개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (극대극소) 93~112p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2021년 6월 고3 17번 변형]

함수 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x+\frac{41}{3}$이 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

02 [2023년 11월 고3 7번 변형]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$이 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

03 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-6)x+8$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

04 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3(a+1)x$가 $-2<x<2$에서 감소하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -5 ② -6 ③ -7
④ -8 ⑤ -9

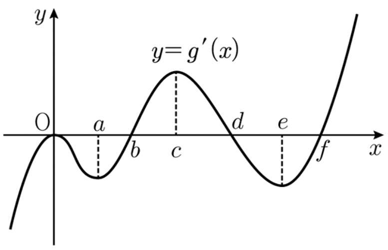
05 함수 $f(x)=-x^3-9x^2-15x+a$의 극솟값이 -17일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

06 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값 1을 가질 때, 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

07 함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖는 x의 개수를 m, 극솟값을 갖는 x의 개수를 n이라 할 때, $2m+n$의 값을 구하시오.



08 함수 $f(x)=x^3+3ax^2+(12-9a)x+5$가 극값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

09 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+5$가 극솟값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

10 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

11 함수 $f(x)=2x^3-6x^2+ax-3$이 $0<x<1$에서 극댓값을 갖고, $x>1$에서 극솟값을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

12 사차함수 $f(x)=3x^4+4ax^3-6(a-8)x^2$이 극댓값을 가질 때, 한 자리의 자연수 a의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

13 닫힌 구간 $[-4,\ 0]$ 에서 함수 $f(x)=-x^4-4x^3+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 26 ② 27
③ 28 ④ 29
⑤ 30

14 함수 $f(x)=x^4-8x^2+12$는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$에서 최솟값 γ를 갖는다고 한다. 이때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$)

15 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=ax^3-9ax^2+b$의 최댓값이 4이고, 최솟값이 -24일 때, 양수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

16 [2024년 3월 고3 7번/3점]
함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$의 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

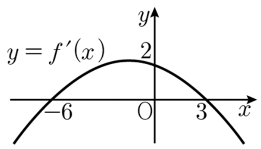
17 함수 $y=x^3-6x^2+12x$의 증가하는 구간은?

① 없다.
② $x<-2$
③ $x>2$
④ $-2<x<2$
⑤ 모든 실수

18 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2x^3+kx^2+6kx-5$의 역함수가 존재하기 위한 정수 k의 개수를 구하시오.

19 함수 $f(x)=x^3+ax^2+5$가 구간 $(2,\ 4)$에서 감소하고, 구간 $(5,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

20 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오.



21 함수 $f(x)=x^3-12x+6$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 14)$ ③ $(0,\ 7)$
④ $(1,\ 7)$ ⑤ $(1,\ 14)$

22 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3ax$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 다음 중 실수 a의 값이 될 수 없는 것은?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

23 $0<a\le 4$인 상수 a에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+a$의 최댓값이 2이고 최솟값이 m일 때, $a-m$의 값은?

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

24 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가질 때, 점 $(-1,3)$에서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선에 이르는 거리는?

① $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

25 두 실수 a, b에 대하여 사차함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=-(x-a)^2(x-b)$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b$)

〈보기〉

ㄱ. $f(b)<0$이면 부등식 $f(x)>0$의 해는 모든 실수이다.
ㄴ. $f(a)=0$이면 부등식 $f(x)\geq 0$을 만족시키는 x의 최솟값은 a이다.
ㄷ. $f(a)=-f(b)$이면 방정식 $|f(x)|=f(b)$는 서로 다른 세 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (극대극소) 93~112p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 5	02 ④	03 ②
04 ⑤	05 ⑤	06 ⑤
07 4	08 ①	09 ⑤
10 5	11 5	12 ①
13 ②	14 24	15 4
16 ①	17 ⑤	18 37
19 2	20 $\frac{27}{2}$	21 ②
22 ①	23 ③	24 ④
25 ⑤		

개념+유형 개념편 - 수학Ⅱ (2025) (극대극소) 93~112p

함수의 증가·감소, 극대·극소 ~ 함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 5

해설 $f'(x)=2x^2-8$

$=2(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(a)=f(2)=\frac{2}{3}\cdot 2^3-8\cdot 2+\frac{41}{3}=3$이므로

$a+f(a)=5$

02 정답 ④

해설 $f(x)=x^3-3x^2-24x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-24$

$=3(x+2)(x-4)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=4$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$\beta-\alpha=4-(-2)=6$

03 정답 ②

해설 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-6)x+8$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+(a^2-6)$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 x에 대한 이차방정식 $3x^2+2ax+(a^2-6)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)=-2a^2+18\leq 0$

$a^2-9\geq 0$, $(a+3)(a-3)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -3$ 또는 $a\geq 3$

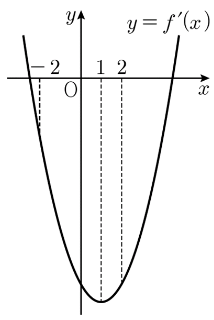
따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

04 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3-3x^2+3(a+1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3a+3$

$=3(x-1)^2+3a$



함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 감소하려면

이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 위의 그림에서

$f'(-2)=27+3a\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -9$ $\cdots$ ㉠

$f'(2)=3+3a\leq 0$이어야 하므로

$a\leq -1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$a\leq -9$

따라서 실수 a의 최댓값은 -9이다.

05 정답 ⑤

해설 $f(x)=-x^3-9x^2-15x+a$에서

$f'(x)=-3x^2-18x-15=-3(x+1)(x+5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-5$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$a-25$	↗	$a+7$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극솟값 $a-25$를 가지므로 $a-25=-17$

$\therefore a=8$

또, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+7$을 가지므로 구하는 극댓값은 $8+7=15$

06 정답 ⑤

해설 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고, 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$

$f'(2)=12+4a=0$, 즉 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+c$

또, $f(2)=1$이므로

$f(2)=8-12+c=1$, $c=5$

따라서 $a+b+c=2$

07 정답 4

해설 주어진 도함수 $y=g'(x)$의 그래프에서

$g'(0)=0$, $g'(b)=0$, $g'(d)=0$, $g'(f)=0$

(ⅰ) $x=d$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

(ⅱ) $x=b$, $x=f$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=b$, $x=f$에서 극솟값을 갖는다.

(ⅲ) $x=0$의 좌우에서

$g'(x)$의 부호는 음$(-)$에서 음$(-)$, 즉 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $m=1$, $n=2$이므로

$2m+n=2+2=4$

08 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+3ax^2+(12-9a)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+12-9a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3(12-9a)>0$

$9a^2+27a-36>0$, $a^2+3a-4>0$

$(a+4)(a-1)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

09 정답 ⑤

해설 $f(x)=x^3+ax^2+3x+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

주어진 삼차함수가 극솟값을 가지기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

10 정답 5

해설 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4x+1$ 에서

$f'(x)=x^2+2(a-1)x+4$

$f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$ 의 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D\le 0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-4\le 0$

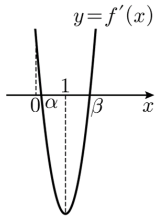
$a^2-2a-3\le 0$, $(a+1)(a-3)\le 0$

$-1\le a\le 3$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1, 2, 3 의 5 개다.

11 **정답** 5

해설 $f(x)=2x^3-6x^2+ax-3$에서
$f'(x)=6x^2-12x+a$
함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값, $x>1$에서 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $0<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.



(ⅰ) $f'(0)>0$에서 $a>0$
(ⅱ) $f'(1)<0$에서 $6-12+a<0$
$\therefore$ $a<6$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $0<a<6$이므로
정수 a는 1, 2, ⋯, 5의 5개이다.

12 **정답** ①

해설 $f(x)=3x^4+4ax^3-6(a-8)x^2$에서
$f'(x)=12x^3+12ax^2-12(a-8)x$
$=12x\{x^2+ax-(a-8)\}$
함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2+ax-(a-8)=0$ 이 0 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
(ⅰ) 0 이 아닌 근을 가져야 하므로
$x=0$ 을 대입하면
$0^2+a\times0-(a-8)\neq0$
즉, $a\neq8$
(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$x^2+ax-(a-8)=0$ 의 판별식
$D>0$ 이어야 한다.
즉, $D=a^2+4(a-8)=a^2+4a-32$
$=(a+8)(a-4)>0$
에서 $a<-8$ 또는 $a>4$
따라서 구하고자 하는 한 자리의 자연수 a는 5, 6, 7, 9 의 4 개다.

13 **정답** ②

해설 $f(x)=-x^4-4x^3+3$에서
$f\ (x)=-4x^3-12x^2=-4x^2(x+3)$
$f\ (x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$(중근)
닫힌 구간 $[-4, 0]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	⋯	-3	⋯	0
$f\ (x)$		+	0	−	0
$f(x)$	3	↗	30	↘	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 30, $x=-4$ 또는 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로
$M=30$, $m=3$
$\therefore$ $M-m=30-3=27$

14 **정답** 24

해설 $f(x)=x^4-8x^2+12$에서
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	⋯	-2	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-4	↗	12	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 최솟값 -4를 가지므로
$\alpha=-2$, $\beta=2$, $\gamma=-4$
$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-2)^2+2^2+(-4)^2=24$

15 **정답** 4

해설 $f(x)=ax^3-9ax^2+b$에서
$f'(x)=3ax^2-18ax=3ax(x-6)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ ($\because$ $a>0$, $-1\leq x\leq2$)
닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	⋯	0	⋯	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-10a+b$	↗	b	↘	$-28a+b$

이때 a, b는 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-28a+b$를 갖는다.
즉, $b=4$, $-28a+b=-24$이므로
$a=1$, $b=4$
$\therefore$ $ab=1\cdot4=4$

16 정답 ①

해설 함수의 증가와 감소를 이해하여 구간의 길이의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$-1 \le a < b \le 5$일 때,

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

따라서 $b-a$의 최댓값은

$5-(-1)=6$

17 정답 ⑤

해설 $y=x^3-6x^2+12x$ 에서,

$y'>0$ 일 때, 함수는 증가한다.

$y'=3x^2-12x+12$

$=3(x-2)^2 \geqq 0$

$\therefore$ 모든 실수 구간에서 증가하는 함수이다.

18 정답 37

해설 삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=2x^3+kx^2+6kx-5$에서

$f'(x)=6x^2+2kx+6k$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-6 \cdot 6k=k^2-36k \le 0$

$k(k-36) \le 0$

$\therefore 0 \le k \le 36$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 36$의 37개이다.

19 정답 2

해설 $f(x)=x^3+ax^2+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(2, 4)$에서 감소하고,

구간 $(5, \infty)$에서 증가하려면

$2<x<4$에서 $f'(x) \le 0$,

$x>5$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

$f'(2)=12+4a \le 0$에서 $a \le -3$

$f'(4)=48+8a \le 0$에서 $a \le -6$

$f'(5)=75+10a \ge 0$에서 $a \ge -\frac{15}{2}$

따라서 a의 값의 범위는

$-\frac{15}{2} \le a \le -6$이므로

정수 a는 $-7, -6$의 2개다.

20 정답 $\frac{27}{2}$

해설 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

($a \ne 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 2이므로

$f'(0)=c=2$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -6, 3이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -6과 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-6+3=-\frac{2b}{3a}$, $(-6) \cdot 3=\frac{c}{3a}=\frac{2}{3a}$

$\therefore a=-\frac{1}{27}$, $b=-\frac{1}{6}$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=-\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{6}x^2+2x+d$이므로 구하는 차는

$f(3)-f(-6)$

$=\left(-1-\frac{3}{2}+6+d\right)-(8-6-12+d)$

$=\frac{27}{2}$

21 정답 ②

해설 $f(x)=x^3-12x+6$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	22	$\searrow$	-10	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 22, $x=2$에서 극솟값 -10을 가지므로

$\mathrm{A}(-2,\ 22)$, $\mathrm{B}(2,\ -10)$

따라서 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 2+3\cdot(-2)}{1+3},\ \frac{1\cdot(-10)+3\cdot 22}{1+3}\right)$

즉, $(-1,\ 14)$

22 정답 ①

해설 $f(x)=x^3+ax^2+3ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a>0,\ a(a-9)>0$

$\therefore\ a<0$ 또는 $a>9$

(ⅱ) $f'(-1)=3-2a+3a>0$에서 $a>-3$

(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-1 \qquad \therefore\ a<3$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$-3<a<0$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

23 정답 ③

해설 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+a$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-72x=12x(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$0<a\le 4$에서 $0<\frac{a}{2}\le 2$이므로

닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(-\frac{a}{2}\right)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$f\left(\frac{a}{2}\right)$

닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a를 가지므로 $a=2$

따라서 $f(x)=3x^4+4x^3-36x^2+2$에서

$f(-1)=3-4-36+2=-35$,

$f(1)=3+4-36+2=-27$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -35를 갖는다.

즉, $m=-35$이므로

$a-m=2-(-35)=37$

24 정답 ④

해설 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f(-1)=3,\ f'(-1)=0$

이때, $g(x)=xf(x)$로 놓으면

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g(-1)=-f(-1)=-3$

$g'(-1)=f(-1)-f'(-1)=3$

즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ -3)$이고, 접선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=3\{x-(-1)\}$

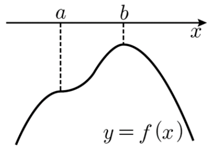
$\therefore\ y=3x$

따라서 점 $(-1,3)$에서 직선 $3x-y=0$에 이르는 거리는

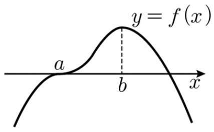
$\frac{|-3-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

25 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(b)<0$이면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$인 해는 존재하지 않는다. (거짓)



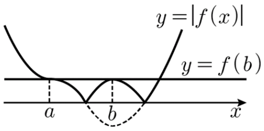
ㄴ. $f(a)=0$일 때 $f(x)=0$을 만족시키는 a가 아닌 값을 $\beta(b<\beta)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\geq 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $a\leq x\leq \beta$이다.



따라서 x의 최솟값은 a이다. (참)

ㄷ. $f(a)<f(b)$이므로 $f(a)=-f(b)$가 성립하려면 $f(a)<0$, $f(b)>0$이고 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=0$이다.

즉, $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $|f(x)|=f(b)$는 서로 다른 세 실근을 가진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.