B$
④ $A \cap B$　⑤ $A - B$

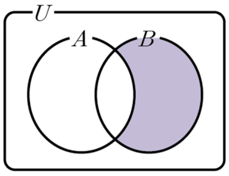
20 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2개)

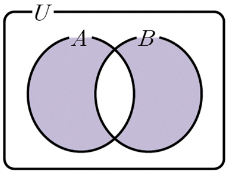


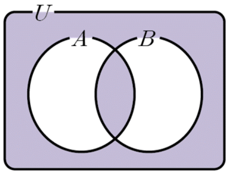
① A={3, 6, 12}
② B={1, 2, 4}
③ A⊂B
④ A∩B=A
⑤ A∪B=A

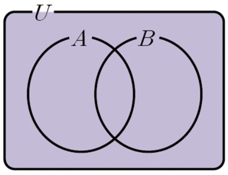
21 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 집합 $\{(A\cap B^C)\cup B\}\cap(A^C\cap B)$를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


22 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 다음 중 $(A_6\cup A_{12})\cap(A_9\cup A_{18})$과 같은 집합은?

① A_3　② A_6　③ A_9

④ A_{12}　⑤ A_{18}

23 두 집합 $A=\{x\,|\,|x-2|<a\}$, $B=\{x\,|\,x^2-5x-14<0\}$에 대하여 $A\cap B=B$일 때, 양수 a의 최솟값을 구하시오.

24 두 집합

$$A=\{x\,|\,x^2-4=0\},\ B=\{x\,|\,x^2-ax+2=0\}$$

에 대하여 $A-B=\{-2\}$일 때, 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

25 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U)=50$, $n(A)=25$, $n(B)=30$일 때, $n(B-A)$의 최솟값을 구하시오.

26 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=30$, $n(B)=49$일 때, $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.

27 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a+1\}$, $B=\{a^2-3a-20,\ a+5\}$에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 2,\ b\}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

28 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 7 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 6\}$, $B=\{2,\ 5,\ 6\}$에 대하여 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

29 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$, $B=\{1,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 $A\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$를 만족시키는 집합 X의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

30 어느 학급의 학생 40명을 대상으로 A, B, C 회사의 휴대전화 사용 여부를 조사하였더니 A, B, C 회사의 휴대전화를 사용해 본 학생이 각각 22명, 16명, 18명이었고, A, B, C 회사의 휴대전화를 모두 사용해 본 적이 없는 학생이 8명이었다. 세 회사의 휴대전화를 모두 사용해 본 학생이 없다고 할 때, 두 회사의 휴대전화만을 사용해 본 학생 수를 구하시오.

31 지우네 학년 60명의 학생을 대상으로 간염, 독감, 파상풍의 세 백신 주사의 접종자 수를 조사하였다. 간염 백신 주사를 맞은 학생은 20명, 독감 백신 주사를 맞은 학생은 26명, 파상풍 백신 주사를 맞은 학생은 30명이고, 세 백신을 모두 접종한 학생은 6명, 세 백신 주사 중 어느 것도 접종하지 않은 학생은 3명이었다. 이때 세 백신 주사 중 두 백신 주사만 접종한 학생 수를 구하시오.

32 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A^C - B^C = B - A$
② $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$
③ $(A - B)^C = A^C \cup B$
④ $A \cup B = U$ 이면 $B^C \subset A$
⑤ $(A - B^C) - C = A \cap (B^C - C)$

33 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 두 부분집합 A, B가 $A=\{x \mid x\text{는 홀수}\}$, $B=\{x \mid x\text{는 3의 배수}\}$일 때, 집합 $A^c \cap B$의 원소의 개수는?

① 12개 ② 16개 ③ 24개
④ 28개 ⑤ 32개

34 두 집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$라 정의할 때, 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $A \triangle B = B \triangle A$
② $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
③ $A \triangle A = \varnothing$ 이고 $A \triangle \varnothing = A$ 이다.
④ $A \triangle A \triangle A \triangle \cdots \triangle A = \varnothing$
⑤ $A \triangle B = C$이면 $B = A \triangle C$이다.

35 세 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B=\{x \mid x\text{는 10 이하의 소수}\}$,
$C=\{2n \mid 1 \le n \le 5,\ n\text{은 자연수}\}$에 대하여
$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$로 정의할 때,
집합 $(A \triangle B) \triangle C$의 모든 원소의 합을 구하시오.

36 어느 귀금속 매장을 방문한 고객 50명 중에서 반지를 착용한 고객이 19명, 목걸이를 착용한 고객이 23명, 반지와 목걸이 중 어느 것도 착용하지 않은 고객이 a명이다. 이때 a의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 $M+m$의 값을 구하시오.

37 어느 학급 학생 36명을 대상으로 지난 토요일과 일요일에 축구 경기를 시청한 학생 수를 조사하였다. 그 결과 토요일에 시청한 학생은 25명, 일요일에 시청한 학생은 17명이었다. 토요일과 일요일 모두 시청한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

마플시너지(2025) - 공통수학2 140~168p

집합의 연산과 벤 다이어그램

실시일자	-
37문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** 4

해설 $2 \in A$, $8 \in A$, $1 \in B$, $4 \in B$이고
$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$이므로 $7 \in A$ 또는 $7 \in B$이다.
$x = 7$이면 $A = \{2, 7, 8\}$, $B = \{1, 4, 10\}$이고
$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$x + 3 = 7$이면 $A = \{2, 4, 8\}$, $B = \{1, 4, 7\}$이고
$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$이므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $x + 3 = 7$이므로
$x = 4$

02 **정답** ②, ④

해설 ① $A \cap B = \{7\}$
② $A \cap B = \varnothing$
③ $A = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A \cap B = \{2\}$
④ $A = \{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $B = \{2, 4, 8, 16, \cdots\}$
이므로 $A \cap B = \varnothing$
⑤ $|x| > 1$에서 $x < -1$ 또는 $x > 1$이므로
$B = \{\cdots, -3, -2, 2, 3, \cdots\}$
$\therefore A \cap B = \{-2, 2\}$
따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ②, ④이다.

03 **정답** ③

해설 ③ $\{1, 6, 7\} \cap \{1, 5, 7\} = \{1, 7\}$
따라서 집합 $\{1, 6, 7\}$과 서로소가 아니다.

04 **정답** ①, ④

해설 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
① $A \cap B \cap C = \varnothing$
④ $(A \cup B) \cap C = \{12\}$
따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

05 **정답** ③

해설 $8 \notin B$, $8 \in A \cup B$이므로 $8 \in A$이어야 한다.
$\therefore a = 8$

06 **정답** ④

해설 ① $U^C = \varnothing$이므로 $U^C \subset B$
② $U \cap B^C = B^C$
③ $A^C \cap A = \varnothing$ 또는 $B^C \cap B = \varnothing$
⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

07 **정답** ④

해설 $B \subset A$이므로
① $A \cup B = A$
② $A \cap B = B$
③ $B - A = \varnothing$
④ $A \cup B^C = U$
⑤ $A^C \subset B^C$

08 **정답**

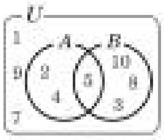
해설 $B^c - A^c = A - B = \{3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$이다.

09 **정답** ④

해설 ④ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이다.

10 정답 ⑤

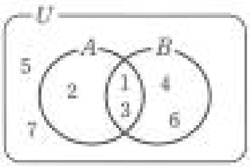
해설 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $(A^c \cap B^c)=$
$(A \cup B)^c=\{1, 6, 7, 9\}$ 이므로



따라서 $B=\{3, 5, 8, 10\}$ 이다.

11 정답 6

해설 $A^c-B^c=A^c\cap(B^c)^c$
$=A^c\cap B$
$=B-A=\{4, 6\}$
$(A\cup B)\cap B=B$
$=\{1, 3, 4, 6\}$
$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$
$=\{5, 7\}$
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로
집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+2+3=6$

12 정답 ⑤

해설 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 모든 원소의 합을 구한다.
조건 (나)에서 $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$이고 드모르간의 법칙에 의하여 $A\cap B^C=(A^C\cup B)^C$이므로
$A\cap B^C=(A^C\cup B)^C=\{4, 32\}$이다.
$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$
$=\{2, 8\}\cup\{4, 32\}$
$=\{2, 4, 8, 32\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$2+4+8+32=46$

13 정답 ①

해설 $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C$
$=A\cap\{(A^C)^C\cup B^C\}$
$=A\cap(A\cup B^C)$
$=(A\cap A)\cup(A\cap B^C)$
$=A\cup(A\cap B^C)=A$

① $(A\cap B)\subset A$이므로 $(A\cap B)\cup A=A$
② $A-(A\cap B)=A-B$
③ $(A\cup B)-A=B-A$
④ $(A\cup B)-(A-B)=(A\cup B)-(A\cap B^C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$
$=(A\cap A^C)\cup B=\varnothing\cup B$
$=B$
⑤ $B\cap(B-A)^C=B\cap(B\cap A^C)^C$
$=B\cap\{B^C\cup(A^C)^C\}$
$=B\cap(B^C\cup A)$
$=(B\cap B^C)\cup(B\cap A)$
$=\varnothing\cup(B\cap A)=B\cap A$
$=A\cap B$

14 정답 14

해설 $A-(A\cap B)^C=A\cap B=A$에서
$A\subset B$
따라서 $A\cup B=B=U$이므로
집합 B의 원소의 개수는 14이다.

15 정답 ④

해설 $B^C\subset A^C$이면 $A\subset B$
① $A\cap B=A$
② $A\cap(A\cup B)=A\cap B=A$
③ $(A\cap B)\cap B=A\cap B=A$
④ $A\cup(B-A)=B$
⑤ $(A\cup B)\cap(A\cap B)=B\cap A=A$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

16 정답 ②

해설 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{1, 3, 9\}$

ㄱ. $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 $7\not\in A\cap B$

ㄴ. $B-A=\{5, 7\}$이므로 $n(B-A)=2$

ㄷ. $A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합은 전체집합 U의 부분집합 중에서 $1, 3, 5, 7, 9$를 원소로 갖지 않는 집합이다.
즉, $A\cup B$와 서로소인 집합의 개수는 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^5=32$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 정답 23

해설 $n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$이다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+15-6=29$이므로

$n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=29-6=23$이다.

18 정답 ③

해설 ① $(A^C-B)^C=(A^C\cap B^C)^C=A\cup B$

② $(U-B^C)\cup A=(U\cap(B^C)^C)\cup A$
$=(U\cap B)\cup A$
$=A\cup B$

③ $A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$
$=\varnothing\cup(A\cap B)$
$=A\cap B$

④ $(A\cup A^C)\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)$
$=A\cup B$

⑤ $(B^C)^C\cup(U\cap A^C)^C=B\cup(A^C)^C=A\cup B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

19 정답 ①

해설 $A\cup(B-A^C)$

$=A\cup(B\cap A)$

$=A$

20 정답 ②, ⑤

해설 ① 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 A = {1, 2, 3, 4, 6, 12} 이다.

③ 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 B⊂A 이다.

④ A∩B = B 이다.

21 정답 ②

해설 $\{(A\cap B^C)\cup B\}\cap(A^C\cap B)$

$=\{(A\cup B)\cap(B^C\cup B)\}\cap(A^C\cap B)$

$=\{(A\cup B)\cap U\}\cap(A^C\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(B-A)$

$=B-A$

22 정답 ⑤

해설 $A_6=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$,

$A_9=\{9, 18, 27, 36, \cdots\}$,

$A_{12}=\{12, 24, 36, 48, \cdots\}$,

$A_{18}=\{18, 36, 54, \cdots\}$이므로

$(A_6\cup A_{12})\cap(A_9\cup A_{18})=A_6\cap A_9=A_{18}$

23 정답 5

해설 $A=\{x\,|\,|x-2|<a\}=\{x\,|\,-a<x-2<a\}$

$=\{x\,|\,(-a+2)<x<(a+2)\}$

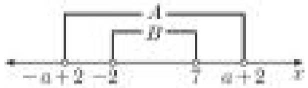
$B=\{x\,|\,x^2-5x-14<0\}$

$=\{x\,|\,(x+2)(x-7)<0\}$

$=\{x\,|\,-2<x<7\}$

$A\cap B=B$, 즉 $B\subset A$이므로 다음 그림에서

$-a+2\le -2$, $7\le a+2$



즉, $a\ge 4$, $a\ge 5$

$\therefore a\ge 5$

따라서 양수 a의 최솟값은 5이다.

24 정답 1

해설 $x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 $A=\{-2,\ 2\}$

$A-B=\{-2\}$이므로 집합 B는 2를 원소로 갖는다.

방정식 $x^2-ax+2=0$의 한 근이 2이므로

$2^2-2a+2=0 \quad \therefore\ a=3$

방정식 $x^2-ax+2=0$에 $a=3$을 대입하면

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $A\cup B=\{-2,\ 1,\ 2\}$이므로 모든 원소의 합은

$-2+1+2=1$

25 정답 5

해설 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(B-A)$의 최솟값은 $n(A\cap B)$가 최댓값을 가질 때이다.

$n(A\cap B)\le n(A),\ n(A\cap B)\le n(B)$이므로

$n(A\cap B)\le 25$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값이 25이므로 $n(B-A)$의 최솟값은

$30-25=5$

26 정답 30

해설 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이므로 최댓값은

$n(A)+n(B)=30+49=79$

$A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이므로 최솟값은

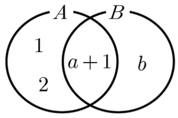
$n(B)=49$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$79-49=30$

27 정답 ③

해설 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $(a+1)\in A\cap B$이므로 $a+1$은 B의 원소이다.

이때 $a+1\neq a+5$이므로

$a+1=a^2-3a-20$

$a^2-4a-21=0,\ (a-7)(a+3)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=7$

(ⅰ) $a=-3$일 때,

$A=\{-2,\ 1,\ 2\},\ B=\{-2,\ 2\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1\}$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=7$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 8\},\ B=\{8,\ 12\}$이므로

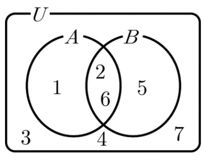
$(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 2,\ 12\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=7,\ b=12$이므로

$a+b=19$

28 정답 104

해설 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같고 $A\cap B=\{2,\ 6\}$이다.



(ⅰ) $2\in X$ 또는 $6\in X$인 경우

$X\cap A\neq\varnothing,\ X\cap B\neq\varnothing$이므로

집합 X의 개수는 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 2 또는 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2\cdot 2^6-2^5=128-32=96$

(ⅱ) $2\notin X$이고 $6\notin X$인 경우

2와 6을 제외한 집합 A의 원소는 1이고,

2와 6을 제외한 집합 B의 원소는 5이므로

$X\cap A\neq\varnothing,\ X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키기 위해서는

1, 5 모두 집합 X의 원소이어야 한다.

집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 3과 4와 7을 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X의 개수는

$2^3=8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 집합 X의 원소의 개수는

$96+8=104$

29 **정답** ③

해설 $(A-B)\subset X\subset A$

즉, $\{3, 5\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 8\}$이므로

집합 X의 개수는

$2\cdot2\cdot2=8$

30 **정답** 24

해설 학생 전체의 집합을 U, A, B, C 회사의 휴대전화를 사용해 본 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=22$, $n(B)=16$, $n(C)=18$,

$n((A\cup B\cup C)^C)=8$, $n(A\cap B\cap C)=0$이고,

$$\begin{aligned}n((A\cup B\cup C)^C)&=n(U)-n(A\cup B\cup C)\\&=40-n(A\cup B\cup C)\\&=8\end{aligned}$$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=40-8=32$

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}\\&\quad+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}32&=22+16+18\\&\quad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}+0\end{aligned}$$

$\therefore \{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$

$=22+16+18-32=24$

따라서 두 회사의 휴대전화만을 사용해 본 학생은 24명이다.

31 **정답** 7

해설 전체 학생의 집합을 U, 간염, 독감, 파상풍의 세 백신을 접종한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=60$, $n(A)=20$, $n(B)=26$, $n(C)=30$,

$n(A\cap B\cap C)=6$, $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=3$

이때 여집합의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}n(A^C\cap B^C\cap C^C)&=n((A\cup B\cup C)^C)\\&=n(U)-n(A\cup B\cup C)\end{aligned}$$

$3=60-n(A\cup B\cup C)$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=57$

또한, $n(A\cup B\cup C)$의 값은

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)\\&\quad-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}57&=20+26+30-n(A\cap B)-n(B\cap C)\\&\quad-n(C\cap A)+6\end{aligned}$$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=25$

따라서 세 백신 주사 중 두 백신 주사만 접종한 학생 수는

$$\begin{aligned}&n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\\&\quad-3\cdot n(A\cap B\cap C)\\&=25-3\cdot6=7\end{aligned}$$

32 **정답** ⑤

해설 ① $A^C-B^C=A^C\cap(B^C)^C$

$=A^C\cap B=B-A$

② $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

③ $(A-B)^C=(A\cap B^C)^C=A^C\cup B$

④ $A\cup B=U$이면 $A^C\subset B$, $B^C\subset A$

⑤ $(A-B^C)-C=\{A\cap(B^C)^C\}\cap C^C$

$=(A\cap B)\cap C^C$

$=A\cap(B\cap C^C)$

$=A\cap(B-C)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

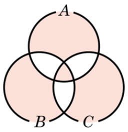
33 **정답** ②

해설 $A^c\cap B=B\cap A^c=B-A$, $B-A$: 3의 배수 중 짝수

따라서 $B-A$ 는 6의 배수이므로 원소는 16개

34 정답 ④

해설 ② 벤 다이어그램으로 그려 보면 좌, 우변이 모두 다음과 같은 그림으로 그려진다.



④ (i) A가 짝수개 있을 때

$(A\triangle A)\triangle(A\triangle A)\triangle\cdots\triangle(A\triangle A)$

$=\varnothing\triangle\varnothing\triangle\cdots\triangle\varnothing=\varnothing$

(ii) A가 홀수개 있을 때

$\underbrace{(A\triangle A\triangle\cdots\triangle A)}_{\text{짝수개}}\triangle A=\varnothing\triangle A=A$

⑤ $A\triangle B=C$이므로 $A\triangle(A\triangle B)=A\triangle C$이다.

이때 (좌변)$=(A\triangle A)\triangle B=\varnothing\triangle B=B$

$\therefore B=A\triangle C$

따라서 성립하지 않는 것은 ④이다.

35 정답 34

해설 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$,

$C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{1, 4\}\cup\{7\}$

$=\{1, 4, 7\}$

이때 $A\triangle B=D$라고 하면

$(A\triangle B)\triangle C=D\triangle C$

$=(D-C)\cup(C-D)$

$=\{1, 7\}\cup\{2, 6, 8, 10\}$

$=\{1, 2, 6, 7, 8, 10\}$

따라서 집합 $(A\triangle B)\triangle C$의 모든 원소의 합은

$1+2+6+7+8+10=34$

36 정답 35

해설 고객 전체의 집합을 U, 반지를 착용한 고객의 집합을 A, 목걸이를 착용한 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=19$, $n(B)=23$

반지와 목걸이 중 어느 것도 착용하지 않은 고객 수는

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=50-19-23+n(A\cap B)$

$=8+n(A\cap B)$

이때 $n(A\cap B)$의 최댓값이 19, 최솟값이 0이므로

$M=8+19=27$, $m=8+0=8$

$\therefore M+m=35$

37 정답 ⑤

해설 학급 학생 전체의 집합을 U, 토요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 A, 일요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 B라고 하면

$n(A)=25$, $n(B)=17$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

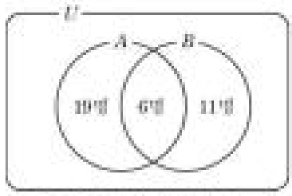
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+17-n(A\cup B)$

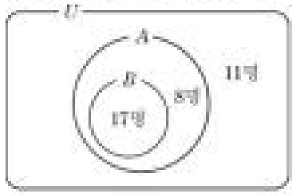
$=42-n(A\cup B)$

$n(A\cup B)$의 최댓값은 학급 학생 전체 인원 수인 36이고, 최솟값은 $A\cup B=A$일 때의 인원 수인 25이다.

그러므로 $n(A\cap B)$의 최솟값 m은 $n(A\cup B)$가 최대인 경우이므로 $m=42-36=6$



$n(A\cap B)$의 최댓값 M은 $n(A\cup B)$가 최소인 경우이므로 $M=42-25=17$



따라서 $M+m=17+6=23$

마플시너지(2025) - (명제) 공통수학2 173~196p

명제와 조건 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 명제인 것을 모두 고르면? (정답 3개)

① 4는 12의 약수이다.
② $x+y=10$
③ $|-3|=-3$
④ $x=2$일 때, $x-1>0$이다.
⑤ x는 무리수이다.

02 다음 중 거짓인 명제인 것은?

① $\sqrt{4}$는 유리수이다.
② $5-3x>-3x+2$
③ 짝수는 모두 소수가 아니다.
④ $2x+1<2x^2$
⑤ 1.9999는 2에 가까운 수이다.

03 조건 '$x \notin A$이고 $x \notin B$'의 부정은?

① $x \notin A$이고 $x \notin B$　② $x \in A$ 또는 $x \in B$
③ $x \notin A$ 또는 $x \in B$　④ $x \in A$ 또는 $x \notin B$
⑤ $x \notin A$ 또는 $x \notin B$

04 a, b, c가 실수일 때, '$a^2+b^2+c^2=0$이다'의 부정은?

① $a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $c=0$
② $abc \neq 0$
③ $a \neq b \neq c$
④ a, b, c 모두 0이 아니다.
⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0이 아니다.

05 전체집합 U가 정수 전체의 집합일 때,
두 조건 $p : x^2+2x-15<0$, $q : 3x+5>0$
의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
이때 $n(P \cap Q^C)$의 값을 구하시오.

06 [2023년 3월 고2 2번/2점]
실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의 진리집합은?

① $\{x \mid x<0\}$　② $\{x \mid x \leq 0\}$　③ $\{x \mid x \neq 0\}$
④ $\{x \mid x \geq 0\}$　⑤ $\{x \mid x>0\}$

07 다음 보기의 명제 중 참인 것의 개수를 구하시오.

〈보기〉

ㄱ. $x=1$이면 $x^2+x+1=3$이다.
ㄴ. x가 12의 배수이면 x는 6의 배수이다.
ㄷ. 자연수 n이 홀수이면 n^2은 짝수이다.
ㄹ. 실수 a, b에 대하여 $a<b$이면 $ac<bc$이다.

08 다음 중 거짓인 명제는?

① 두 자연수의 합은 자연수이다.
② 평행사변형은 사다리꼴이다.
③ 자연수 a가 홀수이면 $3a$는 홀수이다.
④ $x=-2$이면 $-2x+3=-1$
⑤ 두 홀수의 합은 항상 짝수이다.

09 명제 '$x>\sqrt{3}$ 이면 $x \geq \sqrt{7}$ 이다.'는 거짓임을 보여 주는 반례가 될 수 있는 것은?

① 1　② $\sqrt{3}$
③ 2　④ $\sqrt{7}$
⑤ π

10 두 조건 p, q가
'$p: -2 \leq x \leq 2$', '$q: 0 \leq x \leq 3$'
일 때, 명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소의 집합은?

① $\{x|x<-2\}$　② $\{x|-2 \leq x<0\}$
③ $\{x|0 \leq x<2\}$　④ $\{x|2 \leq x<3\}$
⑤ $\{x|x>3\}$

11 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sim q$의 진리집합은 Q^C이다.
② 명제 $\sim p \to q$가 참이면 $Q^C \subset P$이다.
③ $P \subset Q$이면 명제 $p \to q$는 참이다.
④ $Q \neq \varnothing$이면 '어떤 x에 대하여 q이다.'는 참이다.
⑤ $P \neq U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

12 두 조건 p, q를 만족시키는 집합을 각각 P, Q라 하고 $P \cap Q = P$일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to \sim q$　② $q \to p$　③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

13 다음 중 거짓인 명제는?

① 어떤 짝수는 소수이다.
② 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+1 \geq 0$이다.
③ 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x>0$이다.
④ 어떤 실수 x에 대하여 $x^3<0$이다.
⑤ 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2>x$이다.

14 다음 조건을 p라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 p가 참인 것을 모두 고르면?

① $|x|=x$
② $x^2=1$
③ $(x-1)(x+1)=x^2-1$
④ $x^2 \geq 0$
⑤ $x^2+1>2x$

15 [2006년 9월 고1 6번]
두 조건 $p: a \leq x \leq 3$, $q: x \geq -2a-6$에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수 a 의 최솟값은?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

16 [2019년 10월 고3 문과 2번/2점]
실수 x에 대하여 명제
'$x-2=0$이면 $x^2-ax+a=0$이다.'
가 참일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17 [2017년 6월 고3 문과 12번 변형]
실수 a에 대하여 명제 '$a>2$이면 $a^3>8$이다.'의 대우는?

① $a<2$이면 $a^3<8$이다.
② $a \leq 2$이면 $a^3 \leq 8$이다.
③ $a^3<8$이면 $a<2$이다.
④ $a^3<8$이면 $a \leq 2$이다.
⑤ $a^3 \leq 8$이면 $a \leq 2$이다.

18 실수 x, y에 대하여 <보기>의 명제 중 그 대우가 참인 것을 있는 대로 고른 것은?

<보기>
ㄱ. $x=1$이면 $x^2=1$이다.
ㄴ. $|x|+y^2=0$이면 $x=y=0$이다.
ㄷ. x가 무한소수이면 x는 무리수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6\neq0$ 이면 $x\neq2$ 이다.'가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a\neq0$)

20 두 조건 $p:-a<x<a$, $q:x<-2$ 또는 $x>3$에 대하여 명제 $\sim p\rightarrow q$가 참일 때, 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

21 세 조건 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

명제 '$\sim p\rightarrow q$' 와 명제 ' (가) ' 가 모두 참이면 명제 '$r\rightarrow p$' 도 참이다.

다음 중 (가)에 들어갈 수 있는 명제는?

① $q\rightarrow r$ ② $r\rightarrow q$
③ $\sim r\rightarrow\sim q$ ④ $r\rightarrow\sim q$
⑤ $\sim q\rightarrow r$

22 세 조건 p, q, r에 대하여
$p\rightarrow\sim q$ 와 $\sim p\rightarrow r$ 가 참일 때,
다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $\sim r\rightarrow p$ ② $q\rightarrow\sim p$
③ $\sim r\rightarrow\sim q$ ④ $q\rightarrow r$
⑤ $q\rightarrow\sim r$

23 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 보기 중 $A\cup B=B$이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$ ㄴ. $A\cap B=A$
ㄷ. $B^C\subset A^C$ ㄹ. $U-A=B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄹ

24 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 보기 중 p가 q이기 위한 충분조건인 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

〈보기〉

ㄱ. $p:n(A)<n(B)$ $q:A\subset B$
ㄴ. $p:n(A)=n(B)$ $q:n(A-B)=0$
ㄷ. $p:A=B^C$ $q:A\cap B=\varnothing$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

25 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P-Q=\varnothing$　② $P\cap Q=Q$
③ $P\cap Q=P$　④ $P^C=Q$
⑤ $P=Q$

26 실수 전체의 집합 R에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. p가 $\sim p$ 또는 $\sim q$이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P\cup Q=R$　② $P^C\cap Q=\phi$
③ $P\cap Q^C=\phi$　④ $P^C\subset Q$
⑤ $P^C\supset Q$

27 [2017년 11월 고2 문과 26번 변형]
실수 x에 대한 두 조건 p, q가

$$p : x^2-9n^2<0,$$
$$q : x^2-12x+11=0$$

이다. p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

28 두 조건 $p : x>a$, $q : -4<x<3$에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건일 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오.

29 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r는 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $r\Rightarrow q$　② $q\Rightarrow \sim p$
③ $s\Rightarrow \sim q$　④ $\sim s\Rightarrow \sim p$
⑤ $\sim r\Rightarrow p$

30 세 조건 p, q, r에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고 r은 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 보기 중 참인 명제인 것만 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $p\rightarrow q$　ㄴ. $r\rightarrow \sim q$
ㄷ. $p\rightarrow r$　ㄹ. $\sim r\rightarrow p$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

31 다음은 명제 'x, y가 자연수일 때, xy가 짝수이면 x 또는 y가 짝수이다.'를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우는
> 'x, y가 자연수일 때, x, y가 모두 $\boxed{(가)}$이면 xy도 $\boxed{(가)}$이다.'이다.
> $x=2a-1$, $y=2b-1$ (a, b는 자연수)라 하면
> $xy=(2a-1)(2b-1)=2(2ab-a-b)+1$
> 이므로 xy는 $\boxed{(나)}$가 된다.
> 따라서 주어진 명제의 대우가 $\boxed{(다)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(다)}$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

32 'ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.'라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다. 이때 (가) ~ (라)에 알맞은 것은? (단, a, b는 정수이다.)

> 주어진 명제의 대우는
> 'a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.'
> a, b를 $a=2k+1$, $b=2l+1$ (단, k, l은 정수)로 놓으면
> $ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1$
> $\quad=2(2kl+k+l)+1$
> k, l이 정수이므로 $2kl+k+l$은 $\boxed{(가)}$이다.
> 따라서 ab는 $\boxed{(나)}$이다.
> 이때 주어진 명제의 대우가 $\boxed{(다)}$이므로 주어진 명제는 $\boxed{(라)}$이다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	짝수	정수	참	참
②	홀수	홀수	거짓	거짓
③	정수	홀수	참	참
④	홀수	짝수	거짓	거짓
⑤	정수	짝수	참	참

33 다음은 명제 '$x^2+y^2=7$을 만족시키는 두 양의 유리수 x, y는 존재하지 않는다.'를 증명하는 과정이다.

> $x^2+y^2=7$을 만족시키는 두 양의 유리수 x, y가 존재한다고 가정하면
>
> $x=\dfrac{m}{n}$, $y=\dfrac{p}{q}$
>
> (m과 n, p와 q는 각각 서로소인 자연수)
>
> 으로 나타낼 수 있다.
>
> 이때 $x^2+y^2=7$에서
>
> $\dfrac{m^2q^2}{n^2}=\boxed{(가)}-p^2$ $\cdots$ ㉠
>
> $\boxed{(가)}-p^2$은 정수이고 m과 n은 서로소이므로
>
> $q=kn$ (k는 정수)이어야 한다.
>
> 즉, ㉠에서 $(km)^2+p^2=\boxed{(가)}$이고
>
> $km=7a+r$, $p=7b+s$
>
> (a, b, r, s은 정수이고, $0\le r<7$, $0\le s<7$)
>
> 라 하면
>
> $(km)^2+p^2$
>
> $=7(7a^2+2ar+7b^2+2bs)+\boxed{(나)}+s^2$
>
> 그런데 $(km)^2+p^2$은 $\boxed{(다)}$의 배수이므로 q도 $\boxed{(다)}$의 배수이고, 이것은 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다.
>
> 따라서 $x^2+y^2=7$을 만족시키는 두 양의 유리수 x, y는 존재하지 않는다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(r)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a+\dfrac{f(4)}{g(2)}$의 값을 구하시오.

34 다음은 $\sqrt{3}$이 무리수임을 증명하는 과정이다.

> $\sqrt{3}$이 $\boxed{(가)}$라고 가정하면
>
> $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{(나)}$인 자연수)
>
> 로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면
>
> $a^2=3b^2$ $\cdots$ ㉠
>
> 이때 a^2이 $\boxed{(다)}$이므로 a도 $\boxed{(다)}$이다.
>
> $a=3k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서 $9k^2=3b^2$
>
> $\therefore b^2=3k^2$
>
> 따라서 b^2이 $\boxed{(다)}$이므로 b도 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 그러므로 a, b가 $\boxed{(나)}$라는 가정에 모순이므로
>
> $\sqrt{3}$은 무리수이다.

위 과정에서 (가) ~ (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	유리수	서로소	홀수
②	유리수	서로소	3의 배수
③	유리수	$a\ne b$	홀수
④	무리수	서로소	3의 배수
⑤	무리수	$a\ne b$	홀수

35 x, y가 실수일 때, 절대부등식인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

> <보기>
>
> ㄱ. $x^2+9\ge 6x$
>
> ㄴ. $x^2+x-1\ge 0$
>
> ㄷ. $(x+2y)^2\ge 4xy$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

마플시너지(2025) - (명제) 공통수학2 173~196p

명제와 조건 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ①, ③, ④

해설 ①, ④는 참인 명제이고 ③은 거짓인 명제이다.
따라서 명제는 ①, ③, ④이다.

02 정답 ③

해설 ① 참인 명제이다.
② $5-3x>-3x+2$에서 $5>2$이므로 참인 명제이다.
③ 2는 짝수이지만 소수이다. 따라서 거짓인 명제이다.
④ x의 값이 정해져 있지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.
⑤ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

03 정답 ②

해설 $x \in A$ 또는 $x \in B$

04 정답 ⑤

해설 $a^2+b^2+c^2=0 \longrightarrow a=b=c=0$, $a=b=c=0$의 부정은 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

05 정답 3

해설 $x^2+2x-15<0$에서
$(x+5)(x-3)<0$
$\therefore -5<x<3$
즉, $P=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$3x+5>0$에서 $x>-\frac{5}{3}$ 이므로
$Q=\{-1, 0, 1, 2, \cdots\}$
따라서 $P \cap Q^C=\{-4, -3, -2\}$이므로
$n(P \cap Q^C)=3$

06 정답 ④

해설 조건의 진리집합을 이해한다.
실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의 진리집합은 $\{x \mid x \geq 0\}$이다.

07 정답 2

해설 ㄷ. [반례] $3^2=9$는 홀수이다.
ㄹ. [반례] $a=1$, $b=2$, $c=-1$일 때
$ac=-1$, $bc=-2$이므로 $ac>bc$
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

08 정답 ④

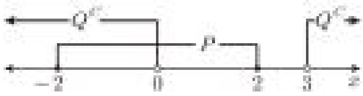
해설 ③ $a=2k+1$ (k는 자연수)라 하면
$3a=3(2k+1)=6k+3=2(3k+1)+1$
이므로 $3a$는 항상 홀수이다.
④ $x=-2$이면 $-2x+3=-2\cdot(-2)+3=7$

09 정답 ③

해설 명제 '$x>\sqrt{3}$ 이면 $x \geq \sqrt{7}$ 이다.'가 거짓임을 보여주는 반례는 $x>\sqrt{3}$ 를 만족시키지만 $x \geq \sqrt{7}$ 을 만족시키지 않는 것이어야 한다.
즉, $\sqrt{3}<x<\sqrt{7}$ 이어야 한다.
보기 중 $\sqrt{3}<x<\sqrt{7}$ 인 x의 값은 2 뿐이므로 답은 2이다.

10 정답 ②

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-2 \le x \le 2\}$, $Q=\{x|0 \le x \le 3\}$
명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는
집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 $P-Q$,
즉 $P \cap Q^C$의 원소이다.
이때 $Q^C=\{x|x<0$ 또는 $x>3\}$이므로
다음 그림에서 구하는 집합은
$P \cap Q^C=\{x|-2 \le x < 0\}$



11 정답

해설 ⑤ $P \ne U$이면 전체집합 U의 원소 중에서
집합 P에 포함되지 않는 원소가 있으므로
'모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

12 정답 ⑤

해설 $P \cap Q = P$이므로 $P \subset Q$이다.
따라서 명제 $p \to q$가 참이므로 대우 명제인
$\sim q \to \sim p$도 참이다.

13 정답

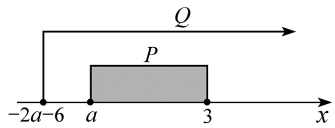
해설 ① 짝수 2는 소수이다.
② $x^2+2x+1=(x+1)^2 \ge 0$
③ $x=1$이면 $x^2+x>0$이다.
④ $x=-1$이면 $x^3<0$이다.
⑤ [반례] $x=\frac{1}{2}$일 때 $x^2=\frac{1}{4}$이므로 $x^2<x$
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

14 정답 ③, ④

해설 ① 모든 실수 x에 대하여 $|x|=x$ (거짓)
$x \ge q0$ 일 때 $|x|=x$, $x<0$ 일 때 $|x|=-x$ 이다.
② 모든 실수 x에 대하여 $x^2=1$ (거짓)
$x=\pm 1$ 일 때만 $x^2=1$ 이다.
③ 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)(x+1)=x^2-1$ (참)
④ 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \ge 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>2x$ (거짓) $x^2+1-2x=(x-1)^2 \ge 0$ 이므로 $x+1$인 x에 대해서만 $x^2+1>2x$ 이다.

15 정답 ③

해설 명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.
조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면
다음과 같이 수직선으로 나타낼 수 있다.



$-2a-6 \le a$
$\therefore a \ge -2$
따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

16 정답 ④

해설 주어진 명제가 참이 되기 위해서는
$\{x|x-2=0\} \subset \{x|x^2-ax+a=0\}$이어야 하므로
$2^2-2a+a=0$
따라서 $a=4$

17 정답 ⑤

해설 '$a>2$이면 $a^3>8$이다.'의 대우는
'$a^3 \le 8$이면 $a \le 2$이다.'이다.

18 정답 ③

해설 ㄱ. 주어진 명제가 참이므로 대우 역시 참이다.

ㄴ. $|x| \ge 0$, $y^2 \ge 0$이고 $|x| = -y^2$이므로
$x = y = 0$ (참)

ㄷ. 대우 : 실수 x가 무리수가 아니면 x가 무한소수가 아니다. (거짓)

[반례] $x = \frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$

따라서 대우가 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 정답 -2

해설 주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, '$x=2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$4a + 2a^2 - 6 = 0$, $2a^2 + 4a - 6 = 0$,

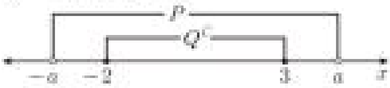
$a^2 + 2a - 3 = 0$, $(a+3)(a-1) = 0$

$\therefore$ $a = -3$ 또는 $a = 1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

20 정답 4

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $\sim p \to q$가 참이면 그 대우인 $\sim q \to p$도 참이므로 $Q^C \subset P$이어야 한다.



위의 그림에서 $-a < -2$, $a > 3$이므로 $a > 3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

21 정답 ④

해설 $r \to p$ 가 참이면 그 대우인 $\sim p \to \sim r$ 도 참이다.

이 때, $\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이면 $\sim p \Rightarrow \sim r$

즉, $r \Rightarrow p$ 이다.

따라서 (가)에 알맞은 것은

$q \to \sim r$ 또는 그 대우인 $r \to \sim q$ 이다.

22 정답 ⑤

해설 $\sim p \to r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \to p$가 참이다.

$p \to \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \to \sim p$가 참이다.

$\sim r \to p, p \to \sim q$가 참이므로 삼단논법에 의해 $\sim r \to \sim q$가 참이고

$\sim r \to \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \to r$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다.

23 정답 ④

해설 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$\Leftrightarrow B^C \subset A^C$

따라서 $A \cup B = B$이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ

24 정답 ③

해설 ㄱ. $p : n(A) < n(B) \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q : A \subset B$ (필요조건)

[반례] $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$이면 $n(A) < n(B)$이지만 $A \not\subset B$이다.

ㄴ. $p : n(A) = n(B) \overset{\times}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} q : n(A - B) = 0$

[반례]

(ⅰ) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$이면 $n(A) = n(B)$이지만 $n(A - B) = n(\{1\}) = 1 \ne 0$이다.

(ⅱ) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$이면 $n(A - B) = n(\varnothing) = 0$이지만 $n(A) \ne n(B)$이다.

즉, p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.

ㄷ. $p : A = B^C \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} q : A \cap B = \varnothing$ (충분조건)

[반례]

$U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$이면 $A \cap B = \varnothing$이지만 $A \ne B^C$이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ㄷ뿐이다.

25 정답 ②

해설 $\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$이고, 대우 $q \Rightarrow p$는 참이다. 따라서 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

26 정답 ⑤

해설 조건 p가 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이기 위한 충분조건이므로

$P \subset (P^C \cup Q^C)$

$\Leftrightarrow P \subset Q^C \ (\because P \cap P^C = \phi) \Leftrightarrow Q \subset P^C$

27 정답 4

해설 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P = \{x \mid -3n < x < 3n\}$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면

$Q = \{1, 11\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면

$Q \subset P$이어야 하므로 $n > \dfrac{11}{3}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4

28 정답 -4

해설 $p : x > a$, $q : -4 < x < 3$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P = \{x \mid x > a\}$, $Q = \{x \mid -4 < x < 3\}$

이때 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \rightarrow p$가 참이 되려면

$Q \subset P$

$\therefore a \leq -4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4

29 정답 ③

해설 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

s는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $s \Longrightarrow \sim r$

$q \Longrightarrow r$의 대우는 $\sim r \Longrightarrow \sim q$이고

$s \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $s \Longrightarrow \sim q$

30 정답 ②

해설 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

따라서 명제 $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $p \rightarrow r$가 참이다.

또, 각각의 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$, $\sim r \rightarrow \sim q$, $\sim r \rightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

31 정답 ④

해설 주어진 명제의 대우는

'x, y가 자연수일 때, x, y가 모두 홀수이면 xy도 홀수이다.'이다.

$x = 2a-1$, $y = 2b-1$ (a, b는 자연수)라 하면

$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab-a-b)+1$

이므로 xy는 홀수가 된다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

32 정답 ③

해설 k, l이 정수이므로, $2kl+k+l$은 $\boxed{\text{정수}}$이다.

따라서 $ab = 2(2kl+k+l)+1$은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

주어진 명제의 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제 역시 항상 $\boxed{\text{참}}$이다.

33 정답 35

해설 $x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{p}{q}$

(m과 n, p와 q는 각각 서로소인 자연수)라 하면

$x^2 + y^2 = 7$에서

$\dfrac{m^2}{n^2} + \dfrac{p^2}{q^2} = 7$, $\dfrac{m^2}{n^2} = 7 - \dfrac{p^2}{q^2}$

$\therefore \dfrac{m^2q^2}{n^2} = 7q^2 - p^2 \qquad \cdots ㉠$

$7q^2 - p^2$은 정수이고 m과 n은 서로소이므로

$q = kn$ (k는 정수)이어야 한다.

즉, ㉠에서 $(km)^2 + p^2 = 7q^2$이고

$km = 7a + r$, $p = 7b + s$

(a, b, r, s은 정수이고, $0 \leq r < 7$, $0 \leq s < 7$)

라 하면

$(km)^2 + p^2 = 7(7a^2 + 2ar + 7b^2 + 2bs) + r^2 + s^2$

이때 $(km)^2 + p^2$은 7의 배수이므로 $r = s = 0$이어야 한다.

즉, 두 수 km, p는 7의 배수이므로 q도 7의 배수이다.

따라서 $f(q) = 7q^2$, $g(r) = r^2$, $\alpha = 7$이므로

$\alpha + \dfrac{f(4)}{g(2)} = 7 + \dfrac{7 \cdot 16}{4} = 35$

34 정답 ②

해설 $\sqrt{3}$ 이 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ (a, b는 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수)

로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=3b^2$ $\cdots$ ㉠

이때 a^2이 $\boxed{3\text{의 배수}}$이므로 a도 $\boxed{3\text{의 배수}}$이다.

$a=3k$ (k는 자연수)로 놓으면 ㉠에서 $9k^2=3b^2$

$\therefore b^2=3k^2$

따라서 b^2이 $\boxed{3\text{의 배수}}$이므로 b도 $\boxed{3\text{의 배수}}$이다.

그러므로 a, b가 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로

$\sqrt{3}$은 무리수이다.

35 정답 ③

해설 ㄱ. $x^2+9\geq 6x$에서

$x^2-6x+9\geq 0$

$\therefore (x-3)^2\geq 0$ (참)

ㄴ. [반례] $x=0$일 때, $x^2+x-1=-1<0$ (거짓)

ㄷ. $(x+2y)^2-4xy=x^2+4xy+4y^2-4xy$

$=x^2+4y^2$

x, y가 실수이므로 $x^2\geq 0$, $4y^2\geq 0$에서

$x^2+4y^2\geq 0$

$\therefore (x+2y)^2\geq 4xy$

(단, 등호는 $x=y=0$일 때 성립) (참)

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

마플시너지(2025) -(절대부등식) 공통수학2 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2018년 9월 고2 문과 6번 변형]

양수 x에 대하여 $x+\dfrac{16}{x}$의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

02 $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞을 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\left(\boxed{(나)}\right)^2}{2}$이므로 부등식

$\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다. 이때

등호는 $\boxed{(다)}$일 때 성립한다.

① $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
② $\geq$, $a-b$, $a=b=0$
③ $>$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
④ $>$, $a-b$, $a=b$
⑤ $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a \geq b$

03 부등식 $|x+y| \leq |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$
③ $xy \geq 0$ ④ $x \geq 0,\ y \geq 0$
⑤ $x \leq 0,\ y \leq 0$

04 $x>2$ 일 때, $x-2+\dfrac{4}{x-2}$의 최솟값은?

① 0 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

05 실수 x, y가 $x^2+y^2=20$을 만족할 때, $3x+y$의 최댓값을 a, 그때의 x, y의 값을 각각 b, c라 하자. 이때 $a+b+c$의 값은?

① $10\sqrt{2}$ ② $11\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
④ $13\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{2}$

06 둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하자. $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값을 M이라 할 때, $\sqrt{6}\,M$의 값을 구하시오.

07 [2017년 3월 고3 문과 12번 변형]
실수 x에 대한 조건
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이다.'
가 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 다음은 임의의 실수 a, b에 대하여 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$일 때, $|a|+|b|\geq |a+b|$를 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b|\geq 0,\ |a+b|\geq 0$이므로
> $(|a|+|b|)^2,\ |a+b|^2$의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+$[가]$+b^2-(a^2+$[나]$+b^2)$
> $=2($[다]$)\geq 0$
> (단, 등호는 [라]≥ 0일 때 성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab
② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$
③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : ab
④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : ab
⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

09 다음은 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $|a|+|2b| \geq |a+2b|$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|2b|)^2-|a+2b|^2=4(\boxed{\text{(가)}}) \geq 0$
>
> $\therefore (|a|+|2b|)^2 \geq |a+2b|^2$
>
> 이때 $|a|+|2b| \geq 0$, $|a+2b| \geq 0$이므로
>
> $|a|+|2b| \geq |a+2b|$
>
> 이때 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$일 때 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

① $|ab|-ab$, $ab \geq 0$　② $|ab|-ab$, $ab \leq 0$
③ $|ab|+ab$, $ab=0$　④ $|ab|+ab$, $ab \leq 0$
⑤ $|ab|+ab$, $ab \geq 0$

10 실수 a, b에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

> ㄱ. $|a|-|b| \geq |a-b|$
> ㄴ. $|a|+|b| \leq |a-b|$
> ㄷ. $|a-b|+|b| \geq |a|$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

11 다음은 실수 a, b에 대하여 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
> $=2(|ab|-ab) \geq 0$
> 따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$이므로
> $|a|+|b| \geq |a+b|$

위의 증명과정에 사용되지 않은 성질은?

① $|a| \geq a$
② $a \geq b$, $b \geq c$이면 $a \geq c$
③ $|a|^2=a^2$
④ $a-b \geq 0$이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$이면 $a \geq b$

12 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

13 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 보기 중 옳은 것의 개수는?

〈보기〉

ㄱ. $1+a>\sqrt{1+2a}$

ㄴ. $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ㄷ. $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

ㄹ. $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$

ㅁ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\right)\geq 8$

ㅂ. $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 25$

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

14 다음은 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 과정이다. 처음으로 틀린 부분은?

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{4}{y}}$ … ㉠

$=\dfrac{4}{\sqrt{xy}}$

$\therefore\ \sqrt{xy}\geq 4$ … ㉡

이때 양수 x, y에 대하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}\geq 2\times 4=8$이므로

$x=y$에서 $x+y$가 최솟값을 갖는다. … ㉢

따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. … ㉣

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉣　⑤ 틀린 곳이 없다.

15 양수 x, y에 대하여 $5x^2+125y^2=2$일 때, xy는 $x=\alpha$, $y=\beta$에서 최댓값 γ를 갖는다. 이때 $\alpha\beta+\gamma$의 값은?

① $\dfrac{1}{25}$　② $\dfrac{2}{25}$　③ $\dfrac{3}{25}$
④ $\dfrac{4}{25}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

16 양수 a, b에 대하여 $a+b=6$일 때, $\dfrac{a^2-3}{a}+\dfrac{b^2-3}{b}$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17 양수 a에 대하여 $\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$의 최솟값을 m, 그때의 a의 값을 n이라 할 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

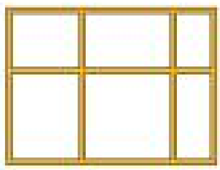
18 $x>0$일 때, $(x^2+x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

19 $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{3c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{3c}\right)$의 최솟값을 구하시오.

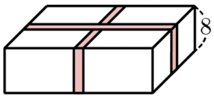
20 $x>0$, $y>0$, $z>0$일 때, $\dfrac{2y+3z}{x}+\dfrac{3z+x}{2y}+\dfrac{x+2y}{3z}$의 최솟값을 구하시오.

21 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



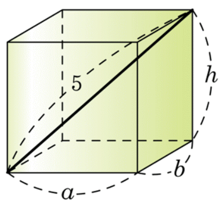
① (600, 40) ② (1200, 40)
③ (600, 30) ④ (1200, 30)
⑤ (450, 60)

22 높이가 $8\,\mathrm{cm}$인 직육면체 모양의 소포를 다음 그림과 같이 끈으로 묶으려고 한다. 길이가 $116\,\mathrm{cm}$인 끈으로 묶을 수 있는 소포의 최대 부피를 구하시오.
(단, 매듭의 길이는 생각하지 않는다.)



23 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=13$일 때, x^2+2x+y^2+3y의 최댓값을 구하시오.

24 코시－슈바르츠의 부등식을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h이고 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은?



① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{3}$
④ $25\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{6}$

25 다음은 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$이 실수일 때, 부등식
$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
이 성립함을 증명한 것이다.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2 \ \boxed{(가)}\ 0$$
> 이 성립한다. 이 식을 전개하여 x에 대해 정리하면
> $$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2 -2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x +(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ \boxed{(가)}\ 0 \quad \cdots ㉠$$
> (ⅰ) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \leq 0$일 때,
> $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$이므로 주어진 부등식이 성립한다.
> (ⅱ) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 > 0$일 때,
> x에 대한 이차방정식
> $$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2 -2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x +(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=0$$
> 의 판별식을 D라고 하면 ㉠이 항상 성립하므로
> $$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \ \boxed{(나)}\ (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\times(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ \boxed{(다)}\ 0$$
> (ⅰ), (ⅱ)에서
> $$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
> $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n} \text{ 일 때 성립}\right)$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $\leq, -, \leq$　② $\leq, +, \geq$　③ $\geq, -, \leq$
④ $\geq, -, <$　⑤ $>, +, \leq$

마플시너지(2025) -(절대부등식) 공통수학2 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 $x>0,\ \dfrac{16}{x}>0$이므로 $x+\dfrac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{16}{x}}=8$

(단, 등호는 $x=4$일 때 성립한다.)

따라서 $x+\dfrac{16}{x}$의 최솟값은 8이다.

02 정답 ①

해설 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a}{2}-2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}+\dfrac{b}{2}$

$=\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{\boxed{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}^2}{2}\geq 0$

이므로 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$에서 $\dfrac{a+b}{2}\boxed{\geq}\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$일 때이므로

등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

03 정답 ③

해설 $|x+y|=|x|+|y|$의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy=|xy|$

(ⅰ) $xy=|xy|$

$\longrightarrow xy\geq 0$

(ⅱ) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy\geq 0\longrightarrow xy=|xy|$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$xy=|xy|\longleftrightarrow xy\geq 0$

04 정답 ②

해설 산술 기하평균의 관계에서

$(x-2)+\dfrac{4}{(x-2)}\geq 2\sqrt{(x-2)\dfrac{4}{(x-2)}}$

$=2\sqrt{4}=4$

$\therefore$ 최솟값 : 4

05 정답 ⑤

해설 $x,\ y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(3x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=20$이므로

$10\cdot 20\geq(3x+y)^2$

$\therefore\ -10\sqrt{2}\leq 3x+y\leq 10\sqrt{2}$

한편, 등호는 $\dfrac{x}{3}=y$일 때 성립하므로

이것을 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$x=3\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$ 또는 $x=-3\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$

따라서 $3x+y$는 $x=3\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$ 일 때

최댓값 $10\sqrt{2}$를 가지므로

$a=10\sqrt{2},\ b=3\sqrt{2},\ c=\sqrt{2}$

$\therefore\ a+b+c=14\sqrt{2}$

06 정답 30

해설 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$2x+2y=20$ $\quad\therefore x+y=10$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2\}\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}$

$\geq(\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$15(x+y)\geq(\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

그런데 $x+y=10$이므로

$150\geq(\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$\therefore -5\sqrt{6}\leq\sqrt{5x}+\sqrt{10y}\leq5\sqrt{6}$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{10}} \text{ 일 때 성립}\right)$

이때 $\sqrt{5x}>0$, $\sqrt{10y}>0$이므로

$0<\sqrt{5x}+\sqrt{10y}\leq5\sqrt{6}$

따라서 $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값은 $5\sqrt{6}$이므로

$M=5\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{6}M=\sqrt{6}\cdot5\sqrt{6}=30$

07 정답

해설 모든 실수 x에 대하여

부등식 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이 참인 명제가 되려면

$f(x)=x^2-2kx-3k^2-4k+3$이라 할 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$이

서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$의 판별식을

D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(-3k^2-4k+3)$

$=4k^2+4k-3$

$=(2k+3)(2k-1)<0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{1}{2}$

따라서 정수 k의 개수는 -1, 0의 2이다.

08 정답 ③

해설 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq0$

(단, 등호는 $ab\geq0$일 때 성립)

09 정답 ①

해설 $(|a|+|2b|)^2-|a+2b|^2$

$=(|a|^2+4|a||b|+4|b|^2)-(a+2b)^2$

$=(a^2+4|ab|+b^2)-(a^2+4ab+b^2)$

$=4(\boxed{|ab|-ab})\geq0$ ($\because |ab|\geq ab$) $\cdots$ ㉠

$\therefore (|a|+|2b|)^2\geq|a+2b|^2$

이때 $|a|+|2b|\geq0$, $|a+2b|\geq0$이므로

$|a|+|2b|\geq|a+2b|$

이때 등호는 ㉠에서 $|ab|-ab=0$, 즉 $|ab|=ab$일 때

성립하므로 $\boxed{ab\geq0}$일 때 성립한다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 각각

$|ab|-ab$, $ab\geq0$이다.

10 정답 ③

해설 ㄱ. [반례] $a=1$, $b=-2$이면

$|a|-|b|=-1$, $|a-b|=3$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$ (거짓)

ㄴ. [반례] $a=2$, $b=3$이면

$|a+b|=5$, $|a-b|=1$이므로

$|a+b|>|a-b|$ (거짓)

ㄷ. $|a-b|+|b|\geq|a|$에서

$|a-b|\geq|a|-|b|$

(ⅰ) $|a|\geq|b|$일 때

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq0$ ($\because |ab|\geq ab$)

$\therefore |a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$

$\therefore |a-b|\geq|a|-|b|$

($\because |a|-|b|\geq0$, $|a-b|\geq0$)

$\therefore |a-b|+|b|\geq|a|$

(ⅱ) $|a|<|b|$일 때

$|a|-|b|<0$, $|a-b|\geq0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

$\therefore |a-b|+|b|\geq|a|$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|a-b|+|b|\geq|a|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

11 정답 ②

해설 $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$ (③ 사용)

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq0$ (① 사용)

따라서 $(|a|+|b|)^2\geq(|a+b|)^2$이므로 (④ 사용)

$|a|+|b|\geq|a+b|$ (⑤ 사용)

그러므로 사용되지 않은 성질은 ②이다.

12 정답 ①

해설 $x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

13 정답 ⑤

해설 ㄱ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2=a^2>0$

$\therefore (1+a)>\sqrt{1+2a}$ (참)

ㄴ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

$\therefore \sqrt{2(a+b)}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (참)

ㄷ. $a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ (참)

ㄹ. $\frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$=\frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\le 0$

$\therefore \frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ (참)

ㅁ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$이고

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=4$이므로

$4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\ge 8$ (참)

ㅂ. $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$이고

$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{8b}{a}}=8$이므로

$(2a+b)\left(\frac{8}{1}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}\ge 25$ (참)

14 정답 ③

해설 ㉠에서 등호가 성립하는 경우는

$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$,즉 $y=4x$일 때이고,

㉡에서 등호가 성립하는 경우는$x=y$일 때 이므로 서로 일치 하지 않는다.

따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

15 정답 ②

해설 $x>0$, $y>0$에서 $x^2>0$, $y^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x^2+125y^2\ge 2\sqrt{5x^2\cdot 125y^2}=50xy$

그런데 $5x^2+125y^2=2$이므로

$2\ge 50xy$

$\therefore xy\le\frac{1}{25}$

이때 등호는 $5x^2=125y^2$, 즉 $x=5y$일 때 성립하므로

$xy=\frac{1}{25}$에서 $5y\cdot y=\frac{1}{25}$, $y^2=\frac{1}{125}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{\sqrt{5}}{25}$

따라서 xy는 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{\sqrt{5}}{25}$일 때

최댓값 $\frac{1}{25}$을 가지므로

$\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\beta=\frac{\sqrt{5}}{25}$, $\gamma=\frac{1}{25}$

$\therefore \alpha\beta+\gamma=\frac{2}{25}$

16 정답 ④

해설 $\frac{a^2-3}{a}+\frac{b^2-3}{b}=a-\frac{3}{a}+b-\frac{3}{b}$

$=a+b-3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=a+b-3\cdot\frac{a+b}{ab}$

$=6-\frac{18}{ab}$

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$에서 $6\ge 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}\le 3$, $ab\le 9$이므로

$\frac{1}{9}\le\frac{1}{ab}$, $-\frac{18}{9}\ge-\frac{18}{ab}$

$\therefore 6-2=4\ge 6-\frac{18}{ab}$

따라서 주어진 식의 최댓값은 4이다.

17 정답 ①

해설 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)=2a^2+4+1+\frac{2}{a^2}$$
$$=5+2a^2+\frac{2}{a^2}$$
$$\geq 5+2\sqrt{2a^2\cdot\frac{2}{a^2}}$$
$$=5+4$$
$$=9$$

이때 등호는 $2a^2=\dfrac{2}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=1$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

즉, $\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$는 $a=1$일 때 최솟값 9를 갖는다.

따라서 $m=9$, $n=1$이므로

$m+n=10$

18 정답 ④

해설 $x>0$에서 $\dfrac{1}{x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x^2+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=x+4+1+\frac{4}{x}$$
$$\geq 5+2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}$$
$$=5+2\cdot 2$$
$$=9 \text{ (단, 등호는 } x=2\text{일 때 성립)}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다.

19 정답 8

해설 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{3c}{b}>0$,

$\dfrac{a}{3c}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 1=\dfrac{b}{a}\text{일 때 성립}\right)$

마찬가지로

$1+\dfrac{3c}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{3c}{b}}$ $\left(\text{단, 등호는 } 1=\dfrac{3c}{b}\text{일 때 성립}\right)$,

$1+\dfrac{a}{3c}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{3c}}$ $\left(\text{단, 등호는 } 1=\dfrac{a}{3c}\text{일 때 성립}\right)$

$$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{3c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{3c}\right)$$
$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{3c}{b}}\sqrt{\frac{a}{3c}}$$
$$=8$$

따라서 $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{3c}{b}\right)\left(1+\dfrac{a}{3c}\right)$의 최솟값은 8이다.

20 정답 6

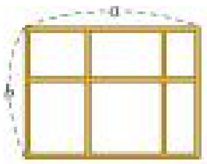
해설 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2y+3z}{x}+\frac{3z+x}{2y}+\frac{x+2y}{3z}$$
$$=\frac{2y}{x}+\frac{3z}{x}+\frac{3z}{2y}+\frac{x}{2y}+\frac{x}{3z}+\frac{2y}{3z}$$
$$=\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{2y}{3z}\right)+\left(\frac{3z}{x}+\frac{x}{3z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{2y}{3z}}+2\sqrt{\frac{3z}{x}\cdot\frac{x}{3z}}$$
$$=6 \text{ (단, 등호는 } x=2y=3z\text{일 때 성립)}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다.

21 정답 ②

해설



$3a+4b=240$

$3a+4b \geq 2\cdot\sqrt{3a\cdot 4b}$

$240\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab}$ ($\because$ $3a+4b=240$)

$\therefore$ $1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립하므로,

$3a+4b=6a=240$,

$\therefore$ $a=40$

22 정답 $3528\,\text{cm}^3$

해설 소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\,\text{cm}$, $y\,\text{cm}$라 하면 끈의 길이는

$2x+2y+4\cdot 8=2x+2y+32$ (cm)

끈의 길이가 $116\,\text{cm}$이므로

$2x+2y+32=116$

$\therefore$ $x+y=42$

$x>0$, $y>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=42$이므로

$42 \geq 2\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy} \leq 21$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

양변을 제곱하면

$xy \leq 441$

소포의 부피는 $8xy$이므로

$8xy \leq 3528$

따라서 소포의 최대 부피는 $3528\,\text{cm}^3$이다.

23 정답 26

해설 $x^2+y^2=13$이므로

$x^2+2x+y^2+3y=2x+3y+13$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=13$이므로

$13\cdot 13 \geq (2x+3y)^2$

$\therefore$ $-13 \leq 2x+3y \leq 13$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+2x+y^2+3y의 최댓값은 26이다.

24 정답 ③

해설 $a^2+b^2+h^2=25$

코시—슈바르츠의 부등식을 이용하면

$(4^2+4^2+4^2)(a^2+b^2+h^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$48\cdot 25 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\therefore$ $4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48}=20\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4}=\frac{b}{4}=\frac{h}{4} \text{ 일 때 성립한다.}\right)$

따라서 모든 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$의 최댓값은 $20\sqrt{3}$ 이다.

25 정답 ③

해설 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$

$\boxed{\geq}\,0$

이 성립한다. 이 식을 전개하여 x에 대해 정리하면

$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x$

$+(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\boxed{\geq}\,0$

x에 대한 이차부등식 ㉠이 항상 성립하므로

$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

$\boxed{-}\,(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)$

$\times(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$

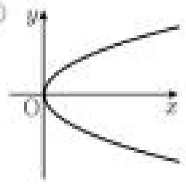
$\boxed{\leq}\,0$

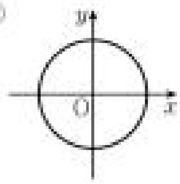
실시일자	-
25문제 / DRE수학	

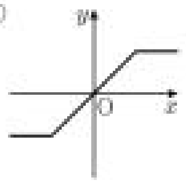
유형별 학습

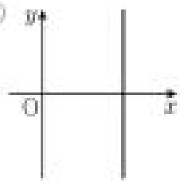
이름

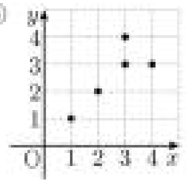
01 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


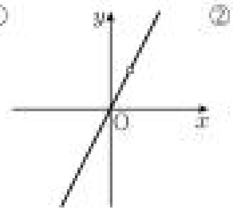
②


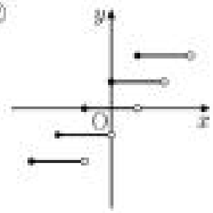
③


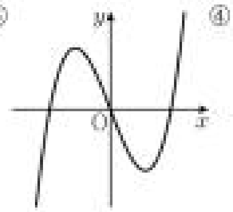
④


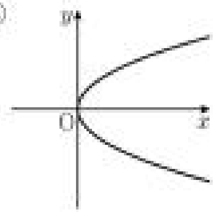
⑤


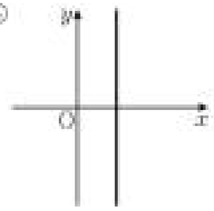
02 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


03 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $y=x+2$

ㄴ. $y=\begin{cases} x^2 \ (x\text{는 짝수}) \\ x+1 \ (x\text{는 홀수}) \end{cases}$

ㄷ. $y=(x\text{의 양의 약수})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 함수 $f(x)=\frac{5}{3}(x-2)$에 대하여 $f(5)+f(14)$의 값을 구하시오.

05 함수 $f: X \to Y$에 대하여 $X=\{x|0 \leq x \leq 1\}$이고 $f(x)=\begin{cases} x\,(x\text{는 유리수}) \\ 1-x\,(x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $f(x)+f(1-x)$의 값을 구하시오.

06 함수 $f(x)=x^3-ax$의 정의역이 $X=\{-1, 0, 2\}$일 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 10이다. 상수 a의 값을 구하시오.

07 집합 $A=\{x \mid x\text{는 } 40\text{이하의 자연수}\}$의 부분집합 X를 정의역으로 하는 함수 f를 $f(x)=$(x를 5로 나누었을 때의 나머지)로 정의한다. 이때, 함수 f의 치역이 $\{2\}$가 되도록 하는 정의역 X의 개수를 구하시오.

08 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(1)=2$를 만족시킬 때, 다음 보기 중 참인 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=1$
ㄴ. $f(x)f(-x)=1$
ㄷ. $f(x)>0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 모든 실수 x에 대하여 함수 f는 $3f(x)+2f(2-x)=10x$를 만족한다. $f(a)=12$라 할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

10 집합 $N=\{n \mid n$은 2 이상의 자연수$\}$이고, 함수 $f: N \rightarrow N$이

$$\begin{cases} f(n)=n & (n\text{이 소수}) \\ f(pq)=f(p)+f(q) & (p\in N,\ q\in N) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $f(300)$의 값을 구하시오.

11 다음 두 함수 f, g가 실수 범위에서 서로 같은 함수인 것을 고르시오

① $f(x)=x^2$, $g(x)=x$

② $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$

③ $f(x)=x-2$, $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

④ $f(x)=x$, $g(x)=-x$

⑤ $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$

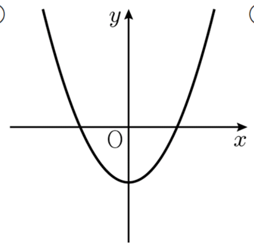
12 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=-x^3+a$가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

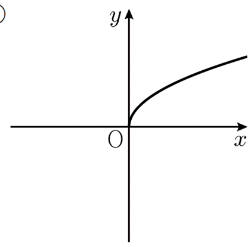
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

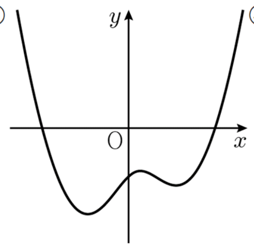
13 다음 함수 중 일대일대응인 것을 모두 고르면? (정답 2개)
(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

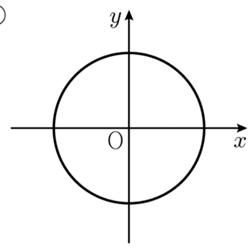
① $y=3$ ② $y=-x+4$
③ $y=|x-1|$ ④ $y=-2x^2+3$
⑤ $y=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$

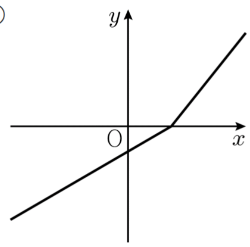
14 다음 중 일대일대응의 그래프인 것은?
(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

①


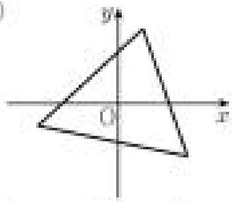
②


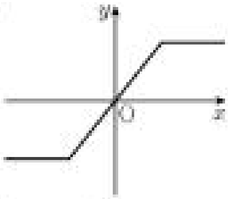
③


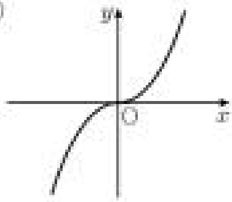
④


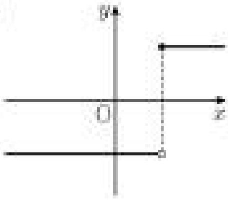
⑤


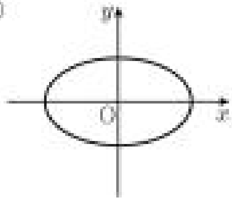
15 다음 중 일대일대응의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


16 이차함수 $f(x)=x^2-4x$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$가 일대일대응이 되도록하는 집합 X는 $X=\{x \mid x \geq k\}$이다. 이때 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17 집합 $X=\{x \mid x \geq k\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2-2x-10$가 일대일대응이 되도록 하는 실수 k의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

18 실수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

19 함수 $f: X \rightarrow X$, $f(x)=2x^2+x-8$을 항등함수가 되게 하는 공집합이 아닌 집합 X의 개수를 구하시오.

20 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R는 실수 전체의 집합이다.)

① 항등함수는 일대일 대응이다.
② f : R $\Rightarrow$ R가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.
③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y=x$가 된다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

21 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응의 개수를 a, 항등함수의 개수를 b, 상수함수의 개수를 c이라 할 때, abc의 값을 구하시오.

22 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 일대일대응의 개수를 a, 상수함수의 개수를 b, 항등함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

23 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수가 60일 때, X에서 Y로의 상수함수의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

24 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응 중에서 $f(2)=a$, $f(4)=e$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

25 두 집합 $X=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응 중에서 $f(1)=4$, $f(3)=8$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~230p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ③

해설 함수의 그래프는 정의역의 임의의 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

02

정답 ③

해설 함수의 그래프는 임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

03

정답 ②

해설 ㄱ. X의 원소 3에 대응하는 Y의 값이 없으므로 함수가 아니다.
ㄴ. $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 4$,
곧 X의 모든 원소가 Y의 원소 하나에 대응하므로 함수이다.
ㄷ. X의 원소 2, 3에 대응하는 Y의 값이 각각 2개이므로 함수가 아니다.

04

정답 25

해설 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$x=5$를 대입하면, $f(5)=\frac{5}{3}\cdot 3=5$
$x=14$를 대입하면, $f(14)=\frac{5}{3}\cdot 12=20$
$\therefore f(5)+f(14)=5+20=25$

05

정답 1

해설 (ⅰ) x가 유리수일 때 $f(x)+f(1-x)=x+1-x=1$
(ⅱ) x가 무리수일 때
$f(x)+f(1-x)=1-x+1-(1-x)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)+f(1-x)=1$

06

정답 -3

해설 $f(-1)=(-1)^3-a\cdot(-1)=-1+a$, $f(0)=0$,
$f(2)=2^3-2a=8-2a$
이때 함수 f의 치역은 $\{-1+a,\ 0,\ 8-2a\}$이고,
모든 원소의 합이 10이므로
$(-1+a)+(8-2a)=10$
$-a+7=10 \qquad \therefore a=-3$

07

정답 255

해설 $f(x)=2$이려면 $x=5k+2$(k는 음이 아닌 정수)이어야 한다.
따라서 치역이 $\{2\}$이려면 함수 f의 정의역 X는
$\{x \mid x=5k+2(k=0,1,2,\cdots 7)\}$
즉, $\{2,7,12,17,\cdots,37\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
따라서 집합X의 개수는 $2^8-1=255$

08

정답 ⑤

해설 함수방정식 문제는 요구하는 값 또는 성질이 나오도록 x에 적당한 값을 대입한다.
ㄱ. $x=1$, $y=0$을 준 식에 대입하면
$f(1+0)=f(1)f(0)$ $\therefore 2=2f(0)$
$\therefore f(0)=1$이므로 참.
ㄴ. $f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)=1$
$\therefore$ 참.
ㄷ. $f(1)=f(x+(1-x))=f(x)f(1-x)=2$이므로
$f(x)\neq 0$
따라서 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2>0$
$\left(\because f(x)\neq 0\text{이므로 } f\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0\right)$
$\therefore$ 참.

09 정답 2

해설 $3f(x)+2f(2-x)=10x$ $\cdots$ ㉠

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 등식의 양변에 x 대신 $2-x$를 대입하면

$3f(2-x)+2f(x)=20-10x$ $\cdots$ ㉡

㉠ $\cdot$ 3 $-$ ㉡ $\cdot$ 2를 하면

$5f(x)=50x-40$

$\therefore\ f(x)=10x-8$

$f(a)=12$이므로 $10a-8=12$

$\therefore\ a=2$

10 정답 17

해설 $f(pq)=f(p)+f(q)$이므로

$$\begin{aligned} f(300) &= f(2^2\cdot 3\cdot 5^2) \\ &= f(2^2)+f(3\cdot 5^2) \\ &= f(2)+f(2)+f(3)+f(5^2) \\ &= f(2)+f(2)+f(3)+f(5)+f(5) \\ &= 2\cdot f(2)+f(3)+2\cdot f(5) \end{aligned}$$

그런데 2, 3, 5는 소수이므로

$f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(5)=5$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(300) &= 2\cdot 2+3+2\cdot 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

11 정답 ②

해설 ① $f(x)=x^2,\ \ g(x)=x$에서

$f(-1)=(-1)^2=1,\ \ f(-1)=-1$

$\therefore f\neq g$

② $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|,\ \ g(x)=|x|$

$\therefore f=g$

③ $f(x)=x-2$

$g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}=(x-2)$

(단, $x\neq -2$)

$\therefore f\neq g$

④ $f(x)=x,\ g(x)=-x$에서

$f(1)=1,\ \ g(1)=-1$ $\qquad\therefore f\neq g$

⑤ $f(x)=|x|,\ \ g(x)=x^2$에서

$f(2)=|2|=2,\ \ g(2)=2^2=4$ $\qquad\therefore f\neq g$

12 정답 ④

해설 (ⅰ) $f(1)=g(1)$에서

$a+b=-1+a$

$\therefore\ b=-1$

(ⅱ) $f(0)=g(0)$에서 $a=b$이므로

$a=-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-1,\ b=-1$이므로

$ab=1$

13 정답 ②, ⑤

해설 ① [반례] $f(x)=3$이라 하면 $x_1=1,\ x_2=2$일 때,

$x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=3,\ f(x_2)=3$

$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=3$은 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $f(x)=|x-1|$이라 하면 $x_1=0,\ x_2=2$일 때, $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=1,\ f(x_2)=1$

$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|x-1|$은 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $f(x)=-2x^2+3$이라 하면

$x_1=-1,\ x_2=1$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-2+3=1,\ f(x_2)=-2+3=1$

$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-2x^2+3$은 일대일대응이 아니다.

14 정답 ⑤

해설 ①, ③, ④ 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응의 그래프가 아니다.

② 치역이 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이므로 일대일함수의 그래프이지만 일대일대응의 그래프가 아니다.

따라서 일대일대응의 그래프는 ⑤이다.

15 정답 ③

해설 직선 $y=k$ (k는 상수)와 그래프의 교점이 1개이고, (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일 대응이다.

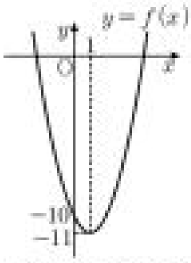
따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다.

16 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로
함수 $y=f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x \geq k$일 때, 항상 증가하는 함수여야하고, $x \geq 2$에서만 항상 증가할 수 있으므로
$k \geq 2$ $\cdots$ ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x \geq k\}$에 대하여 치역은 $\{y|y \geq k\}$이어야 한다.
즉, $f(k)=k$이므로
$k^2-4k \geq k$, $k(k-5) \geq 0$
$\therefore$ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=5$

17 정답 ④

해설 $f(x)=x^2-2x-10=(x-1)^2-11$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이 되려면 $x \geq k$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해야 하므로
$k \geq 1$ $\cdots$ ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x \geq k\}$에 대하여 치역은 $\{y|y \geq k\}$이어야 한다.
즉, $f(k)=k$이어야 하므로
$k^2-2k-10=k$
$k^2-3k-10=0$, $(k+2)(k-5)=0$
$\therefore$ $k=-2$ 또는 $k=5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=5$

18 정답 0

해설 0이 아닌 x에 대하여 $y=0$을 $f(xy)=f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0)=f(x)f(0) \leftrightarrow f(0)-f(0)f(x)=0$
$\leftrightarrow f(0)[1-f(x)]=0 \leftrightarrow f(0)=0$ 또는 $f(x)=1$
만일 $f(x)=1$이면
$f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=1$, $\cdots$이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x)=1$은 부적당
$\therefore$ $f(0)=0$

19 정답 3

해설 함수 $f: X \to X$가 항등함수
즉, 임의의 $x \in X$에 대하여 $f(x)=x$를 만족한다.
정의역과 공역이 모두 X이므로
$f(x)=x$를 만족하는 x를 집합 X의 원소로 하면 된다.
$f(x)=x$에서
$2x^2+x-8=x$, $x^2=4$
$\therefore$ $x=\pm 2$
따라서 구하는 집합은 $\{-2, 2\}$의 부분집합에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
$2^2-1=3$

20 정답 ③, ④, ⑤

해설 ③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y=x$이다.
(반례) $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $f(x)=x$에서
$\mathrm{X}=\{1, 2, 3\}$, $\mathrm{Y}=\{1, 2, 3\}$이면
$y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$가 아니다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 무수히 많다.
⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $f(x)=3$에서
$\mathrm{X}=\{1, 2, 3\}$이면 $y=f(x)$는 직선이 아니다.

따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

21 정답 96

해설 일대일대응을 $f: X \to X$라 하면
$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 4개다.
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 3개다.
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$, $f(0)$의 값을 제외한 2개다.
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값을 제외한 1개다.
따라서 일대일대응의 개수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$
또, 항등함수는 1개, 상수함수는 4개이므로
$a=24$, $b=1$, $c=4$
$\therefore$ $abc=96$

22 **정답** 29

해설 X에서 X로의 일대일대응의 개수는
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$(개)
X에서 X로의 상수함수의 개수는 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$, $f(x)=4$의 4개 이다.
X에서 X로의 항등함수의 개수는 $f(x)=x$로 1개이다.
따라서 $a=24$, $b=4$, $c=1$ 이므로
$a+b+c=29$

23 **정답** ①

해설 집합 Y의 원소의 개수를 a라 하면 일대일함수의 개수는
${}_{a}\mathrm{P}_{3} = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) = 60$
이때 $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$이므로
$a=5$
따라서 X에서 Y로의 상수함수의 개수는 5이다.

24 **정답** 6

해설 $f(2)=a$, $f(4)=e$이고 함수 f는 일대일대응이므로
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 다음과 같다.
(ⅰ) $f(1)=b$, $f(3)=c$, $f(5)=d$
(ⅱ) $f(1)=b$, $f(3)=d$, $f(5)=c$
(ⅲ) $f(1)=c$, $f(3)=b$, $f(5)=d$
(ⅳ) $f(1)=c$, $f(3)=d$, $f(5)=b$
(ⅴ) $f(1)=d$, $f(3)=b$, $f(5)=c$
(ⅵ) $f(1)=d$, $f(3)=c$, $f(5)=b$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 6이다.

25 **정답** 2

해설 $f(1)=4$, $f(3)=8$이고 f는 일대일대응이므로
$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 6의 2개
$f(7)$의 값이 될 수 있는 수는 $f(5)$의 값을 제외한 1개
따라서 함수 f의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 233~261p

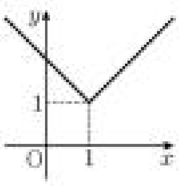
함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

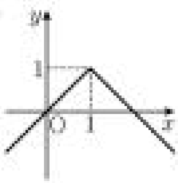
실시일자	-
46문제 / DRE수학	

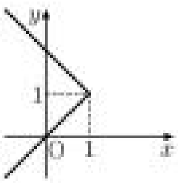
교재 오답

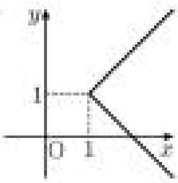
이름

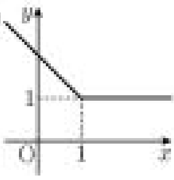
01 다음 중 함수 $y=|x-1|+1$의 그래프의 개형으로 올바른 것은?

①


②


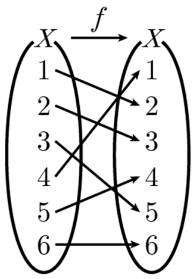
③


④


⑤


02 [2019년 3월 고3 문과 4번 변형]

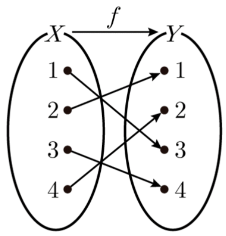
다음 그림은 함수 $f:X\to X$를 나타낸 것이다. $(f\circ f)(2)$의 값은?



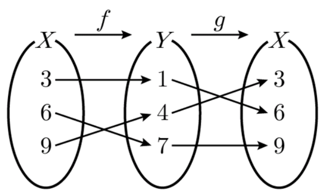
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

03 두 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=-x^2-1$에 대하여 $(f\circ g)(0)$의 값을 구하시오.

04 다음 그림과 같은 함수 f에서
$f^{-1}(a)+f^{-1}(4)=5$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.



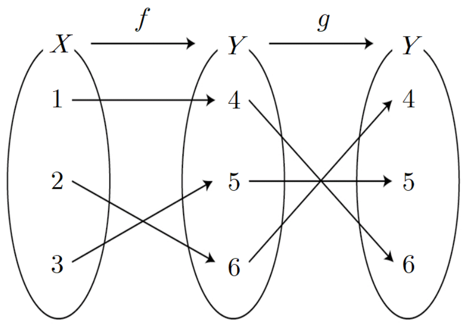
05 [2022년 11월 고1 9번/3점]
그림은 두 함수 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$를 나타낸 것이다.



$(g\circ f)(3)+(g\circ f)^{-1}(9)$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

06 [2018년 6월 고2 이과 5번/3점]
그림은 두 함수 $f:X\to Y$, $g:Y\to Y$를 나타낸 것이다.



$(f^{-1}\circ g)(4)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

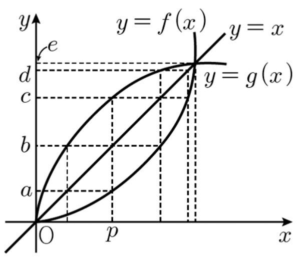
07 함수 $f(x)=|4x+a|+b$는 $x=3$일 때, 최솟값 -2를 가진다. 이때 상수 a, b의 값에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

08 두 함수 $f(x)=2x+a$, $g(x)=-x+1$에 대하여 $g \circ f = f \circ g$가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x+1$, $g(x)=-x^2+2$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$가 $(f \circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(2)$의 값은?

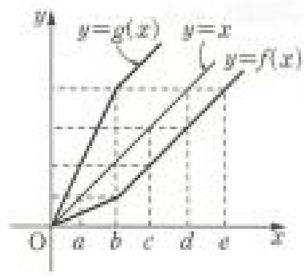
① -18 ② -9 ③ 0
④ 9 ⑤ 18

10 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$의 값은?
(단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



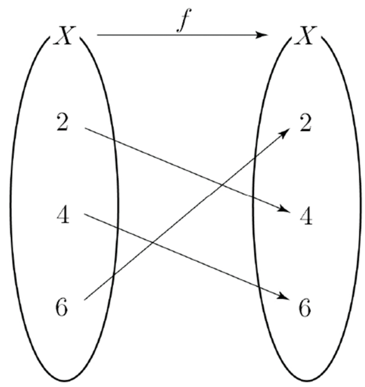
① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

11 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때 $(g \circ f)(c)$의 값은?



① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

12 [2019년 4월 고3 문과 13번/3점]
집합 $X=\{2, 4, 6\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 f, g가 있다.
그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.

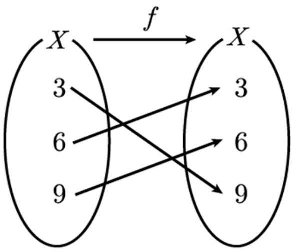


집합 X의 모든 원소 k에 대하여 $f(k) \neq g(k)$이고 $g(2)=6$일 때, $f^{-1}(6)+g(4)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

13 [2019년 4월 고3 문과 13번 변형]

집합 $X=\{3,\ 6,\ 9\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 f, g가 있다.
다음 그림은 함수 $f:X\to X$를 나타낸 것이다.
집합 X의 모든 원소 k에 대하여 $f(k)\neq g(k)$이고 $g(3)=6$일 때, $f^{-1}(6)+g(9)$의 값은?



① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

14

두 집합 $X=\{x|2\leq x\leq 8\}$, $Y=\{x|1\leq x\leq a\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+b$의 역함수가 존재할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수)

15

집합 $X=\{x|x\leq a\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=-x^2+4x+28$의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

16

함수 $f(x)=\begin{cases}2x+3\ (x\geq 0)\\ ax+b\ (x<0)\end{cases}$ 의 역함수가 존재하기 위한 실수 a, b의 조건은?

① $a>0,\ b>0$ ② $a>0,\ b=-1$
③ $a>0,\ b=3$ ④ $a<0,\ b<0$
⑤ $a<0,\ b=3$

17

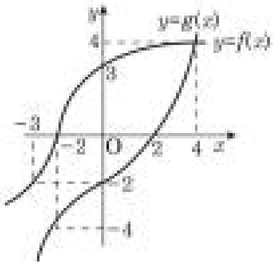
함수 $f(x)=3x+1$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편을 a, y절편을 b라 하자.
이때 $a+b$의 값을 구하시오.

18 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 $(f \circ f)(x)=x$, $f(4)=2$일 때, $f^{-1}(4)+f(2)$의 값을 구하시오.

19 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=-4x+5$ 에 대하여 $f \circ h=g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

20 두 함수 $f(x)=x^2+4x+9(x \geq -2)$, $g(x)=x^2+2(x \geq 0)$에 대하여 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(2)$의 값을 구하시오.

21 일대일대응인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f^{-1})(3)$의 값을 구하여라.



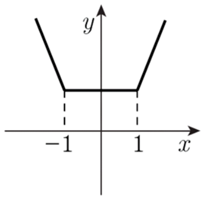
22 $|x|+|y|=5$의 그래프가 나타내는 도형의 넓이는?

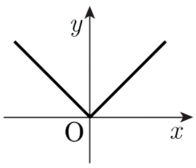
① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

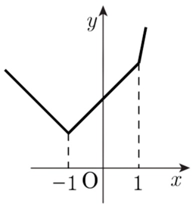
23 함수 $f(x)=|x|+|x-a|+|x-3a|$ 의 최솟값이 6 일 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

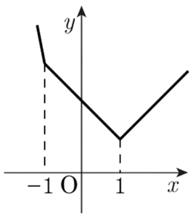
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

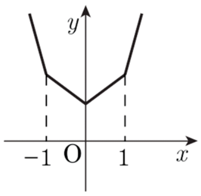
24 다음 중 함수 $y=|x-1|+x+|x+1|$의 그래프는?

①


②


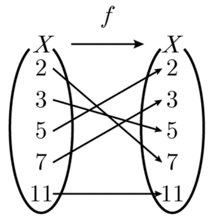
③


④


⑤


25 함수 $y=|x+3|-|x-1|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

26 집합 $X=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 다음 그림과 같다. 함수 $g:X\to X$가 $g(2)=5$, $f\circ g=g\circ f$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?



① 2　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 11

27 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f(3x-1)=x+3$을 만족시킬 때, $f\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)=ax+b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $3ab$의 값을 구하시오.

28 두 함수 $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=ax^2+bx+c$가 모든 실수 x에 대하여 $g\left(\dfrac{x+1}{3}\right)=3f(x)+1$을 만족시킬 때, $a-b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

29 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=-3x+4$에 대하여 $h \circ f=g$를 만족하는 일차함수 $h(x)$는?

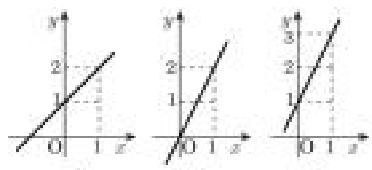
① $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=-x+3$
⑤ $h(x)=x+3$

30 함수 $f(x)=-x-1$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$으로 정의할 때, $f^{10}(10)-f^9(9)$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

31 함수 $f(x)=x+1$에 대하여 $f^1=f$, $f^2=f \circ f$, $f^3=f \circ f^2$, $\cdots$ $f^{n+1}=f \circ f^n$로 정의할 때, $f^{10}(a)=30$을 만족시키는 a의 값을 구하시오. (단, n은 자연수)

32 함수 $f(x)=-x+1$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$으로 정의할 때, $f^{99}(a)=100$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

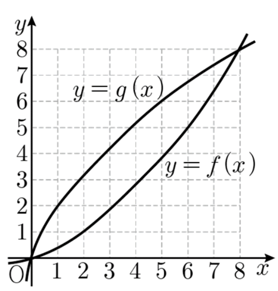
33 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.


가 나 다

다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$　② $g \circ f$　③ $f \circ f$
④ $f+g$　⑤ $f-g$

34 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ g)(1)+(g \circ f)(6)$의 값을 구하시오.



35 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x)=2g(x)+1$
② $h(x)=2g(x)-1$
③ $h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$
④ $h(x)=g\left(\frac{x}{2}+1\right)$
⑤ $h(x)=\frac{1}{2}g(2x-1)+1$

36 두 함수 f, g에 대하여 $f^{-1}(x)=\frac{x-7}{3}$, $g(x)=9x+1$일 때, $f \circ h=g$를 만족시키는 함수 $h(x)$는?

① $h(x)=-3x-4$ ② $h(x)=-3x-2$
③ $h(x)=3x-4$ ④ $h(x)=3x-2$
⑤ $h(x)=3x+2$

37 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x+k & (x<1) \\ 2x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

38 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x+k & (x<2) \\ 2x+5 & (x \geq 2) \end{cases}$의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(9)$의 값을 m이라 하자. 이때 m^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

39 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)=3$, $(g \circ f^{-1})(3)=8$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

40 정의역이 $\{x \mid x \geq 5\}$인 함수 $f(x)=x^2-10x+28$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b)라 할 때 ab의 값을 구하시오.

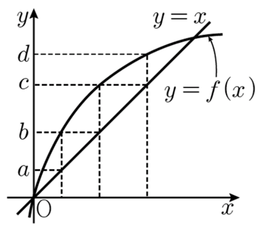
41 정의역이 $\{x|x \geq 3\}$인 함수 $f(x)=x^2-6x+10$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때 ab의 값을 구하시오.

42 [2018년 6월 고2 이과 13번 변형]

$k<0$인 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^2-4x+k(x \geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POH의 넓이가 18일 때, k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① -6　② -5　③ -4
④ -3　⑤ -2

43 다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(g \circ g \circ g)(d)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① 0　② a　③ b
④ c　⑤ d

44 함수 $y=|3x-12|+5$의 그래프와 직선 $y=mx-2$가 만나지 않도록 하는 정수 m의 개수를 구하시오.

45 두 함수 $f(x)=x+10$,
$g(x)=\begin{cases} -3x-7 & (x<0) \\ x^2-8ax-7 & (x \geq 0) \end{cases}$에 대하여
합성함수 $f \circ g$의 치역이 $\{y|y \geq -61\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

46 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \dfrac{2}{3}x-9 & (x<0) \end{cases}$ 일 때,
방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합을 구하시오.
(단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 233~261p

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

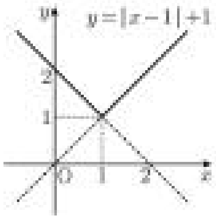
실시일자	-	교재 오답	이름
46문제 / DRE수학			

01 정답 ①

해설 $|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\ge 1)\\ 1-x & (x<1)\end{cases}$이므로

$y=\begin{cases}(x-1)+1=x & (x\ge 1)\\ 1-x+1=-x+2 & (x<1)\end{cases}$

따라서 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



02 정답 ⑤

해설 $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=1,\ f(5)=4,$
$f(6)=6$이므로
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=5$

03 정답 -3

해설 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-1)=-3$

04 정답 1

해설 $f^{-1}(4)=3$이므로 $f^{-1}(a)+3=5$이다.
$\therefore f^{-1}(a)=2$
$\therefore a=1$

05 정답 ③

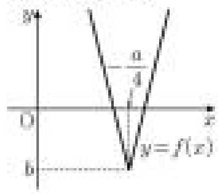
해설 합성함수 이해하기
$(g\circ f)(3)+(g\circ f)^{-1}(9)$
$=(g\circ f)(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(9)$
$=g(f(3))+f^{-1}(g^{-1}(9))$
$=g(1)+f^{-1}(7)$
$=6+6=12$

06 정답 ②

해설 합성함수 이해하기
$(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(6)=2$

07 정답 10

해설 $f(x)=|4x+a|+b=\left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$의 그래프는
$y=|4x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$만큼,
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로
다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=-\frac{a}{4}$일 때
최솟값 b를 가지므로
$-\frac{a}{4}=3,\ b=-2$
따라서 $a=-12,\ b=-2$이므로
$b-a=-2-(-12)=10$

08 정답 $-\frac{1}{2}$

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+a)$
$=-(2x+a)+1=-2x-a+1$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$
$=2(-x+1)+a=-2x+2+a$
이 때, $g\circ f=f\circ g$이므로
$-2x-a+1=-2x+2+a$
$2a=-1$
$\therefore a=-\frac{1}{2}$

09 정답 ②

해설 $h(2)=k$라 하면 $f(h(2))=g(2)$이므로

$f(k)=-2$

$f(k)=\frac{1}{3}k+1$이므로

$\frac{1}{3}k+1=-2$ $\quad\therefore k=-9$

$\therefore h(2)=-9$

10 정답 ②

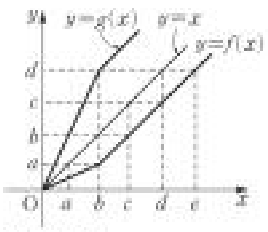
해설 $g(p)=c,\ f(c)=b$이므로

$(f\circ g)(p)=f(g(p))$

$=f(c)=b$

11 정답 ④

해설



위 그림에서

$(g\circ f)(e)=g(f(e))=g(b)=d$

12 정답

해설 함수 g는 일대일대응이므로 $g(6)=4$ 또는 $g(6)=2$

집합 X의 모든 원소 k에 대하여 $f(k)\neq g(k)$이므로

$f(6)=2$에서 $g(6)=4,\ g(4)=2$

$f(4)=6$에서 $f^{-1}(6)=4$

따라서 $f^{-1}(6)+g(4)=4+2=6$

13 정답 ③

해설 함수 g는 일대일대응이므로 $g(6)=3$ 또는 $g(6)=9$

집합 X의 모든 원소 k에 대하여 $f(k)\neq g(k)$이므로

$f(6)=3$에서 $g(6)=9$이고 $g(9)=3$,

$f(9)=6$에서 $f^{-1}(6)=9$

$\therefore f^{-1}(6)+g(9)=9+3=12$

14 정답 9

해설 함수 $y=f(x)$는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

따라서 공역과 치역이 같고 $y=f(x)$의 기울기가 음수인 일차함수이므로 $f(2)=a,\ f(8)=1$이다.

$f(8)=-\frac{1}{2}\cdot 8+b=1$

$\therefore b=5$

$f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+b=a$에서 $-1+b=a$

$\therefore a=4$

따라서 $a+b=4+5=9$

15 정답 -4

해설 $f(x)=-x^2+4x+28=-(x-2)^2+32$이고

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$a\leq 2,\ f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $-a^2+4a+28=a$

$a^2-3a-28=0,\ (a+4)(a-7)=0$

$\therefore a=-4\ (\because a\leq 2)$

16 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\begin{cases}2x+3\ (x\geq 0)\\ ax+b\ (x<0)\end{cases}$ 의 역함수가 존재하려면

함수 f가 일대일대응 이어야한다.

(i) $x=0$에서의 두 일차함수의 함숫값이 서로 같아야 하므로 $b=3$

(ii) 두 일차함수의 그래프의 기울기의 부호가 같아야 하므로 $a>0$

$(i),\ (ii)$에서 $a>0,\ b=3$

17 정답 $\frac{2}{3}$

해설 $y=3x+1$로 놓으면 $3x=y-1$

$\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$의 x절편이 1, y절편이 $-\frac{1}{3}$이므로

$a=1,\ b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$

18 정답 6

해설 $(f \circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f^{-1}(4)=f(4)=2$이고

$f^{-1}(4)=2$이므로

$f(2)=4$

$\therefore f^{-1}(4)+f(2)=6$

19 정답 13

해설 $f \circ h=g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h)=f^{-1} \circ g$

$f^{-1} \circ (f \circ h)=(f^{-1} \circ f) \circ h=I \circ h=h$ (단, I 는 항등함수)

$\therefore h=f^{-1} \circ g$

한 편, $f(x)=2x-1$ 에서 $y=2x-1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(y+1)$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{1}{2}(x+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1)$

$h(x)=(f^{-1} \circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(-4x+5)$

$=\frac{1}{2}(-4x+5+1)=-2x+3$

$\therefore h(-5)=-2 \cdot (-5)+3=13$

20 정답 -1

해설 $g(2)=2^2+2=6$이므로

$(g^{-1} \circ f)^{-1}(2)=(f^{-1} \circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))$

$=f^{-1}(6)$

$f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로

$k^2+4k+9=6$, $(k+1)(k+3)=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k \geq -2$)

21 정답 -2

해설 $f^{-1}(b)=a \longleftrightarrow f(a)=b$이므로

그래프를 이용하여 $f^{-1}(3)$의 값을 찾는다.

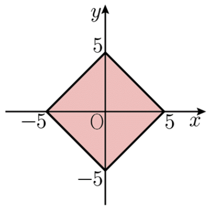
$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$\therefore a=0$

$\therefore (g \circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))=g(0)=-2$

22 정답 ①

해설 $|x|+|y|=5$의 그래프는 다음과 같이 마름모의 형태이다.



따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10=50$

23 정답 ②

해설 ⅰ) $x<0$ 일 때,

$f(x)=-3x+4a$

ⅱ) $0 \leq x<a$ 일 때, $f(x)=-x+4a$

ⅲ) $a \leq x<3a$ 일 때, $f(x)=x+2a$

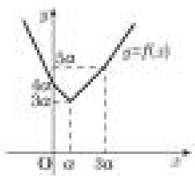
ⅳ) $x \geq 3a$ 일 때,

$f(x)=3x-4a$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같고

최솟값은 $3a$ 이므로

$3a=6 \quad \therefore a=2$



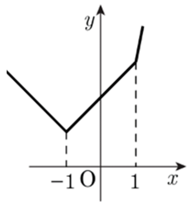
24 정답 ③

해설 (i) $x \leq -1$일 때, $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= -(x-1) + x - (x+1)$
$= -x$

(ii) $-1 < x \leq 1$일 때, $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= -(x-1) + x + (x+1)$
$= x+2$

(iii) $1 < x$일 때, $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= (x-1) + x + (x+1)$
$= 3x$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 함수의 그래프는



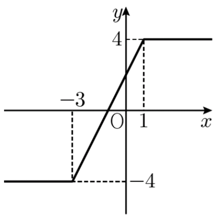
25 정답 8

해설 (ⅰ) $x < -3$일 때
$y = |x+3| - |x-1|$
$= -x-3-(-x+1) = -4$

(ⅱ) $-3 \leq x < 1$일 때
$y = |x+3| - |x-1|$
$= x+3-(-x+1) = 2x+2$

(ⅲ) $x \geq 1$일 때
$y = |x+3| - |x-1|$
$= x+3-(x-1) = 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $y = |x+3| - |x-1|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $M = 4$, $m = -4$이므로 $M - m = 8$

26 정답 ④

해설 $f \circ g = g \circ f$에서 $f(g(x)) = g(f(x))$ $\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x = 2$를 대입하면
$f(g(2)) = g(f(2))$, $f(5) = g(7)$
$\therefore g(7) = 2$
㉠의 양변에 $x = 7$을 대입하면
$f(g(7)) = g(f(7))$, $f(2) = g(3)$
$\therefore g(3) = 7$

27 정답 1

해설 $f(3x-1) = x+3$에서 $3x-1 = t$로 놓으면
$x = \dfrac{t+1}{3}$
$\therefore f(t) = \dfrac{t+1}{3} + 3 = \dfrac{1}{3}t + \dfrac{10}{3}$
t 대신 $\dfrac{1}{3}x - 1$을 대입하면
$f\left(\dfrac{1}{3}x-1\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}x-1\right) + \dfrac{10}{3} = \dfrac{1}{9}x + 3$
따라서 $a = \dfrac{1}{9}$, $b = 3$이므로
$3ab = 1$

28 정답 23

해설 $g\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = 3f(x) + 1$
$= 3(x^2 + 3x) + 1$
$= 3x^2 + 9x + 1$
에서 $g\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = 3x^2 + 9x + 1$ $\cdots$ ㉠
$\dfrac{x+1}{3} = t$라 하면 $x = 3t - 1$이고, 이를 ㉠에 대입하면
$g(t) = 3(3t-1)^2 + 9(3t-1) + 1$
$= 27t^2 - 18t + 3 + 27t - 9 + 1$
$= 27t^2 + 9t - 5$
따라서 $a = 27$, $b = 9$, $c = -5$이므로
$a - b - c = 27 - 9 - (-5) = 23$

29 정답 ④

해설 $(h \circ f)(x) = g(x)$에서 $f(x) = t$라 하면
$t = 3x - 1$, $3x = t + 1$
이때 $x = \dfrac{1}{3}(t+1)$을 함수 $g(x)$에 대입하면
$h(t) = -3 \cdot \dfrac{1}{3}(t+1) + 4 = -t + 3$
$\therefore h(x) = -x + 3$

30 **정답** 20

해설 $f^1(x)=f(x)=-x-1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x-1)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x-1$

$\vdots$

즉, $f^n(x)=\begin{cases}-x-1 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$\therefore f^{10}(10)-f^9(9)=10-(-9-1)=20$

31 **정답** 20

해설 $f^1(x)=x+1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(x+1)$
$=(x+1)+1=x+2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x+2)$
$=(x+2)+1=x+3$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=x+n$

따라서 $f^{10}(x)=x+10$이므로 $f^{10}(a)=a+10=30$

$\therefore a=20$

32 **정답** -99

해설 $f^1(x)=f(x)=-x+1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+1)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+1$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여

$f^{2n-1}(x)=-x+1$, $f^{2n}(x)=x$

따라서 $f^{99}(x)=-x+1$이므로

$f^{99}(a)=-a+1=100$, $a=-99$

33 **정답** ①

해설 그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x)=x+1$, $g(x)=2x$, $w(x)=2x+1$ 이다.

$f(g(x))=f(2x)=2x+1=w(x)$ 이므로

$\therefore\ w=f\circ g$

34 **정답** 7

해설 $(f\circ g)(1)+(g\circ f)(6)=f(g(1))+g(f(6))$
$=f(2)+g(5)$
$=1+6$
$=7$

35 **정답** ③

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}(x)=g(x)$

이때 $y=f(2x-1)$의 역함수를 구하기 위해

x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(2y-1)$, $f^{-1}(x)=2y-1$

$\therefore g(x)=2y-1$

위의 식을 y에 관하여 정리하면

$g(x)+1=2y$

$\therefore y=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$

따라서 구하는 역함수 $y=h(x)$는

$h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}$

36 **정답** ④

해설 $f\circ h=g$에서 $f^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$
$=f^{-1}(9x+1)$
$=\frac{9x+1-7}{3}=3x-2$

37 **정답** ⑤

해설 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

따라서 $1+k=2+3$이므로 $k=4$

$x<1$일 때, $f(x)=x+4<5$

$x\geq 1$일 때, $f(x)=2x+3\geq 5$

$f^{-1}(6)=a$라 하면 $f(a)=6$이므로

$2a+3=6$ $\qquad\therefore a=\frac{3}{2}$

$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=b$라 하면 $f(b)=\frac{3}{2}$이므로

$b+4=\frac{3}{2}$ $\qquad\therefore b=-\frac{5}{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))$
$=f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

38 정답 25

해설 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
따라서 $2+k=4+5$이므로 $k=7$
$x<2$일 때, $f(x)=x+7<9$
$x \geq 2$일 때, $f(x)=2x+5 \geq 9$
$f^{-1}(9)=a$라 하면 $f(a)=9$이므로
$2a+5=9$ $\quad\therefore a=2$
$f^{-1}(2)=b$라 하면 $f(b)=2$이므로
$b+7=2$ $\quad\therefore b=-5$
$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(9)=f^{-1}(f^{-1}(9))$
$=f^{-1}(2)=-5$이므로
$m=-5$이고 $m^2=25$

39 정답 11

해설 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)=3$에서 $g(f(3))=2$
$g(f(3))=g(4)=4a+b=2$
한편, $f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$
$k+1=3$
$\therefore k=2$
$(g \circ f^{-1})(3)=8$에서
$(g \circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))=g(2)=2a+b=8$
따라서 $4a+b=2$, $2a+b=8$을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=14$
$\therefore a+b=11$

40 정답 49

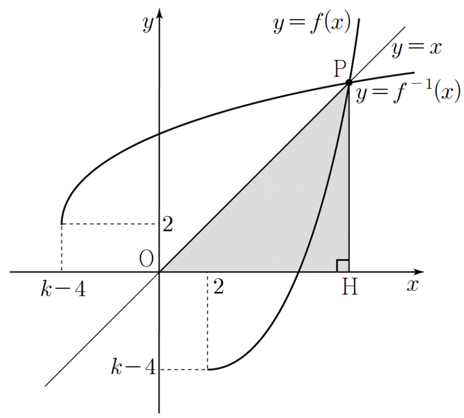
해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$x^2-10x+28=x$에서
$x^2-11x+28=0$, $(x-4)(x-7)=0$
$\therefore x=7$ ($\because x \geq 5$)
따라서 교점의 좌표는 $(7, 7)$이므로 $a=7$, $b=7$
$\therefore ab=49$

41 정답 25

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$x^2-6x+10=x$에서
$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=5$ ($\because x \geq 3$)
따라서 교점의 좌표는 $(5, 5)$이므로 $a=5$, $b=5$
$\therefore ab=25$

42 정답 ①

해설 $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4(x \geq 2)$
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.



따라서 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로
점 P의 좌표를 (t, t) 라 하면 삼각형 POH의 넓이가 18이므로 $\frac{1}{2} \cdot t \cdot t=18$, $t^2=36$이다.
$\therefore t=6 (\because t \geq 2)$
한편, 점 P$(6, 6)$은 함수 $f(x)=x^2-4x+k$의 그래프 위의 점이므로 $f(6)=6^2-4 \cdot 6+k=6$ 이다.
$\therefore k=-6$

43 정답 ②

해설 $(g\circ g\circ g)(d)=g(g(g(d)))$

$g(d)=k$이라 하면 $f(k)=d$

$\therefore k=c$

$g(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$

$\therefore l=b$

$g(b)=m$이라 하면 $f(m)=b$

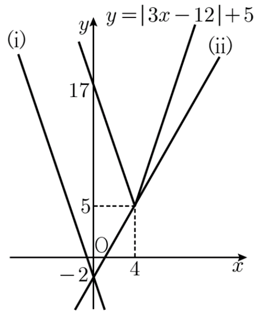
$\therefore m=a$

$\therefore (g\circ g\circ g)(d)=g(g(g(d)))=g(g(c))=g(b)$
$\qquad =a$

44 정답 5

해설 $y=|3x-12|+5=\begin{cases}3x-7 & (x\geq 4)\\ -3x+17 & (x<4)\end{cases}$이므로

$y=|3x-12|+5$의 그래프는 다음 그림과 같고,
직선 $y=mx-2$는 m의 값에 관계없이
점 $(0,\ -2)$를 지난다.



(ⅰ) 직선 $y=mx-2$가
직선 $y=|3x-12|+5\ (x<4)$, 즉
$y=-3x+17$과 평행할 때, $m=-3$

(ⅱ) 직선 $y=mx-2$가 점 $(4,\ 5)$를 지날 때,
$5=4m-2$
$\therefore m=\dfrac{7}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는
$-3\leq m<\dfrac{7}{4}$이므로
정수 m은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다.

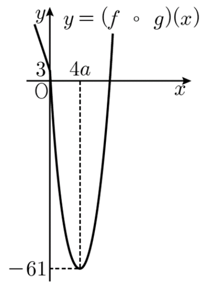
45 정답 2

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}-3x+3 & (x<0)\\ x^2-8ax+3 & (x\geq 0)\end{cases}$

그런데 $a\leq 0$이면
함수 $y=x^2-8ax+3=(x-4a)^2+3-16a^2$의
그래프의 꼭짓점의 x좌표가 0 또는 음수이므로
합성함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq 3\}$이 되어 조건을
만족하지 않는다.

$\therefore a>0$

이때 함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq -61\}$이려면
다음 그림과 같이 함수 $y=(x-4a)^2+3-16a^2$의
그래프의 꼭짓점의 y좌표가 -61이어야 한다.



따라서 $3-16a^2=-61$이므로
$a^2=4$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$

46 정답 -18

해설 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $y=f(x)$와
$y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
또한, 그 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의
교점의 x좌표와 같으므로
$2x-9=x$에서 $x=9$
$\dfrac{2}{3}x-9=x$에서 $x=-27$
따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은
$9+(-27)=-18$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 267~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{x}$ ③ $\frac{1}{x-1}$
④ $\frac{x}{x-1}$ ⑤ $\frac{x+1}{x(x-1)}$

02 함수 $y=-\frac{2}{x}-3$의 그래프의 점근선의 방정식은?

① $x=0,\ y=3$ ② $x=0,\ y=-3$
③ $x=1,\ y=3$ ④ $x=-1,\ y=3$
⑤ $x=1,\ y=-3$

03 빈칸에 알맞은 말로 올바른 것을 고르면?

$$y=\frac{2x+1}{x-5},\ y=\frac{x^2+3}{x-2},\ y=\frac{5x-5}{x+1}$$

위 주어진 함수들은 $\square$함수 이면서 $\square$함수가 아니다.

① 다항, 유리 ② 상수, 다항
③ 유리, 다항 ④ 항등, 다항
⑤ 항등, 유리

04 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$를 간단히 하면?

① 0 ② 1 ③ $a+b$
④ bc ⑤ $a+b+c$

05 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}$의 값을 구하시오.

06 $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$에 대하여 $f(k)=-\dfrac{1}{2}$를 만족시키는 상수 k의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

07 분수식 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$을 간단히 하면?

① 1　② $1-a$　③ $1-a^2$
④ $1+a^2$　⑤ $1+a$

08 $2x=3y$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$의 값은?

① $\dfrac{7}{13}$　② $\dfrac{6}{13}$　③ $\dfrac{7}{12}$
④ $\dfrac{19}{12}$　⑤ $\dfrac{7}{5}$

09 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
② 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$이다.
③ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.
④ 그래프는 모든 사분면을 지난다.
⑤ 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동 한 것이다.

10 함수 $y=\dfrac{bx-6}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

11 유리함수 $y=\dfrac{-4x-3}{x+2}$의 정의역은 $x\neq a$인 모든 실수이고, 치역은 $y\neq b$인 모든 실수이다. 이때 ab의 값은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

12 함수 $y=\dfrac{ax+7}{x+b}$의 그래프가 두 직선 $y=x+3$과 직선 $y=-x-2$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

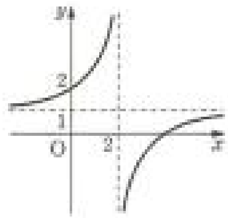
① $-\dfrac{5}{4}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

13 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 2, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $(k,\ -2)$를 지난다. k의 값을 구하시오.

14 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$에 대하여 $f=f^{-1}$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

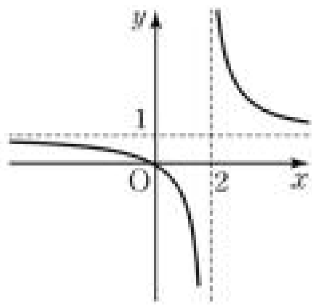
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?



① 8 ② 6 ③ -6 ④ -8 ⑤ -12

16 함수 $y=\dfrac{k}{x+p}+q$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 k, p, q에 대하여 $k+p+q$의 값은?



① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

17 이차부등식 $x^2-x-2\leq 0$을 만족시키는 x에 대하여 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

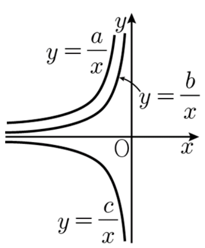
① $\dfrac{5}{2}$
② $\dfrac{11}{4}$
③ 3
④ $\dfrac{13}{4}$
⑤ $\dfrac{7}{2}$

18 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$이라 하자. 등식

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)=\dfrac{a}{(x+b)(x+c)}$

가 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이다.)

19 다음 그림은 세 함수 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$, $y=\dfrac{c}{x}$ 의 그래프의 일부분이다. 상수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?



① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<b<a$

20 $3\leq x\leq 5$에서 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 한 점에서 만날 때, 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 $M+3m$의 값을 구하시오.

21 [2018년 9월 고2 이과 8번/3점]
두 상수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x|2\leq x\leq a\}$인 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$의 치역이 $\{y|-1\leq y\leq b\}$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>2$, $b>-1$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

22 함수 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 겹친다. 이때 상수 a, b, k의 합 $a+b+k$의 값을 구하시오.

23 함수 $y=\frac{2x+a-4}{x-3}$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않게 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

24 함수 $y=\frac{2x+k-2}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25 $3 \leq x \leq 5$에서 함수 $y=\frac{3x-a}{x+1}$의 최댓값은 1, 최솟값은 b라고 할 때 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>-3$)

26 함수 $f(x)=\frac{2x}{-x+2}$, $g(x)=\frac{x-1}{3x}$의 역함수를 각각 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$라 할 때, $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

27 두 유리함수 $f(x)=\frac{4x}{x+1}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$에 대하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)=3$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

28 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$으로 정의할 때, $f^{222}(111)$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

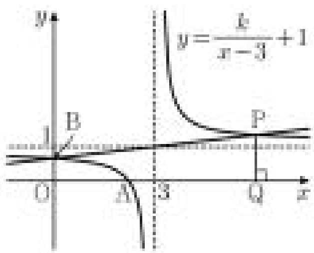
29 함수 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$에 대하여

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$,

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1+f^2(x)}{1-f^2(x)}$, $\cdots$ 으로 정의한다.

이때 $f^{99}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

30 아래 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-3}+1$ $(0<k<3)$의 그래프와 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $k=2$일 때, 점 P의 좌표는 $\left(6,\ \dfrac{5}{3}\right)$이다.

ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB와 직선 AP는 서로 수직이다.

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이가 자연수일 때, k의 값은 $3-\sqrt{6}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a-d=0$ ② $a+d=0$
③ $ad=1$ ④ $ad=-1$
⑤ $ad-bc=0$

32 유리함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-b}+c$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c는 실수이고, $a\neq0$이다.)

<보기>

ㄱ. $f(1)=f^{-1}(1)$이면 $b-c=0$이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(0)=0$이면 $a=-b^2$이다.

ㄷ. $a<0$일 때 $x_1<b<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

33 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right|$에 대하여 $a<b$인 두 양수 a, b가 $f(a)=f(b)$를 만족시킬 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $0<f(a)<2$

ㄴ. $\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{5}{2}$

ㄷ. $\dfrac{f(a)+f(b)}{7}=\dfrac{a+b}{(a+1)(b+1)}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34 [2009년 3월 고2 19번 변형]

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-9}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a\neq0$이다.)

① $-\dfrac{9}{2}$ ② $-\dfrac{17}{4}$ ③ -4
④ $-\dfrac{15}{4}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수) 267~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
34문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01

정답 ①

해설 $1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x(x-1)}$

$=\dfrac{(x-1)^2+x}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x^2-x+1-1}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x^2-x}{x(x-1)}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)}$

$=1$

02

정답 ②

해설 함수 $y=-\dfrac{2}{x}-3$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=-3$이다.

03

정답 ③

해설 주어진 함수들은 유리함수면서 다항함수가 아닌 분수함수이다.

04

정답

해설 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

05

정답 $\dfrac{5}{11}$

해설 (주어진 식)$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{5}{11}$

06

정답 ③

해설 $f(x)=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=1-\dfrac{x}{x-1}$

$=\dfrac{-1}{x-1}$

따라서 $f(k)=\dfrac{-1}{k-1}=-\dfrac{1}{2}$에서

$k=3$

07

정답 ③

해설 준식 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a-1}}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}}$

$=\dfrac{a-1}{a-1-a}\times\dfrac{a+1}{a+1-a}$

$=\dfrac{a-1}{-1}\times\dfrac{a+1}{1}=1-a^2$

08

정답 ⑤

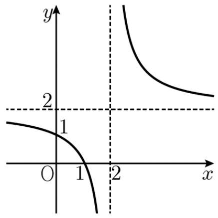
해설 $2x=3y$에서 $x=\dfrac{3}{2}y$

$\therefore \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{\dfrac{9}{4}y^2-\dfrac{3}{2}y^2+y^2}{\dfrac{9}{4}y^2-y^2}=\dfrac{7}{5}$

09

정답 ④

해설 $y=\frac{2x-2}{x-2}=\frac{2}{x-2}+2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나므로 옳지 않은 것은 ④이다.

10

정답 6

해설 $y=\frac{bx-6}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab-6}{x-a}$

$=\frac{ab-6}{x-a}+b$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$이므로

$a=4$, $b=2$

$\therefore a+b=6$

11

정답 ③

해설 유리함수 $y=\frac{-4x-3}{x+2}$의 정의역은 $x\neq a$인 모든 실수이고, 치역은 $y\neq b$인 모든 실수이면 $x=a$, $y=b$는 주어진 함수의 점근선이다.

따라서 $y=\frac{-4x-3}{x+2}=-4+\frac{5}{x+2}$에서

점근선은 $x=-2$, $y=-4$이므로

$ab=(-2)\cdot(-4)=8$

12

정답 ⑤

해설 $y=\frac{ax+7}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+7}{x+b}=\frac{-ab+7}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$

점근선의 교점 $(-b,\ a)$가 두 직선 $y=x+3$,

$y=-x-2$의 교점이므로 $a=-b+3$, $a=b-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$

13

정답 1

해설 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 2,

y축 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{x-2}-1$

이 함수의 그래프가 점 $(k,\ -2)$를 지나므로

$-2=\frac{1}{k-2}-1\quad\therefore k=1$

14

정답 ②

해설 $y=\frac{ax}{x+1}$라 하면

$y(x+1)=ax$

$y=(a-y)x\qquad\therefore x=\frac{y}{a-y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x}{a-x}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x}{a-x}$

$f=f^{-1}$이므로 $\frac{ax}{x+1}=\frac{x}{a-x}$

$\therefore a=-1$

15

정답 ①

해설 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=2$, $y=1$이므로

$y=\frac{k}{x-2}+1\quad\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{-2}+1\qquad\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-2}{x-2}+1=\frac{x-4}{x-2}$

$\therefore a=1,\ b=-4,\ c=-2$

$\therefore abc=8$

16

정답 ④

해설 함수 $y=\frac{k}{x+p}+q$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=2$, $y=1$이므로 $p=-2$, $q=1$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-2}+1$의 그래프가 점

$(0,\ 0)$를 지나므로 $0=\frac{k}{-2}+1\qquad\therefore k=2$

$\therefore k+p+q=2+(-2)+1=1$

17 정답 ②

해설 부등식 $x^2-x-2\le 0$에서

$(x+1)(x-2)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 2$

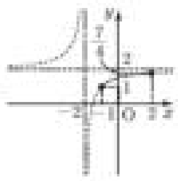
$y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}+2$이므로

$y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$x=-1$일 때, 최솟값 1,

$x=2$일 때 최댓값 $\dfrac{7}{4}$을 갖는다.



즉, $m=1$, $M=\dfrac{7}{4}$이므로 $M+m=\dfrac{7}{4}+1=\dfrac{11}{4}$

18 정답 22

해설 $f(n)=\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$

$=\dfrac{1}{x+n-1}-\dfrac{1}{x+n}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+10}-\dfrac{1}{x+11}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+11}$

$=\dfrac{11}{x(x+11)}$

따라서 $a=11$, $b=0$, $c=11$이므로

$a+b+c=22$

19 정답 ①

해설 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$, $b<0$

이때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다

원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b| \qquad \therefore a<b$

$y=\dfrac{c}{x}$의 그래프는 제3사분면을 지나므로

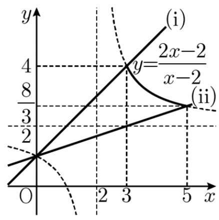
$c>0$

$\therefore a<b<c$

20 정답 2

해설 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$이므로

$3\le x\le 5$에서 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=ax+1$은 a값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 4)$를 지날 때,

$4=3a+1 \qquad \therefore a=1$

(ii) 직선 $y=ax+1$이 점 $\left(5,\ \dfrac{8}{3}\right)$를 지날 때,

$\dfrac{8}{3}=5a+1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프와 직선

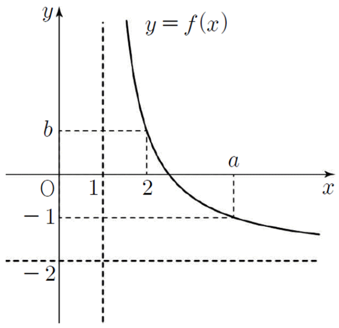
$y=ax+1$이 한 점에서 만나려면 $\dfrac{1}{3}\le a\le 1$

따라서 $M=1$, $m=\dfrac{1}{3}$이므로 $M+3m=2$

21 정답 ①

해설 유리함수의 성질 이해하기

$f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$이라 하면



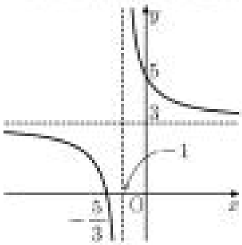
$f(2)=b=1$, $f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2=-1$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$

22 정답 0

해설 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+3$이므로

그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{2}{x}$의

그래프와 겹친다.

$\therefore a=1,\ b=-3,\ k=2$

$\therefore a+b+k=0$

23 정답 10

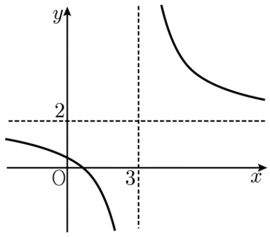
해설 $y=\dfrac{2x+a-4}{x-3}=\dfrac{a+2}{x-3}+2$

따라서 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=2$

이때 함수 $y=\dfrac{2x+a-4}{x-3}$의 그래프가 제3사분면을

지나지 않으려면 다음 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이

0보다 크거나 같아야 한다.



즉, $\dfrac{a-4}{-3}\geq 0$이어야 하므로

$a\leq 4$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$

24 정답 ①

해설 $y=\dfrac{2x+k-2}{x+1}$

$=\dfrac{2(x+1)+k-4}{x+1}=\dfrac{k-4}{x+1}+2$

따라서 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=2$

이때 함수 $y=\dfrac{2x+k-2}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을

지나려면 $k-4<0$이어야 한다.

$\therefore k<4$ $\quad\cdots$ ㉠

또, $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$k-2<0$

$\therefore k<2$ $\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<2$이므로 자연수 k는 1의 1개이다.

25 정답 9

해설 $y=\dfrac{3x-a}{x+1}$를 변형하면

$y=\dfrac{-a-3}{x+1}+3$

이때 $a>-3$이므로 $-a-3<0$이고,

점근선은 $x=-1$, $y=3$이다.

따라서 $y=\dfrac{3x-a}{x+1}$의 최댓값은 $x=5$일 때

$\dfrac{15-a}{6}$이고, 최솟값은 $x=3$일 때 $\dfrac{9-a}{4}$이다.

이때 $\dfrac{15-a}{6}=1$, $\dfrac{9-a}{4}=b$이므로

$a=9$, $b=0$

$\therefore a+b=9$

26 정답 $\dfrac{1}{19}$

해설 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$f(3)=\dfrac{6}{-3+2}=-6$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(6)$

$g^{-1}(-6)=k$라 하면 $g(k)=-6$

$\dfrac{k-1}{3k}=-6$에서 $k-1=-18k$, $19k=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{19}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=\dfrac{1}{19}$

27 정답 4

해설 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)$

$=(f^{-1}\circ g)(a)$ ($\because g\circ g^{-1}=I$)

$=f^{-1}(g(a))$

$f^{-1}(g(a))=3$에서 $f(3)=g(a)$이므로

$\dfrac{12}{4}=\dfrac{2a+1}{a-1}$,

$12a-12=8a+4$

$\therefore a=4$

28 정답 111

해설 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{\dfrac{-1}{x-1}-1}{\dfrac{-1}{x-1}}=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{222}(111)=f^{3\cdot 74}(111)=111$

29 정답 -3

해설 함수 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$에서

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f^2\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

$$f^3\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

$$f^4\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(-3)=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

$\vdots$

따라서 n이 자연수일 때

$f^n\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값은 $\frac{1}{3}$, 2, -3, $-\frac{1}{2}$이 순서대로

반복해서 나타난다.

이때 $99=4\cdot 24+3$이므로

$f^{99}\left(-\frac{1}{2}\right)=f^3\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$

30 정답 ③

해설 $y=\dfrac{k}{x-3}+1$에서

$y=0$이면 $x=3-k$이므로 $\mathrm{A}(3-k,\ 0)$

$x=0$이면 $y=-\dfrac{k}{3}+1$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{k}{3}+1\right)$

두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(3,\ 1)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(6,\ 1+\dfrac{k}{3}\right)$이다.

ㄱ. $k=2$이면 $\mathrm{P}\left(6,\ \dfrac{5}{3}\right)$이다. (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\frac{k}{3}-1}{3-k}=-\dfrac{1}{3}$

직선 AP의 기울기는 $\dfrac{1+\frac{k}{3}}{3+k}=\dfrac{1}{3}$

따라서 두 직선의 기울기의 곱이 $-\dfrac{1}{9}$이므로 서로 수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. 사각형 PQAB의 넓이는 사각형 OBPQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

사각형 PQAB의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 6-\dfrac{1}{2}\cdot(3-k)\cdot\left(-\dfrac{k}{3}+1\right)$

$=6-\dfrac{1}{6}(3-k)^2$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 $\dfrac{3}{2}$보다 작으므로

S의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\dfrac{1}{6}(3-k)^2=1$이어야 한다.

따라서 방정식 $\dfrac{1}{6}(3-k)^2=1$의 해는

$k=3-\sqrt{6}$ ($\because 0<k<3$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

31 정답 ②

해설 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+b)-\frac{ab}{c}+b}{cx+d}$

$=\dfrac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d}+\dfrac{a}{c}=\dfrac{b(c-a)}{c(cx+d)}+\dfrac{a}{c}$

주어진 분수함수의 점근선은

$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c}=-\dfrac{d}{c},\ a=-d$

$\therefore a+d=0$

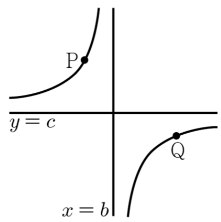
32 정답 ②

해설 ㄱ. [반례] 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}-1$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=f^{-1}(1)=1$이지만 $b=0$, $c=-1$이므로 $b-c\neq 0$이다. (거짓)

ㄴ. 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 두 점근선의 교점 $(b,\ c)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $c=b$이다.

$f(0)=\dfrac{a}{-b}+c=0$에서 $a=bc=b^2$이다. (거짓)

ㄷ. $a<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



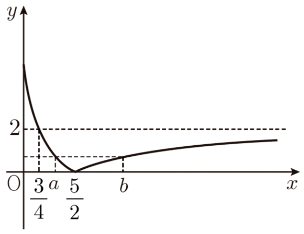
두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$, $\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$에 대하여 $x_1<b<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

33 정답 ③

해설 $f(x)=\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right|=\left|\dfrac{7}{x+1}-2\right|$, $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=2$,

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$이므로 $x>0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위 그림에서와 같이 $0<f(a)=f(b)<2$이다. (참)

ㄴ. 위 그림에서 알 수 있듯이 $0<f(a)<2$이기 위해서는 $\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{5}{2}$이어야 한다. (참)

ㄷ. $f(a)=\dfrac{7}{a+1}-2$, $f(b)=2-\dfrac{7}{b+1}$이므로

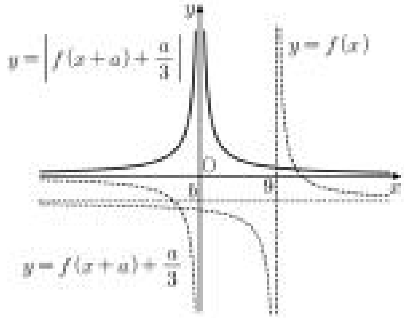
$$\frac{f(a)+f(b)}{7}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}=\frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{b-a}{(a+1)(b+1)}$$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 정답 ④

해설 곡선 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{3}\right|$는

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{3}$의 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{3}$의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 함을 알 수 있다.



$f(x)=\dfrac{a}{x-9}+b$에서

$f(x+a)+\dfrac{a}{3}=\dfrac{a}{x+a-9}+b+\dfrac{a}{3}$이고

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{3}$의 점근선의 방정식은

$x=9-a$, $y=b+\dfrac{a}{3}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$9-a=0$, $b+\dfrac{a}{3}=0$

$\therefore a=9$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{9}{x-9}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=-\dfrac{15}{4}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수) 299~322p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$을 간단히 하면?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

02 $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x})$를 계산하시오.

03 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{y|y\le -3\}$ ② $\{y|y\ge -3\}$ ③ $\{y|y\le 3\}$
④ $\{y|y\ge 3\}$ ⑤ $\{y|y\le 9\}$

04 $1\le x\le 4$에서 함수 $y=\sqrt{5-x}+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

05 $\sqrt{6-|x-3|}+\sqrt{|x-5|-2}$의 값이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오.

06 무리식 $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x+2}}$의 값이 실수가 되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

07 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$ 일 때,
$\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}$ 의 값은?

① -2　② $2a$　③ $2a-2$
④ $-2a$　⑤ 2

08 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|b|$를 간단히 하면?

① $-2a$　② $-a$　③ $a-2b$
④ a　⑤ 0

09 $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 일 때,
상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

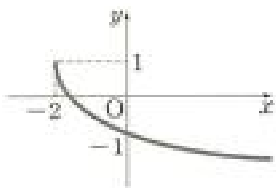
① -3　② -1　③ 5
④ 8　⑤ 10

10 $x=\sqrt{2}+3$일 때, x^3-6x^2+8x+1의 값은?

① $4+\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$
③ 0　④ $4-\sqrt{2}$
⑤ $-3\sqrt{2}$

11 $x=3+2\sqrt{2}$, $y=3-2\sqrt{2}$ 일 때,
$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}$ 의 값을 구하시오.

12 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.



13 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

14 [2017년 11월 고1 4번 변형]

무리함수 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에 대하여 $f(-2)=3$일 때, 상수 k의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

15 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역을 A, 함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

16 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(4,\ 7)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

17 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{2x+6}-2$과 일치한다. $n-m$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

18 다음 세 함수의 그래프가 모두 지나지 않는 사분면은?

$$y=\sqrt{x}+1,\ y=-\sqrt{x}+3,$$
$$y=-\sqrt{-x-4}-2$$

① 제1사분면　② 제2사분면　③ 제3사분면　④ 제4사분면　⑤ 제1, 4사분면

19 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지난다.
② 정의역은 $\{x|x\geq 4\}$이다.
③ 치역은 $\{y|y\geq -5\}$이다.
④ 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1사분면을 지나지 않는다.

20 $0\leq x\leq 3$에서 함수 $y=-\sqrt{x+a}+4$의 최솟값이 2일 때, 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21 $y=\sqrt{x-1}+2$의 역함수는?

① $y=x^2+4x+3\ (x\geq 2)$
② $y=x^2-4x+5\ (x\geq 2)$
③ $y=x^2+4x+3\ (x\geq 1)$
④ $y=x^2-4x+5\ (x\geq 1)$
⑤ $y=x^2-3x+2\ (x\geq 3)$

22 무리함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)=4$이다. 이때 $g(4)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수)

23 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\text{는 양의 유리수})\\ 3x^2 & (x\text{는 양의 무리수})\end{cases}$$ 일 때,

$(f\circ f\circ f)(3)$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

24 정의역이 $\{x|x>4\}$인
두 함수 $f(x)=\dfrac{3x-4}{x-3}$, $g(x)=\sqrt{2x-7}$ 에 대하여
$(g\circ f^{-1})^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

25 정의역이 $\{x|x>2\}$인
두 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{2x-3}$에 대하여
$(g\circ f^{-1})^{-1}(5)$의 값을 구하시오.

26 $x=2+\sqrt{3}$일 때,
$\left|\dfrac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\right|$의 값을 구하시오.

27 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$일 때,
$\dfrac{1}{f(3)}+\dfrac{1}{f(4)}+\dfrac{1}{f(5)}+\cdots+\dfrac{1}{f(2023)}$의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

28 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가
두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는
정수 k의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

29 함수 $y=-\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가
제 4사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

30 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와
그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의
거리가 $2\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

31 함수 $f(x)=\sqrt{3x+6}-2$의 그래프와 역함수 f^{-1}의 그래프는 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 길이는? (단, P의 x좌표는 Q의 x좌표보다 작다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

32 [2015년 11월 고2 문과 15번/4점]
좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{x+4}+1$이 두 직선 $x=0$, $y=-\frac{1}{4}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

33 무리함수 $y=\sqrt{x+3}+4$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y=\sqrt{x+3}+4 \\ y=g(x) \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. 이때 $\alpha^2-9\beta$의 값을 구하시오.

34 두 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k$ $(x \geq 0)$, $g(x)=\sqrt{7x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

35 함수 $f(x)=\sqrt{6x-3}+a$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 이 두 점 사이의 거리가 8일 때, 상수 a의 값은? (단, $-1<a\leq 1$)

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

마플시너지(2025) - 공통수학2 (무리함수) 299~322p

유리함수의 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설
$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2}-1}}=1-\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{2}$$
$\therefore (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$

02 정답 -4

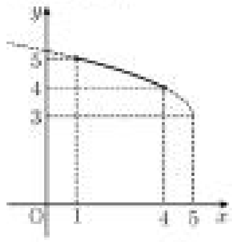
해설 $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x})$
$=(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x})^2$
$=x-4-x$
$=-4$

03 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}-a+6$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지나므로
$a=-\sqrt{-a+a}-a+6,\ 2a=6$
$\therefore a=3$
따라서 $y=-\sqrt{x+3}-3+6$, 즉
$y=-\sqrt{x+3}+3$이므로 이 함수의 치역은 $\{y|y\le 3\}$이다.

04 정답 9

해설 $y=\sqrt{5-x}+3=\sqrt{-(x-5)}+3$이므로
주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $1\le x\le 4$에서 $y=\sqrt{5-x}+3$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 최댓값은 $x=1$일 때, $M=5$,
최솟값은 $x=4$일 때, $m=4$
$\therefore M+m=9$

05 정답 10

해설 $6-|x-3|\ge 0$이므로 $|x-3|\le 6$
$-6\le x-3\le 6$
$\therefore -3\le x\le 9$ $\cdots$ ㉠
$|x-5|-2\ge 0$이므로 $|x-5|\ge 2$
$x-5\le -2$ 또는 $x-5\ge 2$
$\therefore x\le 3$ 또는 $x\ge 7$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\sqrt{6-|x-3|}+\sqrt{|x-5|-2}$의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는
$-3\le x\le 3$ 또는 $7\le x\le 9$
따라서 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9$의 10개이다.

06 정답 14

해설 $5-x\ge 0$이므로
$x\le 5$ $\cdots$ ㉠
$x+2>0$이므로 $x>-2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-2<x\le 5$
따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 구하는 합은
$-1+0+1+2+3+4+5=14$

07 정답 ⑤

해설 $\sqrt{\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}=-\dfrac{\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}}$ 이려면 $\mathrm{B}\geq 0,\ \mathrm{A}<0$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$ 에서 $a+1\geq 0$,

$a-1<0$이다.

$\therefore\ -1\leq a<1$

$\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}$

$=|a+1|+|a-1|$

$=a+1-(a-1)=2$

08 정답 ④

해설 $a\geq 0,\ b<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-|b|=|a-b|-|b|$

$=(a-b)-(-b)=a$

09 정답

해설 $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{-4+2\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=5$

10 정답 ①

해설 $x=\sqrt{2}+3$에서 $x-3=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$x^2-6x+9=2\qquad \therefore x^2-6x=-7$ ……㉠

$\therefore\ x^3-6x^2+8x+1=x(x^2-6x)+8x+1$

$=-7x+8x+1\ (\because ㉠)$

$=x+1$

$=\sqrt{2}+3+1$

$=4+\sqrt{2}$

11 정답 4

해설 $x+y=6,\ xy=1$

$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}$를 제곱하면

$(\sqrt{2x}+\sqrt{2y})^2=2x+2\sqrt{4xy}+2y$

$=2(x+y)+4\sqrt{xy}$

$=2\cdot 6+4\sqrt{1}$

$=16$

$\therefore\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=\sqrt{16}=4\ (\because\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y}>0)$

12 정답 8

해설 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1\ (a>0)$로 놓으면

이 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2$

$2a=4$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ y=-\sqrt{2(x+2)}+1$

$=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $-\sqrt{2x+4}+1=-\sqrt{ax+b}+c$이므로

$a=2,\ b=4,\ c=1$

$\therefore\ abc=8$

13 정답 ②

해설 주어진 함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는

$y=-\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2\quad (a>0)$ ……㉠

㉠의 그래프가 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{4a}+2$

$\sqrt{4a}=2\qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{x-1}+2$

따라서 $a=1,\ b=-1,\ c=2$이므로

$abc=1\cdot(-2)\cdot 2=-2$

14 정답 ③

해설 $f(-2)=3$이므로 $f(x)=\sqrt{2x+k}$에서

$\sqrt{-4+k}=3$

$\therefore\ k=13$

15 정답 ②

해설 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역은

$5x+2\geq 0$에서 $x\geq -\frac{2}{5}$ 이므로

$\left\{x \mid x\geq -\frac{2}{5}\right\}$ 이다.

$\therefore A=\left\{x \mid x\geq -\frac{2}{5}\right\}$

함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역은

$16-4x\geq 0$에서 $x\leq 4$이므로 $\{x \mid x\leq 4\}$이다.

따라서 $A\cap B=\left\{x \mid -\frac{2}{5}\leq x\leq 4\right\}$이므로 $A\cap B$에

속하는 정수는 $0, 1, 2, 3, 4$의 5개이다.

16 정답 8

해설 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-2)}+3$

이 함수의 그래프가 점 $(4, 7)$을 지나므로

$7=\sqrt{2a}+3,\ \sqrt{2a}=4$

$2a=16\quad \therefore a=8$

17 정답 ①

해설 $y=\sqrt{2x+6}-2=\sqrt{2(x+3)}-2$이므로

$y=\sqrt{2x}$ 를 x축으로 -3만큼

y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.

따라서 $m=-3,\ n=-2$ 이므로

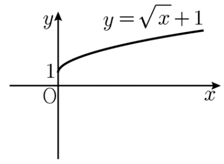
$\therefore n-m=1$

18 정답 ②

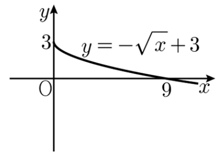
해설 세 함수 $y=\sqrt{x}+1,\ y=-\sqrt{x}+3,$

$y=-\sqrt{-x-4}-2$의 그래프와 그 그래프가 지나지

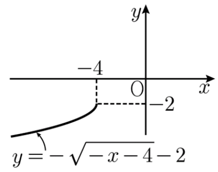
않는 사분면은 다음과 같다.



⇨ 제2, 3, 4사분면



⇨ 제2, 3사분면



⇨ 제1, 2, 4사분면

따라서 주어진 세 함수의 그래프가 모두 지나지 않는

사분면은 제2사분면이다.

19 정답 ⑤

해설 ① $y=\sqrt{8-2x}-3$에 $y=0$을 대입하면 $0\neq\sqrt{7}-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$의 그래프는

점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나지 않는다. (거짓)

② $8-2x\geq 0$에서 $x\leq 4$

따라서 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$이다. (거짓)

③ $\sqrt{8-2x}\geq 0$이므로

$y=\sqrt{8-2x}-3\geq 0-3=-3$

따라서 치역은 $\{y|y\geq -3\}$이다. (거짓)

④ $y=\sqrt{8-2x}-3=\sqrt{-2(x-4)}-3$이므로 이

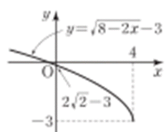
함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x축의

방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한

것이다. (거짓)

⑤ 함수 $y=\sqrt{8-2x}-3$의 그래프는 다음 그림과

같으므로 제 1사분면을 지나지 않는다. (참)



따라서 옳은 것은 ⑤이다.

20 정답 ③

해설 함수 $y=-\sqrt{x+a}+4$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$x=3$에서 최솟값 $-\sqrt{3+a}+4$를 갖는다.

따라서 $-\sqrt{3+a}+4=2$이므로

$\sqrt{3+a}=2,\ 3+a=4$

$\therefore a=1$

함수 $y=-\sqrt{x+1}+4$는 $x=0$일 때 최댓값을 가지므로

구하는 최댓값은 $-\sqrt{0+1}+4=3$이다.

21 정답 ②

해설 $y-2=\sqrt{x-1}$에서 $\sqrt{x-1}\geq 0$이므로 $y\geq 2$이다.

또, 양변을 제곱하면 $(y-2)^2=x-1$

$\therefore x=y^2-4y+5\ (y\geq 2)$

x와 y를 바꾸면 $y=x^2-4x+5\ (x\geq 2)$

22 정답 1

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(3)=4$이므로

$f(4)=3$

즉, $f(4)=\sqrt{-4+a}+2=3$이므로

$\sqrt{-4+a}=1,\ -4+a=1$

$\therefore a=5$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+5}+2$

$g(4)=k$라 하면 $f(k)=4$

$f(k)=\sqrt{-k+5}+2=4$

$\sqrt{-k+5}=2,\ -k+5=4$

$\therefore k=1$

$\therefore g(4)=1$

23 정답 ③

해설 $f(3)=\sqrt{3},\ f(\sqrt{3})=3(\sqrt{3})^2=9$이고,

$f(9)=\sqrt{9}=3$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f\circ f)(3)&=f(f(f(3)))\\&=f(f(\sqrt{3}))\\&=f(9)=3\end{aligned}$$

24 정답 4

해설 $(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로

$\sqrt{2a-7}=3,\ 2a-7=9$

$\therefore a=8$

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(3)=f(8)=\dfrac{24-4}{8-3}=4$

25 정답 $\dfrac{29}{12}$

해설 $(g\circ f^{-1})^{-1}(5)=(f\circ g^{-1})(5)=f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5)=a$라 하면 $g(a)=5$이므로

$\sqrt{2a-3}=5,\ 2a-3=25$

$\therefore a=14$

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(5)=f(14)=\dfrac{28+1}{14-2}=\dfrac{29}{12}$

26 정답 2

해설 $x=2+\sqrt{3}$에서 $x-2=\sqrt{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=3$

$\therefore x^2-4x+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\\&=\frac{(x^2-4x+1)(x^2+x+2)-2x+2\sqrt{3}}{x^2-4x+1+x-\sqrt{3}}\\&=\frac{-2x+2\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\\&=\frac{-4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}\\&=\frac{-4}{2}\\&=-2\end{aligned}$$

$\therefore \left|\dfrac{x^4-3x^3-x^2-9x+2+2\sqrt{3}}{x^2-3x+1-\sqrt{3}}\right|=|-2|=2$

27 정답 ③

해설 $f(n)=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(5)}+\cdots+\frac{1}{f(2023)}$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})$$
$$=\sqrt{2025}-\sqrt{4}$$
$$=45-2$$
$$=43$$

28 정답 ②

해설 무리함수 $y=\sqrt{kx+3}-2$의 그래프가 선분 AB와 만나기 위해서는 $x=3$일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3}-2$가 1과 5 사이에 있어야 한다.

즉, $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$

$\sqrt{3k+3}-2\ge1$에서

$\sqrt{3k+3}\ge3$, $3k+3\ge9$

$\therefore k\ge2$

또, $\sqrt{3k+3}-2\le5$에서

$\sqrt{3k+3}\le7$, $0\le3k+3\le49$

$\therefore 2\le k\le\frac{46}{3}$

따라서 $1\le\sqrt{3k+3}-2\le5$를 만족하는 k의 범위는 $2\le k\le\frac{46}{3}$이므로 구하는 정수 k는 $2, 3, 4, \cdots, 15$의 14개이다.

29 정답 ③

해설 $y=-\sqrt{1-x}-3=-\sqrt{-(x-1)}-3$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고 y절편은 -4이다.

또, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, -3)$을 지날 때,

$-3=-1+k$

$\therefore k=-2$

(ⅱ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, -4)$를 지날 때,

$-4=0+k$

$\therefore k=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 직선 $y=-x+k$가 $y=-\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 제 4사분면에서 만나려면

$-4<k\le-2$

따라서 정수 k는 $-3, -2$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)=-5$

30 정답 4

해설 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-6x+4+a=0$ $\cdots$ ㉠

그런데 두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)

이때 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$ $\cdots$ ㉡

두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$

$(\alpha-\beta)^2=4$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$ $\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$6^2-4(4+a)=4$

$\therefore a=4$

31 정답 ②

해설 무리함수 $f(x)=\sqrt{3x+6}-2$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 함수 f의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 위에서 만난다.

$\sqrt{3x+6}-2=x$

$\sqrt{3x+6}=x+2$

양변을 각각 제곱하면

$3x+6=x^2+4x+4$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 교점의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,\ -2)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$이므로 선분 PQ의 길이는

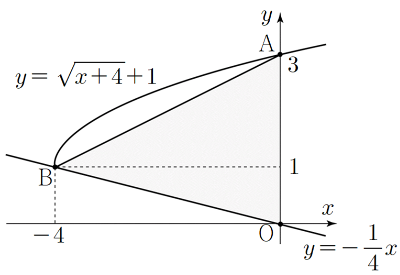
$\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

32 정답 ①

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$을 지난다.

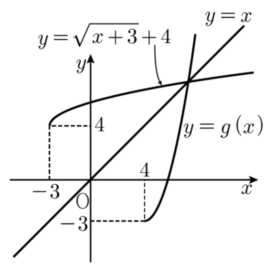
직선 $y=-\dfrac{1}{4}x$는 원점 O와 점 B를 지난다.



$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

33 정답 -13

해설 두 함수 $y=\sqrt{x+3}+4$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 그 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



즉, 연립방정식 $\begin{cases} y=\sqrt{x+3}+4 \\ y=g(x) \end{cases}$의 해는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\alpha=\beta$이다.

따라서 $y=\sqrt{x+3}+4$와 $y=x$를 연립하면

$\sqrt{x+3}+4=x$에서

$\sqrt{x+3}=x-4$

양변을 제곱하면

$x+3=x^2-8x+16$

$\therefore\ x^2-9x+13=0 \quad \cdots ㉠$

㉠에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2-9\alpha+13=0$, 즉 $\alpha^2-9\alpha=-13$

$\therefore\ \alpha^2-9\beta=\alpha^2-9\alpha\ (\because\ \alpha=\beta)$

$=-13$

34 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k\ (x\geq 0)$는

집합 $\{x|x\geq 0\}$에서 집합 $\left\{y\middle|y\geq \frac{1}{7}k\right\}$로의

일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k$에서

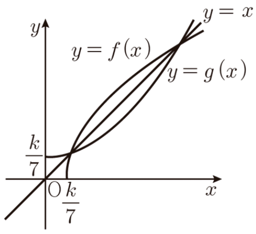
$\frac{1}{7}x^2=y-\frac{1}{7}k,\ x^2=7y-k$

$\therefore x=\sqrt{7y-k}\ (\because x\geq 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{7x-k}$

즉, 함수 $g(x)=\sqrt{7x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k=x$에서

$x^2-7x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$k\geq 0,\ D=(-7)^2-4k>0$

$\therefore 0\leq k<\frac{49}{4}$

따라서 정수 k는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12$의 13개이다.

35 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\sqrt{6x-3}+a$가 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하는 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 교점의 좌표를 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta)\ (\alpha<\beta)$라 하자.

$\sqrt{6x-3}+a=x$에서 $\sqrt{6x-3}=x-a$

양변을 제곱하면

$6x-3=x^2-2ax+a^2$

$x^2-2(a+3)x+a^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$-1<a\leq 1$에서

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+3)=6a+6>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이다.

두 점 A, B 사이의 거리가 8이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=8$

$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=8$

$\beta-\alpha=4\sqrt{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(a+3)$

$\alpha\beta=a^2+3$

이므로

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\&=\sqrt{\{2(a+3)\}^2-4(a^2+3)}\\&=\sqrt{24a+24}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $24a+24=32$에서

$a=\frac{1}{3}$