실시일자	-	# 숙제	이름
35문제 / DRE수학			

쎈 - 수학 Ⅱ (2025) 12~21p

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

01 $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $\frac{1}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

02 $\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x + 1}$의 값을 그래프를 이용하여 구하시오.

03 $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{2 - \sqrt{3 + x^2}}$의 값은?

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

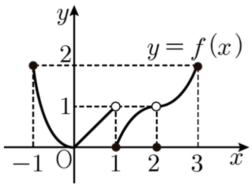
04 [2015년 11월 고2 문과 24번/3점]
$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x + 2} - 2}$의 값을 구하시오.

05 $\lim_{x \to 3} \left\{ \frac{1}{x - 3} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) \right\}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

06 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$의 값을 구하시오.

07 $-1 \le x \le 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x)$의 값이 존재한다.

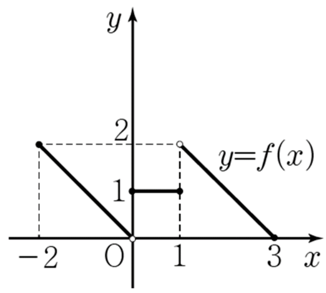
ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. $-1 < a < 1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

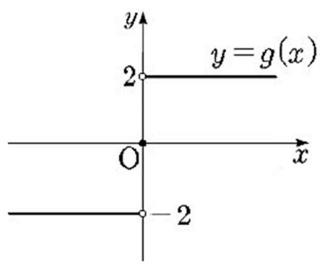
08 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & (x \ge 2) \\ -x+k & (x \le 2) \end{cases}$에 대하여 $\lim_{x \to 2} f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

09 다음 그림은 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)=x^2-3x$에 대하여 $\lim_{x \to 0+} f(g(x)) + \lim_{x \to 3-} g(f(x))$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

10 함수 $f(x)=x^2$, $y=g(x)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프가 아래와 같을 때, $\lim_{x \to 0} g(f(x))$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

11 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{9x^2-x}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

12 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{x^2+4}=a$, $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+7x}{3x^2-2}=b$,
$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+3}-2}{x}=c$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a>b$ ② $a=b$ ③ $b<c$
④ $a-b=c$ ⑤ $a+c=b$

13 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+4}+x)$의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

14 다음 극한을 조사하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$$

15 $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=2$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -12 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -3

16 다음 등식을 만족하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=1$$

17 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$를 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은?

① 11 ② 13
③ 15 ④ 17
⑤ 19

18 [2013년 3월 고3 이과 8번/3점]
다항함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=1$
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

19 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2x-1<f(x)<2x+5$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}$의 값을 구하시오.

20 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 부등식 $\frac{2}{x+1}<\frac{f(x)}{x}<\frac{4}{2x+1}$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

21 극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

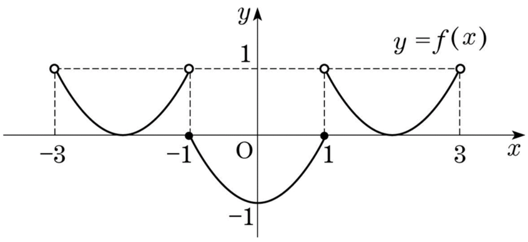
〈보기〉

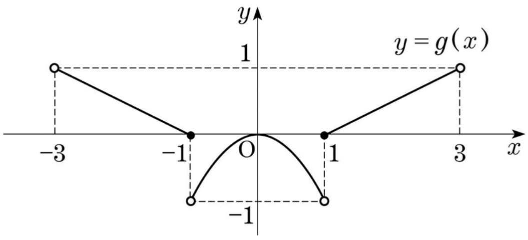
ㄱ. $\lim_{x\to4}(x-4)$
ㄴ. $\lim_{x\to-1}|x+1|$
ㄷ. $\lim_{x\to6}\frac{x^2-36}{x-6}$
ㄹ. $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

22 [2011년 10월 고3 문과 14번/4점]

그림은 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?





<보 기>

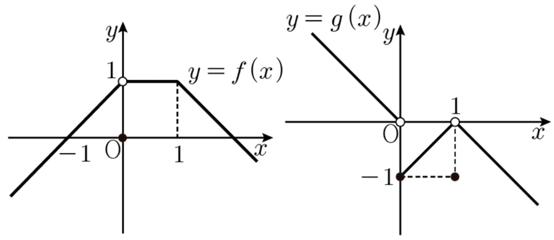
ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1} \{f(x)+g(x)\} = 1$

ㄷ. $\lim_{x\to -1} f(x)g(x) = 0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같을 때, 극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1} g(x)$　ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(g(x))$

ㄷ. $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(나) $\lim_{x\to\infty} \{3f(x)-2g(x)\} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{3f(x)+2g(x)}{9f(x)-2g(x)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

25 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 0+}\dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)+2}{3-x}=-2$일 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

26 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 있는대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$도 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)$, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$도 존재한다. (단, $g(x)\neq 0$)

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to a}f(g(x))$도 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27 함수의 극한에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

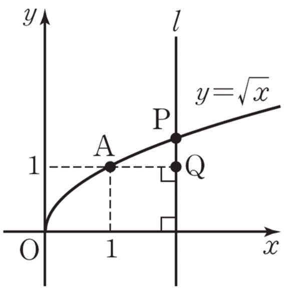
28 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)=6$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 21　② 26　③ 31
④ 36　⑤ 41

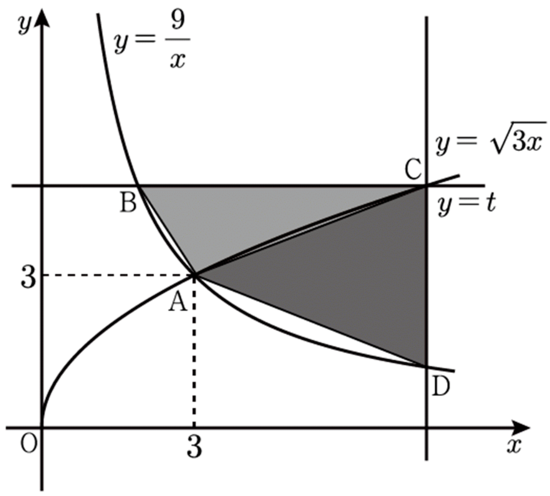
29 두 상수 a, b에 대하여

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-2x+4}+ax}{x-2}=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

30 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위에 두 점 $A(1, 1)$, $P(x, y)$ $(x>1)$이 있다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 할 때, 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라 하자.
점 P가 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 따라 점 A에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 구하시오.



31 [2017년 9월 고2 이과 16번 변형]
다음 그림과 같이 두 곡선 $y=\frac{9}{x}$와 $y=\sqrt{3x}$가 점 $A(3, 3)$에서 만난다. 직선 $y=t\,(t>2)$가 두 곡선 $y=\frac{9}{x}$, $y=\sqrt{3x}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{9}{x}$와 만나는 점을 D라 하자.
삼각형 ACB의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 ADC의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 3+} \frac{g(t)}{f(t)}$의 값은?



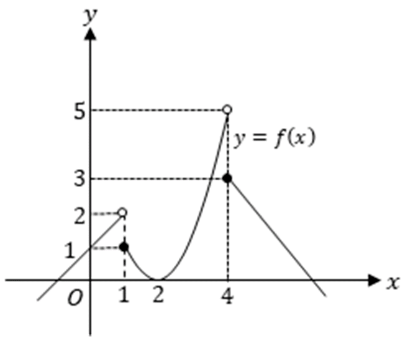
① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

32 실수 t에 대하여 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프가 직선 $y=t$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.
$\lim_{t\to 0-} f(t)=\alpha$, $\lim_{t\to 4-} f(t)=\beta$라 할 때,
실수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

33 [2011년 6월 고3 문과 18번/4점]
실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때,
$\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은?

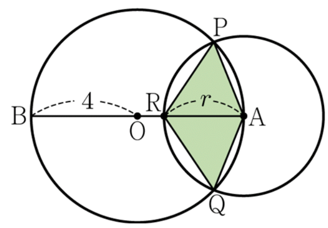
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

34 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+3}{t-1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t+9}{t+2}\right)$의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

35 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 O 위에 한 점 A가 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r $(0<r<8)$인 원이 원 O와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자.
사각형 APRQ의 넓이를 $S(r)$라 할 때,
$\lim_{r\to 8-} \frac{S(r)}{\sqrt{8-r}}$의 값을 구하시오.



실시일자	-	숙제	이름
35문제 / DRE수학			

쎈 – 수학 Ⅱ (2025) 12~21p

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

빠른정답

01 ③	02 -1	03 ①
04 20	05 ③	06 $-\frac{1}{2}$
07 ⑤	08 2	09 ③
10 ⑤	11 ③	12 ③
13 ②	14 2	15 ①
16 -4	17 ③	18 ⑤
19 8	20 ③	21 ④
22 ④	23 ④	24 ②
25 -8	26 ②	27 ③
28 ④	29 $-\frac{3}{2}$	30 2
31 ①	32 4	33 ④
34 ③	35 32	

실시일자	-	숙제	이름
35문제 / DRE수학			

쎈 – 수학 Ⅱ (2025) 12~21p

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

01 정답 ③

해설 $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - 2x - 2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 2x - 2)}{(x^2 - x + 1)}$

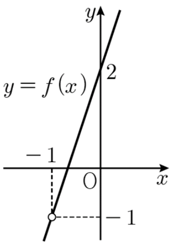
$= \frac{1}{3}$

02 정답 -1

해설 $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 2}{x + 1}$라 하면

$x \neq -1$일 때, $f(x) = \frac{(x+1)(3x+2)}{x+1} = 3x + 2$이므로

$y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때,
$f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x + 1} = -1$

03 정답 ①

해설 $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{2 - \sqrt{3 + x^2}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2 + \sqrt{3 + x^2})}{(2 - \sqrt{3 + x^2})(2 + \sqrt{3 + x^2})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2 + \sqrt{3 + x^2})}{1 - x^2}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2 + \sqrt{3 + x^2})}{-(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2 + \sqrt{3 + x^2}}{-(x+1)}$

$= -2$

04 정답 20

해설 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + x - 6)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2} + 2)}{x - 2}$

$= (2+3)(\sqrt{2+2} + 2)$

$= 20$

05 정답 ③

해설 $\lim_{x \to 3} \left\{ \frac{1}{x-3} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) \right\}$

$= \lim_{x \to 3} 3 \left\{ \frac{1}{x-3} \times \frac{x^2 - 9}{2(x^2 + 1)} \right\}$

$= \lim_{x \to 3} \left\{ \frac{1}{x-3} \times \frac{(x+3)(x-3)}{2(x^2 + 1)} \right\}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{2(x^2 + 1)} = \frac{6}{2 \times 10} = \frac{3}{10}$

06

정답 $-\frac{1}{2}$

해설 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

07

정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 항상 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08

정답 2

해설 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x-4)=0$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+k)=-2+k$

$\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이어야 하므로

$0=-2+k$　　$\therefore k=2$

09

정답 ③

해설 $\lim_{x\to0+}f(g(x))=\lim_{g(x)\to0-}f(g(x))=0$

$\lim_{x\to3-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to0+}g(f(x))=0$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(g(x))+\lim_{x\to3-}f(g(x))=0$

10

정답 ⑤

해설 $x\to0$일 때, $f(x)\to0+$이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=2$

11

정답 ③

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{9x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{9-\frac{1}{x}}}$

$=\frac{6}{1+3}=\frac{3}{2}$

12

정답 ③

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{x^2+4}=0$이므로 $a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+7x}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{7}{x}}{3-\frac{2}{x^2}}=3$이므로 $b=3$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+3}-2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}-\frac{2}{x}}{1}=4$

이므로 $c=4$

① $a<b$　② $a\neq b$　③ $b<c$

④ $a-b\neq c$　⑤ $a+c\neq b$

따라서 옳은 것은 ③이다.

13

정답 ②

해설 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+4}+x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+4}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t+4}-t)(\sqrt{t^2-2t+4}+t)}{\sqrt{t^2-2t+4}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t+4}{\sqrt{t^2-2t+4}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2+\frac{4}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}$

$=\frac{-2}{1+1}=-1$

14 정답 2

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x}+2x}{(\sqrt{4x^2+2x}-2x)(\sqrt{4x^2+2x}+2x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x}+2x}{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2x}}+1\right)=2$

15 정답 ①

해설 $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때,

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^2+ax+b)=0$이므로 $9+3a+b=0$

$\therefore b=-3a-9$ $\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+a+3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+a+3)$

$=a+6=2$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$ab=(-4)\cdot3=-12$

16 정답 -4

해설 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=1$에서 $x\to2$일 때 (분자)$\to0$이고

0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$에서

$4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ $\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax-2a-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+a+2}$

$=\frac{4}{a+4}$

따라서 $\frac{4}{a+4}=1$에서 $a=0$이므로

㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a+b=-4$

17 정답 ③

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다.

또한 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$에서 $x\to1$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

이때, $f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}$

$=\frac{1+a}{2}=-1$

이므로 $a+1=-2$ $\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)$이므로

$f(-2)=(-3)\cdot(-5)=15$

18 정답 ⑤

해설 다항함수의 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$이므로

$f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

$f(x)-x^2=3x+a$에서

$f(x)=x^2+3x+a$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{f(x)}=1$이므로

$\frac{2}{f(1)}=1$ 즉, $f(1)=2$이다.

$f(1)=1+3+a=2$에서

$a=-2$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$이므로

$f(2)=2^2+3\cdot2-2=8$

19 정답 8

해설 $2x-1<f(x)<2x+5$의 각 변을 세제곱하면

$(2x-1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+5)^3$

$x\to\infty$일 때 $x>0$이므로 각 변을 x^3+1로 나누면

$\frac{(2x-1)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}$

그런데 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}=8$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$

20 정답 ③

해설 $\frac{2}{x+2}<\frac{f(x)}{x}<\frac{4}{2x+1}$의 각 변에 양수 x를 곱하면

$\frac{2x}{x+2}<f(x)<\frac{4x}{2x+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x+1}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

21 정답 ④

해설 ㄱ. $\lim_{x\to4}(x-4)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}|x+1|=\lim_{x\to-1+}(x+1)=0$

$\lim_{x\to-1-}|x+1|=\lim_{x\to-1-}\{-(x+1)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}|x+1|=0$

ㄷ. $\lim_{x\to6}\frac{x^2-36}{x-6}=\lim_{x\to6}\frac{(x+6)(x-6)}{x-6}$

$=\lim_{x\to6}(x+6)=12$

ㄹ. $\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22 정답 ④

해설 ㄱ. $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+0}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to1-0}\{f(x)+g(x)\}$

(거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)g(x)=0$

이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$ (참)

23 정답 ④

해설 ㄱ. $\lim_{x\to1+}g(x)=0$, $\lim_{x\to1-}g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}g(x)=0$

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$

$x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(g(x))=1$

ㄷ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{s\to1-}g(s)=0$

$x\to1-$일 때 $s=1$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1+}g(f(x))\neq\lim_{x\to1-}g(f(x))$이므로

$\lim_{x\to1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 정답 ②

해설 $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)-2g(x)\}=1$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\{3f(x)-2g(x)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{3-\frac{2g(x)}{f(x)}\right\}=0\cdot1=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+2g(x)}{9f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2\frac{g(x)}{f(x)}}{9-2\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{3+2\cdot\frac{3}{2}}{9-2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{6}{6}=1$$

25 정답 -8

해설 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)+2}{3-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(t)}{t}+2}{3-\frac{1}{t}}$$

이때 $\frac{\frac{f(t)}{t}+2}{3-\frac{1}{t}}=h(t)$라 하면

$\frac{f(t)}{t}=\left(3-\frac{1}{t}\right)h(t)-2$이고

$\lim_{t\to\infty}h(t)=-2$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(3-\frac{1}{t}\right)h(t)-2\right\}$$

$=3\cdot(-2)-2$

$=-8$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-8$

26 정답 ②

해설 ㄱ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=[x]$에 대하여

$\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$이지만

$\lim_{x\to0}g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$, $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$ (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=[x]$, $g(x)=x$라 하면

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}[x]$가 되어

극한값이 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

27 정답 ③

해설 ㄱ. [반례]

$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ -1 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\text{는 유리수}) \\ 1 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 이면

$f(x)+g(x)=0$ 이므로 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=0$ 이지만 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례]

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\ge 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$ 이면

$f(x)-g(x)=\begin{cases} -x & (x\ge 0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$ 이지만

$\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$로 놓고

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)

라 하면 $f(x)=\dfrac{h(x)+k(x)}{2}$ 이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ 뿐이다.

28 정답 ④

해설 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+ax}-3x)(\sqrt{9x^2+ax}+3x)}{\sqrt{9x^2+ax}+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{9+\frac{a}{x}}+3}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{9}+3}=\frac{a}{6}=6$$

$\therefore a=36$

29 정답 $-\dfrac{3}{2}$

해설 $x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2-2x+4}+ax)=0$이므로

$\sqrt{4-4+4}+2a=0$, $2+2a=0$

$\therefore a=-1$

$$\therefore b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}+ax}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2-2x+4}-x)(\sqrt{x^2-2x+4}+x)}{(x-2)(\sqrt{x^2-2x+4}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-2x+4}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt{x^2-2x+4}+x}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\therefore a+b=-\dfrac{3}{2}$

30 정답 2

해설 점 P는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로

P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, \sqrt{x})(x>1)$로 놓으면

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(x, 1)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{x}-1$, $\overline{\mathrm{AQ}}=x-1$

이때 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면

$x\to 1+$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}(\sqrt{x}+1)=1+1=2$$

31 정답 ①

해설 점 $\mathrm{B}\left(\frac{9}{t}, t\right)$, 점 $\mathrm{C}\left(\frac{t^2}{3}, t\right)$이므로 점 $\mathrm{D}\left(\frac{t^2}{3}, \frac{27}{t^2}\right)$

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3}-\frac{9}{t}\right)(t-3)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{27}{t^2}\right)\left(\frac{t^2}{3}-3\right)$$

$$\lim_{t\to3+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to3+}\frac{\left(t-\frac{27}{t^2}\right)\left(\frac{t^2}{3}-3\right)}{\left(\frac{t^2}{3}-\frac{9}{t}\right)(t-3)}$$

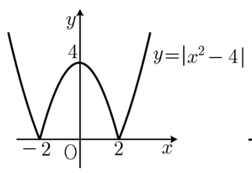
$$=\lim_{t\to3+}\frac{(t^3-27)(t^2-9)}{t(t^3-27)(t-3)}$$

$$=\lim_{t\to3+}\frac{t+3}{t}=2$$

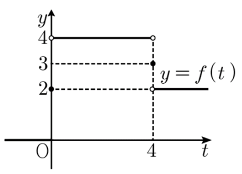
따라서 $\lim_{t\to3+}\frac{g(t)}{f(t)}=2$

32 정답 4

해설 직선 $y=t$와 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

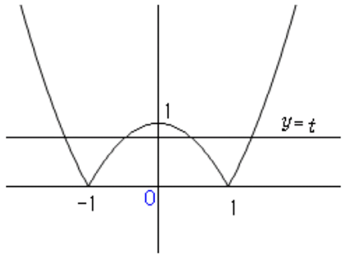
따라서 $\lim_{t\to0-}f(t)=0$, $\lim_{t\to4-}f(t)=4$이므로

$\alpha=0$, $\beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

33 정답 ④

해설 그래프를 이용하여 함수의 좌극한을 구할 수 있는가?
그림과 같이 $t\to1-0$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다.



$\therefore\ \lim_{t\to1-}f(t)=4$

34 정답 ③

해설 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+3}{t-1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t+9}{t+2}\right)$

$=\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+3}{t-1}\right)+\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{-4t+9}{-t+2}\right)$

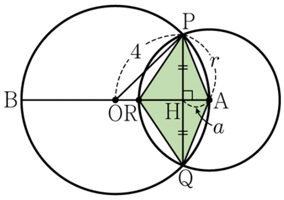
$=\lim_{t\to\infty}f\left(1+\frac{4}{t-1}\right)+\lim_{t\to\infty}f\left(4-\frac{1}{t-2}\right)$

$=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to4-}f(x)$ 이므로 $1+5=6$

35 **정답** 32

해설 다음 그림과 같이 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AH}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=|4-a|$



이때 $\overline{\mathrm{PA}}=r$, $\overline{\mathrm{OP}}=4$이므로

$\triangle\mathrm{POH}$와 $\triangle\mathrm{PAH}$에서

$4^2-(4-a)^2=r^2-a^2$, $8a=r^2$

$\therefore a=\dfrac{r^2}{8}$

즉, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{r^2-\left(\dfrac{r^2}{8}\right)^2}=\dfrac{r}{8}\sqrt{64-r^2}$ 이므로

$$S(r)=2\triangle\mathrm{PRA}$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{r}{8}\sqrt{64-r^2}$$
$$=\frac{r^2}{8}\sqrt{64-r^2}$$

$$\therefore \lim_{r\to8-}\frac{S(r)}{\sqrt{8-r}}=\lim_{r\to8-}\frac{r^2\sqrt{64-r^2}}{8\sqrt{8-r}}$$
$$=\lim_{r\to8-}\frac{r^2\sqrt{(8+r)(8-r)}}{8\sqrt{8-r}}$$
$$=\lim_{r\to8-}\frac{r^2\sqrt{8+r}}{8}$$
$$=32$$