실시일자	-	고등수학(상)	이름
40문제 / DRE수학			

수능/모의 공통-중간고사 시험범위

고1 24년 10월 ~ 고1 20년 9월

01 정답 ①

해설 원과 직선의 위치 관계 이해하기

중심이 원점이고 직선 $y=-2x+k$와 만나는 원의 넓이가 최소가 되려면 원점과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

원점과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-k|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}k$$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.

원 C의 넓이가 45π이므로 $r^2\pi=45\pi$에서

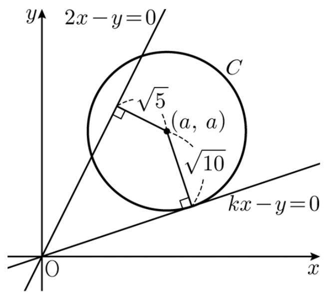
$r=3\sqrt{5}$

따라서 $\frac{\sqrt{5}}{5}k=3\sqrt{5}$ 이므로

$k=15$

02 정답 ③

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원 C의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ a=5$

원 C의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$|5k-5|=\sqrt{10k^2+10}$

$3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

이때 $0<k<1$이므로

$k=\frac{1}{3}$

03 정답 ⑤

해설 원의 접선의 방정식 이해하기

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선 $3x+y=10$이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$3+a=10$

$\therefore\ a=7$

04 정답 9

해설 도형의 평행이동을 이용한 문제해결하기

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$의 중심의 좌표는 $(-1,\ -2)$이고 반지름의 길이는 3이다.

원 C의 중심의 좌표는 $(-1+m,\ -2+n)$이고 반지름의 길이는 3이다.

원 C의 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하기 위해서는 중심의 좌표가 $(3,\ 3)$이어야 하므로

$-1+m=3,\ -2+n=3$

따라서 $m=4,\ n=5$이므로

$m+n=9$

05 정답 ①

해설 평행이동 이해하기

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 b이므로 원 C의 중심의 좌표가 $(a+3,\ b-8)$이고 반지름의 길이가 b이다.

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$a+3=|b-8|=b$

이때 $b-8\neq b$이므로 $-b+8=b$에서

$b=4$

또, $a+3=4$에서

$a=1$

$\therefore\ a+b=5$

06 정답 ④

해설 점의 평행이동과 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기

점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(4,\ -3)$

점 $\mathrm{B}(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(6,\ -3+k)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{-3-4}{4-(-3)}\{x-(-3)\}$$

$\therefore\ y=-x+1$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$-3+k=-5$

$\therefore\ k=-2$

07 정답 ④

해설 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$에서 점 $\mathrm{P_0}$은 선분 $\mathrm{A'B}$ 위에 있다.

직선 $\mathrm{AP_0}$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $\mathrm{A'P_0}$은 직선 $\mathrm{A'B}$와 같다.

이때 직선 $\mathrm{A'P_0}$의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x+1$

점 $(9,\ a)$가 직선 $y=\frac{2}{3}x+1$ 위에 있으므로

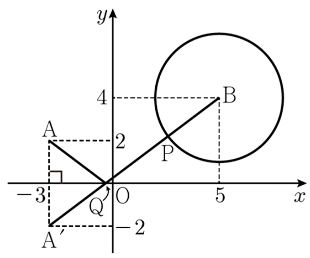
$a=\frac{2}{3}\cdot 9+1=7$

08 정답 ③

해설 대칭이동을 이용하여 추론하기

$\overline{\mathrm{BP}}=3$이므로 점 P는 중심이 B이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는 $(-3,\ -2)$이다.



$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$에서

두 점 P, Q가 모두 선분 $\mathrm{A'B}$ 위에 있을 때

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$는 최소이고, 그 값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=10$

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+3$에서

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$도 최소이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은

$10-3=7$

09 정답 ⑤

해설 도형의 이동을 활용하여 문제해결하기

점 B가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로
점 B의 좌표는 $(a,\ -a+2)$이다.
점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}\geq\overline{A'B}$이고
$\overline{A'B}$가 최소일 때 $\overline{A'B}^2$도 최소이므로

$$\begin{aligned}\overline{A'B}^2&=a^2+(-a+3)^2\\&=2a^2-6a+9\\&=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

이때 $0<a<2$이므로
$a=\frac{3}{2}$에서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값은 최소이다.

$b=-a+2=\frac{1}{2}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

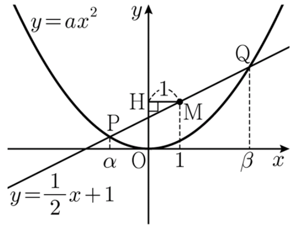
10 정답 ⑤

해설 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 $y=f(x)$의 그래프라 하면
$f(x)=(x-4)^2+m$
함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x+3$에 접하므로
이차방정식 $(x-4)^2+m=2x+3$, 즉
$x^2-10x+m+13=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-10)^2-4(m+13)=0$
$\therefore m=12$

11 정답 ③

해설 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제 해결하기



$ax^2=\frac{1}{2}x+1$에서 $2ax^2-x-2=0$
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{1}{2a}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$ $\cdots$ ㉠

점 M의 x좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{4a}=1$, $a=\frac{1}{4}$

㉠에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \frac{\alpha}{2}+1\right)$, $\mathrm{Q}\left(\beta,\ \frac{\beta}{2}+1\right)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=5\end{aligned}$$

따라서 선분 PQ의 길이는 5이다.

12 정답 ⑤

해설 선분의 내분을 활용한 문제해결하기

두 점 P, R의 좌표가 각각 $(-1,\ -3)$, $(b,\ b-2)$이므로

$\overline{PR}=\sqrt{(b+1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{2(b+1)^2}$

원점 O와 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

삼각형 OPR의 넓이는 $3\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2(b+1)^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(b+1)^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ b=3\sqrt{2}-1$ 또는 $b=-3\sqrt{2}-1$

이때 $b>-1$이므로 $b=3\sqrt{2}-1$

점 R의 좌표는 $(3\sqrt{2}-1,\ 3\sqrt{2}-3)$

원 C_1과 원 C_2의 넓이의 비는 $1:4$이므로

$\overline{PQ}:\overline{QR}=1:2$

점 Q는 선분 PR를 $1:2$로 내분하는 점이므로

점 Q의 좌표는 $(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-3)$

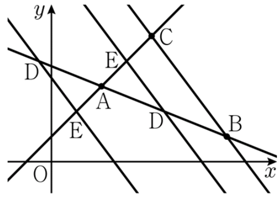
$\therefore\ a=\sqrt{2}-1$

따라서 $a=\sqrt{2}-1$, $b=3\sqrt{2}-1$이므로

$a+b=4\sqrt{2}-2$

13 정답 ①

해설 선분의 내분점과 외분점을 활용하여 문제해결하기



직선 BC와 직선 DE가 서로 평행하므로

삼각형 ABC와 삼각형 ADE는 서로 닮음이다.

삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 넓이의 비가 $4:1$이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

따라서 점 D는 선분 AB의 중점이거나 선분 AB를

$1:3$으로 외분하는 점이다.

(ⅰ) 점 D가 선분 AB의 중점일 때

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+7}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$이므로

점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{2},\ 2\right)$

(ⅱ) 점 D가 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점일 때

선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot7-3\cdot2}{1-3},\ \dfrac{1\cdot1-3\cdot3}{1-3}\right)$이므로

점 D의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 4\right)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 점 D의 y좌표의 곱은

$2\cdot4=8$

14 정답 ⑤

해설 선분의 내분점과 외분점을 이용하여 추론하기

두 선분 AB, BC의 길이가 모두 3이므로

$$\overline{AP}=\overline{BQ}=\frac{3(1-k)}{(1-k)+k}=\boxed{3-3k}$$

$$\overline{AP'}:\overline{P'B}=\overline{AP'}:(\overline{AP'}+3)=k:(k+1)$$

$\therefore\ \overline{AP'}=\overline{BQ'}=3k$

두 점 P, P′에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 두 삼각형 PBH와 P′BH′에서

$$\overline{PH}:\overline{P'H'}=\overline{PB}:\overline{P'B}=(3-\overline{AP}):(\overline{AP'}+3)=\{3-(\boxed{3-3k})\}:(\boxed{3k+3})$$

이므로

$$S_1:S_2=\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{PH}\right):\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ'}\cdot\overline{P'H'}\right)=(\overline{BQ}\cdot\overline{PB}):(\overline{BQ'}\cdot\overline{P'B})=(3-3k)\cdot 3k:3k(3+3k)=(1-k):(1+k)=1:4$$

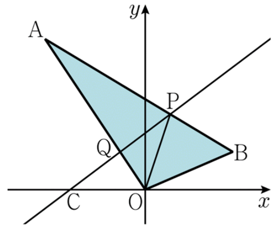
$\therefore\ k=\boxed{\dfrac{3}{5}}$

따라서 $f(k)=3-3k,\ g(k)=3k+3,\ p=\dfrac{3}{5}$이므로

$$f(p)\cdot g(p)=\frac{6}{5}\cdot\frac{24}{5}=\frac{144}{25}$$

15 정답 ④

해설 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기



직선 PC와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하고 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하자.

두 삼각형 AOP, AQP의 넓이가 각각 $\frac{2}{3}S$, $\frac{1}{2}S$이므로

삼각형 QOP의 넓이는 $\frac{1}{6}S$이다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비는 선분 AQ와 선분 QO의 길이의 비와 같다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비가 $3:1$이므로

$\overline{AQ}:\overline{QO}=3:1$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 0+1\cdot(-8)}{3+1},\ \frac{3\cdot 0+1\cdot a}{3+1}\right)=\left(-2,\ \frac{a}{4}\right)$$

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 7+1\cdot(-8)}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}\right)=\left(2,\ \frac{a+6}{3}\right)$$

직선 PC의 방정식은

$$y=\frac{\frac{a+6}{3}}{2-(-6)}(x+6)=\frac{a+6}{24}(x+6)$$

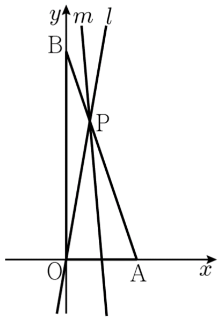
점 Q가 직선 PC 위의 점이므로

$$\frac{a}{4}=\frac{a+6}{24}\cdot(-2+6)$$

$\therefore\ a=12$

16 정답 ①

해설 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기
조건 (가)에서 직선 l이 삼각형 OAB의 점 O를 지나므로
조건 (나), (다)에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$ 또는 $1:2$로 내분하는 점이어야 한다.
(i) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$이므로

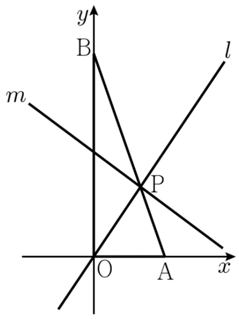
직선 l의 기울기는 $\frac{4-0}{\frac{2}{3}-0}=6$

조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OA의 중점 $(1, 0)$을 지난다.

직선 m의 기울기는 $\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=-12$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은 -6이다.

(ii) 점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$이므로

직선 l의 기울기는 $\frac{2-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{3}{2}$

조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OB의 중점 $(0, 3)$을 지난다.

직선 m의 기울기는 $\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{3}{4}$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

(i), (ii)에 의하여 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

17 정답 15

해설 두 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기
점 (a, a)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-a=m(x-a)$, $y=mx-am+a$
직선 $y=mx-am+a$가 곡선 $y=x^2-4x+10$에 접하므로 $x^2-4x+10=ma-am+a$에서
이차방정식 $x^2-(m+4)x+am-a+10=0$의 판별식을 D라 하면

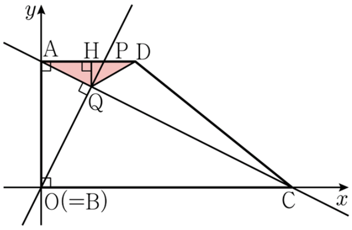
$$D=(m+4)^2-4(am-a+10)$$
$$=m^2+(8-4a)m+4a-24=0$$

이때 이차방정식 $m^2+(8-4a)m+4a-24=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근을 m_1, m_2라 하면
두 접선의 기울기는 각각 m_1, m_2이다.
이때 두 접선이 서로 수직이므로
$m_1m_2=-1$
또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$m_1+m_2=4a-8$, $m_1m_2=4a-24$
이때 $4a-24=-1$에서 $4a=23$이므로
$m_1+m_2=4a-8=15$
따라서 두 접선의 기울기의 합은 15이다.

18 정답 ①

해설 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

좌표평면에서 점 B를 원점으로 하고 점 A의 좌표를 $(0,\ 4)$, 점 C의 좌표를 $(8,\ 0)$이라 하자.



직선 AC의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

점 $B(0,\ 0)$을 지나고 직선 AC에 수직인 직선 BP의 방정식은 $y=2x$

점 D의 좌표를 $(t,\ 4)$라 하면 점 P는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2}{3}t,\ 4\right)$

점 P는 직선 BP 위의 점이므로

$4=2\cdot\dfrac{2}{3}t$

$\therefore\ t=3$

점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$, 점 D의 좌표는 $(3,\ 4)$

점 Q는 두 직선 AC, BP가 만나는 점이므로

점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AQD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{QH}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\left(4-\dfrac{16}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$

19 정답 ⑤

해설 두 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

ㄱ. $t=2$이므로 $P(2,\ 1)$

직선 PQ의 방정식은 $y=(x-2)+1=x-1$

따라서 점 Q의 x좌표는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 방정식은 $y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t}{2}(x-t)$

$y=\dfrac{t}{2}x-\dfrac{t^2}{4}$에서 $Q\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{t}{2}$이고,

직선 AQ의 기울기는 $\dfrac{0-1}{\dfrac{t}{2}-0}=-\dfrac{2}{t}$

따라서 $\dfrac{t}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{t}\right)=-1$이므로

두 직선 PQ와 AQ는 서로 수직이다. (참)

ㄷ. 점 R는 선분 QA를 $3:2$로 외분하는 점이므로

점 R의 x좌표는 $\dfrac{3\cdot0-2\cdot\dfrac{t}{2}}{3-2}=-t$,

점 R의 y좌표는 $\dfrac{3\cdot1-2\cdot0}{3-2}=3$

따라서 $R(-t,\ 3)$이고,

점 R가 이차함수 $y=\dfrac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이므로

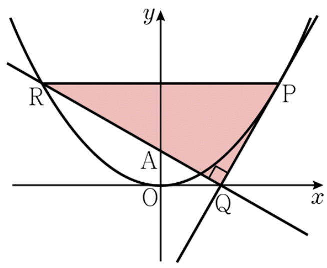
$3=\dfrac{1}{4}\cdot(-t)^2,\ t^2=12$

$t>0$이므로 $t=2\sqrt{3}$

$\therefore\ R(-2\sqrt{3},\ 3),\ Q(\sqrt{3},\ 0),\ P(2\sqrt{3},\ 3)$

따라서 삼각형 RQP의 넓이는

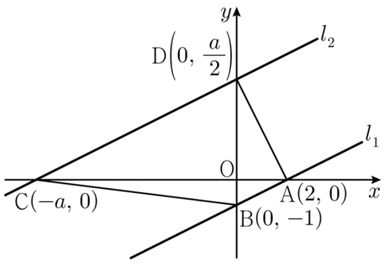
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{RQ}\cdot\overline{QP}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 정답 20

해설 직선의 방정식 이해하기



두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하므로

$l_2 : x-2y+a=0$ $(a>0)$

(사각형 ADCB의 넓이)

=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot(a+2)\cdot\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\cdot(a+2)\cdot 1$

$=\frac{1}{2}(a+2)\left(\frac{a}{2}+1\right)$

$=\frac{a^2}{4}+a+1=25$

$a^2+4a-96=0$

$(a+12)(a-8)=0$

$\therefore\ a=-12$ 또는 $a=8$

이때 $a>0$이므로

$a=8$

두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 점 $A(2, 0)$과 직선 $l_2 : x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ d^2=20$

21 정답 14

해설 원의 방정식을 활용한 문제해결하기

$\angle AOB=90^\circ$ 이므로 선분 AB는 원의 지름이고,

$A(t, 0)$이라 하면 $B(0, t+4)$이고 원의 중심 C의 좌표는

$\left(\frac{t}{2}, \frac{t+4}{2}\right)$

이때 점 C가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$\frac{t+4}{2}=\frac{3}{2}t$

$\therefore\ t=2$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1, 3)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 $a=1$, $b=3$, $r=\sqrt{10}$

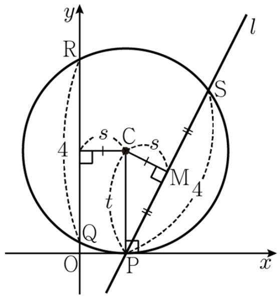
$\therefore\ a+b+r^2=14$

22 정답 ①

해설 점과 직선 사이의 거리를 활용한 문제해결하기

양수 s, t에 대하여 원의 중심의 좌표를 $C(s, t)$라 하면

점 P의 좌표는 $(s, 0)$이다.



점 P를 지나고 기울기가 2인 직선을 l이라 하면

직선 l의 방정식은

$y-0=2(x-s)$, $2x-y-2s=0$

이때 $\overline{QR}=\overline{PS}=4$에 의하여 점 C와 y축 사이의 거리와

점 C와 직선 l 사이의 거리가 같으므로

$s=\frac{|2s-t-2s|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$, $\sqrt{5}s=|-t|$

$\therefore\ t=\sqrt{5}s$ $\cdots$ ㉠

선분 PS의 중점을 M이라 하면

$\overline{PM}=2$, $\overline{CM}=s$, $\overline{CP}=t$이고

삼각형 CPM이 직각삼각형이므로

$t^2=s^2+4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $s=1$, $t=\sqrt{5}$ 이므로

원점 O와 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$

23 정답 ⑤

해설 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$를 만족시키는 두 점 P, Q는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

이때 선분 AB의 수직이등분선은 직선 $y=x$이므로 두 점 P, Q는 원 C와 직선 $y=x$가 만나는 점이다.

선분 PQ는 원 C의 지름이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=4$

선분 AB와 직선 $y=x$가 만나는 점을 H라 하자.

사각형 APBQ는 넓이가 $2\sqrt{2}$ 이고 사각형 APBQ의 넓이는 두 삼각형 APQ, BQP의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \overline{\mathrm{AH}}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \overline{\mathrm{BH}}=2(\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}})$$
$$=2\overline{\mathrm{AB}}$$
$$=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$

또한, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a-b)^2}$ 이므로

$\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{2}$ 에서

$|a-b|=1$

양변을 제곱하면

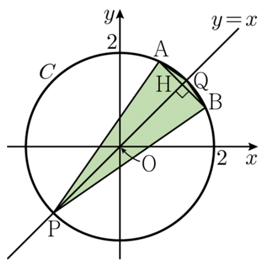
$a^2-2ab+b^2=1$

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 원 C 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$

따라서 두 식을 연립하여 계산하면

$ab=\dfrac{3}{2}$



24 정답 5

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 하자.

점 C와 직선 $2x-y+6=0$ 사이의 거리는 r이고,

점 C와 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리는 r이므로

$$r=\frac{|2a-b+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+b-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} \quad \cdots ㉠$$

따라서 $|2a-b+6|=|2a+b-6|$이고,

$2a-b+6=2a+b-6$이면 $b=6$,

$2a-b+6=-(2a+b-6)$이면 $a=0$이다.

중심이 $\mathrm{C}(a,\ 6)$이고 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 원은 $(2,\ 0)$을 지날 수 없으므로 $b\neq 6$

따라서 $a=0$이고, 원의 중심 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0,\ b)$

점 $\mathrm{C}(0,\ b)$에서 점 $(2,\ 0)$까지의 거리가 r이므로 ㉠에 의하여

$$\sqrt{(2-0)^2+(0-b)^2}=\frac{|b-6|}{\sqrt{5}}$$

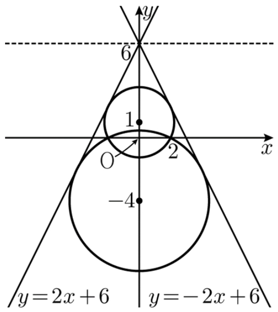
$$b^2+4=\frac{(b-6)^2}{5}$$

$4b^2+12b-16=0$

$4(b+4)(b-1)=0$

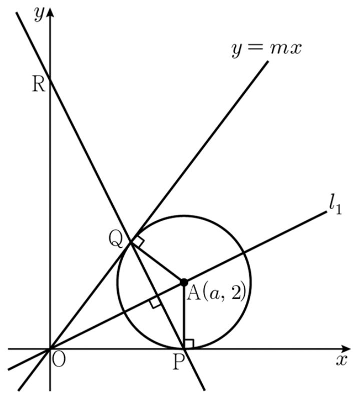
$\therefore\ b=-4$ 또는 $b=1$

따라서 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 두 원의 중심 O_1, O_2의 좌표는 $(0,\ -4)$, $(0,\ 1)$이므로 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 길이는 5이다.



25 정답 80

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 A라 하고, 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

점 A의 좌표는 $(a,\ 2)$

이때 원점 O와 점 A를 지나는 직선을 l_1이라 하면

직선 l_1의 방정식은 $y=\frac{2}{a}x$

직선 PQ는 점 P를 지나고 직선 l_1과 수직이므로

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{a}{2}(x-a)$

직선 PQ가 y축과 만나는 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a^2}{2}\right)$

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{4}=16$

$\therefore\ a=4$

점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$

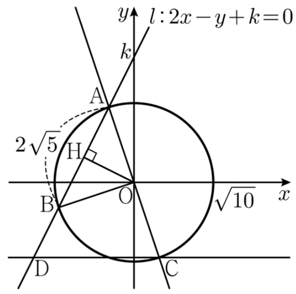
이때 $m>0$이므로

$m=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 60m=60\cdot\frac{4}{3}=80$

26 정답 ③

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기



직선 l의 방정식을 $2x-y+k=0$이라 하고

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{10}$ 이고 삼각형 AHO가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}$는 원점 O와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\therefore\ k=5$

두 점 A, B는 직선 $l:2x-y+5=0$이 원

$x^2+y^2=10$과 만나는 점이므로

$x^2+(2x+5)^2=10$

$x^2+4x+3=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-3$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-1,\ 3),\ (-3,\ -1)$이고

점 C는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점과

일치하므로 점 C의 좌표는

$(1,\ -3)$

점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 l과 만나는

점 D의 좌표는

$(-4,\ -3)$

따라서 $a=-4,\ b=-3$이므로

$a+b=-7$

27 정답 8

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$3x-4y-25=0$

이 접선이 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$과 만나려면 원의 중심 $(6,\ 8)$과 직선 $3x-4y-25=0$ 사이의 거리 d가 반지름의 길이 r $(r>0)$보다 작거나 같아야 한다.

$d=\dfrac{|3\cdot6-4\cdot8-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{39}{5}\le r$이므로

자연수 r의 최솟값은 8이다.

28 정답 ④

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=ax$가 만나는

점 A의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}},\ a\cdot\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}}\right)$

점 A를 지나고 직선 $y=ax$에 수직인 직선을 l이라 하자.

직선 l의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$=-\dfrac{1}{a}x+\boxed{\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$

점 C는 직선 l과 x축이 만나는 점이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(\sqrt{a^2+1},\ 0)$

점 $\mathrm{D}(0,\ -1)$과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot d$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OD}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{a^2+1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$

$\therefore\ \dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}\cdot\sqrt{a^2+1}=\dfrac{a^2+1}{2}$

따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}=2$를 만족시키는 양수 a의 값은

$a=\boxed{\sqrt{3}}$

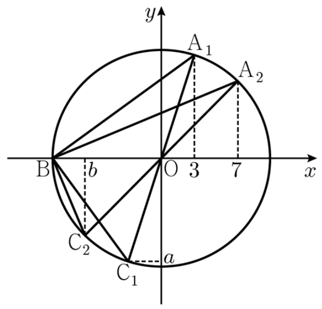
그러므로

$f(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ g(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ k=\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{3})\cdot g(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

29 정답 140

해설 점의 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



$\angle A_1BC_1 = 90^\circ$, $\angle A_2BC_2 = 90^\circ$

두 선분 A_1C_1, A_2C_2는 원의 지름이고

$\overline{OA_1} = \overline{OC_1}$, $\overline{OA_2} = \overline{OC_2}$이므로

두 점 A_1, A_2를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 각각 C_1, C_2이다.

이때 점 A_1의 좌표는 $(3,\ \sqrt{91})$, 점 A_2의 좌표는 $(7,\ \sqrt{51})$이고 점 C_1의 좌표는 $(-3,\ -\sqrt{91})$, 점 C_2의 좌표는 $(-7,\ -\sqrt{51})$이므로

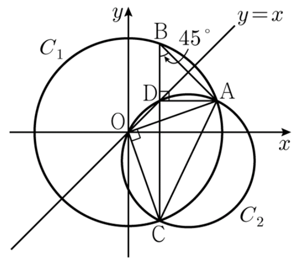
$a = -\sqrt{91}$, $b = -7$

$\therefore\ a^2 + b^2 = (-\sqrt{91})^2 + (-7)^2$

$= 140$

30 정답 32

해설 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 $A(a,\ 2)$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점은 $B(2,\ a)$이고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $C(2,\ -a)$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{a^2+4}$ 이므로

점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이고

$r_1 = \overline{OA}$

선분 BC와 직선 $y = x$가 만나는 점을 D라 하면

삼각형 BDA는 직각이등변삼각형이므로

$\angle ABD = \angle ABC = 45^\circ$

두 삼각형 ABC, AOC의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하자.

$\angle ABC$는 원 C_1의 호 AC에 대한 원주각이고,

$\angle AOC$는 원 C_1의 호 AC에 대한 중심각이므로

$\angle AOC = 2\angle ABC = 90^\circ$

$\angle AOC = 90^\circ$ 이므로 선분 AC는 원 C_2의 지름이다.

$r_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r_1$

$r_1r_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r_1^2 = 18\sqrt{2}$

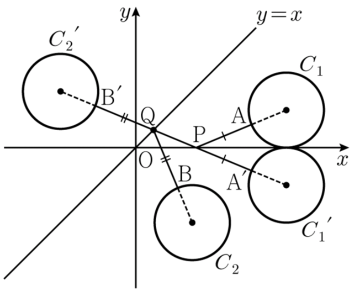
$r_1 = 6$

$\overline{OA} = \sqrt{a^2+4} = 6$

$\therefore\ a^2 = 32$

31 정답 ③

해설 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 $C_1{}'$,
원 C_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 $C_2{}'$이라 하면

$C_1{}' : (x-8)^2+(y+2)^2=4$,

$C_2{}' : (x+4)^2+(y-3)^2=4$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′,
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 두 점 A′, B′은 각각 원 $C_1{}'$, 원 $C_2{}'$ 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값은 네 점 A′, P, Q, B′이 두 원 $C_1{}'$, $C_2{}'$의 중심을 연결한 선분 위에 있을 때 최소이고, 두 원 $C_1{}'$, $C_2{}'$의 반지름의 길이가 모두 2이므로

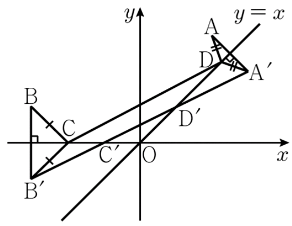
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\{8-(-4)\}^2+\{(-2)-3\}^2}-4$
$=13-4=9$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 9이다.

32 정답 ④

해설 점의 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(3,\ 2)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-3,\ -1)$

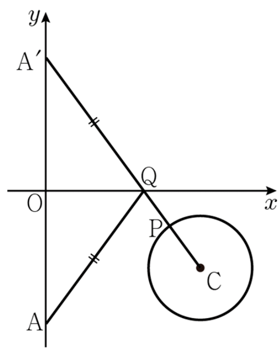
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{A'D}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{B'C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{A'D}}+\overline{\mathrm{DC}}+\overline{\mathrm{CB'}}$
$\geq\overline{\mathrm{A'D'}}+\overline{\mathrm{D'C'}}+\overline{\mathrm{C'B'}}$
$=\overline{\mathrm{A'B'}}$
$=\sqrt{\{(-3)-3\}^2+\{(-1)-2\}^2}$
$=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.

33 정답 ①

해설 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 A$(0,\ -5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′$(0,\ 5)$

원의 중심을 C라 하면 C$(6,\ -3)$

이때 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A'Q}}$,

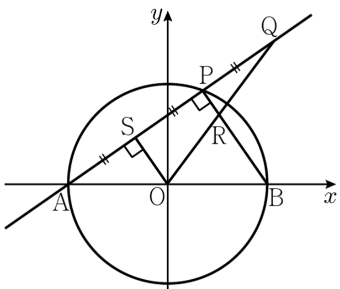
$\overline{\mathrm{A'C}}=\sqrt{(6-0)^2+(-3-5)^2}=10$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}$
$\geq\overline{\mathrm{A'P}}$
$\geq\overline{\mathrm{A'C}}-2=8$

따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은 8이다.

34 정답 ⑤

해설 선분의 내분과 외분을 활용하여 문제 해결하기



원의 중심 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자.

선분 AP가 원 C의 현이므로 $\overline{AS}=\overline{SP}$

점 Q가 선분 AP를 $3:1$로 외분하는 점이므로

$\overline{AS}=\overline{SP}=\overline{PQ}$

$\angle APB$는 호 AB에 대한 원주각이고,

선분 AB는 원의 지름이므로 $\angle APB=90°$

이때 두 삼각형 QSO와 QPR에서

$\angle QSO=\angle QPR=90°$, $\angle Q$는 공통이므로

두 삼각형 QSO와 QPR는 닮음비가 $2:1$인 닮은 도형이다.

그러므로 점 R는 선분 OQ의 중점이다.

삼각형 OBR의 넓이는

$\frac{9}{26}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot$ (점 R의 y좌표)

점 R의 y좌표는 $\frac{9}{13}$, 점 Q의 y좌표는 $\frac{18}{13}$

점 P는 선분 AQ를 $2:1$로 내분하는 점이므로

점 P의 y좌표는 $\dfrac{2\cdot\frac{18}{13}+1\cdot 0}{2+1}=\frac{12}{13}$

점 P의 좌표를 $P\left(a, \frac{12}{13}\right)$라 하면

$0<m<1$이므로 점 P의 x좌표는 양수이고,

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a=\frac{5}{13}$

점 A를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x+1)$

점 $P\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$는 직선 $y=m(x+1)$ 위의 점이므로

$\frac{12}{13}=m\left(\frac{5}{13}+1\right)$

$\therefore\ m=\frac{2}{3}$

35 정답 ⑤

해설 원의 방정식을 활용하여 추론하기

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P는 선분 OA의 중점이므로 점 P의 좌표는 $(0, 2)$ (참)

ㄴ. 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$\left(0, \frac{4m}{m+n}\right)$, $\left(\frac{4m}{m+n}, 4\right)$, $\left(4, \frac{4n}{m+n}\right)$

직선 PQ의 기울기는 $\frac{n}{m}$, 직선 QR의 기울기는 $-\frac{m}{n}$

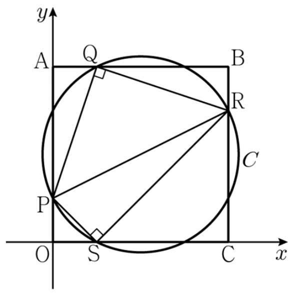
두 직선 PQ, QR의 기울기의 곱이 -1이므로

두 직선은 서로 수직이고 선분 PR는 원 C의 지름이다.

점 S의 좌표를 $\left(\frac{4m}{m+n}, 0\right)$이라 하면 직선 PS의 기울기는 -1, 직선 SR의 기울기는 1이다.

두 직선 PS, SR의 기울기의 곱이 -1이므로

두 직선은 서로 수직이고, 점 S는 선분 PR를 지름으로 하는 원 C 위의 점이다. (참)



ㄷ. 선분 PR를 지름으로 하고 중심의 좌표가 $(2, 2)$인 원 C가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을

$D\left(\frac{4m}{m+n}, 0\right)$, $E\left(\frac{4n}{m+n}, 0\right)$이라 하면

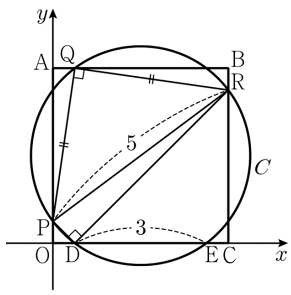
$\overline{DE}=\left|\frac{4(n-m)}{m+n}\right|=3$

$\overline{PR}=\sqrt{(4-0)^2+\left(\frac{4n}{m+n}-\frac{4m}{m+n}\right)^2}$

$=\sqrt{4^2+\left\{\frac{4(n-m)}{m+n}\right\}^2}=5$

삼각형 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PQ}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

36 정답 48

해설 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=mx+4a$가 만나는
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면
$A(\alpha,\ a\alpha^2)$, $B(\beta,\ a\beta^2)$
이차방정식 $ax^2-mx-4a=0$이 두 실근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{m}{a},\ \alpha\beta=-4$$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 $\angle BOA=90^\circ$
직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\frac{a\alpha^2-0}{\alpha-0}\cdot\frac{a\beta^2-0}{\beta-0}=a\alpha\cdot a\beta$$
$$=a^2\cdot\alpha\beta$$
$$=-4a^2=-1$$

따라서 양수 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

점 $P\left(k,\ \frac{k^2}{2}\right)$은 원 C 위의 점이므로 $\angle APB=90^\circ$
직선 PA의 기울기와 직선 PB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\frac{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\alpha-k}\cdot\frac{\frac{\beta^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\beta-k}=\frac{1}{4}(\alpha+k)(\beta+k)$$
$$=\frac{1}{4}\{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=\frac{1}{4}(k^2+2mk-4)=-1$$

즉, $k^2+2mk=0$에서 $k=-2m$이고 $P(-2m,\ 2m^2)$
점 $P(-2m,\ 2m^2)$과 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를
d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|m\cdot(-2m)-2m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

점 O와 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

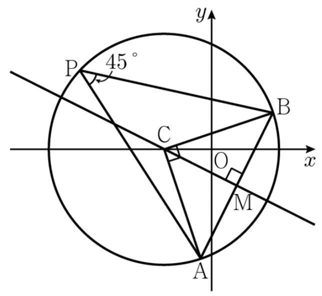
삼각형 ABP와 삼각형 AOB의 넓이의 비는
$d_1 : d_2$이므로

$$\frac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}:\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=5:1\text{에서}$$

$|-4m^2+2|=10,\ m^2=3$
이때 m은 양수이므로 $m=\sqrt{3}$, $k=-2\sqrt{3}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=\sqrt{3}x+2$이므로
$f(k)\cdot g(-k)=6\cdot8=48$

37 정답 ②

해설 원의 방정식을 활용하여 문제 해결하기



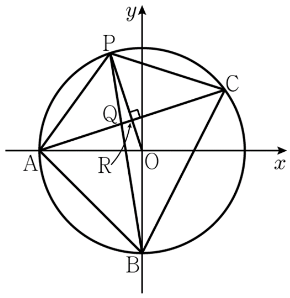
호 AB에 대한 원주각이 $\angle APB=45^\circ$ 이므로
호 AB에 대한 중심각은 $\angle ACB=90^\circ$
삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 직각이등변삼각형이다.
주어진 원의 반지름의 길이를 $r=\overline{CA}$라 하면
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2r^2$
이때 선분 AB의 길이가 $6\sqrt{5}$ 이므로 $r=3\sqrt{10}$
선분 AB의 중점을 M이라 하면
점 M의 좌표는 $M(2,\ -3)$
직선 AB의 기울기가 2이고
직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이므로
직선 CM의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-2$
이때 점 C의 좌표를 $C(2a,\ -a-2)$라 하자.
점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은
$(x-2a)^2+(y+a+2)^2=90$
점 $B(5,\ 3)$이 원 위의 점이므로
$(5-2a)^2+(5+a)^2=90$
$5a^2-10a-40=0$
$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)=0$
$\therefore\ a=4$ 또는 $a=-2$
따라서 $C(8,\ -6)$ 또는 $C(-4,\ 0)$이므로
$k=10$ 또는 $k=4$
따라서 k의 최솟값은 4

38 정답 ④

해설 직선의 방정식과 원의 방정식을 활용하여 추론하기

ㄱ. 직선 AC의 방정식은 $x-3y+5=0$이므로
점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $2\sqrt{10}$ 이다. (참)

ㄴ. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P 에서의 접선이
직선 AC와 평행할 때, 사각형 PABC의 넓이가 최대가 된다.
선분 AC와 두 선분 PB, PO가 만나는 점을 각각 Q, R라 하자.
원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AC는 평행하고, 원의 반지름 OP와 각각 서로 수직이다.
삼각형 PQR에서 $\angle R=90^\circ$, $\angle Q<90^\circ$ 이므로
직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이 아니다. (거짓)



ㄷ. 사각형 PABC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACP의 넓이의 합과 같다.
삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AC}=3\sqrt{10}$ 이고 ㄱ에 의하여

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}=30 \qquad \cdots ㉠$$

삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은 ㄴ에 의하여

$$\overline{OR}=\frac{|1\cdot 0+(-3)\cdot 0+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\overline{PR}=5-\overline{OR}=5-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\left(5-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{15(\sqrt{10}-1)}{2} \qquad \cdots ㉡$$

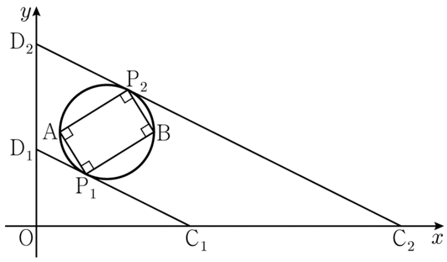
따라서 사각형 PABC 의 넓이의 최댓값은
㉠, ㉡에 의하여 $\frac{15(3+\sqrt{10})}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

39 정답 ①

해설 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

$\angle APB=90^\circ$ 인 점 P는 두 점 A$(1, 4)$, B$(5, 4)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원 C 위의 점이다.
점 P는 중심의 좌표가 $(3, 4)$, 반지름의 길이가 2인 원 C 위의 점이면서 선분 CD 위의 점이므로
직선 $l: y=-\frac{1}{2}x+t$와 원 C가 서로 만날 때
선분 CD 위에 $\angle APB=90^\circ$ 인 점 P가 존재한다.



점 $(3, 4)$와 직선 $l: x+2y-2t=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3+2\cdot 4-2t|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|11-2t|}{\sqrt{5}}$ 이므로 직선 l과
원 C가 서로 만나려면

$$\frac{|2t-11|}{\sqrt{5}}\le 2,\ |2t-11|\le 2\sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{5}\le 2t-11\le 2\sqrt{5}$$

$$\frac{11-2\sqrt{5}}{2}\le t\le\frac{11+2\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $M=\frac{11+2\sqrt{5}}{2}$, $m=\frac{11-2\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$M-m=2\sqrt{5}$

40 **정답** ④

해설 원의 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

원 C위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$

점 H의 x의 좌표는 x_1이고 $2\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HB}}$에서

$2(x_1+2)=\frac{4}{x_1}-x_1$

$3{x_1}^2+4x_1-4=0$

$(x_1+2)(3x_1-2)=0$

이때 $x_1>0$이므로 $x_1=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{B}(6, 0)$

점 P는 원 C위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$에서 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$