

		유형별 학습	이름
교과서_비상교육 - 공통수학2 39~40p 원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계			

01

원 $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표가 (a, b) 이고, 반지름의 길이가 r 일 때, $a + b + r$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

02

두 점 $A(-3, 8)$, $B(7, -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$

② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$

④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$

⑤ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

03

두 점 $A(a, b)$, $B(-7, 1)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 20 = 0$ 일 때, ab 의 값을 구하시오.

04

[2019년 9월 고1 24번/3점]

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 의 반지름의 길이를 구하시오.

05

원 $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ 의 중심과 점 $(2, 9)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -3x + 15$

② $y = -2x + 13$

③ $y = x + 7$

④ $y = 2x + 5$

⑤ $y = 3x + 3$

06

직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

07 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은?

- ① $y = 2x \pm \sqrt{10}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$
 ③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$ ④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$
 ⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

08 원 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$ 에 접하고 기울기가 2인 두 직선의 y 절편의 합은?

- ① 4 ② 8 ③ 12
 ④ 16 ⑤ 20

09 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

- ① $2x + 3y + 13 = 0$ ② $2x + 3y - 13 = 0$
 ③ $3x + 2y + 13 = 0$ ④ $3x + 2y - 13 = 0$
 ⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

10 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

- ① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1
 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

11 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2, 2), (1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

- ① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
 ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
 ③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$
 ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$
 ⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

12 직선 $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 이 y 축과 만나는 점을 중심으로 하고, x 축과 만나는 점을 지나는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + (y-5)^2 = 41$
 ② $x^2 + (y-5)^2 = 43$
 ③ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 41$
 ④ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 43$
 ⑤ $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 41$

13 방정식 $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 40 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-2 < a < 2$
- ② $-1 < a < 1$
- ③ $a < -1$ 또는 $a > 1$
- ④ $a < -2$ 또는 $a > 2$
- ⑤ $a < 2$ 또는 $a > 4$

14 등식 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k^2 - 5k - 1 = 0$ 이 원의 방정식이 되도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오.

15 직선 $y = -\frac{3}{4}x + k$ 와 원 $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$ 가 만나서 생기는 현의 길이가 4일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

16 좌표평면에 원 $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ 이 있다. 이 원의 현 중에서 점 $A(7, 0)$ 을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 개수는?

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

17 두 직선 $x + 3y + 3 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$ 에 동시에 접하고 중심이 직선 $y = 3x$ 위에 있는 원의 중심의 좌표가 (a, b) , 넓이가 $c\pi$ 일 때, $a + b + 5c$ 의 값을 구하시오. (단, c 는 유리수)

18 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)

19 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

- ① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$
 ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

20 점 $A(2, 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1
 ④ -1 ⑤ 0

21 [2006년 11월 고1 29번]
 점 $P(4, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 그은 두 접선 중 기울기가 양수인 접선의 기울기를 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

22 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $P(1, 2)$ 에서의 접선과 점 $Q(-2, 1)$ 에서의 접선이 만나는 점을 R 라 할 때, 사각형 $OPRQ$ 의 넓이는? (단, O 는 원점이다.)

- ① 3 ② 5 ③ 7
 ④ 9 ⑤ 11

23 원 $x^2 + y^2 = 36$ 위의 점 P 와 두 점 $A(-8, 0), B(0, 15)$ 에 대하여 삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값을 구하시오.

24 [2021년 11월 고1 17번/4점]
 좌표평면 위에 두 점 $A(0, \sqrt{3}), B(1, 0)$ 과 원 $C: (x-1)^2 + (y-10)^2 = 9$ 가 있다. 원 C 위의 점 P 에 대하여 삼각형 ABP 의 넓이가 자연수가 되도록 하는 모든 점 P 의 개수는?

- ① 9 ② 10 ③ 11
 ④ 12 ⑤ 13

		유형별 학습	이름
교과서_비상교육 - 공통수학2 39~40p 원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계			

빠른정답

01 ③	02 ⑤	03 - 13
04 4	05 ①	06 19
07 ⑤	08 ③	09 ②
10 ④	11 ②	12 ①
13 ④	14 6	15 $\frac{5}{4}$
16 ③	17 0	18 25
19 ①	20 ③	21 31
22 ②	23 111	24 ④

		유형별 학습	이름
교과서_비상교육 - 공통수학2 39~40p			
원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계			

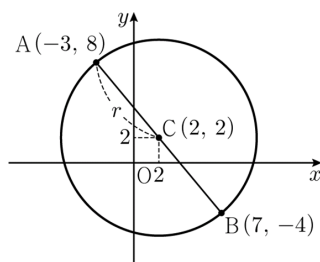
01 정답 ③

해설 $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 12 = 0$ 을 표준형으로 고치면
 $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 49$
따라서 중심의 좌표는 $(-6, 1)$, 반지름의 길이는 7이므로
 $a = -6, b = 1, r = 7$
 $\therefore a + b + r = -6 + 1 + 7 = 2$

02 정답 ⑤

해설 구하는 원의 중심을 C라고 하면
점 C는 \overline{AB} 의 중점이므로
 $C\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8+(-4)}{2}\right)$
 $\therefore C(2, 2)$
반지름의 길이를 r 라고 하면
 r 는 \overline{AB} 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$

따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$



03 정답 -13

해설 $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 20 = 0$ 에서
 $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 45$
따라서 \overline{AB} 의 중점의 좌표가 $(-4, 7)$ 이므로
 $\frac{a-7}{2} = -4, \frac{b+1}{2} = 7$
 $\therefore a = -1, b = 13$
 $\therefore ab = -13$

04 정답 4

해설 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11$
 $= (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 - 11 = 0$
원의 방정식은 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$
따라서 원의 반지름의 길이는 4

05 정답 ①

해설 $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ 에서
 $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 25$ 이므로
이 원의 중심은 $(6, -3)$ 이다.
따라서 두 점 $(6, -3), (2, 9)$ 를 지나는 직선의 방정식은
 $y - 9 = \frac{9 - (-3)}{2 - 6}(x - 2)$
즉, $y = -3x + 15$ 이다.

06 정답 19

해설 직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심에서
직선까지의 거리 d 보다 원의 반지름 r 이 크다.
 $d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$
 $\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$
 $a = -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9 \quad \therefore 19\text{개}$

07 정답 ⑤

해설 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ (k 는 상수)라 하면 이 직선이 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하므로 직선과 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$$

$$|k| = \sqrt{30}$$

$$\therefore k = \pm \sqrt{30}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = 2x \pm \sqrt{30}$

08 정답 ③

해설 구하는 접선의 방정식을 $y = 2x + k$ 라 하면 원의 중심 $(-1, 4)$ 와 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-6 + k|}{\sqrt{5}} = 5, |-6 + k| = 5\sqrt{5}$$

$$-6 + k = \pm 5\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 6 \pm 5\sqrt{5}$$

이때 k 가 두 직선의 y 절편이므로 y 절편의 합은 $(6 + 5\sqrt{5}) + (6 - 5\sqrt{5}) = 12$

09 정답 ②

해설 점 $(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

10 정답 ④

해설 점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은 $x - 3y = 10$
 x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

11 정답 ②

해설 중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로 두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 중심은 $(a, 2a)$ 로 나타낼 수 있다. $(a, 2a)$ 를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면 $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = r^2$ 이다. 따라서 두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

12 정답 ①

해설 직선 $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4, 0)$, $(0, 5)$
 이 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41}$
 따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2 + (y-5)^2 = 41$

13 정답 ④

해설 $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 40 = 0$ 에서 $(x - a)^2 + (y + 3a)^2 = 10(a^2 - 4)$
 이 방정식이 원을 나타내려면 $10(a^2 - 4) > 0$, $(a + 2)(a - 2) > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

14 정답 6

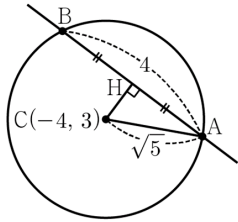
해설 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k^2 - 5k - 1 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = -k^2 + 5k + 6$
 이 등식이 원의 방정식이 되려면 $-k^2 + 5k + 6 > 0$, $k^2 - 5k - 6 < 0$
 $(k - 6)(k + 1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 6$
 따라서 정수 k 의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5로 6이다.

15 정답 $\frac{5}{4}$

해설 다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C(-4, 3)이라 하고 점 C에서

직선 $y = -\frac{3}{4}x + k$, 즉 $3x + 4y - 4k = 0$ 에 내린

수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 - 4k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4k|}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

또, $\overline{AC} = \sqrt{5}$, $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$ 이므로

직각삼각형 ACH에서

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{|-4k|}{5} = 1, |-4k| = 5$$

$$-4k = \pm 5$$

$$\therefore k = \frac{5}{4} \quad (\because k > 0)$$

16 정답 ③

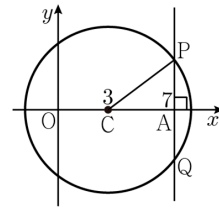
해설 $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + y^2 = 25$ 원의 중심을 C(3, 0)이라 하고 점 A(7, 0)을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

현 PQ의 길이가 최소일 때는 다음 그림과 같이

$\overline{CA} \perp \overline{PQ}$ 일 때이므로 직각삼각형 ACP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{AP} = 6$$



따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

또, 현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 원의 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는

6, 7, 8, 9, 10

이때 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재하고,

길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하므로 구하는 현의 개수는

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

17 정답 0

해설 중심이 직선 $y = 3x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(t, 3t)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심과 두 직선 $x + 3y + 3 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로

$$r = \frac{|t + 9t + 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|t + 9t + 7|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|10t + 3| = |10t + 7|, 10t + 3 = \pm(10t + 7)$$

그런데 $10t + 3 \neq 10t + 7$ 이므로

$$10t + 3 = -10t - 7 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$$

원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } r = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

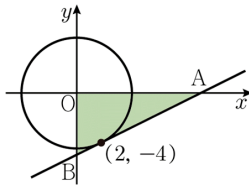
따라서 원의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}\pi \quad \therefore c = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a + b + 5c = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

18 정답 25

해설 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선의
방정식은 $2 \cdot x + (-4) \cdot y = 20$
 $\therefore x - 2y - 10 = 0$
이 접선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 $A(10, 0)$,
 $B(0, -5)$
따라서 삼각형 OAB 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$



19 정답 ①

해설 원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은
 $ax + by = 9$ 이고
이 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지나므로
 $6a + 6b = 9 \quad \therefore a + b = \frac{3}{2}$
또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로
 $a^2 + b^2 = 9$
이때, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ 에서
 $9 = \frac{9}{4} - 2ab \quad \therefore ab = -\frac{27}{8}$

20 정답 ③

해설 점 $(2, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 접선을
 $y - 2 = m(x - 2)$, 즉 $mx - y - 2m + 2 = 0$
이라고 하면
원의 중심 $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 하므로
 $\frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$
 $|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $4m^2 - 8m + 4 = m^2 + 1$
 $3m^2 - 8m + 3 = 0$
따라서 두 기울기의 곱은
근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

21 정답 31

해설 원의 접선의 방정식 구하기
접점을 $Q(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 Q 는 원 위의 점이므로
 $x_1^2 + y_1^2 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$
접점 Q 에서의 접선의 방정식을 구하면
 $x_1x + y_1y = 9 \quad \dots \textcircled{2}$
이때 $\textcircled{2}$ 가 점 $(4, 3)$ 을 지나므로
점 $(4, 3)$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $4x_1 + 3y_1 = 9 \quad \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x_1^2 + \left(-\frac{4}{3}x_1 + 3\right)^2 = 9, 25x_1^2 - 72x_1 = 0$
 $\therefore x_1 = 0$ 또는 $x_1 = \frac{72}{25}$
이것을 각각 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 y_1 을 구하면
 $x_1 = 0$ 일 때 $y_1 = 3, x_1 = \frac{72}{25}$ 일 때 $y_1 = -\frac{21}{25}$
그러므로 기울기는 0 또는 $\frac{24}{7}$
따라서 조건에 맞는 기울기는 $\frac{24}{7}$ 이므로
 $p + q = 7 + 24 = 31$
[다른 풀이]
 $P(4, 3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y - 3 = m(x - 4)$ 이다.
원과 직선이 접하려면 원의 중심으로부터 직선까지의
거리가 반지름과 같아야 하므로 $\frac{|4m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$ 이고
양변을 제곱하여 정리하면
 $16m^2 - 24m + 9 = 9m^2 + 9$
 $7m^2 - 24m = 0$
 $\therefore m = 0$ 또는 $m = \frac{24}{7}$
따라서 조건에 맞는 기울기는 $\frac{24}{7}$ 이므로
 $p + q = 7 + 24 = 31$

22 정답 ②

해설 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $P(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은 $x + 2y = 5$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $Q(-2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $-2x + y = 5$

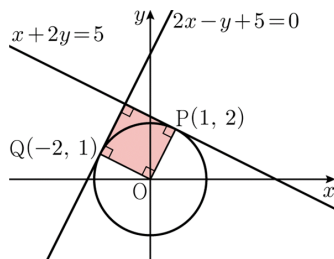
$$\therefore y = 2x + 5$$

두 직선의 기울기의 곱은 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로

두 직선은 수직이다.

따라서 다음 그림에서 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 를 한변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$

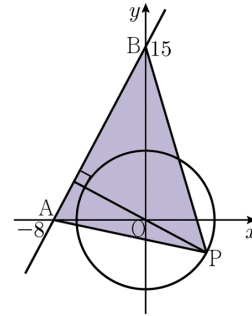


23 정답 111

해설 삼각형 PAB에서 \overline{AB} 의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+8)^2 + (15-0)^2} = 17 \text{로 일정하므로}$$

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.



직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{15} = 1, 15x - 8y + 120 = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $15x - 8y + 120 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|120|}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = \frac{120}{17}$$

원의 반지름의 길이가 6이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{120}{17} + 6 = \frac{222}{17}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \frac{222}{17} = 111$$

24 정답 ④

해설 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기

두 점 $A(0, \sqrt{3})$, $B(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 - 0}x + \sqrt{3}, \text{ 즉 } \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$$

이때 원 C 의 중심 $(1, 10)$ 과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3} + 10 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = 5$$

또, 원 C 의 반지름의 길이는 3이므로

원 C 위의 점 P 와 직선 AB 사이의 거리를 h 라 하면

$$2 \leq h \leq 8$$

선분 AB 의 길이는 $\sqrt{1+3} = 2$ 이고 삼각형 ABP 의 넓이를 S 라 할 때

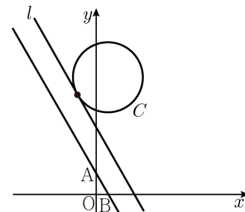
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$$

이때 S 가 자연수이려면 h 가 자연수이어야 한다.

직선 AB 와 평행한 직선 중에서 원 C 의 중심으로부터의 거리가 $|5 - h|$ 이고 직선 AB 와의 거리가 h 인 직선을 l 이라 하자.

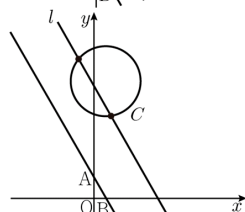
(i) $h = 2$ 일 때

오른쪽 그림과 같이
직선 l 과 원 C 는
한 점에서 만나므로
점 P 의 개수는 1이다.



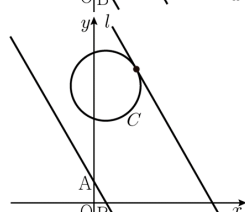
(ii) $3 \leq h \leq 7$ 일 때

오른쪽 그림과 같이
직선 l 과 원 C 는
서로 다른 두 점에서
만나므로 점 P 의 개수는
 $5 \cdot 2 = 10$



(iii) $h = 8$ 일 때

오른쪽 그림과 같이
직선 l 과 원 C 는
한 점에서 만나므로
점 P 의 개수는 1이다.



(i), (ii), (iii)에 의하여

모든 점 P 의 개수는

$$1 + 10 + 1 = 12$$