# 마플시너지(2025) -(절대부등식) 공통수학2 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

| 실시일자 | - |
|---|---|
| 25문제 / DRE수학 | |

## 유형별 학습

| 이름 |
|---|
| |

**01** [2018년 9월 고2 문과 6번 변형]

양수 $x$에 대하여 $x+\dfrac{16}{x}$의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

**02** $a \geq 0$, $b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞을 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\boxed{(나)}^2}{2}$이므로 부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ $\boxed{(가)}$ $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다. 이때 등호는 $\boxed{(다)}$일 때, 성립한다.

① $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
② $\geq$, $a-b$, $a=b=0$
③ $>$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a=b$
④ $>$, $a-b$, $a=b$
⑤ $\geq$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a \geq b$

**03** 부등식 $|x+y| \leq |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$
③ $xy \geq 0$ ④ $x \geq 0$, $y \geq 0$
⑤ $x \leq 0$, $y \leq 0$

**04** $x>2$ 일 때, $x-2+\dfrac{4}{x-2}$의 최솟값은?

① 0 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

**05** 실수 $x$, $y$가 $x^2+y^2=20$을 만족할 때, $3x+y$의 최댓값을 $a$, 그때의 $x$, $y$의 값을 각각 $b$, $c$라 하자. 이때 $a+b+c$의 값은?

① $10\sqrt{2}$ ② $11\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{2}$
④ $13\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{2}$

**06** 둘레의 길이가 $20$인 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$, $y$라 하자. $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값을 $M$이라 할 때, $\sqrt{6}M$의 값을 구하시오.

**07** [2017년 3월 고3 문과 12번 변형]
실수 $x$에 대한 조건
'모든 실수 $x$에 대하여 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이다.'
가 참인 명제가 되도록 하는 정수 $k$의 개수는?

① $1$ ② $2$ ③ $3$
④ $4$ ⑤ $5$

**08** 다음은 임의의 실수 $a$, $b$에 대하여 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$일 때, $|a|+|b|\geq |a+b|$를 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b|\geq 0,\ |a+b|\geq 0$이므로
> $(|a|+|b|)^2,\ |a+b|^2$의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
> $=a^2+$[가]$+b^2-(a^2+$[나]$+b^2)$
> $=2($[다]$)\geq 0$
> (단, 등호는 [라]$\geq 0$일 때 성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : $ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $ab$
② 가 : $|ab|$, 나 : $ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$
③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab|-ab$, 라 : $ab$
④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $ab$
⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab|-2ab$, 라 : $2ab$

**09** 다음은 두 실수 $a$, $b$에 대하여 부등식 $|a|+|2b| \geq |a+2b|$가 성립함을 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|2b|)^2-|a+2b|^2=4(\boxed{\text{(가)}}) \geq 0$
>
> $\therefore (|a|+|2b|)^2 \geq |a+2b|^2$
>
> 이때 $|a|+|2b| \geq 0$, $|a+2b| \geq 0$이므로
>
> $|a|+|2b| \geq |a+2b|$
>
> 이때 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$일 때 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

① $|ab|-ab$, $ab \geq 0$　② $|ab|-ab$, $ab \leq 0$
③ $|ab|+ab$, $ab=0$　④ $|ab|+ab$, $ab \leq 0$
⑤ $|ab|+ab$, $ab \geq 0$

**10** 실수 $a$, $b$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $|a|-|b| \geq |a-b|$
ㄴ. $|a|+|b| \leq |a-b|$
ㄷ. $|a-b|+|b| \geq |a|$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

**11** 다음은 실수 $a$, $b$에 대하여 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하는 과정이다.

> $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
>
> $=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$
>
> $=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
>
> $=2(|ab|-ab) \geq 0$
>
> 따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$이므로
>
> $|a|+|b| \geq |a+b|$

위의 증명과정에 사용되지 않은 성질은?

① $|a| \geq a$
② $a \geq b$, $b \geq c$이면 $a \geq c$
③ $|a|^2=a^2$
④ $a-b \geq 0$이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$이면 $a \geq b$

**12** 양수 $x$에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 $b$를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

**13** $a>0$, $b>0$일 때, 다음 보기 중 옳은 것의 개수는?

<보기>

ㄱ. $1+a>\sqrt{1+2a}$

ㄴ. $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ㄷ. $a+\frac{1}{a}\geq 2$

ㄹ. $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$

ㅁ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)\geq 8$

ㅂ. $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 25$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

**14** 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 $x$, $y$에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 과정이다. 처음으로 틀린 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}$ $\cdots$ ㉠

$=\frac{4}{\sqrt{xy}}$

$\therefore\ \sqrt{xy}\geq 4$ $\cdots$ ㉡

이때 양수 $x$, $y$에 대하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}\geq 2\times 4=8$이므로

$x=y$에서 $x+y$가 최솟값을 갖는다. $\cdots$ ㉢

따라서 $x+y$의 최솟값은 $8$이다. $\cdots$ ㉣

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ 틀린 곳이 없다.

**15** 양수 $x$, $y$에 대하여 $5x^2+125y^2=2$일 때, $xy$는 $x=\alpha$, $y=\beta$에서 최댓값 $\gamma$를 갖는다. 이때 $\alpha\beta+\gamma$의 값은?

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{2}{25}$ ③ $\frac{3}{25}$ ④ $\frac{4}{25}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

**16** 양수 $a$, $b$에 대하여 $a+b=6$일 때, $\frac{a^2-3}{a}+\frac{b^2-3}{b}$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

**17** 양수 $a$에 대하여 $\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)$의 최솟값을 $m$, 그때의 $a$의 값을 $n$이라 할 때, 상수 $m$, $n$에 대하여 $m+n$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

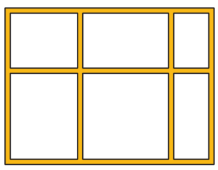
**18** $x>0$일 때, $(x^2+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

**19** $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{3c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{3c}\right)$의 최솟값을 구하시오.

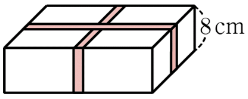
**20** $x>0$, $y>0$, $z>0$일 때, $\frac{2y+3z}{x}+\frac{3z+x}{2y}+\frac{x+2y}{3z}$의 최솟값을 구하시오.

**21** 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



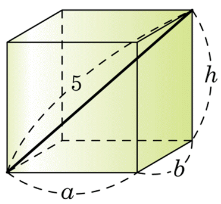
① (600, 40) ② (1200, 40)
③ (600, 30) ④ (1200, 30)
⑤ (450, 60)

**22** 높이가 $8\,\mathrm{cm}$인 직육면체 모양의 소포를 다음 그림과 같이 끈으로 묶으려고 한다. 길이가 $116\,\mathrm{cm}$인 끈으로 묶을 수 있는 소포의 최대 부피를 구하시오.
(단, 매듭의 길이는 생각하지 않는다.)




**23** 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+y^2=13$일 때, $x^2+2x+y^2+3y$의 최댓값을 구하시오.

**24** 코시－슈바르츠의 부등식을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 $a$, $b$, $h$이고 대각선의 길이가 $5$인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은?




① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

**25** 다음은 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$이 실수일 때, 부등식
$$(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
이 성립함을 증명한 것이다.

> 모든 실수 $x$에 대하여 부등식
> $$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2 \ \boxed{(가)}\ 0$$
> 이 성립한다. 이 식을 전개하여 $x$에 대해 정리하면
> $$(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2})x^2 -2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x +(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2})\ \boxed{(가)}\ 0 \quad \cdots ㉠$$
> (ⅰ) $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2} \leq 0$일 때,
> $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$이므로 주어진 부등식이 성립한다.
> (ⅱ) $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2} > 0$일 때,
> $x$에 대한 이차방정식
> $$(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2})x^2 -2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x +(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2})=0$$
> 의 판별식을 $D$라고 하면 ㉠이 항상 성립하므로
> $$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \ \boxed{(나)}\ (a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2}) \times (b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}) \ \boxed{(다)}\ 0$$
> (ⅰ), (ⅱ)에서
> $$(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
> $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n} \text{ 일 때 성립}\right)$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $\leq, -, \leq$ ② $\leq, +, \geq$ ③ $\geq, -, \leq$
④ $\geq, -, <$ ⑤ $>, +, \leq$

# 마플시너지(2025) -(절대부등식) 공통수학2 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

| 실시일자 | - |
| --- | --- |
| 25문제 / DRE수학 | |

# 유형별 학습

| 이름 |
| --- |
| |

빠른정답

| | | |
| --- | --- | --- |
| 01 ③ | 02 ① | 03 ③ |
| 04 ② | 05 ⑤ | 06 30 |
| 07 ② | 08 ③ | 09 ① |
| 10 ③ | 11 ② | 12 ① |
| 13 ⑤ | 14 ③ | 15 ② |
| 16 ④ | 17 ① | 18 ④ |
| 19 8 | 20 6 | 21 ② |
| 22 $3528\,\mathrm{cm}^3$ | 23 26 | 24 ③ |
| 25 ③ | | |

# 마플시너지(2025) -(절대부등식) 공통수학2 202~210p

대우를 이용한 증명법과 귀류법 ~ 절대부등식

| 실시일자 | - |
|---|---|
| 25문제 / DRE수학 | |

## 유형별 학습

| 이름 |
|---|
| |

**01** 정답 ③

해설 $x>0$, $\dfrac{16}{x}>0$이므로 $x+\dfrac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{16}{x}}=8$

(단, 등호는 $x=4$일 때 성립한다.)

따라서 $x+\dfrac{16}{x}$의 최솟값은 8이다.

**02** 정답 ①

해설 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a}{2}-2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}+\dfrac{b}{2}$

$=\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{\boxed{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}\geq 0$

이므로 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$에서 $\dfrac{a+b}{2}\boxed{\geq}\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$일 때이므로

등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

**03** 정답 ③

해설 $|x+y|=|x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy=|xy|$

( i ) $xy=|xy|$

$\longrightarrow xy\geq 0$

( ii ) 또 $xy>0$ 이면 $x, y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy\geq 0\longrightarrow xy=|xy|$

( i ), ( ii )에서

$xy=|xy|\longleftrightarrow xy\geq 0$

**04** 정답 ②

해설 산술 기하평균의 관계에서

$(x-2)+\dfrac{4}{(x-2)}\geq 2\sqrt{(x-2)\dfrac{4}{(x-2)}}$

$=2\sqrt{4}=4$

$\therefore$ 최솟값 : 4

**05** 정답 ⑤

해설 $x$, $y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(3x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=20$이므로

$10\cdot 20\geq(3x+y)^2$

$\therefore\ -10\sqrt{2}\leq 3x+y\leq 10\sqrt{2}$

한편, 등호는 $\dfrac{x}{3}=y$일 때 성립하므로

이것을 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$x=3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 또는 $x=-3\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$

따라서 $3x+y$는 $x=3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 일 때

최댓값 $10\sqrt{2}$를 가지므로

$a=10\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$

$\therefore\ a+b+c=14\sqrt{2}$

## 06 정답 30

**해설** 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$2x+2y=20 \qquad \therefore x+y=10$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2\}\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}$

$\geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$15(x+y) \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

그런데 $x+y=10$이므로

$150 \geq (\sqrt{5x}+\sqrt{10y})^2$

$\therefore -5\sqrt{6} \leq \sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

(단, 등호는 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{10}}$ 일 때 성립)

이때 $\sqrt{5x}>0$, $\sqrt{10y}>0$이므로

$0<\sqrt{5x}+\sqrt{10y} \leq 5\sqrt{6}$

따라서 $\sqrt{5x}+\sqrt{10y}$의 최댓값은 $5\sqrt{6}$이므로

$M=5\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{6}M=\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{6}=30$

## 07 정답 ②

**해설** 모든 실수 $x$에 대하여

부등식 $x^2-2kx-3k^2>4k-3$이 참인 명제가 되려면

$f(x)=x^2-2kx-3k^2-4k+3$이라 할 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나지 않아야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$이

서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-2kx-3k^2-4k+3=0$의 판별식을

$D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(-3k^2-4k+3)$

$=4k^2+4k-3$

$=(2k+3)(2k-1)<0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{1}{2}$

따라서 정수 $k$의 개수는 $-1$, $0$의 2이다.

## 08 정답 ③

**해설** $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$

(단, 등호는 $ab\geq 0$일 때 성립)

## 09 정답 ①

**해설** $(|a|+|2b|)^2-|a+2b|^2$

$=(|a|^2+4|a||b|+4|b|^2)-(a+2b)^2$

$=(a^2+4|ab|+b^2)-(a^2+4ab+b^2)$

$=4(\boxed{|ab|-ab})\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$) $\cdots$ ㉠

$\therefore (|a|+|2b|)^2 \geq |a+2b|^2$

이때 $|a|+|2b|\geq 0$, $|a+2b|\geq 0$이므로

$|a|+|2b|\geq |a+2b|$

이때 등호는 ㉠에서 $|ab|-ab=0$, 즉 $|ab|=ab$일 때

성립하므로 $\boxed{ab\geq 0}$일 때 성립한다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 각각

$|ab|-ab$, $ab\geq 0$이다.

## 10 정답 ③

**해설** ㄱ. [반례] $a=1$, $b=-2$이면

$|a|-|b|=-1$, $|a-b|=3$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$ (거짓)

ㄴ. [반례] $a=2$, $b=3$이면

$|a+b|=5$, $|a-b|=1$이므로

$|a+b|>|a-b|$ (거짓)

ㄷ. $|a-b|+|b|\geq |a|$에서

$|a-b|\geq |a|-|b|$

(ⅰ) $|a|\geq |b|$일 때

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)

$\therefore |a-b|^2\geq (|a|-|b|)^2$

$\therefore |a-b|\geq |a|-|b|$

($\because |a|-|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$)

$\therefore |a-b|+|b|\geq |a|$

(ⅱ) $|a|<|b|$일 때

$|a|-|b|<0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

$\therefore |a-b|+|b|\geq |a|$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|a-b|+|b|\geq |a|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

## 11 정답 ②

**해설** $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$ (③ 사용)

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq 0$ (① 사용)

따라서 $(|a|+|b|)^2\geq (|a+b|)^2$이므로 (④ 사용)

$|a|+|b|\geq |a+b|$ (⑤ 사용)

그러므로 사용되지 않은 성질은 ②이다.

## 12 정답 ①

**해설** $x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$\dfrac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\dfrac{2}{x}$

$x+\dfrac{2}{x}+2\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

## 13 정답 ⑤

**해설** ㄱ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2=a^2>0$

$\therefore (1+a)>\sqrt{1+2a}$ (참)

ㄴ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

$\therefore \sqrt{2(a+b)}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (참)

ㄷ. $a+\dfrac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$ (참)

ㄹ. $\dfrac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\dfrac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$=\dfrac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\le 0$

$\therefore \dfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ (참)

ㅁ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\right)=4+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}$이고

$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\cdot\dfrac{2b}{a}}=4$이므로

$4+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}\ge 8$ (참)

ㅂ. $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=17+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}$이고

$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\cdot\dfrac{8b}{a}}=8$이므로

$(2a+b)\left(\dfrac{8}{1}+\dfrac{1}{b}\right)=17+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\ge 25$ (참)

## 14 정답 ③

**해설** ㉠에서 등호가 성립하는 경우는

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{y}$,즉 $y=4x$일 때이고,

㉡에서 등호가 성립하는 경우는$x=y$일 때 이므로 서로 일치 하지 않는다.

따라서 $x+y$의 최솟값은 $8$이 될 수 없다.

## 15 정답 ②

**해설** $x>0,\ y>0$에서 $x^2>0,\ y^2>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x^2+125y^2\ge 2\sqrt{5x^2\cdot 125y^2}=50xy$

그런데 $5x^2+125y^2=2$이므로

$2\ge 50xy$

$\therefore xy\le\dfrac{1}{25}$

이때 등호는 $5x^2=125y^2$, 즉 $x=5y$일 때 성립하므로

$xy=\dfrac{1}{25}$에서 $5y\cdot y=\dfrac{1}{25},\ y^2=\dfrac{1}{125}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

따라서 $xy$는 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$일 때

최댓값 $\dfrac{1}{25}$을 가지므로

$\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \beta=\dfrac{\sqrt{5}}{25},\ \gamma=\dfrac{1}{25}$

$\therefore \alpha\beta+\gamma=\dfrac{2}{25}$

## 16 정답 ④

**해설** $\dfrac{a^2-3}{a}+\dfrac{b^2-3}{b}=a-\dfrac{3}{a}+b-\dfrac{3}{b}$

$=a+b-3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=a+b-3\cdot\dfrac{a+b}{ab}$

$=6-\dfrac{18}{ab}$

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$에서 $6\ge 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}\le 3,\ ab\le 9$이므로

$\dfrac{1}{9}\le\dfrac{1}{ab},\ -\dfrac{18}{9}\ge-\dfrac{18}{ab}$

$\therefore 6-2=4\ge 6-\dfrac{18}{ab}$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $4$이다.

## 17 정답 ①

**해설** $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)=2a^2+4+1+\frac{2}{a^2}$$
$$=5+2a^2+\frac{2}{a^2}$$
$$\geq 5+2\sqrt{2a^2\cdot\frac{2}{a^2}}$$
$$=5+4$$
$$=9$$

이때 등호는 $2a^2=\frac{2}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=1$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

즉, $\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{2}{a}\right)$는 $a=1$일 때 최솟값 $9$를 갖는다.

따라서 $m=9$, $n=1$이므로

$m+n=10$

## 18 정답 ④

**해설** $x>0$에서 $\frac{1}{x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x^2+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=x+4+1+\frac{4}{x}$$
$$\geq 5+2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}$$
$$=5+2\cdot 2$$
$$=9 \text{ (단, 등호는 } x=2\text{일 때 성립)}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $9$이다.

## 19 정답 8

**해설** $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{3c}{b}>0$,

$\frac{a}{3c}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 1=\frac{b}{a}\text{일 때 성립}\right)$

마찬가지로

$1+\frac{3c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3c}{b}}$ $\left(\text{단, 등호는 } 1=\frac{3c}{b}\text{일 때 성립}\right)$,

$1+\frac{a}{3c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{3c}}$ $\left(\text{단, 등호는 } 1=\frac{a}{3c}\text{일 때 성립}\right)$

$$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{3c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{3c}\right)$$
$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{3c}{b}}\sqrt{\frac{a}{3c}}$$
$$=8$$

따라서 $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{3c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{3c}\right)$의 최솟값은 $8$이다.

## 20 정답 6

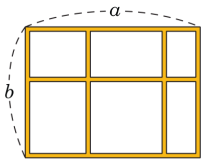
**해설** $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2y+3z}{x}+\frac{3z+x}{2y}+\frac{x+2y}{3z}$$
$$=\frac{2y}{x}+\frac{3z}{x}+\frac{3z}{2y}+\frac{x}{2y}+\frac{x}{3z}+\frac{2y}{3z}$$
$$=\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{2y}{3z}\right)+\left(\frac{3z}{x}+\frac{x}{3z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{2y}{3z}}+2\sqrt{\frac{3z}{x}\cdot\frac{x}{3z}}$$
$$=6 \text{ (단, 등호는 } x=2y=3z\text{일 때 성립)}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $6$이다.

**21** 정답 ②

해설




$3a+4b=240$

$3a+4b \geq 2\cdot\sqrt{3a\cdot 4b}$

$240\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab}$ ($\because$ $3a+4b=240$)

$\therefore$ $1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립하므로,

$3a+4b=6a=240$,

$\therefore$ $a=40$

**22** 정답 $3528\,\text{cm}^3$

해설 소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\,\text{cm}$, $y\,\text{cm}$라 하면 끈의 길이는

$2x+2y+4\cdot 8=2x+2y+32$ (cm)

끈의 길이가 $116\,\text{cm}$이므로

$2x+2y+32=116$

$\therefore x+y=42$

$x>0$, $y>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=42$이므로

$42 \geq 2\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy} \leq 21$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

양변을 제곱하면

$xy \leq 441$

소포의 부피는 $8xy$이므로

$8xy \leq 3528$

따라서 소포의 최대 부피는 $3528\,\text{cm}^3$이다.

**23** 정답 26

해설 $x^2+y^2=13$이므로

$x^2+2x+y^2+3y=2x+3y+13$

$x$, $y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=13$이므로

$13\cdot 13 \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -13 \leq 2x+3y \leq 13$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 $x^2+2x+y^2+3y$의 최댓값은 26이다.

**24** 정답 ③

해설 $a^2+b^2+h^2=25$

코시—슈바르츠의 부등식을 이용하면

$(4^2+4^2+4^2)(a^2+b^2+h^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$48\cdot 25 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\therefore$ $4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48}=20\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4}=\frac{b}{4}=\frac{h}{4} \text{ 일 때 성립한다.}\right)$

따라서 모든 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$의 최댓값은 $20\sqrt{3}$ 이다.

**25** 정답 ③

해설 모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$ $\boxed{\geq}\,0$

이 성립한다. 이 식을 전개하여 $x$에 대해 정리하면

$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x$
$+(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\boxed{\geq}\,0$

$x$에 대한 이차부등식 ㉠이 항상 성립하므로

$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$
$\boxed{-}(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)$
$\times(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$
$\boxed{\leq}\,0$