고1	공통수학2	선택형		서답형	
	집합의 개념과 표현~두 집합 사이의 포함관계 출처: 마플시너지(2025) 123~124, 126~137	26문항		8문항	

1. 두 집합 $A=\{x\,|\,x^2-2kx+5k+24=0,\ x\text{는 실수}\}$, $B=\{x\,|\,6x^2-11x-10=0\}$에 대하여 $n(A)+n(B)=2$를 만족시키는 정수 k의 개수를 구하시오.

2. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A가

'$x\in A$이면 $\dfrac{36}{x}\in A$' 를 만족한다. 집합 A의 원소의 개수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.
(단, $A\neq\varnothing$)

3. 두 집합 $A=\{-2,\ 4\}$, $B=\{-2,\ 2,\ a-1,\ 3a-2\}$에 대하여 $A\subset B$가 성립하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

4. 자연수 n에 대하여 자연수 전체의 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x\,|\,x\text{는 }\sqrt{n}\text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n\subset A_{49}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

5. 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 3,\ \{1,\ 3\}\}$에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\varnothing\in A$ ② $\varnothing\subset A$ ③ $1\in A$
④ $\{1,\ 3\}\in A$ ⑤ $\{1,\ 3\}\not\subset A$

6. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자. $2\notin X$, $5\in X$인 모든 X에 대하여 $S(X)$의 합은?

① 456 ② 466 ③ 476
④ 486 ⑤ 496

7. 집합 $A=\{x \mid x=5n-2,\ n$은 $0<n\le 8$인 정수$\}$의 부분집합 중 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하시오.

8. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최대의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $f(4)=8$
ㄴ. $a\in X,\ b\in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이다.
ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=682$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 집합 $A=\{x \mid x$는 100보다 작은 짝수$\}$의 부분집합 B가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 집합 B의 진부분집합의 개수는 31이다.
(나) 집합 B의 원소 중 가장 작은 원소는 12이다.

이때 집합 B의 원소의 개수를 p, 집합 B의 원소의 합을 q라 할 때, $\dfrac{q}{p}$의 최솟값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

10. 집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는?

(가) $n(X)\ge 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

11. 집합 $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A의 부분집합의 개수를 구하시오.

12. 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 반드시 포함하고 n을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16개일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

13. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_8이라 하고, A_1의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2의 원소의 총합을 $S(A_2)$, $\cdots$, A_8의 원소의 총합을 $S(A_8)$이라 할 때, $S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_8)$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

14. 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ x,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이라 하고, 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$의 모든 원소의 합을 s_k라 하자. $s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n=150$일 때, x의 값을 구하시오.

15. 집합 X의 모든 원소의 곱을 $f(X)$라 하자. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{63}이라 할 때, $f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{63})=2^k$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

16. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합은 21개이다. 이 집합을 $B_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 21)$라 하고 집합 B_k의 모든 원소의 합을 S_k라 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{21}$의 값은?

① 156 ② 160 ③ 164
④ 168 ⑤ 172

17. 집합 $S=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 A가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구하시오.

(가) $a\in A$이면 $(10-a)\in A$이다.
(나) 집합 A의 모든 원소의 합은 3의 배수이다.

18. 집합 $U=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{10}이라 하고, 집합 A_k의 원소의 합을 $a_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 104 ② 106 ③ 108
④ 110 ⑤ 112

19. 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{31}$이라 하고, 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 31)$의 원소 중에서 가장 작은 원소를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값은?

① 80 ② 81 ③ 82
④ 83 ⑤ 84

20. 집합 $A=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\frac{1}{2^8}\right\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n$이라 할 때, 각 부분집합의 최소 원소들의 합을 구하시오.

21. 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $f(6)=8$
ㄴ. $a\in X,\ b\in X$일 때, $a>b$이면 $f(a)<f(b)$이다.
ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=341$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 집합 $A=\left\{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}\right\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{31}$이라 하자. 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 31)$의 원소 중에서 최소인 것을 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값을 구하시오.

23. 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$의 부분집합 중에서 원소 1과 3은 반드시 포함하고 5와 $2m-1$은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32일 때 자연수 m의 값을 구하시오.

24. $M=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, $2^M=\{X\,|\,X\subset M\}$으로 정의한다. 이때 2^M의 부분집합의 개수를 구하시오.

25. 집합 $A=\{x\,|\,x$는 27의 약수$\}$일 때, 다음을 만족하는 집합 B의 개수를 구하시오.

$\{1\}\subset B\subset A,\ n(B)=3$

26. 두 집합 $A=\{x\,|\,x^2-12x+27=0\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{36}{n},\ x,\ n\text{은 자연수}\right\}$에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

[공통수학2 내신대비 기말고사 정답 및 해설]

1. [정답] 10

$6x^2-11x-10=0$에서 $(3x+2)(2x-5)=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ B=\left\{-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{2}\right\}$

즉, $n(B)=2$이므로 $n(A)+n(B)=2$에서 $n(A)=0$

따라서 이차방정식 $x^2-2kx+5k+24=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(5k+24)<0$

$k^2-5k-24<0$, $(k+3)(k-8)<0$

$\therefore\ -3<k<8$

따라서 구하는 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 7$의 10개다.

2. [정답] 10

집합 A의 원소는 자연수이고, $x\in A$이면 $\dfrac{36}{x}\in A$이므로 x가 될 수 있는 수는 36의 양의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다. 이때 1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 둘 중 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다. 또한, 6도 집합 A의 원소가 될 수 있으므로 집합 A의 원소의 개수는 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$일 때 최대이고, $A=\{6\}$일 때 최소이다.

따라서 $M=9$, $m=1$이므로

$M+m=9+1=10$

3. [정답] ③

$A\subset B$가 성립하려면 $4\in B$이어야 하므로

$a-1=4$ 또는 $3a-2=4$

$\therefore\ a=5$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 a의 값의 합은

$5+2=7$

4. [정답] 80

$\sqrt{49}=7$이므로 $A_{49}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$\sqrt{81}=9$이므로 $A_{81}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

따라서 $1\le\sqrt{n}<9$이면 $A_n\subset A_{49}$이므로

$1\le n<81$

따라서 자연수 n의 최댓값은 80이다.

5. [정답] ⑤

$\{1,\ 3\}$은 부분집합도 되고 원소도 된다.

6. [정답] ⑤

$2\not\in X$, $5\not\in X$인 집합 X의 개수는

$2^{7-1-1}=2^5=32$

한편, 32개의 집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1\in X$, $2\not\in X$, $5\in X$인 집합의 개수와 같으므로

$2^{7-1-2}=2^4=16$

마찬가지로 3, 4, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로 $S(X)$의 합은

$32\cdot5+16(1+3+4+6+7)=496$

7. [정답] 224

$A=\{x\mid x=5n-2,\ n$은 $0<n\le8$인 정수$\}$에서

$A=\{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \cdots,\ 28,\ 33,\ 38\}$

집합 A의 원소 중 3의 배수는 3, 18, 33이므로 집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 3, 18, 33을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

$\therefore\ 2^8-2^{8-3}=2^8-2^5=256-32=224$

8. [정답] ⑤

ㄱ. $f(4)$는 4를 최대의 원소로 갖는 보든 집합의 개수이므로 집합 X에서 4는 포함하고 5 이상은 포함하지 않는 부분집합의 개수와 같다. 따라서 부분집합의 개수는 $f(4)=2^{10-1-6}=8$ (참)

ㄴ. $f(a)=2^{a-1}$, $f(b)=2^{b-1}$이고 $a<b$이므로 $f(a)<f(b)$ (참)

ㄷ. $f(2)=2$, $f(4)=8$, $f(6)=32$, $f(8)=128$, $f(10)=512$이므로 $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=682$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9. [정답] ①

조건 (가)에서 $n(B)=p$라 하면

집합 B의 진부분집합의 개수는 $2^p-1=31$

$\therefore\ p=5$

이때 $\dfrac{q}{p}$가 최솟값을 가지려면 q가 최소이어야 한다.

조건 (나)에서 집합 B의 원소 중 가장 작은 원소는 12이므로 합이 가장 작은 집합 B는 $B=\{12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

즉, $q=12+14+16+18+20=80$

따라서 $\dfrac{q}{p}$의 최솟값은 $\dfrac{80}{5}=16$

10. [정답] ②

부분집합의 개수 추론하기

(ⅰ) $6\in X$인 경우 집합 X의 개수는 $2^4-1=15$

(ⅱ) $6\not\in X$인 경우 집합 X는 3, 4를 반드시 포함해야 하므로 집합 X의 개수는 $2^{4-2}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 19이다.

11. [정답] 48

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6-2^{6-2}=64-16=48$이다.

12. [정답] 7

$2^{(1,\ 2,\ n\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-3} = 16 = n^4$

$\therefore\ n = 7$

13. [정답] ③

집합 A의 부분집합을 모두 구해보면 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.

이때 1을 반드시 포함하는 집합은 4개, 2를 반드시 포함하는 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 집합은 4개이므로 원소의 총합은 $4(1+2+3) = 24$

14. [정답] 8

집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ x,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합은

$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ x\}$, $\{1,\ 7\}$, $\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ x\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{2,\ 9\}$, $\{3,\ x\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{3,\ 9\}$, $\{x,\ 7\}$, $\{x,\ 9\}$, $\{7,\ 9\}$로 15개다.

$\therefore\ n = 15$

집합 U의 부분집합 중 1을 포함하고 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 5이다.

마찬가지로 2, 3, x, 7, 9를 각각 포함하는 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수도 5이므로

$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = 5 \cdot (1+2+3+x+7+9)$

$5(x+22) = 150$

$\therefore\ x = 8$

15. [정답] 480

집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-1} = 2^5 = 32$

마찬가지로 2, 4, 8, 16, 32를 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 32이므로

$f(A_1) \times f(A_2) \times f(A_3) \times \cdots \times f(A_{63})$

$= 1^{32} \times 2^{32} \times 4^{32} \times 8^{32} \times 16^{32} \times 32^{32}$

$= 2^{32} \times (2^2)^{32} \times (2^3)^{32} \times (2^4)^{32} \times (2^5)^{32}$

$= 2^{32} \times 2^{64} \times 2^{96} \times 2^{128} \times 2^{160}$

$= 2^{32+64+96+128+160}$

$= 2^{480}$

$\therefore\ k = 480$

16. [정답] ④

집합 B_k 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 6\}$, $\{1,\ 7\}$의 6개이다.

마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 6이므로

$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{21}$

$= 6(1+2+3+4+5+6+7)$

$= 168$

17. [정답] 45

조건 (가)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

또, $A = \{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

집합 A는 집합 $\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{5\}$ 중에서 일부 또는 전체를 부분집합으로 갖는다.

네 집합 $\{1,\ 9\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{4,\ 6\}$은 모든 원소의 합이 각각 10이므로 원소의 합이 3의 배수가 될 수 있는 경우는 15, 30, 45이다.

위의 조건을 만족시키면서 집합 A의 모든 원소의 곱이 최소가 되는 경우는 $\{1,\ 9\} \subset A$, $\{5\} \subset A$이다.

즉, $A = \{1,\ 5,\ 9\}$일 때 모든 원소의 곱의 최솟값 45를 갖는다.

18. [정답] ⑤

집합 U의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 2를 원소로 갖는 부분집합은 $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{2,\ 11\}$의 4개이다.

즉, A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{10} 중에서 2를 원소로 갖는 집합은 위의 4개이다.

마찬가지로 3, 5, 7, 11을 원소로 갖는 집합도 각각 4개씩 있다.

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 4(2+3+5+7+11) = 112$

19. [정답] ④

(i) $a_k = 1$일 때,

1을 반드시 포함하는 경우이므로 $2^{5-1} = 16$

(ii) $a_k = 3$일 때,

1은 포함하지 않고, 3은 반드시 포함하는 경우이므로

$2^{5-2} = 8$

(iii) $a_k = 5$일 때,

1, 3은 포함하지 않고, 5는 반드시 포함하는 경우이므로

$2^{5-3} = 4$

(iv) $a_k = 7$일 때,

1, 3, 5는 포함하지 않고, 7은 반드시 포함하는 경우이므로

$2^{5-4} = 2$

(v) $a_k = 9$일 때,

9만 포함하는 경우이므로 1

(i)~(v)에 의하여

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{31}$

$= 1 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1$

$= 83$

20. [정답] 4

집합 $A = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^8}\right\}$의 부분집합 중에서

(i) 최소 원소가 $\frac{1}{2^8}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^8}$을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{8-1} = 2^7$

(ii) 최소 원소가 $\frac{1}{2^7}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^7}$은 반드시 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-1}=2^6$

(iii) 최소 원소가 $\frac{1}{2^6}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^6}$은 반드시 포함하고, 두 원소 $\frac{1}{2^8}$, $\frac{1}{2^7}$은 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-2}=2^5$

⋮

따라서 각 부분집합의 최소 원소들의 합은

$\frac{1}{2^8}\cdot 2^7+\frac{1}{2^7}\cdot 2^6+\frac{1}{2^6}\cdot 2^5+\cdots+\frac{1}{2}\cdot 1$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

21. [정답] ③

집합 X의 부분집합이 n을 최소의 원소로 가지려면 n은 원소로 갖고, n보다 작은 1, 2, $\cdots$, $n-1$은 원소로 갖지 않아야 하므로

$f(n)=2^{10-(n-1)-1}=2^{10-n}$

ㄱ. $f(6)=2^{10-6}=2^4=16$ (거짓)

ㄴ. $f(a)=2^{10-a}$, $f(b)=2^{10-b}$

$a>b$이면 $10-a<10-b$이므로

$2^{10-a}<2^{10-b}$

$\therefore\ f(a)<f(b)$ (참)

ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$

$=2^{10-2}+2^{10-4}+2^{10-6}+2^{10-8}+2^{10-10}$

$=2^8+2^6+2^4+2^2+2^0$

$=256+64+16+4+1$

$=341$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22. [정답] 20

(ⅰ) $a_k=4$일 때

집합 A_k는 $\{4\}$로 1개뿐이다.

따라서 $a_k=4$인 k의 개수는 1이다.

(ⅱ) $a_k=2$일 때

집합 A_k는 2는 포함하고 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^1

(ⅲ) $a_k=1$일 때

집합 A_k는 1은 포함하고 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4,\ 2\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^2

(ⅳ) $a_k=\frac{1}{2}$일 때

집합 A_k는 $\frac{1}{2}$은 포함하고 $\frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4,\ 2,\ 1\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^3

(ⅴ) $a_k=\frac{1}{2^2}$일 때

집합 A_k는 $\frac{1}{2^2}$을 포함하는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\left\{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2}\right\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^4

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$

$=(4\cdot 1)+(2\cdot 2)+(1\cdot 2^2)+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^3\right)+\left(\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\right)$

$=20$

23. [정답] 9

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}\Rightarrow n(A)=m$(개) 원소 1과 3은 반드시 포함하고 5와 $2m-1$은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32개이므로 $2^{m-2-2}=32$, $m-4=5$

$m=9$

24. [정답] 256

$2^M=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$

$n(2^M)=8$이므로 2^m의 부분집합의 개수는 $2^8=256$

[다른 풀이]

2^M의 부분집합의 개수를 구하는 것이므로 2^M의 원소의 개수만 알면 된다.

M의 부분집합의 개수가 2^M의 원소의 개수이다.

2^M의 원소의 개수는 $2^3=8$이므로 2^M의 부분집합의 개수는

$2^8=256$

25. [정답] 3

$A=\{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$

집합 B는 원소 1을 포함한 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합이므로 $\{1,\ 3,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 27\}$, $\{1,\ 9,\ 27\}$의 3개이다.

26. [정답] 128

$x^2-12x+27=0$에서 $(x-3)(x-9)=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=9$이므로

$A=\{3,\ 9\}$

$x=\frac{36}{n}$(n은 자연수)을 만족시키는 자연수 x는 36의 양의 약수이므로 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

$\therefore\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

따라서 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{9-2}=2^7=128$

고1	공통수학2 기말고사 대비	선택형		서답형	
	집합의 연산 144~172p 출처: 마플시너지(2025)	14문항		10문항	

1. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, $n(A\cap B)=5$, $\{1,\ 7\}\subset B$를 만족시키는 집합 B의 개수를 구하시오.

2. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

(가) $A=\{3,\ 4,\ 5\}$
(나) $X\subset U$이고 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 1이다.

3. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 X, Y에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 a, 집합 Y의 개수를 b라 하자. 이때 ab의 값을 구하시오.

(가) $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
(나) $\{4,\ 6,\ 8\}\cup Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

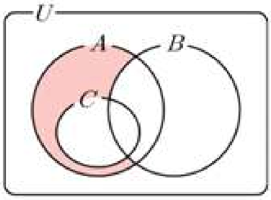
4. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$\{(A-B)\cup(B\cap A)\}\cap[(A\cup B)^C\cup(A^C\cup B)^C]=\varnothing$$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A-B=\varnothing$ ② $A^C\cup B=U$ ③ $B^C\subset A^C$
④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A\cup B=B$

5. 전체집합 U의 세부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 아래 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은? (단, $C\subset A$)



① $(A-B)\cap(B-C)$
② $A\cap B\cap C^C$
③ $(A-B)\cap(A-C)$
④ $A\cap(B\cup C)$
⑤ $(A-C)\cap(B-C)$

6. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\circ$를 $A\circ B=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >
ㄱ. $B\circ\varnothing=B^C$
ㄴ. $(B\circ B)\circ B=B$
ㄷ. $(A\circ B)\cap C=(A\cap C)\circ(B\cap C)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 전체집합 U의 두 부분집합 X, Y에 대하여 연산 $*$을 $X*Y=(X^C\cap Y)\cup(X\cap Y^C)$으로 약속할 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $Z\subset U$)

< 보기 >

ㄱ. $X*Y=Y*X$
ㄴ. $(X*Y)*Z^C=X*(Y*Z^C)$
ㄷ. $X^C*Y=(X*Y)^C$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ. ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 정수를 원소로 하는 두 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a+k,\ b+k,\ c+k,\ d+k\}$에 대하여, $A\cap B=\{2,\ 5\}$이고 A에 속하는 모든 원소의 합이 10, $A\cup B$에 속하는 모든 원소의 합이 21일 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $(B-A)\cup(B-C)=\varnothing$일 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $B\subset(A\cup C)$
ㄴ. $A^C-C\subset B^C$
ㄷ. 전체집합의 임의의 부분집합 X에 대하여 $\{(B-X^C)\cup(B-A^C)\}\subset C$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. x에 대한 일차부등식 $=x+a-2>0$이 모든 양수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 a의 집합을 A라 하자. 또, x에 대한 이차부등식 $x^2+2ax+3a>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 a의 집합을 B라 하자. 이때 집합 $A\cap B$는?

① $\{a\,|\,0\le a\le 3\}$ ② $\{a\,|\,0\le a\le 2\}$
③ $\{a\,|\,2\le a\le 3\}$ ④ $\{a\,|\,2\le a<3\}$
⑤ $\{a\,|\,2<a<3\}$

11. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=9$, $n(B)=12$, $n(A\cap B)\ge 4$일 때, $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

12. 수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

13. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$A-B=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$,

$(A\cup B)\cap A^C=\{x\,|\,x$는 5 이상의 소수$\}$

가 성립한다. 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 집합 B의 원소의
합은?

① 71 ② 75 ③ 79
④ 83 ⑤ 87

14. 집합 $A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2-4x+6y-12=0\}$

$B=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2+2x-4y-4=0\}$,

$C=\{(x,\ y)\,|\,ax+by+4=0\}$

에 대하여 $(A\cap B)\subset C$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15. 두 자연수 k, $m(k\ge m)$대하여

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 k 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x\,|\,x$는 m의 약수$\}$, B가 다음 조건을 만족시킨다.

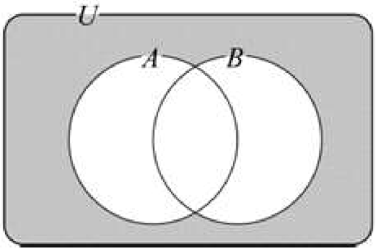
(가) $B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$, $n(A\cup B^C)=9$
(나) 집합의 A든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은?

① 46 ② 47 ③ 48
④ 49 ⑤ 50

16. 자연수 전체의 집합에서 자연수 k의 배수의 집합을 N_k라 하자. $(N_8\cup N_{12})\subset N_k$를 만족하는 k의 최댓값을 a, $(N_3\cap N_4)\supset N_k$를 만족하는 k의 최솟값을 b라 할 때, a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

17. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U)=80$, $n(A)=45$, $n(B-A)=25$일 때, 벤 다이어그램의 어두운 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)



18. 학생 수가 40명인 어느 학급에서 설악산에 가 본 학생은 25명이고 지리산에 가 본 학생은 18명이었다. 설악산과 지리산에 모두가 본 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

19. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

(가) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A^C \cup B^C=\{3,\ 5,\ 7\}$
(나) $X\subset U$이고 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 1이다.

20. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 5 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

21. 정수 전체의 집합의 두 부분집합 $A=\{x\,|\,0\le x\le 5\}$, $B=\{x\,|\,4<x<9\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 양수 k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

집합 $X=\{x\,|\,0\le x\le k\}$에 대하여 $A\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$이다.

22. 두 집합
$A=\{x\,|\,x$는 80 이하의 자연수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 40과 서로소인 자연수$\}$
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

(가) $X\subset A$, $X\neq\varnothing$
(나) $X\cap B=\varnothing$
(다) 집합 X의 모든 원소는 24와 서로소이다.

23. 세 집합 A, B, C에 대하여 $n(A)=16$, $n(B)=20$, $n(C)=23$, $n(A\cap B)=9$, $n(A\cap B\cap C)=2$일 때, $n(C-(A\cup B))$의 최솟값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

24. 자연수를 원소로 하는 두 집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$, $B=\{a_k+b\,|\,a_k\in A\}$가 있다. $A\cap B=\{4,\ 7,\ 9\}$이고, 집합 A의 원소의 합이 32, $A\cup B$의 원소의 합이 62일 때, 집합 B의 원소 중 가장 큰 수와 작은 수의 차를 구하시오.

[공통수학2 집합의 연산 정답 및 해설]

1. [정답] 40

$n(A\cap B)=5$, $\{1,\ 7\}\subset B$를 만족하는 집합 B는 모두 10가지가 있다.

즉, $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ 또는 $\cdots$ 또는 $\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

(i) $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}$일 때,
  $5,\ 6\not\in B$이어야 하므로 집합 B는 1, 2, 3, 4, 7을 원소로 갖고, 5, 6은 원소로 갖지 않아야 한다.
  즉, 집합 B의 개수는 $2^{9-5-2}=4$

(ii) $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$일 때,
  $4,\ 6\not\in B$이어야 하므로 집합 B는 1, 2, 3, 5, 7을 원소로 갖고, 4, 6은 원소로 갖지 않아야 한다.
  즉, 집합 B의 개수는 $2^{9-5-2}=4$
  ⋮

(iii) $A\cap B=\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때,
  $2,\ 3\not\in B$이어야 하므로 집합 B는 1, 4, 5, 6, 7을 원소로 갖고, 2, 3은 원소로 갖지 않아야 한다.
  즉, 집합 B의 개수는 $2^{9-5-2}=4$

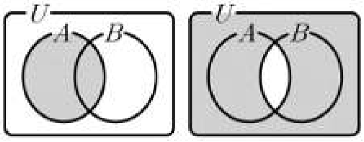
따라서 집합 B의 개수는 각각의 경우 4가지씩 나오므로
$10\cdot 4=40$

2. [정답] 11

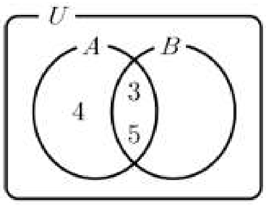
집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 구하는 문제를 해결한다.

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4\}$

두 집합 A, $(A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



두 집합 A, $(A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이고,
두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로
$A-B=\{4\}$
또한, $A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$,
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서



$4\not\in B$이고, $3\in B$, $5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(A\cup X)-B&=(A\cup X)\cap B^C\\&=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)\\&=(A-B)\cup(X-B)\\&=\{4\}\cup(X-B)\end{aligned}$$

이때 $4\in(A-B)$이므로 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면 집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$가 되어야 한다.

(i) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{5\}$일 때,
  집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로 1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

(ii) $X=\{4\}$일 때,
  $X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4\}\cup(X-B)$는 집합 $\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)이 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.
따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$

3. [정답] 512

조건 (가)에서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고, 2, 7은 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는$2^{10-2-2}=2^6=64$
조건 (나)에서 집합 Y는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 7, 9를 반드시 원소로 갖고, 1, 3, 5, 10은 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 Y의 개수는$2^{10-3-4}=2^3=8$
즉, $a=64$, $b=8$이므로$ab=512$

4. [정답] ④

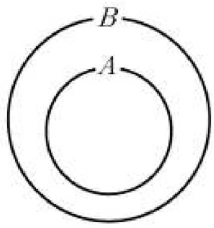
$(A-B)\cup(B\cap A)=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$
분배법칙을 이용하여 묶어내면

$$\begin{aligned}(A\cap B^C)\cup(A\cap B)&=A\cap(B^C\cup B)\\&=A\cap U=A\end{aligned}$$

$(A\cup B)^C\cup(A^C\cup B)^C=(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B^C)$
분배법칙을 이용하여 묶어내면

$$\begin{aligned}(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B^C)&=(A^C\cup A)\cap B^C\\&=U\cap B^C=B^C\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 좌변은
(좌변)$=A\cap B^C=A-B$



① $A-B=\varnothing$이다.
② $A\cap B^C=\varnothing$이므로 $(A\cap B^C)^C=\varnothing^C$ $\therefore$ $A^C\cup B=U$
③ $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$
④ $A\subset B$이므로 $A\cap B=A$
⑤ $A\subset B$이므로 $A\cup B=B$

5. [정답] ③

색칠한 부분은 A에서 $B\cup C$를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}A-(B\cup C)&=A\cap(B\cup C)^C\\&=A\cap(B^C\cup C^C)\\&=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)\end{aligned}$$

$= (A-B) \cap (A-C)$

6. [정답] ④

ㄱ. $B \circ \varnothing = (B \cap \varnothing^C) \cup (B^C \cap \varnothing)$

$= (B \cap U) \cup \varnothing$

$= B \cup \varnothing$

$= B$ (거짓)

ㄴ. $B \circ B = (B \cap B^C) \cup (B^C \cap B)$

$= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$이므로

$(B \circ B) \circ B = \varnothing \circ B$

$= (\varnothing \cap B^C) \cup (\varnothing \cap B)$

$= \varnothing \cup (U \cap B)$

$= \varnothing \cup B$

$= B$ (참)

ㄷ. $(A \circ B) \cap C = \{(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\} \cap C$

$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)$

$(A \cap C) \circ (B \cap C)$

$= \{(A \cap C) \cap (B \cap C)^C\} \cup \{(A \cap C)^C \cap (B \cap C)\}$

$= \{(A \cap C) \cap (B^C \cup C^C)\} \cup \{(A^C \cup C^C) \cap (B \cap C)\}$

$= \{(A \cap C \cap B^C) \cup (A \cap C \cap C^C)\}$

$\cup \{(A^C \cap B \cap C) \cup (C^C \cap B \cap C)\}$

$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)$

$\therefore\ (A \circ B) \cap C = (A \cap C) \circ (B \cap C)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

7. [정답] ⑤

$X * Y = (X^C \cap Y) \cup (X \cap Y^C)$

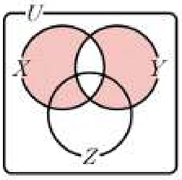
$= (Y-X) \cup (X-Y)$

ㄱ. $X * Y = (Y-X) \cup (X-Y)$

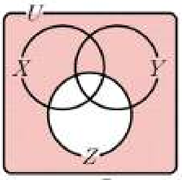
$= (X-Y) \cup (Y-X)$

$= Y * X$

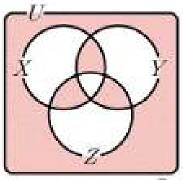
ㄴ. $(X * Y) * Z^C$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$X * Y$

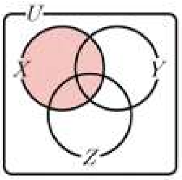


Z^C

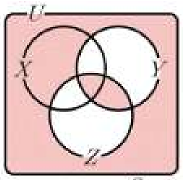


$(X * Y) * Z^C$

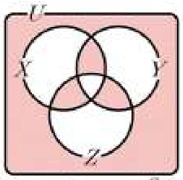
$X * (Y * Z^C)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



X



$Y * Z^C$



$X * (Y * Z^C)$

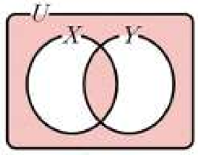
$\therefore\ (X * Y) * Z^C = X * (Y * Z^C)$

ㄷ. $X^C * Y = (X \cap Y) \cup (X^C \cap Y^C)$

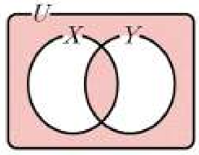
$= (X \cap Y) \cup (X \cup Y)^C$

$(X * Y)^C = \{(Y-X) \cup (X-Y)\}^C$

$X^C * Y$과 $(X * Y)^C$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$X^C * Y$



$(X * Y)^C$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. [정답] ②

A에 속하는 원소들의 합을 $S(A)$라고 하면,

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$

$21 = 10 + S(B) - 7$

$\therefore\ S(B) = 18 = a+b+c+d+4k = 10+4k$

$\therefore\ 4k = 8$

$\therefore\ k = 2$

9. [정답] ⑤

$(B-A) \cup (B-C) = \varnothing$에서

$B-A = \varnothing, B-C = \varnothing$

$\therefore\ B \subset A,\ B \subset C$

ㄱ. $B \subset A,\ B \subset C$이므로 $B \subset (A \cup C)$ (참)

ㄴ. $B \subset (A \cup C)$에서 $(A \cup C)^C \subset B^C$

이때 $(A \cup C)^C = A^C \cap C^C = A^C - C$이므로

$A^C - C \subset B^C$ (참)

ㄷ. $(B - X^C) \cup (B - A^C) = (B \cap X) \cup (B \cap A)$

$= B \cap (X \cup A)$

이때 $\{B \cap (X \cup A)\} \subset B$이고 $B \subset C$이므로

$\{(B - X^C) \cup (B - A^C)\} \subset C$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10. [정답] ④

$x + a - 2 > 0$에서 $x > -a + 2$

모든 양수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하려면

$-a + 2 \leq 0$

$\therefore\ A = \{a \mid a \geq 2\}$ …… ㉠

또, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2 + 2ax + 3a > 0$이 성립하려면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3a < 0$

$\therefore\ B = \{a \mid 0 < a < 3\}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A \cap B = \{a \mid 2 \leq a < 3\}$

11. [정답] ⑤

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

$n(A \cap B)$가 최소일 때 $n(A \cup B)$가 최대.

$n(A \cap B)$가 최대일 때 $n(A \cup B)$가 최소이다.

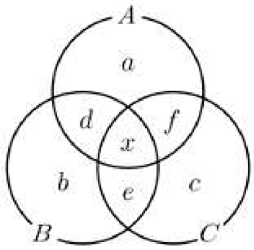
(i) $n(A \cup B)$가 최댓값을 가지려면 $n(A \cap B) \geq 4$에서

$n(A \cap B) = 4$이어야 하므로

$n(A \cup B) = 9 + 12 - 4 = 17$

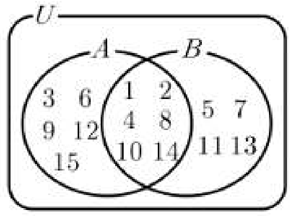
(ⅱ) $n(A\cup B)$가 최솟값을 가지려면 $A\subset B$일 때
$n(A\cap B)=n(A)=9$이어야 하므로
$n(A\cup B)=9+12-9=12$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 최댓값과 최솟값의 합은 $17+12=29$

12. [정답] ②
집합의 연산을 이용하여 외적문제 해결하기
자격증 A를 취득한 수강생의 집합을 A, 자격증 B를 취득한 수강생의 집합을 B. 자격증 C를 취득한 수강생의 집합을 C라 하자.
각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같다.



수강생 수는 총 35명이고 세 자격증 A, B, C 중에서 어느 것도 취득하지 못한 수강생이 3명이므로
$n(A\cup B\cup C)=35-3=32$이다.
이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없으므로 $x=0$이다.
자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이므로
$a+d+f=21$ …… ㉠
$b+d+e=18$ …… ㉡
$c+e+f=15$ …… ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$a+b+c+2(d+e+f)=54$ …… ㉣
이고
$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f+x=32$ …… ㉤
이다.
㉣−㉤를 하면 $d+e+f=22$이다.
따라서 세 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만을 취득한 수강생 수는 22명이다.

13. [정답] ②
$A-B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$이고
$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$
$=\varnothing\cup(B-A)$
$=B-A$
$=\{5,\ 7,\ 11,\ 13\}$
따라서 다음 벤 다이어그램과 같이 집합 $A\cap B$에 여섯 원소 1, 2, 4, 8, 10, 14가 모두 속할 때 집합 A의 원소의 개수가 최대이다.



따라서 구하는 집합 B는
$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$이므로
원소의 합은
$1+2+4+5+7+8+10+11+13+14=75$

14. [정답] ①
두 원
$x^2+y^2-4x+6y-12=0$ …… ㉠
$x^2+y^2+2x-4y-4=0$ …… ㉡
에 대하여 집합 A는 원㉠ 위의 점을 원소로 갖고, 집합 B는 원㉡ 위의 점을 원소로 갖는다.
그러므로 $(A\cap B)\subset C$를 만족시키려면
직선 $ax+by+4=0$이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 모두 지나야 한다.
두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4x+6y-12-(x^2+y^2+2x-4y-4)=0$
$-6x+10y-8=0$에서 $3x-5y+4=0$
$a=3,\ b=-5$이므로 $a+b=-2$

15. [정답] ①
드모르간의 법칙에 의하여
$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이므로
조건 (가)에서
$n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)=9$
$B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$에서 $n(B-A)=3$
$(B-A)\cup(B-A)^C=U$,
$(B-A)\cap(B-A)^C=\varnothing$이므로
$n(U)=n(B-A)+n((B-A)^C)$
$=n(B-A)+n(A\cup B^C)$
$=3+9=12$
따라서 $k=12$이고
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$
조건(가)에서 $B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A=\{3,\ 5,\ 6\}$의 모든 원소의 합인 14이다.
따라서 m은 3과 5, 6 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 14 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 8뿐이다.
$m=8$이므로 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이다.
이때 $A-B=\{2,\ 4,\ 8\}$이면 집합 $A-B$의 원소의 합이 14이므로 조건을 만족시킨다.
이때 $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$이다.
$\therefore\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}\cup\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$이므로

집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은 $7+9+10+11+12=49$

16. [정답] 16

$(N_8 \cup N_{12}) \subset N_k$에서 $N_8 \subset N_k$, $N_{12} \subset N_k$이므로

k는 8의 약수이고, 12의 약수이다.

따라서 k는 8과 12의 공약수이므로 이를 만족하는 k의 최댓값는 a는 8과 12의 최대공약수 4이다.

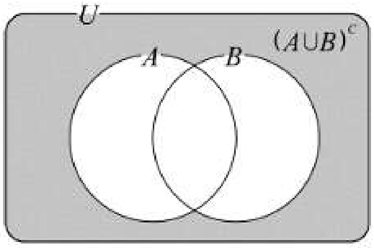
$\therefore\ a=4$

또한, $(N_3 \cap N_4) \supset N_k$를 만족하는 k의 최솟값 b는 3과 4의 최소공배수이므로 $b=12$

$\therefore\ a+b=4+12=16$

17. [정답] 10

벤 다이어그램으로 표현된 집합의 원소의 개수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.



어두운 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$이고

$n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$

$= n(U) - \{n(A) + n(B-A)\}$

$n(U)=80$, $n(A)=45$, $n(B-A)=25$에서 구하는 집합의 원소의 개수는 $80-(45+25)=10$개다.

18. [정답] 21

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, 설악산에 가본 학생의 집합을 A, 지리산에 가 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=5$, $n(B)=18$

설악산과 지리산에 모두가 본 학생의 집합은 $A \cap B$이다.

이때 $n(A \cap B)$가 최소가 되는 경우는

$A \cup B = U$일 때이므로

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

$40 = 25 + 18 - n(A \cap B)$

$\therefore\ n(A \cap B) = 3$

$\therefore\ m=3$

또한, $n(A \cap B)$의 최댓값은 $B \subset A$일 때이므로

$n(A \cap B) = n(B) = 18$

$\therefore\ M=18$

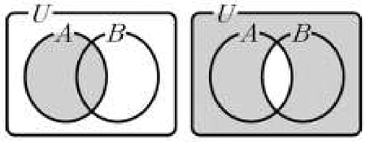
$\therefore\ M+m=18+3=21$

19. [정답] 19

$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$이므로

$(A \cap B)^C = \{3,\ 5,\ 7\}$

두 집합 A, $(A \cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.

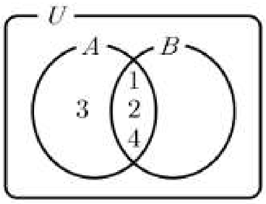


두 집합 A, $(A \cap B)^C$의 공통인 원소는 3이고, 두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로

$A-B=\{3\}$

또한, $A \cap B = A-(A-B) = \{1,\ 2,\ 4\}$,

$U = (A \cap B) \cup (A \cap B)^C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$에서 $3 \not\in B$이고, $1 \in B$, $2 \in B$, $4 \in B$이다.



조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여

$((A \cup X) - B = (A \cup X) \cap B^C$

$= (A \cap B^C) \cup (X \cap B^C)$

$= (A-B) \cup (X-B)$

$= \{3\} \cup (X-B)$

이때 $3 \in (A-B)$이므로 집합 $(A \cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면 집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{3\}$이 되어야 한다.

(ⅰ) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{4\}$, $X=\{5\}$, $X=\{7\}$일 때,
집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로 1, 2, 4, 5, 7 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

(ⅱ) $X=\{3\}$일 때,
$X-B=\{3\}$이므로 집합 $\{3\} \cup (X-B)$는 집합 $\{3\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

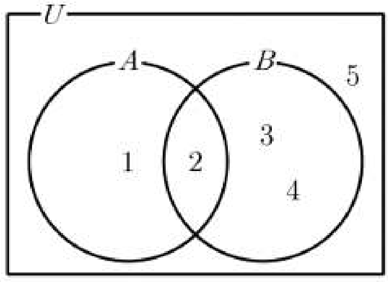
(ⅰ), (ⅱ)에서 $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$이다.

따라서 $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은 $1+2+4+5+7=19$

20. [정답] 22

집합의 연산을 이용하여 부분집합의 개수를 추론한다.

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$A \cap B = \{2\}$이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $2 \in X$인 경우
이때 $X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$을 만족시킨다. 그러므로 집합 X는 전체집합 U의 2가 아닌 원소인 1, 3, 4, 5의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다.
따라서 $2 \in X$인 경우 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$의

부분집합의 개수와 같으므로 $2^4=16$

(ⅱ) $2 \notin X$인 경우

2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고,

2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$을 만족시키려면 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다. 이때 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \notin X$인 경우와 $1 \in X$, $3 \notin X$, $4 \in X$인 경우와 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \in X$인 경우의 3가지 경우가 있다.

이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A \cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.

따라서 $2 \notin X$인 경우의 집합 X의 개수는 $3 \cdot 2=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $16+6=22$

21. [정답] 9

$A \cap X=X$에서 $X \subset A$이고 $(A-B) \cup X=X$에서

$(A-B) \subset X$이므로

$(A-B) \subset X \subset A$

$A-B=\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$이므로

$\{x \mid 0 \leq x \leq 4\} \subset X \subset \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$

$X=\{x \mid 0 \leq x \leq k\}$에서 $4 \leq k \leq 5$

따라서 양수 k의 최댓값은 5. 최솟값은 4이므로 그 합은

$5+4=9$

22. [정답] 31

조건(나)에서 $X \cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 40과 서로소가 아니고, $40=2^3 \cdot 5$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

조건(다)에서 $24=2^3 \cdot 3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 80 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수이다.

즉, 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는 5, 25, 35, 55, 65이다.

이때 조건 (가)에서 $X \neq \varnothing$이므로 집합 X는

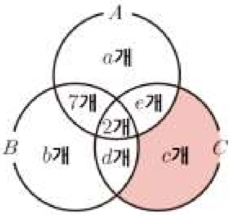
$\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65\}$의 집합이 아닌 부분집합이다.

즉, 집합 X의 개수는 $2^5-1=31$

23. [정답] 3

$n(A \cap B)=9$, $n(A \cap B \cap C)=2$에서

$n(A \cap B)-n(A \cap B \cap C)=7$



각 부분에 속하는 집합의 원소의 개수를 위의 그림과 같이 벤다이어그램에 나타내면

$n(C-(A \cup B))=c$

$n(C)=23$에서 $c+d+e+2=23$

$\therefore\ c=21-(d+e)$

즉, $d+e$가 최대일 때 c는 최소가 된다.

$n(A)=16$에서

$a+e+2+7=16\ \ \therefore\ e=7-a$

이때 $a \geq 0$이므로 $0 \leq e \leq 7$ …… ㉠

$n(B)=20$에서

$b+d+2+7=20,\ \therefore\ d=11-b$

이때 $b \geq 0$이므로 $0 \leq d \leq 11$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0 \leq d+e \leq 18$

$3 \leq 21-(d+e) \leq 21$

따라서 구하는 최솟값은 3이다.

24. [정답] 8

$A \cap B$의 원소의 합에서 집합 A의 원소의 합을 빼고, $A \cup B$의 원소의 합을 더해주면 집합 B의 원소의 합이 되므로, 집합 B의 원소의 합은 50이다.

집합 A의 원소의 합이 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=32$이고,

$B=\{a_1+b,\ a_2+b,\ a_3+b,\ a_4+b,\ a_5+b,\ a_6+b\}$

이므로 집합 B의 원소의 합은

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+6b=32+6b$

따라서 $32+6b=50$에서 $b=3$

또한, 교집합의 원소인 4, 7, 9는 집합 A와 B의 원소이므로 각각 3을 더한 7, 10, 12도 집합 B의 원소가 된다.

이때 집합 B의 원소의 합이 50이므로 4, 7, 9, 10, 12와 8이 집합 B의 원소가 된다.

$\therefore\ B=\{4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

1. 명제 '$2k-4 \le x \le 3k+6$인 어떤 실수에 대하여 $0 \le x \le 4$이다.'가 참이 되게 하는 정수의 개수를 구하시오.

2. $x>-1$일 때, $x+\dfrac{4}{x+1}$의 최솟값을 m, 그때의 x의 값을 n이라고 한다. 이때 $m+n$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

3. 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$이 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt{n^2+1}$이 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
> $p^2(n^2+1)=q^2$
> p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
> $n^2=\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 자연수 k에 대하여
> (ⅰ) $q=2k$일 때
> $(2k-1)^2<n^2<\boxed{\text{(나)}}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅱ) $q=2k+1$일 때
> $\boxed{\text{(나)}}<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
> $\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
> 따라서 $\sqrt{n^2+1}$은 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)+g(2)$의 값은?

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

4. 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은? (단, a, b는 실수)

① p : $a>2$ $\quad$ q : $a^2>4$
② p : a는 짝수 $\quad$ q : a는 4의 배수
③ p : $a>b$ $\quad$ q : $a^2+b^2=0$
④ p : $a>b$ $\quad$ q : $|a|>|b|$
⑤ p : $a=1$ $\quad$ q : $a-1=0$

5. 실수 x, y와 집합 A, B, C에 대하여 다음 보기 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. p : $x^2+y^2=0$	q : $x=0$, $y=0$
ㄴ. p : $x=y$	q : $x^2=y^2$
ㄷ. p : $A\cup B\cup C=C$	q : $A\cap B\cap C^C=\varnothing$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 $P=\{8\}$, $Q=\{3a^2-4,\ b\}$, $R=\{2a,\ ab\}$라 하자.
p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 p이기 위한 필요조건일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, a, b는 실수이다.)

① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

7. 명제 '어떤 실수x에 대하여 $-x^2-8x-a+2\geq 0$이다.' 의 부정이 참이 되도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하시오.

8. 세 양수 a, b, c에 대하여 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$의 최솟값을 구하시오.

9. 세 조건 p : $-2\leq x\leq 2$ 또는 $x\geq 5$, q : $x\geq a$, r : $x\geq b$에 대하여 두 명제 $r\to p$, $p\to q$가 모두 참이 되도록 하는 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하시오.
(단, a, b는 실수이다.)

10. 네 조건 p, q, r, s를 만족시키는 공집합이 아닌 집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

$$P\cap Q^C=P,\ P\cup R=P,\ (S\cap P^C)\cup(S\cup R^C)^C=\varnothing$$

이 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $q\to\ \sim r$
ㄴ. $p\to s$
ㄷ. $s\to\ \sim q$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는

p : $ab=0$
q : $a^2+b^2=0$
r : $a^2+2ab+b^2=0$
이다. 다음 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. p이고 r는 q이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는

p : $a^2+b^2=0$, q : $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$,
r : $|2a+b|=|2a-b|$이다. 다음 보기 중 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. p는 r이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. p는 q이고 r이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 세 집합 A, B, C에서 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 있는 대로 고른 것은?

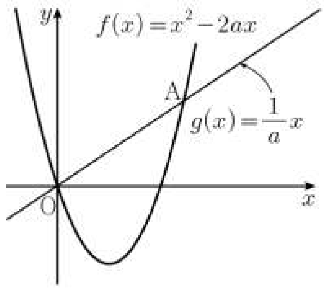
< 보기 >

ㄱ. p : $A=B$ q : $A\cap C=B\cap C$
ㄴ. p : $A=B$ q : $A\cap C^C=B\cap C^C$
ㄷ. p : $A=B$ q : $A^C\cap C=B^C\cap C$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 실수 x에 대하여 $x^2-x+\dfrac{9}{x^2-x+1}$의 최솟값을 a, 그때의 모든 x의 값의 합을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

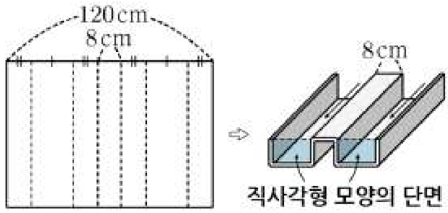
15. 다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다. (단, O는 원점이다.)



이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 B라 하고 선분 AB의 중점을 C라 하자. 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이의 최솟값은?

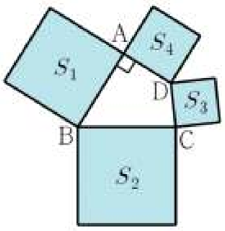
① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

16. 그림과 같이 폭이 120cm인 긴 양철판을 접어서 두 줄기로 물이 가득 차서 흘러가도록 하려고 한다.



물이 흘러가는 방향에 수직으로 자른 단면이 서로 합동이고 한 변이 없는 두 개의 직사각형 모양이 되도록 할 때, 두 직사각형의 넓이의 합의 최댓값을 $a\mathrm{cm}^2$라 하자. a의 값을 구하시오. (단, 양철판의 두께는 무시한다.)

17. 다음 그림과 같이 둘레의 길이가 20이고 $\angle A = 90^\circ$인 사각형 ABCD의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라고 하자. $S_1+S_2+S_3+S_4$의 값이 최소가 될 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

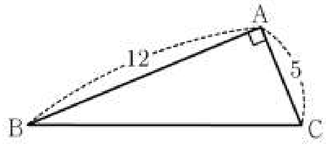


① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

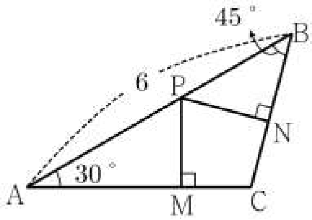
18. 원 $(x+3)^2+(y-4)^2=1$ 위의 점 P(a, b)에 대하여 $ab-4a+3b$의 최댓값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 11 ② $\frac{23}{2}$ ③ 12
④ $\frac{25}{2}$ ⑤ 13

19. $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=5$, $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 직사각형이 내접할 때, 직사각형의 두 변이 삼각형의 두 변 위에 존재하는 경우와 직사각형의 한 변만이 삼각형의 한 변 위에 존재하는 경우의 두 가지 경우가 있다. 내접하는 직사각형의 두 가지의 경우에서 넓이의 최댓값을 각각 M_1, M_2라 하고, 이때의 직사각형의 둘레의 길이를 각각 l_1, l_2라 할 때, $13(M_1+M_2+l_1+l_2)$의 값을 구하시오.



20. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=45^\circ$인 삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 P에서 두 직선 AC, BC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\frac{1}{\overline{PM}}+\frac{\sqrt{2}}{\overline{PN}}$의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[공통수학2 명제 정답 및 해설]

1. [정답] 7

조건 $2k-4 \le x \le 3k+6$의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x \mid 2k-4 \le x \le 3k+6\}$

조건 $0 \le x \le 4$의 진리집합을 Q라 하면

$Q=\{x \mid 0 \le x \le 4\}$

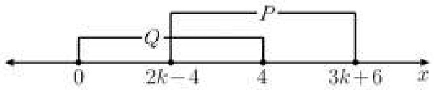
어떤 실수 x에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중에서 진리집합 Q에 속하는 원소가 적어도 하나 존재해야 한다. 즉, 주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 한다.

따라서 두 진리집합 P와 Q를 수직선 위에 나타내어 보면 다음의 2가지 경우 중 하나이다.

(ⅰ) $2k-4 \ge 0$인 경우

$2k-4 \le 4$

$\therefore\ k \le 4$

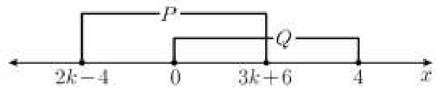


$\therefore\ 2 \le k \le 4$

(ⅱ) $2k-4 < 0$인 경우

$0 \le 3k+6$

$\therefore\ k \ge -2$



$\therefore\ -2 \le k < 2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-2 \le k \le 4$

따라서 주어진 명제를 참이 되게 하는 정수의 개수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

2. [정답] ③

$x>-1$에서 $x+1>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1$$
$$\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1$$
$$=2\cdot 2-1=3$$

이때 등호는 $x+1=\dfrac{4}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=4$

$x+1=2(\because\ x+1>0)$

$\therefore\ x=1$

따라서 $x+\dfrac{4}{x+1}$는 $x=1$일 때 최솟값 3을 가지므로

$m=3,\ n=1$

$\therefore\ m+n=3+1=4$

3. [정답] ②

$\sqrt{n^2+1}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$($p$, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+1)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이 되어야 한다.

따라서 $n^2=\boxed{q^2-1}$이다.

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-1=4k^2-1$이고

$(2k-1)^2<4k^2-1<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

그러나 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-1=4k^2+4k$이고

$(2k)^2<4k^2+4k<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

그러나 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sqrt{n^2+1}=\dfrac{q}{p}$($p$, q는 서로소인 자연수)

를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+1}$은 무리수이다.

$f(q)=q^2-1$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(4)+g(2)=16-1+16=31$

4. [정답] ①

① $a>2$이면 $a^2>4$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
$a^2>4$이면 $a>2$ 또는 $a<-2$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이 아니다.

② $a=2$이면 a는 짝수이지만 4의 배수가 아니므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

③ $a=0$, $b=1$이면 $ab=0$이지만 $a^2+b^2\neq 0$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

④ $a=1$, $b\equiv-1$이면 $a>b$이지만 $|a|=|b|=1$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

⑤ $a=1$이면 $a-1=0$이고, $a-1=0$이면 $a=1$이므로는 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ①이다.

5. [정답] ⑤

ㄱ. 실수 x, y에 대하여

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $p\Rightarrow q$

또한, $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이므로 $q\Rightarrow p$

즉, $p\Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기위한 필요충분조건이다. (거짓)

ㄴ. $x=y$이면 $x^2=y^2$이므로 $p\Rightarrow q$

그런데 $x^2=y^2$이면 $x=\pm y$이므로 역은 성립하지 않는다.

따라서는 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. (참)

ㄷ. $A\cup B\cup C=C \Leftrightarrow (A\cup B)\subset C$

$A\cap B\cap C^C=\varnothing$에서

$(A\cap B)-C=\varnothing \Leftrightarrow (A\cap B)\subset C$

이때 $(A\cap B)\subset(A\cup B)$이므로

$(A\cup B)\subset C$이면 $(A\cap B)\subset C$

하지만 역은 성립하지 않는다.

즉, $p\Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. (참)

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ,ㄷ이다.

6. [정답] ②

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$ …… ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$ …… ㉡

㉠에서 $3a^2-4=8$ 또는 $b=8$

(i) $3a^2-4=8$일 때, $a=-2$ 또는 $a=2$

㉡에서 $ab=8$이어야 한다.

즉, $a=-2$, $b=-4$ 또는 $a=2$, $b=4$

(ii) $b=8$일 때, ㉡에서 $2a=8$ 또는 $ab=8$이어야 한다.

즉, $a=4$, $b=8$ 또는 $a=1$, $b=8$

(i) (ii)에 의하여 $a+b$의 최솟값은 $(-2)+(-4)=-6$

7. [정답] 19

주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $-x^2-8x-a+2<0$이다.'가 참이 되어야 하므로 이차방정식 $-x^2-8x-a+2=0$ 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2+(-a+2)<0$

$\therefore\ a>18$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 19이다.

8. [정답] 6

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$

$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$

$=2+2+2=6$(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

9. [정답] 3

$r\to p$가 참이 되려면

$\{x\geq b\}\subset\{-2\leq x\leq 2$ 또는 $x\geq 5\}$

$\therefore\ b\geq 5$

$p\to q$가 참이 되려면

$\{-2\leq x\leq 2$ 또는 $x\geq 5\}\subset\{x\geq a\}$

$\therefore\ a\leq -2$

따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 5이므로 그 합은 3이다.

10. [정답] ④

$P\cap Q^C=P$에서 $P\subset Q^C$이므로 $p\Rightarrow\ \sim q$

$P\cup R=P$에서 $R\subset P$이므로 $r\Rightarrow p$

$\therefore\ r\Rightarrow p\Rightarrow\ \sim q$

또한, $(S\cap P^C)\cup(S\cup R^C)^C=\varnothing$에서

$S\cap P^C=\varnothing$이고 $(S\cup R^C)^C=\varnothing$

$S^C\cap R=\varnothing$이므로

$S-P=\varnothing$이고 $R-S=\varnothing$

즉, $S\subset P$, $R\subset S$이므로 $s\Rightarrow p$, $r\Rightarrow s$이므로

$\therefore\ r\Rightarrow s\Rightarrow p\Rightarrow\ \sim q$

ㄱ. $r\Rightarrow\ \sim q$이므로 명제 $q\to\ \sim r$는 참이다. (참)

ㄴ. $s\to p$는 참이지만 명제 $p\to s$가 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $r\Rightarrow s\Rightarrow p\Rightarrow\ \sim q$에서 명제 $s\to\ \sim q$는 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11. [정답] ⑤

조건 p : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

조건 q : $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$

조건 r : $a^2+2ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)^2=0 \Leftrightarrow a=-b$

ㄱ. p는 q이기 위한 필요조건 (참)

ㄴ. $\sim p$: $a\neq 0$ 이고 $b\neq 0$

$\sim q$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이므로

$\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건 (참)

ㄷ. p이고 r이면 $a=b=0$이므로

p이고 r는 q이기 위한 필요충분조건 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [정답] ⑤

p : $a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$

q : $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=0$에서

$(a-b)^3=0\ \therefore\ a=b$

r : $|2a+b|=|2a-b|$에서

$2a+b=2a-b$ 또는 $2a+b=-(2a-b)$

$\therefore\ a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p\Rightarrow r$, $r\not\Rightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $\sim q$: $a\neq b$

따라서 $\sim p\not\Rightarrow\ \sim q$, $\sim q\Rightarrow\ \sim p$이므로

$\sim q$는 $\sim p$위한 충분조건이다.

ㄷ. q이고 r는 $a=b=0$

따라서 $p\Leftrightarrow(q$이고 $r)$이므로 p는 q이고 r이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13. [정답] ⑤

ㄱ. p : $A=B$, q : $A\cap C=B\cap C$에서

$A=B$이면 $A\cap C=B\cap C$이므로 $p\Rightarrow q$

이때 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 3\}$, $C=\{1\}$이라 하면

$A\cap C=B\cap C=\{1\}$이지만 $A\neq B$이므로 $q\not\Rightarrow p$

따라서 $p\Rightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$이므로

p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. p : $A=B$, q : $A\cap C^C=B\cap C^C$에서

$A=B$이면 $A\cap C^C=B\cap C^C$이므로 $p\Rightarrow q$

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 3\}$, $C=\{2,\ 3\}$이라 하면

$A\cap C^C=A-C=\{1\}$,

$B\cap C^C=B-C=\{1\}$이므로

$A\cap C^C=B\cap C^C=\{1\}$이지만 $A\neq B$이므로 $q\not\Rightarrow p$

따라서 $p\Rightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$이므로

p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄷ. p: $A=B$, q : $A^C\cap C=B^C\cap C$에서

$A=B$이면 $A^C\cap C=B^C\cap C$이므로 $p\Rightarrow q$

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 3\}$, $C=\{1,\ 4\}$이라 하면

$A^C\cap C=C-A=\{4\}$,

$B^C\cap C=C-B=\{4\}$이므로

$A^C\cap C=B^C\cap C=\{4\}$이지만 $A\neq B$이므로 $q\not\Rightarrow p$

따라서 $p\Rightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$이므로

p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이 아닌 충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. [정답] 6

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

(산술평균)$\geq$(기하평균)에 의하여

$x^2-x+\frac{9}{x^2-x+1}$

$=x^2-x+1+\frac{9}{x^2-x+1}-1$

$\geq 2\sqrt{(x^2-x+1)\cdot\frac{9}{x^2-x+1}}-1$

$=2\cdot 3-1=5$

이때 등호는 $x^2-x+1=\frac{9}{x^2-x+1}$일 때 성립하므로

$(x^2-x+1)^2=9$

$x^2-x+1=3(\because\ x^2-x+1>0)$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때 주어진 식은 최솟값 5를 가지므로 $a=5$, $b=-1+2=1$

$\therefore\ a+b=6$

15. [정답] ①

절대부등식을 활용하여 문제 해결하기

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$가 만나는 점 A는

$x^2-2ax=\frac{1}{a}x$

$x-2a=\frac{1}{a}(\because\ x>0)$

$x=2a+\frac{1}{a}$, $y=2+\frac{1}{a^2}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(2\mathrm{a}+\frac{1}{\mathrm{a}},\ 2+\frac{1}{\mathrm{a}^2}\right)$

이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$의 그래프의 꼭짓점은 $\mathrm{B}(\mathrm{a},\ -\mathrm{a}^2)$

선분 AB의 중점은 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}\mathrm{a}+\frac{1}{2\mathrm{a}},\ 1+\frac{1}{2\mathrm{a}^2}-\frac{\mathrm{a}^2}{2}\right)$

이때 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같으므로 ($\because\ a>0$)

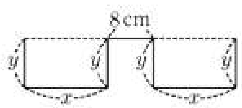
선분 CH의 길이의 최솟값은

$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2a}}=\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

16. [정답] 784

물이 흐르는 단면 중 한쪽 직사각형의 가로의 길이를 $x$cm, 세로의 길이를 $y$cm라고 하면



$2x+4y+8=120$에서 $2x+4y=112$

$x>0$, $y>0$이므로 (산술평균)$\geq$(기하평균)에서

$\frac{2x+4y}{2}\geq\sqrt{2x\cdot 4y}=2\sqrt{2}\sqrt{xy}$

$\therefore\ \sqrt{xy}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{112}{2}$

이때 $xy\leq\frac{28^2}{2}$이므로 $2xy\leq 28^2=784$

따라서 구하는 두 직사각형의 넓이의 합 $2xy$의 최댓값은 784이다.

17. [정답] ③

사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{b}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\mathrm{c}$, $\overline{\mathrm{DA}}=\mathrm{d}$라고 하면

(ⅰ) 사각형 ABCD의 둘레의 길이가 20이므로

$a+b+c+d=20$

(ⅱ) $S_1=a^2$, $S_2=b^2$, $S_3=c^2$, $S_4=d^2$이므로

$S_1+S_2+S_3+S_4=a^2+b^2+c^2+d^2$

a, b, c, d가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq(a+b+c+d)^2$ …… ㉠

$a+b+c+d=20$이므로

$4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq 400$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2\geq 100$

$a^2+b^2+c^2+d^2$의 값이 최솟값인 100이 될 때는 ㉠에서

등호가 성립할 때이므로 $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}=\frac{d}{1}$

$a+b+c+d=20$이므로 $a=b=c=d=5$

따라서 사각형 ABCD는 모든 변의 길이가 같고,

$\angle A=90^\circ$이므로 한 변의 길이가 5인 정사각형이다. 따라서 구하는 넓이는 $5^2=25$

18. [정답] ④

점 P(a, b)가 원 $(x+3)^2+(y-4)^2=1$ 위의 점이므로

$(a+3)^2+(b-4)^2=1$ …… ㉠

(i) $a=-3$일 때

위의 값을 $ab-4a+3b$에 대입하면

$-3b+12+3b=12$

(ii) $b=4$일 때

위의 값을 $ab-4a+3b$에 대입하면

$4a-4a+12=12$

(iii) $a\neq-3$, $b\neq4$일 때

$(a+3)^2>0$, $(b-4)^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+3)^2+(b-4)^2\geq 2\sqrt{(a+3)^2(b-4)^2}$$
$$=2|(a+3)(b-4)|$$

$\left(\text{단, 등호는 } a+3=b-4=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ 일 때 성립}\right)$

$\therefore\ |(a+3)(b-4)|\leq\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

따라서

$ab-4a+3b$

$=a(b-4)+3(b-4)+12$

$\leq|(a+3)(b-4)|+12$

$\leq\frac{1}{2}+12=\frac{25}{2}$

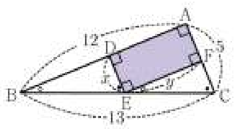
이므로 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $ab-4a+3b$의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다.

19. [정답] 840

(i) 직사각형의 두 변이 삼각형의 두 변 위에 존재할 때

다음 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면 직사각형의 넓이는 xy이다.



$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$이므로 $x:5=\overline{BE}:13$에서

$\overline{BE}=\frac{13}{5}x$

$\triangle ABC\backsim\triangle FEC$이므로 $y:12=\overline{EC}:13$에서

$\overline{EC}=\frac{13}{12}y$

$\overline{BC}=\frac{13}{5}x+\frac{13}{12}y=13$이므로 $12x+5y=60$

이때 $12x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$12x+5y\geq2\sqrt{12x\cdot5y}$, $60\geq2\sqrt{60xy}$

$60xy\leq900$, $xy\leq15$

$\therefore\ M_1=15$

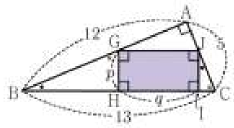
등호는 $12x=5y$일 때 성립하므로 $12x=5y=30$에서

$x=\frac{5}{2}$, $y=6$

$\therefore\ l_1=\left(\frac{5}{2}+6\right)\cdot2=17$

(ii) 직사각형의 한 변만이 삼각형의 한 변 위에 존재할 때

다음 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 각각 p, q라 하면 직사각형의 넓이는 pq이다.



$\triangle ABC\backsim\triangle HBG$이므로 $p:5=\overline{BH}:12$에서

$\overline{BH}=\frac{12}{5}\mathrm{p}$

$\triangle ABC\backsim\triangle IJC$이므로 $p:12=\overline{CI}:5$에서

$\overline{CI}=\frac{5}{12}\mathrm{p}$

$\overline{BC}=\frac{12}{5}\mathrm{p}+\mathrm{q}+\frac{5}{12}\mathrm{p}=13$이므로

$169p+60q=780$

이때 $169p>0$, $60q>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $179p+60q\geq2\sqrt{169p\cdot60q}$,

$780\geq2\sqrt{10140pq}$, $10140pq\leq152100$

$pq\leq15$

$\therefore\ M_2=15$

등호는 $169p=60q$일 때 성립하므로

$169p=60q=390$에서 $p=\frac{30}{13}$, $q=\frac{13}{2}$

$\therefore\ l_2=\left(\frac{30}{13}+\frac{13}{2}\right)\cdot2=\frac{229}{13}$

(i), (ii)에 의하여

$$13(M_1+M_2+l_1+l_2)=13\cdot\left(15+15+17+\frac{229}{13}\right)$$
$$=840$$

20. [정답] 7

$\overline{AP}+\overline{BP}=a+b=6$ …… ㉠

삼각형 PAM에서 $\overline{PM}=\overline{AP}\sin30^\circ=\frac{1}{2}a$

삼각형 PBN에서 $\overline{PN}=\overline{BP}\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

$\frac{1}{\overline{PM}}+\frac{\sqrt{2}}{\overline{PN}}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$

㉠에서 $a+b=6$이므로 위 식의 양변에 $a+b$를 곱하면

$6\left(\frac{1}{\overline{PM}}+\frac{\sqrt{2}}{\overline{PN}}\right)=(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)$

$$=2+2+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$$

$$=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이고 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=4$ (단, 등호는 $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$일 때 성립)

㉡에서

$6\left(\frac{1}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{PN}}}\right)\geq 4+4=8$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \frac{1}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{PN}}}\geq\frac{4}{3}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=7$

고1	공통수학2 기말고사 대비	선택형		서답형	
	함수 216~232p 출처: 마플시너지(2025)	6문항		14문항	

1. 집합 $X=\{1,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=ax-3$, $g(x)=2x+b$가 있을 때, $f=g$가 되도록 하는 상수 $a<b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

2. 두 집합 $X=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$, $Y=\{y\,|\,3\le y\le 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

3. 임의의 실수에 대하여 함수 f가 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족하고, $f(1)=2$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

4. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 치역과 공역이 일치하는 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하시오.

5. 두 집합 $X=\{0,\ 2,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여 $f(x)=ax^2+(1-2a)x+1$이 X에서 Y로의 함수가 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

6. 2 이상의 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) x가 소수일 때, $f(x)=x$
(나) $f(xy)=f(x)+f(y)$

이때 $f(1000)$의 값을 구하시오.

7. 집합 $X=\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의

함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b-1 & (0 \le x < 3) \\ -2x+10 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$가 일대일대응일 때,

$f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$

④ 1 ⑤ $\frac{10}{9}$

8. 두 집합

$$X=\{x \mid -2 \le x \le 1\},$$
$$Y=\{y \mid |y| \le a,\ a>0\}$$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=4x+b$가 일대일대응이다. 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 36 ② 40 ③ 44

④ 48 ⑤ 52

9. 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$를 정의역으로 하는 함수

$f(x)=\begin{cases} 3 & (x<4) \\ 2x-5 & (4 \le x < 7) \\ x^2-6x-8 & (x \ge 7) \end{cases}$가 항등함수일 때, $a+b+c$의

값을 구하시오. (단, a, b, c는 서로 다른 상수이다.)

10. 임의의 실수 x, y에 대하여 함수 f가

$f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x)>0$을 만족하고, $f(2)=9$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $f(0)=1$

ㄴ. $f(1)=1$

ㄷ. $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : A \to B$의 개수를 구하시오.

(가) $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이다.

(나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 홀수이다.

12. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 함수

$f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수의 치역의 원소의 개수는 7이다.

(나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=12$

(다) 함수 f의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X의 어떤 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $a \ne b$)

13. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$는 일대일대응이다. $1\le n\le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수일 때, $f(5)+f(8)$의 최댓값을 구하시오.

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=a|x+2|-x+5$가 일대일대응이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<0$ ② $a<-1$ ③ $a>1$
④ $-1<a<1$ ⑤ $a<-1$ 또는 $a>1$

15. 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f:R\to R$가 $f(x)=a|x-3|+2x$로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

16. 실수 전체의 집합에 대하여 함수 $f:R\to R$가 $f(x)=a|x-5|+3x$로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족할 때, $f(9999)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(5x)=5f(x)$
(나) $f(x)=\|4-x\|-1\ (1\le x<5)$

18. 두 집합 $A=\{x\mid x$는 2 이상의 자연수$\}$, $B=\{x\mid x$는 자연수$\}$에 대하여 함수 $f:A\to B$를 $n\in A$일 때 $n=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_i^{b_i}$($a_s$는 서로 다른 소수, b_s는 자연수, $1\le s\le i$)이면 $f(n)=i$로 정의하자. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. $f(100)=2$
ㄴ. 두 자연수 $k,\ l$에 대하여 $f(2^{k+l})=f(2^k)+f(2^l)$
ㄷ. $n\in A$에 대하여 $f(2n)=f(n)+1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f:X \to X$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) p가 소수일 때, $f(p) \leq p$이다. (나) a$a<b$이고 a가 b의 약수이면 $f(a)<f(b)$이다.

20. 집합 $X=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $\lvert f(x)+f(-x) \rvert = 2$이다. (나) $x>0$이면 $f(x)<0$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

[공통수학2 함수 정답 및 해설]

1. [정답] ③

$f(1)=g(1)$에서 $a-3=2+b$

$\therefore\ a-b=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $2a-3=4+b$

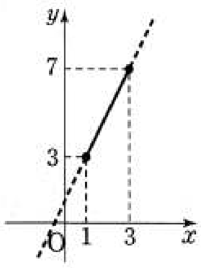
$\therefore\ 2a-b=7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=2-(-3)=5$

2. [정답] 2

$a>0$이므로 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 증가하는 모양으로 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(1)=3$, $f(3)=7$

$\therefore\ a+b=3$, $3a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore\ ab=2$

3. [정답] -1

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

㉠의 양변에 y대신 $-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

$\therefore\ f(-x)=-f(x)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)=2+2=4$

$\therefore\ f(-2)=-f(2)=-4$

4. [정답] 150

함수가 되려면 정의역 X의 모든 원소가 공역 Y의 함수에 대응되면 된다.

또한, 치역과 공역이 일치하려면 정의역의 원소들이 공역의 원소에 빠짐없이 대응하여야 한다.

따라서 치역과 공역이 일치하는 X에서 Y로의 함수의 개수는

(i) X의 원소 중 3개가 같은 함숫값을 갖는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_3$

택한 3개의 원소를 한 원소로 생각하여 집합 X의 원소 3개를 Y의 각 원소에 대응하는 방법의 수는

$3\times2\times1=6$

$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_3\times6=60$

(ii) X의 원소 중 같은 함숫값을 갖는 2개의 원소를 2세트 뽑는 경우의 수는 $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{2!}$이고, 같은 함숫값을 갖는 두 쌍의 원소를 각각 하나로 생각하고, 집합 X의 원소 3개를 Y의 각 원소에 대응하는 방법의 수는 $3\times2\times1=6$

$\therefore\ \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{2!}\times6=90$

$\therefore$ (i), (ii)에서 모든 경우의 수는 150

5. [정답] $-\dfrac{3}{4}$

집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(0)=1$

$f(2)=4a+2(1-2a)+1=4$

$f(4)=16a+4(1-2a)+1=8a+5$

이므로 $f(4)$의 값은 1, 3, 5 중 하나이다.

(i) $f(4)=1$일 때, $8a+5=1$ $\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(4)=3$일 때, $8a+5=3$ $\therefore a=-\dfrac{1}{4}$

(iii) $f(4)=5$일 때, $8a+5=5$ $\therefore\ a=0$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a의 값의 합은

$-\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)+0=-\dfrac{3}{4}$

6. [정답] 21

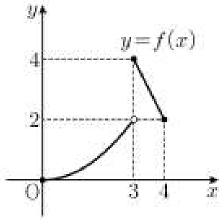
1000을 소인수분해하면 $1000=2^3\cdot5^3$이므로

$$\begin{aligned}f(1000)&=f(2^3\cdot5^3)\\&=f(2^3)+f(5^3)\\&=f(2)+f(2^3)+f(5)+f(5^2)\\&=f(2)+f(2)+f(2)+f(5)+f(5)+f(5)\\&=3\{f(2)+f(5)\}\\&=3(2+5)\ (\because\ f(2)=2,\ f(5)=5)\\&=21\end{aligned}$$

7. [정답] ③

집합 $\{x\,|\,3\le x\le4\}$에서 정의된 함수 $y=-2x+10$의 치역은 $\{y\,|\,2\le y\le4\}$이므로

함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는 집합 $\{x\,|\,0\le x<3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b-1$의 치역이 $\{y\,|\,0\le y<2\}$이어야 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+b-1$이라 할 때

$g(0)=0$, $g(3)=2$

이때 $g(0)=0$에서 $b-1=0$

$\therefore\ b=1$

또, $g(3)=2$에서 $9a-b-1=2$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{9}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}x^2 & (0\le x<3)\\ -2x+10 & (3\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$f(2)=\dfrac{2}{9}\cdot 2^2=\dfrac{8}{9}$

8. [정답] ②

함수 $f(x)=4x+b$가 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로

$f(-2)=-8+b=-a$ …… ㉠

$f(1)=4+b=a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=6$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=40$

9. [정답] 16

함수 f가 항등함수이므로

(ⅰ) $x<4$일 때 $x=3$

(ⅱ) $4\le x<7$일 때, $2x-5=x$, $x=5$

$\therefore\ x=5$

(ⅲ) $x\ge 7$일 때, $x^2-6x-8=x$, $x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0\ \therefore\ x=8(\because\ x\ge 7)$

이상에서 $X=\{3,\ 5,\ 8\}$이므로

$a+b+c=16$

10. [정답] ①

$f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$, $f(0)(f(0)-1)=0$

$f(0)=0$ 또는 $f(0)=1$이다. $f(x)>0$이므로

$\therefore\ f(0)=1$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)$, $\{f(1)\}^2=f(2)=9$

$f(x)>0$이므로

$\therefore\ f(1)=3$

ㄷ. ㉠의 양변의 y에 $-x$를 대입하면

$f(x-x)=f(x)f(-x)$

$\therefore\ f(0)=f(x)f(-x)$

이때 ㉠에서 $f(0)=1$이고 $f(x)>0$이므로

$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11. [정답] 66

조건 (가)에서 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$

조건(나)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+(5)$는 홀수이므로 다섯 자연수의 합이 홀수가 되려면 다섯 자연수 중 홀수가 1개 또는 3개 또는 5개가 있어야 한다.

이때 집합 B의 원소에서 짝수는 4개, 홀수는 5개이므로

(ⅰ) 홀수가 한 개인 경우의 수는

${}_4C_4\cdot{}_5C_1=5$

(ⅱ) 홀수가 세 개인 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_5C_3=60$

(ⅲ) 홀수가 다섯 개인 경우의 수는

${}_4C_0\cdot{}_5C_5=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$5+60+1=66$

12. [정답] 7

함수의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로 조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

$=36+n-m=42$

$\therefore\ n-m=6$

집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때

함수의 치역은 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때

함수의 지역은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $n=7$

13. [정답] 17

1 이상 7 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로

$f(1)\cdot f(3)$, $f(2)\cdot f(4)$, $f(3)\cdot f(5)$, $f(4)\cdot f(6)$,

$f(5)\cdot f(7)$, $f(6)\cdot f(8)$, $f(7)\cdot f(9)$는 모두 짝수이다.

집합 X의 원소 중 짝수인 것은 2, 4, 6, 8뿐이므로 짝수이려면

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(7)$ 또는 $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(7)$ 또는

$f(3)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(8)$이 짝수가 되어야 한다.

(ⅰ) $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(7)$ 또는 $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(7)$이 짝수인 경우,

$f(5)$, $f(8)$은 모두 홀수이므로 $f(5)+f(8)$의 최댓값은

$f(5)=7$, $f(8)=9$ 또는 $f(5)=9$, $f(8)=7$일 때

$7+9=16$이다.

(ⅱ) $f(3)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(8)$이 짝수인 경우, $f(8)$이 될 수 있는 최댓값은 8이고, $f(5)$가 될 수 있는 최댓값은 9이므로

$f(5)+(8)$의 최댓값은 17이다.

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 $f(5)+(8)$의 최댓값은 17이다.

14. [정답] ④

함수 $f(x)=a|x+2|-x+5$에서

(ⅰ) $x\ge -2$일 때,

$f(x)=ax+2a-x+5=(a-1)x+2a+5$

(ⅱ) $x<-2$일 때,

$f(x)=-ax-2a-x+5=-(a+1)x-2a+5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}(a-1)x+2a+5 & (x \geq -2)\\ -(a+1)x-2a+5 & (x<-2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x \geq -2$일 때와 $x<-2$일 때 일차함수 $f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$-(a+1)(a-1)>0$, $(a+1)(a-1)<0$

따라서 $-1<a<1$

15. [정답] 3

(ⅰ) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$f(x)=-a(x-3)+2x=-(a-2)x+3a$

(ⅱ) $x \geq 3$일 때, $x-3 \geq 0$이므로

$f(x)=a(x-3)+2x=(a+2)x-3a$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases}-(a-2)x+3a & (x<3)\\ (a+2)x-3a & (x \geq 3)\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선

$y=-(a-2)x+3a$, $y=(a+2)x-3a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$-(a-2)(a+2)>0$, $(a-2)(a+2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

따라서 정수는 -1, 0, 1의 3개이다.

16. [정답] 5

함수 $f(x)=a|x-5|+3x$에서

(ⅰ) $x<5$일 때,

$f(x)=a(-x+5)+3x=(3-a)x+5a$

(ⅱ) $x \geq 5$일 때,

$f(x)=a(x-5)+3x=(a+3)x-5a$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}(3-a)x+5a & (x<5)\\ (a+3)x-5a & (x \geq 5)\end{cases}$$

이때 함수 f가 일대일대응이 되려면

두 직선 $y=(3-a)x+5a$와 $y=(a+3)x-5a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(3-a)(a+3)>0$에서 $(a-3)(a+3)<0$

$\therefore\ -3<a<3$

따라서 정수는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

17. [정답] -624

조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned}f(9999)&=f\left(5\cdot\frac{9999}{5}\right)\\ &=5f\left(\frac{9999}{5}\right)\\ &=5^2f\left(\frac{9999}{5^2}\right)\\ &\ \ \vdots\\ &=5^5f\left(\frac{9999}{5^5}\right)\end{aligned}$$

이때 $3<\dfrac{9999}{5^5}<4$이므로 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f\left(\frac{9999}{5^5}\right)&=\left|4-\frac{9999}{5^5}\right|-1\\ &=4-\frac{9999}{5^5}-1=3-\frac{9999}{5^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(9999)&=5^5f\left(\frac{9999}{5^5}\right)\\ &=5^5\left(3-\frac{9999}{5^5}\right)\\ &=9375-9999=-624\end{aligned}$$

18. [정답] ①

ㄱ. $100=2^2\cdot5^2$이므로 $f(100)=2$(참)

ㄴ. $f(2^{k+1})=1$, $f(2^k)=f(2^l)=1$이므로

$f(2^{k+1})\neq f(2^k)+f(2^l)$ (거짓)

ㄷ. $n=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdot a_i^{b_i}$ (a_s는 서로 다른 소수, b_s는 자연수,

$1 \leq s \leq i$)가 짝수인 경우

$a_1=2$라 하면

$n=2_1^b a_2 b_2\cdots a_i^{b_i}$, $2n=2^{b_1+1}a_2^{b_2}\cdots a_i^{b_i}$

$f(2n)=f(n)=i$이므로

$f(2n)\neq f(n)+1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

19. [정답] 12

$f(2)\leq 2$, $f(3)\leq 3$, $f(5)\leq 5$, $f(7)\leq 7$

$f(1)<f(2)<f(4)$

함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(5)$가 될 수 있는 값은 4, 5

$f(7)$이 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7

(ⅰ) $f(5)=4$인 경우

$f(4)$, $f(6)$, $f(7)$이 될 수 있는 값은 5, 6, 7이므로

경우의 수는 $3\neq 6$

(ⅱ) $f(5)=5$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 함수 f의 개수는 6

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수의 개수는

$6+6=12$

20. [정답] 625

$|f(x)+f(-x)|=2$에서

$f(x)+f(-x)=2$ 또는 $f(x)+f(-x)=-2$

$x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여

(ⅰ) $f(x)=-1$일 때, $f(-x)=3$ 또는 $f(-x)=-1$

(ⅱ) $f(x)=-2$일 때, $f(-x)=4$

(ⅲ) $f(x)=-3$일 때, $f(-x)=1$

(ⅳ) $f(x)=-4$일 때, $f(-x)=2$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해진다.

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$, $f(2)$와 $f(-2)$, $f(3)$과 $f(-3)$, $f(4)$와 $f(-4)$의 값을 정하는 경우의 수가 각각 5이므로 구하는 함수 $f(x)$의 개수는 $5^4=625$

고1	공통수학2 기말고사 대비	선택형		서답형	
	유리함수 273~298p 출처: 마플시너지(2025)	15문항		8문항	

1. 유리함수 $y=\frac{5}{x}(x>0)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리가 6일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

2. 유리함수 $f(x)=\frac{2}{x-a}-6(a>1)$에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 사각형 OBCA의 넓이가 20일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

① -3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

3. 유리함수 $f(x)=\frac{2x+1}{x-k}$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=2x$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k\neq-\frac{1}{2}\right)$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 함수 $f(x)=\frac{bx}{ax-1}$의 정의역과 치역이 같다. 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점이 직선 $y=-3x+5$ 위에 있을 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

① $\frac{5}{11}$　② $\frac{5}{9}$　③ 0　④ $\frac{9}{5}$　⑤ $\frac{11}{5}$

5. 함수 $f(x)=\frac{a}{2x+4}-b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+2a)-\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $a+f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq0$이다.)

① $-\frac{11}{5}$　② $-\frac{17}{10}$　③ $-\frac{6}{5}$　④ $-\frac{7}{10}$　⑤ $-\frac{1}{5}$

6. 분모, 분자가 일차식인 유리식 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 조건을 모두 만족한다. 이때 $0\leq x\leq2$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

(가) 점 $(-1,\ 3)$에 대하여 대칭이다.
(나) 점 $(-2,\ 6)$을 지난다.

7. 다음 보기 중 함수 $y=\dfrac{3x+7}{x+3}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

ㄱ. 치역은 $\{y \mid Y \neq -3$인 실수$\}$이다.
ㄴ. 그래프는 점 $(-3,\ 3)$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8. a, b가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2 \leq \dfrac{2x-1}{x-1} \leq bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

9. 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$ 인 점 C가 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있다. $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>\sqrt{2}$)

10. 함수 $f(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a와 b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

< 조건 >

(가) 3이 아닌 모든 실수 x에 대하여
$f^{-1}(x)=f(x-6)-6$이다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치한다.

11. 함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{x-2}$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$f^{-1}(x)=f(x+1)+b$이다.
(나) 직선 $x=5$는 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프의 한 점근선이다.

상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

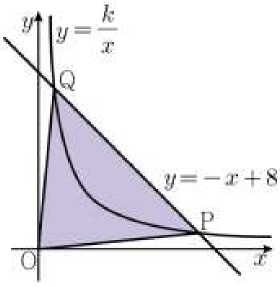
① 4 ② 2 ③ 0
④ -2 ⑤ -4

12. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$에 대하여

$f^1=f$, $f^n=f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f\,(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

로 정의한다. $f^{30}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하시오.

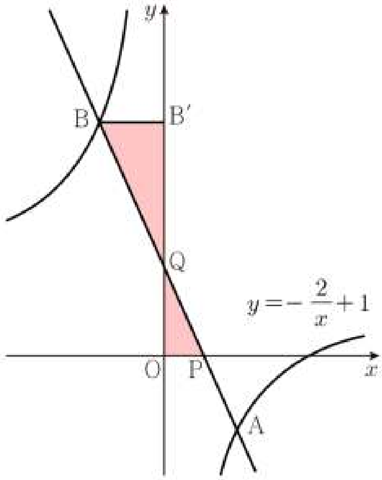
13. 그림과 같이 유리함수 $y=\frac{k}{x}(k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+8$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{87}{16}$ ③ $\frac{45}{8}$
④ $\frac{93}{16}$ ⑤ 6

14. 좌표평면 위에 함수 $f(x)=\begin{cases}-\frac{4}{x} & (x>0)\\ -\frac{16}{x} & (x<0)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=x$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=f(x)$와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{PQ}\cdot\overline{QR}$의 최솟값을 구하시오.

15. 곡선 $y=-\frac{2}{x}+1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(\mathrm{k},\ -\frac{2}{\mathrm{k}}+1\right)$ $(-2<k<0)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B′이라 할 때, 두 삼각형 BQB′, OPQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최솟값을 m, 그 때의 k값을 α라 할 때, $m+\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}-1$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

16. 유리함수 $y=\frac{ax+7}{x+b}$의 역함수의 그래프가 두 직선 $x=-3$, $y=1$과 만나지 않도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

17. 양수 k에 대하여 유리함수 $y=\dfrac{k}{x+4}+2$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 그래프의 두 점근선의 교점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, $k\cdot\overline{\mathrm{AB}}$의 값은?

① $28\sqrt{5}$ ② $30\sqrt{5}$ ③ $32\sqrt{5}$
④ $34\sqrt{5}$ ⑤ $36\sqrt{5}$

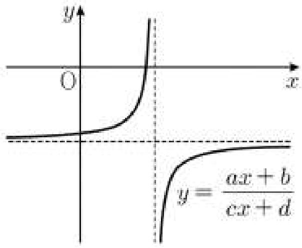
18. 양의 실수 전체의 집합 A에서 A로의 함수 f, h를 $f(x)=x^2+x$, $h(x)=\dfrac{x+2}{f(x)}$로 정의한다. 함수 g가 f의 역함수일 때, $h(g(6))$의 값을 구하시오.

19. 유리함수 $y=\dfrac{6}{2x-6}$의 그래프 위의 점 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20. $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

21. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)



< 보기 >

ㄱ. $ac<0$
ㄴ. $cd<0$
ㄷ. $ad-bc<0$
ㄹ. $b>0$이면 $d<0$이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

22. 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle ABC=90^\circ$인 점 C가 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위에 있다. $\overline{AC}=2\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. (단, $k>2\sqrt{2}$)

23. 함수 $f(x)=\frac{a}{x}+b\,(a\neq 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=\lvert f(x)\rvert$는 직선 $y=3$과 한 점에서만 만난다.
(나) $f^{-1}(3)=f(3)-2$

$f(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[공통수학2 유리함수 정답 및 해설]

1. [정답] 62

점 P(a, b)는 유리함수 $y=\frac{5}{x}(x>0)$의 그래프 위의 점이므로

$b=\frac{5}{a}$에서 $ab=5(a>0.\ b>0)$

점 P(a, b)와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 6이므로

$\frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=6$에서 $a+b=6\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(6\sqrt{2})^2-2\cdot 5$

$=62$

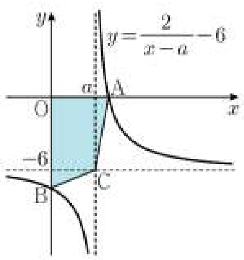
2. [정답] ①

유리함수 $f(x)=\frac{2}{x-a}-6(a>1)$의 그래프의 두 점근선은

$x=a,\ y=-6$이고,

$\mathrm{A}\left(a+\frac{1}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\frac{2}{a}-6\right)$, C(a, -6)이다.

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이를 S라 하면 S는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{CE}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{3}\right)\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{a}+6\right)\cdot a$

$=6a+2$

$6a+2=20$에서

$a=3$

3. [정답] ①

함수 $f(x)=\frac{2x+1}{x-k}=\frac{2k+1}{x-k}+2$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=k,\ y=2$이고 두 점근선의 교점 $(k,\ 2)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이다.

따라서 $k=1$

4. [정답] ④

$y=\frac{bx}{ax-1}=\frac{\frac{b}{a}(ax-1)+\frac{b}{a}}{ax-1}=\frac{b}{a(ax-1)}+\frac{b}{a}$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x\ \middle|\ x\neq\frac{1}{a}\text{인 실수}\right\}$, 치역은 $\left\{y\ \middle|\ y\neq\frac{b}{a}\text{인 실수}\right\}$이고 정의역과 치역이 같으므로

$\frac{1}{a}=\frac{b}{a}\ \ \therefore\ b=1$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{b}{a}$

두 점근선의 교점 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{b}{a}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\right)$이 직선 $y=-3x+5$ 위에 있으므로

$\frac{1}{a}=-\frac{3}{a}+5,\ \frac{4}{a}=5\ \ \therefore\ a=\frac{4}{5}$

$\therefore\ a+b=\frac{9}{5}$

5. [정답] ②

y=f(x+2a)-"$y=f(x+2a)-\frac{a}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$만큼 평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+2a)-\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+2a)-\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+2a)-\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면

$y=f(x+2a)-\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\frac{a}{2x+4}-b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-b$이므로 $y=f(x+2a)-\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2-2a,\ y=-b-\frac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로

$a=-1,\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2x+4}-\frac{1}{2}$이므로

$f(b)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{10}$

$\therefore\ a+f(b)=-1+\left(-\frac{7}{10}\right)=-\frac{17}{10}$

6. [정답] 0

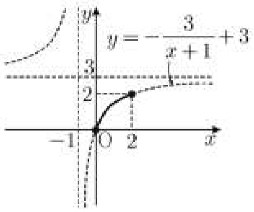
조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=3$이므로 $f(x)=\frac{k}{x+1}+3(k\neq 0)$으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $f(-2)=6$이므로 $6=-k+3$

$\therefore\ k=-3$

$\therefore\ f(x)=-\frac{3}{x+1}+3$

따라서 $0 \le x \le 2$에서 $y=-\dfrac{3}{x+1}+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최댓값 $-\dfrac{3}{2+1}+3=2$, $x=0$일 때, 최솟값 $-\dfrac{3}{0+1}+3=0$을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$2 \cdot 0=0$

7. [정답] ⑤

$y=\dfrac{3x+7}{x+3}=\dfrac{3(x+3)-2}{x+3}=-\dfrac{2}{x+3}+3$

ㄱ. 치역은 $\{y\,|\,y \ne 3$인 실수$\}$이다. (거짓)

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=3$이므로 그래프는 점 $(-3,\ 3)$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $y=\dfrac{3x+7}{x+3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (참)

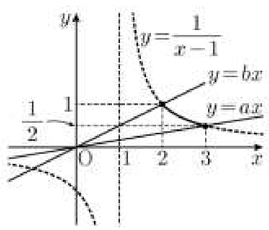
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. [정답] ①

$\dfrac{2x-1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}\ (2 \le x \le 3)$이므로

$ax+2 \le 2+\dfrac{1}{x-1} \le bx+2$

$ax \le \dfrac{1}{x-1} \le bx$



위의 그래프에 의하여 $a \le \dfrac{1}{6}$, $b \ge \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore$ (a의 최댓값)+(b의 최솟값)$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

9. [정답] 5

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(\mathrm{a},\ \dfrac{1}{\mathrm{a}}\right)(a \ne 1)$라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\mathrm{a}},\ \mathrm{a}\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ 이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(\mathrm{c},\ \dfrac{1}{\mathrm{c}}\right)$라 하면 직선 BC의 기울기는 1이다.

$\dfrac{\dfrac{1}{c}-a}{c-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$, $c=-a$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\mathrm{a},\ -\dfrac{1}{\mathrm{a}}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\dfrac{1}{a}-\left(-\dfrac{1}{a}\right)\right\}^2$

$=4a^2+\dfrac{4}{a^2}=12$

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=3$

따라서 $k^2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2=5$

10. [정답] 5

$f(x)=\dfrac{3x+b}{x-a}=\dfrac{3(x-a)+3a+b}{x-a}=\dfrac{3a+b}{x-a}+3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a,\ 3)$

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(3,\ a)$ …… ㉠

(가)에서 함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+6,\ -3)$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $a=-3$

$a=-3$을 $y=\dfrac{3a+b}{x-a}+3$에 대입하면

$y=\dfrac{b-9}{x+3}+3$

(나)에서 이 그래프를 평행이동하면 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치하므로

$b-9=-1$, $b=8$

$\therefore\ a+b=(-3)+8=5$

11. [정답] ②

$f(x)=\dfrac{x+a}{x-2}=\dfrac{(x-2)+a+2}{x-2}=\dfrac{a+2}{x-2}+1$

이므로 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이고, 조건 (가)에서

$f^{-1}(x)=f(x+1)+b=\dfrac{x+1-a}{x+1-2}+b$

$=\dfrac{(x-1)+a+2}{x-1}+b$

$$=\frac{a-2}{x-1}+b+1$$

이므로 $b+1=2$

$\therefore\ b=1$

또, 조건 (나)에서

$$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+a}{x-2}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+a}{x-2}+a}{\frac{x+a}{x-2}-2}=\frac{\frac{x+a+ax-2a}{x-2}}{\frac{x+a-2x+4}{x-2}}$$

$$=\frac{(a+1)x-a}{-x+a+4}$$

의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=5$이므로

$a+4=5$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+b=2$

12. [정답] 31

$f(x)=\frac{x}{1+x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\frac{x}{1+2x}$$

$$f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$$

$$=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}$$

$$=\frac{x}{1+3x}$$

같은 방법으로 하면

$$f^{30}(x)=\frac{x}{1+30x}$$

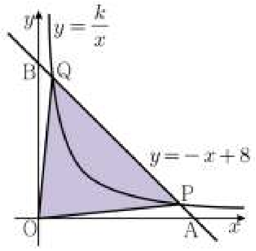
따라서 $a=1$, $b=0$, $c=30$이므로

$a-b+c=31$

13. [정답] ②

직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

A(8, 0), B(0, 8)



삼각형 OAB의 넓이는

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26이므로

$$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\frac{1}{2}(32-26)=3$$

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면

$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \mathrm{b}=3$에서 $b=\frac{3}{4}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8=\frac{3}{4}$에서 $a=\frac{29}{4}$이다.

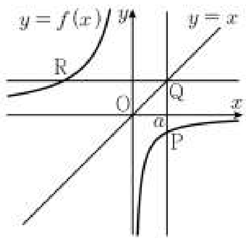
또, 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$$k=ab=\frac{29}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{87}{16}$$

14. [정답] 36

점 P의 x좌표를 a라 하자.

(i) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(\mathrm{a},\ -\frac{4}{\mathrm{a}}\right)$, $\mathrm{Q}(\mathrm{a},\ \mathrm{a})$, $\mathrm{R}\left(-\frac{16}{\mathrm{a}},\ \mathrm{a}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\mathrm{a}+\frac{4}{\mathrm{a}}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\mathrm{a}+\frac{16}{\mathrm{a}}$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}=\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)$$

$$=a^2+\frac{64}{a^2}+20$$

$$\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{64}{a^2}}+20$$

$$=36$$

등호가 성립하는 경우는

$a^2=\frac{64}{a^2}$, 즉 $a=2\sqrt{2}$일 때이다.

그러므로 $a=2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(\mathrm{a},\ -\frac{16}{\mathrm{a}}\right)$, $\mathrm{Q}(\mathrm{a},\ \mathrm{a})$, $\mathrm{R}\left(-\frac{4}{\mathrm{a}},\ \mathrm{a}\right)$이므로

(i)에서와 같이 $a=-2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 36을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 36이다.

15. [정답] ③

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(\mathrm{k},\ -\dfrac{2}{\mathrm{k}}+1\right)(-2<k<0)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-\dfrac{2}{k}+2}{k-1}=\frac{-2+2k}{k(k-1)}=\frac{2}{k}$$

이므로 직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{k}(x-1)-1$,

즉 $y=\dfrac{2}{k}x-\dfrac{2}{k}-1$이다.

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{k}}{2}+1,\ 0\right)$,

$\mathrm{Q}\left(0,\ -\dfrac{2}{\mathrm{k}}-1\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{k}}{2}+1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{2}{\mathrm{k}}-1$, $\overline{\mathrm{B'Q}}=2$, $\overline{\mathrm{BB'}}=-\mathrm{k}$

따라서 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-k)=-k$,

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{2}+1\right)\left(-\dfrac{2}{k}-1\right)=-\left(1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{k}{4}\right)$

이므로

$S_1+S_2=-\dfrac{5}{4}k-\dfrac{1}{k}-1$

이때 두 수 $-\dfrac{5}{4}k$, $-\dfrac{1}{k}$이 모두 양수이므로, $(\because\ -2k<0)$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_1+S_2\geq\sqrt{\left(-\frac{5}{4}k\right)\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)}-1$$
$$=\sqrt{5}-1$$

(단, 등호는 $k=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$일 때 성립)

$\therefore\ m+\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$

16. [정답] ①

유리함수 $y=\dfrac{ax+7}{x+b}$의 역함수의 그래프가 두 직선 $x=-3$, $y=1$과 만나지 않으므로

유리함수 $y=\dfrac{ax+7}{x+b}$의 그래프의 점근선은 $x=1$, $y=-3$이다.

$$y=\frac{ax+7}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+7}{x+b}$$
$$=\frac{7-ab}{x+b}+a$$

이므로 유리함수 $y=\dfrac{ax+7}{x+b}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-b$, $y=a$이다.

따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

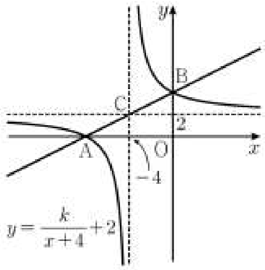
$a+b=-4$

17. [정답] ③

함수 $y=\dfrac{k}{x+4}+2\,(k>0)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점은 $\mathrm{C}(-4,\ 2)$

점 $\mathrm{C}(-4,\ 2)$와 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 그림과 같이 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.



두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 하면

점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\dfrac{a+0}{2}=-4$, $\dfrac{0+b}{2}=2$

즉, $a=-8$, $b=4$

그러므로 $\mathrm{A}(-8,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(-8)\}^2+(4-0)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

또, 함수 $y=\dfrac{k}{x+4}+2$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{k}{0+4}+2$, $k=8$

$\therefore\ k\cdot\overline{\mathrm{AB}}=8\cdot 4\sqrt{5}=32\sqrt{5}$

18. [정답] $\dfrac{2}{3}$

g가 f의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

$\therefore\ h(g(6))=\dfrac{g(6)+2}{f(g(6))}=\dfrac{g(6)+2}{6}$

$g(6)=f^{-1}(6)=a$라 하면 $f(a)=6$

$a^2+a=6$, $a^2+a-6=0$

$(a-2)(a+3)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-3$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

즉, $g(6)=2$이므로

$$h(g(6))=\frac{g(6)+2}{6}$$
$$=\frac{2+2}{6}=\frac{2}{3}$$

19. [정답] ②

$y=\dfrac{6}{2x-6}=\dfrac{3}{x-3}$이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉, $x<3$이면 $y<0$이고, $x>3$이면 $y>0$이다.

$x=-1$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot(-1)-6}=-\dfrac{3}{4}$에서 분모의 절댓값이 분자의 절댓값보다 크므로 $x<-1$인 경우 y의 값은 정수가 될 수 없다.

$x=0$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 0-6}=-1$

$x=1$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 1-6}=-\dfrac{3}{2}$

$x=2$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 2-6}=-3$

$x=3$일 때, 주어진 유리함수는 정의되지 않는다.

$x=4$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 4-6}=3$

$x=5$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 5-6}=\dfrac{3}{2}$

$x=6$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 6-6}=1$

$x=7$일 때, $y=\dfrac{6}{2\cdot 7-6}=\dfrac{3}{4}<1$이므로

$x>7$인 경우 y의 값은 정수가 될 수 없다.

따라서 유리함수 $y=\dfrac{6}{2x-6}$의 그래프 위의 점 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점은

$(0, -1)$, $(2, -3)$, $(4, 3)$, $(6, 1)$의 4개이다.

20. [정답] $a+b=-1$

$f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ …… ①에서

x대신 $\dfrac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)-2f(x)=\dfrac{-x+2}{x+1}$ …… ②

①$+2\times$② $\rightarrow -f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1$, $y=0$

$\therefore\ a+b=-1$

21. [정답] ②

ㄱ, ㄴ. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{c(ax+b)}{c(cx+d)}$

$=\dfrac{a(cx+d)-ad+bc}{c(cx+d)}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$

$\therefore\ y=-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}+\dfrac{a}{c}$

위의 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{d}{c}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{a}{c}$만큼 평행이동한 것으로 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

따라서 주어진 그래프에서 $-\dfrac{d}{c}>0$, $\dfrac{a}{c}<0$이므로

$ac<0$, $cd<0$(참)

ㄷ. 주어진 함수의 그래프에서 $y=-\dfrac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프는 제2, 4사분면을 지나야 하므로

$-(ad-bc)<0$

$\therefore\ ad-bc>0$(거짓)

ㄹ. 주어진 함수의 그래프의 y절편이 음수이므로 $x=0$을 대입하면 $\dfrac{b}{d}<0$이다.

즉, $b>0$이면 $d<0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

22. [정답] 9

유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 점 A의

좌표를 $\mathrm{A}\left(\mathrm{a},\ \dfrac{2}{\mathrm{a}}\right)(a\neq\sqrt{2})$라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{\mathrm{a}},\ \mathrm{a}\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고 점 C의

좌표를 $\mathrm{C}\left(\mathrm{c},\ \dfrac{2}{\mathrm{c}}\right)$라 하면 직선 BC의 기울기는 1이다.

$\dfrac{\dfrac{2}{c}-a}{c-\dfrac{2}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$, $c=-a$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\mathrm{a},\ -\dfrac{2}{\mathrm{a}}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right\}^2$

$=4a^2+\dfrac{16}{a^2}=20$

$a^2+\dfrac{4}{a^2}=5$

따라서 $k^2=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{4}{a^2}+4=9$

23. [정답] ④

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와 직선 $y=-3$과 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=3$, $y=-3$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=3$ 또는 $b=-3$ …… ㉠

$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$, 즉 $y=\dfrac{a}{x}+b$에서

$\dfrac{a}{x}=y-b$, $x=\dfrac{a}{y-b}$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{a}{x-b}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(3)=f(3)-2$이므로

$\dfrac{a}{3-b}=\dfrac{a}{3}+b-2$ …… ㉡

㉡에서 $b\neq 3$이므로 ㉠에서 $b=-3$이다.

㉡에 $b=-3$을 대입하면

$\dfrac{a}{6}=\dfrac{a}{3}-5$

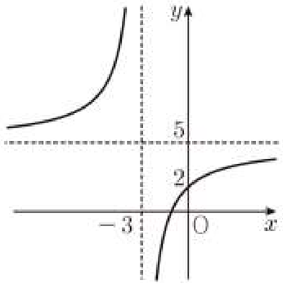
$\therefore\ a=30$

따라서 $f(x)=\dfrac{30}{x}-3$이므로

$f(5)=\dfrac{30}{5}-3=3$

고1	공통수학2 기말고사 대비	선택형		서답형	
	무리함수 306~326p 출처: 마플시너지(2025)	5문항		9문항	

1. 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{bx-c}{x+a}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, $3\le x\le 18$에서 함수 $y=\sqrt{ax-b}+c$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-x}+a & (x<5)\\ \dfrac{3x+1}{x-4} & (x\ge 5)\end{cases}$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 치역은 $\{y\,|\,y>3\}$이다.
> (나) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다.

$f(-11)f(k)=80$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

3. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=-\sqrt{kx-3k}+6$, $y=\sqrt{-kx-3k}-6$에 대하여 다음 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

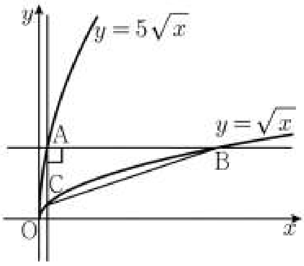
< 보기 >

> ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
> ㄴ. $k>0$이면 두 곡선은 만나지 않는다.
> ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최솟값은 -12이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 다음 그림과 같이 함수 $y=5\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?

(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



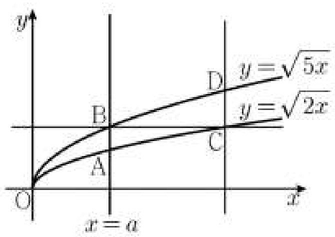
① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{2}{7}$　③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{2}{9}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

5. 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-6}+1 & (x\ge 3)\\ -\sqrt{-x+3}+1 & (x<3)\end{cases}$에 대하여 $f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)$의 값을 구하시오.

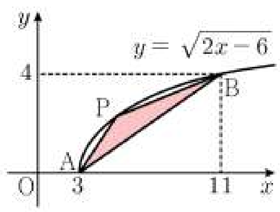
6. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k(x \geq 0)$, $g(x)=\sqrt{7x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

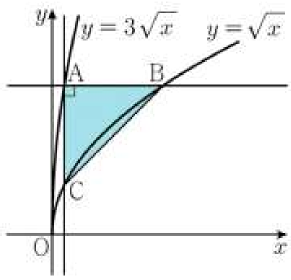
7. 그림과 같이 양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{5x}$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{5x}$와 만나는 점을 D라 하자. 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, a의 값을 구하시오.



8. 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{2x-6}$의 그래프 위의 점 P가 두 점 A$(3,\ 0)$, [B$(11,\ 4)$ 사이를 움직일 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.



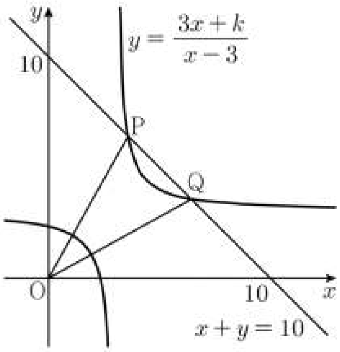
9. 다음 그림과 같이 함수 $y=3\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

10. 좌표평면 위에 점 [P$(-3,\ 2)$와 곡선 $y=\frac{2x+2}{x+3}$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최솟값이 m일 때, m^2의 값을 구하시오.

11. 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x-3}$의 그래프가 직선 $x+y=10$과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 23일 때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.)



12. 좌표평면에서 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로부터 두 함수 $y=\sqrt{-4x+4}+1$, $y=-\sqrt{-4x+4}+1$의 그래프에 그은 두 접선이 직교하도록 하는 a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

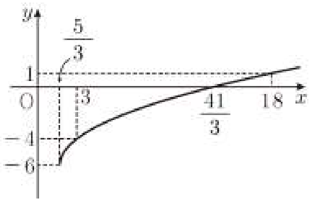
13. 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(3,\ 2)$를 이은 선분과 함수 $y=\sqrt{mx+1}\,(m>0)$의 그래프가 만나기 위한 m의 값의 범위는 $\alpha\le m\le\beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

14. 함수 $f(x)=x^2+7(x\ge0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.)

① $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$　② $4\sqrt{2}$　③ $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$　④ $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$　⑤ $9\sqrt{2}$

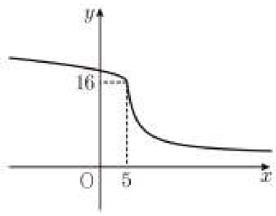
[공통수학2 무리함수 정답 및 해설]

1. [정답] -3
주어진 그래프에서 점근선이 두 직선 $x=-3$, $y=5$이므로
그래프를 나타내는 식은
$y=\dfrac{k}{x+3}+5$(단, $k\neq 0$)
이 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=\dfrac{k}{3}+5$
$\therefore\ k=-9$
즉, 주어진 그래프를 나타내는 식은
$y=\dfrac{-9}{x+3}+5=\dfrac{5x+6}{x+3}$이므로
$a=3$, $b=5$, $c=-6$
이때 $3\le x\le 18$에서 함수 $y=\sqrt{3x-5}-6$의 그래프는 다음 그림과 같다.



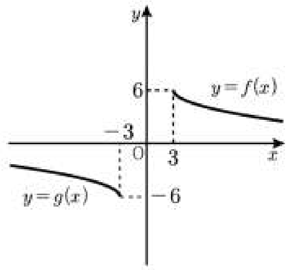
즉, $x=3$에서 최솟값 -4, $x=18$에서 최댓값 1을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -3이다.

2. [정답] 17
조건(가)에서 치역이 $\{y\,|\,y>3\}$이고,
조건(나)에서는 일대일함수이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

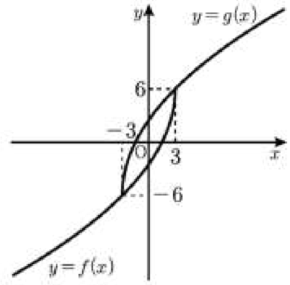


즉, $f(5)=16$에서 $a=16$
이때 $f(-11)=\sqrt{5-(-11)}+16=20$이고,
$f(-11)f(k)=80$이므로 $f(k)=4$
따라서 $\dfrac{3k+1}{k-4}=4$에서 $3k+1=4k-16$이므로 $k=17$

3. [정답] ③
두 함수 $f(x)$, $g(x)$를
$f(x)=-\sqrt{kx-3k}+6$, $g(x)=\sqrt{-kx-3k}-6$라 하자.
ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx-3k}+6$
$=-(\sqrt{-kx-3k}-6)$
$=-g(x)$
이므로 $g(x)=-f(-x)$
따라서 두 곡선 $y=-\sqrt{kx-3k}+6$, $y=\sqrt{-kx-3k}-6$은 원점에 대하여 대칭이다. (참)
ㄴ. $k>0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



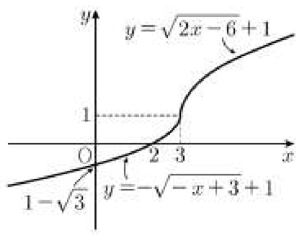
따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (참)
ㄷ. (ⅰ) $k>0$일 때
ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.
(ⅱ) $k<0$일 때
ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 작아질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=6$과 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-6$과 멀어진다. 따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최솟값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-3,\ -6)$을 지날 때이다.



$-6=-\sqrt{-3k-3k}+6$
$\sqrt{-6k}=12$, $-6k=144$
따라서 $k=-24$(거짓)

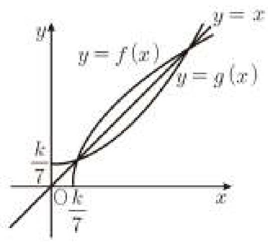
4. [정답] ④
점 A의 좌표를 $(a,\ 5\sqrt{a})(a>0)$라 하면 $\mathrm{B}(25a,\ 5\sqrt{a})$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$가 된다.
직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌
두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $24a$, $4\sqrt{a}$이고
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로
$24a=4\sqrt{a}$, $6a=\sqrt{a}$
$36a^2=a$
이때 $a\neq 0$이므로 $36a=1$, $a=\dfrac{1}{36}$
따라서 삼각형 ACB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot(24a)^2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

5. [정답] -1
$x\ge 3$에서 $f(x)=\sqrt{2x-6}+1$ …… ㉠
$x<3$에서 $f(x)=-\sqrt{-x+3}+1$ …… ㉡
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$
다음 그림에서 $f(a)=3$을 만족시키는 함수의 식은
㉠이므로 $\sqrt{2a-6}+1=3$, $2a-6=4$
$\therefore\ a=5$
$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $f(b)=-2$
다음 그림에서 $f(b)=-2$를 만족시키는 함수의 식은
㉡이므로 $-\sqrt{-b+3}+1=-2$, $\sqrt{-b+3}=3$
$-b+3=9$
$\therefore\ b=-6$
$\therefore\ f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)=5+(-6)$
$=-1$

6. [정답] ④
함수 $f(x)=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k\,(x\ge 0)$는
집합 $\{x\,|\,x\ge 0\}$에서 집합 $\left\{y\,\middle|\,y\ge \dfrac{1}{7}k\right\}$로의 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k$에서
$\dfrac{1}{7}x^2=y-\dfrac{1}{7}k$, $x^2=7y-k$
$\therefore\ x=\sqrt{7y-k}\,(\because\ x\ge 0)$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{7x-k}$
즉, 함수 $g(x)=\sqrt{7x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k=x$에서
$x^2-7x+k=0$
이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$k\ge 0$, $D=(-7)^2-4k>0$
$\therefore\ 0\le k<\dfrac{49}{4}$
따라서 정수는 0, 1, 2, $\cdots$, 12의 13개이다.

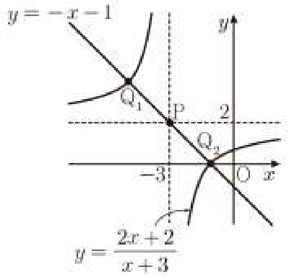
7. [정답] 8
$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{2a})$, $\mathrm{B}(a,\ \sqrt{5a})$
점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로
$\sqrt{2x}=\sqrt{5a}$, $x=\dfrac{5}{2}a$
따라서 $\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{2}a,\ \sqrt{5a}\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\sqrt{2a}\right)$
두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2a}-\sqrt{2a}}{\frac{5}{2}a-a}=\frac{\sqrt{2a}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\ (\because\ a>0)$$
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sqrt{a}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ a=8$

8. [정답] 4
삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다. 직선 AB의 방정식은
$y=\dfrac{4-0}{11-3}(x-3)$
$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$
이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을
$y=\dfrac{1}{2}x+k$ (k는 실수)라 하면
$\sqrt{2x+6}=\dfrac{1}{2}x+k$
위의 식의 양변을 제곱하면
$2x-6=\dfrac{1}{4}x^2+kx+k^2$
$\therefore\ x^2+4(k-2)x+4k^2+24=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라하면
$\dfrac{D}{4}=(2k-4)^2-(4k^2+24)=0$, $-16k-8=0$
$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$
두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 사이의 거리는
직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ 위의 점 $(3,\ 0)$과
직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$, 즉 $x-2y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로
$$\frac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(11-3)^2+4^2}=4\sqrt{5}$이므로
삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은
$\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=4$

9. [정답] ④
점 A의 좌표를 $(a,\ 3\sqrt{a})\,(a>0)$라 하면

$B(9a,\ 3\sqrt{a})$, $C(a,\ \sqrt{a})$가 된다.
직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a$, $2\sqrt{a}$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로
$8a=2\sqrt{a}$, $4a=\sqrt{a}$
$16a^2=a$
이때 $a\neq 0$이므로 $16a=1$, $a=\dfrac{1}{16}$
따라서 삼각형 ACB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot(8a)^2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

10. [정답] 8
$y=\dfrac{2x+2}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+2$이므로
점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=2$이다.
즉, 점 $P(-3,\ 2)$는 두 점근선의 교점이다.
점 P가 두 점근선의 교점이므로 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 다음 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다.

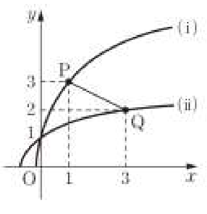


한편, 곡선 $y=\dfrac{2x+2}{x+3}$는 점 $P(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이므로
직선 $y-2=-(x+3)$, 즉 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.
$\dfrac{2x+2}{x+3}=-x-1$에서
$2x+2=(-x-1)(x+3)$
$x^2+6x+5=0$, $(x+5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=-1$
따라서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각 $(-5,\ 4)$, $(-1,\ 0)$이고,
$\overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$이므로
$m=\overline{PQ_2}=\sqrt{(-1+3)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ m^2=8$

11. [정답] 54
$y=\dfrac{3x+k}{x-3}=\dfrac{3(x-3)+9+k}{x-3}=\dfrac{9+k}{x-3}$이므로
점근선의 방정식은 $x=3$, $y=3$
따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이다.
점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은
$y-3=x-3$
$\therefore\ y=x$
이때 직선 $x+y=10$도 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 $x+y=10$과 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x-3}$의 그래프의 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, $P(a,\ b)$라 하면 $Q(b,\ a)$이다.
두 점 P, Q의 x좌표의 곱이 23이므로
$ab=23$
또, 두 점 P, Q가 $x+y=10$ 위의 점이므로
$a+b=10$
따라서 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로
$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=10^2-2\cdot 23=54$

12. [정답] ④
두 함수는 $y=1$에 대하여 대칭인 무리함수이다.
이때 점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x-a)$이다.
이것을 주어진 함수의 식에 대입하여 정리하면
$-4x+4=\{m(x-a)-1\}^2$
$-4x+4=m^2(x-a)^2-2m(x-a)+1$
$m^2x^2-2(am^2+m-2)x+a^2m^2+2am-3=0$
이때 무리함수의 그래프와 직선이 접하려면 이 방정식은 중근을 가져야 한다.
따라서 위 방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(am^2+m-2)^2-m^2(a^2m^2+2am-3)=0$
$(1-a)m^2-m+1=0$
이 m에 관한 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이므로 두 접선이 직교하기 위해서는 두 근의 곱이 -1이어야 한다.
따라서 이차방정식 $(1-a)m^2-m+1=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha\beta=\dfrac{1}{1-a}=-1$
$\therefore\ a=2$

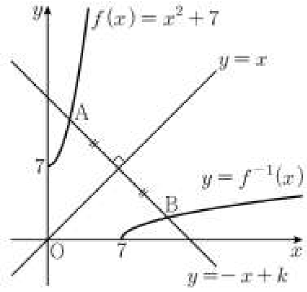
13. [정답] 9
$y=\sqrt{mx+1}$의 그래프가 선분 PQ와 만나려면 곡선의 위치는 (ⅰ), (ⅱ)의 사이 또는 (ⅰ), (ⅱ)이어야 한다.



(ⅰ) 곡선이 점 $P(1,\ 3)$을 지날 때,
$3=\sqrt{m+1}$, $m+1=9$
$\therefore\ m=8$
(ⅱ) 곡선이 점 $Q(3,\ 2)$를 지날 때,
$2=\sqrt{3m+1}$, $3m+1=4$
$\therefore\ m=1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는 $1\leq m\leq 8$
$\therefore\ \alpha=1$, $\beta=8$
$\therefore\ \alpha+\beta=9$

14. [정답] ④

다음 그림과 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 선분 AB의 길이의 최솟값은 함수 $f(x)=x^2+7(x\geq 0)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 최솟값의 2배이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ a^2+7)(a>0)$이라 하면 점 P와 직선 $y=x$, 즉 $-x+y=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-a+a^2+7|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

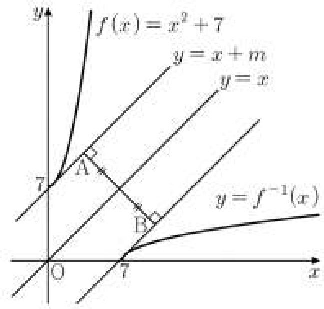
이므로 d의 최솟값은 $\frac{27\sqrt{2}}{8}$이다.

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 직선 $y=x$ 와 평행하고 함수 $f(x)=x^2+7$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 $y=x+m$이라 하자.



이차방정식 $x^2+7=x+m$, 즉 $x^2-x+7-m=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=(-1)^2-4(7-m)=0$, $4m-27=0$

$\therefore\ m=\frac{27}{4}$

이때 두 직선 $y=x$와 $y=x+\frac{27}{4}$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+\frac{27}{4}$, 즉 $4x-4y+27=0$ 사이의 거리와 같으므로 거리 d는

$$d=\frac{|27|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{27}{4\sqrt{2}}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은

$$2d=2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$$