개념원리(2025) - 공통수학2 (유리함수) 250~273p

유리함수의 그래프

실시일자	-
50문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 함수 $y=\dfrac{2x-1}{1-3x}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① $\dfrac{2}{9}$ ② $\dfrac{5}{9}$
③ $\dfrac{8}{9}$ ④ $\dfrac{11}{9}$
⑤ $\dfrac{14}{9}$

02 $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a$, $y=b$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

03 함수 $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a, y=b$일 때,
a의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

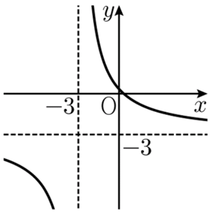
04 함수 $y=\dfrac{1}{x+2}-3$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

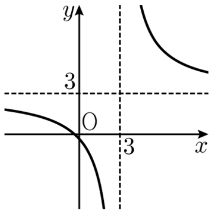
① -5 ② -3
③ -1 ④ 1
⑤ 3

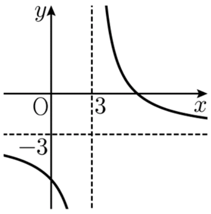
05 다음 중 함수 $y=\dfrac{1}{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 그래프의 식은?

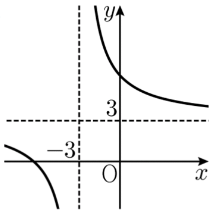
① $y=\dfrac{-4x+2}{2x-1}$ ② $y=\dfrac{-4x+3}{2x-2}$
③ $y=\dfrac{4x-3}{2x-2}$ ④ $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$
⑤ $y=\dfrac{4x+5}{2x+2}$

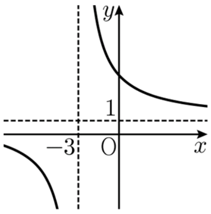
06 다음 중 유리함수 $y=\dfrac{1-3x}{x+3}$의 그래프로 옳은 것은?

①


②


③


④


⑤


07 함수 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

08 함수 $y=\dfrac{-2x+7}{3-x}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=a$일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

09 [2018년 4월 고3 문과 9번 변형]
함수 $y=\dfrac{2x-7}{x-5}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=m$, $y=n$이다. 두 상수 m, n에 대하여 $m-n$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

10 $x\neq-2$, $x\neq2$인 모든 실수 x에 대하여
$$\frac{12-x^2}{(x+2)(x-2)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$
가 성립할 때, $a-b+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이다.)

11 $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}=\dfrac{3}{10}$ 을 만족시키는 양수 a의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$
③ 1 ④ $\dfrac{3}{2}$
⑤ 2

12 $\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{9^2+9}=\dfrac{k}{10}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

13 $f(x)=1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 에 대하여 $f(k)=\dfrac{1}{3}$ 을 만족시키는 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$의 정의역은 $x\neq a$인 모든 실수이고, 치역은 $y\neq b$인 모든 실수이다. 이때 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 치역이 $\{y|-1\le y<2\}$일 때, 정의역은?

① $\{x|x\ge 0\}$ ② $\{x|x\ge -2\}$
③ $\left\{x\middle|x\le -\dfrac{5}{2}\right\}$ ④ $\{x|x\le -2\}$
⑤ $\{x|x>2\}$

16 두 함수 f, g에서 $f(x)=\dfrac{-x+2}{3x-1}$, $f(x+1)=g(x-1)$이 성립할 때, $g(-2)$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

17 함수 $y=\frac{x+3}{x-3}$은 $y=\frac{6}{x}$을 x축, y축의 방향으로 각각 m, n만큼 평행이동한 것이다. $m+n$의 값을 구하시오.

18 함수 $y=\frac{3x+1}{x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{5x+28}{x+3}$의 그래프와 일치한다. 상수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.

19 $x^2-x-6\geq 0$을 만족하는 x에 대하여 함수 $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

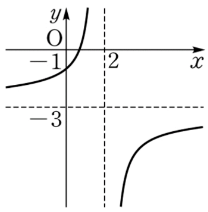
20 함수 $y=\frac{3x+b}{2x-a}$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나고 점 $(1,\ c)$에 대하여 대칭일 때, abc의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -6 ② -3 ③ 3
④ 6 ⑤ 9

21 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이고 원점을 지날 때, 상수 a, b, c에 대하여 $ab+c$의 값을 구하시오.

22 함수 $y=\frac{ax+5b}{5x+c}$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이고 점 $\left(-1,\ -\frac{1}{5}\right)$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오.

23 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?



① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

24 함수 $y=\dfrac{2-6x}{x-2}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

25 유리함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$의 정의역은 $x \neq a$인 모든 실수이고, 치역은 $y \neq b$인 모든 실수이다. 이때 ab의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

26 직선 $y=3x-k$의 그래프가 두 함수 $y=-\dfrac{2}{5}x$, $y=-\dfrac{5}{2x}$의 그래프의 교점 중 한 점을 지난다고 할 때, 가능한 k의 값을 모두 더한 값은?

① $-\dfrac{7}{2}$ ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

27 분수함수 $f(x)=\dfrac{3}{ax-4}+1$에 대해서 $(f\circ f)(x)=x$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -3 ③ -2
④ 4 ⑤ 5

28 두 함수 $f(x)=\dfrac{-5x+2}{3x-6}$, $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+5}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+2b-c$의 값을 구하시오.

29 함수 $y=\dfrac{5x-1}{x-4}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a-b$의 값은?

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

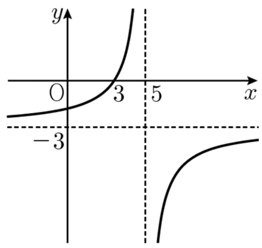
30 [2016년 10월 고3 문과 10번 변형]
유리함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에 대하여 다음 보기 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역과 치역이 서로 같다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31 함수 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-a}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{-x+3}{x-b}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

32 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?



① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

33 $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{4}}}=\dfrac{43}{30}$을 만족하는 정수 a, b, c의 합을 구하시오.

34 [2019년 10월 고3 문과 5번/3점]
함수 $f(x)=\dfrac{4}{2x-7}+a$의 정의역과 치역이 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

35 $\dfrac{5}{2}$보다 큰 상수 a에 대하여 정의역이 $\{x|2\le x\le 5\}$인 함수 $f(x)=\dfrac{ax+5}{x+2}$의 최댓값이 5일 때, 최솟값을 구하시오.

36 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\middle|y=\dfrac{5x+2}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)|y=ax+5\}$에 대하여 $A\cap B\ne\varnothing$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

37 두 유리함수 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$에 대하여 $h\circ f=g$를 만족시키는 함수 $h(x)$가 있다. 이때 $h(2)$의 값을 구하시오.

38 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{-x+2}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{3x}$의 역함수를 각각 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$라 할 때, $\left(f^{-1}\circ g\right)^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

39 $0\le x\le a$에서 유리함수 $y=\dfrac{3x+k}{x+2}$의 최댓값이 5, 최솟값이 4일 때, 상수 a, k의 합 $a+k$의 값을 구하시오. (단, $k>6$)

40 유리함수 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)이라 할 때, $f^k(x)=x$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

41 유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}$에 대하여 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)$의 값을 구하시오.

42 두 함수 $y=\dfrac{3x}{x-a}$, $y=\dfrac{-ax+1}{x+2}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 42일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

43 점 $(2,\ 3)$을 지나고, $x=1$, $y=2$를 점근선으로 하는 분수함수가 있다. 이 함수의 그래프를 적당히 이동했을 때, 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}$

② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$

③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$

④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$

⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

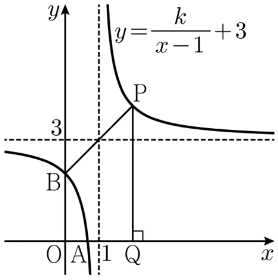
44 [2017년 9월 고2 이과 27번/4점]
곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle ABC=90^\circ$인 점 C가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위에 있다. $\overline{AC}=2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>2\sqrt{2}$)

45 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

46 [2018년 11월 고3 문과 20번/4점]

그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+3\ (0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자.



이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.
ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB의 기울기와 직선 AP의 기울기의 합은 0이다.
ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47

함수 $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$와 $0<a<b$인 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

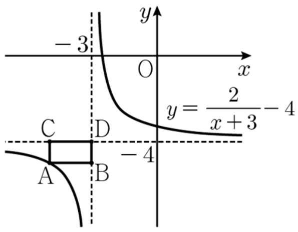
<보기>

ㄱ. $0<f(b)<1$
ㄴ. $0<a<\dfrac{2}{3}$
ㄷ. $f(a)f(b)=-\dfrac{(a-1)(b-1)}{ab}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

48

다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2}{x+3}-4$의 그래프 위의 한 점 A에서 이 함수의 그래프의 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 두 점근선의 교점을 D라 할 때, 사각형 ABDC의 둘레의 길이의 최솟값은? (단, 점 A는 제3사분면 위의 점이다.)



① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

49 [2016년 4월 고3 문과 27번 변형]

좌표평면 위에 함수 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x} & (x>0)\\ -\dfrac{16}{x} & (x<0)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=x$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{PQ}\cdot\overline{QR}$의 최솟값을 구하시오.

50 유리함수 $f(x)=\dfrac{4x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 4가 아닌 모든 실수 x에 대하여
$f^{-1}(x)=f(x-1)-1$이다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면
함수 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프와 일치한다.

$a+b$의 값은?(단, a, b는 상수)

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

개념원리(2025) - 공통수학2 (유리함수) 250~273p

유리함수의 그래프

실시일자	-
50문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 2	03 ⑤
04 ①	05 ⑤	06 ①
07 8	08 ⑤	09 ③
10 4	11 ⑤	12 9
13 ②	14 ③	15 ④
16 ②	17 4	18 -5
19 5	20 ④	21 1
22 2	23 ③	24 ①
25 ④	26 ③	27 ④
28 7	29 ④	30 ④
31 3	32 ⑤	33 6
34 ⑤	35 $\frac{17}{4}$	36 1
37 $-\frac{1}{2}$	38 $\frac{1}{19}$	39 12
40 3	41 -1	42 4
43 ②	44 9	45 ④
46 ⑤	47 ④	48 ③
49 36	50 ②	

실시일자	-	유형별 학습	이름
50문제 / DRE수학			

01 정답 ②

해설

$$y=\frac{2x-1}{1-3x}=\frac{-\frac{2}{3}(1-3x)-\frac{1}{3}}{1-3x}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{1-3x}-\frac{2}{3}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$ 이므로

$a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

(다른 풀이)

(i) (분모)$=0$일 때, $x=\frac{1}{3}$

(ii) 일차항의 계수의 비, $y=-\frac{2}{3}$

02 정답 2

해설

$$y=\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=2$

03 정답 ⑤

해설

$$y=\frac{x+2}{-2x+1}$$

$$=\frac{x+2}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

04 정답 ①

해설 $y=\frac{1}{x+2}-3$에서 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=3$이므로 $a=-2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-2+(-3)=-5$

05 정답 ⑤

해설 $y=\frac{1}{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼,

y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y=\frac{1}{2(x+1)}+1+1=\frac{1}{2x+2}+2=\frac{4x+5}{2x+2}$$

06 정답 ①

해설 $$y=\frac{1-3x}{x+3}=\frac{-3(x+3)+10}{x+3}=\frac{10}{x+3}-3$$

따라서 $y=\frac{1-3x}{x+3}$의 그래프는 $y=\frac{10}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼

평행이동한 것이므로 ①과 같다.

07 정답 8

해설 $y=\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}+2$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=2$이므로

$a=-2,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=4+4=8$

08 정답 ⑤

해설 $y=\dfrac{-2x+7}{3-x}=\dfrac{2x-7}{x-3}=\dfrac{2(x-3)-1}{x-3}$

$=-\dfrac{1}{x-3}+2$이므로

점근선의 방정식은 $x=3,\ y=2$

$\therefore a=2$

09 정답 ③

해설 $y=\dfrac{2x-7}{x-5}=\dfrac{3}{x-5}+2$이므로

함수 $y=\dfrac{2x-7}{x-5}$의 그래프의 점근선은

두 직선 $x=5,\ y=2$이다.

따라서 $m=5,\ n=2$이고 $m-n=5-2=3$

10 정답 4

해설 주어진 식의 우변을 계산하면

$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{a(x-2)^2+b(x+2)(x-2)+c(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-4a+c)x+4a-4b+2c}{(x+2)(x-2)^2}$

따라서

$\dfrac{12-x^2}{(x+2)(x-2)^2}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-4a+c)x+4a-4b+2c}{(x+2)(x-2)^2}$가

x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=-1,\ -4a+c=0,\ 4a-4b+2c=12$

세 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{3}{2},\ c=2$

$\therefore a-b+c=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2=4$

11 정답 ⑤

해설 $\dfrac{1}{a(a+1)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}$

$\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}=\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+2}$

$\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{a+3}$

이므로

$\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}\right)+\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+2}\right)$

$+\left(\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{a+3}\right)=\dfrac{3}{10}$

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+3}=\dfrac{3}{10}$

양변에 $10a(a+3)$을 곱하면

$10(a+3)-10a=3a(a+3)$,

$10a+30-10a=3a^2+9a$

$a^2+3a-10=0$,

$(a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

12 정답 9

해설 $\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{9^2+9}$

$=\dfrac{1}{1(1+1)}+\dfrac{1}{2(2+1)}+\dfrac{1}{3(3+1)}+\cdots+\dfrac{1}{9(9+1)}$

$=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{9\cdot10}$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

$\therefore k=9$

13 정답 ②

해설 $f(x)=1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=1-\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{1}{x+1}$

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{3}$에서

$k=2$

14 정답 ③

해설 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$의 정의역이 $x \neq a$인 모든 실수이고,

치역이 $y \neq b$인 모든 실수이면

$x=a,\ y=b$는 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$의 점근선이다.

즉, $y=\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{(x-2)+6}{x-2}=\dfrac{6}{x-2}+1$에서

$a=2,\ b=1$이므로

$a+b=2+1=3$

15 정답 ④

해설 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}=2+\dfrac{3}{x+1}$이므로

$y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를

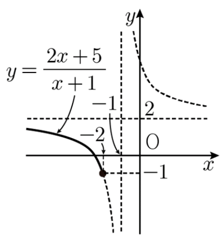
x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼

평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq y < 2$에서 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프는

다음 그림과 같으므로 정의역은

$\{x \mid x \leq -2\}$



16 정답 ②

해설 $x-1=t$라 하면 $x=t+1$이므로

$x+1=t+2$

따라서 $f(t+2)=g(t)$이므로

$g(-2)=f(0)$

이때 $f(0)=\dfrac{0+2}{3 \cdot 0-1}=-2$이므로

$g(-2)=-2$

17 정답 4

해설 함수 $y=\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{6}{x-3}+1$은 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼

평행이동한 것이다.

즉, $m=3,\ n=1$

$\therefore\ m+n=4$

18 정답 -5

해설 두 함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-4},\ y=\dfrac{5x+28}{x+3}$에서

$y=\dfrac{3x+1}{x-4}=\dfrac{13}{x-4}+3 \qquad \cdots ㉠$

$y=\dfrac{5x+28}{x+3}=\dfrac{13}{x+3}+5 \qquad \cdots ㉡$

이때 함수 ㉠을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 함수는

$y-q=\dfrac{13}{(x-p)-4}+3$

$y=\dfrac{13}{x-p-4}+3+q \qquad \cdots ㉢$

두 함수 ㉡과 ㉢이 일치해야 하므로

$-p-4=3,\ 3+q=5$에서 $p=-7,\ q=2$

$\therefore\ p+q=-7+2=-5$

19 정답 5

해설 $x^2-x-6 \geq 0$에서 $(x+2)(x-3) \geq 0$

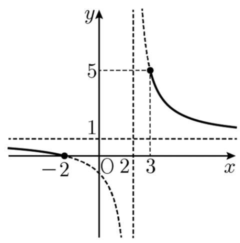
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$y=\dfrac{x+2}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}+1$

즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$에서

$y=\dfrac{x+2}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-2$일 때, 최솟값은 $m=0$

$x=3$일 때, 최댓값은 $M=5$

$\therefore\ M+m=5$

20 정답 ④

해설 $y=\frac{3x+b}{2x-a}$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=\frac{3\cdot 2+b}{2\cdot 2-a}=\frac{6+b}{4-a}$

$16-4a=6+b$

$\therefore\ b=-4a+10 \quad \cdots ㉠$

한편, $y=\frac{3x+b}{2x-a}=\frac{\frac{3}{2}(2x-a)+\frac{3}{2}a+b}{2x-a}$

$=\frac{\frac{3}{2}a+b}{2x-a}+\frac{3}{2}$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{3}{2}$이므로

그래프는 점 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\frac{a}{2}=1,\ c=\frac{3}{2}$이므로 $a=2$이다.

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore\ abc=6$

21 정답 1

해설 $y=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=1$이다.

따라서 이 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+1\ (k\neq 0)$로 놓으면

이 그래프가 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $0=\frac{k}{1}+1$

$\therefore\ k=-1$

$\therefore\ y=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}$

따라서 $\frac{x}{x+1}=\frac{bx+c}{x+a}$이므로 $a=1,\ b=1,\ c=0$

$\therefore\ ab+c=1$

22 정답 2

해설 주어진 함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(-1,\ -\frac{1}{5}\right)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=-\frac{1}{5}$

즉, $f(x)=\frac{k}{x+1}-\frac{1}{5}$이라 하면 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$f(0)=k-\frac{1}{5}=2$

$\therefore\ k=\frac{11}{5}$

$\therefore\ f(x)=\frac{\frac{11}{5}}{x+1}-\frac{1}{5}=\frac{11-(x+1)}{5(x+1)}=\frac{-x+10}{5x+5}$

따라서 $a=-1,\ b=2,\ c=5$이므로

$a-b+c=-1-2+5=2$

[다른 풀이]

그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로 $2=\frac{5b}{c}$

$\therefore\ 5b=2c \quad \cdots ㉠$

$y=\frac{ax+5b}{5x+c}=\frac{\frac{a}{5}(5x+c)-\frac{ac}{5}+5b}{5x+c}$

$=\frac{-\frac{ac}{5}+5b}{5x+c}+\frac{a}{5}$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\frac{c}{5},\ y=\frac{a}{5}$

따라서 그래프는 점근선의 교점 $\left(-\frac{c}{5},\ \frac{a}{5}\right)$에 대하여 대칭이므로 $-\frac{c}{5}=-1,\ \frac{a}{5}=-\frac{1}{5}$

$\therefore\ a=-1,\ c=5$

㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore\ a-b+c=-1-2+5=2$

23 정답 ③

해설 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선이

$x=2,\ y=-3$이므로 주어진 함수를

$y=\dfrac{k}{x-2}-3$ … ㉠으로 놓자.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\dfrac{k}{-2}-3$

$\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x-2}-3=\dfrac{-3x+2}{x-2}$

따라서 $a=-3,\ b=2,\ c=-2$이므로

$a+b+c=-3+2-2=-3$

24 정답 ①

해설 $y=\dfrac{2-6x}{x-2}=\dfrac{-6(x-2)-10}{x-2}=-\dfrac{10}{x-2}-6$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-6$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2,\ -6)$이므로

$a=2,\ b=-6$

$\therefore a+b=-4$

25 정답 ④

해설 유리함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$의 정의역이 $x\neq a$인 모든 실수이고,

치역이 $y\neq b$인 모든 실수이므로

$x=a,\ y=b$는 주어진 함수의 점근선이다.

즉, $y=\dfrac{3x+1}{x-3}=3+\dfrac{10}{x-3}$에서 점근선은

$x=3,\ y=3$

따라서 $a=3,\ b=3$이므로

$ab=3\cdot 3=9$

26 정답 ③

해설 $-\dfrac{2}{5}x=-\dfrac{5}{2x},\ x^2=\dfrac{25}{4},\ x=\pm\dfrac{5}{2}$

따라서 교점은 $\left(\dfrac{5}{2},\ -1\right), \left(-\dfrac{5}{2},\ 1\right)$

(i) $y=3x-k$에 $x=\dfrac{5}{2},\ y=-1$을 대입하면

$-1=3\times\dfrac{5}{2}-k,\ k=\dfrac{17}{2}$

(ii) $y=3x-k$에 $x=-\dfrac{5}{2},\ y=1$을 대입하면

$1=3\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)-k,\ k=-\dfrac{17}{2}$

$\therefore k=\dfrac{17}{2},\ -\dfrac{17}{2}$

따라서 가능한 k값을 모두 더한 값은 0이다.

27 정답 ④

해설 $(f\circ f)(x)=x$이려면 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이어야 한다.

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면,

$y=\dfrac{3}{ax-4}+1$

$\longrightarrow x=\dfrac{3}{a(y-1)}+\dfrac{4}{a}$

$\longrightarrow y=\dfrac{3}{a(x-1)}+\dfrac{4}{a}\cdots\cdots f^{-1}(x)$

$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $a=4$

28 정답 7

해설 두 함수 $f(x)=\dfrac{-5x+2}{3x-6},\ g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+5}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{-5x+2}{3x-6}$로 놓으면 $y(3x-6)=-5x+2$

이를 x에 대하여 풀면 $(3y+5)x=6y+2$

$\therefore x=\dfrac{6y+2}{3y+5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{6x+2}{3x+5}$

즉, $\dfrac{ax+b}{cx+5}=\dfrac{6x+2}{3x+5}$이므로

$a=6,\ b=2,\ c=3$이다.

$\therefore a+2b-c=6+2\cdot 2-3=7$

29 정답 ④

해설 $y=\dfrac{5x-1}{x-4}=\dfrac{5(x-4)+19}{x-4}=\dfrac{19}{x-4}+5$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4,\ y=5$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(4,\ 5)$이므로

$a=4,\ b=5$

$\therefore\ a-b=-1$

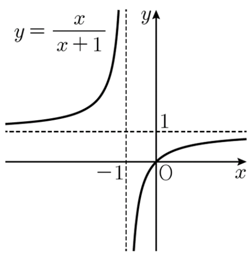
30 정답 ④

해설 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역은 -1이 아닌 모든 실수이고 치역은 1이 아닌 모든 실수이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다. (참)

ㄷ. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$의 그래프는 제4 사분면을 지나지 않는다. (참)



31 정답 3

해설 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-a}$을 $y=\dfrac{4x+3}{x-a}$으로 놓고

x에 대하여 정리하면

$y(x-a)=4x+3,\ xy-ay=4x+3$

$(y-4)x=ay+3$

$\therefore\ x=\dfrac{ay+3}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{ax+3}{x-4}$

따라서 $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+3}{x-4}=\dfrac{-x+3}{x-b}$이므로

$a=-1,\ b=4$

$\therefore\ a+b=3$

32 정답 ⑤

해설 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이

$x=5,\ y=-3$이므로

함수를 $y=\dfrac{k}{x-5}-3\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{3-5}-3$

$\therefore\ k=-6$

$$y=\dfrac{-6}{x-5}-3=\dfrac{-3(x-5)-6}{x-5}=\dfrac{-3x+9}{x-5}$$

따라서 $\dfrac{-3x+9}{x-5}=\dfrac{ax+b}{x+c}$에서

$a=-3,\ b=9,\ c=-5$

$\therefore\ a+b+c=-3+9+(-5)=1$

33 정답 6

해설 $\dfrac{A}{B}$를 분자가 1인 분수의 꼴로 고치려면 분자와 분모를 A로 나눈다.

곧, $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\frac{A}{A}}{\frac{B}{A}}=\dfrac{1}{\frac{B}{A}}$

$$\dfrac{43}{30}=1+\dfrac{13}{30}=1+\dfrac{1}{\frac{30}{13}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{4}{13}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=3$

$\therefore\ a+b+c=1+2+3=6$

34 정답 ⑤

해설 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{7}{2}\text{인 실수}\right\}$이고

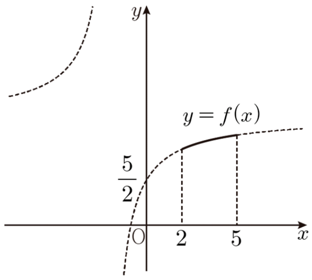
치역은 $\{y\,|\,y\neq a\}$

따라서 정의역과 치역이 서로 같아야 하므로 $a=\dfrac{7}{2}$

35 정답 $\frac{17}{4}$

해설 $f(x)=\frac{ax+5}{x+2}=\frac{5-2a}{x+2}+a$

이때 a가 $\frac{5}{2}$보다 큰 상수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$2 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

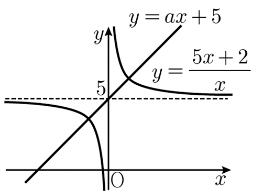
$f(5)=\frac{5a+5}{7}=5$이므로 $a=6$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=\frac{12+5}{4}=\frac{17}{4}$

36 정답 1

해설 $y=\frac{5x+2}{x}=\frac{2}{x}+5$이므로 함수 $y=\frac{5x+2}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+5$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 5)$를 지난다.



이때 $A \cap B \neq \varnothing$이므로

$y=\frac{5x+2}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+5$가 만나야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $a>0$이므로

정수 a의 최솟값은 1이다.

37 정답 $-\frac{1}{2}$

해설 $(h \circ f)(x)=h(f(x))=h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$에서

$(h \circ f)(x)=g(x)$이므로

$h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{x}{x-1}$ $\cdots$ ㉠

$\frac{1+x}{1-x}=t$라 하면 $1+x=t-tx$

$(t+1)x=t-1$

$\therefore x=\frac{t-1}{t+1}$

이것을 ㉠에 대입하면

$$h(t)=\frac{\frac{t-1}{t+1}}{\frac{t-1}{t+1}-1}$$

$$=\frac{t-1}{-2}=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$$

$\therefore h(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

38 정답 $\frac{1}{19}$

해설 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=(g^{-1} \circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$f(3)=\frac{6}{-3+2}=-6$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(6)$

$g^{-1}(-6)=k$라 하면 $g(k)=-6$

$\frac{k-1}{3k}=-6$에서 $k-1=-18k$, $19k=1$

$\therefore k=\frac{1}{19}$

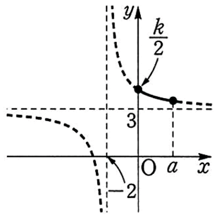
$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=\frac{1}{19}$

39 정답 12

해설 $y=\dfrac{3x+k}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+k-6}{x+2}=\dfrac{k-6}{x+2}+3$

이때 $k>6$에서 $k-6>0$이므로

$0\le x\le a$에서 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=0$일 때, 최댓값이 5이므로 $5=\dfrac{k}{2}$

$\therefore\ k=10$

$x=a$일 때, 최솟값이 4이므로

$4=\dfrac{3a+10}{a+2}$, $4(a+2)=3a+10$

$\therefore\ a=2$

따라서 $a=2$, $k=10$이므로

$a+k=12$

40 정답 3

해설 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}}$

$=\dfrac{\dfrac{x-1-x}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}=-\dfrac{1}{x-1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f\left(\dfrac{-1}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{-1}{x-1}-1}{\dfrac{-1}{x-1}}$

$=\dfrac{\dfrac{-1-(x-1)}{x-1}}{\dfrac{-1}{x-1}}=x$

따라서 $f^k(x)=x$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

41 정답 -1

해설 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(3)$ ($\because\ f^{-1}\circ f=I$)

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$

$\dfrac{2k+5}{k+2}=3$, $2k+5=3k+6$

$\therefore\ k=-1$

42 정답 4

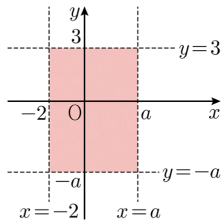
해설 $y=\dfrac{3x}{x-a}=3+\dfrac{3a}{x-a}$이므로

점근선의 방정식은 $x=a$, $y=3$

$y=\dfrac{-ax+1}{x+2}=-a+\dfrac{2a+1}{x+2}$이므로

점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-a$

따라서 두 함수의 점근선은 다음 그림과 같다.



색칠한 부분의 넓이가 42이므로

$(a+3)(a+2)=42$

$(a-4)(a+9)=0$

$\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

43 정답 ②

해설 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$ $(k\neq 0)$ 로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(2,\ 3)$ 을 지나므로

$3=k+2$ $\therefore\ k=1$

따라서, 보기의 분수함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 의 꼴로 고쳤을 때, k 의 값이 1 인 그래프는 평행이동으로 겹쳐진다.

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$

② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+9}{x-2}=\dfrac{9}{x-2}+2$

③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+2$

④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-2$

⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

따라서, 겹쳐질 수 없는 것은 ② 번이다.

44 정답 9

해설 유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\frac{2}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\frac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서

만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{a}\right)$ $(a\neq\sqrt{2})$라 하면

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{2}{a},\ a\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ 이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고

점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c,\ \frac{2}{c}\right)$라 하면

직선 BC의 기울기는 1이다.

$$\frac{\frac{2}{c}-a}{c-\frac{2}{a}}=\frac{-a}{c}=1,\ c=-a\text{이므로}$$

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a,\ -\frac{2}{a}\right)$

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\frac{2}{a}-\left(-\frac{2}{a}\right)\right\}^2$$

$$=4a^2+\frac{16}{a^2}=20$$

$$a^2+\frac{4}{a^2}=5$$

따라서 $k^2=\left(a+\frac{2}{a}\right)^2=a^2+\frac{4}{a^2}+4=9$

45 정답 ④

해설 f^{-1}의 역함수가 f이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\frac{2x-4}{-x+3}$를

x에 대하여 풀면, $x=\frac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y=f(x)=\frac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$이므로

$a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$은 $x=-3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.

46 정답 ⑤

해설 유리함수의 그래프를 이용하여 옳은 것을 찾을 수 있는가?

$y=\frac{k}{x-1}+3$에서 $y=0$이면

$x=1-\frac{k}{3}=\frac{3-k}{3}$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{3-k}{3},\ 0\right)$

$x=0$이면 $y=3-k$이므로 $\mathrm{B}(0,\ 3-k)$

또, 두 점근선의 교점을 R라 하면 $\mathrm{R}(1,\ 3)$

이때 선분 BP의 중점이 R이므로 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\frac{0+a}{2}=1$에서 $a=2$

$\frac{3-k+b}{2}=3$에서 $b=3+k$

즉, $\mathrm{P}(2,\ 3+k)$

ㄱ. $k=1$이면 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 $\frac{k-3}{\frac{3-k}{3}}=-3$

직선 AP의 기울기는 $\frac{k+3}{\frac{3+k}{3}}=3$

따라서 두 기울기의 합은 $-3+3=0$ (참)

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이는 사각형 PBOQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 빼면 된다.

사각형 PBAQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{(3-k)+(3+k)\}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-k}{3}\cdot(3-k)$$

$$=6-\frac{(3-k)^2}{6}$$

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{3}{2}$보다 작고,

사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로

삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

$\frac{(3-k)^2}{6}=1$에서 $k=3-\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<k<1$이다.

한편, 직선 BP의 기울기는

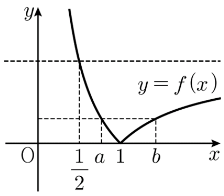
$\frac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=k$

따라서 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

47 정답 ④

해설 $x>0$에서 함수 $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $0<a<b$인 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립하려면 $\dfrac{1}{2}<a<1$이고 $b>1$이어야 한다.



ㄱ. 위의 그림에서 $0<f(b)<1$이다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{2}<a<1$ (거짓)

ㄷ. $f(a)=\dfrac{1}{a}-1$, $f(b)=1-\dfrac{1}{b}$이므로

$$f(a)f(b)=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{b-1}{b}=-\frac{(a-1)(b-1)}{ab}$$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48 정답 ③

해설 함수 $y=\dfrac{2}{x+3}-4$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$$b=\frac{2}{a+3}-4$$

$$\therefore\ b+4=\frac{2}{a+3} \qquad \cdots ㉠$$

또, $\overline{\mathrm{AB}}=-3-a$, $\overline{\mathrm{AC}}=-4-b$

직사각형 ABDC의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}})=2\{(-3-a)+(-4-b)\}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=-3-a>0$, $\overline{\mathrm{AC}}=-4-b>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(-3-a)+(-4-b)&\geq 2\sqrt{(-3-a)\cdot(-4-b)}\\&=2\sqrt{(-3-a)\cdot\frac{2}{-3-a}}\quad (\because ㉠)\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(단, 등호는 $-3-a=-4-b$,

즉 $a=-3-\sqrt{2}$, $b=-4-\sqrt{2}$일 때 성립)

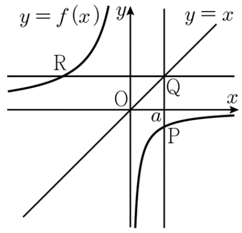
$$\begin{aligned}\therefore\ 2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}})&=2\{(-3-a)+(-4-b)\}\\&\geq 2\cdot 2\sqrt{2}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 직사각형 ABDC의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

49 정답 36

해설 점 P의 x 좌표를 a라 하자.

(ⅰ) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(a,\ -\dfrac{4}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{16}{a},\ a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\dfrac{4}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\dfrac{16}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}&=\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)\\&=a^2+\frac{64}{a^2}+20\\&\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{64}{a^2}}+20\\&=36\end{aligned}$$

등호가 성립하는 경우는

$a^2=\dfrac{64}{a^2}$, 즉 $a=2\sqrt{2}$일 때이다.

그러므로 $a=2\sqrt{2}$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(a,\ -\dfrac{16}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{4}{a},\ a\right)$이므로

(ⅰ)에서와 같이

$a=-2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 36이다.

50 **정답** ②

해설 $f(x)=\dfrac{4x+b}{x-a}=\dfrac{4(x-a)+4a+b}{x-a}=\dfrac{4a+b}{x-a}+4$

이므로 $f(x)=\dfrac{4x+b}{x-a}$의 그래프는 $y=\dfrac{4a+b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

즉, 조건 (나)에서

$4a+b=7$ $\cdots$ ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=4$이고 두 점근선의 교점은 점 $(a, 4)$이다.

또한, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점과 일치하므로 점 $(4, a)$이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x-1)-1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 $y=f(x-1)-1$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+1, 3)$이다.

점 $(4, a)$와 점 $(a+1, 3)$이 같으므로

$a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$12+b=7$ $\therefore b=-5$

$\therefore a+b=3+(-5)=-2$