실시일자	-	# 유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29p

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

01 $\lim_{x\to 2}(3x+4)$의 값을 구하시오.

02 다음 극한값을 함수의 그래프를 이용하여 구하시오.

$$\lim_{x\to 1}(x^2-3)$$

03 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}$$

04 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{|x|}$$

05 다음 극한값을 조사하시오.

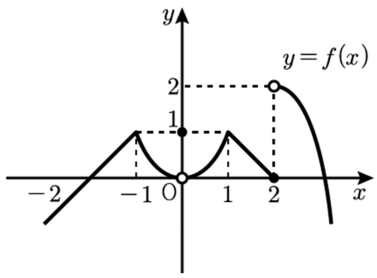
$$\lim_{x\to\infty}\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)$$

06 $\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{3}{x}\right)$의 값을 그래프를 이용하여 구하시오.

07 다음 극한을 조사하시오.

$$\lim_{x\to 0-}\sqrt{-2x}$$

08 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은?



① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

09 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$의 값을 구하시오.

10 $0\le x\le 2$에서 다항함수 $f(x)$가 $6x\le f(x)\le 3x^2+3$을 만족할 때, $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

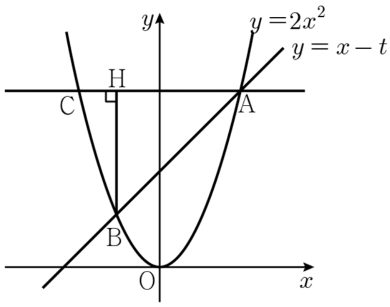
11 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1 & (x\ge 1)\\ -x+k & (x<1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

12 어느 도시의 버스 요금은 이용 거리에 따라 다르다고 한다. 이용 거리가 $15\,\text{km}$ 이하이면 1250원이고 $15\,\text{km}$ 초과 $50\,\text{km}$ 이하이면 $5\,\text{km}$마다 100원씩 요금이 추가되고, $50\,\text{km}$ 초과이면 $7\,\text{km}$마다 100원씩 요금이 추가된다. 이용 거리가 $x\,\text{km}$일 때의 요금을 $f(x)$원이라 할 때, $\lim_{x\to 40+}f(x)$의 값을 구하시오.

13 [2022년 9월 고3 12번 변형]

실수 t ($t<0$)에 대하여 직선 $y=x-t$와 곡선 $y=2x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to0+}\dfrac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은?

(단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)



① -1　② $-\dfrac{3}{2}$　③ -2

④ $-\dfrac{5}{2}$　⑤ -3

14 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)$$

15 $\lim_{x\to16}(\sqrt{x}-4)\left(1-\dfrac{4}{x-16}\right)$의 값을 구하시오.

16 $\lim_{x\to-1}\dfrac{ax^2+bx}{x+1}=1$이 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

17 $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① 1　② 3

③ 5　④ 7

⑤ 9

18 x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=4$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$

19 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2x+3<f(x)<2x+5$를 만족할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}$의 값을 구하면?

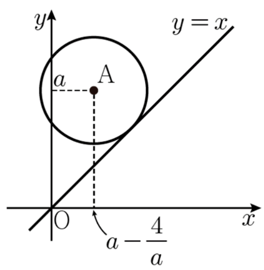
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

20 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}+1}$의 값은?

① $\frac{29}{2}$ ② 15 ③ $\frac{31}{2}$
④ 16 ⑤ $\frac{33}{2}$

21 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to 2}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 2}\{4f(x)+2g(x)\}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4g(x)}{5f(x)+6g(x)}$의 값을 구하시오.

22 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 접하고 중심이 $\mathrm{A}\left(a-\frac{4}{a},\ a\right)$ $(a>0)$인 원이 있다. 이 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값을 d라 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{d}{a}$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

실시일자	-	유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29p

함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

빠른정답

01 10	02 -2	03 1
04 $\frac{1}{3}$	05 -3	06 4
07 0	08 ⑤	09 $-\frac{1}{5}$
10 ④	11 -1	12 1850
13 ③	14 3	15 $-\frac{1}{2}$
16 -2	17 ③	18 -6
19 ⑤	20 ②	21 1
22 ②		

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
22문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29p

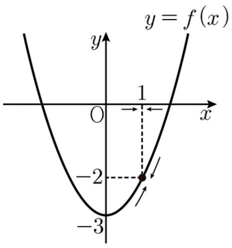
함수의 극한 ~ 함수의 극한값의 계산

01 정답 10

해설 $\lim_{x\to 2}(3x+4)=3\cdot 2+4=10$

02 정답 -2

해설 $f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



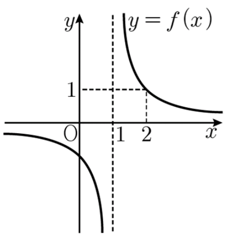
즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-3)=-2$

03 정답 1

해설 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$



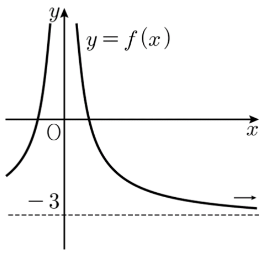
04 정답 $\dfrac{1}{3}$

해설 $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|-3|}=\dfrac{1}{3}$

05 정답 -3

해설 $f(x)=-3+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

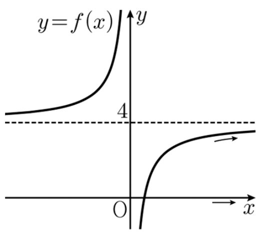
$\lim_{x\to\infty}\left(-3+\dfrac{1}{x^2}\right)=-3$



06 정답 4

해설 $f(x)=4-\dfrac{3}{x}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

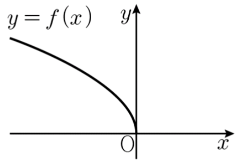
$\lim_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{x}\right)=4$



07 정답 0

해설 $f(x)=\sqrt{-2x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로

$\lim_{x\to 0-}\sqrt{-2x}=0$



08 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$

$=1+0+2=3$

09 정답 $-\frac{1}{5}$

해설 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{5}(x+\sqrt{5})}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{5}(x+\sqrt{5})}=-\frac{1}{5}$

10 정답 ④

해설 $0\le x\le 2$일 때, $6x\le f(x)\le 3x^2+3$에서

$\lim_{x\to 1}6x=\lim_{x\to 1}(3x^2+3)=6$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=6$

11 정답 -1

해설 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-2x-1)=-2$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x+k)=-1+k$

$\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하려면

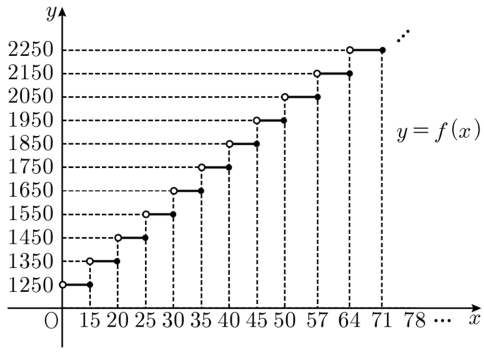
$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$이어야 하므로

$-2=-1+k$

$\therefore k=-1$

12 정답 1850

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore \lim_{x\to 40+}f(x)=1850$

13 정답 ③

해설 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ 2a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ 2b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $2x^2-x+t=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=\frac{1}{2},\ ab=\frac{t}{2}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=a-b$$
$$=\sqrt{(a-b)^2}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}-2t}$$

또, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a,\ 2a^2)$이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=b-(-a)$$
$$=b+a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{4}-2t}-\frac{1}{2}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1-8t}-1}{2t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1-8t}-1)(\sqrt{1-8t}+1)}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-8t)-1}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{-8t}{2t(\sqrt{1-8t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{-4}{\sqrt{1-8t}+1}$$
$$=\frac{-4}{1+1}=-2$$

14 정답 3

해설

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=3$$

15 정답 $-\frac{1}{2}$

해설

$$\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\left(1-\frac{4}{x-16}\right)$$
$$=\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\cdot\frac{x-20}{x-16}$$
$$=\lim_{x\to16}\left(\sqrt{x}-4\right)\cdot\frac{x-20}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{x-20}{\sqrt{x}+4}=\frac{16-20}{4+4}=-\frac{1}{2}$$

16 정답 -2

해설 극한 $\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx}{x+1}$가 1로 수렴하고

$x\to-1$일 때 $x+1\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}(ax^2+bx)=0$ 이다.

$\therefore\ a=b$

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+ax}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}ax=-a=1$$

$\therefore\ a=-1$

$\therefore\ a+b=2a=-2$

17 정답 ③

해설 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+ax+b}=-1$에서 $x\to1$일 때

(분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1\cdots\cdots$㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to13}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}$$

$$=\frac{1}{a+2}=-1$$

따라서$a=-3$, $b=2$이므로

$b-a=2-(-3)=5$

18 정답 -6

해설 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 3, 이차항의 계수가 4인 삼차식임을 알 수 있다.

또, (나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로

$f(x)\to0$에서 $f(0)=0$이다.

즉, $f(x)=3x^3+4x^2+ax$ (a는 상수) 로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(3x^2+4x+a)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(3x^2+4x+a)=a$$

따라서 $a=-1$에서 $f(x)=3x^3+4x^2-x$이므로

$f(-2)=3\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2+(-1)\cdot(-2)$

$=-6$

19 정답 ⑤

해설 $x>-\dfrac{3}{2}$이면

$(2x+3)^2<\{f(x)\}^2<(2x+5)^2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2}{x^2+1}\le\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}\le\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^2}{x^2+1}=4$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^2}{x^2+1}=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

20 정답 ②

해설

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x^2+4)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)$$

$$=5\cdot3=15$$

21 정답 1

해설 $4f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면

$2g(x)=h(x)-4f(x)$, $\lim\limits_{x\to2}h(x)=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)+4g(x)}{5f(x)+6g(x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2\{h(x)-4f(x)\}}{5f(x)+3\{h(x)-4f(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-7f(x)+2h(x)}{-7f(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-7+2\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}{-7+3\cdot\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=1$$

22 정답 ②

해설 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원이 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 접하므로

$$r=\frac{\left|\left(a-\frac{4}{a}\right)-a\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{a}\ (\because a>0)$$

이때 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이에서 반지름의 길이를 뺀 것과 같다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+a^2}=\sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}}$ 이므로

$$d=\overline{\mathrm{OA}}-r=\sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}}-\frac{2\sqrt{2}}{a}$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{d}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{2a^2-8+\frac{16}{a^2}}-\frac{2\sqrt{2}}{a}}{a}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{2-\frac{8}{a^2}+\frac{16}{a^4}}-\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\right)$$

$$=\sqrt{2}$$

실시일자	-	유형별 학습	이름
16문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 41~43p

함수의 연속 ~ 연속함수의 성질

01 다음 중 $x=0$에서 연속인 함수는?

① $f(x)=-\dfrac{3}{x^2}$

② $f(x)=\sqrt{x+1}$

③ $f(x)=\dfrac{10}{x}-9$

④ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

⑤ $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x \geq 0) \\ -x^2+2 & (x<0) \end{cases}$

02 다음 보기의 함수 중 $x=0$에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} |x| & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+2|-2}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3|x|}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

03 다음 중 $x=2$에서 연속인 함수는?

① $f(x)=\sqrt{x-4}$

② $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

③ $f(x)=\dfrac{6}{x-2}+1$

④ $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x \ge 2) \\ -x^2+5 & (x<2) \end{cases}$

⑤ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3|x-2|}{x-2} & (x \ne 2) \\ 4 & (x=2) \end{cases}$

04 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+2}-b}{x-2} & (x \ne 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

05 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x+a}{2x-1} & \left(x \ne \dfrac{1}{2}\right) \\ b & \left(x=\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$가 $x=\dfrac{1}{2}$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

06 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 보기의 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 함수의 개수를 구하시오.

〈보기〉

ㄱ. $\dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}g(x)$　ㄴ. $\{f(x)\}^2$

ㄷ. $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}$　ㄹ. $f(g(x))$

07 함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$에 대하여, 다음 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으면 $\lim_{x\to 0} f(x)\times g(x)$의 값도 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=\alpha$이고 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이면 $\lim_{x\to 0} f(g(x))=f(g(0))$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0} f(g(x))=f(g(0))$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $f(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=f(1)-g(1)$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이면 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (|x|>2) \\ x^2+bx & (|x|\le 2)\end{cases}$가 모든 실수 x에 대하여 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

10 닫힌 구간 $[-1,\ 7]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{x-3}$ 이다. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1
⑤ $\sqrt{2}$

11 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x\le 3) \\ \frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-3} & (x>3)\end{cases}$가 $x=3$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $5\sqrt{6}+16$ ② $6\sqrt{6}+16$ ③ $5\sqrt{6}+25$
④ $6\sqrt{6}+25$ ⑤ $6\sqrt{6}+36$

12 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x+1)f(x)=x^2-3x-4$를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① -5 ② -3
③ 0 ④ 3
⑤ 5

13 $x \geq 3$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-4)f(x)=a\sqrt{x-3}+b$를 만족시킨다.
$f(4)=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

14 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$를 만족시키고 $f(2)f(4)<0$, $f(5)f(6)<0$일 때, 방정식 $f(x)=0$은 실수 전체의 구간에서 적어도 n개의 실근을 갖는다. n의 값을 구하시오.

15 연속함수 $f(x)$에 대하여
$f(-2)=2,\ f(-1)=3,\ f(0)=2,\ f(1)=1$일 때,
방정식 $x^2f(x)-1=-2x$는 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 n개의 실근을 갖는다. 이때 n의 값을 구하시오.

16 $a>0$일 때, 방정식 $x^2-(a-x)(x+a)^2=0$의 근에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 가진다.
② 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가진다.
③ 한 개의 양의 실근과 중근인 음의 실근을 가진다.
④ 한 개의 음의 실근과 중근인 양의 실근을 가진다.
⑤ 오직 한 개의 실근을 가진다.

실시일자	-	유형별 학습	이름
16문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 41~43p

함수의 연속 ~ 연속함수의 성질

빠른정답

01 ②	02 ②	03 ④
04 36	05 ②	06 2
07 ②	08 ①	09 ④
10 ②	11 ⑤	12 ①
13 72	14 4	15 2
16 ①		

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
16문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 41~43p

함수의 연속 ~ 연속함수의 성질

01 정답 ②

해설 ①, ③ $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(0)=1$이고

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to0-}\sqrt{x+1}=1$

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

④ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^2-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(-x^2+2)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ②이다.

02 정답 ②

해설 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $f(0)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x+2|-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+2)-2}{x}=1$

$g(0)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+}h(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^2-3|x|}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^2-3x}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x(x-3)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}(x-3)=-3$

$\lim\limits_{x\to0-}h(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x^2-3|x|}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x(x+3)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0-}(x+3)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}h(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}h(x)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 주어진 함수 중 $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다.

03 정답 ④

해설 ①, ②, ③ $f(2)$가 정의되어 있지 않으므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
④ $f(2)=1$이고
$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2-3)=\lim_{x\to 2-}(-x^2+5)=1$
즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
⑤ $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{3|x-2|}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2+}\frac{3(x-2)}{x-2}$
$=3$
$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{3|x-2|}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2-}\frac{-3(x-2)}{x-2}$
$=-3$
$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)$
즉, $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하지 않으므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
따라서 $x=2$에서 연속인 함수는 ④이다.

04 정답 36

해설 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면
$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이어야 하므로
$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}-b}{x-2}=3$ … ㉠
㉠이 수렴하고, $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로
(분자)$\to 0$이어야 한다.
$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}-b)=0$에서 $2a-b=0$
$\therefore b=2a$ … ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{a}{4}=3$
따라서 $a=12$, $b=24$이므로 $a+b=36$

05 정답 ②

해설 함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$,
즉 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3x+a}{2x-1}=b$가 성립한다.
$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=0$이므로 함수의 극한의 성질에 의해
$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2+3x+a)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+a=2+a=0$
에서 $a=-2$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3x-2}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x+2)}{2x-1}$
$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x+2)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$
즉, $b=\frac{5}{2}$
따라서 $a+b=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

06 정답 2

해설 연속함수의 성질에 의하여 ㄱ, ㄴ은 $x=a$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때 불연속이므로
실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.
ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$, $g(x)=x-1$이라
하면 $f(g(x))=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-2 & (x\ge 1)\end{cases}$이다.
즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만
함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

07 정답 ②

해설 ㄱ. 【반례】 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이면

$\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않지만

$\lim_{x\to0}\{f(x)\times g(x)\}=\lim_{x\to0}1=1$이다. ∴거짓

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}\{g(x)-1\}=0$, 즉 $g(0)=1$

$g(x)=t$라고 놓으면 $\lim_{x\to0}t=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to1}f(t)=f(1)=f(g(0))$

∴참

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=x$일 때,

$\lim_{x\to0+}f(g(x))=1$, $\lim_{x\to0-}f(g(x))=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))$는 존재하지 않는다. ∴거짓

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

08 정답 ①

해설 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$로 극한값이 존재하고,

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$

이때 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=f(1)-g(1)$에서

$\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$이므로

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

두 함수 $h(x)$, $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

함수 $g(x)=f(x)-h(x)$도 $x=1$에서 연속이다.

(참)

ㄴ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\1 & (x<1)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\ge1)\\x-1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x-1)=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(-x+1)=0$,

$f(1)g(1)=0\cdot(-1)=0$에서

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이지만

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\le2)\\-1 & (x>2)\end{cases}$, $g(x)=x+1$이면

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x=1$에서 연속이지만

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\begin{cases}g(x)-1 & (g(x)\le2)\\-1 & (g(x)>2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x & (x\le1)\\-1 & (x>1)\end{cases}$$

에서 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

09 정답 ④

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면

$x=-2$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$f(-2)=\lim_{x\to-2-}f(x)$에서 $4-2b=-2+a$

$\therefore\ a+2b=6$ $\cdots$ ㉠

또, $f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)$에서 $4+2b=2+a$

$\therefore\ a-2b=2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=1$

$\therefore a+b=5$

10 정답 ②

해설 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이다.

$$\therefore\ f(3)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}{(x-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1+x-7+x}{(x-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

11 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$,

즉

$\lim_{x\to3-}(2x-3)=\lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-3}=3$이어야 한다.

$\lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-3}=3$에서 극한값이 존재하고

$x\to3+$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3+}(a\sqrt{x+3}-b)=0$이므로

$a\sqrt{6}-b=0$

$\therefore b=a\sqrt{6}$ $\cdots$ ㉠

$$\lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{a\sqrt{x+3}-a\sqrt{6}}{x-3}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{a(\sqrt{x+3}-\sqrt{6})(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{a}{\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{a}{2\sqrt{6}}=3$$

$\therefore a=6\sqrt{6}$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=6\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=36$

$\therefore a+b=6\sqrt{6}+36$

12 정답 ①

해설 $x\neq-1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x+1}=\frac{(x+1)(x-4)}{x+1}=x-4$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$

$$=\lim_{x\to-1}(x-4)=-1-4=-5$$

13 정답 72

해설 $x \neq 4$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-3}+b}{x-4}$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to4}f(x)=f(4)$

$\therefore \lim\limits_{x\to4}\dfrac{a\sqrt{x-3}+b}{x-4}=3 \quad \cdots$ ㉠

$x\to4$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to4}(a\sqrt{x-3}+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x-3}-a}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x-3}-1)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a}{\sqrt{x-3}+1}$$
$$=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면 $b=-6$

$\therefore a^2+b^2=6^2+(-6)^2=72$

14 정답 4

해설 $f(2)f(4)<0$, $f(5)f(6)<0$이므로

사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은

구간 $(2,\ 4)$, $(5,\ 6)$에서 각각 적어도 하나의 실근을

갖는다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로

$f(0)f(-2)<0$, $f(-3)f(-4)<0$

즉, 방정식 $f(x)=0$은

구간 $(-2, 0)$, $(-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의

실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=4$

15 정답 2

해설 $g(x)=x^2f(x)-(1-2x)$로 놓으면 함수 $f(x)$가

연속함수이므로 함수 $g(x)$도 연속함수이다. 이때

$g(-2)=4\cdot f(-2)-5=3>0$

$g(-1)=1\cdot f(-1)-3=0$

$g(0)=0\cdot f(0)-1=-1<0$

$g(1)=1\cdot f(1)+1=2>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은

열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

또한, $g(-1)=0$이므로 방정식 $g(x)=0$은

열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=2$

16 정답 ①

해설 $f(x)=x^2-(a-x)(x+a)^2$으로 놓으면

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty<0$, $f(-a)=a^2>0$,

$f(0)=-a^3<0$, $f(a)=a^2>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty>0$

이므로 사잇값의 정리에서

구간 $(-\infty,\ -a)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ a)$에서 각각 한 개의

실근을 가진다.

따라서 주어진 방정식은 한 개의 양의 실근과

서로 다른 두 개의 음의 실근을 가진다.

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
39문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

01 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\frac{2x-3}{x} < f(x) < \frac{2x^2+x-2}{x^2}$$

을 만족할 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ 2
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

02 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$2x^2-3 \le (x^2+1)f(x) \le 2x^2+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

03 함수 $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$에 대하여

$\lim_{x \to 2+} f(x)=a$, $\lim_{x \to 2-} f(x)=b$라 할 때,

실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

04 $x=1$에서의 극한값이 존재하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1}\{f(x)+g(x)\}=7$, $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)=12$일 때, $\lim_{x \to 1}\frac{2f(x)+8}{5g(x)-7}$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } \lim_{x \to 1} f(x) > \lim_{x \to 1} g(x)\right)$

05 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x \to a} f(x)=1$, $\lim_{x \to a} g(x)=3$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\lim_{x \to a}\{-3f(x)\}=-3$

② $\lim_{x \to a} 2f(x)g(x)=6$

③ $\lim_{x \to a}\frac{3f(x)}{g(x)}=1$

④ $\lim_{x \to a}[\{f(x)\}^2+3g(x)]=10$

⑤ $\lim_{x \to a} f(g(x))=3$

06 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+7}{x-4}=2$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x}-x}=-1$

③ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{1}{4}$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})=0$

⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+5|x|+1}{2x-4|x|+1}=-3$

07 [2005년 6월 고3 이과 4번]

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t,\ \sqrt{t})$에서 점 $(1,\ 0)$까지의 거리를 d_1, 점 $(2,\ 0)$까지의 거리를 d_2라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은?

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{8}$　⑤ 0

08 다음 두 등식을 동시에 만족하는 이차함수 $f(x)$를 구하면?

식 : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2,\ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x+2}=-2$

① x^2-3x

② x^2+2x+1

③ x^2+2x

④ x^2-2x

⑤ x^2-2x+1

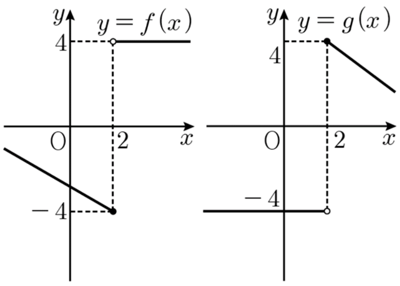
09 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & (x\neq4)\\ a & (x=4)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

10 [2011년 4월 고3 이과 24번/3점]

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} & (x\neq2)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오.

11 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $f(x)\neq0$)

12 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\lim_{x\to2}f(x)g(x)$의 값을 구하시오.



13 삼차방정식 $x^3-x-2=0$은 오직 하나의 실근 α를 갖는다. 다음 열린 구간 중 α가 존재하는 구간은?

① $(-2,\ -1)$ ② $(-1,\ 0)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $(1,\ 2)$ ⑤ $(2,\ 3)$

14 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $|2x-1|-2=0$
ㄴ. $\sqrt{4x-1}-2=0$
ㄷ. $\dfrac{4}{3x-1}-1=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{는 유리수}) \\ -x^3 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, n은 자연수이다.)

① $\lim_{n\to\infty}f\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$
② $\lim_{n\to\infty}f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)=-1$
③ $\lim_{n\to\infty}f\left(-1-\frac{1}{n}\right)=1$
④ $\lim_{x\to1}f(x)=1$
⑤ $\lim_{x\to-1}f(x)=1$

16 $0<a<5$일 때, $\lim_{x\to5}\dfrac{|x^2-a|+a-25}{x-5}$의 값을 구하시오.

17 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x-\alpha)}{x-\alpha}=2$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{2x+5f(x)}{x^2+2f(x)}$의 값을 구하시오.

18 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $\lim_{x \to 2} f(x)$와 $\lim_{x \to 2} g(x)$가 존재하고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2}\{f(x)+g(x)\}=6$
(나) $\lim_{x \to 2}\{(x+1)f(x)+2xg(x)\}=15$

$\lim_{x \to 2} f(x)g(x)$의 값은?

① -7 ② -12 ③ -16
④ -20 ⑤ -27

19 함수의 극한에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.
(단, $g(x) \neq 0$)

ㄴ. $\lim_{x \to a} g(x)$와 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값도 존재한다.
(단, $g(x) \neq 0$)

ㄷ. $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하고 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

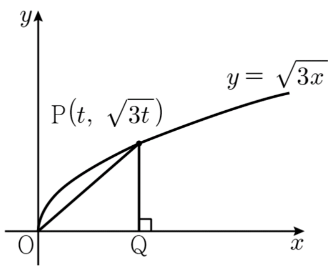
20 함수 $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$가
$\lim_{x \to \infty} f(x)=1$, $\lim_{x \to -1} f(x)=1$을 만족할 때,
$a+b+c+d$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

21 [2008년 4월 고3 이과 21번]

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3} = 2$일 때,
두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

22 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{t},\ \sqrt{3\mathrm{t}})$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점)



23 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(5x-1,\ 12x+1)$ 사이의 거리를 $d(x)$라 할 때, $\lim\limits_{x \to \infty} \{d(x)-13x\}$의 값을 구하시오.

24 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가
$(x^2-1)f(x)=x^3+6x^2-x-6$을 만족할 때,
$f(-1)+f(1)$의 값을 구하시오.

25 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가
$(x^2-x-2)f(x)=x^4+ax+b$를 만족시킬 때,
$f(2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

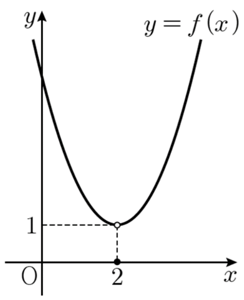
26 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $2f(23)$의 값을 구하시오.

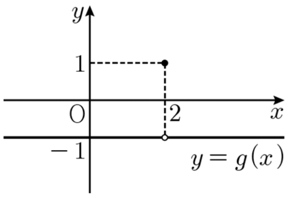
(가) $f(x)=\begin{cases} x+3 & (0 \le x < 6) \\ a(x-6)^2+b & (6 \le x \le 8) \end{cases}$
(단, a, b는 상수)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$이다.

27 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(15)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

> (가) 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서
> $$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 2) \\ x^2+ax+b & (2 \le x \le 6) \end{cases}$$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-3)=f(x+3)$

28 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



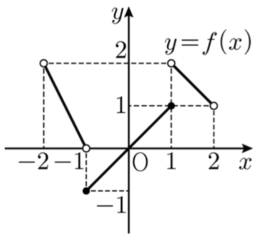


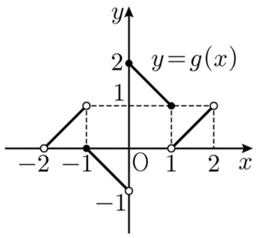
〈보기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

29 다음 그림은 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





〈보기〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)g(x)=0$
ㄴ. 열린구간 $(-2,\ a)$에서 함수 $y=f(x)g(x)$가 연속일 때, a의 최댓값은 1이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=a$, $f(3)=a-7$일 때, 방정식 $f(x)=4$가 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오.

31 방정식 $x^2-4x+a=0$이 구간 $(-2,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

32 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2+2x^2}-2x}{ax+b}=-5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+2b$의 값은?

① $-\frac{1}{5}$　② $-\frac{1}{8}$　③ 0
④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{5}$

33 자연수 n과 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x}\right)}{\sqrt{x^8+16}-4}=a$일 때, $a+n$의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

34 [2020년 3월 고3 이과 12번/3점]
두 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & (x<1)\\ \frac{1}{2x+1} & (x\geq 1)\end{cases}$,
$g(x)=2x^3+ax+b$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 10　② 9　③ 8
④ 7　⑤ 6

35 함수 $f(x)$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

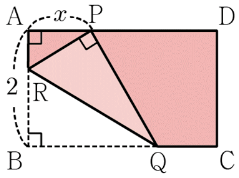
ㄱ. $\lim_{x\to\infty}xf(x)$가 수렴하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$가 수렴하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{f(x)}{x}\right\}$가 수렴하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 $\overline{\mathrm{RQ}}$를 접는 선으로 하여 꼭짓점 B가 $\overline{\mathrm{AD}}$ 위의 점 P에 오도록 접었다. $\overline{\mathrm{AP}}=x$, 삼각형 ARP의 넓이를 $S(x)$라 할 때, $\lim_{x \to 0+} \frac{\{S(x)\}^2}{x^2}$의 값은? (단, 종이의 가로의 길이는 충분히 길다.)



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

37 [2023년 경찰대 19번 변형]
실수 $t(3<t<11)$에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-3)^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 위의 한 점 R를 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$가 되도록 잡는다. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 3+} \frac{S(t)}{(t-3)^2}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

38 함수 $f(x)$는 연속함수이고 $f(0)=4$, $f(1)=a^2-3a-4$, $f(2)=9$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 5 ② 9 ③ 10
④ 13 ⑤ 17

39 [2008년 4월 고3 이과 23번]
두 함수 $f(x)=x^5+x^3-3x^2+k$, $g(x)=x^3-5x^2+3$에 대하여 구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
39문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

빠른정답

01 ③	02 ②	03 2
04 2	05 ⑤	06 ⑤
07 ①	08 ③	09 8
10 32	11 $\frac{5}{2}$	12 16
13 ④	14 ⑤	15 ④
16 10	17 3	18 ⑤
19 ⑤	20 ①	21 48
22 1	23 $\frac{7}{13}$	24 12
25 9	26 15	27 0
28 ⑤	29 ⑤	30 6
31 11	32 ①	33 ④
34 ①	35 ③	36 ③
37 ②	38 ⑤	39 36

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
39문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 44~47p

함수의 극한 ~ 연속함수의 성질

01 정답 ③

해설 $\dfrac{2x-3}{x} < f(x) < \dfrac{2x^2+x-2}{x^2}$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x} \le \lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2}{x^2} = 2$$

따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

02 정답 ②

해설 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2-3}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

03 정답 2

해설 (i) $x>2$일 때, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

(ii) $x<2$일 때, $f(x) = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$

(i), (ii)에서

$\lim_{x\to 2+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2-} f(x) = -1$이므로

$a=1$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2 = 1^2+(-1)^2 = 2$

04 정답 2

해설 $x=1$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1} f(x) = a$, $\lim_{x\to 1} g(x) = b$라 하자. (단, $a>b$)

$$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = a+b$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) \cdot \lim_{x\to 1} g(x) = ab$$

$a+b=7$, $ab=12$이므로 $a=4$, $b=3$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+8}{5g(x)-7} = \frac{2\cdot 4+8}{5\cdot 3-7} = 2$$

05 정답 ⑤

해설 ① $\lim_{x\to a}\{-3f(x)\} = -3\lim_{x\to a} f(x)$

$= -3\cdot 1 = -3$

② $\lim_{x\to a} 2f(x)g(x) = 2\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

$= 2\cdot 1\cdot 3 = 6$

③ $\lim_{x\to a}\dfrac{3f(x)}{g(x)} = 3\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$= 3\cdot\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = 3\cdot\dfrac{1}{3} = 1$

④ $\lim_{x\to a}\left[\{f(x)\}^2 + 3g(x)\right]$

$= \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}^2 + 3\lim_{x\to a} g(x)$

$= 1^2 + 3\cdot 3 = 10$

⑤ $\lim_{x\to a} g(x) = 3$이므로 $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(3)$

그런데 $f(3)$의 값을 알 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

06 정답 ⑤

해설

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+7}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{1-\frac{4}{x}}=2$

② $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2+3t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}=-1$$

③ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=0$$

⑤ $x\to-\infty$일 때, $x<0$이므로 $|x|=-x$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5|x|+1}{2x-4|x|+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5x+1}{2x+4x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}$$

이때 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{6x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t+1}{-6t+1}=-\frac{2}{3}$$

07 정답 ①

해설 함수의 극한과 연속성

점$(t,\ \sqrt{t})$에서 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$까지의 거리 d_1, d_2는

$$d_1=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$
$$d_2=\sqrt{(t-2)^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

08 정답 ③

해설

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=-2$$

주어진 조건식에서

$f(0)=0,\ f(-2)=0$이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x+2)$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax(x+2)}{x}=2$$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2+2x$

09 정답 8

해설 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=4$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$
$$=\lim_{x\to4}(x+4)$$
$$=4+4=8$$

따라서 $a=8$

10 정답 32

해설 연속함수의 뜻 이해하기

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로

$2a+b=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=2$$

따라서 $a=8$, $b=-16$이므로

$2a-b=32$

11 정답 $\frac{5}{2}$

해설
$$\lim_{x\to1}\frac{5(x^3-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2+x+1)}{(x+1)f(x)}$$
$$=\frac{15}{2f(1)}=3$$

$\therefore f(1)=\frac{5}{2}$

12 정답 16

해설 $\lim_{x\to2+}f(x)=4$, $\lim_{x\to2+}g(x)=4$이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\cdot\lim_{x\to2+}g(x)$$
$$=4\cdot4=16$$

$\lim_{x\to2-}f(x)=-4$, $\lim_{x\to2-}g(x)=-4$이므로

$$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\cdot\lim_{x\to2-}g(x)$$
$$=(-4)\cdot(-4)=16$$

따라서 $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=16$

13 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-2)=-8+2-2=-8<0$

$f(-1)=-1+1-2=-2<0$

$f(0)=-2<0$

$f(1)=1-1-2=-2<0$

$f(2)=8-2-2=4>0$

$f(3)=27-3-2=22>0$

이때 $f(1)f(2)<0$이므로 중간값 정리에 의하여 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 실근 α를 갖는다.

14 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=|2x-1|-2$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=-1<0$, $f(2)=1>0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=\sqrt{3}-2<0$, $f(2)=\sqrt{7}-2>0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=\frac{4}{3x-1}-1$로 놓으면 $f(x)$는
구간 $[1,2]$에서 연속이고
$f(1)=1>0$, $f(2)=-\frac{1}{5}<0$이므로
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은
구간 $(1,2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 적어도 하나의 실근을 갖는다.

15 정답 ④

해설 ① $1+\frac{2}{n}$는 유리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2=1$$

② $1-\frac{\sqrt{3}}{n}$은 무리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^3\right\}=-1$$

③ $-1-\frac{1}{n}$이 유리수이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{n}\right)^2=1$$

④ x가 유리수이면 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(-x^3)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ x가 유리수이면 $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} x^2=1$

x가 무리수이면 $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(-x^3)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)=1$

16 정답 10

해설 $0<a<5$이므로 $x\to 5$일 때, $x^2-a>0$

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x^2-a|+a-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-a+a-25}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}(x+5)=10$$

17 정답 3

해설 $x-\alpha=t$라 놓으면 $x\to\alpha$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x-\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+5f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+5\frac{f(x)}{x}}{x+2\frac{f(x)}{x}}=\frac{12}{4}=3$$

18 정답 ⑤

해설 $\lim_{x\to 2} f(x)$와 $\lim_{x\to 2} g(x)$가 존재하므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 2} g(x)=\beta$라 하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)+g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=\alpha+\beta$$

이므로 $\alpha+\beta=6$ ⋯⋯㉠

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 2}\{(x+1)f(x)+2xg(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\{(x+1)f(x)\}+2\lim_{x\to 2}\{xg(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+1)\times\lim_{x\to 2} f(x)+2\lim_{x\to 2} x\times\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=3\alpha+4\beta$$

이므로 $3\alpha+4\beta=15$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=9$, $\beta=-3$

따라서

$$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=\alpha\beta=9\times(-3)=-27$$

19 정답 ⑤

해설 ㄱ. [반례] $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=1$이면

$\lim_{x\to2}g(x)=2$이므로 값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)=p$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=q$ (p, q는 상수)라고

하면 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=pq$이다.

$\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의

값도 존재한다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라

하고 $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=\beta$이다.

$f(x)\neq0$일 때, $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\beta}{\alpha}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20 정답 ①

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=1$에서 극한값이 1이므로

분자, 분모는 같은 차수이고, 극한값은 최고차항의 계수이다.

따라서 $a=0,\ b=1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+d}{x^2-x-2}=1 \quad \cdots ㉠$$

$x\to-1$일 때, 분모$\to0$이므로 분자$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}x^2+cx+d=0,\ (-1)^2+c(-1)+d=0$

$1-c+d=0 \qquad \therefore\ d=c-1$

㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+cx+(c-1)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+c-1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+c-1}{x-2}$$
$$=\frac{-1+c-1}{-1-2}=1$$

$c=-1,\ d=-2$이므로

$a+b+c+d=0+1-1-2=-2$

21 정답 48

해설 무리함수의 극한값 구하기

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$ 이고 $b=3a$ 이다.

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\frac{a}{6}=2$$

$\therefore\ a=12,\ b=36$

22 정답 1

해설 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=t$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}}{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}}{1}=1$$

23 정답 $\frac{7}{13}$

해설 $d(x)=\overline{\mathrm{OP}}$

$=\sqrt{(5x-1)^2+(12x+1)^2}$

$=\sqrt{169x^2+14x+2}$

이므로

$\lim_{x\to\infty}\{d(x)-13x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{169x^2+14x+2}-13x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{169x^2+14x+2}-13x\right)\left(\sqrt{169x^2+14x+2}+13x\right)}{\sqrt{169x^2+14x+2}+13x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14x+2}{\sqrt{169x^2+14x+2}+13x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\frac{2}{x}}{\sqrt{169+\frac{14}{x}+\frac{2}{x^2}}+13}=\frac{14}{13+13}=\frac{7}{13}$$

24 정답 12

해설 $x \neq -1,\ x \neq 1$일 때,

$f(x) = \dfrac{x^3+6x^2-x-6}{x^2-1} = x+6$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서도 연속이다.

$f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x),\ f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x+6) = 5$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+6) = 7$

$\therefore\ f(-1)+f(1) = 12$

25 정답 9

해설 $x \neq -1,\ x \neq 2$일 때,

$f(x) = \dfrac{x^4+ax+b}{x^2-x-2} = \dfrac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

$x \to -1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x \to -1} (x^4+ax+b) = 0$이므로

$1-a+b=0 \quad \cdots ㉠$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$에서 연속이려면

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)}$

$x \to 2$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다

즉, $\lim\limits_{x \to 2} (x^4+ax+b) = 0$이므로

$16+2a+b=0 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a=-5,\ b=-6$

따라서 $x \neq -1,\ x \neq 2$일 때,

$$f(x) = \frac{x^4-5x-6}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)(x^2+x+3)}{(x+1)(x-2)} = x^2+x+3$$

$\therefore\ f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+x+3) = 9$

26 정답 15

해설 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to 6-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6+} f(x) = f(6) = b$이다.

이때

$\lim\limits_{x \to 6-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6-} (x+3) = 9$

$\lim\limits_{x \to 6+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6+} \{a(x-6)^2+b\} = b$이므로

$b=9$이다.

또, 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to 8-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8+} f(x) = f(8) = 4a+9$이다.

이때

$\lim\limits_{x \to 8-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8-} \{a(x-6)^2+9\} = 4a+9$

$\lim\limits_{x \to 8+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (x+3) = 3$이므로

$a = -\dfrac{3}{2}$이다.

즉, $f(x) = \begin{cases} x+3 & (0 \leq x < 6) \\ -\dfrac{3}{2}(x-6)^2+9 & (6 \leq x \leq 8) \end{cases}$이므로

$f(23) = f(15) = f(7) = \dfrac{15}{2}$

$\therefore\ 2f(23) = 15$

27 정답 0

해설 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2)$에서

$4 = 4+2a+b$

$\therefore\ 2a+b=0 \quad \cdots ㉠$

$f(x-3) = f(x+3)$에 $x=3$을 대입하면

$f(0) = f(6)$이므로

$0 = 36+6a+b \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9,\ b=18$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 2) \\ x^2-9x+18 & (2 \leq x \leq 6) \end{cases}$이므로

$f(15) = f(9) = f(3) = 0$

28 정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)g(x)=-1$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)=1$, $f(2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=-1$이고,

$f(2)g(2)=0\cdot 1=0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)\neq f(2)g(2)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

29 정답 ⑤

해설 ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)\cdot \lim_{x\to -1+} g(x)$

$=(-1)\cdot 0=0$

$\lim_{x\to -1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)\cdot \lim_{x\to -1-} g(x)$

$=0\cdot 1=0$

따라서 $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서 연속,

$x=1$에서 불연속이므로 a의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to 1+} g(x)$

$=2+0=2$

$\lim_{x\to 1-} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1-} g(x)$

$=1+1=2$

$f(1)+g(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to 1+} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1-} \{f(x)+g(x)\}$

$=f(1)+g(1)$

즉, 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30 정답 6

해설 $g(x)=f(x)-4$로 놓으면 $f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$이 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $g(1)g(3)<0$이어야 하므로

$g(1)=f(1)-4=a-4$,

$g(3)=f(3)-4=a-7-4=a-11$

에서 $(a-4)(a-11)<0$

$\therefore\ 4<a<11$

따라서 정수 a는 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개이다.

31 정답 11

해설 $f(x)=x^2-4x+a$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $(-2,\ 0)$에서 연속이고

$f(-2)=12+a$, $f(0)=a$이므로

$f(-2)f(0)<0$에서

$(12+a)a<0$

$\therefore\ -12<a<0$

따라서 정수 a는 $-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$의 11개이다.

32 정답 ①

해설 $x\to 1$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(ax+b)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a \qquad \cdots ㉠$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2+2x^2}-2x}{ax-a}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2+2x^2}-2x)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}{(ax-a)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x+1)(x-1)}{a(x-1)(\sqrt{2+2x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x+1)}{a(\sqrt{2+2x^2}+2x)}=-\frac{1}{a}$$

$-\frac{1}{a}=-5$에서 $a=\frac{1}{5}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{1}{5}$

$\therefore\ a+2b=-\frac{1}{5}$

33 정답 ④

해설 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x}\right)}{\sqrt{x^8+16}-4}$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로

극한이 상수 a로 수렴하려면 분자의 최고차항 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 작거나 같아야 한다.

분모 $\sqrt{x^8+16}-4$에서 최고차항의 차수는 4차이고,

분자 $x^n\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x}\right)$에서 최고차항의 차수는 $(n+1)$차이므로 $n+1\le 4$이어야 한다.

(ⅰ) $n+1\le 3$인 경우

분자의 최고차항 차수가 분모의 최고차항 차수보다 작으므로 극한값이 0으로 수렴한다.

$\therefore\ a=0$

(ⅱ) $n+1=4$인 경우

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4x}\right)}{\sqrt{x^8+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^8+x^7}-\sqrt{4x^7}\right)}{\sqrt{x^8+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{4}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{16}{x^8}}-\frac{1}{x^4}}=1\text{이므로 } a=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n=3$, $a=1$일 때, $n+a$의 값이 최대가 되므로

$3+1=4$

34 정답 ①

해설 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$x\ne 1$일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 연속이므로 함수 $h(x)$도 연속이다.

그러므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1-}h(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하므로

$2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$

$$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}\frac{2x^3+ax-a-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(2x^2+2x+a+2)=a+6$$

$$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}\frac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{2x+1}=0$$

$\lim\limits_{x\to1+}h(x)=\lim\limits_{x\to1-}h(x)=h(1)$이므로

$a+6=0$, 즉 $a=-6$

$b=-a-2$에서 $b=4$

$\therefore\ b-a=10$

35 정답 ③

해설 ㄱ. $xf(x)=g(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty}xf(x)$가

수렴하므로 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\alpha$ (α는 상수)

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ ∴참

ㄴ. 【반례】 $x\to\infty$일 때, $f(x)=1$이면

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$이지만 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$이다. ∴거짓

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\dfrac{f(x)}{x}\right\}$가 수렴하면

$\lim_{x\to\infty}\left\{1-\dfrac{f(x)}{x}\right\}=0$이다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

∴참

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

36 정답 ③

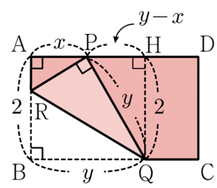
해설 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{BQ}}=y$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=y-x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=y$이므로

직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+2^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+4$

$\therefore y=\dfrac{x^2+4}{2x}$ ⋯ ㉠



△RPA와 △PQH에서

∠A = ∠H = 90°, ∠APR = ∠HQP

이므로 △RPA∽△PQH (AA 닮음)

이때 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QP}}$에서

$x:2=\overline{\mathrm{PR}}:y$

$\therefore \overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}xy$

$\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{PR}}^2-x^2=\dfrac{1}{4}x^2y^2-x^2$이므로

$S(x)=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2(y^2-4)}$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{\{S(x)\}^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}x^2(y^2-4)\right\}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{16}x^2\left\{\frac{(x^2+4)^2}{(2x)^2}-4\right\}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x^6+8x^4+16x^2}{64x^2}-\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{4}$$

37 정답 ②

해설 $f(x)=(x-3)^2$에서 $f'(x)=2(x-3)$

$f'(t)=2(t-3)$

이차함수 $f(x)=(x-3)^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의

접선의 방정식은 $y-(t-3)^2=2(t-3)(x-t)$이고

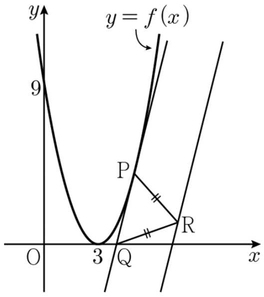
이 접선이 x축과 만나는 점이 Q이므로 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+3}{2}, 0\right)$

한편 $y=2(t-3)(x-7)$은 이차함수 $f(x)=(x-3)^2$

위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선과 평행하고

직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 위의 한 점 R를 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$가

되도록 잡으면 다음 그림과 같다.



두 직선 $y-(t-3)^2=2(t-3)(x-t)$,
$y=2(t-3)(x-7)$은 서로 평행하므로 삼각형 PQR의 높이는 두 직선 사이의 거리, 즉 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$와 직선 $y=2(t-3)(x-7)$ 사이의 거리 d와 같다.

$$d=\frac{|2(t-3)t-(t-3)^2-14(t-3)|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|(t-3)\{2t-(t-3)-14\}|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$
$$=\frac{|(t-3)(t-11)|}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$
$$=\frac{-(t-3)(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(t-\frac{t+3}{2}\right)^2+\{(t-3)^2\}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+\{(t-3)^2\}^2}$$
$$=\sqrt{(t-3)^2\left\{\frac{1}{4}+(t-3)^2\right\}}$$
$$=(t-3)\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$

$S(t)$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times(t-3)\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)^2(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}$$

따라서

$$\lim_{t\to3+}\frac{S(t)}{(t-3)^2}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{-(t-3)^2(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}}{(t-3)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}\left\{\frac{(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\sqrt{\frac{1}{4}+(t-3)^2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}\frac{(t-11)}{\sqrt{\{2(t-3)\}^2+1}}\times\lim_{x\to3+}\sqrt{\frac{1}{4}+(3-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\times(3-11)\times\sqrt{\frac{1}{4}}=2$$

38 정답 ⑤

해설 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1)<0$이면
방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 한 개의 실근을 가진다.
즉, $a^2-3a-4<0$에서 $(a+1)(a-4)<0$
$\therefore\ -1<a<4$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$이므로
$\alpha^2+\beta^2=1+16=17$

39 정답 36

해설 중간값의 정리 이해하기
$h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면
$h(x)=x^5+2x^2+k-3$
$x>0$에서 $h(x)$는 연속이고 증가하므로
$h(1)h(2)=k(k+37)<0$이면
구간$(1,\ 2)$에서 실근을 갖는다.
$-37<k<0$인 정수 k는 36개

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 68~69p

미분계수 ~ 도함수

01 함수 $f(x)=-x^2+4x$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

02 $x=p$ 에서 $x=q$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 의 평균변화율은?

① $\frac{p+q}{2}$ ② $p+q+6$
③ $\frac{p+q+a}{2}$ ④ $p+q+a$
⑤ $2(p+q+a)$

03 함수 $f(x)=3x^3-2x$의 $x=1$에서의 순간변화율을 구하시오.

04 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+9x$에 대하여 $f'(-1)$의 값을 구하시오.

05 함수 $f(x)=3x^2-4$의 그래프 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

06 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(3)=-1$, $f'(3)=2$, $g(3)=5$, $g'(3)=8$일 때, 함수 $f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수를 구하시오.

07 [2024년 6월 고3 5번/3점]
함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

08 [2020년 6월 고3 문과 2번 변형]
함수 $f(x)=2x^3-3x+3$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5
④ -7 ⑤ -9

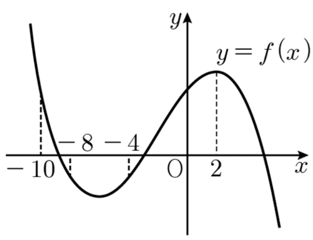
09 [2018년 9월 고3 문과 23번/3점]
함수 $f(x)=x^3+5x^2+1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

10 [2015년 11월 고3 문과 5번 변형]
함수 $f(x)=2x^3-6x^2+2x-1$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

11 [2023년 11월 고3 17번/3점]
함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

12 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중에서 가장 작은 값은?



① $f'(-10)$ ② $f'(-8)$ ③ $f'(-4)$
④ $f'(0)$ ⑤ $f'(2)$

13 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(-5)=3$, $g'(-5)=-8$일 때, 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=-5$에서의 미분계수를 구하시오.

14 함수 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에 대하여 $f'(1)-f(1)$의 값은?

① -44 ② -11 ③ 11
④ 44 ⑤ 55

15 [2007년 7월 고3 이과 3번]
함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

16 함수 $f(x)=x^2+3x$의 구간 $[1,\ 5]$에서의 평균변화율과 a 에서의 순간변화율이 같다고 한다. a 값은? (단, $1 \le a \le 5$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(4)=4$일 때, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(4-2h)-f(4)}{h}$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4
④ -2 ⑤ 0

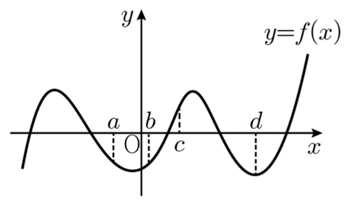
18 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=3$일 때, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+4h)-f(a)}{h}$ 의 값을 구하시오.

19 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(2)=4$일 때, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{f(x)-f(2)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20 함수 $f(x)$에서 $f'(1)=3$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{f(x)-f(1)}$의 값을 구하시오.

21 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 네 수 $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$의 대소를 바르게 나타낸 것은?



① $f'(a)<f'(b)<f'(d)<f'(c)$
② $f'(a)<f'(d)<f'(b)<f'(c)$
③ $f'(a)<f'(c)<f'(d)<f'(b)$
④ $f'(c)<f'(b)<f'(d)<f'(a)$
⑤ $f'(c)<f'(d)<f'(b)<f'(a)$

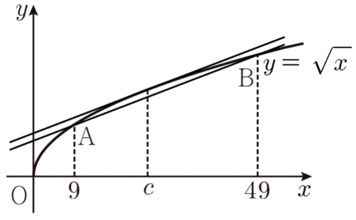
22 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 5일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h)-3}{h}$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

23 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax-1 & (x \geq 1) \\ bx^2-x+4 & (x<1) \end{cases}$이 모든 실수 x에서 미분가능하도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

24 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 11일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

25 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프의 $x=c$에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때, c의 값은? (단, $9<c<49$)



① 16 ② $\frac{81}{4}$ ③ 25 ④ $\frac{121}{4}$ ⑤ 36

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 68~69

미분계수 ~ 도함수

빠른정답

01 1	02 ④	03 7
04 27	05 6	06 2
07 ⑤	08 ②	09 13
10 ①	11 8	12 ①
13 19	14 ④	15 ①
16 ③	17 ①	18 12
19 ①	20 2	21 ②
22 ①	23 -63	24 22
25 ③		

실시일자	-	유형별 학습	이름
25문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 68~69p

미분계수 ~ 도함수

01 정답 1

해설 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$

02 정답 ④

해설
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$
$$=\frac{q^2+aq+b-(p^2+ap+b)}{q-p}$$
$$=\frac{(q-p)(q+p)+a(q-p)}{q-p}$$
$$=p+q+a$$

03 정답 7

해설 $f'(x)=9x^2-2$이므로 $x=1$에서의 순간변화율은 $f'(1)=7$이다.

04 정답 27

해설 $f'(x)=6x^2-12x+9$이므로
$$f'(-1)=6\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+9$$
$$=6+12+9$$
$$=27$$

05 정답 6

해설 함수 $f(x)=3x^2-4$의 그래프 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $x=1$에서의 미분계수와 같으므로
$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{3(1+h)^2-4\}-(3\cdot1^2-4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3h^2+6h}{h}=\lim_{h\to0}(3h+6)=6$$

06 정답 2

해설 $y=f(x)g(x)$에서
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$x=3$에서의 미분계수는
$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=2\cdot5+(-1)\cdot8=2$

07 정답 ⑤

해설 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?
$f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에서
$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$이므로
$f'(1)=2\cdot5=10$

08 정답 ②

해설 $f'(x)=6x^2-3$이므로
$f'(0)=-3$

09 정답 13

해설 다항함수의 도함수를 구하여 미분계수를 구할 수 있는가?
$f'(x)=3x^2+10x$이므로
$f'(1)=3+10=13$

10 정답 ①

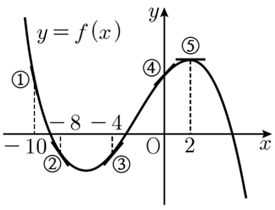
해설 $f(x)=2x^3-6x^2+2x-1$에서
$f'(x)=6x^2-12x+2$이므로
$f'(2)=6\cdot2^2-12\cdot2+2=2$

11 정답 8

해설 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?
$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로
$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\cdot 2x$
$\therefore f'(1)=(1+3)+2\cdot 2$
$=8$

12 정답 ①

해설 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의
점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로
①~⑤의 값은 각각 다음 그림의 접선의 기울기와 같다.



따라서 가장 작은 값은 ①이다.

13 정답 19

해설 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=-5$에서의 미분계수는
$f'(-5)-2g'(-5)=3-2\cdot(-8)=19$

14 정답 ④

해설 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서
$f(1)=1+1+1+\cdots+1=11$
$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로
$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$
$\therefore f'(1)-f(1)=55-11=44$

15 정답 ①

해설 평균변화율과 미분계수의 정의 이해하기
x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은
$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{3a^2-2a}{a}=3a-2$$
$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)=4$이므로
$3a-2=4$
$\therefore a=2$

16 정답 ③

해설 $f(x)=x^2+3x$ 에서 $[1,\ 5]$ 에서의 평균변화율은
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{40-4}{4}=9$$
a 에서의 순간변화율은 $f'(x)=2x+3$ 이므로
$f'(a)=2a+3$ 이 된다.
따라서 $2a+3=9$ 이므로 $a=3$ 이 된다.

17 정답 ①

해설
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}\cdot(-2)$$
$$=-2f'(4)$$
$$=-2\cdot 4$$
$$=-8$$

18 정답 12

해설 주어진 식의 분모, 분자에 각각 4를 곱하면
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot 4$$
$$=f'(a)\cdot 4$$
$$=3\cdot 4$$
$$=12$$

19 정답 ①

해설
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\cdot(x+2)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\cdot(x+2)\right\}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}\cdot 4$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

20 정답 2

해설 $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=3$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{x^2-1}{x-1}$

$=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)=2$

21 정답 ②

해설 $f'(a)<0,\ f'(d)=0,\ 0<f'(b)<f'(c)$이므로
$f'(a)<f'(d)<f'(b)<f'(c)$

22 정답 ①

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 5이므로
$f(2)=3,\ f'(2)=5$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\cdot2$

$=2f'(2)$

$=2\cdot5=10$

23 정답 -63

해설 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}(bx^2-x+4)=f(1)$

$b-1+4=2-a-1$

$\therefore a=-2-b \quad \cdots ㉠$

또한, $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{2x^2-ax-1-(2-a-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{2x^2-ax-(2-a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x+2-a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(2x+2-a)=4-a$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{bx^2-x+4-(2-a-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{bx^2-x+3+a}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{bx^2-x+3+(-2-b)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to1-}\frac{bx^2-x-b+1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(bx+b-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(bx+b-1)=2b-1$

에서 $4-a=2b-1$

$\therefore a+2b=5 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9,\ b=7$

$\therefore ab=(-9)\cdot7=-63$

24 정답 22

해설 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=f'(1)\cdot2$

$=22$

25 **정답** ③

해설 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{49-9}=\dfrac{7-3}{40}=\dfrac{1}{10}$

한편,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{c+h}-\sqrt{c}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{c+h}+\sqrt{c})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{c+h}+\sqrt{c}}=\frac{1}{2\sqrt{c}} \end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{1}{10}$ 이므로 $\sqrt{c}=5$

$\therefore c=25$

실시일자	-	숙제	이름
21문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 106~107p

미분계수 ~ 접선의 방정식

01 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-2x$에 그은 접선의 기울기는?

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 4

02 함수 $y=x^2-x$의 구간 $[t,\ t+2]$에서의 평균변화율이 7일 때, t의 값을 구하시오.

03 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $x=1$에서 $x=a$까지의 평균변화율이 17일 때, a의 값을 구하시오. (단, $a>1$)

04 다항식 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

05 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2 & (x\geq 2) \\ ax-b & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 26　② 28　③ 30
④ 32　⑤ 34

06 [2017년 9월 고2 문과 25번 변형]
두 상수 a, b에 대하여 함수
$f(x)=\begin{cases} 3x^2+ax+b & (x<1) \\ 4ax-8 & (x\geq 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

07 [2019년 11월 고2 문과 9번 변형]
함수 $f(x)=(2x+1)(3x^2-5x+a)$에 대하여 $f'(0)=7$일 때, 상수 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

08 함수 $f(x)=(2x^2-3)(x+1)(-3x+a)$ 에 대하여 $f'(1)=41$일 때, 상수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09 함수 $f(x)=x^3-6x+7$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 $(a, 15)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

10 곡선 $y=x^3+ax+b$위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식이 $y=-x+1$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

11 곡선 $y=(x+2)(x^2-15)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선이 점 $(-3, a)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

12 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=bx^2+c$가 점 $(1, 0)$을 지나고, 이 점에서 공통인 접선을 가질 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수)

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 106~107p_과제

미분계수 ~ 접선의 방정식

13 두 곡선 $y=-x^3+ax^2$, $y=x^2+4$가 점 $(t,\ t^2+4)$에서 접할 때, 상수 a, t에 대하여 $a+t$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

14 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$, $f'(1)=4$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

15 [2008년 11월 고3 이과 18번]
다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오.

16 $\lim_{x\to-1}\frac{x^{12}+5x+4}{x+1}$의 값을 구하시오.

17 $\lim_{x\to1}\frac{x^n-3x+2}{x-1}=12$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

18 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 2이다. $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값을 구하시오.

19 다항식 $x^{15}+ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x+4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

20 점 $\mathrm{A}(0,\ -16)$ 에서 곡선 $y=x^2-4x$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 B , C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 상수 a , b 에 대하여 $a+3b$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

21 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 9)$에서의 접선의 방정식이 $y=6x-9$이다. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\left\{f\left(3+\frac{1}{2n}\right)-f(3)\right\}$의 값을 구하시오.

실시일자	-	숙제	이름
21문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 106~107p

미분계수 ~ 접선의 방정식

빠른정답

01 ③	02 3	03 2
04 0	05 ④	06 29
07 ③	08 ④	09 ④
10 -12	11 ②	12 -1
13 ⑤	14 ②	15 28
16 -7	17 ④	18 5
19 30	20 ③	21 1

실시일자	-	숙제	이름
21문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 106~107p

미분계수 ~ 접선의 방정식

01 정답 ③

해설 $f(x)=x^3-2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-2)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$-2t^3=2,\ t^3=-1$

$\therefore\ t=-1$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(-1)=1$

02 정답 3

해설 함수 $f(x)=x^2-x$라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t+2)-f(t)}{(t+2)-t}$$
$$=\frac{\{(t+2)^2-(t+2)\}-(t^2-t)}{(t+2)-t}$$
$$=\frac{4t+2}{2}$$
$$=2t+1$$

$2t+1=7$

$\therefore\ t=3$

03 정답 2

해설 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에서

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$$
$$=\frac{(a^3+3a^2+a-1)-4}{a-1}$$
$$=\frac{a^3+3a^2+a-5}{a-1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+4a+5)}{a-1}$$
$$=a^2+4a+5$$

이때 평균변화율이 17이므로

$a^2+4a+5=17$

$a^2+4a-12=0,\ (a+6)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$

04 정답 0

해설 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)$

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$

따라서 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=0$

05 정답 ④

해설 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로
미분계수 $f'(2)$가 존재해야 한다.
즉, 극한값 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재해야 한다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로
$x=2$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이므로
$\lim_{x\to 2-}(ax-b)=\lim_{x\to 2+}(x^3-2x^2)=2^3-2\cdot 2^2$
에서 $2a-b=0$ … ㉠
(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하려면
$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-}\frac{ax-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^3-2x^2}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2-}a=\lim_{x\to 2+}x^2$$
$a=4$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $a=4$, $b=8$이므로
$ab=32$

06 정답 29

해설 (ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$x=1$에서 연속이다.
$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$이므로
$4a-8=3+a+b$
$\therefore 3a-b=11$
(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
미분계수 $f'(1)$이 존재한다.
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{3(1+h)^2+a(1+h)+b\}-(4a-8)}{h}$$
$=6+a$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{4a(1+h)-8\}-(4a-8)}{h}$$
$=4a$
이때
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
이므로 $6+a=4a$, 즉 $3a=6$, $a=2$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $3a-b=11$, $a=2$이므로 $b=-5$
따라서 $a^2+b^2=29$

07 정답 ③

해설 함수 $f(x)=(2x+1)(3x^2-5x+a)$에서
$f'(x)=2(3x^2-5x+a)+(2x+1)(6x-5)$
$f'(0)=2a+(-5)=7$
따라서 $a=6$

08 정답 ④

해설
$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x^2-3)'(x+1)(-3x+a)\\&\quad+(2x^2-3)(x+1)'(-3x+a)\\&\quad+(2x^2-3)(x+1)(-3x+a)'\\&=4x(x+1)(-3x+a)\\&\quad+(2x^2-3)\cdot 1\cdot(-3x+a)\\&\quad+(2x^2-3)(x+1)\cdot(-3)\end{aligned}$$
$f'(1)=-15+7a=41$이므로 $7a=56$
$\therefore a=8$

09 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-6x+7$에서

$f'(x)=3x^2-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가

$f'(2)=12-6=6$

이므로 접선의 방정식은

$y-3=6(x-2)$

즉, $y=6x-9$

이 접선이 $(a, 15)$를 지나므로

$6a-9=15$

따라서 $a=4$

10 정답 -12

해설 점 $(1, 0)$이 곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점이므로

$0=1+a+b$

$\therefore a+b=-1 \quad \cdots ㉠$

$f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$이고,

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=3+a=-1 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-1 \qquad \therefore b=3$

$\therefore ab=(-4)\cdot 3=-12$

11 정답 ②

해설 $f(x)=(x+2)(x^2-15)$로 놓으면

$f'(x)=(x+2)'(x^2-15)+(x+2)(x^2-15)'$

$=(x^2-15)+2x(x+2)$

$=3x^2+4x-15$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=12-8-15=-11$

또, $f(-2)=(-2+2)(4-15)=0$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-11\cdot(x+2)$

$\therefore y=-11x-22$

이때 점 $(-3, a)$가 직선 $y=-11x-22$ 위의 점이므로

$a=-11\cdot(-3)-22=11$

12 정답 -1

해설 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+c$라 하면

먼저 두 곡선이 $(1, 0)$을 지나므로

$f(1)=1+a=0$, $g(1)=b+c=0$

$\therefore a=-1$, $b+c=0$

또한, 이 점에서 공통의 접선을 가진다고 했으므로 $x=1$에서의 미분계수가 같아야 한다.

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$

$f'(1)=3+a$, $g'(1)=2b$

$\therefore 3+a=2b$

$\therefore b=1$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=-1$

13 정답 ⑤

해설 $f(x)=-x^3+ax^2$, $g(x)=x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+2ax$, $g'(x)=2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 점 (t, t^2+4)를 지나므로 $f(t)=g(t)=t^2+4$

$-t^3+at^2=t^2+4 \qquad \cdots ㉠$

두 곡선의 접점 (t, t^2+4)에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t)=g'(t)$

$-3t^2+2at=2t$

$-3t+2a=2$ ($\because$ ㉠에서 $t\neq 0$)

$2a=3t+2$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}t+1 \qquad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^3+\left(\dfrac{3}{2}t+1\right)t^2=t^2+4$

$\dfrac{1}{2}t^3=4$, $t^3=8$, $t^3-8=0$

$(t-2)(t^2+2t+4)=0$

$\therefore t=2$

㉡에서 $a=\dfrac{3}{2}\cdot 2+1=4$

$\therefore a+t=4+2=6$

14 정답 ②

해설 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{(x-1)f(1)}{x-1}-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$

$=f(1)-f'(1)$

$=2-4=-2$

15 정답 28

해설 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$이어야 하므로

$f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면

$\lim\limits_{t\to3}\dfrac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim\limits_{t\to3}\dfrac{1}{t+1}$

$=\dfrac{1}{4}f'(3)=5$

$\therefore f'(3)=20$

$\therefore f(3)+f'(3)=28$

16 정답 -7

해설 $f(x)=x^{12}+5x$로 놓으면 $f(-1)=-4$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^{10}+5x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=f'(-1)$

$f'(x)=12x^{11}+5$이므로

$f'(-1)=-7$

17 정답 ④

해설 $f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로

$f'(1)=n-3$

$n-3=12$에서 $n=15$

18 정답 5

해설 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

점 $(1, 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=3$ $\quad\therefore a+b=3$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=1$

따라서 $R(x)=2x+1$이므로

$R(2)=5$

19 정답 30

해설 다항식 $x^{15}+ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{15}+ax+b=(x-1)^2Q(x)+3x+4$ ⋯ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=7$

$\therefore a+b=6$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$15x^{14}+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+3$

양변에 $x=1$을 대입하면

$15+a=3$

$\therefore a=-12$

$a=-12$를 ㉡에 대입하면

$b=18$

$\therefore b-a=30$

20 정답 ③

해설 $f(x)=x^2-4x$ 로 놓으면
$f'(x)=2x-4$ 과 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t)$ 라 하면
이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=2t-4$ 이므로
접선의 방정식은
$y-(t^2-4t)=(2t-4)(x-t)$
$y=(2t-4)x-t^2$
이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ -16)$ 을 지나므로
$-16=-t^2$, $t^2=16$
$t=-4$ 또는 $t=4$
따라서 $\mathrm{B}(-4,\ 32)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$ 이므로
삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{0+(-4)+4}{3},\ \frac{-16+32+0}{3}\right)$,
즉 $\left(0,\ \frac{16}{3}\right)$ 이다.
따라서 $a=0$, $b=\frac{16}{3}$ 이므로
$a+3b=16$

21 정답 1

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 9)$에서의 접선의 방정식이 $y=6x-9$이므로
$f'(3)=6$
$h=\frac{1}{2n}$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}\left\{f\left(3+\frac{1}{2n}\right)-f(3)\right\}&=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{6h}\\&=\frac{1}{6}f'(3)\\&=\frac{1}{6}\cdot6=1\end{aligned}$$