개념원리(2025) - 공통수학2 (함수의 개념) 209~223p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
45문제 / DRE수학	

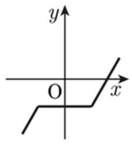
유형별 학습

이름

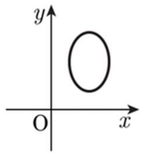
01 다음 보기 중 함수의 그래프인 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

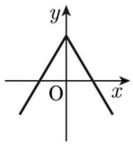
ㄱ.



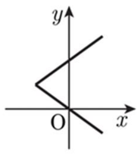
ㄴ.



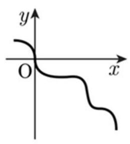
ㄷ.



ㄹ.



ㅁ.

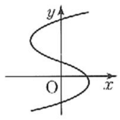


① ㄱ, ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄷ, ㅁ　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㅁ　⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

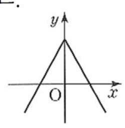
02 다음 중 함수의 그래프가 될 수 있는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

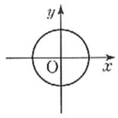
ㄱ.



ㄴ.

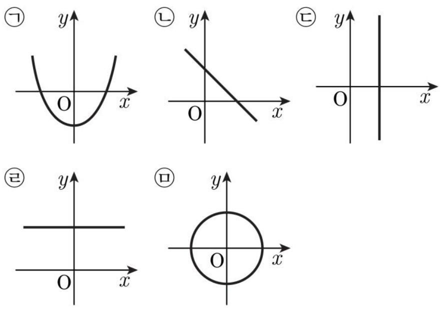


ㄷ.



① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 다음 그래프 중 함수인 것은 모두 몇 개인가?



① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

04 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수 f에 대하여 $f(x)=(x$의 양의 약수의 개수$)$로 정의할 때, $f(8)+f(18)$의 값을 구하시오.

05 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(n)=(n^3$을 7로 나눈 나머지)로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하시오.

06 함수 $f(x)=7x-4$의 정의역이 $\{-1, 0, 1, 2\}$일 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

07 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에서 정의된 함수 $f(x)=|x|+1$의 치역을 구하면?

① $\{1\}$　② $\{1, 2\}$　③ $\{2, 3\}$　④ $\{1, 2, 3\}$　⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

08 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \Rightarrow Y$, $f(x)=|x-2|$으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x)|x \in X\}$의 원소가 아닌 것은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

09 다음 보기 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=x-2,\ g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

ㄴ. $f(x)=|x|,\ g(x)=\sqrt{x^2}$

ㄷ. 정의역이 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$일 때
$f(x)=x^3,\ g(x)=2x^2+x-2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

10 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=\sqrt{x^2}$

ㄴ. $g(x)=|x|$

ㄷ. $h(x)=x^2$

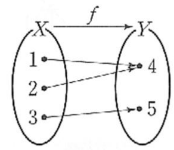
ㄹ. $k(x)=x^4+x^3+x^2$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

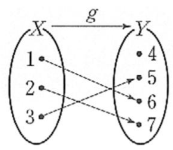
11 다음 보기 중 X에서 Y로의 일대일함수인 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

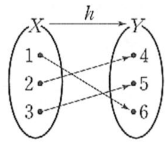
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

12 자연수 전체의 집합에서 정의되는 두 함수 $f,\ g$에 대하여 함수 f는 항등함수, 함수 g는 상수함수이다.
$f(3)=g(3)=3$일 때, $f(7)+g(7)$의 값을 구하시오.

13 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 f는 항등함수이고, g는 상수함수이다. $g(1)=1$일 때, $\dfrac{f(3)}{g(2)}$의 값을 구하시오.

14 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

① $f(x)=2|x|$　② $f(x)=x^3$
③ $f(x)=x^5$　④ $f(x)=x$
⑤ $f(x)=x|x|$

15 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f가 다음과 같을 때, 항등함수가 <u>아닌</u> 것은?

① $f(x)=x$　② $f(x)=x^3$
③ $f(x)=-|x|$　④ $f(x)=x^5$
⑤ $f(x)=x|x|$

16 집합 $\mathrm{A}=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 A에서 A에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3　② 6　③ 9
④ 12　⑤ 15

17 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수의 개수는?

① 15　② 60　③ 240
④ 960　⑤ 3840

18 두 집합 $X=\{-1,1,2\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$에 대하여 다음 보기 중 X에서 Y로의 함수인 것을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f:x\rightarrow x$　ㄴ. $g:x\rightarrow x+2$
ㄷ. $h:x\rightarrow |x|$　ㄹ. $k:x\rightarrow x^2-1$

① ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

19 두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 다음 보기 중 X에서 Y로의 함수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=x$

ㄴ. $g(x)=x^2$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 0) \\ x-1 & (x=0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20 0 이상의 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (0 \leq x \leq 4) \\ f(x-4) & (x>4) \end{cases}$$

일 때, $f(2)+f(15)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

21 정의역이 $\{x|x$는 0보다 크고 6보다 작은 자연수$\}$인 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & (x\text{는 짝수}) \\ 6-x & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$$

일 때, 함수 $f(x)$의 치역의 원소의 개수를 구하시오.

22 함수 $y=-\frac{12}{x}+5$의 치역이 $\{-1, 1, 3, 17\}$일 때, 다음 중 정의역의 원소가 <u>아닌</u> 것은?

① -1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 6

23 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f가 $f(1)=-2$, $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(0)=0$
② $f(-x)=-f(x)$
③ $f(2x)=2f(x)$
④ $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$
⑤ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

24 집합 $X=\{-2, 3\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=x^2+a$에 대하여 $f=g$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

25 집합 $X=\{1,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x^2-4x+6,\ g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.

26 집합 $X=\{a,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x-1,\ g(x)=x^2+b$에 대하여 $f=g$일 때, $g(a)$의 값은? (단, $a \neq 2$)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

27 집합 $X=\{2,\ 3\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f,\ g$가 $f(x)=3x^2+5ax+3b,\ g(x)=2ax-b$이고 두 함수가 서로 같을 때, 함수 g의 치역의 모든 원소의 합을 k라 하자. $-k$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$는 상수)

28 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{2}{5}f(x)+\frac{3}{5}g(x)$$

다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.
ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일대응이라면 $y=h(x)$도 일대일대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29 두 집합 $X=\{x\,|\,x \geq 1\},\ Y=\{y\,|\,y \geq 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=x^2-2x-a$가 일대일대응일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

30 집합 $X=\{x|-3 \le x \le 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, $ab \ne 0$이다.)

31 집합 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2$이 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. (단, $X \ne \varnothing$)

32 집합 $X=\{1,\ 3,\ 5,\ 8\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h는 각각 일대일대응, 항등함수, 상수함수이고 $f(3)=g(5)+h(5)$, $f(8)=f(5)+4$일 때, $f(1)+g(1)+h(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

33 집합 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2-3x$가 항등함수가 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. (단, $X \ne \varnothing$)

34 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $Y=\{a,\ b\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중 공역과 치역이 같은 함수의 개수를 구하시오.

35 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수의 개수를 p, X에서 X로의 일대일대응의 개수를 q라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오.

36 두 집합 $X=\{x|-1\leq x\leq 1\}$, $Y=\{y|0\leq y\leq 2\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $f(x)=-x-1$
② $f(x)=-2x+1$
③ $f(x)=x+1$
④ $f(x)=2x-1$
⑤ $f(x)=2x+2$

37 자연수 전체의 집합 N에 대하여 함수 $f:N\to N$을 $f(x)=$(4^x의 일의 자리의 숫자)로 정의할 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합을 구하시오.

38 함수 $f(x)=x^3-ax$의 정의역이 $X=\{-1, 0, 2\}$일 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 10이다. 상수 a의 값을 구하시오.

39 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}(a+4)x+1 & (x<0)\\(1-a)x+1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 일대일대응이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

40 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\geq 1)\\ax-b & (x<1)\end{cases}$이다.
함수 f가 일대일대응일 때, 상수 b의 값의 범위는?

① $b>-3$
② $b>-2$
③ $b>1$
④ $b>2$
⑤ $b>3$

41 [2019년 11월 고1 11번/3점]
집합 $X=\{-3, 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<0)\\x^2-2x+b & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 항등함수일 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

42 집합 $X=\{1, 5, 9\}$에서 $Y=\{2, 4, 5, 6, 8\}$로의 함수 f에 대하여 $f(1)<f(5)<f(9)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

43 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 치역의 원소가 2개인 함수의 개수를 구하시오.

44 [2018년 11월 고1 28번/4점]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 7이다.
(나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=42$
(다) 함수 f의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X의 어떤 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

45 정의역이 집합 $X=\{x \mid x \geq k\}$인 함수 $f(x)=x^2+4x-4$가 일대일함수가 되도록 하는 k의 최솟값을 a, 함수 $f(x)$가 X에서 X로의 일대일대응이 되도록 하는 k의 값을 b라 할 때, $b-a$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

개념원리(2025) - 공통수학2 (함수의 개념) 209~223p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
45문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 ②	03 ③
04 10	05 7	06 ①
07 ④	08 ⑤	09 ⑤
10 ④	11 ⑤	12 10
13 3	14 ①	15 ③
16 ①	17 ②	18 ①
19 ③	20 ④	21 4
22 ④	23 ④	24 ⑤
25 -4	26 ①	27 59
28 ②	29 3	30 1
31 3	32 ③	33 3
34 126	35 232	36 ③
37 10	38 -3	39 ④
40 ①	41 ②	42 10
43 18	44 7	45 ⑤

개념원리(2025) - 공통수학2 (함수의 개념) 209~223p

함수의 개념과 그래프

실시일자	-
45문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 함수의 그래프는 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

02 정답 ②

해설 함수의 그래프를 찾는 요령은, x축에 수직인 직선 $x=a$를 그었을 때, 주어진 그래프와 반드시 그리고 오직 한 점에서 만나는 것을 찾는다.
ㄱ. $x=a$와 주어진 그래프가 두 점 이상에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.
ㄴ. $x=a$와 주어진 그래프가 반드시 그리고 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
ㄷ. $x=a$와 주어진 그래프가 두 점 이상에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

03 정답 ③

해설 주어진 그래프가 함수가 되기 위해서는 집합 X의 각 원소 x의 함수값 $f(x)$가 하나로 결정되어야 한다.
그러나 ㉢, ㉤은 x의 함수값 $f(x)$가 두개 이상인 점이 존재하므로 함수가 될 수 없다.

04 정답 10

해설 8 의 양의 약수는 1, 2, 4, 8 이므로 $f(8)=4$
18 의 양의 약수는 1, 3, 6, 9, 18 이므로 $f(18)=6$
$\therefore\ f(8)+f(18)=4+6=10$

05 정답 7

해설 $1^3=1$
즉, 나머지 : 1
$2^3=7\times1+1$
즉, 나머지 : 1
$3^3=27=7\times3+6$
즉, 나머지 : 6
$4^3=64=7\times9+1$
즉, 나머지 : 1
$5^3=125=7\times17+6$
즉, 나머지 : 6
따라서 치역은 $\{1, 6\}$
∴ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

06 정답 ①

해설 $f(-1)=7\cdot(-1)-4=-11$
$f(0)=7\cdot0-4=-4$
$f(1)=7\cdot1-4=3$
$f(2)=7\cdot2-4=10$
즉, 함수 f의 치역은 $\{-11, -4, 3, 10\}$이다.
따라서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은
$-11+(-4)+3+10=-2$

07 정답 ④

해설 $x=-2$, 2일 때 $f(x)=3$
$x=-1$, 1일 때 $f(x)=2$
$x=0$일 때 $f(x)=1$
따라서 f의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

08 정답 ⑤

해설 정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

09 **정답** ⑤

해설 ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=-2$를 정의역으로 갖지 않으므로 두 함수는 다른 함수이다.
ㄴ, ㄷ. 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.
따라서 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 **정답** ④

해설 ㄱ. $f(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$,
$f(0)=\sqrt{0^2}=0$,
$f(1)=\sqrt{1^2}=1$
ㄴ. $g(-1)=|-1|=1$,
$g(0)=|0|=0$,
$g(1)=|1|=1$
ㄷ. $h(-1)=(-1)^2=1$,
$h(0)=0^2=0$,
$h(1)=1^2=1$
ㄹ. $k(-1)=(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2=1$,
$k(0)=0^4+0^3+0^2=0$,
$k(1)=1^4+1^3+1^2=3$
따라서 서로 같은 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 **정답** ⑤

해설 ㄱ. $1\neq2$인데 $f(1)=f(2)=4$이므로 f는 일대일함수가 아니다.
ㄴ. ㄷ. '$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$'를 만족하므로 일대일함수이다.

12 **정답** 10

해설 함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$
$\therefore f(7)=7$
함수 g는 상수함수이므로 $g(3)=3$에서
$\therefore g(7)=3$
$\therefore f(7)+g(7)=10$

13 **정답** 3

해설 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$
$\therefore f(3)=3$
함수 g가 상수함수이고 $g(1)=1$이므로 $g(x)=1$
$\therefore g(2)=1$
$\therefore \dfrac{f(3)}{g(2)}=\dfrac{3}{1}=3$

14 **정답** ①

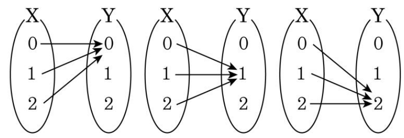
해설 함수 f가 항등함수이려면
$f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$이어야 한다.
① $f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=2$이므로
항등함수가 아니다.
②, ③, ④, ⑤
$f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$이므로
항등함수이다.

15 **정답** ③

해설 함수 f가 항등함수이려면
$f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$이어야 한다.
①, ②, ④, ⑤ $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$
이므로 항등함수이다.
③ $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=-1$ 이므로
항등함수가 아니다.
따라서 항등함수가 아닌 것은 ③이다.

16 **정답** ①

해설 상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

17 **정답** ②

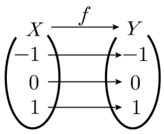
해설 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$인 함수는
일대일함수이므로
$X=\{1, 2, 3\},\ Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여
일대일함수의 개수는
$5\cdot4\cdot3=60$

18 정답 ①

해설 ㄱ. $f(x)=x$에서 $f(-1)=-1$이고 $-1 \notin Y$이므로
X에서 Y로의 함수가 아니다.
ㄴ. $g(x)=x+2$에서 $g(-1)=1 \in Y$, $g(1)=3 \in Y$,
$g(2)=4 \in Y$이므로 X에서 Y로의 함수이다.
ㄷ. $h(x)=|x|$에서 $h(-1)=1 \in Y$, $h(1)=1 \in Y$,
$h(2)=2 \in Y$이므로 X에서 Y로의 함수이다.
ㄹ. $k(x)=x^2-1$에서 $k(-1)=0 \notin Y$, $k(1)=0 \notin Y$,
$k(2)=3 \in Y$이므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

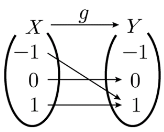
19 정답 ③

해설 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.
ㄱ.



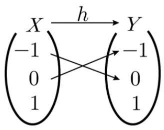
(참)

ㄴ.



(참)

ㄷ.



(거짓)

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 정답 ④

해설 $f(2)=2+2=4$
$f(15)=f(11)=f(7)=f(3)=5$
$\therefore f(2)+f(15)=4+5=9$

21 정답 4

해설 정의역이 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$f(1)=6-1=5$, $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+3=4$,

$f(3)=6-3=3$, $f(4)=\frac{1}{2}\cdot 4+3=5$,

$f(5)=6-5=1$
따라서 치역이 $\{1, 3, 4, 5\}$이므로 원소의 개수는 4이다.

22 정답 ④

해설 치역이 $\{-1, 1, 3, 17\}$이므로

(i) $y=-1$일 때, $-1=-\frac{12}{x}+5$

$-6=-\frac{12}{x}$ $\quad \therefore x=2$

(ii) $y=1$일 때, $1=-\frac{12}{x}+5$

$-4=-\frac{12}{x}$ $\quad \therefore x=3$

(iii) $y=3$일 때, $3=-\frac{12}{x}+5$

$-2=-\frac{12}{x}$ $\quad \therefore x=6$

(iv) $y=17$일 때, $17=-\frac{12}{x}+5$

$12=-\frac{12}{x}$ $\quad \therefore x=-1$

(i)~(iv)에 의하여 정의역은 $\{-1, 2, 3, 6\}$이다.

23 정답 ④

해설 ① $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$ 이므로 $f(0)=0$

② $f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$
$\therefore f(-x)=-f(x)$
③ $f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$
④, ⑤ $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 이므로
$f(2)=f(1)+f(1)=(-2)+(-2)=(-2)\times 2$
$f(3)=f(2)+f(1)=f(1)+f(1)+f(1)=(-2)\times 3$
$\cdots\cdots$
$f(x)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=-2x$
따라서 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$

24 정답 ⑤

해설 두 함수 f, g가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(-2)=g(-2)$, $f(3)=g(3)$
$f(-2)=-2a+b$, $g(-2)=4+a$에서
$-2a+b=4+a$
$\therefore -3a+b=4$ $\quad\cdots$ ㉠
$f(3)=3a+b$, $g(3)=9+a$에서
$3a+b=9+a$
$\therefore 2a+b=9$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=7$
$\therefore ab=1\cdot 7=7$

25 **정답** -4

해설 $f(1)=g(1)$에서
$1-4+6=a+b$
$\therefore a+b=3$ $\cdots$ ㉠
$f(2)=g(2)$에서
$4-8+6=2a+b$
$\therefore 2a+b=2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=4$
$\therefore ab=-4$

26 **정답** ①

해설 두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
$f(2)=g(2)$에서 $2-1=2^2+b$
$\therefore b=-3$
$f(a)=g(a)$에서 $a-1=a^2-3$
$a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ ($\because a\neq 2$)
따라서 $g(a)=g(-1)=(-1)^2-3=-2$

27 **정답** 59

해설 $f(2)=g(2)$에서
$12+10a+3b=4a-b$
$\therefore 3a+2b=-6$ $\cdots$ ㉠
$f(3)=g(3)$에서
$27+15a+3b=6a-b$
$9a+4b=-27$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-5,\ b=\frac{9}{2}$
$\therefore f(x)=3x^2-25x+\frac{27}{2},\ g(x)=-10x-\frac{9}{2}$
이때 $g(2)=-\frac{49}{2},\ g(3)=-\frac{69}{2}$이므로
함수 g의 치역은 $\left\{-\frac{69}{2},\ -\frac{49}{2}\right\}$이고
치역의 모든 원소의 합은 $k=-59$이다.
$\therefore -k=59$

28 **정답** ②

해설 ㄱ. $y=f(x),\ y=g(x)$가 어떤 점에서 만난다고 하므로 그 점의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 하면 $f(\alpha)=\beta,\ g(\alpha)=\beta$
이때 $h(x)=\frac{2}{5}f(x)+\frac{3}{5}g(x)$이므로
$h(\alpha)=\frac{2}{5}f(\alpha)+\frac{3}{5}g(\alpha)=\frac{2}{5}\beta+\frac{3}{5}\beta=\beta$
즉, $y=h(x)$도 $(\alpha,\ \beta)$를 지난다. (참)
ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점에 대하여 대칭이면 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$
이때 $h(-x)=\frac{2}{5}f(-x)+\frac{3}{5}g(-x)$
$=-\left(\frac{2}{5}f(x)+\frac{3}{5}g(x)\right)$
$=-h(x)$
즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 $h(x)$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. [반례] $f(x)=x,\ g(x)=-\frac{2}{3}x$라 하면
$f(x),\ g(x)$ 모두 일대일대응이지만
$h(x)=\frac{2}{5}f(x)+\frac{3}{5}g(x)=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}x=0$
이므로 $h(x)$는 일대일대응이 아니다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

29 **정답** 3

해설 $f(x)=x^2-2x-a=(x-1)^2-1-a$이므로
$x\geq 1$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $f(1)=2$이어야 하므로 $1-2-a=2$
$\therefore a=-3$
즉, $f(x)=x^2-2x+3$이므로 $f(2)=3$

30 **정답** 1

해설 (ⅰ) $a>0$일 때
$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로
$f(-3)=-3,\ f(2)=2$
$-3a+b=-3,\ 2a+b=2$
$\therefore a=1,\ b=0$
이때 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a<0$일 때
$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로
$f(-3)=2,\ f(2)=-3$
$-3a+b=2,\ 2a+b=-3$
$\therefore a=-1,\ b=-1$
따라서 $ab=1$

31 정답 3

해설 함수 f가 항등함수이므로 $x^2=x$
$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$
따라서 집합 X는 $\{0, 1\}$의 부분집합 중 공집합을 제외한 집합이므로 $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$의 3개이다.

32 정답 ③

해설 $f(3)=g(5)+h(5)$에서 함수 g가 항등함수이므로
$f(3)=5+h(5)$
$X=\{1, 3, 5, 8\}$에서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 8이므로 $f(3)=8$, $h(5)=3$
이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(1)=3$
또, $f(8)=f(5)+4$에서 $f(8)>4$이고,
함수 f는 일대일대응이므로 $f(5)=1$, $f(8)=5$
따라서 $f(1)=3$이므로
$f(1)+g(1)+h(1)=3+1+3=7$

33 정답 3

해설 함수 f가 항등함수이므로 $x^2-3x=x$
$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$
따라서 집합 X는 $\{0, 4\}$의 부분집합 중 공집합을 제외한 집합이므로 $\{0\}$, $\{4\}$, $\{0, 4\}$의 3개이다.

34 정답 126

해설 구하는 함수의 개수는 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수에서 상수함수의 개수를 뺀 것과 같으므로
$2^7-2=126$

35 정답 232

해설 X에서 X로의 함수의 개수는 $4^4=256$
X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
따라서 $p=256$, $q=24$
$\therefore p-q=256-24=232$

36 정답 ③

해설 ① $-1\le x\le 1$에서 $-1\le -x\le 1$
$-2\le -x-1\le 0$
$\therefore -2\le f(x)\le 0$
② $-1\le x\le 1$에서 $-2\le -2x\le 2$
$-1\le -2x+1\le 3$
$\therefore -1\le f(x)\le 3$
③ $-1\le x\le 1$에서 $0\le x+1\le 2$
$\therefore 0\le f(x)\le 2$
④ $-1\le x\le 1$에서 $-2\le 2x\le 2$
$-3\le 2x-1\le 1$
$\therefore -3\le f(x)\le 1$
⑤ $-1\le x\le 1$에서 $-2\le 2x\le 2$
$0\le 2x+2\le 4$
$\therefore 0\le f(x)\le 4$
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ③이다.

37 정답 10

해설 $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, $\cdots$이므로
4^x의 일의 자리 숫자는 4, 6이 차례대로 반복된다.
따라서 함수 f의 치역은 $\{4, 6\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은 $4+6=10$

38 정답 -3

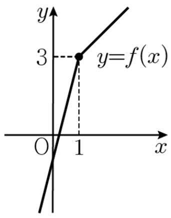
해설 $f(-1)=(-1)^3-a\cdot(-1)=-1+a$, $f(0)=0$,
$f(2)=2^3-2a=8-2a$
이때 함수 f의 치역은 $\{-1+a, 0, 8-2a\}$이고,
모든 원소의 합이 10이므로
$(-1+a)+(8-2a)=10$
$-a+7=10$ $\qquad\therefore a=-3$

39 정답 ④

해설 주어진 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하거나 감소해야 하므로
$(a+4)(1-a)>0$이어야 한다.
즉, $(a+4)(a-1)<0$에서
$-4<a<1$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개다.

40 정답 ①

해설 함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax-b$가 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$a-b=3 \quad \cdots$ ㉠

또, $x \geq 1$에서 직선의 기울기가 양수이므로

$x<1$에서 직선의 기울기도 양수이어야 한다.

즉, $a>0$이어야 하므로 ㉠에서 $a=b+3>0$

$\therefore b>-3$

41 정답 ②

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

함수 $f(x)$가 항등함수이므로

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이다.

$x=-3$일 때, $2\times(-3)+a=-3$에서 $a=3$

$x=1$일 때, $1^2-2\times1+b=1$에서 $b=2$

따라서 $a\times b=6$

42 정답 10

해설 집합 Y의 5개의 원소 중에서 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 $1, 5, 9$에 대응시키면 된다.

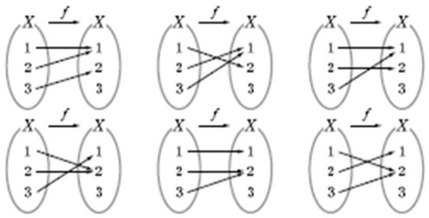
따라서 함수 f의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

43 정답 18

해설 공역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이므로 치역의 원소의 개수가 2 개인 경우의

치역은 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ 이다.

치역이 $\{1,\ 2\}$ 인 함수는 다음과 같이 6 개다.



치역이 $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ 일 때의 함수의 개수도 각각 6 이므로 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수의 개수는 $6\times3=18$

44 정답 7

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로

집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여

$f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은

한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중

함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로

조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$

$+f(8)=36+n-m=42$

$\therefore n-m=6$

집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때

함수 f의 치역은 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때

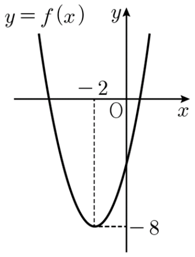
함수 f의 치역은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $n=7$

45 **정답** ⑤

해설 $f(x)=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로 치역은 항상

$Y=\{y|y\geq-8\}$의 부분집합이다.

함수 f가 일대일함수이려면

이차함수 그래프의 축 $x=-2$를 기준으로 하여

어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

즉, $k\geq-2$이므로 k의 최솟값은 $a=-2$

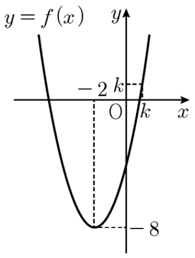
$f(x)=x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

이 일대일함수가 되기 위한 k의 범위는

$k\geq-2$ $\cdots$ ㉠

또한, 일대일대응이 되기 위해 함수 f의 치역이

공역 $\{x|x\geq k\}$와 같으려면 $f(k)=k$이어야 한다.



$k^2+4k-4=k$, $k^2+3k-4=0$

$(k-1)(k+4)=0$

$\therefore$ $k=-4$ 또는 $k=1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값은 $b=1$

따라서 $a=-2$, $b=1$이므로 $b-a=1-(-2)=3$

개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 함수 $f(x)=-x^2+4x+6$, $g(x)=|2x+1|$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하시오.

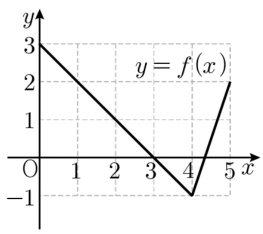
02 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $(f \circ g)(x)$는?

① $(f \circ g)(x)=2x+5$ ② $(f \circ g)(x)=2x+2$
③ $(f \circ g)(x)=x$ ④ $(f \circ g)(x)=-x+1$
⑤ $(f \circ g)(x)=3x-4$

03 세 함수 f, g, h에 대하여 $f(x)=x-1$, $(g \circ h)(x)=4x+2$일 때, $(g \circ (h \circ f))(1)$의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

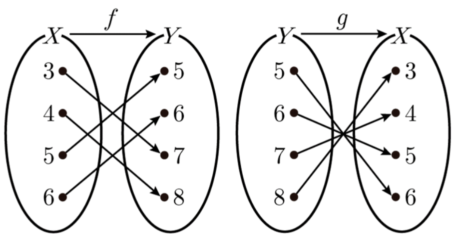
04 $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(2)$의 값을 구하시오.



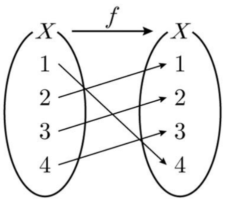
05 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가
$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x\text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x\text{가 홀수일 때}) \end{cases}$일 때,
$(f \circ f)(3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

06 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ g)(6)$의 값을 구하시오.

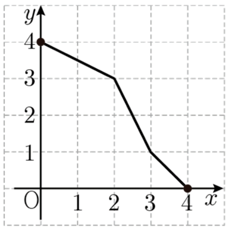


07 [2023년 3월 고2 23번/3점]
그림은 함수 $f: X \to X$를 나타낸 것이다.

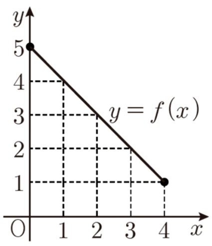


$(f \circ f)(1)+f^{-1}(1)$의 값을 구하시오.

08 $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(k)=1$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.



09 $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(a)=1$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.



10 [2023년 11월 고1 6번/3점]
실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $(g \circ g)(x)=3x-1$일 때, $((f \circ g) \circ g)(a)=a$를 만족시키는 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

11 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 f, g가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)+g(0)$의 값을 구하시오.

> (가) $f(1)=g(1)=-1$
> (나) $(g \circ f)(1)=1$
> (다) $(f \circ g)(1)=0$

12 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=x^2-3$에 대하여 $(g \circ f)(x)=-3$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

13 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가
$f(x)=\begin{cases} -x & (x\text{는 유리수}) \\ x^2 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$일 때, $(f\circ f)(\sqrt{2})$의 값을 구하시오.

14 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=x^2+x-1$에 대하여 $(f\circ g)(a)=2$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

15 두 함수 $f(x)=ax+3$, $g(x)=bx-3$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립할 때, ab의 최댓값을 구하시오. (단, a, b는 양수)

16 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2-3x+5$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키는 x의 값은?

① -2 또는 -1 ② 0 또는 -2
③ 0 또는 2 ④ 1 또는 2
⑤ 2 또는 3

17 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가
$f\left(\frac{x+2}{3}\right)=x-2$을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

18 두 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, $g(x)=-x^2-2$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$가
$(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(3)$의 값은?

① -30 ② -20 ③ -10
④ 10 ⑤ 20

19 함수 $f(x)=-x+2$에 대하여 $f^n(x)+f^{n+1}(x)$를 간단히 하면?
(단, $f^1=f, f^{n+1}=f\circ f^n$, n은 자연수이다.)

① 2　② x　③ $-x+2$
④ nx　⑤ $-nx+2n$

20 정의역이 자연수 전체의 집합인
함수 $f(n)=\begin{cases} 2n+1 & (n\text{은 홀수}) \\ \dfrac{n}{2}-1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ 가
$(f\circ f)(k)=11$을 만족시킬 때, 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

21 임의의 실수 x, y에 대하여 함수 f가
$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(2)=4$를 만족시킬 때,
$(f\circ f\circ f)(1)$의 값을 구하시오.

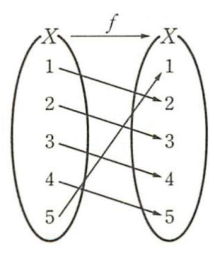
22 일차함수 $f(x)=ax+b$ (a, b는 실수)가 다음 두 조건을 만족시킨다.

< 보 기 >
Ⅰ. $f(-1)=-1$
Ⅱ. $f^3(3)-f^3(2)=-1$

이 때, $f(4)$의 값을 구하시오.
(단, $f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)$)

23 두 함수 $f(x)=3x-4$, $g(x)=ax+b$에 대하여
$f\circ g=g\circ f$가 성립할 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 (p, q)라 하자. 이때 pq의 값을 구하시오.
(단, a, b, p, q는 상수이다.)

24 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여
함수 $f: X \to X$ 가 아래 그림과 같고,
$g: X \to X$ 가 $g(1)=3$, $f\circ g=g\circ f$ 를
만족할 때, $g(5)$ 의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

25 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f\circ f\circ f)(x)=f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $f(x)=x+1$	㉡ $f(x)=-x$
㉢ $f(x)=-x+1$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

26 두 함수 f, g가 $f(x)=x-3$, $g(x)=3x-5$일 때, $(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여 $h(7)$의 값을 구하시오.

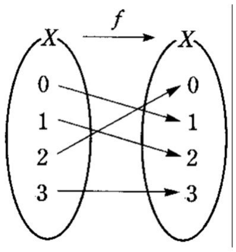
27 두 함수 $f(x)=3x$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $h\circ g\circ f=f$를 만족시키는 일차함수 $h(x)$가 있다. $h(k)=\dfrac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

28 세 함수 f, g, h에 대하여 $(g\circ h)(x)=5x-3$, $(g\circ(h\circ f))(x)=x^2+2$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

29 집합 $A=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$ 에 대하여 $f: A\to A$를 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\le x<1) \\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$과 같이 정의한다. 이때 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f^2\left(\dfrac{1}{2}\right)+\cdots+f^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $f^2(x)=(f\circ f)(x)$)

30 함수 $f(x)=x+1$에 대하여 $f^1=f$, $f^2=f\circ f$, $f^3=f\circ f^2$, $\cdots$ $f^{n+1}=f\circ f^n$로 정의할 때, $f^{10}(a)=30$을 만족시키는 a의 값을 구하시오. (단, n은 자연수)

31 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f를 다음 그림과 같이 정의하고
$f^2=f\circ f,\ f^3=f\circ f^2,\ \cdots,\ f^{n+1}=f\circ f^n$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 나타내기로 한다.
이때 $f^{99}(0)+f^{100}(1)$의 값을 구하시오.

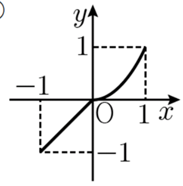


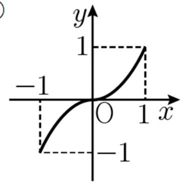
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

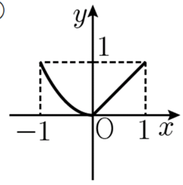
32 $-1\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)$가

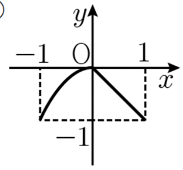
$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\le x<0)\\ -x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

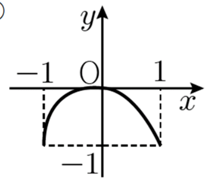
일 때, 다음 중 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

①


②


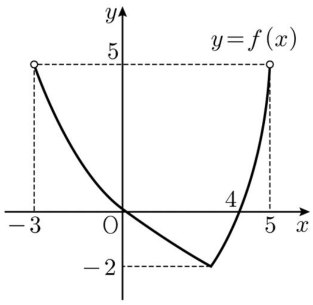
③


④


⑤


33 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$가 일대일대응이고, $f^{2024}(-1)+f^{2025}(1)=1$을 만족시킨다. $f^{2020}(0)+f^{2021}(1)$의 값을 구하시오.
(단, $f^1=f$, 모든 자연수 n에 대하여 $f^{n+1}=f\circ f^n$)

34 $-3<x<5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $-3<x<4$에서 부등식 $f(f(x))>f(x)$의 해는?

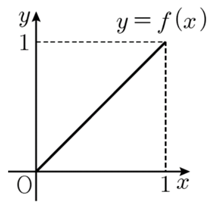


① $-3<x<0$ ② $-3<x<4$ ③ $0<x<4$
④ $0<x<5$ ⑤ $4<x<5$

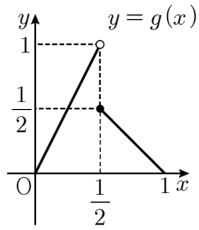
35 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$, $g(x)$는 모두 주기가 2인 함수이다.
> (나) 임의의 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)$의 값을 구하시오.



[그림 1]



[그림 2]

개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 21	02 ②	03 ⑤
04 2	05 ③	06 5
07 5	08 2	09 1
10 ①	11 1	12 -2
13 -2	14 1	15 1
16 ③	17 ⑤	18 ②
19 ①	20 62	21 8
22 -6	23 4	24 ②
25 ⑤	26 4	27 4
28 6	29 10	30 20
31 ②	32 ⑤	33 -2
34 ③	35 $\frac{1}{2}$	

개념원리(2025) - 공통수학2 (합성함수) 226~233p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
35문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 21

해설 $f(2)=-2^2+4\cdot 2+6=10$,
$g(10)=|2\cdot 10+1|=21$이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=g(10)=21$

02 정답 ②

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(2x-1)$
$=(2x-1)+3$
$=2x+2$

03 정답 ⑤

해설 합성함수는 결합법칙이 성립하므로
$(g\circ(h\circ f))(1)=((g\circ h)\circ f)(1)$
$=(g\circ h)(f(1))$
$=(g\circ h)(0)$
$=4\cdot 0+2=2$

04 정답 2

해설 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=2$

05 정답 ③

해설 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(-3+5)$
$=f(2)=2\cdot 2-3$
$=1$

06 정답 5

해설 $(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(5)=5$

07 정답 5

해설 합성함수와 역함수의 값을 계산한다.
$f(1)=4,\ f(4)=3$이므로
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=3$
또, $f(2)=1$이므로
$f^{-1}(1)=2$
$\therefore (f\circ f)(1)+f^{-1}(1)=3+2=5$

08 정답 2

해설 $f(k)=m$이라 하면
$(f\circ f)(k)=1$에서
$f(f(k))=f(m)=1$
이때 주어진 그래프에서 $f(3)=1$이므로
$m=3$
$\therefore f(k)=3$
따라서 주어진 그래프에서 $f(2)=3$이므로
$k=2$

09 정답 1

해설 $f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=1$에서
$f(f(a))=f(b)=1$
이때 주어진 그래프에서 $f(4)=1$이므로 $b=4$
$\therefore f(a)=4$
따라서 주어진 그래프에서 $f(1)=4$이므로
$a=1$

10 정답 ①

해설 합성함수 이해하기
$((f\circ g)\circ g)(a)=(f\circ(g\circ g))(a)$
$=f((g\circ g)(a))$
$=f(3a-1)$
$=2(3a-1)+1$
$=6a-1$
$6a-1=a$이므로
$a=\frac{1}{5}$

11 정답 1

해설 조건 (가), (나)에서

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=1$

조건 (가), (다)에서

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-1)=0$

이때 조건 (가)에서 $f(1)=-1$, $g(1)=-1$이고

두 함수 f, g는 일대일대응이므로

$f(0)=1$, $g(0)=0$

$\therefore\ f(0)+g(0)=1$

12 정답 -2

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x+2)$

$=(x+2)^2-3$

$=x^2+4x+1$

$(g\circ f)(x)=-3$이므로 $x^2+4x+1=-3$

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

$\therefore\ x=-2$

13 정답 -2

해설 $\sqrt{2}$는 무리수이므로

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$

또, 2는 유리수이므로

$f(2)=-2$

$\therefore\ (f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)=-2$

14 정답 1

해설 $(f\circ g)(a)=f(g(a))$

$=f(a^2+a-1)$

$=3(a^2+a-1)-1$

$=3a^2+3a-4$

$(f\circ g)(a)=2$이므로 $3a^2+3a-4=2$에서

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$a=-2$ 또는 $a=1$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

15 정답 1

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(bx-3)$

$=a(bx-3)+3$

$=abx-3a+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(ax+3)$

$=b(ax+3)-3$

$=abx+3b-3$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$abx-3a+3=abx+3b-3$, $3a+3b=6$

$\therefore\ a+b=2$

이때 a, b는 양수이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $2\geq 2\sqrt{ab}$

$\therefore\ \sqrt{ab}\leq 1$

양변을 제곱하면

$ab\leq 1$

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

16 정답 ③

해설 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2-3x+5$에 대하여

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-3x+5)$

$=2(x^2-3x+5)-1$

$=2x^2-6x+9$ ⋯ ㉠

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=(2x-1)^2-3(2x-1)+5$

$=4x^2-10x+9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$2x^2-6x+9=4x^2-10x+9$

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

17 정답 ⑤

해설 $f\left(\dfrac{x+2}{3}\right)=x-2$에서 $\dfrac{x+2}{3}=t$로 놓으면

$x=3t-2$이므로 $f(t)=(3t-2)-2=3t-4$

따라서 $f(x)=3x-4$이므로

$f(2)=3\cdot 2-4=2$

(다른 풀이)

$\dfrac{x+2}{3}=2$일 때, $x=4$이므로

$f(2)=4-2=2$

18 정답 ②

해설 $h(3)=k$라 하면 $f(h(3))=g(3)$이므로

$f(k)=-11$

$f(k)=\frac{1}{2}k-1$이므로

$\frac{1}{2}k-1=-11 \quad \therefore k=-20$

$\therefore h(3)=-20$

19 정답 ①

해설 $f^2(x)=f(f(x))=f(-x+2)$

$=-(-x+2)+2=x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+2$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(f(x))=x$

⋮

$$\therefore f^n(x)=\begin{cases} x & (n\text{은 짝수}) \\ -x+2 & (n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

$\therefore f^n(x)+f^{n+1}(x)=x+(-x+2)=2$

20 정답 62

해설 $f(f(k))=11$에서 $f(k)=a$로 놓으면 $f(a)=11$

(i) a가 홀수일 때

$f(a)=2a+1=11$

$\therefore a=5$

(ii) a가 짝수일 때

$f(a)=\frac{a}{2}-1=11$

$\therefore a=24$

(i), (ii)에 의하여 $f(k)=5$ 또는 $f(k)=24$

(iii) $f(k)=5$인 경우

k가 홀수이면 $2k+1=5$이므로

$k=2$

이때 k는 홀수이어야 하므로 조건에 모순이다.

또, k가 짝수이면 $\frac{k}{2}-1=5$이므로

$k=12$

(iv) $f(k)=24$인 경우

k가 홀수이면 $2k+1=24$이므로

$k=\frac{23}{2}$

이때 k는 자연수이어야 하므로 조건에 모순이다.

또, k가 짝수이면 $\frac{k}{2}-1=24$이므로

$k=50$

(iii), (iv)에 의하여 $(f\circ f)(k)=11$을 만족시키는 k의 값은 12, 50이므로 그 합은

$12+50=62$

21 정답 8

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$

$f(2)=4$이므로 $f(1)=2$

또, ㉠의 양변에 $x=y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)=8$ ($\because f(2)=4$)

$\therefore (f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))$

$=f(f(2))=f(4)$

$=8$

22 정답 -6

해설 $f^3(x)=a(a(ax+b)+b)+b=a^3x+a^2b+ab+b$

이므로 $f^3(3)-f^3(2)=a^3=-1$

$\therefore a=-1$

$f(-1)=-a+b=-1$이므로 $b=-2$

$\therefore f(4)=(-1)\times4-2=-6$

23 정답 4

해설 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)=3ax+3b-4$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-4)=3ax-4a+b$
이때 $f \circ g=g \circ f$이므로 $3b-4=-4a+b$
$\therefore b=-2a+2$
따라서 $g(x)=ax-2a+2=a(x-2)+2$이므로
$y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상
점 $(2, 2)$를 지난다.
$\therefore p=2, q=2$이므로 $pq=4$

24 정답 ②

해설 주어진 그림에서
$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=1$
$f \circ g=g \circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(g(1))=g(f(1)),\ f(3)=g(2)$ $\therefore g(2)=4$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(g(2))=g(f(2)),\ f(4)=g(3)$ $\therefore g(3)=5$
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$f(g(3))=g(f(3)),\ f(5)=g(4)$ $\therefore g(4)=1$
㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면
$f(g(4))=g(f(4)),\ f(1)=g(5)$ $\therefore g(5)=2$

25 정답 ⑤

해설 ㉠. $(f \circ f \circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(f(x+1))$
$=f((x+1)+1)=f(x+2)$
$=(x+2)+1=x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$
㉡. $(f \circ f \circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(f(-x))$
$=f(-(-x))=f(x)$
㉢. $(f \circ f \circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(f(-x+1))$
$=f(-(-x+1)+1)=f(x)$
따라서 $(f \circ f \circ f)(x)=f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

26 정답 4

해설 $(h \circ g \circ f)(x)=h(g(f(x)))=h(g(x-3))$
$=h(3x-14)$
$(h \circ g \circ f)(x)=f(x)$이므로
$h(3x-14)=f(x)$ … ㉠
$3x-14=7$이라 하면 $x=7$
따라서 ㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면 $h(7)=f(7)=4$

27 정답 4

해설 $h(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)이라 하면
$h \circ g \circ f=h(g(f(x)))$
$=h(g(3x))$
$=h(6x-1)$
$=a(6x-1)+b$
$=6ax-a+b$
이때 $h \circ g \circ f=f$이므로
$6ax-a+b=3x$
즉, $6a=3$, $-a+b=0$이므로
$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$
$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
따라서 $h(k)=\frac{5}{2}$에서
$\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
$\therefore k=4$

28 정답 6

해설 $(g \circ (h \circ f))(x)=(g \circ h \circ f)(x)$
$=(g \circ h)(f(x))$
$=5f(x)-3$
즉, $5f(x)-3=x^2+2$이므로
$5f(x)=x^2+5$
$\therefore f(x)=\frac{1}{5}x^2+1$
$\therefore f(5)=\frac{25}{5}+1=6$

29 정답 10

해설 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$
$f^2(\frac{1}{2})=f(f(\frac{1}{2}))$
$=f(\frac{3}{2})$
$=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$
$f^3(\frac{1}{2})=f(f^2(\frac{1}{2}))=f(\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$
$\vdots$
$\therefore f(\frac{1}{2})+f^2(\frac{1}{2})+\cdots+f^{10}(\frac{1}{2})=5 \cdot \frac{1}{2}+5 \cdot \frac{3}{2}$
$=10$

30 정답 20

해설 $f^1(x)=x+1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(x+1)$
$=(x+1)+1=x+2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x+2)$
$=(x+2)+1=x+3$

⋮

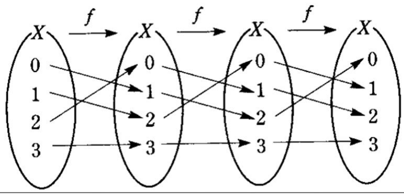
$\therefore f^n(x)=x+n$

따라서 $f^{10}(x)=x+10$이므로 $f^{10}(a)=a+10=30$

$\therefore a=20$

31 정답 ②

해설 X가 원소의 개수 n개인 유한집합일 때,
$f:X\to X$가 일대일대응이면 $f, f^2, \cdots, f^n$ 중에 항등함수인 것이 반드시 있다.
주어진 f를 계속해서 합성하면 다음 그림과 같이 f^3이 항등함수 I가 된다.



$f^{99}(0)=(f^3\circ f^3\circ f^3\circ\cdots\circ f^3)(0)$
$=(I\circ I\circ I\circ\cdots\circ I)(0)$
$=I(0)=0$

$f^{100}(1)=(f\circ(f^3\circ f^3\circ f^3\circ\cdots\circ f^3))(1)$
$=(f\circ(I\circ I\circ I\circ\cdots\circ I))(1)$
$=(f\circ I)(1)=f(1)=2$

$\therefore f^{99}(0)+f^{100}(1)=0+2=2$

32 정답 ⑤

해설 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\le x<0)\\ -x & (0\le x\le 1)\end{cases}$에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\{f(x)\}^2 & (-1\le f(x)<0)\\ -f(x) & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$

(ⅰ) $-1\le x<0$일 때, $-1\le f(x)<0$이므로
$(f\circ f)(x)=-(-x^2)^2=-x^4$

(ⅱ) $0\le x\le 1$일 때, $-1\le f(x)\le 0$이므로
$(f\circ f)(x)=-(-x)^2=-x^2$

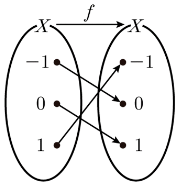
(ⅰ), (ⅱ)에서

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-x^4 & (-1\le x<0)\\ -x^2 & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로

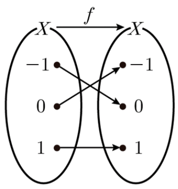
함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ⑤이다.

33 정답 -2

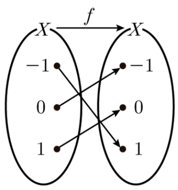
해설 함수 f가 일대일대응이므로
$f^{2024}(-1)=0,\ f^{2025}(1)=1$ 또는
$f^{2024}(-1)=1,\ f^{2025}(1)=0$이다.
이때 $f(-1)=-1$이거나 $f(0)=0$이면 위의 조건을
만족시키지 않으므로 $f(-1)\neq-1,\ f(0)\neq 0$
(i) $f(-1)=0,\ f(0)=1$인 경우 함수 f는



$f(-1)=0,\ f^2(-1)=1,\ f^3(-1)=-1$이므로
$f^3=I$ (I는 항등함수)이다.
$f^{2024}=f^{3\cdot 674+2}=f^2,\ f^{2025}=f^{3\cdot 675}=I$에서
$f^{2024}(-1)+f^{2025}(1)=f^2(-1)+I(1)=2$
(ii) $f(-1)=0,\ f(0)=-1$인 경우 함수 f는



$f(-1)=0,\ f^2(-1)=-1$이고 $f(1)=1$이므로
$f^{2024}(-1)=-1,\ f^{2025}(1)=1$에서
$f^{2024}(-1)+f^{2025}(1)=-1+1=0$
(iii) $f(-1)=1$인 경우 함수 f는



$f(-1)=1,\ f^2(-1)=0,\ f^3(-1)=-1$이므로
$f^3=I$ (I는 항등함수)이다.
$f^{2024}=f^{3\cdot 674+2}=f^2,\ f^{2025}=f^{3\cdot 675}=I$에서
$f^{2024}(-1)+f^{2025}(1)=f^2(-1)+I(1)=1$
(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 f는 (iii)과 같다.
$f^{2020}=f^{3\cdot 673+1}=f,\ f^{2021}=f^{3\cdot 673+2}=f^2$이므로
$f^{2020}(0)+f^{2021}(1)=f(0)+f^2(1)=-2$

34 정답 ③

해설 $-3<x<4$일 때, $f(f(x))>f(x)$에서 $f(x)=t$로
놓으면 $-2\le t<5$이고, $f(t)>t$를 만족하는
t의 범위는 $-2\le t<0$
따라서 $-2\le f(x)<0$을 만족시키는 x값의 범위는
$0<x<4$

35 정답 $\frac{1}{2}$

해설 주어진 그림에서 두 함수 $f(x),\ g(x)$의 식을 각각 구하면
$f(x)=x\ (0\le x\le 1)$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -x+1 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 주기가 2이고, $g(-x)=-g(x)$이므로
$g\left(-\frac{9}{4}\right)=-g\left(\frac{9}{4}\right)=-g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$
$f(-x)=f(x)$이므로
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
$\therefore\ f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}$

개념원리(2025) - 공통수학2 (역함수) 237~246p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

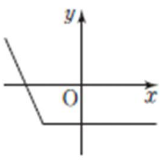
유형별 학습

이름

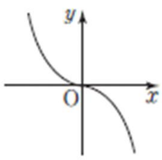
01 함수 $f(x)=-2x+9$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(7)+g^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

02 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면?

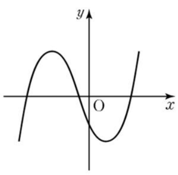
①



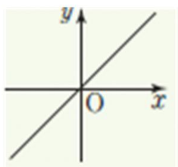
②



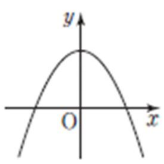
③



④

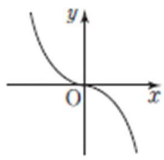


⑤

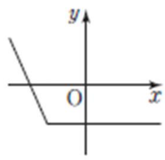


03 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면?

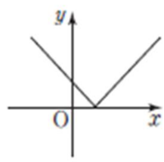
①



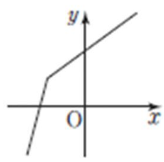
②



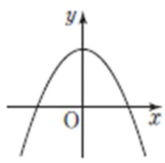
③



④



⑤



04 함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $(g \circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는?

① $g(x)=\frac{1}{2}x-1$ ② $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

③ $g(x)=\frac{1}{2}x+3$ ④ $g(x)=x-3$

⑤ $g(x)=2x+3$

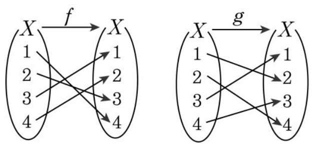
05 함수 $f(x)=2x+3$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는?

① $g(x)=\frac{1}{2}x-1$　　② $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

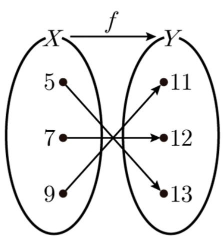
③ $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$　　④ $g(x)=x-3$

⑤ $g(x)=2x+3$

06 두 함수 f, g 가 각각 다음 그림과 같이 정의될 때, $(g\circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하여라.

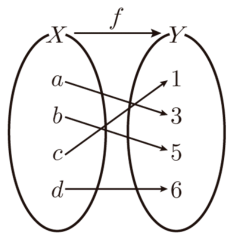


07 다음 그림과 같은 함수 $f:X\to Y$에서 $(f^{-1}\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

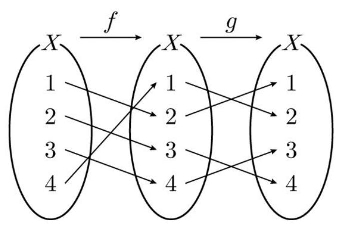


08 $f(x)=6x-8$에 대하여 $(f^{-1}\circ f)(1)$의 값을 구하시오.

09 다음 그림과 같이 주어진 함수 f에 대하여 $(f^{-1})^{-1}(b)$를 구하시오.



10 두 함수 f, g가 다음 그림과 같을 때, $(g\circ f)^{-1}(2)+(f\circ g)^{-1}(2)$의 값을 구하시오.



11 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(-4)=-1$일 때, $(a-b)^2$의 값을 구하시오.

12 집합 $X=\{x \mid x \geq a\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2-4x-14$의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

13 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2\ (x \geq 8)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=ax+b\ (x \geq c)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.

14 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^2+3x$에 대하여 $(g \circ f^{-1})(a)=4$를 만족시키는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

15 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -x^2+3x & (x<1) \end{cases}$에 대하여 $(f \circ f)(2)+f^{-1}(-4)$의 값을 구하시오.

16 [2017년 6월 고3 문과 11번 변형]
두 함수 $f(x)=2x^2-2x+3$, $g(x)=3x+1$에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(2)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

17 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 $(f \circ f)(x)=x$, $f(5)=3$일 때, $f^{-1}(5)+f(3)$의 값을 구하시오.

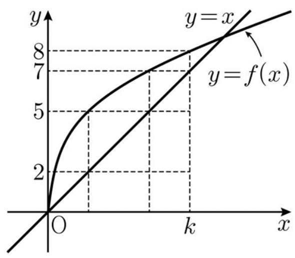
18 함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 함수 g가 $(g \circ f)(x)=x$를 만족시킬 때, $f^{-1}(-1)+g^{-1}(3)$의 값을 구하시오.

19 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(f^{-1})^{-1}=f$
② $g \circ f \neq f \circ g$
③ $(g \circ f)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$
④ $f \circ f^{-1}=I$
⑤ $(g \circ f) \circ h=g \circ (f \circ h)$

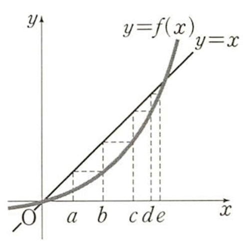
20 일차함수 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나고, 그 역함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지날 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

21 $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(g \circ g)(k)$의 값을 구하시오. (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

22 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은?
(단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a　② b　③ c
④ d　⑤ e

23 함수 $f(x)=-x+1$에 대하여
$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$으로 정의할 때,
$f^{99}(a)=100$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.
(단, n은 자연수이다.)

24 집합 $X=\{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$의
역함수가 존재하고, $f(2)+f(6)=f(5)$,
$f^{-1}(1)+f^{-1}(2)=7$을 만족시킬 때,
$8\cdot f(1)+(f\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

25 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax+b & (x\geq 2)\\ -2x+3 & (x<2)\end{cases}$$
의 역함수가 존재하도록 하는 음이 아닌 실수 a, b에
대하여 점 $(a,\ b)$의 자취의 길이를 l이라 할 때,
$16l^2$을 구하시오.

26 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여
$f(3x+2)=6x+5$이고 함수 $f(x)$의 역함수가
$f^{-1}(x)=ax+b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $4ab$의
값은?

① -4 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

27 [2015년 6월 고2 이과 9번/3점]
일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
함수 $y=f(2x+3)$의 역함수를 $g(x)$에 대한
식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다.
두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

28 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 함수 $f(3x)$의
역함수는?

① $g\left(\dfrac{1}{3}x\right)$ ② $g(9x)$ ③ $g(3x)$
④ $3g(x)$ ⑤ $\dfrac{1}{3}g(x)$

29 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{x-1}$에 대하여 $(f \circ g)(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$, $g^{-1}(3)=-1$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

30 다음의 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x-3$와 $g(x)=-2x+2$에 대한 설명 중 옳은 것은 무엇인가?

① $f(x)$와 $g(x)$는 $y=x$에 대해 대칭이다.
② $(g\circ g)(x)=4x+16$
③ $(f^{-1}\circ g)(x)=-4x+12$
④ $((g\circ f)^{-1}\circ g)(x)=2x+6$
⑤ $(f\circ(g\circ f)^{-1})(x)=-2x+2$

31 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x-2$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g \circ f)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

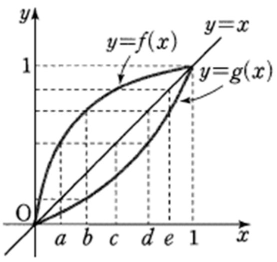
32 함수 $f(x)=x^2-6\ (x \geq 0)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하고, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B라고 하자. 또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

33 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

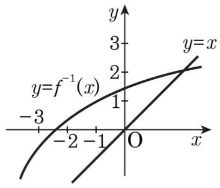
34 정의역이 $\{x\,|\,x \geq 4\}$인 함수 $f(x)=x^2-8x+18$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때 ab의 값을 구하시오.

35 집합 $A=\{x|0\le x\le 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수$y=f(x)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f\circ g\circ f^{-1})(d)$의 값은?



① a　② b　③ c
④ d　⑤ e

36 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의그래프와 직선 $y=x$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 방정식 $f(x)=0$ 의 해를 α 라고 할 때 다음 중 옳은 것을 고르면?



① $-3<\alpha<-2$
② $-2<\alpha<-1$
③ $0<\alpha<1$
④ $1<\alpha<2$
⑤ $2<\alpha<3$

37 역함수가 존재하는 함수 f가 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족시키고, $f(1)=3$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $f(-3)=\dfrac{1}{27}$

ㄷ. 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$이다.

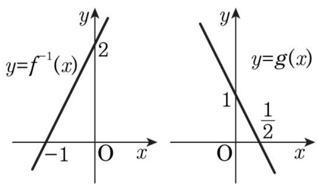
① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 두 함수 f, g는 각각 $f: A \to A$, $g: A \to A$인 일대일대응이다.
두 함수 f, g가 다음 세 조건을 만족할 때, $(g \circ f)^{-1}(3)$의 값은?

(가) $f(2)=2$, $f(4)=1$, $g(4)=1$
(나) $(g \circ f)(4)=4$, $(f \circ g)(4)=4$
(다) $(f \circ g)^{-1}(3)=2$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

39 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



가 나

다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$

② $y=f(x-1)$

③ $y=-f(x-1)$

④ $y=f(x+1)$

⑤ $y=-f(1-x)$

40 음이 아닌 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$ ② $a \ge 0$
③ $a < 1$ ④ $0 < a < 2$
⑤ $a < 2$

개념원리(2025) - 공통수학2 (역함수) 237~246p

함수의 합성 ~ 역함수

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ②, ④	03 ①, ④
04 ②	05 ②	06 3
07 5	08 1	09 5
10 6	11 16	12 7
13 -48	14 -8	15 7
16 ③	17 8	18 5
19 ③	20 -2	21 2
22 ④	23 -99	24 17
25 153	26 ②	27 ④
28 ⑤	29 ⑤	30 ④
31 ③	32 36	33 ③
34 36	35 ③	36 ④
37 ④	38 ②	39 ①
40 ①		

실시일자	-
40문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$f^{-1}(x)=g(x)$
$g(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로
$-2k+9=7$
$\therefore k=1$
$\therefore g(7)=1$
한편, $f^{-1}(x)=g(x)$이므로
$g^{-1}(x)=f(x)$
$\therefore g^{-1}(3)=f(3)=3$
$\therefore g(7)+g^{-1}(3)=4$

02 정답 ②, ④

해설 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로 주어진 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은 ②, ④이다.

03 정답 ①, ④

해설 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로 주어진 함수의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은 ①, ④이다.

04 정답 ②

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$이므로
$f(x)=g^{-1}(x)$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$
즉, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$y=2x-3$으로 놓고 x에 대하여 정리하면
$2x=y+3$
$\therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

05 정답 ②

해설 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$이므로
$f(x)=g^{-1}(x)$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$
즉, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$y=2x+3$으로 놓고 x에 대하여 정리하면
$2x=y-3$
$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

06 정답 3

해설 함수 f 는 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
이 때, $f(4)=2$ 이므로 $f^{-1}(2)=4$
$\therefore (g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(4)=3$

07 정답 5

해설 $(f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(f(5))=f^{-1}(13)=5$

08 정답 1

해설 역함수와 합성함수의 성질에 의하여
$(f^{-1}\circ f)(1)=1$

09 정답 5

해설 $(f^{-1})^{-1}(b)=f(b)=5$

10 정답 6

해설 $(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$
$=f^{-1}(g^{-1}(2))$
$=f^{-1}(1)$
$=4$
$(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)$
$=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(1)$
$=2$
$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)+(f\circ g)^{-1}(2)=4+2$
$=6$

11 정답 16

해설 $f^{-1}(2)=1$이므로 $f(1)=2$
$\therefore a+b=2$ $\cdots$ ㉠
$f^{-1}(-4)=-1$이므로 $f(-1)=-4$
$\therefore -a+b=-4$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3,\ b=-1$
$\therefore (a-b)^2=\{3-(-1)\}^2=16$

12 정답 7

해설 $f(x)=x^2-4x-14=(x-2)^2-18$이고
함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로
$a\ge 2,\ f(a)=a$
$f(a)=a$에서 $a^2-4a-14=a$
$a^2-5a-14=0,\ (a+2)(a-7)=0$
$\therefore a=7\ (\because a\ge 2)$

13 정답 -48

해설 $y=\dfrac{1}{2}x+2$라 하면 $x\ge 8$일 때 $y\ge 6$이므로
함수 $f(x)$는 집합 $\{x|x\ge 8\}$에서
집합 $\{y|y\ge 6\}$으로의 일대일함수이다.
이때 $y=\dfrac{1}{2}x+2$에서 $\dfrac{1}{2}x=y-2$
$\therefore x=2y-4$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-4$
$\therefore f^{-1}(x)=2x-4\ (x\ge 6)$
따라서 $a=2,\ b=-4,\ c=6$이므로 $abc=-48$이다.

14 정답 -8

해설 $f^{-1}(a)=k$라 하면
$(g\circ f^{-1})(a)=g(f^{-1}(a))=g(k)$
$=k^2+3k=4$
이므로 $k^2+3k-4=0$
$(k-1)(k+4)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=1$
---------------------------------------㉮
(ⅰ) $f^{-1}(a)=-4$일 때,
$a=f(-4)=2\cdot(-4)-1=-9$
(ⅱ) $f^{-1}(a)=1$일 때,
$a=f(1)=2\cdot 1-1=1$
---------------------------------------㉯
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$-9+1=-8$
---------------------------------------㉰

단계	채점 기준	비율
㉮	$f^{-1}(a)=k$에서 상수 k의 값 구하기	40 %
㉯	상수 a의 값 구하기	50 %
㉰	모든 상수 a의 값의 합 구하기	10 %

15 정답 7

해설 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=8$
한편, $f^{-1}(-4)=a$라 하면
$f(a)=-4$
(ⅰ) $a\ge 1$일 때,
$f(a)=2a$이므로
$2a=-4$
$\therefore a=-2$
그런데 $a\ge 1$이므로 a의 값은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a<1$일 때,
$f(a)=-a^2+3a$이므로
$-a^2+3a=-4$
$a^2-3a-4=0$
$(a+1)(a-4)=0$
이때 $a<1$이므로
$a=-1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-1$이므로
$f^{-1}(-4)=-1$
$\therefore (f\circ f)(2)+f^{-1}(-4)=8+(-1)=7$

16 정답 ③

해설 $f(2)=2\cdot2^2-2\cdot2+3=7$이므로

$(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(7)$

이때 $g^{-1}(7)=k$라 하면 $g(k)=7$이다.

즉, $g(k)=3k+1=7$에서 $k=2$

따라서 $(g^{-1}\circ f)(2)=2$이다.

17 정답 8

해설 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f^{-1}(5)=f(5)=3$이고

$f^{-1}(5)=3$이므로

$f(3)=5$

$\therefore f^{-1}(5)+f(3)=8$

18 정답 5

해설 $(g\circ f)(x)=x$이므로

$f^{-1}(x)=g(x),\ g^{-1}(x)=f(x)$

$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$2k-1=-1$

$\therefore k=0$

또, $g^{-1}(3)=f(3)=2\cdot3-1=5$이므로

$f^{-1}(-1)+g^{-1}(3)=0+5=5$

19 정답 ③

해설 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\neq g^{-1}\circ f^{-1}$

즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

20 정답 -2

해설 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$-a+b=3$ $\cdots$ ㉠

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

$\therefore 2a+b=0$ $\cdots$ ㉡

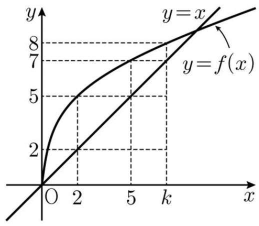
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-2$

21 정답 2

해설 직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



이때 $k=7$이므로 $(g\circ g)(k)=(g\circ g)(7)=g(g(7))$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(7)=p$(p는 상수)라 하면 $f(p)=7$

위의 그래프에서 $f(5)=7$이므로 $p=5$

$\therefore g(7)=5$

$\therefore (g\circ g)(k)=(g\circ g)(7)=g(5)$

$g(5)=q$ (q는 상수)라 하면 $f(q)=5$

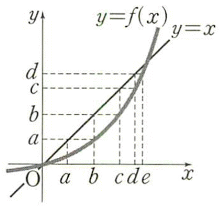
위의 그래프에서 $f(2)=5$이므로 $q=2$

$\therefore g(5)=2$

$\therefore (g\circ g)(k)=2$

22 정답 ④

해설



$f^{-1}(b)=k$(k는 상수)라 하면

$f^{-1}(b)=k \Leftrightarrow f(k)=b$

위 그래프에서 $f(c)=b$이므로 $f^{-1}(b)=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(b)=(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$

$=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c)=p$(p는 상수)라 하면

$f^{-1}(c)=p \Leftrightarrow f(p)=c$

위의 그래프에서 $f(d)=c$이므로 $f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(b)=d$

23 정답 -99

해설 $f^1(x)=f(x)=-x+1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+1)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+1$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여

$f^{2n-1}(x)=-x+1,\ f^{2n}(x)=x$

따라서 $f^{99}(x)=-x+1$이므로

$f^{99}(a)=-a+1=100,\ a=-99$

24 정답 17

해설 $f(2)+f(6)=f(5)$에서

$1+5=5+1=6$이므로

$f(5)=6$

$f(2)=1,\ f(6)=5$ 또는 $f(2)=5,\ f(6)=1$

이고 $f(5)=6$에서 $f^{-1}(6)=5$

(ⅰ) $f(2)=1,\ f(6)=5$인 경우

$f^{-1}(1)=2,\ f^{-1}(5)=6,\ f^{-1}(6)=5$이므로

$f^{-1}(2)=1$

이때 $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)=3$이므로 주어진 식을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(2)=5,\ f(6)=1$인 경우

$f^{-1}(5)=2,\ f^{-1}(1)=6,\ f^{-1}(6)=5$이므로

$f^{-1}(2)=1$

이때 $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)=7$이므로 주어진 식을 만족시킨다.

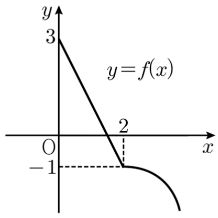
(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(5)=6,$
$f(6)=1$

따라서 $(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(6)=1$이므로

$8\cdot f(1)+(f\circ f)(5)=8\cdot 2+1=17$

25 정답 153

해설 함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $y=-x^2+2ax+b=-(x-a)^2+b+a^2$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 2보다 작거나 같아야 하므로

$a\le 2$

또한, 치역이 R이어야 하므로

$f(2)=-4+4a+b=-1$

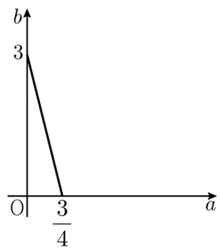
$\therefore\ b=-4a+3$

이때 $a,\ b$가 음이 아닌 실수이므로

$b=-4a+3\ge 0$에서

$a\le \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ b=-4a+3\ \left(0\le a\le \dfrac{3}{4}\right)$



따라서 조건을 만족시키는 점 $(a,\ b)$의 자취의 길이 l은

$l=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3^2}=\sqrt{\dfrac{153}{16}}=\dfrac{\sqrt{153}}{4}$

$\therefore\ 16l^2=153$

26 정답 ②

해설 $3x+2=t$로 놓으면 $3x=t-2$

$\therefore x=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}$을 $f(3x+2)=6x+5$에 대입하면

$f(t)=6\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)+5=2t+1$

$\therefore f(x)=2x+1$

$y=2x+1$으로 놓으면 $2x=y-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$4ab=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

27 정답 ④

해설 역함수 이해하기

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(2y+3)$이다.

그러므로

$2y+3=g(x)$

역함수는 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore a+b=-1$

28 정답 ⑤

해설 $h(x)=3x$라 하면

$h^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$

$f(3x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

따라서 $f(3x)=(f\circ h)(x)$의 역함수는

$$\begin{aligned}(f\circ h)(x) &= (h^{-1}\circ f^{-1})(x)\\ &=(h^{-1}\circ g)(x)\\ &=h^{-1}(g(x))\\ &=\frac{1}{3}g(x)\end{aligned}$$

29 정답 ⑤

해설 $g^{-1}(3)=-1$이므로 $g(-1)=3$

$f(3)=f(g(-1))=(f\circ g)(-1)=\frac{3}{2}$

30 정답 ④

해설 $f^{-1}(x)=2x+6$, $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$

$g(g(x))=4x-2$

④ 에서 $((g\cdot f)^{-1}\cdot g)(x)$

$=(f^{-1}\cdot g^{-1}\cdot g)(x)$

$=f^{-1}(x)=2x+6$

31 정답 ③

해설 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}=(f\circ g)^{-1}$가 성립한다.

$\therefore g\circ f=f\circ g$

이때

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=4\left(\frac{1}{4}x-2\right)+a=x-8+a$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{4}(4x+a)-2=x+\frac{1}{4}a-2$

이므로 $g\circ f=f\circ g$에서

$x-8+a=x+\frac{1}{4}a-2$

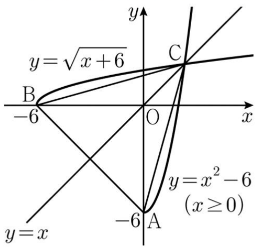
이 식이 x에 대한 항등식이므로

$-8+a=\frac{1}{4}a-2$, $\frac{3}{4}a=6$

$\therefore a=8$

32 정답 36

해설 함수 $f(x)=x^2-6\ (x\geq 0)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 $\mathrm{A}(0,\ -6)$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(-6,\ 0)$이다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점과 같으므로

$x^2-6=x$에서

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

$x\geq 0$이므로 $x=3$

따라서 점 $\mathrm{C}(3,\ 3)$

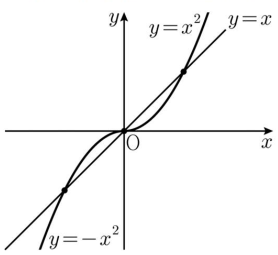
삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 OAC, 삼각형 OBC, 삼각형 OAB의 넓이의 합과 같으므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6$$
$$=9+9+18=36$$

33 정답 ③

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다. 따라서 다음 그림에서 교점의 개수는 3이다.



34 정답 36

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-8x+18=x$에서

$x^2-9x+18=0$, $(x-3)(x-6)=0$

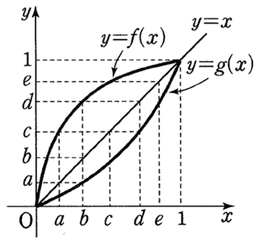
$\therefore\ x=6$ ($\because\ x\geq 4$)

따라서 교점의 좌표는 $(6,\ 6)$이므로 $a=6$, $b=6$

$\therefore\ ab=36$

35 정답 ③

해설 주어진 그래프에서 $y=x$의 그래프를 이용하여 y좌표를 나타내면 다음과 같다.



이때 $f^{-1}(d)=x$라 하면

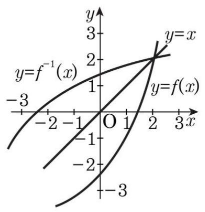
$f(x)=d$

$\therefore\ x=b$

$$\therefore\ (f\circ g\circ f^{-1})(d)=(f(g(f^{-1}(d)))$$
$$=f(g(b))$$
$$=f(a)=c$$

36 정답 ④

해설



다음 그림에서와 같이

$y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭을 이룬다.

따라서 $f(x)=0$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 x 좌표이므로

$1<\alpha<2$ 이다.

37 정답 ④

해설 $f(x+y)=f(x)f(y)$ $\cdots$ ㉠

ㄱ. ㉠에 $x=1$, $y=0$을 대입하면
$f(1)=f(1)f(0)$에서 $3=3f(0)$이므로
$f(0)=1$이다. (거짓)

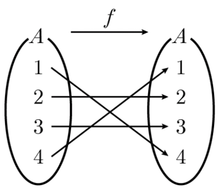
ㄴ. $f(1)=3$이므로
$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=9$
$f(3)=f(2+1)=f(2)f(1)=27$
$f(0)=f(3+(-3))=f(3)f(-3)=1$이므로
$f(-3)=\dfrac{1}{f(3)}=\dfrac{1}{27}$ (참)

ㄷ. $f(x)=a$, $f(y)=b$라 하면
$x=f^{-1}(a)$, $y=f^{-1}(b)$이다.
㉠에서 $f(x+y)=f(x)f(y)=ab$이므로
$f^{-1}(ab)=x+y=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$이다. (참)

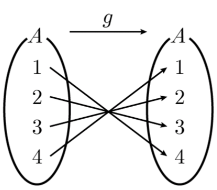
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38 정답 ②

해설 조건 (가)에서 $f(2)=2$, $f(4)=1$
(가), (나)에서 $g(4)=1$, $f(g(4))=4$
즉, $f(1)=4$
이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=3$
조건 (가)에서 $g(4)=1$
(가), (나)에서 $f(4)=1$, $g(f(4))=4$
즉, $g(1)=4$
(다)에서 $(f\circ g)^{-1}(3)=2$, $(f\circ g)(2)=3$
$f(g(2))=3$이므로 $g(2)=3$
이때 함수 g는 일대일대응이므로 $g(3)=2$
즉, 두 함수 f, g를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$(g\circ f)^{-1}(3)=x$라 하면 $(g\circ f)(x)=3$
즉, $g(f(x))=3$에서 $f(x)=2$, $x=2$
따라서 구하는 값은 2이다.

39 정답 ①

해설 그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나)의 그래프와 일치한다.
즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y=f^{-1}(-x)\cdots$㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$㉡이다.
㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.
$\therefore y=-f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

40 정답 ①

해설 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
따라서 $\dfrac{x^2}{4}+a=x$, 즉 $x^2-4x+4a=0$이
$x\geq 0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
이차방정식 $x^2-4x+4a=0$의 판별식을 D,
두 실근을 α, β라 하면
(ⅰ) $\dfrac{D}{4}=4-4a>0$
$\therefore a<1$
(ⅱ) $\alpha+\beta=4>0$
(ⅲ) $\alpha\beta=4a\geq 0$
$\therefore a\geq 0$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $0\leq a<1$