

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A = \{a, \{b, c\}, c\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

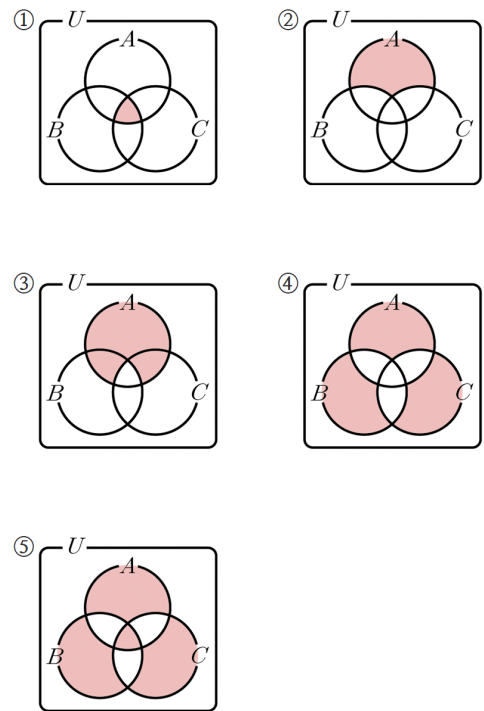
- ① $\{a, b, c\} \subset A$
- ② $\{b, c\} \subset A$
- ③ $\{a, c\} \in A$
- ④ $\{\{b, c\}, c\} \in A$
- ⑤ $\emptyset \subset A$

02 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

- ① $B \cap A^c$
- ② $(A \cup B) - B$
- ③ $B - A$
- ④ $B \cap (U - A)$
- ⑤ $B \cap (A \cap B)^c$

03 두 집합 $A = \{a + 2b, -5\}$, $B = \{2a + b, 2\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, $b - a$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

04 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 집합 $(A - B) \cup (C^c - A^c)$ 을 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

05 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?
(단, x, y, z 는 실수이다.)

- ① $p: x+y$ 는 무리수이다.
 $q: x$ 또는 y 가 무리수이다.
- ② $p: xy=0$
 $q: xyz=0$
- ③ $p: xy > x+y > 4$
 $q: x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p: xy+1 > x+y > 2$
 $q: x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p: |x+y+z| = |x| + |y| + |z|$
 $q: xy+yz+zx \geq 0$

06 어느 운동 동호회 회원 80명을 대상으로 야구와 축구의 선호도를 조사하였다. 그 결과 야구를 좋아하는 회원이 38명, 축구를 좋아하는 회원이 44명, 야구와 축구 중 어느 것도 좋아하지 않는 회원이 12명이었다. 이때 축구만 좋아하는 회원 수를 구하시오.

07 집합 $X = \{x | x \geq a\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 18$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

08 함수 $f(x) = \begin{cases} 4x & (x \geq 2) \\ -x^2 + 6x & (x < 2) \end{cases}$ 에 대하여 $(f \circ f)(3) + f^{-1}(-7)$ 의 값을 구하시오.

09 함수 $f(x) = \frac{4x+3}{x+a}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x+b}{cx-4}$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하시오.

10 실수 x 에 대하여 $|x|=x$ 일 때, $3x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{3x^2+1}$ 의 최솟값은? (단, $x \neq 0$)

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 11** 어떤 농부가 길이 40m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양으로 이루어진 우리를 만들려고 한다. 이때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 40m^2 ② 50m^2 ③ 60m^2
④ 70m^2 ⑤ 80m^2

- 12** 다음 중 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 a, b 의 값으로 적당한 것을 고르면?

- ① $a=1, b=-1$ ② $a=1, b=1$
③ $a=2, b=-1$ ④ $a=2, b=0$
⑤ $a=-1, b=2$

- 13** 함수 $y = \frac{ax+3}{2x-b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2, y=4$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx+a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

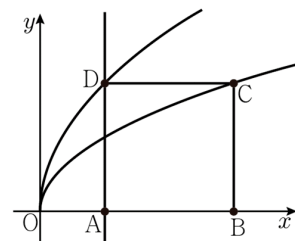
- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

- 14** 무리함수 $y = \sqrt{kx+3} - 2$ 의 그래프가 두 점 $A(3, 1), B(3, 5)$ 를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는 정수 k 의 개수는?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

- 15** 함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f^{20}\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값을 구하시오.
(단, $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수이다.)

- 16** 두 무리함수 $y = \sqrt{3x}, y = \sqrt{x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 점 $A(a, 0)$ 에서 x 축에 수직인 직선을 그어 함수 $y = \sqrt{3x}$ 와 만나는 점을 D라 하고, \overline{AD} 를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD를 만들면 점 C는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위에 있다. 이때 양수 a 의 값을 구하시오.



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

- 17** 두 무리함수 $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y = \sqrt{6}$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

- 18** 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 하자. $2 \notin X$, $4 \in X$, $8 \notin X$ 인 모든 X 에 대하여 $S(X)$ 의 합은?

- ① 456 ② 464 ③ 472
④ 480 ⑤ 488

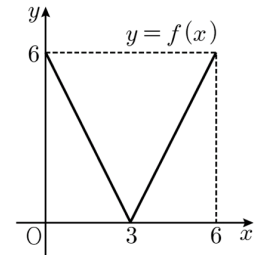
- 19** 정수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a+k, b+k, c+k, d+k\}$ 에 대하여, $A \cap B = \{2, 5\}$ 이고 A 에 속하는 모든 원소의 합이 10, $A \cup B$ 에 속하는 모든 원소의 합이 21일 때, k 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

- 20** 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c)\} \cup \{(A^c \cap B) \cup (A \cap B)\}$ 를 간단히 하면?

- ① \emptyset ② A ③ B
④ A^c ⑤ U

- 21** 함수 $f(x) = |6-2x|$ ($0 \leq x \leq 6$)에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

- ㄱ. $f(f(3)) = 6$
ㄴ. 방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 모든 실근의 합은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

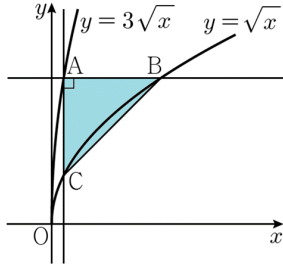
고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

22

[2018년 3월 고2 문과 17번 변형]

다음 그림과 같이 함수 $y = 3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x 축, y 축에 각각 평행한 직선이 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는?
(단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

23

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 9이다.
(나) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 62$
(다) 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 8이다.

집합 X 의 어떤 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

24

[2008년 3월 고2 26번]

두 함수

$$f(x) = |x| - 4, \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 $g(f(k)) = 3$ 을 만족하는 실수 k 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 라 하자. 이때 $\alpha - \beta$ 의 값을 구하시오.

25

함수 $y = 4\sqrt{x-7} + 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y = f(x)$ 라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 접할 때, a 의 값을 구하시오.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ②	03 7
04 ③	05 ④	06 30
07 9	08 47	09 -6
10 ④	11 ②	12 ③
13 ⑤	14 ②	15 $\frac{1}{30}$
16 $\frac{3}{4}$	17 $4\sqrt{6}$	18 ④
19 ②	20 ⑤	21 ⑤
22 ④	23 8	24 10
25 3		



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ⑤

- 해설**
- ① $\{a, \{b, c\}\} \subset A$
 - ② $\{b, c\} \in A$
 - ③ $\{a, c\} \subset A$
 - ④ $\{\{b, c\}, c\} \subset A$

02 정답 ②

- 해설**
- ① $B \cap A^C$
 - ② $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^C$
 $= (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C)$
 $= A \cap B^C$
 - ③ $B - A = B \cap A^C$
 - ④ $B \cap (U - A) = B \cap A^C$
 - ⑤ $B \cap (A \cap B)^C = B \cap (A^C \cup B^C)$
 $= (B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)$
 $= B \cap A^C$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

03 정답 7

- 해설** $A = B$ 이므로
 $a + 2b = 2, 2a + b = -5$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -4, b = 3$
 $\therefore b - a = 3 - (-4) = 7$

04 정답 ③

- 해설** $(A - B) \cup (C^C - A^C) = (A \cap B^C) \cup \{C^C \cap (A^C)^C\}$
 $= (A \cap B^C) \cup (C^C \cap A)$
 $= A \cap (B^C \cup C^C)$
 $= A \cap (B \cap C)^C$
 $= A - (B \cap C)$

따라서 $(A - B) \cup (C^C - A^C)$ 를 벤다이어그램으로
 바르게 나타낸 것은 ③이다.

05 정답 ④

- 해설**
- ① $x + y$ 는 무리수이다. $\Leftrightarrow x$ 또는 y 가 무리수이다.
 $[\leftarrow$ 의 반례] $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$
 \therefore 충분조건
 - ② $xy = 0 \Leftrightarrow xyz = 0$
 $[\leftarrow$ 의 반례] $x = 3, y = 2, z = 0$
 \therefore 충분조건
 - ③ $xy > x + y > 4 \Leftrightarrow x > 2$ 이고 $y > 2$
 $[\rightarrow$ 의 반례] $x = 4, y = 2$
 \therefore 필요조건
 - ④ $xy + 1 > x + y > 2$
 $\Leftrightarrow xy + 1 > x + y$ 이고 $x + y > 2$
 $\Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0$ 이고 $x + y - 2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) > 0$ 이고 $(x - 1) + (y - 1) > 0$
 $\Leftrightarrow x - 1 > 0$ 이고 $y - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$
 \therefore 필요충분조건
 - ⑤ $|x + y + z| = |x| + |y| + |z|$
 $\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq 0$
 $[\leftarrow$ 의 반례] $x = 3, y = 5, z = -1$
 \therefore 충분조건

06 정답 30

- 해설** 회원 전체의 집합을 U , 야구를 좋아하는 회원의 집합을 A ,
 축구를 좋아하는 회원의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 80, n(A) = 38, n(B) = 44,$
 $n(A^C \cap B^C) = 12$
 $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $n(A \cup B) = 80 - 12 = 68$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 38 + 44 - 68$
 $= 14$
 따라서 축구만 좋아하는 회원 수는
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
 $= 44 - 14$
 $= 30$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

07 정답 9

해설 $f(x) = x^2 - 6x - 18 = (x-3)^2 - 27$ 이고
함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로
 $a \geq 3, f(a) = a$
 $f(a) = a$ 에서 $a^2 - 6a - 18 = a$
 $a^2 - 7a - 18 = 0, (a+2)(a-9) = 0$
 $\therefore a = 9 (\because a \geq 3)$

08 정답 47

해설 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(12) = 48$
한편, $f^{-1}(-7) = a$ 라 하면 $f(a) = -7$
(i) $a \geq 2$ 일 때,
 $f(a) = 4a$ 이므로
 $4a = -7$
 $\therefore a = -\frac{7}{4}$
그런데 $a \geq 2$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $a < 2$ 일 때,
 $f(a) = -a^2 + 6a$ 이므로
 $-a^2 + 6a = -7, a^2 - 6a - 7 = 0$
 $(a+1)(a-7) = 0$
 $\therefore a = -1 (\because a < 2)$
(i), (ii)에서 $a = -1$ 이므로 $f^{-1}(-7) = -1$
 $\therefore (f \circ f)(3) + f^{-1}(-7) = 48 + (-1) = 47$

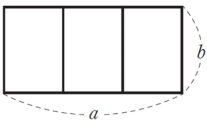
09 정답 -6

해설 $y = \frac{4x+3}{x+a}$ 으로 놓으면 $y(x+a) = 4x+3$
 $(y-4)x = -ay+3$
 $\therefore x = \frac{-ay+3}{y-4}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-ax+3}{x-4}$
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax+3}{x-4}$
즉, $\frac{2x+b}{cx-4} = \frac{-ax+3}{x-4}$ 이므로
 $a = -2, b = 3, c = 1$
 $\therefore abc = -2 \cdot 3 \cdot 1 = -6$

10 정답 ④

해설 $|x| = x, x \neq 0$ 에서 $x > 0$ 이므로 산술평균과
기하평균의 관계에 의하여
 $3x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{3x^2+1} = \frac{3x^2+1}{x} + \frac{16x}{3x^2+1}$
 $\geq 2\sqrt{\frac{3x^2+1}{x} \cdot \frac{16x}{3x^2+1}}$
 $= 2 \cdot 4 = 8$
(단, 등호는 $\frac{3x^2+1}{x} = \frac{16x}{3x^2+1}$, 즉 $x = \frac{1}{3}$ 또는
 $x = 1$ 일 때 성립한다.)
따라서 주어진 식의 최솟값은 8

11 정답 ②

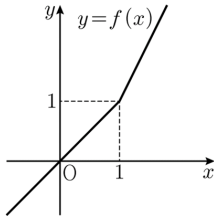
해설 
전체 직사각형의 가로의 길이를 a m, 세로의
길이를 b m라고 하면
 $a > 0, b > 0$
철망의 길이가 40m이므로
 $2a + 4b = 40$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2a + 4b \geq 2\sqrt{2a \cdot 4b}, 40 \geq 2\sqrt{8ab}$
 $\therefore 20 \geq \sqrt{8ab}$ (단, 등호는 $2a = 4b$ 일 때 성립)
양변을 제곱하면
 $400 \geq 8ab \quad \therefore ab \leq 50$
직사각형의 넓이 S 는 $S = ab \leq 50$
따라서 우리의 넓이의 최댓값은 50m²이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

12 정답 ③

해설 f 가 일대일대응이 되려면
 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y = ax + b$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선 $y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 주어진 보기 중 ①, ②을 만족하는 것은 ③이다.

13 정답 ⑤

해설

$$y = \frac{ax+3}{2x-b} = \frac{\frac{ab+6}{x-\frac{b}{2}} + \frac{a}{2}}{\frac{2x-b}{2}} \text{이므로}$$

$$\text{점근선의 방정식은 } x = \frac{b}{2}, y = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = 8, b = -4$$

따라서 함수 $y = \sqrt{-4x+8}$ 의 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$
 이므로 정의역에 속하는 정수의 최댓값은 2이다.

14 정답 ②

해설 무리함수 $y = \sqrt{kx+3} - 2$ 의 그래프가 선분 AB와
 만나기 위해서는 $x = 3$ 일 때의 함숫값 $\sqrt{3k+3} - 2$ 가
 1과 5 사이에 있어야 한다.

$$\text{즉, } 1 \leq \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5$$

$$\sqrt{3k+3} - 2 \geq 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{3k+3} \geq 3, 3k+3 \geq 9$$

$$\therefore k \geq 2$$

$$\text{또, } \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5 \text{에서}$$

$$\sqrt{3k+3} \leq 7, 0 \leq 3k+3 \leq 49$$

$$\therefore 2 \leq k \leq \frac{46}{3}$$

따라서 $1 \leq \sqrt{3k+3} - 2 \leq 5$ 를 만족하는 k 의 범위는

$$2 \leq k \leq \frac{46}{3} \text{이므로 구하는 정수 } k \text{는 } 2, 3, 4, \dots, 15 \text{의}$$

14개이다.

15 정답 $\frac{1}{30}$

해설

$$f^1(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

$$\therefore f^{20}(x) = \frac{x}{1+20x}$$

$$\therefore f^{20}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1+20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$$

16 정답 $\frac{3}{4}$

해설 점 A의 좌표가 $(a, 0)$ 이므로 점 D의 좌표는
 $(a, \sqrt{3a})$

이때 두 점 C, D의 y좌표가 같으므로

$$\sqrt{x} = \sqrt{3a} \text{에서}$$

$$x = 3a$$

즉, 점 C의 좌표는 $(3a, \sqrt{3a})$

이때 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로

$$\sqrt{3a} = 3a - a$$

$$4a^2 - 3a = 0$$

$$a(4a - 3) = 0$$

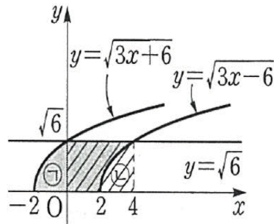
$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = \frac{3}{4}$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

17 정답 $4\sqrt{6}$

해설 $y = \sqrt{3x-6} = \sqrt{3(x-4)+6}$ 이므로
 $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{3x+6}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3x-6}$ 의 그래프와
 x 축 및 직선 $y = \sqrt{6}$ 으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의
 색칠한 부분과 같다.



이때 ㉠과 ㉡의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 빗금 친
 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $4 \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

18 정답 ④

해설 $2 \notin X$, $4 \in X$, $8 \notin X$ 인 집합 X 의 개수는
 $2^{8-1-1-1} = 2^5 = 32$
 한편, 32개의 집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의
 개수는 $1 \in X$, $2 \notin X$, $4 \in X$, $8 \notin X$ 인 집합의 개수와
 같으므로
 $2^{8-1-3} = 2^4 = 16$
 마찬가지로 3, 5, 6, 7을 각각 원소로 갖는 집합의 개수도
 16이므로 $S(X)$ 의 합은
 $32 \cdot 4 + 16(1+3+5+6+7) = 480$

19 정답 ②

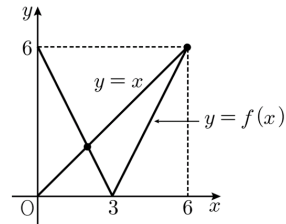
해설 A 에 속하는 원소들의 합을 $S(A)$ 라고 하면,
 $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$
 $21 = 10 + S(B) - 7$
 $\therefore S(B) = 18 = a + b + c + d + 4k = 10 + 4k$
 $\therefore 4k = 8$
 $\therefore k = 2$

20 정답 ⑤

해설 $\{(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c)\} \cup \{(A^c \cap B) \cup (A \cap B)\}$
 $= \{(A^c \cap A) \cup B^c\} \cup \{(A^c \cup A) \cap B\}$
 $= (\emptyset \cup B^c) \cup (U \cap B)$
 $= B^c \cup B = U$

21 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(3) = |6 - 2 \cdot 3| = 0$ 이므로
 $f(f(3)) = f(0) = |6 - 2 \cdot 0| = 6$ (참)
 ㄴ. 아래 그림과 같이 방정식 $f(x) = x$ 의 실근의 개수는
 함수 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 개수와 같다.
 즉, 방정식 $f(x) = x$ 의 실근의 개수는 2이다. (참)

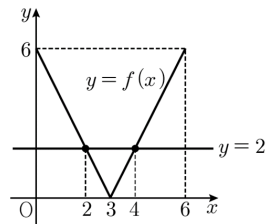


ㄷ. 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 에서 $f(x) = t$ 로 치환하고
 방정식 $f(t) = t$ 를 만족하는 해를 구하면
 $|6 - 2t| = t$ 에서 $t = 2$ 또는 $t = 6$
 즉, $f(x) = 2$ 또는 $f(x) = 6$ 을 만족시키는 x 의 값을
 구하면 된다.

(i) $f(x) = 2$ 인 경우

$$|6 - 2x| = 2$$

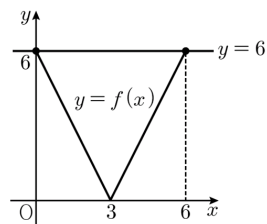
$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$



(ii) $f(x) = 6$ 인 경우

$$|6 - 2x| = 6$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$



(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의
 모든 실근의 합은 $2 + 4 + 0 + 6 = 12$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [9회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

22 정답 ④

해설 점 A의 좌표를 $(a, 3\sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면
 $B(9a, 3\sqrt{a})$, $C(a, \sqrt{a})$ 가 된다.
 직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌
 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $8a$, $2\sqrt{a}$ 이고
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로
 $8a = 2\sqrt{a}$, $4a = \sqrt{a}$
 $16a^2 = a$
 이때 $a \neq 0$ 이므로 $16a = 1$, $a = \frac{1}{16}$
 따라서 삼각형 ACB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \cdot (8a)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

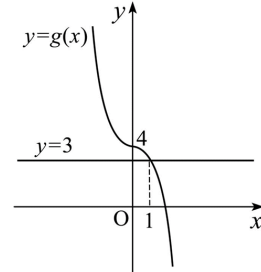
23 정답 8

해설 조건 (가)에 의하여 치역의 원소의 개수는 9이고
 조건 (다)에 의하여 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과
 최솟값의 차가 8이므로 가능한 함수의 치역은
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 또는
 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.
 (i) 치역이 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 일 때
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ 이므로
 $46 \leq 45+n \leq 54$
 그런데 조건 (나)에서 모든 함수값의 합은 62이므로
 $f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 자연수 n 은 존재하지
 않는다.
 (ii) 치역이 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 일 때
 $2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 54$ 이므로
 $56 \leq 54+n \leq 64$
 조건 (나)에서 모든 함수값의 합은 62이므로
 $54+n = 62$
 $n = 8$
 (i), (ii)에 의하여 $n = 8$ 이다.

24 정답 10

해설 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 문제를
 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$y = g(x)$ 의 그래프를 그려 보면,



$g(f(k)) = 3$ 이므로 $f(k) > 0$ 이고 $\{f(k)\}^2 + 4 = 3$

$$\therefore f(k) = 1$$

$$f(k) = |k| - 4 = 1$$

$$\therefore k = \pm 5$$

따라서 $\alpha = 5$, $\beta = -5$ 이다.

$$\therefore \alpha - \beta = 10$$

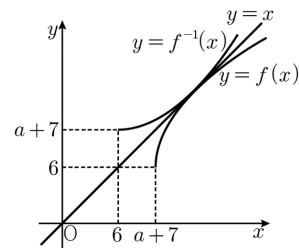
25 정답 3

해설 $y = 4\sqrt{x-7} + 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼
 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 4\sqrt{x-a-7} + 6$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의
 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에
 접해야 한다.



$$4\sqrt{x-a-7} + 6 = x \text{에서}$$

$$4\sqrt{x-a-7} = x-6$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$16(x-a-7) = x^2 - 12x + 36$$

$$\therefore x^2 - 28x + 16a + 148 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-14)^2 - (16a + 148) = 0$$

$$-16a + 48 = 0$$

$$\therefore a = 3$$