교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수)120~121p_중단원

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $y=x+2$

ㄴ. $y=\begin{cases} x^2\ (x\text{는 짝수}) \\ x+1\ (x\text{는 홀수}) \end{cases}$

ㄷ. $y=(x$의 양의 약수$)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

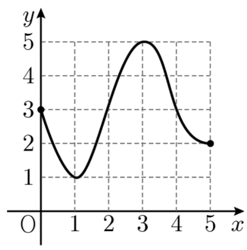
02 $\mathrm{X}=\{-1, 0, 1\}$, $\mathrm{Y}=\{0, 1, 2, 3\}$일 때, $x\in\mathrm{X}$인 임의의 x에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x\to1$ ② $x\to|x|$ ③ $x\to x^2+1$
④ $x\to2x$ ⑤ $x\to x^2+x+1$

03 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g에 대하여 f는 항등함수이고, g는 상수함수이다. $g(1)=1$일 때, $\dfrac{f(3)}{g(2)}$의 값을 구하시오.

04 두 함수 $f(x)=-2x+4$, $g(x)=-3x^2+2$에 대하여 $(f\circ g)(-1)$의 값을 구하시오.

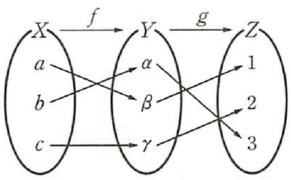
05 $0\le x\le5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(5)$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06 함수 $f(x)=3x-3$에 대하여 $(f \circ f)(-1)$의 값을 구하시오.

07 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f)(a)+(g \circ f)(b)$의 값은?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

08 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$의 합성함수 $g \circ f$는?

① $y=-6x-1$
② $y=-6x$
③ $y=-6x+1$
④ $y=-6x+3$
⑤ $y=-6x+5$

09 실수 전체의 집합 R에서 R로의 세 함수 f, g, h에 대하여 $(h \circ g)(x)=3x+4$, $f(x)=x^2$일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$의 값을 구하시오.

10 함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $(g \circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는?

① $g(x)=\frac{1}{2}x-1$　② $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
③ $g(x)=\frac{1}{2}x+3$　④ $g(x)=x-3$
⑤ $g(x)=2x+3$

11 정의역이 $X=\{1, 2\}$, 공역이 $Y=\{0, 1, 2, 3\}$인 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

12 집합 $X=\{1,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x^2-4x+6,\ g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.

13 두 함수 $f(x)=2x+1,\ g(x)=4x-9$에 대하여 $(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족하는 함수 $h(x)$는?

① $h(x)=8x-5$ ② $h(x)=8x-17$
③ $h(x)=\dfrac{1}{2}x+5$ ④ $h(x)=2x+5$
⑤ $h(x)=2x-5$

14 두 함수 $f,\ g$에 대하여
$g(x)=\dfrac{2x+7}{4},\ (f\circ g)(x)=6x+15$일 때,
$f(2)$의 값을 구하시오.

15 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=-3x+4$에 대하여 $h\circ f=g$를 만족하는 일차함수 $h(x)$는?

① $h(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=-x+3$
⑤ $h(x)=x+3$

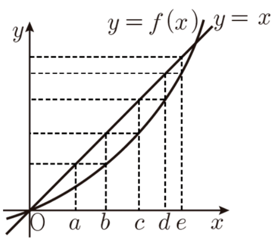
16 두 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2},\ \ g(x)=3x+1$에 대하여
$(k\circ f)(x)=g(x)$을 만족하는 $k\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$을 구하면?

① $3x-2$ ② $6x-5$
③ $2x-3$ ④ $x+1$
⑤ $4x+1$

17 두 함수 $f,\ g$가 $f(x)=-2x+3,\ g(x)=3x-4$일 때, $\left(f\circ\left(f\circ g^{-1}\right)^{-1}\circ f\right)(2)$의 값을 구하시오.

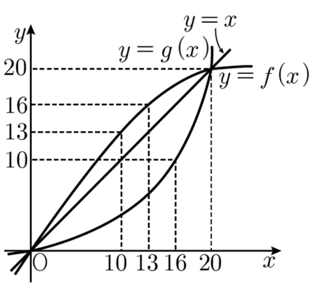
18 두 함수 $f(x)=3x-6$, $g(x)=5x+7$에 대하여 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(1)$의 값을 구하시오.

19 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f \circ f)(e)$의 값과 같은 것은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

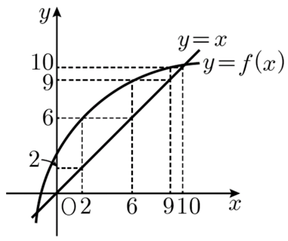


① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

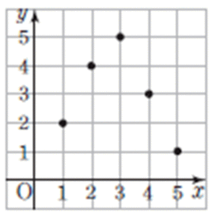
20 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ $(x \geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $(g \circ f)(a)=10$, $(f \circ f \circ g)(16)=b$를 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



21 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f^{-1}(10)$의 값을 구하시오.

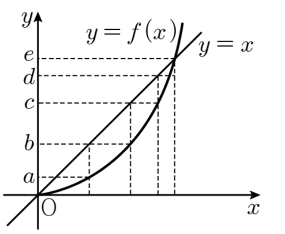


22 다음 그림은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재할 때, $f^{-1}(2)+f^{-1}(5)$의 값은?



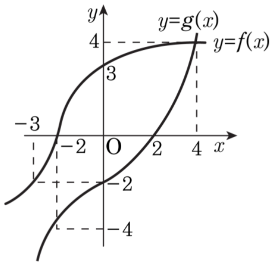
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

23 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



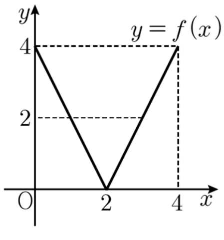
① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

24 일대일대응인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f^{-1})(3)$의 값을 구하여라.



25 두 집합 $X=\{x \mid x \geq 2\}$, $Y=\{y \mid y \geq 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=x^2+2x+a$가 일대일대응일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

26 $0 \leq x \leq 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x))=2$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.



교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수)120~121p_중단원

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 ④	03 3
04 6	05 ⑤	06 -21
07 ④	08 ①	09 16
10 ②	11 4	12 -4
13 ⑤	14 18	15 ④
16 ①	17 -1	18 6
19 ②	20 29	21 9
22 ④	23 ④	24 -2
25 -5	26 4	

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 (함수)120~121p_중단원

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 ㄱ. X의 원소 3에 대응하는 Y의 값이 없으므로 함수가 아니다.
ㄴ. $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 4$,
곧 X의 모든 원소가 Y의 원소 하나에 대응하므로 함수이다.
ㄷ. X의 원소 2, 3에 대응하는 Y의 값이 각각 2개이므로 함수가 아니다.

02 정답 ④

해설 ④ $f(-1)=-2$이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

03 정답 3

해설 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$
$\therefore f(3)=3$
함수 g가 상수함수이고 $g(1)=1$이므로 $g(x)=1$
$\therefore g(2)=1$
$\therefore \dfrac{f(3)}{g(2)}=\dfrac{3}{1}=3$

04 정답 6

해설 $(f \circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-1)=6$

05 정답 ⑤

해설 $(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=5$
$(f \circ f \circ f)(5)=f(f(f(5)))=f(f(2))$
$=f(3)=5$
$\therefore (f \circ f)(2)+(f \circ f \circ f)(5)=5+5=10$

06 정답 -21

해설 $(f \circ f)(-1)=f(f(-1))=f(-6)=-21$

07 정답 ④

해설 $(g \circ f)(a)+(g \circ f)(b)=g(f(a))+g(f(b))$
$=g(\beta)+g(\alpha)$
$=1+3=4$

08 정답 ①

해설 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$=-3(2x+1)+2$
$=-6x-1$

09 정답 16

해설 $(h \circ (g \circ f))(2)=((h \circ g) \circ f)(2)$
$=(h \circ g)(f(2))$
$=(h \circ g)(4)$
$=3\times4+4=16$

10 정답 ②

해설 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=x$이므로
$f(x)=g^{-1}(x)$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$
즉, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$y=2x-3$으로 놓고 x에 대하여 정리하면
$2x=y+3$
$\therefore x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$
$\therefore g(x)=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

11 정답 4

해설 $f(x)=g(x)$에서 $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이므로
$1^2-1=a+b$, $2^2-2=2a+b$
$a+b=0$ $\cdots$ ㉠
$2a+b=2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$
$\therefore\ a-b=2-(-2)=4$

12 정답 -4

해설 $f(1)=g(1)$에서
$1-4+6=a+b$
$\therefore\ a+b=3$ $\cdots$ ㉠
$f(2)=g(2)$에서
$4-8+6=2a+b$
$\therefore\ 2a+b=2$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=4$
$\therefore\ ab=-4$

13 정답 ⑤

해설 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+1$
이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로
$2h(x)+1=4x-9$
$2h(x)=4x-10$
$\therefore\ h(x)=2x-5$

14 정답 18

해설 $(f\circ g)(x)=6x+15$에서
$f(g(x))=6x+15$, $f\left(\dfrac{2x+7}{4}\right)=6x+15$
$\dfrac{2x+7}{4}=t$로 놓으면
$2x+7=4t$, $2x=4t-7$
$\therefore\ x=\dfrac{4t-7}{2}$
따라서 $f(t)=6\cdot\dfrac{4t-7}{2}+15=12t-6$이므로
$f(2)=18$

15 정답 ④

해설 $(h\circ f)(x)=g(x)$에서 $f(x)=t$라 하면
$t=3x-1$, $3x=t+1$
이때 $x=\dfrac{1}{3}(t+1)$을 함수 $g(x)$에 대입하면
$h(t)=-3\cdot\dfrac{1}{3}(t+1)+4=-t+3$
$\therefore\ h(x)=-x+3$

16 정답 ①

해설 $(k\circ f)(x)=g(x)\ \longrightarrow k(x)=(g\circ f^{-1})(x)$
$f^{-1}(x)$를 구해보면
$y=\dfrac{x+2}{2}$, $x=\dfrac{y+2}{2}\ \longrightarrow y=2x-2\cdots f^{-1}(x)$
$\longrightarrow k(x)=g(f^{-1}(x))=3(2x-2)+1=6x-5$
$\therefore k\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=6\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-5=3x-2$

17 정답 -1

해설 $(f\circ(f\circ g^{-1})^{-1}\circ f)(2)$
$=(f\circ g\circ f^{-1}\circ f)(2)$
$=(f\circ g)(2)$
$=f(g(2))$
$=f(2)$
$=-1$

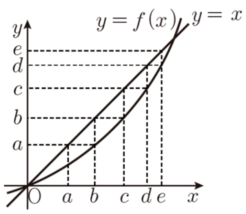
18 정답 6

해설 $g(1)=5\cdot1+7=12$이므로
$(g^{-1}\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g)(1)$
$=f^{-1}(g(1))$
$=f^{-1}(12)$
$f^{-1}(12)=k$라 하면 $f(k)=12$이므로
$3k-6=12$, $3k=18$
$\therefore\ k=6$

19

정답 ②

해설 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\therefore\ (f\circ f\circ f)(e)&=f(f(f(e)))\\&=f(f(d))\\&=f(c)=b\end{aligned}$$

20

정답 29

해설 $f(a)=t$라 하면

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(t)$이므로 $g(t)=10$에서

$t=16$

즉, $f(a)=16$이므로

$a=13$

또, $(f\circ f\circ g)(16)=b$에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)(16)&=f(f(g(16)))\\&=f(f(10))\\&=f(13)=16\end{aligned}$$

따라서 $a=13$, $b=16$이므로

$a+b=29$

21

정답 9

해설 $f^{-1}(10)=k$라 하면 $f(k)=10$

$\therefore\ k=9$

따라서 $f^{-1}(10)=9$

22

정답 ④

해설 $f^{-1}(2)=a$, $f^{-1}(5)=b$라 하면

$f(a)=2$, $f(b)=5$이므로 $a=1$, $b=3$

$\therefore\ f^{-1}(2)+f^{-1}(5)=1+3=4$

23

정답 ④

해설 $(f\circ f)^{-1}(b)=(f^{-1}\circ f^{-1})(b)$

$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(b))$ $\cdots$ ㉠

$f^{-1}(b)=k$라 하면, $f(k)=b$이고, 그래프에서

$f(c)=b$이므로

$k=c$, 즉 $f^{-1}(b)=c$

이때 ㉠에서

$(f\circ f)^{-1}(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$ $\cdots$ ㉡

$f^{-1}(c)=t$라 하면, $f(t)=c$이고, 그래프에서

$f(d)=c$이므로

$t=d$, 즉 $f^{-1}(c)=d$

따라서 ㉡에 의하여

$(f\circ f)^{-1}(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$

24

정답 -2

해설 $f^{-1}(b)=a \longleftrightarrow f(a)=b$이므로

그래프를 이용하여 $f^{-1}(3)$의 값을 찾는다.

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})(3)=g(f^{-1}(3))=g(0)=-2$

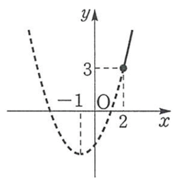
25

정답 -5

해설 $f(x)=x^2+2x+a$

$\qquad=(x+1)^2+a-1$

이므로 $x\geq 2$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 증가한다.



또, 치역과 공역이 같으려면 그래프는 점 $(2,\ 3)$을 지나야 하므로 $f(2)=3$

즉, $4+4+a=3$에서 $a=-5$

26 **정답** 4

해설 $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0 \le x < 2) \\ 2x-4 & (2 \le x \le 4)\end{cases}$ 이므로

$f(f(x))=\begin{cases}-2f(x)+4 & (0 \le f(x) < 2) \\ 2f(x)-4 & (2 \le f(x) \le 4)\end{cases}$

(ⅰ) $0 \le x < 1$일 때, $2 < f(x) \le 4$이므로

$f(f(x))=2(-2x+4)-4=-4x+4$

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $0 < f(x) \le 2$이므로

$f(f(x))=-2(-2x+4)+4=4x-4$

(ⅲ) $2 \le x < 3$일 때, $0 \le f(x) < 2$이므로

$f(f(x))=-2(2x-4)+4=-4x+12$

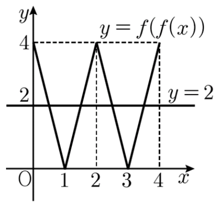
(ⅳ) $3 \le x \le 4$일 때, $2 \le f(x) \le 4$이므로

$f(f(x))=2(2x-4)-4=4x-12$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$f(f(x))=\begin{cases}-4x+4 & (0 \le x < 1) \\ 4x-4 & (1 \le x < 2) \\ -4x+12 & (2 \le x < 3) \\ 4x-12 & (3 \le x \le 4)\end{cases}$ 이므로

함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(f(x))=2$의 서로 다른 실근의 개수는
함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의
개수와 같으므로 4이다.