마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~230p

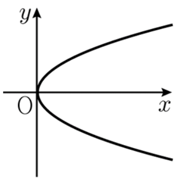
함수의 개념과 그래프

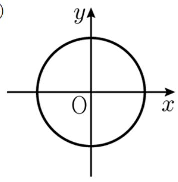
실시일자	-
25문제 / DRE수학	

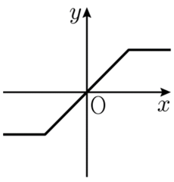
유형별 학습

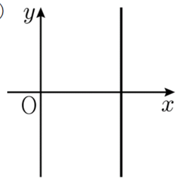
이름

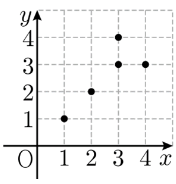
01 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


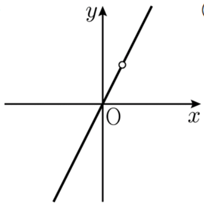
②


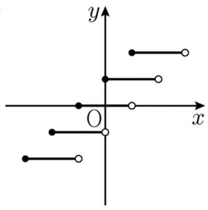
③


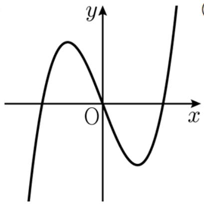
④


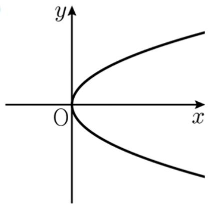
⑤


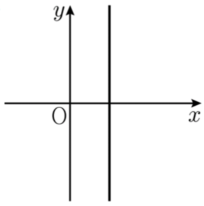
02 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


03 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $y=x+2$

ㄴ. $y=\begin{cases} x^2 \ (x\text{는 짝수}) \\ x+1 \ (x\text{는 홀수}) \end{cases}$

ㄷ. $y=(x\text{의 양의 약수})$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 함수 $f(x)=\frac{5}{3}(x-2)$에 대하여 $f(5)+f(14)$의 값을 구하시오.

05 함수 $f: X \to Y$에 대하여 $X=\{x \mid 0 \le x \le 1\}$이고 $f(x)=\begin{cases} x\,(x\text{는 유리수}) \\ 1-x\,(x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $f(x)+f(1-x)$의 값을 구하시오.

06 함수 $f(x)=x^3-ax$의 정의역이 $X=\{-1,\ 0,\ 2\}$일 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 10이다. 상수 a의 값을 구하시오.

07 집합 $A=\{x \mid x\text{는 } 40\text{이하의 자연수}\}$의 부분집합 X를 정의역으로 하는 함수 f를 $f(x)=$(x를 5로 나누었을 때의 나머지)로 정의한다. 이때, 함수 f의 치역이 $\{2\}$가 되도록 하는 정의역 X의 개수를 구하시오.

08 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(1)=2$를 만족시킬 때, 다음 보기 중 참인 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=1$
ㄴ. $f(x)f(-x)=1$
ㄷ. $f(x)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 모든 실수 x에 대하여 함수 f는 $3f(x)+2f(2-x)=10x$를 만족한다. $f(a)=12$라 할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

10 집합 $N=\{n\,|\,n$은 2 이상의 자연수$\}$이고,
함수 $f: N \to N$이

$$\begin{cases} f(n)=n & (n\text{이 소수}) \\ f(pq)=f(p)+f(q) & (p\in N,\ q\in N) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $f(300)$의 값을 구하시오.

11 다음 두 함수 f, g가 실수 범위에서 서로 같은 함수인 것을 고르시오

① $f(x)=x^2$, $g(x)=x$

② $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$

③ $f(x)=x-2$, $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

④ $f(x)=x$, $g(x)=-x$

⑤ $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$

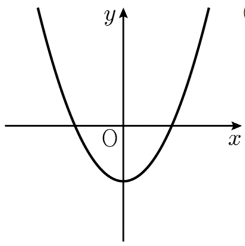
12 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$을 정의역으로 하는
두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=-x^3+a$가 서로 같은
함수일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

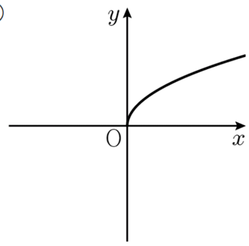
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

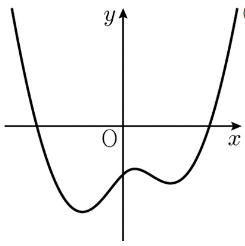
13 다음 함수 중 일대일대응인 것을 모두 고르면? (정답 2개)
(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

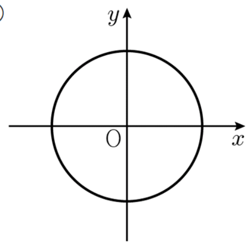
① $y=3$ ② $y=-x+4$
③ $y=|x-1|$ ④ $y=-2x^2+3$
⑤ $y=\begin{cases} 2x+1 & (x\geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$

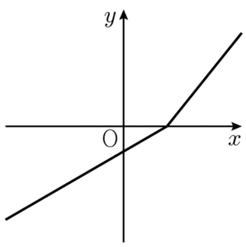
14 다음 중 일대일대응의 그래프인 것은?
(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

①


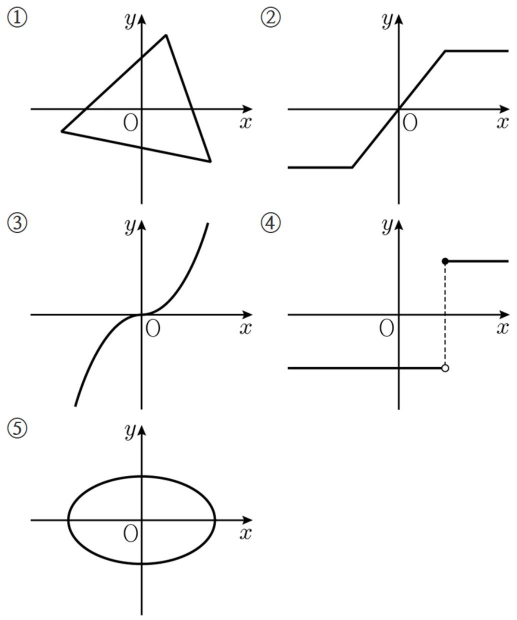
②


③


④


⑤


15 다음 중 일대일대응의 그래프는?



16 이차함수 $f(x)=x^2-4x$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 일대일대응이 되도록하는 집합 X는 $X=\{x \mid x \geq k\}$이다. 이때 k의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

17 집합 $X=\{x \mid x \geq k\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2-2x-10$가 일대일대응이 되도록 하는 실수 k의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

18 실수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

19 함수 $f: X \to X$, $f(x)=2x^2+x-8$을 항등함수가 되게 하는 공집합이 아닌 집합 X의 개수를 구하시오.

20 항등함수와 상수함수에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(단, R는 실수 전체의 집합이다.)

① 항등함수는 일대일 대응이다.
② f : R $\Rightarrow$ R가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.
③ 항등함수를 그래프로 나타내면 항상 직선 $y=x$가 된다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 오직 하나뿐이다.
⑤ 상수함수를 그래프로 나타내면 항상 직선이 된다.

21 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응의 개수를 a, 항등함수의 개수를 b, 상수함수의 개수를 c이라 할 때, abc의 값을 구하시오.

22 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 일대일대응의 개수를 a, 상수함수의 개수를 b, 항등함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

23 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수가 60일 때, X에서 Y로의 상수함수의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

24 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응 중에서 $f(2)=a$, $f(4)=e$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

25 두 집합 $X=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응 중에서 $f(1)=4$, $f(3)=8$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~230p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ③	02 ③	03 ②
04 25	05 1	06 -3
07 255	08 ⑤	09 2
10 17	11 ②	12 ④
13 ②, ⑤	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ④	18 0
19 3	20 ③ , ④ , ⑤	
21 96	22 29	23 ①
24 6	25 2	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (함수) 216~230p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ③

해설 함수의 그래프는 정의역의 임의의 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

02 정답 ③

해설 함수의 그래프는 임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

03 정답 ②

해설 ㄱ. X의 원소 3에 대응하는 Y의 값이 없으므로 함수가 아니다.
ㄴ. $1 \rightarrow 2,\ 2 \rightarrow 4,\ 3 \rightarrow 4$,
곧 X의 모든 원소가 Y의 원소 하나에 대응하므로 함수이다.
ㄷ. X의 원소 2, 3에 대응하는 Y의 값이 각각 2개이므로 함수가 아니다.

04 정답 25

해설 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$x=5$를 대입하면, $f(5)=\dfrac{5}{3}\cdot 3=5$
$x=14$를 대입하면, $f(14)=\dfrac{5}{3}\cdot 12=20$
$\therefore f(5)+f(14)=5+20=25$

05 정답 1

해설 (i) x가 유리수일 때 $f(x)+f(1-x)=x+1-x=1$
(ii) x가 무리수일 때
$f(x)+f(1-x)=1-x+1-(1-x)=1$

(i), (ii)에서 $f(x)+f(1-x)=1$

06 정답 -3

해설 $f(-1)=(-1)^3-a\cdot(-1)=-1+a,\ f(0)=0,$
$f(2)=2^3-2a=8-2a$
이때 함수 f의 치역은 $\{-1+a,\ 0,\ 8-2a\}$이고,
모든 원소의 합이 10이므로
$(-1+a)+(8-2a)=10$
$-a+7=10 \qquad \therefore a=-3$

07 정답 255

해설 $f(x)=2$이려면 $x=5k+2$(k는 음이 아닌 정수)이어야 한다.
따라서 치역이 $\{2\}$이려면 함수 f의 정의역 X는 $\{x \mid x=5k+2(k=0,1,2,\cdots 7)\}$
즉, $\{2,7,12,17,\cdots,37\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^8-1=255$

08 정답 ⑤

해설 함수방정식 문제는 요구하는 값 또는 성질이 나오도록 x에 적당한 값을 대입한다.
ㄱ. $x=1,\ y=0$을 준 식에 대입하면
$f(1+0)=f(1)f(0) \quad \therefore 2=2f(0)$
$\therefore f(0)=1$이므로 참.
ㄴ. $f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)=1$
$\therefore$ 참.
ㄷ. $f(1)=f(x+(1-x))=f(x)f(1-x)=2$이므로 $f(x)\neq 0$
따라서 $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2>0$
$\left(\because f(x)\neq 0\text{이므로 } f\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 0\right)$
$\therefore$ 참.

09 정답 2

해설 $3f(x)+2f(2-x)=10x$ $\cdots$ ㉠
㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 등식의 양변에
x 대신 $2-x$를 대입하면
$3f(2-x)+2f(x)=20-10x$ $\cdots$ ㉡
㉠ $\cdot\, 3-$ ㉡ $\cdot\, 2$를 하면
$5f(x)=50x-40$
$\therefore\ f(x)=10x-8$
$f(a)=12$이므로 $10a-8=12$
$\therefore\ a=2$

10 정답 17

해설 $f(pq)=f(p)+f(q)$이므로
$f(300)=f(2^2\cdot 3\cdot 5^2)$
$=f(2^2)+f(3\cdot 5^2)$
$=f(2)+f(2)+f(3)+f(5^2)$
$=f(2)+f(2)+f(3)+f(5)+f(5)$
$=2\cdot f(2)+f(3)+2\cdot f(5)$
그런데 $2,\ 3,\ 5$는 소수이므로
$f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(5)=5$
$\therefore\ f(300)=2\cdot 2+3+2\cdot 5$
$=17$

11 정답 ②

해설 ① $f(x)=x^2,\ \ g(x)=x$에서
$f(-1)=(-1)^2=1,\ \ f(-1)=-1$
$\therefore f\neq g$
② $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|,\ \ \ g(x)=|x|$
$\therefore f=g$
③ $f(x)=x-2$
$g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}=(x-2)$
(단, $x\neq -2$)
$\therefore f\neq g$
④ $f(x)=x,\ g(x)=-x$에서
$f(1)=1,\ \ g(1)=-1$ $\therefore f\neq g$
⑤ $f(x)=|x|,\ \ g(x)=x^2$에서
$f(2)=|2|=2,\ \ g(2)=2^2=4$ $\therefore f\neq g$

12 정답 ④

해설 (ⅰ) $f(1)=g(1)$에서
$a+b=-1+a$
$\therefore\ b=-1$
(ⅱ) $f(0)=g(0)$에서 $a=b$이므로
$a=-1$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-1,\ b=-1$이므로
$ab=1$

13 정답 ②, ⑤

해설 ① [반례] $f(x)=3$이라 하면 $x_1=1,\ x_2=2$일 때,
$x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=3,\ f(x_2)=3$
$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$
따라서 함수 $y=3$은 일대일대응이 아니다.
③ [반례] $f(x)=|x-1|$이라 하면 $x_1=0,\ x_2=2$일 때, $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=1,\ f(x_2)=1$
$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$
따라서 함수 $y=|x-1|$은 일대일대응이 아니다.
④ [반례] $f(x)=-2x^2+3$이라 하면
$x_1=-1,\ x_2=1$일 때, $x_1\neq x_2$이지만
$f(x_1)=-2+3=1,\ f(x_2)=-2+3=1$
$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$
따라서 함수 $y=-2x^2+3$은 일대일대응이 아니다.

14 정답 ⑤

해설 ①, ③, ④ 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응의 그래프가 아니다.
② 치역이 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이므로 일대일함수의 그래프이지만 일대일대응의 그래프가 아니다.
따라서 일대일대응의 그래프는 ⑤이다.

15 정답 ③

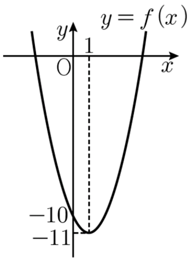
해설 직선 $y=k$ (k는 상수)와 그래프의 교점이 1개이고, (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일 대응이다.
따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다.

16 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로
함수 $y=f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x\ge k$일 때, 항상 증가하는 함수여야하고, $x\ge 2$에서만 항상 증가할 수 있으므로
$k\ge 2$ $\cdots$ ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x\ge k\}$에 대하여 치역은 $\{y|y\ge k\}$이어야 한다.
즉, $f(k)=k$이므로
$k^2-4k\ge k,\ k(k-5)\ge 0$
$\therefore\ k\le 0$ 또는 $k\ge 5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=5$

17 정답 ④

해설 $f(x)=x^2-2x-10=(x-1)^2-11$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\ge k$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가해야 하므로
$k\ge 1$ $\cdots$ ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x\ge k\}$에 대하여 치역은 $\{y|y\ge k\}$이어야 한다.
즉, $f(k)=k$이어야 하므로
$k^2-2k-10=k$
$k^2-3k-10=0,\ (k+2)(k-5)=0$
$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k=5$

18 정답 0

해설 0이 아닌 x에 대하여 $y=0$을 $f(xy)=f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0)=f(x)f(0)\leftrightarrow f(0)-f(0)f(x)=0$
$\leftrightarrow f(0)[1-f(x)]=0\leftrightarrow f(0)=0$ 또는 $f(x)=1$
만일 $f(x)=1$이면
$f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(2)=1,\ \cdots$이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x)=1$은 부적당
$\therefore\ f(0)=0$

19 정답 3

해설 함수 $f: X\to X$가 항등함수
즉, 임의의 $x\in X$에 대하여 $f(x)=x$를 만족한다.
정의역과 공역이 모두 X이므로
$f(x)=x$를 만족하는 x를 집합 X의 원소로 하면 된다.
$f(x)=x$에서
$2x^2+x-8=x,\ x^2=4$
$\therefore\ x=\pm 2$
따라서 구하는 집합은 $\{-2,\ 2\}$의 부분집합에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
$2^2-1=3$

20 정답 ③, ④, ⑤

해설 ③ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 경우에만 항등함수의 그래프가 직선 $y=x$이다.
(반례) $f:\mathrm{X}\Rightarrow\mathrm{Y},\ \ f(x)=x$에서
$\mathrm{X}=\{1,\ \ 2,\ \ 3\},\ \ \mathrm{Y}=\{1,\ \ 2,\ \ 3\}$이면
$y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$가 아니다.
④ 집합 R에서 R로의 상수함수는 무수히 많다.
⑤ 정의역이 실수 전체의 집합일 경우에만 상수함수의 그래프가 직선이 된다.
(반례) $f:\mathrm{X}\Rightarrow\mathrm{Y},\ f(x)=3$에서
$\mathrm{X}=\{1,\ \ 2,\ \ 3\}$이면 $y=f(x)$는 직선이 아니다.

따라서, 옳지 않은 것은 ③, ④, ⑤이다.

21 정답 96

해설 일대일대응을 $f: X\to X$라 하면
$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 중 하나이므로 4개다.
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값을 제외한 3개다.
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1),\ f(0)$의 값을 제외한 2개다.
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1),\ f(0),\ f(1)$의 값을 제외한 1개다.
따라서 일대일대응의 개수는 $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$
또, 항등함수는 1개, 상수함수는 4개이므로
$a=24,\ b=1,\ c=4$
$\therefore\ abc=96$

22 정답 29

해설 X에서 X로의 일대일대응의 개수는
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$(개)
X에서 X로의 상수함수의 개수는 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$, $f(x)=4$의 4개 이다.
X에서 X로의 항등함수의 개수는 $f(x)=x$로 1개이다.
따라서 $a=24$, $b=4$, $c=1$ 이므로
$a+b+c=29$

23 정답 ①

해설 집합 Y의 원소의 개수를 a라 하면 일대일함수의 개수는
${}_a\mathrm{P}_3 = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) = 60$
이때 $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$이므로
$a=5$
따라서 X에서 Y로의 상수함수의 개수는 5이다.

24 정답 6

해설 $f(2)=a$, $f(4)=e$이고 함수 f는 일대일대응이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 다음과 같다.
(i) $f(1)=b$, $f(3)=c$, $f(5)=d$
(ii) $f(1)=b$, $f(3)=d$, $f(5)=c$
(iii) $f(1)=c$, $f(3)=b$, $f(5)=d$
(iv) $f(1)=c$, $f(3)=d$, $f(5)=b$
(v) $f(1)=d$, $f(3)=b$, $f(5)=c$
(vi) $f(1)=d$, $f(3)=c$, $f(5)=b$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 6이다.

25 정답 2

해설 $f(1)=4$, $f(3)=8$이고 f는 일대일대응이므로
$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 6의 2개
$f(7)$의 값이 될 수 있는 수는 $f(5)$의 값을 제외한 1개
따라서 함수 f의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$