

2학년 2023년 성동고 1학기 기말 수학 I

1. 등차수열 $a_1, 2, a_3, 8, 11, \dots$ 에서 $a_1 + a_3$ 의 값은?

[23성동]

- | | | |
|-----|------|-----|
| ① 2 | ② 4 | ③ 6 |
| ④ 8 | ⑤ 10 | |

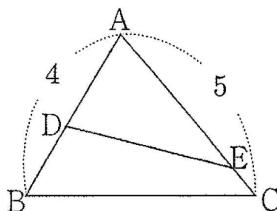
2. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 3$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k)$ 의 값은? [23성동]

- | | | |
|-----|-----|-----|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 |
| ④ 4 | ⑤ 5 | |

3. 다음 중 $4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 20^2$ 의 값을 나타내는 식이 아닌 것은? [23성동]

- | | |
|---|--|
| ① $\sum_{n=4}^{20} n^2$ | ② $\sum_{i=1}^{17} (i+3)^2$ |
| ③ $\sum_{k=1}^{17} k^2 + 6 \sum_{k=1}^{17} k + 9$ | ④ $\sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^3 k^2$ |
| ⑤ $\sum_{n=2}^{18} (n^2 + 4n + 4)$ | |

4. 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 5$ 인 삼각형 ABC의 두 변 AB, AC 위에 각각 점 D, E가 있다. 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, $\overline{AD} \times \overline{AE}$ 의 값은? [23성동]



- | | | |
|-----|------|-----|
| ① 6 | ② 7 | ③ 8 |
| ④ 9 | ⑤ 10 | |

5. 세 수 $a^{\frac{1}{2}}$, a^2 , a^k 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 실수 k 의 값은? (단, $a > 0$ 이다.) [23성동]

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----|
| ① 2 | ② $\frac{5}{2}$ | ③ 3 |
| ④ $\frac{7}{2}$ | ⑤ 4 | |

6. 삼각형 ABC에서 $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ 일 때, $\overline{BC} : \overline{CA} = x : 4$ 를 만족시키는 x의 값은? [23성동]

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| ① $\sqrt{2}$ | ② $\sqrt{3}$ | ③ $2\sqrt{2}$ |
| ④ $2\sqrt{3}$ | ⑤ $3\sqrt{2}$ | |

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 33, \quad a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 82$$

일 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ 의 값은? [23성동]

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ① 530 | ② 540 | ③ 550 |
| ④ 560 | ⑤ 570 | |

8. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은? [23성동]

- ① 80 ② 81 ③ 120
 ④ 121 ⑤ 240

9. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$,

$\overline{BC} = 10$ 인 이등변삼각형

ABC에 대하여 변 BC를

2:3으로 내분하는 점을 D,
 $\angle BAD = \theta$ 라 할 때,

$$\cos \theta = \frac{q}{p} \sqrt{3} \text{ 이다. } p+q \text{ 의}$$

값은? (단, p 와 q 는 서로소인 정수이다.) [23성동]

- ① 13 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 17

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열일 때,

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{9}{28}$ ③ $\frac{3}{7}$
 ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

올림포스 변형

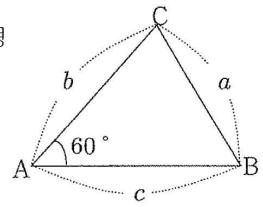
11. 그림과 같이 $\angle A = 60^\circ$ 인 삼각형

ABC의 세 각의 대변의 길이를

각각 a , b , c 라 할 때, 보기에서

옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[23성동]



[보기]

ㄱ. $a = 2$ 이면 $c = \frac{4}{3} \sqrt{3} \sin C$ 이다.

ㄴ. $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = 1$

ㄷ. $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \cos C + bc + 2ca \cos B$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

올림포스 변형

12. 네 양수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등비수열을 이루면서 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, $abcd$ 의 값은? [23성동]

(가) $\log_2 a - \log_2 d = -3$ (나) $a + b + c + d = 30$

- ① 2^9 ② 2^{10} ③ 2^{11} ④ 2^{12} ⑤ 2^{13}

올림포스 변형

14. 다음은 음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \text{ 이 정수임을 증명한 것이다.}$$

(i) $n = 0$ 일 때, 주어진 식은 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 0$) 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & \frac{(\boxed{\text{(가)}})^5}{5} + \frac{(\boxed{\text{(가)}})^4}{2} + \frac{(\boxed{\text{(가)}})^3}{3} - \frac{(\boxed{\text{(가)}})}{30} \\ &= (\boxed{\text{(나)}}) + (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \end{aligned}$$

에서 $\boxed{\text{(나)}}$ 는 정수이므로

주어진 식은 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여 정수이다.

위의 증명과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $f(2) + g(2)$ 의 값은? [23성동]

- ① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

2017수능 변형

13. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 두 조건을 모두 만족할 때, a_8 의 값은? [23성동]

(가) $a_4 + a_6 = 0$ (나) $|a_4| = |a_5| + 3$

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020수특 연계

15. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{2n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 99 이하의 자연수 k 에 대하여 $a_k = 2$ 인 모든 자연수 k 의 개수는? [23성동]

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = 7 \times 3^n + k$ 가 성립한다. 다음 물음에 답하시오. [23성동]

(1) 첫째항 a_1 을 구하시오.

(2) $n \geq 2$ 일 때, a_n 을 구하시오.

(3) 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k 의 값을 구하시오.

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n + 2 & (0 < a_n \leq 1) \\ 2(a_n - 1) & (1 < a_n < 2) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_2 = \frac{1}{3}$ 일 때, $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.
 (단, $0 < a_1 < 2$ 이다.) [23성동]

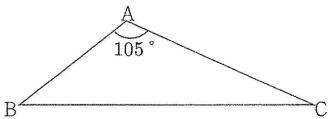
18. 반지름의 길이가 8 인

원에 내접하는 삼각형

ABC에서 $\angle A = 105^\circ$ 이고

$4 \sin(A+B) \sin C = 1$ 이

성립할 때, \overline{AC} 의 길이를 구하시오. [23성동]



만랩PM 변형

19. 그림과 같은 사각형 ABCD에서

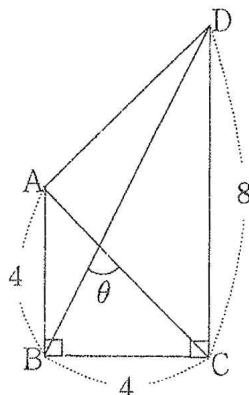
$\angle B = \angle C = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$,

$\overline{CD} = 8$ 이다. 두 대각선 AC, BD가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,

$\cos \theta$ 를 구하시오.

(단, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이다.)

[23성동]



20. 삼차방정식 $x^3 - (m+1)x^2 - x + m + 1 = 0$ 의 서로 다른 세

실근이 공차가 2인 등차수열이 되도록 하는 상수 m 의 값을

모두 구하시오. [23성동]

21. 수열

$$n, 2(n-1), 3(n-2), \dots, (n-1) \times 2, n$$

의 합을 구하는 과정이다. 다음 물음에 답하시오. [23성동]

$$n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1) \times 2 + n$$

$$= \sum_{k=1}^n \boxed{\quad \text{(가)} \quad}$$

$$= - \sum_{k=1}^n k^2 + \boxed{\quad \text{(나)} \quad} \cdot \sum_{k=1}^n k$$

= (이하 생략)

(1) 빈칸 (가), (나)에 알맞은 식을 쓰시오.

(2) (이하 생략) 된 풀이과정을 쓰고 답을 구하시오.

올림포스 연계

22. 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + (y-2)^2 = 4n$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 두 점 $A_n(\alpha_n, \alpha_n)$, $B_n(\beta_n, \beta_n)$ 사이의 거리를

a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24} \frac{4}{a_n + a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오. [23성동]

2학년 2023년 성동고 1학기 기말 수학 I

-
- 1) ②
2) ⑤
3) ③
4) ⑤
5) ④
6) ③
7) ①
8) ④
9) ①
10) ②
11) ⑤
12) ②
13) ④
14) ②
15) ①
16) (1) $21 + k$
(2) $a_n = 14 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$)
(3) -7
17) $\frac{17}{6}$
18) $8\sqrt{2}$
19) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
20) 2, -4
21) (1) (가) $k(n-k+1)$
(나) $n+1$
(2) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
22) $3\sqrt{2}$