✓〈킬러패스〉공통수학1

(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

행렬편

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

ⓒ DRE-EDU. 본 자료는 저작자의 창작물로 무단 복제 및 재판매를 금합니다.

DRE-EDU.com

DRE-EDU.com

[행렬]

1.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}를

$$a_{ij}=\begin{cases}3i-2j & (j\text{가 홀수일 때})\\ i+2j & (j\text{가 짝수일 때})\end{cases}$$

로 정의하자. 이때 행렬 A의 모든 성분의 합은?

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

풀이과정)

풀 이

풀이법
2차 정사각행렬: i,j=1,2대입

j가 홀수이면 $a_{ij}=3i-2j$이므로

$a_{11}=3\cdot1-2\cdot1=1,$

$a_{21}=3\cdot2-2\cdot1=4$

j가 짝수이면 $a_{ij}=i+2j$이므로

$a_{12}=1+2\cdot2=5,$

$a_{22}=2+2\cdot2=6$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+4+5+6=16$

DRE-EDU.com

[행렬]

2.내신 킬러 문항

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$에 대하여

행렬 A^n+B^n의 모든 성분의 합이 339가 되도록 하는

자연수 n의 값을 구하시오.

풀이과정)

풀 이

풀이법
규칙을 찾아본다.!

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&81\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&64\end{pmatrix}$

풀 이

풀이법
337를 거듭제곱수로 표현한다.

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^n+B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3^n+4^n\end{pmatrix}$$

따라서 A^n+B^n의 모든 성분의 합은

3^n+4^n+2이므로

$3^n+4^n+2=339$, 즉 $3^n+4^n=337$

$3^4+4^4=81+256=337$이므로

$n=4$

DRE-EDU.com

[행렬]

3.내신 킬러 문항

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB+A=O$를 만족시킬 때,

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$이다.

$p^2+q^2+r^2+s^2$의 값을 구하시오.

(단, O는 영행렬이다.)

풀이과정)

풀 이

풀이법

$A^2 = O$ **이면** $A^n = O \ (n \geq 2)$

행렬의 연산을 이해하여 규칙성 추론하기

$AB + A = O$에 대입하여 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & -a+b+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a = 1$, $b = -1$이므로

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이고 $A^2 = O$이다.

따라서 $A + A^2 + \cdots + A^{2010} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

이므로

$p = 1$, $q = -1$, $r = 1$, $s = -1$

따라서 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4$ 이다.

DRE-EDU.com

[행렬]

4.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$이다. $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$일 때,

$p+q$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

풀이과정)

풀 이

풀이법

$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ 를 $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$와 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$로 나타내본다.

$$A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=2A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

따라서 $p=-1$, $q=7$이므로

$p+q=6$

DRE-EDU.com

[행렬]

5.내신 킬러 문항

이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$일 때, $A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

풀이과정)

풀이

풀이법
문제가 해석되지 않을 때 행렬을 성분으로 나타내 본다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore a=3,\ c=2$ … ㉠

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3a+2b \\ 3c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\therefore 3a+2b=-1,\ 3c+2d=10$ … ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$9+2b=-1,\ 6+2d=10$

$\therefore b=-5,\ d=2$

풀 이

즉, $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\2 & 2\end{pmatrix}$이므로

$$A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\left\{A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -5\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-53\\18\end{pmatrix}$$

따라서 $A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-53+18=-35$

DRE-EDU.com

[행렬]

6.내신 킬러 문항

행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f(X)=ad-bc$라 하자.

행렬 $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $f(A^2)=f(2A)$를

만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오.

풀이과정)

풀 이

풀이법
행렬식 $D = ad - bc$

$D(kA) = k^2 D(A)$, $D(AB) = D(A) \times D(B)$

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x^2 - 2 & x + 2 \\ -2x - 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore f(A^2) = (x^2 - 2) \cdot 2 - (x + 2) \cdot (-2x - 4)$

$= 2x^2 - 4 + 2x^2 + 8x + 8$

$= 4x^2 + 8x + 4$

이때 $2A = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$이므로

$f(2A) = 2x \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = 8x + 8$

이때 $f(A^2) = f(2A)$이므로

$4x^2 + 8x + 4 = 8x + 8$, $4x^2 - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$-1 + 1 = 0$

[행렬]

7.내신 핵심 문항

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}를

$$a_{ij}=\begin{cases} i(j+1) & (i \le j) \\ (j+1)^i & (i > j) \end{cases} \ (i=1,2,\ j=1,2)$$

라 할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

풀이과정)

풀이

풀이법
행렬의 성분을 구하자!

이차정사각행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$로 나타내면

$a_{11}=1\times(1+1)=2$, $a_{12}=1\times(2+1)=3$,

$a_{21}=(1+1)^2=4$, $a_{22}=2\times(2+1)=6$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+3+4+6=15$

DRE-EDU.com

[행렬]

8.내신 핵심 문항

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{16}=kE$일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

풀이과정)

풀이

풀이법
언제 단위행렬이 될까?

[정답] 256

[해설]

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-4E$

$A^8=A^4A^4=(-4E)(-4E)=16E^2=16E$

$A^{16}=A^8A^8=16E16E=256E^2=256E$

따라서 $k=256$

[행렬]

9.내신 핵심 문항

두 상수 p, q에 대하여 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\3 & -4\end{pmatrix}$가 $A^2=pB+qE$를 만족시킬 때, pq의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

풀이과정)

풀이

풀이법
케일리-해밀턴 정리 이용!

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2-(\mathrm{a}+\mathrm{d})\mathrm{A}+(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})\mathrm{E}=\mathrm{O}$$

[정답/모범답안] 6

[해설]

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots ❶$$

$A^2=pB+qE$이므로

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4p & -2p \\ 3p & -4p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4p+q & -2p \\ 3p & -4p+q \end{pmatrix} \quad \cdots ❷$$

즉, $-4p+q=-5$, $-2p=-4$, $3p=6$이므로

$p=2$, $q=3$

따라서 $pq=2\times 3=6 \quad \cdots ❸$

[행렬]

10.내신 핵심 문항

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여

$2A^2+5A-2E=kA$이다. 실수 k의 값을 구하시오.

(단, E는 단위행렬이다.)

풀이과정)

풀이

풀이법
케일리-해밀턴 정리 이용!

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2+4A-E=O$ (단, O는 영행렬)

$A^2=-4A+E$

$\therefore\ 2A^2+5A-2E=2(-4A+E)+5A-2E$

$=-3A$

따라서 $k=-3$

[행렬]

11.내신 핵심 문항

이차정사각행렬 A, B가 $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$,

$AB+BA=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때,

행렬 $(A+B)^{32}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

풀이과정)

풀이

풀이법
교환법칙이 성립하지 않음에 유의!

$$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^4=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

$$(A+B)^{32}=(A+B)^{30}(A+B)^2=(A+B)^2$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

행렬 $(A+B)^{32}$의 모든 성분의 합은 5이다.

[행렬]

12. 내신 핵심 문항

이차정사각행렬 A가 $A^2-3A+9E=O$를 만족시킬 때, 행렬 A^{18}의 모든 성분의 합은?
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

① $2 \cdot 3^{12}$ ② $2 \cdot 3^{15}$ ③ $2 \cdot 3^{18}$
④ $2 \cdot 3^{21}$ ⑤ $2 \cdot 3^{24}$

풀이과정)

풀이

풀이법
곱셈공식 이용

$A^2-3A+9E=O$의 양변에 $A+3E$를 곱하면

$(A+3E)(A^2-3A+9E)=O$

$A^3+27E=O$

$\therefore A^3=-27E$

따라서

$$A^{18}=(A^3)^6=(-27E)^6$$
$$=3^{18}E=\begin{pmatrix}3^{18} & 0\\ 0 & 3^{18}\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 A^{18}의 모든 성분의 합은

$2\cdot 3^{18}$

DRE-EDU.com

[행렬]

13.내신 킬러 문항

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A^2=E$이면 $A=E$이다.

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$이면 $AB+BA=O$이다.

ㄷ. $AB=A$, $BA=B$이면 $A^2+B^2=A+B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Dream · Rest · Essence DRE학원

풀 이

행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $(A+2B)^2=(A-2B)^2$에서

$A^2+2AB+2BA+4B^2$

$=A^2-2AB-2BA+4B^2$

$4AB+4BA=O$

$\therefore AB+BA=O$ (참)

ㄷ. $AB=A$ ······ ㉠,

$BA=B$ ······ ㉡

㉠의 양변 오른쪽에 행렬 A를 곱하면 $ABA=A^2$,

이 식에 ㉡을 대입하면 $A^2=AB=A$이고,

㉡의 양변 오른쪽에 행렬 B를 곱하면 $BAB=B^2$,

이 식에 ㉠을 대입하면 $B^2=BA=B$이다.

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ