마플시너지(2025) - 공통수학2 (집합) 123~124,126~137p

집합의 개념과 표현 ~ 두 집합 사이의 포함관계

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 집합 $A=\{x \mid x^2-2kx+5k+24=0,\ x\text{는 실수}\}$, $B=\{x \mid 6x^2-11x-10=0\}$에 대하여 $n(A)+n(B)=2$를 만족시키는 정수 k의 개수를 구하시오.

02 자연수 전체의 집합의 부분집합 A가 '$x \in A$이면 $\dfrac{36}{x} \in A$'를 만족한다. 집합 A의 원소의 개수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, $A \neq \varnothing$)

03 두 집합 $A=\{-2,\ 4\}$, $B=\{-2,\ 2,\ a-1,\ 3a-2\}$에 대하여 $A \subset B$가 성립하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

04 [2019년 3월 고2 이과 25번 변형]
자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x \mid x\text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n \subset A_{49}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

05 집합 $\mathrm{A}=\{\varnothing,\ 1,\ 3,\ \{1,\ 3\}\}$ 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in \mathrm{A}$　② $\varnothing \subset \mathrm{A}$
③ $1 \in \mathrm{A}$　④ $\{1,\ 3\} \in \mathrm{A}$
⑤ $\{1,\ 3\} \not\subset \mathrm{A}$

06 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자. $2 \notin X$, $5 \in X$인 모든 X에 대하여 $S(X)$의 합은?

① 456　② 466　③ 476
④ 486　⑤ 496

07 집합 $A=\{x\mid x=5n-2,\ n\text{은 } 0<n\leq 8\text{인 정수}\}$의 부분집합 중 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하시오.

08 집합 $X=\{x\mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최대의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(4)=8$

ㄴ. $a\in X,\ b\in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이다.

ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=682$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 집합 $A=\{x\mid x\text{는 } 100\text{보다 작은 짝수}\}$의 부분집합 B가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 집합 B의 진부분집합의 개수는 31이다.
(나) 집합 B의 원소 중 가장 작은 원소는 12이다.

이때 집합 B의 원소의 개수를 p, 집합 B의 원소의 합을 q라 할 때, $\dfrac{q}{p}$의 최솟값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

10 [2016년 9월 고2 이과 13번/3점]
집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는?

(가) $n(X)\geq 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

11 집합 $A=\{x\mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A의 부분집합의 개수를 구하시오.

12 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 반드시 포함하고 n을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16개일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

13 집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$이라 하고, A_1의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2의 원소의 총합을 $S(A_2)$, $\cdots$, A_8의 원소의 총합을 $S(A_8)$이라 할 때, $S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_8)$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

14 집합 $U=\{1, 2, 3, x, 7, 9\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$이라 하고, 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 모든 원소의 합을 s_k라 하자.
$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n=150$일 때, x의 값을 구하시오.

15 집합 X의 모든 원소의 곱을 $f(X)$라 하자.
집합 $A=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{63}$이라 할 때,
$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{63})=2^k$을
만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

16 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합은 21개이다. 이 집합을 B_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 21)$라 하고 집합 B_k의 모든 원소의 합을 S_k라 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{21}$의 값은?

① 156 ② 160 ③ 164 ④ 168 ⑤ 172

17 집합 $S=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 A가 다음 조건을 모두 만족시킬 때,
집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구하시오.

(가) $a\in A$ 이면 $(10-a)\in A$ 이다.
(나) 집합 A의 모든 원소의 합은 3의 배수이다.

18 집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{10}$이라 하고, 집합 A_k의 원소의 합을
a_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 10)$ 이라 할 때,
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 104 ② 106 ③ 108 ④ 110 ⑤ 112

19 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{31}$이라 하고, 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 31)$의 원소 중에서 가장 작은 원소를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값은?

① 80 ② 81 ③ 82
④ 83 ⑤ 84

20 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^8}\right\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$이라 할 때, 각 부분집합의 최소 원소들의 합을 구하시오.

21 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(6)=8$
ㄴ. $a\in X$, $b\in X$일 때, $a>b$이면 $f(a)<f(b)$
ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=341$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22 집합 $A=\left\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}\right\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{31}$이라 하자. 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 31)$의 원소 중에서 최소인 것을 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값을 구하시오.

23 집합 $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2m-1\}$의 부분집합 중에서 원소 1과 3은 반드시 포함하고 5와 $2m-1$은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32일 때 자연수 m의 값을 구하시오.

24 $M=\{1, 2, 3\}$일 때, $2^M=\{X \mid X\subset M\}$으로 정의한다. 이때 2^M의 부분집합의 개수를 구하시오.

25 집합 $A=\{x \mid x$는 27의 약수$\}$일 때, 다음을 만족하는 집합 B의 개수를 구하시오.

$\{1\} \subset B \subset A,\ n(B)=3$

26 두 집합

$$A=\{x \mid x^2-12x+27=0\},$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{36}{n},\ x,\ n\text{은 자연수}\right\}$$

에 대하여 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

마플시너지(2025) - 공통수학2 (집합)
123~124,126~137p

집합의 개념과 표현 ~ 두 집합 사이의 포함관계

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 10	02 10	03 ③
04 80	05 ⑤	06 ⑤
07 224	08 ⑤	09 ①
10 ②	11 48	12 7
13 ③	14 8	15 480
16 ④	17 45	18 ⑤
19 ④	20 4	21 ③
22 20	23 9	24 256
25 3	26 128	

마플시너지(2025) - 공통수학2 (집합)
123~124,126~137p

집합의 개념과 표현 ~ 두 집합 사이의 포함관계

실시일자	-
26문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 두 집합 $A=\{x \mid x^2-2kx+5k+24=0,\ x\text{는 실수}\}$, $B=\{x \mid 6x^2-11x-10=0\}$에 대하여 $n(A)+n(B)=2$를 만족시키는 정수 k의 개수를 구하시오.

정답 10

해설 $6x^2-11x-10=0$에서 $(3x+2)(2x-5)=0$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

$\therefore\ B=\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{5}{2}\right\}$

즉, $n(B)=2$이므로 $n(A)+n(B)=2$에서 $n(A)=0$

따라서 이차방정식 $x^2-2kx+5k+24=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(5k+24)<0$

$k^2-5k-24<0,\ (k+3)(k-8)<0$

$\therefore\ -3<k<8$

따라서 구하는 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 7$의 10개다.

02 자연수 전체의 집합의 부분집합 A가 '$x\in A$이면 $\frac{36}{x}\in A$'를 만족한다. 집합 A의 원소의 개수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, $A\neq\varnothing$)

정답 10

해설 집합 A의 원소는 자연수이고, $x\in A$이면 $\frac{36}{x}\in A$이므로 x가 될 수 있는 수는 36의 양의 약수인 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$이다.

이때 1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 둘 중 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이다.

또한, 6도 집합 A의 원소가 될 수 있으므로

집합 A의 원소의 개수는

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$일 때 최대이고,

$A=\{6\}$일 때 최소이다.

따라서 $M=9,\ m=1$이므로

$M+m=9+1=10$

03 두 집합 $A=\{-2,\ 4\}$, $B=\{-2,\ 2,\ a-1,\ 3a-2\}$에 대하여 $A\subset B$가 성립하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

정답 ③

해설 $A\subset B$가 성립하려면 $4\in B$이어야 하므로

$a-1=4$ 또는 $3a-2=4$

$\therefore\ a=5$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 a의 값의 합은

$5+2=7$

04 [2019년 3월 고2 이과 25번 변형]
자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x \mid x\text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n\subset A_{49}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

정답 80

해설 $\sqrt{49}=7$이므로 $A_{49}=\{1, 3, 5, 7\}$

$\sqrt{81}=9$이므로 $A_{81}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 $1 \le \sqrt{n} < 9$이면 $A_n \subset A_{49}$이므로

$1 \le n < 81$

따라서 자연수 n의 최댓값은 80이다.

05 집합 $\mathrm{A}=\{\varnothing, 1, 3, \{1, 3\}\}$ 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in \mathrm{A}$　② $\varnothing \subset \mathrm{A}$

③ $1 \in \mathrm{A}$　④ $\{1, 3\} \in \mathrm{A}$

⑤ $\{1, 3\} \not\subset \mathrm{A}$

정답 ⑤

해설 $\{1, 3\}$은 부분집합도 되고 원소도 된다.

06 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자. $2 \notin X$, $5 \in X$인 모든 X에 대하여 $S(X)$의 합은?

① 456　② 466　③ 476

④ 486　⑤ 496

정답 ⑤

해설 $2 \notin X$, $5 \in X$인 집합 X의 개수는

$2^{7-1-1}=2^5=32$

한편, 32개의 집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1 \in X$, $2 \notin X$, $5 \in X$인 집합의 개수와 같으므로

$2^{7-1-2}=2^4=16$

마찬가지로 3, 4, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로 $S(X)$의 합은

$32 \cdot 5+16(1+3+4+6+7)=496$

07 집합 $A=\{x \mid x=5n-2,\ n$은 $0<n \le 8$인 정수$\}$의 부분집합 중 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하시오.

정답 224

해설 $A=\{x \mid x=5n-2,\ n$은 $0<n \le 8$인 정수$\}$에서

$A=\{3, 8, 13, 18, \cdots, 28, 33, 38\}$

집합 A의 원소 중 3의 배수는 3, 18, 33이므로 집합 A의 부분집합 중 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 3, 18, 33을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

$\therefore\ 2^8-2^{8-3}=2^8-2^5=256-32=224$

08 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최대의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(4)=8$

ㄴ. $a \in X$, $b \in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$이다.

ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=682$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(4)$는 4를 최대의 원소로 갖는 모든 집합의 개수이므로 집합 X에서 4는 포함하고 5 이상은 포함하지 않는 부분집합의 개수와 같다.

따라서 부분집합의 개수는

$f(4)=2^{10-1-6}=8$ (참)

ㄴ. $f(a)=2^{a-1}$, $f(b)=2^{b-1}$이고 $a<b$이므로

$f(a)<f(b)$ (참)

ㄷ. $f(2)=2$, $f(4)=8$, $f(6)=32$, $f(8)=128$, $f(10)=512$이므로

$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=682$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

09 집합 $A=\{x\,|\,x$는 100보다 작은 짝수$\}$의 부분집합 B가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 집합 B의 진부분집합의 개수는 31이다.
> (나) 집합 B의 원소 중 가장 작은 원소는 12이다.

이때 집합 B의 원소의 개수를 p, 집합 B의 원소의 합을 q라 할 때, $\dfrac{q}{p}$의 최솟값은?

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

정답 ①

해설 조건 (가)에서 $n(B)=p$라 하면
집합 B의 진부분집합의 개수는 $2^p-1=31$
$\therefore\ p=5$
이때 $\dfrac{q}{p}$가 최솟값을 가지려면 q가 최소이어야 한다.
조건 (나)에서 집합 B의 원소 중 가장 작은 원소는 12이므로 합이 가장 작은 집합 B는
$B=\{12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$
즉, $q=12+14+16+18+20=80$
따라서 $\dfrac{q}{p}$의 최솟값은 $\dfrac{80}{5}=16$

10 [2016년 9월 고2 이과 13번/3점]
집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는?

> (가) $n(X)\geq 2$
> (나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

정답 ②

해설 부분집합의 개수 추론하기
(ⅰ) $6\in X$인 경우 집합 X의 개수는
$2^4-1=15$
(ⅱ) $6\not\in X$인 경우 집합 X는 $3,\ 4$를 반드시 포함해야 하므로 집합 X의 개수는
$2^{4-2}=4$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 19이다.

11 집합 $A=\{x\,|\,x$는 12의 약수$\}$일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A의 부분집합의 개수를 구하시오.

정답 48

해설 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6-2^{6-2}=64-16=48$이다.

12 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소 $1,\ 2$를 반드시 포함하고 n을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16개일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

정답 7

해설 $2^{(1,\,2,\,n\text{을 제외한 원소의 개수})}=2^{n-3}=16=n^4$
$\therefore\ n=7$

13 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_8$이라 하고, A_1의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2의 원소의 총합을 $S(A_2)$, $\cdots$, A_8의 원소의 총합을 $S(A_8)$이라 할 때, $S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_8)$의 값은?

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

정답 ③

해설 집합 A의 부분집합을 모두 구해보면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$이다.
이때 1을 반드시 포함하는 집합은 4개, 2를 반드시 포함하는 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 집합은 4개이므로 원소의 총합은
$4(1+2+3)=24$

14 집합 $U=\{1, 2, 3, x, 7, 9\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$이라 하고, 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 모든 원소의 합을 s_k라 하자.
$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n=150$일 때, x의 값을 구하시오.

정답 8

해설 집합 $U=\{1, 2, 3, x, 7, 9\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, x\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 9\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, x\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, x\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{x, 7\}$, $\{x, 9\}$, $\{7, 9\}$로 15개다.
$\therefore n=15$
집합 U의 부분집합 중 1을 포함하고 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 5이다.
마찬가지로 2, 3, x, 7, 9를 각각 포함하는 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수도 5이므로
$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n=5\cdot(1+2+3+x+7+9)$
$5(x+22)=150$
$\therefore x=8$

15 집합 X의 모든 원소의 곱을 $f(X)$라 하자.
집합 $A=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{63}$이라 할 때,
$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{63})=2^k$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

정답 480

해설 집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{6-1}=2^5=32$
마찬가지로 2, 4, 8, 16, 32를 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 32이므로
$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{63})$
$=1^{32}\times 2^{32}\times 4^{32}\times 8^{32}\times 16^{32}\times 32^{32}$
$=2^{32}\times(2^2)^{32}\times(2^3)^{32}\times(2^4)^{32}\times(2^5)^{32}$
$=2^{32}\times 2^{64}\times 2^{96}\times 2^{128}\times 2^{160}$
$=2^{32+64+96+128+160}$
$=2^{480}$
$\therefore k=480$

16 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합은 21개이다. 이 집합을 B_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 21)$라 하고 집합 B_k의 모든 원소의 합을 S_k라 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{21}$의 값은?

① 156 ② 160 ③ 164
④ 168 ⑤ 172

정답 ④

해설 집합 B_k 중에서 1을 원소로 갖는 집합은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 7\}$의 6개이다.
마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도 6이므로
$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{21}$
$=6(1+2+3+4+5+6+7)$
$=168$

17 집합 $S=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 A가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 집합 A의 모든 원소의 곱의 최솟값을 구하시오.

(가) $a\in A$ 이면 $(10-a)\in A$ 이다.
(나) 집합 A의 모든 원소의 합은 3의 배수이다.

정답 45

해설 조건 (가)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.
또, $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.
집합 A는 집합 $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$ 중에서 일부 또는 전체를 부분집합으로 갖는다.
네 집합 $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$은 모든 원소의 합이 각각 10이므로 원소의 합이 3의 배수가 될 수 있는 경우는 15, 30, 45이다.
위의 조건을 만족시키면서 집합 A의 모든 원소의 곱이 최소가 되는 경우는 $\{1, 9\}\subset A$, $\{5\}\subset A$이다.
즉, $A=\{1, 5, 9\}$일 때 모든 원소의 곱의 최솟값 45를 갖는다.

18 집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{10}이라 하고, 집합 A_k의 원소의 합을 a_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 10)$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 104 ② 106 ③ 108
④ 110 ⑤ 112

정답 ⑤

해설 집합 U의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 2를 원소로 갖는 부분집합은
$\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 11\}$의 4개이다.
즉, A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{10} 중에서 2를 원소로 갖는 집합은 위의 4개이다.
마찬가지로 3, 5, 7, 11을 원소로 갖는 집합도 각각 4개씩 있다.
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=4(2+3+5+7+11)$
$=112$

19 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{31}이라 하고, 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 31)$의 원소 중에서 가장 작은 원소를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값은?

① 80 ② 81 ③ 82
④ 83 ⑤ 84

정답 ④

해설 (ⅰ) $a_k=1$일 때,
1을 반드시 포함하는 경우이므로
$2^{5-1}=16$
(ⅱ) $a_k=3$일 때,
1은 포함하지 않고, 3은 반드시 포함하는 경우이므로
$2^{5-2}=8$
(ⅲ) $a_k=5$일 때,
1, 3은 포함하지 않고, 5는 반드시 포함하는 경우이므로
$2^{5-3}=4$
(ⅳ) $a_k=7$일 때,
1, 3, 5는 포함하지 않고, 7은 반드시 포함하는 경우이므로
$2^{5-4}=2$
(ⅴ) $a_k=9$일 때,
9만 포함하는 경우이므로 1
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$
$=1\cdot16+3\cdot8+5\cdot4+7\cdot2+9\cdot1$
$=83$

20 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^8}\right\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합을 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_n이라 할 때, 각 부분집합의 최소 원소들의 합을 구하시오.

정답 4

해설 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^8}\right\}$의 부분집합 중에서

(i) 최소 원소가 $\frac{1}{2^8}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^8}$을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{8-1}=2^7$

(ii) 최소 원소가 $\frac{1}{2^7}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^7}$은 반드시 포함하고,

원소 $\frac{1}{2^8}$은 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-1}=2^6$

(iii) 최소 원소가 $\frac{1}{2^6}$인 경우

즉, 원소 $\frac{1}{2^6}$은 반드시 포함하고,

두 원소 $\frac{1}{2^8}, \frac{1}{2^7}$은 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-2}=2^5$

$\vdots$

따라서 각 부분집합의 최소 원소들의 합은

$\frac{1}{2^8}\cdot 2^7+\frac{1}{2^7}\cdot 2^6+\frac{1}{2^6}\cdot 2^5+\cdots+\frac{1}{2}\cdot 1$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

21 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(6)=8$
ㄴ. $a\in X$, $b\in X$일 때, $a>b$이면 $f(a)<f(b)$
ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=341$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ③

해설 집합 X의 부분집합이 n을 최소의 원소로 가지려면 n은 원소로 갖고, n보다 작은 $1, 2, \cdots, n-1$은 원소로 갖지 않아야 하므로

$f(n)=2^{10-(n-1)-1}=2^{10-n}$

ㄱ. $f(6)=2^{10-6}=2^4=16$ (거짓)

ㄴ. $f(a)=2^{10-a}$, $f(b)=2^{10-b}$

$a>b$이면 $10-a<10-b$이므로

$2^{10-a}<2^{10-b}$

$\therefore f(a)<f(b)$ (참)

ㄷ. $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$

$=2^{10-2}+2^{10-4}+2^{10-6}+2^{10-8}+2^{10-10}$

$=2^8+2^6+2^4+2^2+2^0$

$=256+64+16+4+1$

$=341$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22 집합 $A=\left\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}\right\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{31}$이라 하자. 집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 31)$의 원소 중에서 최소인 것을 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}$의 값을 구하시오.

정답 20

해설 (i) $a_k=4$일 때

집합 A_k는 $\{4\}$로 1개뿐이다.

따라서 $a_k=4$인 k의 개수는 1이다.

(ii) $a_k=2$일 때

집합 A_k는 2는 포함하고 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^1

(iii) $a_k=1$일 때

집합 A_k는 1은 포함하고 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4,\ 2\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^2

(iv) $a_k=\frac{1}{2}$일 때

집합 A_k는 $\frac{1}{2}$은 포함하고 $\frac{1}{2^2}$은 포함하지 않는 부분집합이므로 집합 A_k의 개수는 집합 $\{4,\ 2,\ 1\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^3

(v) $a_k=\frac{1}{2^2}$일 때

집합 A_k는 $\frac{1}{2^2}$을 포함하는 부분집합이므로

집합 A_k의 개수는 집합 $\left\{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2}\right\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 k의 개수는 2^4

(i)~(v)에 의하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}=(4\cdot 1)+(2\cdot 2)+(1\cdot 2^2)+\left(\frac{1}{2}\cdot 2^3\right)+\left(\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\right)=20$$

23

집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}$의 부분집합 중에서 원소 1과 3은 반드시 포함하고 5와 $2m-1$은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32일 때 자연수 m의 값을 구하시오.

정답 9

해설 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2m-1\}\Rightarrow n(A)=m$(개)

원소 1과 3은 반드시 포함하고 5와 $2m-1$은 반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32개이므로

$2^{m-2-2}=32,\ m-4=5$

$m=9$

24

$M=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, $2^M=\{X\,|\,X\subset M\}$으로 정의한다. 이때 2^M의 부분집합의 개수를 구하시오.

정답 256

해설 $2^M=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$

$n(2^M)=8$이므로 2^m의 부분집합의 개수는 $2^8=256$

[다른 풀이]

2^M의 부분집합의 개수를 구하는 것이므로

2^M의 원소의 개수만 알면 된다.

M의 부분집합의 개수가 2^M의 원소의 개수이다.

2^M의 원소의 개수는 $2^3=8$이므로 2^M의 부분집합의 개수는 $2^8=256$

25

집합 $A=\{x\,|\,x$는 27의 약수$\}$일 때, 다음을 만족하는 집합 B의 개수를 구하시오.

$$\{1\}\subset B\subset A,\ n(B)=3$$

정답 3

해설 $A=\{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$

집합 B는 원소 1을 포함한 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합이므로

$\{1,\ 3,\ 9\},\ \{1,\ 3,\ 27\},\ \{1,\ 9,\ 27\}$의 3개이다.

26

두 집합

$$A=\{x\,|\,x^2-12x+27=0\},$$

$$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{36}{n},\ x,\ n\text{은 자연수}\right\}$$

에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

정답 128

해설 $x^2-12x+27=0$에서 $(x-3)(x-9)=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=9$이므로

$A=\{3, 9\}$

$x=\dfrac{36}{n}$ (n은 자연수)을 만족시키는 자연수 x는 36의 양의 약수이므로 $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

따라서 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 $3, 9$를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{9-2}=2^7=128$