마플시너지(2025) - 공통수학2 177~197p

명제와 조건 ~ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 조건 $p: 2x-a \neq 0$, $q: 4x^2+2x-12 \neq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

02 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 '$p: x$는 3의 배수이다.', '$q: x$는 홀수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 원소의 합을 구하시오.

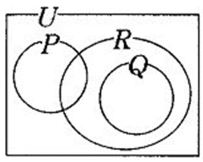
03 두 조건 $p: 3<x<5$, $q: |x-1|<a$에 대하여 명제 $p \Rightarrow q$가 참이 되는 실수 a의 범위는?

① $0<a<4$　② $a \geq 4$
③ $0 \leq a<3$　④ $a>4$
⑤ $0<a<3$

04 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P-Q=P$　② $P \cap Q=\varnothing$
③ $P \cap Q^C=P$　④ $P \cup Q=U$
⑤ $P \cup Q^C=Q^C$

05 전체집합 U에서 세 조건 p, q, r를 만족시키는 원소들의 집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 P, Q, R 사이에 아래 그림과 같은 관계가 성립한다. 이때 다음 중 옳은 것은?



① $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이다.
② $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.
③ p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.
④ 명제 'p이면 $\sim r$이다.'는 참이다.
⑤ 명제 '$\sim r$이면 p이다.'는 거짓이다.

06 전체집합 U에 대하여 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$이라 할 때, 공집합이 아닌 세 집합 $P,\ Q,\ R$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \in Q$인 모든 원소 x에 대하여 $x \in P$이다.
(나) $x \in P$인 모든 원소 x에 대하여 $x \notin R$이다.

명제 '$\sim r$이면 $\sim p$이고 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 반드시 속하는 집합은?

① P　② Q　③ R
④ $P \cap Q$　⑤ $Q \cup R$

07 실수 x에 대한 두 조건
$p: x^2-7x+10 \geq 0,\ q: 2x^2-kx \leq 0$에 대하여
명제 $\sim q \rightarrow p$가 거짓임을 보이는 정수인 반례가
$x=4$뿐이도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

08 공집합이 아닌 전체집합 U에서 조건 $p(x)$의 진리집합을 P라 할 때, 다음 보기 중 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. '모든 x에 대하여 $p(x)$'가 참이면 $P=U$이다.
ㄴ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 참이면 $P \neq \varnothing$이다.
ㄷ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 거짓이면 $P=\varnothing$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 세 명제 $p \rightarrow q,\ \sim r \rightarrow \sim q,\ s \rightarrow p$가 모두 참일 때, 다음 보기 중 항상 참인 명제의 개수를 구하시오.

〈보기〉
ㄱ. $\sim p \rightarrow \sim s$　ㄴ. $\sim p \rightarrow r$
ㄷ. $q \rightarrow \sim s$　ㄹ. $s \rightarrow r$

10 전체집합 U의 세 부분집합 $P,\ Q,\ R$가 각각 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합이고 두 명제 $p \rightarrow \sim q$와 $\sim r \rightarrow q$가 모두 참일 때, 다음 중 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $P \subset R$
ㄴ. $(Q-R) \subset P^C$
ㄷ. $Q \subset (P^C \cup R)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+2}$ 가 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt{n^2+2}$ 가 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
> $p^2(n^2+2)=q^2$이다.
> p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
> $n^2=\boxed{(가)}$이다.
> 이때 자연수 k에 대하여
> (ⅰ) $q=2k$일 때
> $(2k-1)^2<n^2<\boxed{(나)}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅱ) $q=2k+1$일 때
> $\boxed{(나)}<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
> $\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
> 따라서 $\sqrt{n^2+2}$ 는 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)+g(3)$의 값은?

① 56 ② 57 ③ 58
④ 59 ⑤ 60

12 네 조건
p : x는 2의 배수이다. q : x는 4의 배수이다.
r : x는 6의 배수이다. s : x는 8의 배수이다.
에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. r는 s이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. (r이고 s)는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. (q 또는 r)는 (s 또는 q)이기 위한 필요조건이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

13 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

> ㉠ p : $a^2+b^2=0$, q : $ab=0$
> ㉡ p : $(a-b)(b-c)=0$, q : $a=b=c$
> ㉢ p : $a>b$ 이고 $b>c$, q : $a>c$

① ㉡ ② ㉠, ㉡
③ ㉠, ㉢ ④ ㉡, ㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

14 두 조건 p: $|x-a|<4$, q: $|x-4|<8$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 26 ② 28 ③ 30
④ 34 ⑤ 36

15 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.
p: $5x-a\geq 0$, q: $x^2-2x-3<0$
$\sim q$가 p이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

16 세 조건 $p: 2x^2-7x-4\neq 0$, $q: bx^2-9x+4\neq 0$, $r: x-a\neq 0$에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건이고, r은 q이기 위한 필요조건일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

17 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 필요조건, s 는 q 이기 위한 필요조건일 때, q 는 s 이기 위한 (가)조건이고, s 는 p 이기 위한 (나)조건이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① 필요, 필요충분
② 필요충분, 충분
③ 필요, 충분
④ 필요충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

18 전체집합 U에서의 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $P\cup(Q-P)^C=U$를 만족하는 두 조건 p, q로 알맞은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 실수이고 $P\neq Q$)

〈보기〉

ㄱ. $p: A-B=\varnothing$	$q: A=B$
ㄴ. $p: A\cup B=A$	$q: A\cap B=B$
ㄷ. $p: ab=0$	$q: \lvert a\rvert+\lvert b\rvert=0$
ㄹ. $p: a>b>0$	$q: 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
ㅁ. $p: a^2+b^2=0$	$q: a^2-b^2=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

19 두 조건
$p: -1\leq x\leq k$, $q: x\leq 0$ 또는 $x\geq 7$
에 대하여 명제 $\sim p\rightarrow q$가 거짓임을 보이는 양의 정수인 반례가 $x=6$뿐일 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<5$ ② $k\geq 6$ ③ $4\leq k<5$
④ $5\leq k<6$ ⑤ $6\leq k<7$

20 전제집합 $U=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P=\{-1, 0, 1\}$, $Q=\{-1, a+3\}$, $R=\{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

21 실수 x, y와 집합 A, B, C에 대하여 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p: x+y \geq 2$, $q: x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$
② $p: |x|+|y|=0$, $q: x^3+y^3=0$
③ $p: xy+1>x+y>2$, $q: x>1$ 이고 $y>1$
④ $p: A \subset B \subset C$, $q: A \subset B$ 또는 $A \subset C$
⑤ $p: x+y$가 유리수이다, $q: x$, y는 모두 유리수이다.

22 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B이다.
B : 범인은 D이다.
C : 나는 범인이 아니다.
D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D ② B, C
③ C, B ④ D, C
⑤ B, A

23 집합 A, B, C에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p: (A \cap B) \subset (A \cap B)$
$q: A=B$
② $p: A \cap (B \cap C)=A$
$q: A \cup (B \cup C)=B \cup C$
③ $p: A \cup (B \cap C)=A$
$q: A \cap (B \cup C)=B \cup C$
④ $p: A \cup B=A$
$q: B=\varnothing$
⑤ $p: A \cup (B-A)=B$
$q: A \subset B$

24 좌표평면 위에 두 점 $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$과 집합 $C=\{(x, y) \mid |x|+2|y|=k\}$가 나타내는 도형이 있다. 명제 '집합 C에 속하는 어떤 점 P에 대하여 $\angle APB=90°$ 이다.'가 참이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

실시일자	-
24문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 -12	02 12	03 ②
04 ④	05 ⑤	06 ①
07 13	08 ⑤	09 2
10 ⑤	11 ④	12 ⑤
13 ③	14 ⑤	15 15
16 6	17 ④	18 ②
19 ④	20 ②	21 ③
22 ④	23 ⑤	24 3

실시일자	-	유형별 학습	이름
24문제 / DRE수학			

01 정답 -12

해설 p가 q이기 위한 필요조건이므로

명제 '$4x^2+2x-12\neq 0$이면 $2x-a\neq 0$이다.'가 참이다.

따라서 그 대우인

'$2x-a=0$이면 $4x^2+2x-12=0$이다.'도 참이다.

$2x-a=0$에서 $x=\dfrac{a}{2}$이므로

이것을 $4x^2+2x-12=0$에 대입하면

$4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{a}{2}\right)-12=0$, $a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 모든 실수 a값의 곱은

$-4\cdot 3=-12$

02 정답 12

해설 명제 $p\rightarrow\sim q$가 거짓임을 보이려면 P의 원소이면서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

즉, 반례는 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소이다.

$P\cap Q=\{3,\ 9\}$

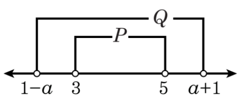
따라서 반례가 될 수 있는 모든 원소의 합은

$3+9=12$이다.

03 정답 ②

해설 $p\Rightarrow q(\mathrm{T})\longrightarrow \mathrm{P}\subset\mathrm{Q}$

$\mathrm{Q}:-a<x-1<a\longrightarrow 1-a<x<a+1$



$\therefore\ 1-a\leq 3$ 그리고 $5\leq a+1$

$\therefore\ -2\leq a$ 그리고 $4\leq a$

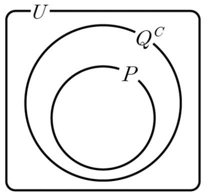
$\therefore\ a\geq 4$

04 정답 ④

해설 $\sim q$가 p이기 위한 필요조건이므로

$P\subset Q^C$

두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

05 정답 ⑤

해설 그림에서 $P\cap Q=\varnothing$, $Q\subset R$, $P\cap R\neq\varnothing$

① $P\cap Q=\varnothing$에서 $Q\subset P^C$ ($\therefore$ 필요조건)

② $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$ ($\therefore$ 충분조건)

③ $P\cap Q=\varnothing$에서 $P\subset Q^C$ ($\therefore$ 충분조건)

④ $P\not\subset R^C$이므로 거짓이다.

⑤ $R^C\not\subset P$이므로 거짓이다.

06 정답 ①

해설 조건 (가)에서 집합 Q의 모든 원소가 집합 P의 원소이므로 $Q\subset P$이다.

조건 (나)에서 집합 P의 원소가 존재하지 않으므로 $P\cap R=\varnothing$, 즉 두 집합 P와 R은 서로소이다.

명제 '$\sim r$이면 $\sim p$이고 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 R^C에 속하면서 $P^C\cap Q^C$에 속하지 않아야 하므로

$$\begin{aligned}R^C\cap(P^C\cap Q^C)^C&=R^C\cap(P\cup Q)\\&=(P\cup Q)\cap R^C\\&=P\cap R^C=P\end{aligned}$$

07 정답 13

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$p: x^2-7x+10 \geq 0$에서 $(x-2)(x-5) \geq 0$이므로

$x \leq 2$ 또는 $x \geq 5$

즉, $P=\{x \mid x \leq 2$ 또는 $x \geq 5\}$

$q: 2x^2-kx \leq 0$에서 $x(2x-k) \leq 0$이고

$k>0$이므로

$0 \leq x \leq \dfrac{k}{2}$

즉, $Q=\left\{x \middle| 0 \leq x \leq \dfrac{k}{2}\right\}$

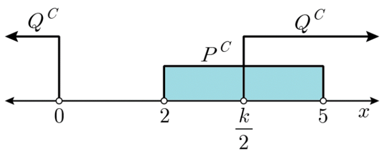
명제 $\sim q \rightarrow p$의 반례가 될 수 있는 값은 Q^C의 원소이면서 집합 P의 원소가 아니어야 하므로 집합 $Q^C \cap P^C$의 원소이다.

집합 $Q^C=\left\{x \middle| x<0 \text{ 또는 } x>\dfrac{k}{2}\right\}$이고

$P^C=\{x \mid 2<x<5\}$이므로

집합 $Q^C \cap P^C$의 정수인 원소가 $x=4$뿐이려면

$3 \leq \dfrac{k}{2}<4$이어야 한다.



따라서 $6 \leq k<8$이므로 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$6+7=13$

08 정답 ⑤

해설 ㄱ. '모든 x에 대하여 $p(x)$'가 참이므로
전체집합 U의 모든 x에 대하여 조건 $p(x)$가 참이다.
즉, $P=U$이다. (참)

ㄴ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 참이므로
집합 P에는 적어도 하나의 원소가 존재한다.
따라서 $P \neq \varnothing$이다. (참)

ㄷ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 거짓이므로
이 명제의 부정은 참이다.
즉, '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'가 참이므로
$P^C=U$이다. 따라서 $P=\varnothing$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참인 명제이다.

09 정답 2

해설 $s \rightarrow p$, $p \rightarrow q$가 참이므로 $s \rightarrow q$가 참이고
각각의 대우인 $\sim p \rightarrow \sim s$, $\sim q \rightarrow \sim p$, $\sim q \rightarrow \sim s$도 참이다.
또, $\sim r \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim p$가 참이므로
$\sim r \rightarrow \sim p$가 참이고 그 대우인 $p \rightarrow r$도 참이다.
또한, $\sim r \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim s$가 참이므로
$\sim r \rightarrow \sim s$가 참이고 그 대우인 $s \rightarrow r$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄹ의 2개이다.

10 정답 ⑤

해설 ㄱ. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$와 $\sim q \rightarrow r$가 참이므로
$p \rightarrow r$가 참이다.
즉, $P \subset Q^C$, $Q^C \subset R$이므로 $P \subset R$ (참)

ㄴ. 드모르간의 법칙에 의하여
$Q-R=Q \cap R^C=(Q^C \cup R)^C$
그런데 $Q^C \subset R$이므로 $Q^C \cup R=R$
또한, $P \subset R$에서 $R^C \subset P^C$이므로
$Q-R=R^C \subset P^C$ (참)

ㄷ. 드모르간의 법칙에 의하여
$P^C \cup R=(P \cap R^C)^C=(P-R)^C$
그런데 $P \subset R$에서 $P-R=\varnothing$이므로
$P^C \cup R=(P-R)^C=\varnothing^C=U$
$\therefore Q \subset (P^C \cup R)=U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 정답 ④

해설 $\sqrt{n^2+2}$가 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+2)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로

$p=1$이 되어야 한다.

$\therefore n^2=\boxed{q^2-2}$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-2=4k^2-2$이고

$(2k-1)^2<4k^2-2<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

이때 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-2=4k^2+4k-1$이고

$(2k)^2<4k^2+4k-1<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

이때 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는

자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+2}$은 무리수이다.

즉, $f(q)=q^2-2$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(5)+g(3)=25-2+36=59$

12 정답 ⑤

해설 x가 4, 6, 8의 배수이면 x는 2의 배수이므로

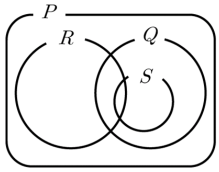
네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각

P, Q, R, S라 하면 $Q\subset P$, $R\subset P$, $S\subset P$

또한, x가 8의 배수이면 x는 4의 배수이므로 $S\subset Q$

즉, 네 집합 P, Q, R, S의 포함 관계를

벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. r가 s이기 위한 필요조건이라면 $S\subset R$이어야 한다.

그런데 위 그림에서 $S\not\subset R$이므로 r는 s이기 위한 필요조건이 아니다. (거짓)

ㄴ. $S\subset Q$이므로 $(R\cap S)\subset Q$

즉, (r이고 s)는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. $Q\cup S=Q$이고 $Q\subset R\cup Q$이므로

$(Q\cup S)\subset(R\cup Q)$

즉, (q 또는 r)는 (s 또는 q)이기 위한 필요조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 정답 ③

해설 ㉠ $p: a^2+b^2=0$ 에서 $a=b=0$ 이고, $q: ab=0$ 에서 $a=0$ 또는 $b=0$ 이므로 $p\longrightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$ 이다.

㉡ $p: (a-b)(b-c)=0$ 에서 $a=b$ 또는 $b=c$ 이고 $q: a=b=c$ 이므로 $p\not\Rightarrow q$, $q\longrightarrow p$ 이다.

㉢ $p\longrightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$ 이다.

14 정답 ⑤

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

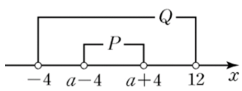
$p: -4<x-a<4$에서 $a-4<x<a+4$

$q: -8<x-4<8$에서 $-4<x<12$이므로

$P=\{x\mid a-4<x<a+4\}$,

$Q=\{x\mid -4<x<12\}$

p가 q이기 위한 충분조건이되려면 $P\subset Q$이어야 한다.



즉, $a-4\geq-4$, $a+4\leq 12$이어야 하므로

$0\leq a\leq 8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는

0, 1, 2, 3, $\cdots$, 8이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$0+1+2+\cdots+8=36$

15 정답 15

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$5x-a \geq 0$에서 $x \geq \frac{a}{5}$

$\therefore P=\left\{x \middle| x \geq \frac{a}{5}\right\}$

$x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

즉, $Q=\{x|-1<x<3\}$이므로

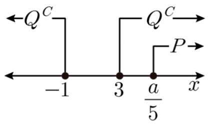
$Q^C=\{x|x \leq -1$ 또는 $x \geq 3\}$

이때 $\sim q$가 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q$

따라서 $P \subset Q^C$이므로 다음 그림에서

$3 \leq \frac{a}{5}$ $\qquad \therefore a \geq 15$



즉, 실수 a의 최솟값은 15이다.

16 정답 6

해설 p는 r이기 위한 충분조건이므로

명제 '$2x^2-7x-4 \neq 0$이면 $x-a \neq 0$이다.'가 참이고,

그 대우 '$x-a=0$이면 $2x^2-7x-4=0$이다.'도 참이다.

$x=a$를 $2x^2-7x-4=0$에 대입하면

$2a^2-7a-4=0$, $(2a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

또, r은 q이기 위한 필요조건이므로

명제 '$bx^2-9x+4 \neq 0$이면 $x-a \neq 0$이다.'가 참이고,

그 대우 '$x-a=0$이면 $bx^2-9x+4=0$이다.'도 참이다.

$x=a$, 즉 $x=4$를 $bx^2-9x+4=0$에 대입하면

$16b-36+4=0$ $\quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

17 정답 ④

해설 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \longrightarrow q$ $\cdots\cdots$ ㉠

같은 방법으로 $r \longrightarrow q$ $\cdots\cdots$ ㉡

$s \longrightarrow r$ $\cdots\cdots$ ㉢

$q \longrightarrow s$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q \longrightarrow s$ 이고 ㉡, ㉢에서 $s \longrightarrow q$

이므로 q 는 s 이기 위한 필요충분조건(가)

또, $p \longrightarrow q \longrightarrow s$ 이므로 s 는 p 이기 위한 필요조건(나)

18 정답 ②

해설 $P \cup (Q-P)^C = P \cup (Q \cap P^C)^C$

$\qquad = P \cup (Q^C \cup P)$

$\qquad = P \cup Q^C$

즉, $P \cup Q^C = U$이므로 $Q \subset P$

이때 $P \neq Q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이어야 한다.

ㄱ. $p: A-B=\varnothing$에서 $A \subset B$

$q: A=B$

$\therefore p \Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $p: A \cup B = A$에서 $B \subset A$

$q: A \cap B = B$에서 $B \subset A$

$\therefore p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p: ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

$q: |a|+|b|=0$에서 $a=b=0$

$\therefore p \Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $p: a>b>0$

$q: 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$에서

$a>0$, $b>0$이므로 $a>b>0$이고 그 역도 성립한다.

$\therefore p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㅁ. $p: a^2+b^2=0$에서 $a=b=0$

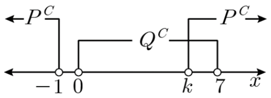
$q: a^2-b^2=0$에서 $a=\pm b$

$\therefore p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 정답 ④

해설 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-1 \le x \le k\}$,
$Q=\{x|x \le 0$ 또는 $x \ge 7\}$이다.
명제 $\sim p \rightarrow q$의 반례가 될 수 있는 값은
P^C의 원소이면서 집합 Q의 원소가 아니어야 하므로
$P^C-Q=P^C \cap Q^C$의 원소이다.
집합 $P^C=\{x|x<-1$ 또는 $x>k\}$이고,
$Q^C=\{x|0<x<7\}$이므로



집합 $P^C \cap Q^C$에 양의 정수인 원소가 $x=6$뿐이려면
$5 \le k < 6$이어야 한다.

20 정답 ②

해설 $q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P$, $P \subset R^c$
$\therefore Q \subset P \subset R^c$
$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$
$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠
㉠에서 $a+3=-1$ 또는 0 또는 1
$\therefore a=-4$ 또는 -3 또는 -2
$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡
㉡에서 $2a+7 \ne -1, 0, 1$
$2a \ne -8, -7, -6$
$\therefore a \ne -4, -\frac{7}{2}, -3$
따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

21 정답 ③

해설 ① [반례] $x=3$, $y=-3$에서 $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$이지만
$x+y \ge 2$가 성립하지 않는다.
② [반례] $x=1$, $y=-1$에서 $x^3+y^3=0$은 성립하지만
$|x|+|y|=0$은 성립하지 않는다.
④ [반례] $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$, $C=\{1, 2, 3\}$에서
$A \subset B$ 또는 $A \subset C$이지만 $A \subset B \subset C$는
성립하지 않는다.
⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ 일 때, $x+y$는
유리수이지만 x, y는 모두 유리수가 아니다.
따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것은
③이다.

22 정답 ④

해설 B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.

23 정답 ⑤

해설 ① p: $(A \cap B) \subset (A \cap B) \Leftarrow q$: $A=B$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② p: $A \cap (B \cap C)=A$에서 $A \subset (B \cap C)$
q: $A \cup (B \cup C)=B \cup C$에서 $A \subset (B \cup C)$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ p: $A \cup (B \cap C)=A$에서 $(B \cap C) \subset A$
q: $A \cap (B \cup C)=B \cup C$에서 $(B \cup C) \subset A$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ p: $A \cup B=A$에서 $B \subset A$
q: $B=\varnothing$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ p: $A \cup (B-A)=A \cup (B \cap A^C)$
$=A \cup B=B$에서 $A \subset B$
q: $A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

24 정답 3

해설 명제 '집합 C에 속하는 어떤 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=90^\circ$ 이다.'가 참이려면

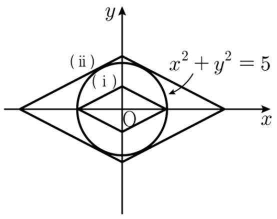
두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 S라 할 때 원 S와 집합 C가 나타내는 도형의 교점이 존재해야 한다. 원 S의 중심은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로

$\left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2+(-1-1)^2}$$
$$=\sqrt{5}$$

이므로 원 S의 방정식은 $x^2+y^2=5$

즉, 집합 C가 나타내는 도형은 다음 그림의 (ⅰ) 또는 (ⅱ)의 사이이어야 한다.



(ⅰ) $|x|+2|y|=k$의 그래프가 점 $(\sqrt{5},\ 0)$을 지날 때

$k=\sqrt{5}$

(ⅱ) $|x|+2|y|=k$의 그래프가 원 $S:x^2+y^2=5$와 접할 때

$x>0,\ y>0$일 때 $x+2y=k$이므로

직선 $x+2y=k$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$가 원과 접해야 한다.

$$x^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}\right)^2=5,$$

$$5x^2-2kx+k^2-20=0$$

위의 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-5(k^2-20)=0\text{에서}$$

$$-4k^2+100=0$$

$$k^2=25$$

$\therefore\ k=5$ ($\because$ k는 자연수)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sqrt{5}\le k\le 5$

따라서 자연수 k는 $3,\ 4,\ 5$의 3개이다.