실시일자	-	유형별 학습	이름
21문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 51~53p-1회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

01 정답 ①

해설 중심이 $(2, 3)$일 때 y축에 접해야 하므로 반지름의 길이는 2이다.

02 정답 14

해설 점 $(-3,\ -2)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y+2)^2=3^2$

$x^2+6x+9+y^2+4y+4=9$

$\therefore\ x^2+y^2+6x+4y+4=0$

따라서 $a=6,\ b=4,\ c=4$이므로

$a+b+c=14$

03 정답 ②

해설 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -7, y축의 방향으로 $+1$만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(0-7,\ 0+1)=(-7,\ 1)$로 이동하게 된다.

04 정답 ①

해설 주어진 평행이동에 의하여

점 $(x,\ y)$가 점 $(x-1,\ y+3)$으로 이동하므로

점 $(3,\ 1)$은 점 $(3-1,\ 1+3)$, 즉 $(2,\ 4)$로 이동한다.

05 정답 68

해설 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot(-1)+3\cdot3}{1+3},\ \dfrac{1\cdot2+3\cdot10}{1+3}\right)$, 즉 $(2,\ 8)$

따라서 이 점과 원점 사이의 거리 p는

$p=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}$

$\therefore\ p^2=68$

06 정답 ④

해설 내분점의 성질을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$, $\mathrm{B}(-9,\ 0)$을 $4:3$으로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

$\dfrac{4\times(-9)+3\times a}{4+3}=0$

$-36+3a=0$

$\therefore\ a=12$

07 정답 ②

해설 두 직선 $x+ay+3=0,\ 2x-3y-5=0$이 평행

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{-3}{a}\neq\dfrac{-5}{3}$, 즉 $\dfrac{2}{1}=\dfrac{-3}{a}$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$

08 정답 ④

해설 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $x+3y-7=0$, $3x-y-3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|3k-7|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|-k-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$|3k-7|=|k+3|$

$3k-7=-(k+3)$ 또는 $3k-7=k+3$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=5$

따라서 모든 k의 값의 합은 $1+5=6$

09 **정답** -6

해설 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=13$
이 직선이 점 $(5, 1)$을 지나므로
$5x_1+y_1=13$ $\therefore y_1=-5x_1+13$ $\cdots$ ㉠
또, 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=13$ $\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $x_1^2+(-5x_1+13)^2=13$
$x_1^2-5x_1+6=0$, $(x_1-2)(x_1-3)=0$
$\therefore x_1=2$ 또는 $x_1=3$
$x_1=2$를 ㉠에 대입하면 $y_1=3$
$x_1=3$을 ㉠에 대입하면 $y_1=-2$
따라서 접선의 방정식은
$2x+3y-13=0$, $3x-2y-13=0$
즉, $a=-3$, $b=3$이므로
$a-b=-6$

10 **정답** ③

해설 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-2)-2(y-a)+3=0$
$\therefore 3x-2y+2a-3=0$
이 직선이 원점을 지나므로
$2a-3=0$
$\therefore a=\frac{3}{2}$

11 **정답** ①

해설 점 $(-2, 5)$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $(2, -5)$
이것을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$(2+3, -5-2)$, 즉 $(5, -7)$
이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$(-7, 5)$
따라서 $a=-7$, $b=5$이므로
$a+b=-2$

12 **정답** 5

해설 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를
$m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을
각각 P, Q, R이라 할 때,
삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.
따라서 점 G는 세 점 $A(-2, 1)$, $B(6, -2)$, $C(2, 4)$의 무게중심이므로
$G\left(\frac{-2+6+2}{3}, \frac{1+(-2)+4}{3}\right)$, 즉 $G(2, 1)$
$\therefore \overline{OG}^2=2^2+1^2=5$

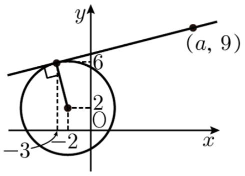
13 **정답** ⑤

해설 주어진 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-2a)^2+(y+2a)^2=8a^2-16a+10$이므로
중심의 좌표는 $(2a, -2a)$이고,
반지름의 길이는 $\sqrt{8a^2-16a+10}$ 이다.
이때 $8a^2-16a+10=8(a-1)^2+2$이므로
$a=1$일 때 반지름의 길이는 최소,
즉 원의 넓이는 최소가 된다.
따라서 주어진 원의 넓이가 최소일 때의 원의 중심의 좌표는 $(2a, -2a)$에 $a=1$을 대입한 $(2, -2)$이다.

14 정답 ③

해설 $x^2+y^2+4x-4y-9=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=17$



원의 중심 $(-2,\ 2)$와 점 $(-3,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{6-2}{-3+2}=-4$

따라서 점 $(-3,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{4}$이므로

접선의 방정식은

$y-6=\dfrac{1}{4}(x+3)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{27}{4}$

이 직선이 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$9=\dfrac{a+27}{4}$

$\therefore\ a=9$

15 정답 24

해설 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=81$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-p)^2+(-y-q)^2=81$

$\therefore\ (x-p)^2+(y+q)^2=81$

이 원을 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+6-p)^2+(y+q)^2=81$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-6+p|=|-q|=9$

$\therefore\ p=15,\ q=9$ ($\because\ p>0,\ q>0$)

$\therefore\ p+q=24$

16 정답 160

해설 두 직선 $5x+y-4=0,\ x+ay+b=0$이 서로 수직이므로

$-5\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1,\ a=-5$

즉, 직선 $x-5y+b=0$이 점 $(2,\ -6)$을 지나므로

$2-5\cdot(-6)+b=0,\ b=-32$

$\therefore\ ab=-5\cdot(-32)=160$

17 정답 64

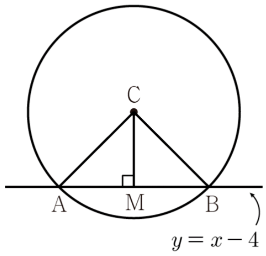
해설 원의 중심 $\mathrm{C}(10,\ 0)$과 직선 $y=x-4$의 거리는 $3\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot3\sqrt{2}=18$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=6$



따라서 원의 방정식은

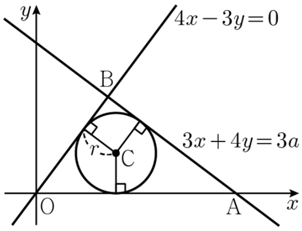
$(x-10)^2+y^2=36$

즉, $x^2-20x+y^2+64=0$이므로

$k=64$

18 정답 ③

해설 다음 그림과 같이 직선 $3x+4y=3a$가 x축과 만나는 점을 A, 두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$의 교점을 B라 하자.



두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$는 수직이므로

원점과 직선 $3x+4y-3a=0$ 사이의 거리는

$\overline{\text{OB}}=\dfrac{|-3a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3}{5}a$ ($\because a>0$)

또 점 $\text{A}(a,\ 0)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$\overline{\text{AB}}=\dfrac{|4a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{4}{5}a$

$\triangle$OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=4\pi$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

내접원의 중심을 C라 하면

$\triangle\text{OAB}=\triangle\text{OAC}+\triangle\text{ABC}+\triangle\text{BOC}$

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\text{OB}}\cdot\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}r(\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AB}}+\overline{\text{OB}})$

$\dfrac{3}{5}a\cdot\dfrac{4}{5}a=2\cdot\left(a+\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}a\right)$

$a^2=10a$

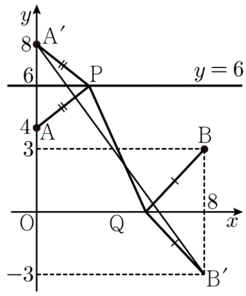
$a(a-10)=0$

$\therefore a=10$ ($\because a>0$)

19 정답 ②

해설 점 $\text{A}(0,\ 4)$를 직선 $y=6$에 대하여 대칭이동한 점을 $\text{A}'(a,\ b)$라 하면 $\overline{\text{AA}'}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+a}{2},\ \dfrac{4+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{4+b}{2}\right)$



이 점이 직선 $y=6$ 위의 점이므로 $\dfrac{4+b}{2}=6$

$\therefore b=8$

또, 직선 AA'이 직선 $y=6$과 수직이므로 $a=0$

따라서 점 A'의 좌표는 $(0,\ 8)$

점 $\text{B}(8,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $\text{B}'(8,\ -3)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}&=\overline{\text{A}'\text{P}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}'}\\&\geq\overline{\text{A}'\text{B}'}\\&=\sqrt{(8-0)^2+(-3-8)^2}\\&=\sqrt{185}\end{aligned}$$

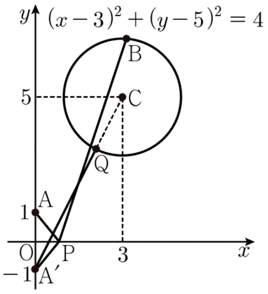
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{185}$ 이다.

20 정답 1

해설 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ -1)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 최솟값과 같다.

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A'B}}$는 점 B가 Q의 위치에 있을 때 최솟값을 갖는다.



$\overline{\mathrm{A'C}}=3\sqrt{5}$이고, 원의 반지름의 길이는 2이므로

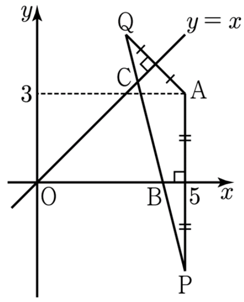
$\overline{\mathrm{A'Q}}=3\sqrt{5}-2$

즉, $a=-2$, $b=3$이므로

$a+b=1$

21 정답 ④

해설



지점 O를 좌표평면 위의 원점, 직선도로 l을 x축으로 정하면 직선도로 m은 직선 $y=x$이다. 도서관을 A, 문구점을 B, 서점을 C라 하면 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(5,\ 3)$이다.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면 P의 좌표는 $(5,\ -3)$이고 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면 Q의 좌표는 $(3,\ 5)$이다.

만들려고 하는 도로의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}$일 때 최소이다.

두 점 $\mathrm{P}(5,\ -3)$, $\mathrm{Q}(3,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=-4(x-5)$ $\therefore y=-4x+17$

x축과 직선 $y=-4x+17$의 교점은 $\mathrm{B}\left(\dfrac{17}{4},\ 0\right)$

$y=x$와 직선 $y=-4x+17$의 교점은

$\mathrm{C}\left(\dfrac{17}{5},\ \dfrac{17}{5}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(\dfrac{17}{4}-\dfrac{17}{5}\right)^2+\left(0-\dfrac{17}{5}\right)^2}$

$=\dfrac{17\sqrt{17}}{20}(\mathrm{km})$

실시일자	-	유형별 학습	이름
21문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 51~53p-2회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

01 중심이 $(3,\ 4)$이고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y-2)^2=5$
② $(x-3)^2+(y-4)^2=16$
③ $(x-5)^2+(y-9)^2=15$
④ $(x-1)^2+(y-3)^2=8$
⑤ $(x-6)^2+(y-6)^2=22$

02 점 $(1,\ -3)$을 $(-3,\ 2)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,4)$를 평행이동한 점의 좌표는?

① $(-1,\ 5)$　② $(-1,\ 7)$
③ $(-2,\ 8)$　④ $(-2,\ 9)$
⑤ $(-5,\ 6)$

03 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -5)$, $\mathrm{B}(a,\ 8)$을 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P가 y축 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

04 두 직선 $3x+ay-2=0$, $bx+cy-4=0$이 서로 수직이고 두 직선의 교점의 좌표가 $(1,\ 1)$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 2　⑤ 3

05 y축 위의 한 점 P로 부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① $(1,\ -2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(0,\ 2)$
④ $(0,\ 1)$ ⑤ $(0,\ -2)$

06 원 $x^2+y^2=25$ 위의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{A}(13,\ 0)$에 대하여 직선 AP의 기울기의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

07 직선 $2x-3y+6=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선이 원점을 지날 때, a의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

08 점 $(2,\ 8)$을 x축에 대하여 대칭이동한 후 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하였더니 직선 $y=ax-18$ 위의 점이 되었다. 이때 상수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

09 $\triangle$ABC의 변 BC, CA, AB의 중점이 각각 $\mathrm{P}(-1,\ a)$, $\mathrm{Q}(3,\ 3)$, $\mathrm{R}(1,\ 6)$이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$일 때, ab의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3
④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

10 원 $x^2+y^2+2kx+6ky+20k-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 이 원의 중심의 좌표는? (단, k는 실수)

① $(-3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(-1,\ -3)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(1,\ -3)$

11 원 $x^2+y^2+6x-4y-13=0$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선이 점 $(a,\ 6)$을 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

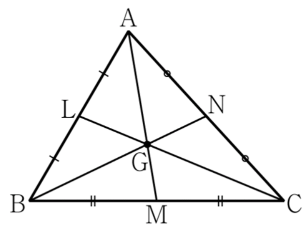
12 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=49$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 원이 x축과 y축에 동시에 접할 때, 두 양수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

13 두 직선 $5x+y-4=0$, $x+ay+b=0$이 점 $(2,\ -6)$에서 수직으로 만날 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

14 원 $x^2+y^2=50$과 직선 $x+2y-5=0$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이는?

① 20π　② 45π　③ 50π
④ 68π　⑤ 70π

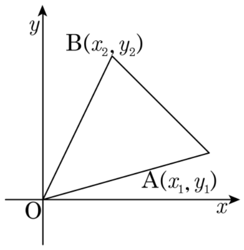
15 다음 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 L, M, N이라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 $\overline{\mathrm{GL}}=1$, $\overline{\mathrm{GM}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{GN}}=\frac{1}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$의 값은?



① 21　② 23　③ 25
④ 27　⑤ 29

16 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+4x-2y+k=0$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

17 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$와 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

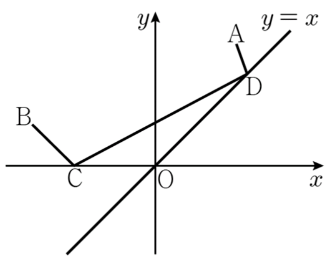
② $\frac{1}{2}|x_1y_1-x_2y_2|$

③ $\frac{1}{2}|x_1y_1+x_2y_2|$

④ $\frac{1}{2}|x_1x_2-y_1y_2|$

⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2+y_1y_2|$

18 [2022년 9월 고1 17번/4점]
그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-3,\ 1)$이 있다. 서로 다른 두 점 C와 D가 각각 x축과 직선 $y=x$ 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은?

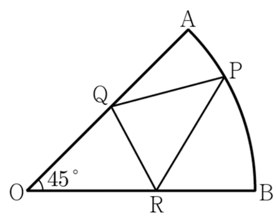


① $\sqrt{42}$ ② $\sqrt{43}$ ③ $2\sqrt{11}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{46}$

19 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$이 있고, 직선 $y=-x+8$ 위에 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는?

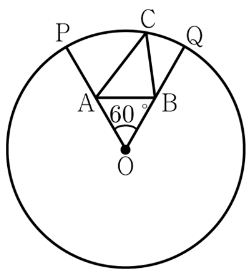
① $\left(\frac{11}{7},\ \frac{45}{7}\right)$ ② $\left(\frac{13}{7},\ \frac{43}{7}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{7},\ \frac{41}{7}\right)$
④ $\left(\frac{17}{7},\ \frac{39}{7}\right)$ ⑤ $\left(\frac{19}{7},\ \frac{37}{7}\right)$

20 다음 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이고 중심각의 크기가 45° 인 부채꼴 AOB에 대하여 호 AB를 삼등분하는 점 중 점 A에 가까운 점을 P라 하자. 선분 OA 위의 점 Q와 선분 OB 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $2\sqrt{5}$
④ 5 ⑤ $\sqrt{30}$

21 반지름의 길이가 $20\,\mathrm{m}$인 원형의 수영장이 있다.
점 O는 수영장의 중심이고, 두 점 P, Q는 원 위의 점이며 $\angle\mathrm{POQ}=60^{\circ}$ 이다. 갑과 을이 각각 P, Q에서 동시에 출발하여 중심 O를 향해가고 있다.
호 PQ 위의 한 점 C에 대하여 선분 OP와 선분 OQ 위의 임의의 두 지점 A, B에 갑과 을이 각각 도달하였을 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$ 의 최솟값은 $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}$이다.
a의 값을 구하시오. (단, a는 자연수이다.)



실시일자	-	유형별 학습	이름
21문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 51~53p-2회

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

빠른정답

01 ②	02 ④	03 6
04 ①	05 ④	06 ③
07 ②	08 ⑤	09 ①
10 ③	11 ②	12 19
13 160	14 ②	15 ①
16 $-\dfrac{131}{13}$	17 ①	18 ④
19 ⑤	20 ①	21 20

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 51~53p-3차

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

01 정답 ②

해설 중심이 $(3,\ 4)$이고 x축에 접하므로
반지름의 길이 $r=4$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

02 정답 ②

해설 점 $(-1,\ -2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3,\ 5)$라 하면
$-1+a=3,\ -2+b=5$
$\therefore\ a=4,\ b=7$
따라서 점 $(5,\ 3)$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(5+4,\ 3+7)$, 즉 $(9,\ 10)$

03 정답 ②

해설 $(x,\ y)\to(x+7,\ y-2)$에 의하여
$(-5,\ 7)\to(-5+7,\ 7-2)=(2,\ 5)$
$\therefore\ a+b=7$

04 정답 ④

해설 선분의 내분점 이해하기
$\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(5,\ a)$를 잇는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는
$$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times a+1\times(-2)}{2+1}\right)$$
즉, $\left(3,\ \dfrac{2a-2}{3}\right)$이므로 $b=3$, $\dfrac{2a-2}{3}=0$
$\therefore\ a=1,\ b=3$
따라서 $a+b=4$

05 정답 3

해설 두 직선 $ax+4y-3=0$, $3x+2y-1=0$은 서로 평행하므로
$$\frac{a}{3}=\frac{4}{2}\neq\frac{-3}{-1}$$
$\therefore\ a=6$
두 직선 $ax+4y-3=0$, $2x+by+1=0$은 서로 수직이므로
$a\cdot2+4\cdot b=0$
이 식에 $a=6$을 대입하면
$12+4b=0$
$\therefore\ b=-3$
$\therefore\ a+b=6+(-3)=3$

06 정답 ①

해설 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x+2y=a$, 즉 $x+2y-a=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|2\cdot1-a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2-a|}{\sqrt5}$$
또, 점 $(0,\ 1)$과 직선 $2x-y=2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt5}$$
이때 $\dfrac{|2-a|}{\sqrt5}=\dfrac{3}{\sqrt5}$이므로
$|2-a|=3$
$\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$

07 정답 ③

해설 $x+y-4+k(x-y)=0$에서
$(1+k)x+(1-k)y-4=0$
원점에서 직선 $(1+k)x+(1-k)y-4=0$까지의 거리는

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+2}}$$

분모 $\sqrt{2k^2+2}$가 최소일 때, $f(k)$는 최대이다.
$k=0$일 때, $\sqrt{2k^2+2}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이므로
$f(k)$의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이다.

08 정답 ③

해설 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 식을
$y-2=m(x-1)$이라 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과
$y-2=m(x-1)$ 즉, $mx-y-m+2=0$까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}},\ |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-4m+4=4m^2+4,\ 3m^2+4m=0$$

따라서 기울기 $m=0,\ -\frac{4}{3}$이다.

x축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

09 정답 ①

해설 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-a)+5(y+1)-10=0$
$\therefore\ x+5y-a-5=0$
이 직선이 원점을 지나므로
$-a-5=0$
$\therefore\ a=-5$

10 정답 ③

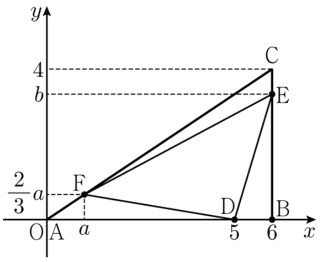
해설 평행이동한 직선의 방정식은
$k(x-m)-(y-3)+k-1=0$
즉, $kx-y-km+k+2=0$
이 직선이 직선 $2x-y+1=0$과 일치하므로
$k=2,\ -km+k+2=1$
따라서 $k=2,\ m=\frac{3}{2}$이므로
$km=3$

11 정답 -2

해설 점 $(-3,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동하면
$(3,\ 1)$
점 $(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$(1,\ 3)$
점 $(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$(1-2,\ 3)$, 즉 $(-1,\ 3)$
점 $(-1,\ 3)$이 직선 $y=ax+1$위의 점이므로
$3=-a+1$
$\therefore\ a=-2$

12 정답 ④

해설 A(0, 0), B(6, 0), C(6, 4)라 하자.



직선 AC의 방정식이 $y=\frac{2}{3}x$이므로

$\mathrm{F}\left(a,\ \frac{2}{3}a\right)$, E(6, b), D(5, 0)이라 하면

△DEF의 무게중심은

$\left(\frac{5+6+a}{3},\ \frac{0+b+\frac{2}{3}a}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+11}{3},\ \frac{2a+3b}{9}\right)$

이때 △ABC의 무게중심이

$\left(\frac{0+6+6}{3},\ \frac{0+0+4}{3}\right)$, 즉 $\left(4,\ \frac{4}{3}\right)$이므로

$\frac{a+11}{3}=4,\ \frac{2a+3b}{9}=\frac{4}{3}$

$\therefore a=1,\ b=\frac{10}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{(6-1)^2+\left(\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{17}{3}$

13 정답 ④

해설 $x^2+y^2-2kx+2ky+8k-20=0$에서

$(x-k)^2+(y+k)^2=2k^2-8k+20$

이 원의 중심의 좌표는 $(k,\ -k)$이고 반지름의 길이는

$\sqrt{2k^2-8k+20}$ 이다.

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름의 길이가 최소가 되어야 하므로

$\sqrt{2k^2-8k+20}=\sqrt{2(k-2)^2+12}$ 에서

$k=2$일 때 원의 반지름의 길이가 최소가 되고 그 때의 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

14 정답 ③

해설 주어진 방정식을 정리하면,

$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}-k$ 이다.

$y=0$ 을 대입 후 정리하면, $(x-1)^2=1-k$

$\longrightarrow$ $k<1$ 일 때 두 점에서 만난다.

ⓡ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,

$(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-k$

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

ⓜ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로

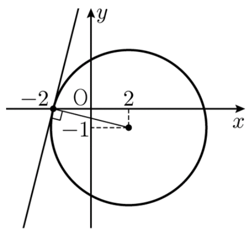
x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (ㄱ, ㄹ, ㅁ) 가 참이다.

15 정답 ③

해설 $x^2+y^2-4x+2y-12=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=17$



원의 중심 $(2,\ -1)$과 점 $(-2,\ 0)$을 지나는

직선의 기울기는

$\frac{-1-0}{2-(-2)}=-\frac{1}{4}$

따라서 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 4이므로

접선의 방정식은

$y=4(x+2)$ $\quad\therefore\ y=4x+8$

이 직선이 점 $(a,\ -4)$를 지나므로 $-4=4a+8$

$\therefore\ a=-3$

16 정답 ⑤

해설 점 $(a, 3)$이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로
$a^2+9=25$, $a^2=16$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$)
이때 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(4, 3)$에서의 접선의 방정식은 $4x+3y=25$이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면
$4x=25$
$\therefore x=\dfrac{25}{4}$
따라서 구하는 x절편은 $\dfrac{25}{4}$이다.

17 정답 45

해설 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=25$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(y+a)^2+(x+b)^2=25$
$\therefore (x+b)^2+(y+a)^2=25$
이 원을 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+4+b)^2+(y+a)^2=25$
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$|-4-b|=|-a|=5$
$|-4-b|=5$에서 $-4-b=\pm5$
$\therefore b=-9$ 또는 $b=1$
$|-a|=5$에서 $-a=\pm5$
$\therefore a=-5$ 또는 $a=5$
따라서 ab의 최댓값은 45이다.

18 정답 ③

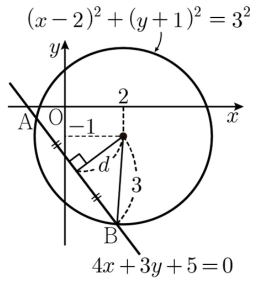
해설 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은
$y-8=m(x-1)$ $\quad\therefore y=mx-m+8$
이 직선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-2=mx-m+8$ $\quad\therefore y=mx-m+10$
이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=-mx-m+10$ $\quad\therefore y=mx+m-10$
이 직선이 점 $(2, -1)$을 지나므로
$-1=2m+m-10$ $\quad\therefore m=3$

19 정답 $-\dfrac{2}{5}$

해설 직선 $(5k+3)x-y+3=0$의 기울기가 $5k+3$, y절편이 3이므로 직선 $(5k+3)x-y+3=0$과 y축에서 수직으로 만나는 직선은
$y=-\dfrac{1}{5k+3}x+3$
이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로
$-\dfrac{3}{5k+3}+3=0$
$\therefore k=-\dfrac{2}{5}$

20 정답 ③

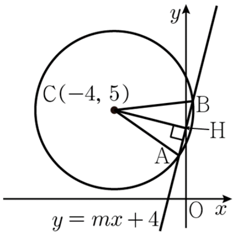
해설 원의 방정식 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$을 표준형으로 나타내면 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$이므로
중심이 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.



위의 그림과 같이 원의 중심에서 직선 $4x+3y+5=0$까지의 거리를 d라 하면
$d=\dfrac{|4\cdot2+3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$
따라서 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하면 피타고라스 정리에 의하여
$\dfrac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{5}$

21 정답 ⑤

해설 다음 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $\mathrm{C}(-4,\ 5)$라 하고 점 C에서 직선 $y=mx+4$, 즉 $mx-y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CA}}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{17}$

이때 점 $\mathrm{C}(-4,\ 5)$와 직선 $mx-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4m-5+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|4m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

따라서 $\frac{|4m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{17}$ 이므로

$|4m+1|=\sqrt{17m^2+17}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-8m+16=0$, $(m-4)^2=0$

$\therefore\ m=4$

22 정답 $\frac{207}{13}$

해설 점 O를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은 $y=3x$이고, 점 $\mathrm{A}(8,\ 6)$을 지나고 직선 OB와 수직인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{9}x+\frac{46}{9}$ 이므로 두 직선의 교점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\frac{23}{13},\ \frac{69}{13}\right)$

직선 OA의 방정식은 $6x-8y=0$, 즉 $3x-4y=0$이고,

점 $\mathrm{P}\left(\frac{23}{13},\ \frac{69}{13}\right)$와 직선 OA 사이의 거리는

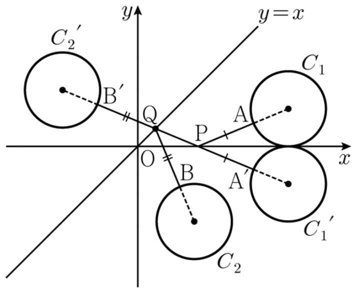
$\frac{\left|3\cdot\frac{23}{13}-4\cdot\frac{69}{13}\right|}{5}=\frac{207}{65}$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{207}{65}=\frac{207}{13}$

23 정답 ③

해설 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1',

원 C_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2'이라 하면

C_1' : $(x-8)^2+(y+2)^2=4$,

C_2' : $(x+4)^2+(y-3)^2=4$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A',

점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 두 점 A', B'은 각각 원 C_1', 원 C_2' 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값은 네 점 A', P, Q, B'이 두 원 C_1', C_2'의 중심을 연결한 선분 위에 있을 때 최소이고, 두 원 C_1', C_2'의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\{8-(-4)\}^2+\{(-2)-3\}^2}-4$

$=13-4=9$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 9이다.

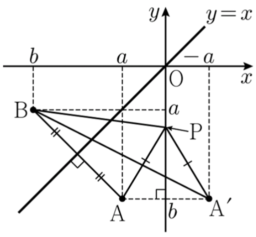
24 정답 3

해설 $\mathrm{A}(a,\ b)\ (a<0,\ b<0)$라 하면

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(b,\ a)$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$\mathrm{A}'(-a,\ b)$



$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\\&\ge\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{(b+a)^2+(a-b)^2}\\&=\sqrt{2(a^2+b^2)}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값이 $3\sqrt{2}$ 이므로

$\sqrt{2(a^2+b^2)}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2=9$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{9}=3$

25 정답 ②

해설 점 $\mathrm{B}(-2,\ -2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을

B'이라 하면 $\mathrm{B}'(-2,\ 2)$이고 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$ 이므로

$|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|=|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}|$

점 P가 직선 AB' 위의 점이 아니면 삼각형 PAB'에서

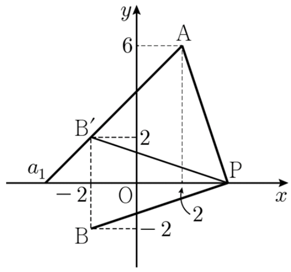
삼각형의 결정조건에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{PB'}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}<\overline{\mathrm{AB'}}$이고

$\overline{\mathrm{PB'}}<\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{PA}}$에서 $-\overline{\mathrm{AB'}}<\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}$이므로

$-\overline{\mathrm{AB'}}<\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}<\overline{\mathrm{AB'}}$

$|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}|<\overline{\mathrm{AB'}}$ $\cdots$ ㉠



점 P가 직선 AB' 위의 점이면

$\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}=\overline{\mathrm{AB'}}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB'}}|\le\overline{\mathrm{AB'}}$

이때 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 6)$, $\mathrm{B}'(-2,\ 2)$에서

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-6)^2}=4\sqrt{2}$

직선 AB'은 x축과 점 $(-4,\ 0)$에서 만난다.

따라서 $|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|$는 점 P의 좌표가 $(-4,\ 0)$일 때

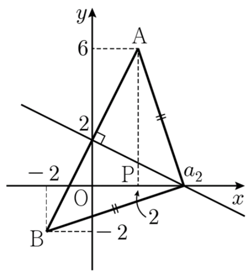
최댓값 $4\sqrt{2}$를 가지고 $a_1=-4$, $M=4\sqrt{2}$

또, $|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}|$는 점 P가 선분 AB의 수직이등분선

위의 점일 때 최솟값 0을 갖는다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+(-2)}{2},\ \dfrac{6+(-2)}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$



직선 AB의 기울기가 $\dfrac{6-(-2)}{2-(-2)}=2$이므로

선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$

선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-0)$

$y=-\dfrac{1}{2}x+2$

이므로 이 직선은 x축과 점 $(4,\ 0)$에서 만난다.

이므로 이 직선은 x축과 점 $(4,\ 0)$에서 만난다.
따라서 $\left|\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PB}}\right|$는 점 P의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때 최솟값 0을 갖고 $a_2=4,\ m=0$

$$\therefore\ \frac{M+m}{a_2-a_1}=\frac{4\sqrt{2}+0}{4-(-4)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$