

# 유형별 학습

이름

## 교과서\_비상교육 - 공통수학2 39~40p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

- 01** 원  $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표가  $(a, b)$ 이고, 반지름의 길이가  $r$ 일 때,  $a+b+r$ 의 값은?

- ① 0      ② 1      ③ 2  
④ 3      ⑤ 4

- 02** 두 점 A(-3, 8), B(7, -4)를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

- ①  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$   
②  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$   
③  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$   
④  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$   
⑤  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

- 03** 두 점 A( $a, b$ ), B(-7, 1)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이  $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 20 = 0$ 일 때,  $ab$ 의 값을 구하시오.

- 04** [2019년 9월 고1 24번/3점]  
원  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 의 반지름의 길이를 구하시오.

- 05** 원  $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ 의 중심과 점 (2, 9)을 지나는 직선의 방정식은?

- ①  $y = -3x + 15$       ②  $y = -2x + 13$   
③  $y = x + 7$       ④  $y = 2x + 5$   
⑤  $y = 3x + 3$

- 06** 직선  $3x + 4y + a = 0$ 이 원  $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수  $a$ 의 개수를 구하시오.

**07**

원  $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은?

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| ① $y = 2x \pm \sqrt{10}$ | ② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$ |
| ③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$ | ④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$ |
| ⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$ |                          |

**08**

원  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$ 에 접하고 기울기가 2인 두 직선의  $y$ 절편의 합은?

- |      |      |      |
|------|------|------|
| ① 4  | ② 8  | ③ 12 |
| ④ 16 | ⑤ 20 |      |

**09**

원  $x^2 + y^2 = 13$  위의 점 (2, 3)에서의 접선의 방정식을 구하면?

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| ① $2x + 3y + 13 = 0$ | ② $2x + 3y - 13 = 0$ |
| ③ $3x + 2y + 13 = 0$ | ④ $3x + 2y - 13 = 0$ |
| ⑤ $3x - 2y - 13 = 0$ |                      |

**10**

원  $x^2 + y^2 = 10$  위의 점 (1, -3)에서 원에 그은 접선의  $x$ 절편은?

- |       |                   |      |
|-------|-------------------|------|
| ① -10 | ② $-\frac{10}{3}$ | ③ -1 |
| ④ 10  | ⑤ $\frac{10}{3}$  |      |

**11**

중심이  $y = 2x$  위에 있고, 두 점 (2, 2), (1, 1)을 지나는 원의 방정식은?

- |                           |
|---------------------------|
| ① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ |
| ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ |
| ③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ |
| ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$ |
| ⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ |

**12**

직선  $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 이  $y$ 축과 만나는 점을 중심으로 하고,  $x$ 축과 만나는 점을 지나는 원의 방정식은?

- |                            |
|----------------------------|
| ① $x^2 + (y-5)^2 = 41$     |
| ② $x^2 + (y-5)^2 = 43$     |
| ③ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 41$ |
| ④ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 43$ |
| ⑤ $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 41$ |

**13** 방정식  $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 40 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위는?

- ①  $-2 < a < 2$
- ②  $-1 < a < 1$
- ③  $a < -1$  또는  $a > 1$
- ④  $a < -2$  또는  $a > 2$
- ⑤  $a < 2$  또는  $a > 4$

**14** 등식  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k^2 - 5k - 1 = 0$ 이 원의 방정식이 되도록 하는 정수  $k$ 의 개수를 구하시오.

**15** 직선  $y = -\frac{3}{4}x + k$ 와 원  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$ 가 만나서 생기는 현의 길이가 4일 때, 양수  $k$ 의 값을 구하시오.

**16** 좌표평면에 원  $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ 이 있다. 이 원의 현 중에서 점 A(7, 0)을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

**17** 두 직선  $x + 3y + 3 = 0$ ,  $x + 3y + 7 = 0$ 에 동시에 접하고 중심이 직선  $y = 3x$  위에 있는 원의 중심의 좌표가  $(a, b)$ , 넓이가  $c\pi$ 일 때,  $a + b + 5c$ 의 값을 구하시오. (단,  $c$ 는 유리수)

**18** 원  $x^2 + y^2 = 20$  위의 점 (2, -4)에서의 접선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)

**19** 원  $x^2 + y^2 = 9$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선이 점  $(6, 6)$ 을 지날 때,  $ab$ 의 값은?

- ①  $-\frac{27}{8}$       ②  $-\frac{15}{8}$       ③  $-\frac{7}{8}$   
④  $\frac{5}{8}$       ⑤  $\frac{15}{8}$

**20** 점 A(2, 2)에서 원  $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $\alpha\beta$ 의 값은?

- ①  $\frac{8}{3}$       ②  $-\frac{8}{3}$       ③ 1  
④ -1      ⑤ 0

[2006년 11월 고1 29번]  
**21** 점 P(4, 3)에서 원  $x^2 + y^2 = 9$ 에 그은 두 접선 중 기울기가 양수인 접선의 기울기를  $\frac{q}{p}$ 라 할 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)

**22** 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점 P(1, 2)에서의 접선과 점 Q(-2, 1)에서의 접선이 만나는 점을 R라 할 때, 사각형 OPRQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

- ① 3      ② 5      ③ 7  
④ 9      ⑤ 11

**23** 원  $x^2 + y^2 = 36$  위의 점 P와 두 점 A(-8, 0), B(0, 15)에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오.

[2021년 11월 고1 17번/4점]  
**24** 좌표평면 위에 두 점 A(0,  $\sqrt{3}$ ), B(1, 0)과 원 C:  $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 9$ 가 있다. 원 C위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 모든 점 P의 개수는?

- ① 9      ② 10      ③ 11  
④ 12      ⑤ 13

# 유형별 학습

이름

## 교과서\_비상교육 – 공통수학2 39~40p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

### 빠른정답

01 ③	02 ⑤	03 – 13
04 4	05 ①	06 19
07 ⑤	08 ③	09 ②
10 ④	11 ②	12 ①
13 ④	14 6	15 $\frac{5}{4}$
16 ③	17 0	18 25
19 ①	20 ③	21 31
22 ②	23 111	24 ④

# 유형별 학습

이름

## 교과서\_비상교육 - 공통수학2 39~40p

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계

### 01 정답 ③

**해설**  $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 12 = 0$ 을 표준형으로 고치면  
 $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 49$   
 따라서 중심의 좌표는  $(-6, 1)$ , 반지름의 길이는 7이므로  
 $a = -6, b = 1, r = 7$   
 $\therefore a+b+r = -6+1+7 = 2$

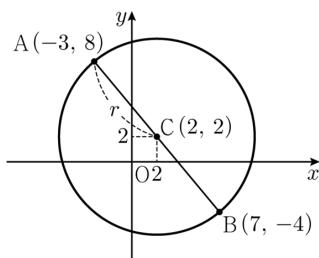
### 02 정답 ⑤

**해설** 구하는 원의 중심을 C라고 하면  
 점 C는  $\overline{AB}$ 의 중점이므로  
 $C\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8+(-4)}{2}\right)$   
 $\therefore C(2, 2)$   
 반지름의 길이를 r라고 하면  
 $r$ 는  $\overline{AB}$ 의 길이의  $\frac{1}{2}$  이므로

$$r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$$



### 03 정답 - 13

**해설**  $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 20 = 0$ 에서  
 $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 45$   
 따라서  $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가  $(-4, 7)$ 이므로  
 $\frac{a-7}{2} = -4, \frac{b+1}{2} = 7$   
 $\therefore a = -1, b = 13$   
 $\therefore ab = -13$

### 04 정답 4

**해설**  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$   
 $= (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 - 11 = 0$   
 원의 방정식은  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$   
 따라서 원의 반지름의 길이는 4

### 05 정답 ①

**해설**  $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ 에서  
 $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 25$ 이므로  
 이 원의 중심은  $(6, -3)$ 이다.  
 따라서 두 점  $(6, -3), (2, 9)$ 를 지나는 직선의 방정식은  
 $y-9 = \frac{9-(-3)}{2-6}(x-2)$   
 즉,  $y = -3x + 15$ 이다.

### 06 정답 19

**해설** 직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심에서  
 직선까지의 거리  $d$  보다 원의 반지름  $r$ 이 크다.  
 $d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$   
 $\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$   
 $a = -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9 \quad \therefore 19개$

## 07

**정답** ⑤

**해설** 기울기가 2인 직선의 방정식을

$y = 2x + k$ , 즉  $2x - y + k = 0$  ( $k$ 는 상수)라 하면  
이 직선이 원  $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하므로 직선과 원의  
중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉}, \frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$$

$$|k| = \sqrt{30}$$

$$\therefore k = \pm \sqrt{30}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{30}$$

## 08

**정답** ③

**해설** 구하는 접선의 방정식을  $y = 2x + k$ 라 하면

원의 중심  $(-1, 4)$ 와

직선  $y = 2x + k$ , 즉  $2x - y + k = 0$  사이의 거리  $d$ 는

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}} = 5, |-6 + k| = 5\sqrt{5}$$

$$-6 + k = \pm 5\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 6 \pm 5\sqrt{5}$$

이때  $k$ 가 두 직선의  $y$ 절편이므로  $y$ 절편의 합은

$$(6 + 5\sqrt{5}) + (6 - 5\sqrt{5}) = 12$$

## 09

**정답** ②

**해설** 점  $(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

## 10

**정답** ④

**해설** 점  $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$x - 3y = 10$$

$x$ 절편은  $y = 0$ 일 때의  $x$ 좌표이므로

$$x = 10$$

## 11

**정답** ②

**해설** 중심이  $y = 2x$  위에 있다고 했으므로 두 점  $(2, 2)$ ,  $(1, 1)$ 을 지나는 원의 중심은  $(a, 2a)$ 로 나타낼 수 있다.  
 $(a, 2a)$ 를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면  
 $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = r^2$ 이다.  
따라서 두 점  $(2, 2)$ ,  $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이  
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

## 12

**정답** ①

**해설** 직선  $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점의 좌표는

각각  $(4, 0)$ ,  $(0, 5)$

이 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-5)^2 = 41$$

## 13

**정답** ④

**해설**  $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 40 = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y+3a)^2 = 10(a^2 - 4)$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$10(a^2 - 4) > 0, (a+2)(a-2) > 0$$

$\therefore a < -2$  또는  $a > 2$

## 14

**정답** 6

**해설**  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k^2 - 5k - 1 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -k^2 + 5k + 6$$

이 등식이 원의 방정식이 되려면

$$-k^2 + 5k + 6 > 0,$$

$$k^2 - 5k - 6 < 0$$

$$(k-6)(k+1) < 0$$

$\therefore -1 < k < 6$

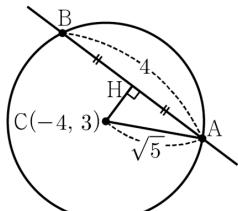
따라서 정수  $k$ 의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5로 6이다.

## 15 정답 $\frac{5}{4}$

**해설** 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C(-4, 3)이라 하고 점 C에서

$$\text{직선 } y = -\frac{3}{4}x + k, \text{ 즉 } 3x + 4y - 4k = 0 \text{에 내린}$$

수선의 발을 H라 하면



$$CH = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 - 4k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4k|}{5} \quad \dots \textcircled{①}$$

$$\text{또, } AC = \sqrt{5}, AH = \frac{1}{2}AB = 2 \text{이므로}$$

직각삼각형 ACH에서

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{AC^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{에서 } \frac{|-4k|}{5} = 1, |-4k| = 5$$

$$-4k = \pm 5$$

$$\therefore k = \frac{5}{4} (\because k > 0)$$

## 16 정답 ③

$$\text{해설 } x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \text{에서 } (x-3)^2 + y^2 = 25$$

원의 중심을 C(3, 0)이라 하고, 점 A(7, 0)을 지나는

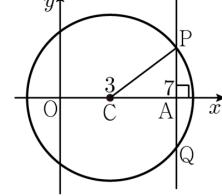
직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

현 PQ의 길이가 최소일 때는 다음 그림과 같이

$\overline{CA} \perp \overline{PQ}$  일 때이므로 직각삼각형 ACP에서

$$AP = \sqrt{CP^2 - CA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{AP} = 6$$



따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

또, 현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 원의

지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는

$$6, 7, 8, 9, 10$$

이때 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재하고,

길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하므로 구하는

현의 개수는

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

## 17 정답 0

**해설** 중심이 직선  $y = 3x$  위에 있으므로 원의 중심의 좌표를  $(t, 3t)$ , 반지름의 길이를  $r$ 라 하면 원의 중심과 두 직선  $x + 3y + 3 = 0, x + 3y + 7 = 0$  사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이  $r$ 와 같으므로

$$r = \frac{|t+9t+3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|t+9t+7|}{\sqrt{1^2+3^2}} \quad \dots \textcircled{①}$$

$$|10t+3| = |10t+7|, 10t+3 = \pm(10t+7)$$

그런데  $10t+3 \neq 10t+7$ 이므로

$$10t+3 = -10t-7 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$$

원의 중심의 좌표는  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{①} \text{에 대입하면 } r = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

따라서 원의 넓이는

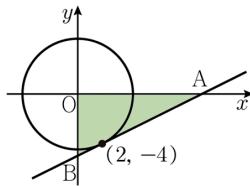
$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}\pi \quad \therefore c = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a+b+5c = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

## 18 정답 25

**해설** 원  $x^2 + y^2 = 20$  위의 점  $(2, -4)$ 에서의 접선의 방정식은  $2 \cdot x + (-4) \cdot y = 20$   
 $\therefore x - 2y - 10 = 0$   
 이 접선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점의 좌표는  $A(10, 0)$ ,  $B(0, -5)$   
 따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$$



## 19 정답 ①

**해설** 원 위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은  $ax + by = 9$  이고  
 이 접선이 점  $(6, 6)$ 을 지나므로  
 $6a + 6b = 9 \quad \therefore a + b = \frac{3}{2}$   
 또, 점  $(a, b)$ 는 원 위의 점이므로  
 $a^2 + b^2 = 9$   
 이때,  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$  에서  
 $9 = \frac{9}{4} - 2ab \quad \therefore ab = -\frac{27}{8}$

## 20 정답 ③

**해설** 점  $(2, 2)$ 를 지나고 기울기가  $m$ 인 접선을  
 $y - 2 = m(x - 2)$ , 즉  $mx - y - 2m + 2 = 0$   
 이라고 하면  
 원의 중심  $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는  
 원의 반지름 1과 같아야 하므로  
 $\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$   
 $| -2m + 2 | = \sqrt{m^2 + 1}$   
 양변을 제곱하여 정리하면  
 $4m^2 - 8m + 4 = m^2 + 1$   
 $3m^2 - 8m + 3 = 0$   
 따라서 두 기울기의 곱은  
 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

## 21 정답 31

**해설** 원의 접선의 방정식 구하기  
 접점을  $Q(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 Q는 원 위의 점이므로  
 $x_1^2 + y_1^2 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$   
 접점 Q에서의 접선의 방정식을 구하면  
 $x_1x + y_1y = 9 \quad \dots \textcircled{2}$   
 이때 \textcircled{2}가 점  $(4, 3)$ 을 지나므로  
 점  $(4, 3)$ 을 \textcircled{2}에 대입하면  
 $4x_1 + 3y_1 = 9 \quad \dots \textcircled{3}$   
 \textcircled{3}을 \textcircled{1}에 대입하면  
 $x_1^2 + \left(-\frac{4}{3}x_1 + 3\right)^2 = 9, 25x_1^2 - 72x_1 = 0$   
 $\therefore x_1 = 0$  또는  $x_1 = \frac{72}{25}$   
 이것을 각각 \textcircled{3}에 대입하여  $y_1$ 을 구하면  
 $x_1 = 0$  일 때  $y_1 = 3, x_1 = \frac{72}{25}$  일 때  $y_1 = -\frac{21}{25}$   
 그러므로 기울기는 0 또는  $\frac{24}{7}$   
 따라서 조건에 맞는 기울기는  $\frac{24}{7}$  이므로  
 $p+q = 7+24=31$

### [다른 풀이]

$P(4, 3)$ 을 지나고 기울기가  $m$ 인 직선의 방정식은  $y - 3 = m(x - 4)$ 이다.  
 원과 직선이 접하려면 원의 중심으로부터 직선까지의 거리가 반지름과 같아야 하므로  $\frac{|4m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$ 이고,  
 양변을 제곱하여 정리하면  
 $16m^2 - 24m + 9 = 9m^2 + 9$   
 $7m^2 - 24m = 0$   
 $\therefore m = 0$  또는  $m = \frac{24}{7}$   
 따라서 조건에 맞는 기울기는  $\frac{24}{7}$  이므로  
 $p+q = 7+24=31$

## 22 정답 ②

**해설** 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점 P(1, 2)에서의 접선의 방정식은

$$x + 2y = 5$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점 Q(-2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$-2x + y = 5$$

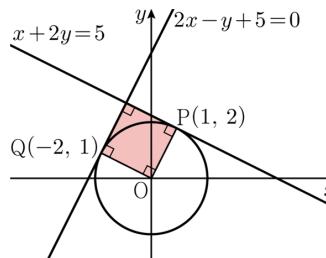
$$\therefore y = 2x + 5$$

두 직선의 기울기의 곱은  $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$  이므로

두 직선은 수직이다.

따라서 다음 그림에서 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이  $\sqrt{5}$ 를 한변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$

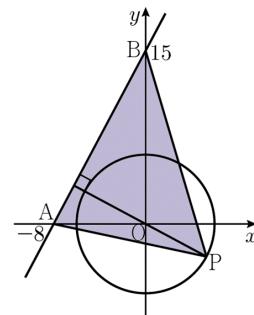


## 23 정답 111

**해설** 삼각형 PAB에서  $\overline{AB}$ 의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+8)^2 + (15-0)^2} = 17 \text{로 일정하므로}$$

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때  
삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.



직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{15} = 1, 15x - 8y + 120 = 0$$

원의 중심 (0, 0)과 직선  $15x - 8y + 120 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|120|}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = \frac{120}{17}$$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{120}{17} + 6 = \frac{222}{17}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \frac{222}{17} = 111$$

## 24 정답 ④

**해설** 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기

두 점  $A(0, \sqrt{3})$ ,  $B(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 - 0}x + \sqrt{3}, 즉 \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$$

이때 원  $C$ 의 중심  $(1, 10)$ 과 직선  $AB$  사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3} + 10 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = 5$$

또, 원  $C$ 의 반지름의 길이는 3이므로

원  $C$  위의 점  $P$ 와 직선  $AB$  사이의 거리를  $h$ 라 하면

$$2 \leq h \leq 8$$

선분  $AB$ 의 길이는  $\sqrt{1+3}=2$ 이고 삼각형  $ABP$ 의 넓이를  $S$ 라 할 때

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$$

이때  $S$ 가 자연수이려면  $h$ 가 자연수이어야 한다.

직선  $AB$ 와 평행한 직선 중에서 원  $C$ 의 중심으로부터의 거리가  $|5-h|$ 이고 직선  $AB$ 와의 거리가  $h$ 인 직선을  $l$ 이라 하자.

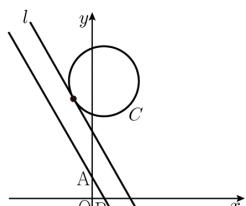
(i)  $h=2$ 일 때

오른쪽 그림과 같이

직선  $l$ 과 원  $C$ 는

한 점에서 만나므로

점  $P$ 의 개수는 1이다.



(ii)  $3 \leq h \leq 7$ 일 때

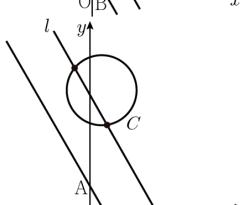
오른쪽 그림과 같이

직선  $l$ 과 원  $C$ 는

서로 다른 두 점에서

만나므로 점  $P$ 의 개수는

$$5 \cdot 2 = 10$$



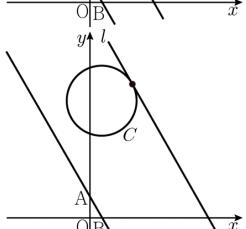
(iii)  $h=8$ 일 때

오른쪽 그림과 같이

직선  $l$ 과 원  $C$ 는

한 점에서 만나므로

점  $P$ 의 개수는 1이다.



(i), (ii), (iii)에 의하여

모든 점  $P$ 의 개수는

$$1 + 10 + 1 = 12$$