기말고사 내신 대비-(함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

01 [2022년 11월 고1 27번/4점]

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 역함수가 존재하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(f \circ f)(-1)+f^{-1}(-2)=4$
> (나) $k=0,\ 1$일 때, $f(k) \cdot f(k-2) \le 0$이다.

$6f(0)+5f(1)+2f(2)$의 값을 구하시오.

02 [2023년 3월 고2 16번/4점]

집합 $X=\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (0 \le x < 3) \\ x-3 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$가 일대일대응일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{7}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{11}{3}$

03 [2022년 3월 고2 26번/4점]

집합 $X=\{x \mid x \ge a\}$에서 집합 $Y=\{y \mid y \ge b\}$로의 함수 $f(x)=x^2-4x+3$이 일대일대응이 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 [2023년 11월 고1 15번/4점]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 역함수를 갖는다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x^2+1)=-2x^2+1$일 때, $f(-2)$의 값은?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

05 [2023년 11월 고1 29번/4점]

집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $\{f(x)+x^2-5\} \cdot \{f(x)+4x\}=0$이다.
> (나) $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) < 0$

$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$의 값을 구하시오.

06 [2019년 11월 고1 28번/4점]

두 함수

$$f(x)=x+a,$$
$$g(x)=\begin{cases} 2x-6 & (x<a) \\ x^2 & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 $(g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=57$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 S라 할 때, $10S^2$의 값을 구하시오.

07 [2018년 11월 고1 28번/4점]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 7이다.
> (나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=42$
> (다) 함수 f의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X의 어떤 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

08 [2024년 3월 고2 20번/4점]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(f(x)) \leq 5$
> (나) 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 4\}$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(f(4))=1$
ㄴ. $f(3)=4$
ㄷ. 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 [2018년 3월 고2 이과 27번/4점]

집합 $X=\{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이다. $3 \leq n \leq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수일 때, $f(3)+f(7)$의 최댓값을 구하시오.

10 [2022년 11월 고1 21번/4점]

두 실수 a, b와 두 함수 $f(x)=-x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-2x-1$에 대하여 함수 $h(x)$를

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x+b) & (x \geq a) \end{cases}$라 하자.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)만을 원소로 하는 집합을 A라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $(0, k) \in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.
ㄴ. $(-1, 4) \in A$
ㄷ. 집합 $\{m+b \mid (m, b) \in A$이고 m은 정수$\}$의 모든 원소의 합은 $5+\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 [2018년 11월 고1 30번/4점]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여
함수 $f:X\to X$가 역함수가 존재하고,
다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x=1,\ 2,\ 6$일 때
> $(f\circ f)(x)+f^{-1}(x)=2x$이다.
> (나) $f(3)+f(5)=10$

$f(6)\neq 6$일 때, $f(4)\times\{f(6)+f(7)\}$의 값을 구하시오.

12 [2019년 3월 고2 문과 21번/4점]

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases}-x+4 & (x<-2)\\ f(x) & (-2\le x\le 1)\\ -x-2 & (x>1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(-2)+f(1)=3$
ㄴ. $g(0)=-1,\ g(1)=-3$이면
곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면
$g^{-1}(1)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 [2019년 3월 고2 이과 21번/4점]

두 이차함수 $f(x)=x^2-2x-3,\ g(x)=x^2+2x+a$가 있다. x에 대한 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a의 개수는?

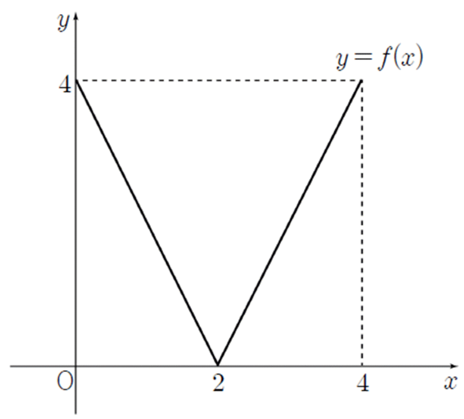
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14 [2017년 6월 고2 문과 20번/4점]

함수
$$f(x)=|2x-4|\ (0\le x\le 4)$$
에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(f(1))=0$
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 8이다.



① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 [2017년 3월 고2 이과 28번/4점]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

(나) $1 \leq x \leq 3$일 때, $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$이다.

$f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구하시오.

기말고사 내신 대비-(함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

빠른정답

01 13	02 ⑤	03 17
04 ③	05 26	06 40
07 7	08 ②	09 12
10 ⑤	11 50	12 ⑤
13 ④	14 ⑤	15 17

기말고사 내신 대비-(함수)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고1 23년 11월 ~ 고2 17년 3월

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

01 정답 13

해설 합성함수를 이용하여 추론하기

함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

조건 (가)에서 $(f\circ f)(-1)=2$, $f^{-1}(-2)=2$이므로

$f(f(-1))=2$, $f(2)=-2$

$f(-1)=a$라 하면

$f(a)=2$에서 $a\neq -1$, $a\neq 2$이므로

$a=0$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $f(-1)=0$일 때

$f(f(-1))=f(0)=2$

조건 (나)에서

$f(0)\cdot f(-2)\leq 0$이고

$f(1)\cdot f(-1)\leq 0$이므로

$f(-2)=-1$, $f(1)=1$

(ⅱ) $f(-1)=1$일 때

$f(f(-1))=f(1)=2$

$f(1)\cdot f(-1)>0$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$6f(0)+5f(1)+2f(2)=12+5-4=13$

02 정답 ⑤

해설 일대일대응을 이해하여 식의 값을 구한다.

집합 $\{x|3\leq x\leq 4\}$에서 정의된 함수 $y=x-3$의

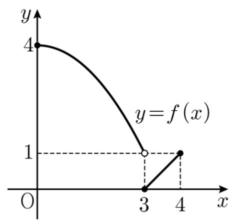
치역은 $\{y|0\leq y\leq 1\}$이므로

함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는

집합 $\{x|0\leq x<3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$의

치역이 $\{y|1<y\leq 4\}$이어야 하고 함수 $y=f(x)$의

그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+b$라 할 때

$g(0)=4$, $g(3)=1$

이때 $g(0)=4$에서 $b=4$

또, $g(3)=1$에서 $9a+b=1$이므로

$a=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2+4 & (0\leq x<3) \\ x-3 & (3\leq x\leq 4)\end{cases}$이므로

$f(1)=-\dfrac{1}{3}\cdot 1^2+4=\dfrac{11}{3}$

03 정답 17

해설 일대일대응을 이해하여 식의 최댓값을 구한다.

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서

이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 $a \geq 2$이어야 한다.

$a \geq 2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid y \geq f(a)\}$이고

치역이 집합 $Y=\{y \mid y \geq b\}$와 같아야 하므로

$b=f(a)$이다.

$$a-b=a-f(a)$$
$$=-a^2+5a-3$$
$$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

$a \geq 2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이다.

따라서 $p=4,\ q=13$이므로

$p+q=17$

04 정답 ③

해설 역함수를 이용하여 추론하기

$f(-2)=k$라 하면 함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로

$f^{-1}(k)=-2$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f(k)=-2$

$-2x^2+1=-2$에서

$x^2=\frac{3}{2}$

이때 $f(x^2+1)=-2x^2+1$에 $x^2=\frac{3}{2}$을 대입하면

$f\left(\frac{5}{2}\right)=-2$

또, 함수 $f(x)$는 역함수를 갖는 일대일대응이므로

$k=\frac{5}{2}$

05 정답 26

해설 일대일함수를 이용하여 추론하기

$\{f(x)+x^2-5\}\cdot\{f(x)+4x\}=0$에서

$g(x)=-x^2+5,\ h(x)=-4x$라 하면

집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$이다.

이때 $g(x)=h(x)$에서

$x^2-4x-5=0,\ (x+1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-1$

따라서 $g(-1)=h(-1)=4$이므로

$f(-1)=4$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(1)=g(-1)$

이때 $f(1)=g(1)=4$라 하면 함수 $f(x)$는

일대일함수가 아니다.

$\therefore\ f(1)=h(1)=-4$

또, $g(x)=-4$에서

$x^2=9$

$\therefore\ x=-3$

이때 $f(-3)=g(-3)=-4$라 하면 함수 $f(x)$는

일대일함수가 아니다.

$\therefore\ f(-3)=h(-3)=12$

이때 $f(0)=h(0)=0$이라 하면 조건 (나)를 만족시키지

않는다.

$\therefore\ f(0)=g(0)=5$

또한, $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)<0$에서

$f(2)>0$

이때 $h(2)=-8<0$이므로

$f(2)=g(2)=1$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(-2)=g(2)$

$f(-2)=g(-2)=1$이라 하면 함수 $f(x)$는

일대일함수가 아니다.

$\therefore\ f(-2)=h(-2)=8$

$\therefore\ f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$

$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

06 정답 40

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

$(g \circ f)(1)=g(a+1)=(a+1)^2$

(ⅰ) $a \le 4$일 때,

$(f \circ g)(4)=f(16)=a+16$

$(g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=a^2+3a+17=57$

$a^2+3a-40=(a-5)(a+8)=0$

$a=-8$

(ⅱ) $a>4$일 때,

$(f \circ g)(4)=f(2)=a+2$

$(g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=a^2+3a+3=57$

$a^2+3a-54=(a-6)(a+9)=0$

$a=6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $S=-8+6=-2$

따라서 $10S^2=40$

07 정답 7

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로

집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여

$f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은

한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중

함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로

조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$

$+f(8)=36+n-m=42$

$\therefore n-m=6$

집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는

다음 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때

함수 f의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때

함수 f의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $n=7$

08 정답 ②

해설 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $f(f(4)) \le 1$이므로

$f(f(4))=1$이다. (참)

ㄴ. (ⅰ) $f(4)=1$일 때

$f(f(4))=f(1)=1$이므로 $f(1)=1$이다.

(a) $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이

$\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=4$이고

$f(f(3))=f(2)=4>2$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(c) $f(3)=4$이면 함수 f의 치역이

$\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=2$이고

$f(f(1))=f(1)=1$,

$f(f(2))=f(2)=2$,

$f(f(3))=f(4)=1$이 되어 조건을

만족시킨다.

(ⅱ) $f(4)=2$일 때

$f(f(4))=f(2)=1$이므로 $f(2)=1$이다.

(a) $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이

$\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이고

$f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이

$\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이고

$f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(c) $f(3)=4$일 때

$f(1)=1$이면 $f(f(1))=f(1)=1$,

$f(f(2))=f(1)=1$,

$f(f(3))=f(4)=2$가 되어 조건을

만족시킨다.

$f(1)=2$이면 $f(f(1))=f(2)=1$,

$f(f(2))=f(1)=2$,

$f(f(3))=f(4)=2$가 되어 조건을

만족시킨다.

$f(1)=4$이면 $f(f(2))=f(1)=4>3$이

되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(4)=4$일 때

$f(f(4))=f(4)=4 \ne 1$이므로 조건 (가)를

만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 모든 함수 f에 대하여

$f(3)=4$이다. (참)

ㄷ. ㄴ의 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 함수 f의 개수는

3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 정답 12

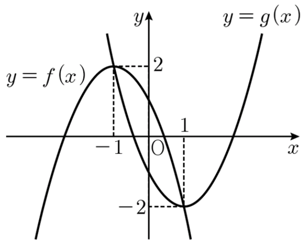
해설 일대일대응의 뜻을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

3 이상 5 이하의 자연수 n에 대하여
$f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로
$f(3)\times f(5)$, $f(4)\times f(6)$, $f(5)\times f(7)$은
모두 짝수이다.
$f(4)$ 또는 $f(6)$은 적어도 하나가 짝수이고,
집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로
$f(3)\times f(5)$와 $f(5)\times f(7)$이 모두 짝수이려면
$f(5)$는 짝수가 되어야 한다.
따라서 $f(3)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로
$f(3)+f(7)$의 최댓값은
$f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$일 때
$5+7=12$이다.

10 정답 ⑤

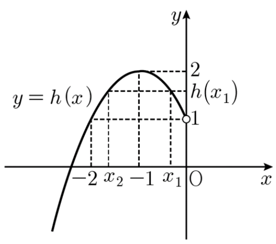
해설 일대일대응을 이용하여 추론하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프는
$x<a$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고
$x\ge a$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로
$-b$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄱ. $a=0$일 때
$x<0$에서 $h(x)=f(x)$이고
$x<0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.

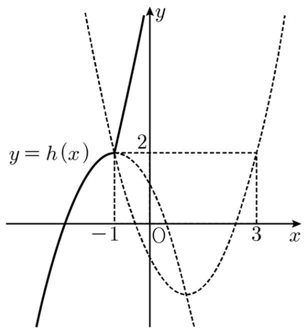


$-1<x_1<0$인 실수 x_1에 대하여
$h(x_1)=h(x_2)$이고
$-2<x_2<-1$인 실수 x_2가 존재하므로
함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다.
따라서 $(0,\ k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지
않는다. (참)

ㄴ. $a=-1$, $b=4$일 때
함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}-(x+1)^2+2 & (x<-1)\\(x+3)^2-2 & (x\ge-1)\end{cases}$$

이므로
함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x_1\ne x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여
$h(x_1)\ne h(x_2)$이므로 함수 $h(x)$는 일대일함수이고,
함수 $h(x)$의 치역은 실수 전체의 집합으로 공역과
같다.
따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서
실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로
$(-1,\ 4)\in A$ (참)

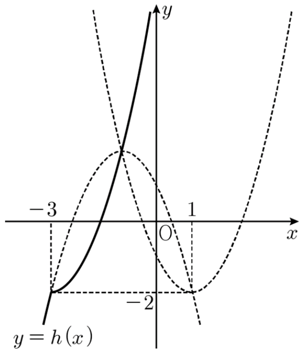
ㄷ. 함수 $h(x)$가 일대일함수이려면
$x<a$에서 $h(x)=f(x)$이므로
$a\le-1$ $\cdots$ ㉠
$x\ge a$에서 $h(x)=g(x+b)$이므로
$a+b\ge1$ $\cdots$ ㉡
이어야 하고
㉠, ㉡을 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여

$$\{h(x)\,|\,x<a\}=\{f(x)\,|\,x<a\}=\{y\,|\,y<f(a)\}$$

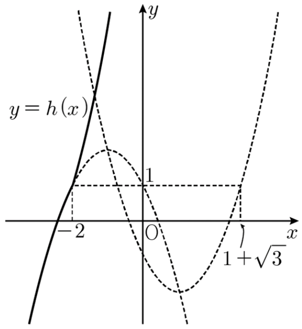
$$\{h(x)\,|\,x\ge a\}=\{g(x+b)\,|\,x\ge a\}=\{y\,|\,y\ge g(a+b)\}$$

따라서 $f(a)\le g(a+b)$이어야 한다.
일대일함수 $h(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는
치역과 공역이 같아야 하므로
$f(a)=g(a+b)$ $\cdots$ ㉢
$g(x)=(x-1)^2-2\ge-2$이므로
$f(a)\ge-2$, $(a+3)(a-1)\le0$
$\therefore\ -3\le a\le1$ $\cdots$ ㉣
㉠, ㉣에 의하여 함수 $h(x)$가 일대일대응이 되도록
하는 실수 a의 범위는 $-3\le a\le-1$이고
$(m,\ b)\in A$를 만족시키는 실수 b가 존재하도록 하는
정수 m의 값은 -3, -2, -1이다.
(i) $m=-3$일 때
㉡에 의하여 $-3+b\ge1$, $b\ge4$

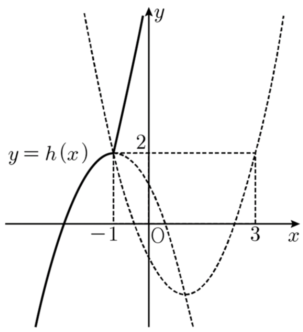
ⓒ에 의하여 $f(-3)=g(-3+b)$
$-2=(-3+b)^2-2(-3+b)-1$
$b^2-8b+16=0$
따라서 $b=4$이므로 $m+b=1$



(ii) $m=-2$일 때
ⓛ에 의하여 $-2+b\geq 1$, $b\geq 3$
ⓒ에 의하여 $f(-2)=g(-2+b)$
$1=(-2+b)^2-2(-2+b)-1$
$b^2-6b+6=0$
따라서 $b=3+\sqrt{3}$ 이므로 $m+b=1+\sqrt{3}$



(iii) $m=-1$일 때
ⓛ에 의하여 $-1+b\geq 1$, $b\geq 2$
ⓒ에 의하여 $f(-1)=g(-1+b)$
$2=(-1+b)^2-2(-1+b)-1$
$b^2-4b=0$
따라서 $b=4$이므로 $m+b=3$



(i), (ii), (iii)에 의하여
$\{m+b\,|\,(m, b)\in A$이고 m은 정수$\}$
$=\{1, 1+\sqrt{3}, 3\}$

따라서 모든 원소의 합은
$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

11 정답 50

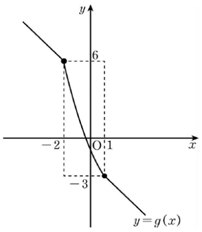
해설 합성함수와 역함수를 이용하여 추론하기
함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
조건 (가)에서 $x=1, 2, 6$일 때
$f(f(x))+f^{-1}(x)=2x$이므로
(i) $x=1$일 때,
$f(f(1))+f^{-1}(1)=2$이고
$f(f(1))\in X$, $f^{-1}(1)\in X$이므로
$f(f(1))=f^{-1}(1)=1$
$\therefore f(1)=1$
(ii) $x=2$일 때,
$f(f(2))+f^{-1}(2)=4$이고
$f(f(2))\in X$, $f^{-1}(2)\in X$이므로
$f(f(2))=1$이면 $f(2)=1$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.
$f^{-1}(2)=1$이면 $f(1)=2$이므로
$f(1)=1$에 모순이다.
따라서 $f(f(2))=f^{-1}(2)=2$
$\therefore f(2)=2$
(iii) $x=6$일 때,
$f(6)\neq 6$, $f(f(6))+f^{-1}(6)=12$이고
$f(f(6))\in X$, $f^{-1}(6)\in X$이므로
$f(f(6))=7$, $f^{-1}(6)=5$ 또는
$f(f(6))=5$, $f^{-1}(6)=7$
$f(f(6))=7$, $f^{-1}(6)=5$인 경우
$f(5)=6$이고 $f(3)+f(5)=10$이므로 $f(3)=4$
$f(6)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로
$a=6$ 또는 $a=7$
$f(6)\neq 6$이므로 $a\neq 6$
$a=7$이면 $f(6)=7$이고
$f(f(6))=7$에서 $f(7)=7$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.
$f(f(6))=5$, $f^{-1}(6)=7$인 경우
$f(7)=6$이고 $f(3)+f(5)=10$이므로
$f(3)=3$, $f(5)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(5)=3$
따라서 $f(6)=4$ 또는 $f(6)=5$
$f(6)=5$이면 $f(f(6))=5$에서
$f(f(6))=f(5)=5$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.
$f(6)=4$이면 $f(4)=5$이고
$f(f(6))=f(4)=5$이다.
이때 함수 f는 주어진 조건을 모두 만족한다.
따라서 $f(4)=5$, $f(6)=4$, $f(7)=6$이므로
$f(4)\times\{f(6)+f(7)\}=5\times(4+6)=50$

12 정답 ⑤

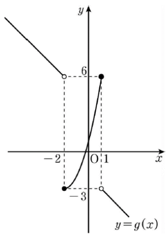
해설 ㄱ. 함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때,



(ⅱ) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때,



(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(-2)+f(1)=3$ (참)

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$에서 $f(x)=ax^2+bx-1$ (a는 양의 상수, b는 상수)로 놓을 수 있다.

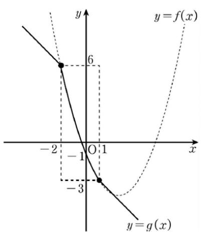
$g(1)=f(1)=-3$이면 $f(-2)=6$이어야 하므로

$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$

연립방정식 $\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a-2b=7 \end{cases}$을 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$이므로

곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)



ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로

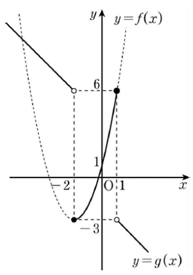
$f(x)=a(x+2)^2+p$ (a는 양의 상수, p는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 함수 $g(x)$가 일대일대응이므로

$f(-2)=-3$, $f(1)=6$

$p=-3$, $9a+p=6$에서 $a=1$이므로 $f(x)=(x+2)^2-3$

따라서 $g(0)=f(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 정답 ④

해설 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$이므로

$x^2+2x+a=x$

$x^2+x+a=0$ $\cdots$ ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$

$x^2+3x+a-2=0$ $\cdots$ ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(ⅰ) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서 $a<\frac{1}{4}$

$D_2<0$에서 $a>\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서 $a=\frac{1}{4}$

$D_2=0$에서 $a=\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1<0$에서 $a>\frac{1}{4}$

$D_2>0$에서 $a<\frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$

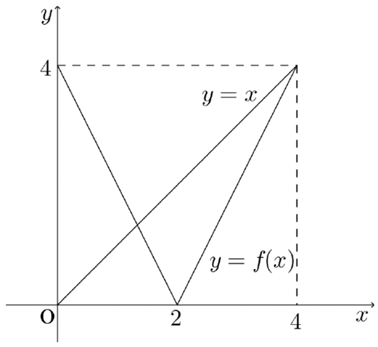
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 정수 a는 $1, 2, 3, 4$이므로 개수는 4

14 정답 ⑤

해설 함수의 합성을 이용하여 추론하기

ㄱ. $f(f(1))=f(2)=0$ (참)

ㄴ. 그림과 같이 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.
따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 치환하고
방정식 $f(t)=t$를 만족하는 해를 구해보면
$|2t-4|=t$에서 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$이다.

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}$ 또는 $f(x)=4$를 만족하는 x의 값을 구하면 된다.

(ⅰ) $f(x)=\frac{4}{3}$인 경우
$|2x-4|=\frac{4}{3}$에서 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{8}{3}$이다.

(ⅱ) $f(x)=4$인 경우
$|2x-4|=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 방정식 $f(f(x))=f(x)$의
모든 실근의 합은 $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+0+4=8$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 정답 17

해설 일대일 대응과 합성함수를 이해하여 함수를 추측한다.
조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일 대응이다.
집합 X의 임의의 원소 x에 대하여
$1 \le f(x) \le 7$
조건 (나)에서
$f(f(3))=f(3)-6 \ge 1$
즉 $f(3) \ge 7$이므로 $f(3)=7$
$f(f(3))=f(7)=7-6=1$
따라서
$f(3)=7,\ f(7)=1$ …… ㉠
$f(7)=1$이므로
$f(f(2))=f(2)-4 \ge 2$
즉 $f(2) \ge 6$이고 $f(3)=7$이므로
$f(2)=6$
$f(f(2))=f(6)=6-4=2$
따라서
$f(2)=6,\ f(6)=2$ …… ㉡
$f(7)=1,\ f(6)=2$이므로
$f(f(1))=f(1)-2 \ge 3$
즉 $f(1) \ge 5$이고 $f(2)=6,\ f(3)=7$이므로
$f(1)=5$
$f(f(1))=f(5)=5-2=3$
따라서
$f(1)=5,\ f(5)=3$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $f(4)=4$이다.
따라서
$f(2)+f(3)+f(4)=6+7+4=17$

[참고]
함수 f는 그림과 같다.