

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

- 01** 집합 $A = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키면서 k 개의 원소를 갖는 집합 B 의 개수를 a_k 라 하자. 이때 $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.

- (가) $B \subset A, n(B) \neq 0$
 (나) $x \in B$ 이면 $\frac{729}{x} \in B$ 이다.

- 02** 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $\emptyset \in A$ ㄴ. $\{1, 2\} \subset A$
 ㄷ. $\{1, 2, 3\} \subset A$ ㄹ. $\{\emptyset\} \subset A$
 ㅁ. $2 \in A$ ㅂ. $\{1\} \in A$

- ① ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ② ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ
 ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ ④ ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ
 ⑤ ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

- 03** 두 집합 $A = \{3, 5\}, B = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B, X \neq A, X \neq B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하시오.

- 04** 두 집합 $A = \{3, 4, a+2\}, B = \{b+1, 5, 7\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 7\}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

- 05** 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B - A = B$ 일 때, 다음 보기 중 항상 성립하는 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

- ㄱ. $A \subset B$ ㄴ. $A - B = A$
 ㄷ. $A \cap B = \emptyset$ ㄹ. $B^C \subset A$

- 06** 두 집합 $A = \{2, 1, a+3, b\}, B = \{4, a, b+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
 (단, 집합 A 의 원소는 4개, 집합 B 의 원소는 3개이다.)

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 07** 전체집합 U 의 서로 다른 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap \{(A \cap B) \cup (A \cup B^C)^C\} = B$ 일 때, 다음 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

- ㄱ. $A \cap B = B$ ㄴ. $B - A = \emptyset$
 ㄷ. $A^C \cup B = U - B$ ㄹ. $A \cup B^C = U$

- 08** 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $*$ 를 $A * B = (A - B^C) \cup (A^C - B)$ 로 약속할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
 ㄴ. $A^C * B = B^C * A$
 ㄷ. $A^C * B = \emptyset$ 을 만족시키는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 128이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 09** 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하자. $P \cap Q = R$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

- ① $p \Rightarrow q$ ② $p \Rightarrow \sim r$ ③ $q \Rightarrow r$
 ④ $r \Rightarrow p$ ⑤ $r \Rightarrow \sim q$

- 10** [2016년 6월 고3 문과 16번 변형]
 실수 x 에 대한 세 조건

$$p: |x| \leq 2,$$

$$q: x^2 - 4 < 0,$$

$$r: x > 2$$

에 대하여 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $p \rightarrow q$
 ㄴ. $p \rightarrow \sim r$
 ㄷ. $r \rightarrow \sim q$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 11** 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

- (i) A형인 사람은 B형이 아니다.
 (ii) C형이 아닌 사람은 B형이 아니다.
 (iii) C형인 사람은 D형이 아니다.
 (iv) E형인 사람은 B형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

- ㉠ A형인 사람은 E형이 아니다.
 ㉡ E형인 사람은 C형이 아니다.
 ㉢ E형이면서도 D형인 사람이 있다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 12** 다음 보기 중 명제 ' $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ '이기 위한 필요충분조건인 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, x, y 는 실수이다.)

〈보기〉	
$\neg, x + y > 0$	$\neg, x + y \neq 0$
$\neg, xy \neq 0$	$\neg, x^2 + y^2 > 0$

- ① \neg ② \neg ③ \neg, \neg
④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg, \neg

- 13** 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에서 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉	
$\neg, p: A \cap B^C = \emptyset$	
$q: A \cup B = B$	
$\neg, p: A \cup (B \cup C) = (B \cup C)$	
$q: A \cap (B \cap C) = A$	
$\neg, p: A \subset B, B \subset A$	
$q: A^C \cup B^C = U$	

- ① \neg ② \neg ③ \neg
④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg

- 14** 실수 x 에 대한 두 조건
 $p: 5|x+2| < 14+3x$,
 $q: a < x < b$
에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때,
 $b-a$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

- 15** $x > 1$ 일 때, $x-1 + \frac{4}{x-1} \geq a$ 가 항상 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 구하시오.

- 16** 실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f: R \rightarrow R$ 가 $f(x) = a|x-3| + 2x$ 로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

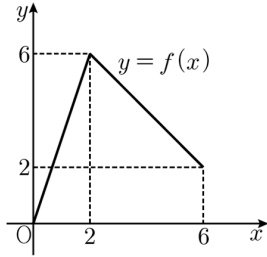
- 17** 함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 는?

- ① $f(x) = \frac{x-1}{2}$ ② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$
③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$ ④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$
⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$

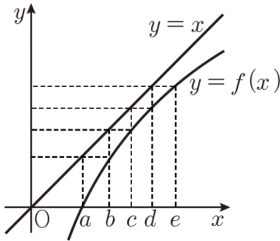
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

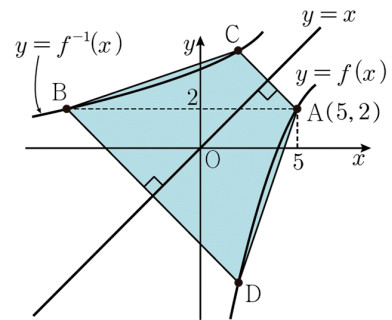
- 18** $0 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해를 모두 구하시오.



- 19** 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)$ 의 값을 구하시오.
(단, 모든 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



- 20** 다음 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $A(5, 2)$ 를 지나는 x 축과 평행한 직선이 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B 라 하자. 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점 C 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 D 에 대하여 두 선분 AC , BD 가 직선 $y = x$ 에 수직이다. $3f^{-1}(2) + 2f(2) = 1$ 일 때, 사각형 $ACBD$ 의 넓이를 구하시오.



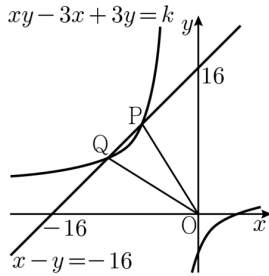
- 21** 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{3x^2 + 7x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$
 가 성립할 때, abc 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 22** 그림과 같이 곡선 $xy - 3x + 3y = k$ 가 직선 $x - y = -16$ 과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x 좌표의 곱이 60일 때, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값을 구하시오. (단, $k < 0$)

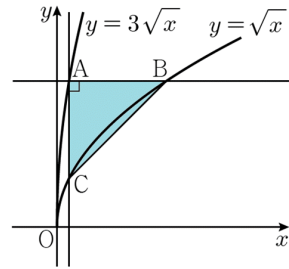


- 23** 함수 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1$, $f^3 = f \circ f^2$, ..., $f^n = f \circ f^{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$)로 정의한다. $f^{100}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b-c+d$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d 는 서로소이고 $a > 0$ 이다.)

- 24** 함수 $y = \frac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

- 25** [2018년 3월 고2 문과 17번 변형]
다음 그림과 같이 함수 $y = 3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x 축, y 축에 각각 평행한 직선이 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ②	03 62
04 ①	05 L, D	06 6
07 ㄱ, L, K	08 ④	09 ④
10 ④	11 ⑤	12 ②
13 ①	14 ⑤	15 4
16 3	17 ④	
18 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 5$		19 e
20 72	21 6	22 136
23 102	24 ③	25 ④



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B 는 공집합이 아니어야 하고, 집합 B 의 원소는 729의 양의 약수이어야 한다.
 이때 729의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729이고
 조건 (나)에 의하여 1과 729, 3과 243, 9와 81은 어느 하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의 원소이다.
 (i) $n(B) = 1$ 인 경우는 $\{27\}$ 이므로 $a_1 = 1$
 (ii) $n(B) = 3$ 인 경우는 $\{1, 27, 729\}$, $\{3, 27, 243\}$,
 $\{9, 27, 81\}$ 이므로 $a_3 = 3$
 (i), (ii)에 의하여
 $a_1 + a_3 = 1 + 3 = 4$

02 정답 ②

해설 $\sqsubset, \{1, 2, 3\} \in A$ 또는 $\{\{1, 2, 3\}\} \subset A$
 $\sqsupset, \{1\} \subset A$

03 정답 62

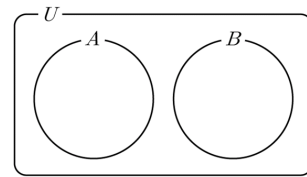
해설 $A = \{3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합에서 두 집합 A, B 를 제외한 것과 같으므로
 집합 X 의 개수는 $2^{8-2} - 2 = 62$

04 정답 ①

해설 $(A \cap B) \subset A$ 이고, $(A \cap B) \subset B$ 에서
 $a + 2 = 7$, $b + 1 = 4$ 이므로
 $a = 5$, $b = 3$
 $\therefore a + b = 5 + 3 = 8$

05 정답 \sqsubset, \sqsupset

해설 다음 그림과 같이 $B - A = B$ 이면
 $A \cap B = \emptyset$, $A \subset B^C$



$\therefore A - B = A$
 따라서 항상 성립하는 것은 \sqsubset, \sqsupset 이다.

06 정답 6

해설 (i) $a + 3 = 4$ 일 때, $a = 1$
 $A = \{2, 1, 4, b\}$
 $B = \{4, 1, b + 1\}$
 $b + 1 = 2$,
 $b = 1$ 에서 $A = \{1, 2, 4\}$ 이고 원소는 3개가 되므로
 조건에 맞지 않음.
 (ii) $b = 4$ 일 때,
 $A = \{2, 1, a + 3, 4\}$
 $B = \{4, a, 5\}$
 $a + 3 = 5$, $a = 2$ 에서 성립함.
 $\therefore a + b = 4 + 2 = 6$

07 정답 $\supset, \sqsubset, \sqsupseteq$

해설 $A \cap \{(A \cap B) \cup (A \cup B^C)^C\}$
 $= A \cap \{(A \cap B) \cup (A^C \cap B)\}$
 $= A \cap \{(A \cup A^C) \cap B\}$
 $= A \cap (U \cap B)$
 $= A \cap B$
 즉, $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$ 이다.
 $\supset, A \cap B = B$
 $\sqsubset, B - A = \emptyset$
 $\sqsupset, A^C \cup B \neq U - B$
 $\sqsupseteq, A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = \emptyset^C = U$
 따라서 항상 옳은 것은 $\supset, \sqsubset, \sqsupseteq$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

08 정답 ④

해설 $A * B = (A - B^c) \cup (A^c - B)$
 $= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
 $= (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$
 $\neg, \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 3\}$
 $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로
 $\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{2, 3\} \cup \{4, 6, 7\}$
 $= \{2, 3, 4, 6, 7\}$
 $\neg, A^c * B = (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c$
 $= (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$
 $B^c * A = (B^c \cap A) \cup (B^c \cup A)^c$
 $= (B^c \cap A) \cup (B \cap A^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$
따라서 $A^c * B = B^c * A$
 $\neg, A^c * B = (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c = \emptyset$ 에서
 $A^c \cap B = \emptyset, (A^c \cup B)^c = \emptyset$
즉, $A^c \cap B = \emptyset, A^c \cup B = U$ 이므로
 $B = (A^c)^c = A$
따라서 $A^c * B = \emptyset$ 를 만족시키는 집합 A 가
정해지면 집합 B 도 정해지므로
구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는 전체집합 U 의
부분집합 A 의 개수와 같다.
 $\therefore 2^7 = 128$
따라서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

09 정답 ④

해설 세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap Q = R$ 인 관계가
성립하므로 $R \subset P, R \subset Q$ 이다. 따라서 $r \Rightarrow p, r \Rightarrow q$
등이 참인 명제가 된다.

10 정답 ④

해설 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면
 $P = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$
 $Q = \{x | -2 < x < 2\}$
 $R = \{x | x > 2\}$
 $\neg, P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 $\neg, R^c = \{x | x \leq 2\}$ 이므로
 $P \subset R^c$
즉, 명제 $p \rightarrow \sim r$ 은 참이다.
 $\neg, Q^c = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq x\}$ 이므로
 $R \subset Q^c$
즉, 명제 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.
따라서 참인 명제는 \neg, \neg 이다.

11 정답 ⑤

해설 조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E
인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv)
를 명제로 표현하면
 $A \rightarrow \sim B, \sim C \rightarrow \sim B, C \rightarrow \sim D, E \rightarrow$
 B 이고, 대우를 각각 구해 보면
(i)의 대우 : B 형이면 A 형이 아니다.
즉, $B \rightarrow \sim A$
(ii)의 대우 : B 형이면 C 형이다.
즉, $B \rightarrow C$
(iii)의 대우 : D 형이면 C 형이 아니다.
즉, $D \rightarrow \sim C$
(iv)의 대우 : B 형이 아니면 E 형이 아니다.
즉, $\sim B \rightarrow \sim E$
 $E \rightarrow B$ 이고 $B \rightarrow \sim A$ 이므로 $E \rightarrow \sim A$,
즉, $A \rightarrow \sim E$
 $\sim C \rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \rightarrow \sim E$
, 즉, $E \rightarrow C$
 $D \rightarrow \sim C, \sim C \rightarrow \sim B, \sim B \rightarrow \sim E$ 이므로 D
 $\rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 \ominus, \ominus 이다.

12 정답 ②

해설 $\neg, |x| + |y| > 0$, 즉 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$
따라서 $|x| + |y| > 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한
필요조건이다.
 $\neg, x + y \neq 0$, 즉 $x \neq -y$ 이므로
 $x + y \neq 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 과 포함관계가
아니다.
 $\neg, xy \neq 0$, 즉 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이므로
 $xy \neq 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한
필요충분조건이다.
 $\neg, x^2 + y^2 > 0$, 즉 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$
따라서 $x^2 + y^2 > 0$ 은 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이기 위한
필요조건이다.
따라서 필요충분조건인 것은 \neg 뿐이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

13 정답 ①

해설 $\neg, A \cap B^C = \emptyset$ 이면 $A \subset B$
 $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$
 따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로
 p 가 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 $\neg, A \cup (B \cap C) = (B \cap C)$ 이면 $A \subset (B \cap C)$
 $A \cap (B \cap C) = A$ 이면 $A \subset (B \cap C)$
 따라서 $q \Rightarrow p, p \not\Rightarrow q$ 이므로
 p 는 q 이기 위한 필요조건이다
 $\neg, A \subset B, B \subset A$ 이면 $A = B$
 $A^C \cup B^C = U$ 이면 $(A \cap B)^C = U$
 $\therefore A \cap B = \emptyset$
 따라서 $p \not\Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이다.
 이상에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ뿐이다.

14 정답 ⑤

해설 조건 p 에서
 (i) $x \geq -2$ 일 때,
 $x+2 \geq 0$ 이므로 $5(x+2) < 14+3x$
 $2x < 4, x < 2$
 따라서 부등식의 해는 $-2 \leq x < 2$
 (ii) $x < -2$ 일 때,
 $x+2 < 0$ 이므로 $-5(x+2) < 14+3x$
 $-8x < 24, x > -3$
 따라서 부등식의 해는 $-3 < x < -2$
 (i), (ii)에 의하여 $-3 < x < 2$
 이때 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로
 $a = -3, b = 2$
 따라서 $b - a = 2 - (-3) = 5$

15 정답 4

해설 $x > 1$ 이므로 $x-1 > 0$
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$ 이므로
 $a \leq 4$ 이어야 한다.
 따라서 a 의 최댓값은 4

16 정답 3

해설 (i) $x < 3$ 일 때, $x-3 < 0$ 이므로
 $f(x) = -a(x-3) + 2x = -(a-2)x + 3a$
 (ii) $x \geq 3$ 일 때, $x-3 \geq 0$ 이므로
 $f(x) = a(x-3) + 2x = (a+2)x - 3a$
 (i), (ii)에서
 $f(x) = \begin{cases} -(a-2)x + 3a & (x < 3) \\ (a+2)x - 3a & (x \geq 3) \end{cases}$
 함수 f 가 일대일대응이 되려면 두 직선
 $y = -(a-2)x + 3a, y = (a+2)x - 3a$ 의 기울기의
 부호가 서로 같아야 하므로
 $-(a-2)(a+2) > 0, (a-2)(a+2) < 0$
 $\therefore -2 < a < 2$
 따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

17 정답 ④

해설 $f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라 놓으면
 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로
 $f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$
 $\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [8회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 5$

해설 주어진 그림에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < 2) \\ -x + 8 & (2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 에서

$$f(x) = t \quad (0 \leq t \leq 6) \text{이라 하면 } f(t) = t + 2$$

(i) $0 \leq t < 2$ 일 때

$$3t = t + 2$$

$$\therefore t = 1$$

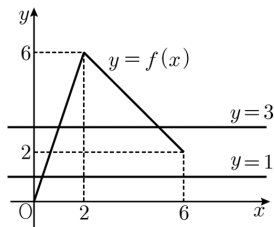
(ii) $2 \leq t \leq 6$ 일 때

$$-t + 8 = t + 2, 2t = 6$$

$$\therefore t = 3$$

(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해는

방정식 $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3$ 의 해와 같다.



방정식 $f(x) = 1$ 의 해는

$$0 \leq x < 2 \text{ 일 때, } 3x = 1 \text{에서 } x = \frac{1}{3}$$

$2 \leq x \leq 6$ 일 때, 해가 존재하지 않는다.

방정식 $f(x) = 3$ 의 해는

$$0 \leq x < 2 \text{ 일 때, } 3x = 3 \text{에서 } x = 1$$

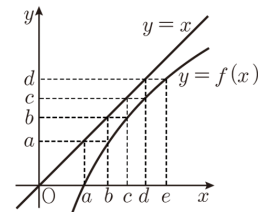
$$2 \leq x \leq 6 \text{ 일 때, } -x + 8 = 3 \text{에서 } x = 5$$

따라서 방정식 $f(f(x)) = f(x) + 2$ 의 해는

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

19 정답 e

해설 직선 $y = x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



$f^{-1}(c) = k$ 라 하면 $f(k) = c$ 이므로

$$k = d$$

$f^{-1}(d) = l$ 이라 하면 $f(l) = d$ 이므로

$$l = e$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c) &= f^{-1}(f^{-1}(c)) \\ &= f^{-1}(d) \\ &= e \end{aligned}$$

20 정답 72

해설 점 A(5, 2)가 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(5) = 2 \text{이고 } f^{-1}(2) = 5$$

$$3f^{-1}(2) + 2f(2) = 1 \text{에 대입하면}$$

$$2f(2) = 1 - 3f^{-1}(2) = 1 - 3 \cdot 5 = -14 \text{에서}$$

$$f^{-1}(-7) = 2 \text{이므로 } B(-7, 2)$$

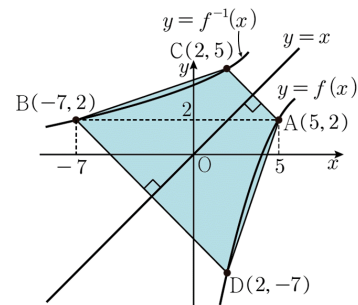
이때 두 직선 AC, BD가 직선 $y = x$ 에 수직이고

두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가

직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 A, B를

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 각각 C, D이다.

즉, C(2, 5), D(2, -7)



사다리꼴 ACBD에서 $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$, $\overline{BD} = 9\sqrt{2}$ 이고

높이는 선분 AC의 중점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 과 선분 BD의

중점 $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로 $6\sqrt{2}$ 이다.

따라서 사다리꼴 ACBD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2} + 9\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{2} = 72$$

21 정답 6

해설 $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$ 이므로
주어진 등식의 양변에 $(x-1)(x+1)^2$ 을 곱하면
 $3x^2 + 7x - 2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1)^2 + c(x-1)$
 $3x^2 + 7x - 2 = (a+b)x^2 + (2b+c)x + (-a+b-c)$
 $a+b=3, 2b+c=7, -a+b-c=-2$ 이므로
세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2, c=3$
 $\therefore abc=6$

22 정답 136

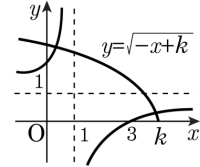
해설 $xy - 3x + 3y = k \quad \dots \textcircled{1}$
곡선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $x - y = -16$ 의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라 하고, $y = x + 16$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면
 $x^2 + 16x + (48 - k) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha\beta = 48 - k = 60$
 $\therefore k = -12$
 $k = -12$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $x = -6$ 또는 $x = -10$
 $\therefore P(-6, 10), Q(-10, 6)$
 $\therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP}^2 = 6^2 + 10^2 = 136$

23 정답 102

해설 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에서
 $f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$
같은 방법으로 하면 $f^{100}(x) = \frac{x}{1-100x}$
따라서 $a=1, b=0, c=-100, d=1$ 이므로
 $a+b-c+d=102$

24 정답 ③

해설 $y = \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3이다.

25 정답 ④

해설 점 A의 좌표를 $(a, 3\sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면
 $B(9a, 3\sqrt{a}), C(a, \sqrt{a})$ 가 된다.
직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌
두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a, 2\sqrt{a}$ 이고
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로
 $8a = 2\sqrt{a}, 4a = \sqrt{a}$
 $16a^2 = a$
이때 $a \neq 0$ 이므로 $16a = 1, a = \frac{1}{16}$
따라서 삼각형 ACB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \cdot (8a)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$