공통수학2_내신대비_기말고사 총정리_함수

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
57문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 [2015년 6월 고2 이과 29번/4점]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2015)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x) = 1 - |x-2| \quad (1 \le x \le 3)$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(3x) = 3f(x)$ 이다.

02 $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$는 다음 성질을 갖는다.

(ⅰ) $i \neq j$일 때, $f(i) \neq f(j)$

(ⅱ) 집합 A는 함수f의 공역이자 치역이다.

이때 $a+b$의 값을 구하시오.

03 집합 $X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$는 일대일대응이다. $7 \le n \le 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n-2)$의 값이 짝수일 때, $f(5)f(9)$의 최댓값을 구하시오.

04 [2018년 3월 고2 이과 27번 변형]

집합 $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$는 일대일 대응이다. $3 \le n \le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수일 때, $f(3)+f(4)$의 최댓값을 구하시오.

05 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수는?

(가) 함수 f는 일대일대응이다.

(나) $f(6) = 1$

(다) $k \le 5$이면 $f(k) \ge k$

① 16　② 24　③ 32　④ 40　⑤ 48

06 [2024년 3월 고2 27번/4점]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수를 구하시오.

(가) $x_1 \in X$, $x_2 \in X$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $1 \le x_1 < x_2 \le 4$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다.

(나) 함수 f의 역함수가 존재하지 않는다.

07 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족할 때, 함수 f 개수는?

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.
> (나) $f(3)=5$
> (다) $f(2)>f(4)$, $f(2)>f(5)$

① 40 ② 50 ③ 60
④ 70 ⑤ 80

08 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 일대일함수이고 $f(1)<f(3)<f(5)$일 때, 함수 f의 개수를 구하시오.

09 집합 $X=\{7, 8, 9, 10, 11\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이다. $7 \le n \le 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수일 때, $f(7)f(11)$의 최댓값을 구하시오.

10 [2023년 11월 고1 29번 변형]
집합 $X=\{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $\{f(x)-x^2+10\} \cdot \{f(x)-3x\}=0$이다.
> (나) $f(0)+f(2)+f(4)=f(6)-10$

$f(-4)+f(-2)+f(0)+f(2)+f(4)+f(6)$의 값을 구하시오.

11 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$h(x)=\frac{2}{7}f(x)+\frac{5}{7}g(x)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

> ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.
> ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다.
> ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일대응이면 $y=h(x)$도 일대일대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 집합 A에 대하여 함수 $f_A(x)$를

$f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A\text{일 때})\\0 & (x\notin A\text{일 때})\end{cases}$로 정의한다.

$f_{A\cap B^c}(x)=1$일 때, 다음 보기 중 그 값이 항상 1이 되는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f_A(x)+f_B(x)$
ㄴ. $f_A(x)-f_B(x)$
ㄷ. $f_A(x)f_B(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)+f(2)+f(3)$은 홀수이다.
(나) $x_1\in X$, $x_2\in X$ 에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

14 두 실수 a, b와 두 함수 $f(x)=-x^2-4x+4$, $g(x)=x^2-4x-4$에 대하여 함수 $h(x)$를

$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x<a)\\g(x+2b) & (x\geq a)\end{cases}$라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)만을 원소로 하는 집합을 A라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $(-1, k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.
ㄴ. $(-2, 4)\in A$
ㄷ. 집합 $B=\{m+b\,|\,(m, b)\in A$이고 m은 정수$\}$에 대하여 $\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}\in B$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 집합 $S=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 S에서 S로의 함수 f 중에서, S의 모든 원소 n에 대하여 $f(n)\geq n$인 것의 개수를 a, S의 모든 원소 n에 대하여 $n+f(n)$이 홀수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

16 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)=x^2+4x+3$에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=m$에서 최솟값 n을 가진다. 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다. (나) $f(-1)=3$

17 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 $f(x)=ax+b$, $g(x)=2x^2+3x+1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은? (단, $a \neq 0$)

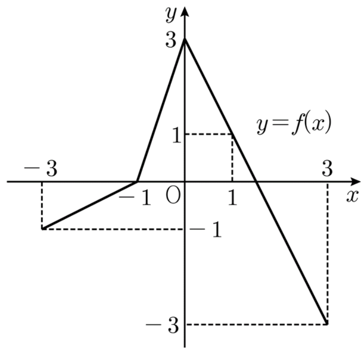
① 60 ② 55 ③ 50
④ 45 ⑤ 40

18 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. (나) $2 \leq x \leq 4$일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)-2x+2$이다.

$f(1)+f(3)+f(4)$의 값을 구하시오.

19 $-3 \leq x \leq 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같고 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f^{2022}(-1)+f^{2021}(1)$의 값을 구하시오.



(가) $f^1(x)=f(x)$ (나) $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

20 함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 $f^{10}(x)=ax+b$라 할 때, $a-b$의 값은? (단, $f^2=f \circ f$, $f^n=f^{n-1} \circ f$이다.)

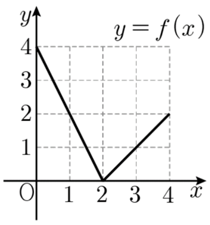
① $2^{10}-1$ ② 2^{10} ③ $2^{11}-1$
④ 2^{11} ⑤ $2^{12}-1$

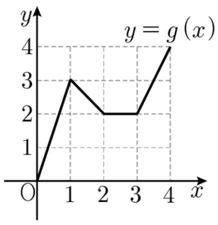
21 두 함수 $f(x)=x+6$,

$g(x)=\begin{cases}-2x-5 & (x<0)\\ x^2-6ax-5 & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여

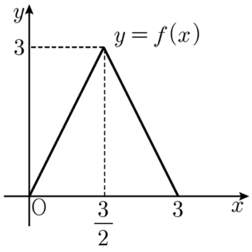
합성함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\ge -35\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

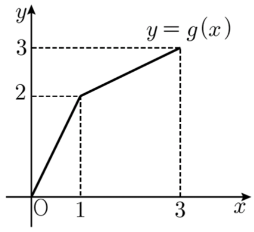
22 $0\le x\le 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.





23 $0\le x\le 3$에서 정의된
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,
함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 x축, y축으로
둘러싸인 도형의 넓이는?

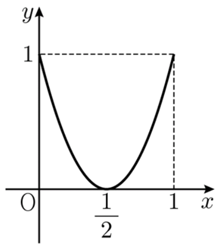


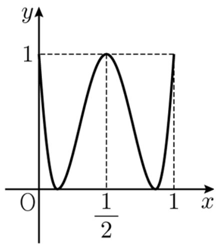


① $\frac{13}{4}$　② 5　③ $\frac{17}{4}$

④ 6　⑤ $\frac{25}{4}$

24 함수 $f(x)=4x^2-4x+1$ $(0 \le x \le 1)$에 대하여 $y=f(x)$와 $y=f(f(x))$의 그래프 개형은 다음과 같다. 이때 집합 $\{x \mid f(f(f(x)))=x,\ 0 \le x \le 1\}$의 원소의 개수는?





① 16　② 12　③ 8
④ 6　⑤ 5

25 두 함수 $f(x)=x^2+8x+20$, $g(x)=-3x^2+12x+k$에 대하여 합성함수$(g \circ f)(x)$의 최댓값이 18이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

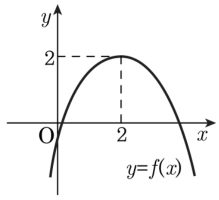
26 $0 \le x \le 1$에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} -4x+1 & \left(0 \le x < \frac{1}{4}\right) \\ 2x-\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}\right) \\ x & \left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

이 정의된다. $f(f(x))=\frac{1}{2}$을 만족하는 모든 x값의 합은?

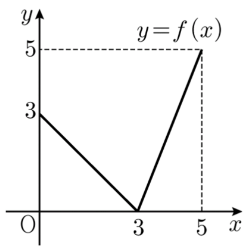
① $\frac{29}{32}$　② $\frac{31}{32}$　③ $\frac{33}{32}$
④ $\frac{35}{32}$　⑤ $\frac{37}{32}$

27 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는?



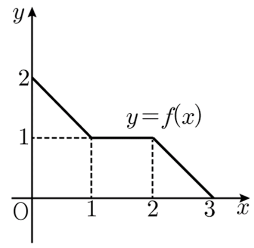
① 없다　② 1 개　③ 2 개
④ 3 개　⑤ 4 개

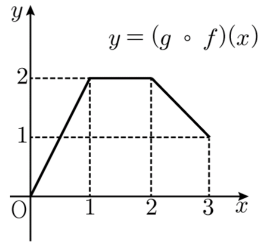
28 $0 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)+1$을 만족시키는 서로 다른 실근의 합은?



① 5 ② $\frac{27}{5}$ ③ $\frac{29}{5}$
④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{33}{5}$

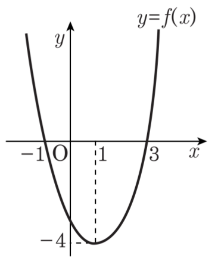
29 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프이다.





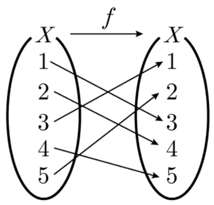
$0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $y=g(x)$에 대하여 방정식 $(g \circ g)(x)=1$의 모든 실근의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$를 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

30 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는?



① 2개 ② 4개 ③ 6개
④ 8개 ⑤ 0개

31 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여
함수 $f: X \to X$가 아래 그림과 같다.



함수 $g: X \to X$는 다음 조건을 만족한다.

> (가) $g(1)=2,\ g(3)=4$
> (나) g의 역함수가 존재한다.

$(g \circ f)(2)+(f \circ g)(2)$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

32 함수 f에 대하여
$f^2(x)=f(f(x)),\ f^3(x)=f(f^2(x)),\ \cdots$로 정의하자.
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가
세 조건 $f(1)=3,\ f(2)=1,\ f^4=I$ (I는 항등함수)를
만족시킨다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때,
$g^{13}(3)+g^{14}(4)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

33 $f(x-1)=\dfrac{x+1}{x-1}$일 때, f의 역함수 f^{-1}에 대하여
다음 중 $f^{-1}(p-1)$과 같은 것은? (단, $p \neq 1,\ p \neq 2$)

① $-\dfrac{2}{p-2}$ ② $-\dfrac{1}{p-1}$ ③ $\dfrac{1}{p-1}$
④ $\dfrac{1}{p-2}$ ⑤ $\dfrac{2}{p-2}$

34 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a\ (x \geq 0)$의 역함수 $g(x)$에 대하여
방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때,
실수 a의 범위는?

① $0 \leq a < 1$ ② $a \geq 0$
③ $a < 1$ ④ $0 < a < 1$
⑤ $a < 2$

35 함수 f에 대하여 f의 역함수 f^{-1}이 존재하고
임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$이다.
다음 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
> ㄱ. $f^{-1}(0)=0$
> ㄴ. $f(2)=3$이면 $f(3)=4$
> ㄷ. $f^{-1}(3)=1$이면 $f(3)=9$
> ㄹ. $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

36 함수 $f(x)=x^2-4x+k\ (x\geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0<k<\dfrac{25}{4}$ ② $k<\dfrac{25}{4}$
③ $6\leq k\leq \dfrac{25}{4}$ ④ $6<k\leq \dfrac{25}{4}$
⑤ $6\leq k<\dfrac{25}{4}$

37 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는

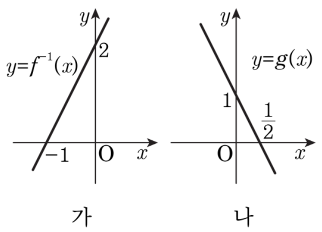
함수 $f(x)=\begin{cases}(a^2-2)(x-3)+2 & (x\geq 3)\\ \dfrac{2}{3}x & (x<3)\end{cases}$ 에 대하여

a의 값이 최소의 양의 정수일 때, 함수 $f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라고 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

38 함수 $f(x)=\begin{cases}3x+4 & (x<0)\\ \dfrac{1}{2}x+4 & (x\geq 0)\end{cases}$와

그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 실근의 합을 구하시오.

39 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$
② $y=f(x-1)$
③ $y=-f(x-1)$
④ $y=f(x+1)$
⑤ $y=-f(1-x)$

40 함수 $f(x)=2x-4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

41 함수 $f(x)=x^2-2x+k\ (x\geq 1)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 P라고 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$이다. 이때 상수 k의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이다.)

42 함수 $f(x)=2x+3-\left|\frac{3}{2}x-3\right|$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 36 ② 44 ③ 52
④ 60 ⑤ 68

43 함수 $f(x)=|x+1|-2$ 에서 $f(x)=(f\circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ 1 ⑤ 0

44 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x-6 & (x<-3)\\ x & (-3\leq x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

45 함수 $y=|x-3|-1$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{3}x$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$ ② $k>-1$
③ $k<3$ ④ $-1<k<3$
⑤ $1<k<4$

46 함수 $y=|2x-2|+1$의 그래프와 직선 $y=mx-\frac{1}{2}$이 만나지 않도록 하는 정수 m의 개수를 구하시오.

47 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 X로의 함수 f에 대하여 $f(4)=5$이고, $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 서로 다른 함수 f의 개수는?

① 6 ② 10 ③ 13
④ 19 ⑤ 26

48 세 집합 $X=\{1, 2\}$, $Y=\{2, 3\}$, $Z=\{1, 3\}$에 대하여 두 함수 f, g가 $f: X\to Y$이고 $g: Y\to Z$이다. 함수 $g\circ f: X\to Z$가 상수함수가 되도록 하는 함수 f, g의 순서쌍 (f, g)의 개수를 구하시오.

49 두 함수

$f(x)=\begin{cases} x^2+4ax+10 & (x<0) \\ 2x+10 & (x\geq 0)\end{cases}$, $g(x)=x+6$에

대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

50 [2013년 11월 고1 28번/4점]
정의역이 실수 전체의 집합이고 이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-2)=f(6)$ (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 -9이다.

방정식 $f(|f(x)|)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

51 함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+2$ $(x\geq 0)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 함수 $f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 두 직선 $x=3$, $x=6$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?

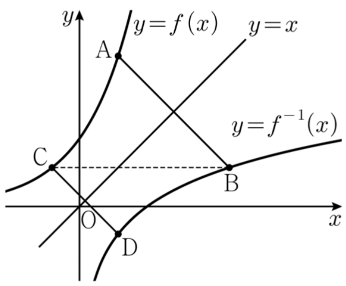
① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

52 함수 $f(x)=x^2+4x+a$ $(x\geq -2)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 만난다고 할 때, 실수 a의 최댓값은?

① $\dfrac{5}{4}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{9}{4}$

53 집합 $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 모든 원소 x에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는
'$3x$를 7로 나눈 나머지'로 정의하고 X에서 X로의 함수 $g(x)$는 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시킨다.
$g(1)=5$일 때, $g(0)+g(5)$의 값을 구하시오.

54 다음 그림은 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는? (단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$ ② $-f(a)$ ③ a
④ $f^{-1}(a)$ ⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

55 집합 $\{x\,|\,0\le x\le 2\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & (0\le x\le 1)\\[4pt] \dfrac{3}{2}x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라 할 때, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

56 [2024년 3월 고2 20번 변형]
집합 $X=\{2, 4, 6\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$가 아래 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$x+f(f(x))\le 9$
(나) 함수 f의 치역은 $\{2, 6\}$이다.

다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $f(f(6))=6$
ㄴ. $f(4)=6$
ㄷ. 가능한 함수 f는 1개뿐이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

57 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고, 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f(ab)=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$가 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(2)=2$이면 $f(8)=8$

ㄴ. $f^{-1}(ab)=f(a)f(b)$

ㄷ. $f(a)=b$, $f(b)=a$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 적어도 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

공통수학2_내신대비_기말고사 총정리_함수

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
57문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 172	02 5	03 63
04 17	05 ①	06 510
07 ①	08 420	09 99
10 8	11 ②	12 ④
13 1152	14 ⑤	15 40
16 3	17 ②	18 17
19 4	20 ③	21 2
22 3	23 ④	24 ③
25 ④	26 ⑤	27 ③
28 ②	29 19	30 ②
31 ④	32 ①	33 ⑤
34 ④	35 ④	36 ⑤
37 4	38 6	39 ①
40 ④	41 2	42 ④
43 ①	44 ④	45 ④
46 4	47 ⑤	48 12
49 2	50 4	51 ③
52 ⑤	53 4	54 ④
55 ①	56 ⑤	57 ⑤

공통수학2_내신대비_기말고사 총정리_함수

함수의 개념과 그래프 ~ 역함수

실시일자	-
57문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** 172

해설 함수의 성질을 이용하여 함숫값 추측하기
조건 (나)에 의하여

$$f(2015) = f\left(3\times\frac{2015}{3}\right) = 3f\left(\frac{2015}{3}\right) = 3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right) \cdots = 3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)$$
이다.

$\frac{2015}{3^6}$ 의 범위는 $2 < \frac{2015}{3^6} < 3$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $f\left(\frac{2015}{3^6}\right) = 3 - \frac{2015}{3^6}$ 이다.

$$\therefore 3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right) = 3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right) = 3^7 - 2015 = 172$$

02 **정답** 5

해설 f는 일대일함수이고 (ⅰ), 일대일대응 (ⅱ)이다.

$$f(a) \neq f(b) = \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a$를 정리하면 $a^2 - 5a + 4 = 0$이고
$(a-1)(b-4) = 0$이다.
$\therefore a = 1,\ a = 4$
같은 전개식에서 $b = 1,\ b = 4$
따라서 $a = 1, b = 4$ ($\because\ 0 < a < b$)이므로
$a + b = 5$

03 **정답** 63

해설 $7 \le n \le 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n-2)$의 값이 짝수이므로 $f(5)f(7)$, $f(6)f(8)$, $f(7)f(9)$의 값이 모두 짝수이다.
이때 $f(6)f(8)$의 값이 짝수이므로 $f(6)$ 또는 $f(8)$의 값은 적어도 하나가 짝수이어야 한다.
그런데 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 6, 8이므로
$f(5)f(7)$와 $f(7)f(9)$의 값이 모두 짝수이려면
$f(7)$의 값이 짝수이어야 한다.
따라서 $f(5)$, $f(9)$의 값은 모두 홀수이므로 $f(5)f(9)$의 최댓값은
$7 \cdot 9 = 63$

04 **정답** 17

해설 3 이상 7 이하의 자연수 n에 대하여
$f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로
$f(3)\cdot f(5)$, $f(4)\cdot f(6)$, $f(5)\cdot f(7)$,
$f(6)\cdot f(8)$, $f(7)\cdot f(9)$은 모두 짝수이다.
집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6, 8뿐이므로
짝수이려면 $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ 또는 $f(5)$, $f(6)$, $f(9)$
또는 $f(3)$, $f(6)$, $f(7)$이 짝수가 되어야 한다.
(ⅰ) $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ 또는 $f(5)$, $f(6)$, $f(9)$가 짝수인 경우, $f(3)$, $f(4)$는 모두 홀수이므로 $f(3)+f(4)$의 최댓값은 $f(3)=7$, $f(4)=9$ 또는 $f(3)=9$, $f(4)=7$일 때 $7+9=16$이다.
(ⅱ) $f(3)$, $f(6)$, $f(7)$이 짝수인 경우, $f(3)$이 될 수 있는 최댓값은 8이고, $f(4)$가 될 수 있는 최댓값은 9이므로 $f(3)+f(4)$의 최댓값은 17이다.

05 정답 ①

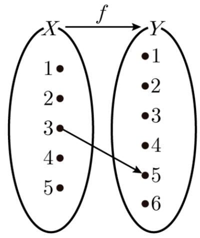
해설 조건 (나)에서 $f(6)=1$이고,
조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이므로
$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여
X에서 Y로의 일대일대응인 함수 f의 개수를
구하면 된다.
이때 조건 (다)에서 $k \leq 5$이면 $f(k) \geq k$이므로
$f(5)$의 값은 5, 6 중에서 하나의 값을 가지므로 2가지,
$f(4)$의 값은 4, 5, 6 중에서 $f(5)$의 값을 제외한
나머지 수 중에서 하나의 값을 가지므로 2가지
같은 방법으로 $f(3)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는
각각 2가지이고,
1에 대응되는 수는 2부터 6까지의 수 중에서
2부터 5까지의 수가 대응되는 수를 제외한 수이므로
1가지이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4 = 16$

06 정답 510

해설 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)에 의하여 집합 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.
즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 선택하는 경우의 수는
$${}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$
이때 조건 (나)에 의하여 함수 f는 일대일대응이 아니다.
(ⅰ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중 하나의 값과 같을 때
$f(6)$의 값은 집합 X의 6개의 원소 중 임의의 값이 될 수 있으므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1 = 24$
(ⅱ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값과 다를 때
$f(6)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 하나의 값이 되어야 하므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 = 10$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는
$15 \cdot (24+10) = 510$

07 정답 ①

해설 조건(나)에서 $f(3)=5$이다.



조건(가)에 의하여 함수 f는 일대일함수이다.
$f(2)=1$또는 $f(2)=2$이면 조건(다)를
만족시키지 못하므로 $f(2) \geq 3$에서
$f(2)=3$ 또는 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=6$이다.
$f(2)$의 값에 따라 함수 f의 개수를 구해 보면 다음과 같다.
(ⅰ) $f(2)=3$일 때,
$f(4)$로 가능한 값은 1, 2로 2가지
$f(5)$로 가능한 값은 1, 2중 $f(4)$를 제외한 1가지
$f(1)$로 가능한 값은 1, 2, 4, 6중 $f(4)$, $f(5)$를 제외한 2가지이므로 함수의 개수는 $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$
(ⅱ) $f(2)=4$일 때,
$f(4)$로 가능한 값은 1, 2, 3으로 3가지
$f(5)$로 가능한 값은 1, 2, 3중 $f(4)$를 제외한 2가지
$f(1)$로 가능한 값은 1, 2, 3, 6중 $f(4)$, $f(5)$를 제외한 2가지이므로 함수의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$
(ⅲ) $f(2)=6$일 때,
$f(4)$로 가능한 값은 1, 2, 3, 4로 4가지
$f(5)$로 가능한 값은 1, 2, 3, 4중 $f(4)$를 제외한 3가지
$f(1)$로 가능한 값은 1, 2, 3, 4중 $f(4)$, $f(5)$를 제외한 2가지이므로 함수의 개수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
(ⅰ) ~ (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$4+12+24=40$

08 정답 420

해설 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 3개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키면 되므로
그 경우의 수는
$${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$$
또, 함수 f는 일대일함수이므로
$f(2)$, $f(4)$의 값은 집합 Y의 남은 원소 4개 중 2개를 택하여 집합 X의 원소 2, 4에 대응시키면 되므로
그 경우의 수는
${}_4P_2=4\cdot3=12$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$35\cdot12=420$

09 정답 99

해설 $7\le n\le 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로 $f(7)f(9)$, $f(8)f(10)$, $f(9)f(11)$의 값이 모두 짝수이다.
이때 $f(8)f(10)$의 값이 짝수이므로 $f(8)$ 또는 $f(10)$의 값은 적어도 하나가 짝수이어야 한다.
이때 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 8, 10이므로
$f(7)f(9)$과 $f(9)f(11)$의 값이 모두 짝수이려면
$f(9)$의 값이 짝수이어야 한다.
따라서 $f(7)$, $f(11)$의 값은 모두 홀수이므로
$f(7)f(11)$의 최댓값은
$9\cdot11=99$

10 정답 8

해설 $\{f(x)-x^2+10\}\cdot\{f(x)-3x\}=0$에서
$g(x)=x^2-10$, $h(x)=3x$라 하면
집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$이다.
이때 $g(x)=h(x)$에서
$x^2-3x-10=0$, $(x+2)(x-5)=0$
$\therefore\ x=-2$
따라서 $g(-2)=h(-2)=-6$이므로
$f(-2)=-6$
이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$g(2)=g(-2)$
이때 $f(2)=g(2)=-6$이라 하면 함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니다.
$\therefore\ f(2)=h(2)=6$
또, $g(x)=6$에서
$x^2=16$
$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=4$
이때 $f(4)=g(4)=6$, $f(-4)=g(-4)=6$이라 하면
함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니다.
$\therefore\ f(4)=h(4)=12$, $f(-4)=h(-4)=-12$
또한, 조건 (나)에서
$f(0)+28=f(6)$ $\cdots$ ㉠
이때 $g(0)=-10$, $h(0)=0$이고
$g(6)=26$, $h(6)=18$이므로 ㉠에서
$f(0)=g(0)=-10$, $f(6)=h(6)=18$
$\therefore\ f(-4)+f(-2)+f(0)+f(2)+f(4)+f(6)$
$=-12+(-6)+(-10)+6+12+18$
$=8$

11 정답 ②

해설 ㄱ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $f(a)=b$, $g(a)=b$

$h(a)=\frac{2}{7}f(a)+\frac{5}{7}g(a)=\frac{2b}{7}+\frac{5b}{7}=b$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프도 점 $(a,\ b)$를 지난다. (참)

ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점에 대하여 대칭이면 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$가 성립한다.

이때 $h(-x)=\frac{2}{7}f(-x)+\frac{5}{7}g(-x)$

$=-\left(\frac{2}{7}f(x)+\frac{5}{7}g(x)\right)$

$=-h(x)$

즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 $h(x)$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=-\frac{2}{5}x$이면

$y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모두 일대일대응이지만

$h(x)=\frac{2}{7}f(x)+\frac{5}{7}g(x)=\frac{2}{7}x-\frac{2}{7}x=0$

이므로 $h(x)$는 일대일대응이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 정답 ④

해설 $f_{A\cap B^c}(x)=1$의 뜻은 ⇨ $x\in A\cap B^c$이고

$x\in A\cap B^c$의 뜻은 $x\in A$이고 $x\in B^c$

곧, $x\in A$이고 $x\notin B$

따라서 $f_A(x)=1$이고 $f_B(x)=0$

ㄱ. $f_A(x)+f_B(x)=1+0=1$

ㄴ. $f_A(x)-f_B(x)=1-0=1$

ㄷ. $f_A(x)f_B(x)=1\cdot 0=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13 정답 1152

해설 조건(나)에 의하여 함수 f는 일대일함수이다.

조건(가)에서 $f(1)+f(2)+f(3)$이 홀수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 모두 홀수인 경우

$f(1)$로 가능한 값은 $1, 3, 5, 7$로 4개

$f(2)$로 가능한 값은 $1, 3, 5, 7$ 중 $f(1)$을 제외한 3개이고, $f(3)$으로 가능한 값은 $1, 3, 5, 7$ 중 $f(1)$, $f(2)$를 제외한 2개이고, $f(4)$로 가능한 값은 $1, 2, 3, \cdots, 7$중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 제외한 4개이고 $f(5)$로 가능한 값은 $1, 2, 3, \cdots, 7$중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는 $4\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3=288$이다.

(ⅱ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 하나만 홀수인 경우

$f(1)$이 홀수인 경우를 구해보면 다음과 같다.

$f(1)$로 가능한 값은 $1, 3, 5, 7$로 4개

$f(2)$로 가능한 값은 $2, 4, 6$으로 3개이고, $f(3)$으로 가능한 값은 $2, 4, 6$ 중 $f(2)$를 제외한 2개이고, $f(4)$로 가능한 값은 $1, 2, 3, \cdots, 7$중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 제외한 4개이고 $f(5)$로 가능한 값은 $1, 2, 3, \cdots, 7$중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 제외한 3개이므로 함수 f의 개수는 $4\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3=288$이다.

$f(2)$, $f(3)$이 홀수인 경우도 마찬가지이므로 구하는 함수 f의 개수는 $288\cdot 3$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$288+288\cdot 3=288\cdot 4=1152$

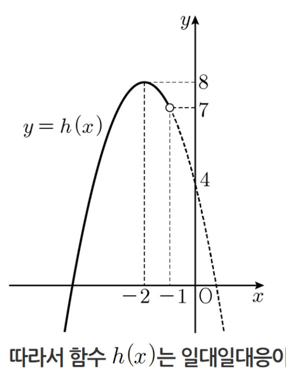
14 정답 ⑤

해설 ㄱ. $a=-1$일 때

$f(x)=-x^2-4x+4=-(x+2)^2+8$이고

$x<-1$에서 $h(x)=f(x)$이므로

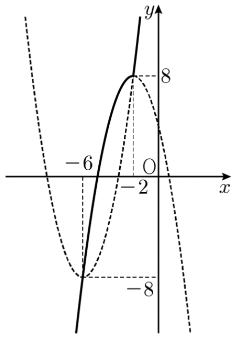
$x<-1$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니므로 $(-1,\ k)\in A$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $a=-2$, $b=4$일 때

$g(x)=x^2-4x-4=(x-2)^2-8$이므로
$g(x+2b)=g(x+8)=(x+8-2)^2-8$
$=(x+6)^2-8$
$\therefore\ h(x)=\begin{cases}-(x+2)^2+8 & (x<-2)\\ (x+6)^2-8 & (x\ge -2)\end{cases}$
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.
$\therefore\ (-2,\ 4)\in A$ (참)



ㄷ. $a=m$일 때
$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x<m)\\ g(x+2b) & (x\ge m)\end{cases}$
$=\begin{cases}-(x+2)^2+8 & (x<m)\\ (x+2b-2)^2-8 & (x\ge m)\end{cases}$
이므로 함수 $g(x)$가 일대일대응이려면
$m\le -2,\ 2-2b\le m$ ⋯ ㉠
또, $x<m$에서 $h(x)<f(m)$, $x\ge m$에서 $h(x)\ge g(m+2b)$이므로
$f(m)=g(m+2b)$ ⋯ ㉡
이때 $g(m+2b)\ge -8$이므로
$f(m)\ge -8,\ -x^2-4x+4\ge -8$
$x^2+4x-12\le 0,\ (m+6)(m-2)\le 0$
$\therefore\ -6\le m\le 2$
이때 $m\le -2$이므로 정수 m의 값은
$-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$이다.
(i) $m=-6$일 때
㉠에서 $2-2b\le -6$이므로 $b\ge 4$
㉡에서 $f(-6)=g(-6+2b)$이므로
$-8=(2b-8)^2-8,\ (b-4)^2=0$
$\therefore\ b=4$
$\therefore\ m+b=-2$
(ii) $m=-5$일 때
㉠에서 $2-2b\le -5$이므로 $b\ge \dfrac{7}{2}$
㉡에서 $f(-5)=g(-5+2b)$이므로
$-1=(2b-7)^2-8,\ (2b-7)^2=7$
$\therefore\ b=\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}\ \left(\because\ b\ge \dfrac{7}{2}\right)$
$\therefore\ m+b=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$
(iii) $m=-4$일 때
㉠에서 $2-2b\le -4$이므로 $b\ge 3$
㉡에서 $f(-4)=g(-4+2b)$이므로
$4=(2b-6)^2-8,\ (b-3)^2=3$
$\therefore\ b=3+\sqrt{3}\ (\because\ b\ge 3)$
$\therefore\ m+b=-1+\sqrt{3}$
(iv) $m=-3$일 때
㉠에서 $2-2b\le -3$이므로 $b\ge \dfrac{5}{2}$
㉡에서 $f(-3)=g(-3+2b)$이므로
$7=(2b-5)^2-8,\ (2b-5)^2=15$
$\therefore\ b=\dfrac{5+\sqrt{15}}{2}\ \left(\because\ b\ge \dfrac{5}{2}\right)$
$\therefore\ m+b=\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}$
(v) $m=-2$일 때
㉠에서 $2-2b\le -2$이므로 $b\ge 2$
㉡에서 $f(-2)=g(-2+2b)$이므로
$8=(2b-4)^2-8,\ (b-2)^2=4$
$\therefore\ b=4\ (\because\ b\ge 2)$
$\therefore\ m+b=2$
(i)~(v)에서
$B=\left\{-2,\ \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2},\ -1+\sqrt{3},\ \dfrac{-1+\sqrt{15}}{2},\ 2\right\}$
이므로 $\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}\in B$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 정답 40

해설 $f(n)\ge n$인 함수 f의 개수 a는
$f(1)$의 값: $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4가지
$f(2)$의 값: $2,\ 3,\ 4$의 3가지
$f(3)$의 값: $3,\ 4$의 2가지
$f(4)$의 값: 4의 1가지
$\therefore\ a=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$(개) ⋯ ㉠
$n+f(n)$이 홀수인 함수 f의 개수 b는
$f(1)$의 값: 짝수이어야 하므로 2가지
$f(2)$의 값: 홀수이어야 하므로 2가지
$f(3)$의 값: 짝수이어야 하므로 2가지
$f(4)$의 값: 홀수이어야 하므로 2가지
$\therefore\ b=2^4=16$(개) ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+b=24+16=40$

16 정답 3

해설 다항함수 $f(x)$가 n차 (n은 자연수)일 때, $f(f(x))$의 최고차항은 $(x^n)^n=x^{n^2}$항이므로 차수가 n^2이다.
따라서 조건 (가)를 만족시키려면 $n^2=1$에서
$n=1$이므로 $f(x)$는 일차함수이다.
일차함수인 $f(x)$는 역함수가 존재하므로
$f(f(x))=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.
따라서 조건 (나)에서 $f(-1)=3$이면
$f^{-1}(-1)=f(-1)=3$이므로
$f(3)=-1$이다.
$f(x)=ax+b$ (a, b는 실수)라 하면
$f(-1)=3$, $f(3)=-1$이므로
$-a+b=3$, $3a+b=-1$에서 $a=-1$, $b=2$
따라서 $f(x)=-x+2$이다.
$g(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$에서
$g(f(x))=(-x+4)^2-1$이므로
함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 -1을 가진다.
$m=4$, $n=-1$
$\therefore\ m+n=4+(-1)=3$

17 정답 ②

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=a(2x^2+3x+1)+b$
$=2ax^2+3ax+a+b$ $\cdots$ ㉠
$(g\circ f)(x)$
$=g(f(x))$
$=2(ax+b)^2+3(ax+b)+1$
$=2a^2x^2+(4ab+3a)x+2b^2+3b+1$ $\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠=㉡이므로
$2a=2a^2$, $3a=4ab+3a$, $a+b=2b^2+3b+1$
위의 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=0$ ($\because\ a\neq 0$)
즉, $f(x)=x$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=1+2+3+\cdots+10=55$

18 정답 17

해설 조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일대응이다.
집합 X의 임의의 원소 x에 대하여
$1\le f(x)\le 7$
조건 (나)에서 $2\le x\le 4$일 때,
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)-2x+2$ $\cdots$ ㉠
㉠에 $x=4$를 대입하면
$f(f(4))=f(4)-8+2\ge 1$
즉, $f(4)\ge 7$이므로
$f(4)=7$
$f(f(4))=f(7)=7-8+2=1$
$\therefore\ f(4)=7$, $f(7)=1$ $\cdots$ ㉡
㉠에 $x=3$을 대입하면
$f(f(3))=f(3)-6+2\ge 2$
즉, $f(3)\ge 6$이고 $f(4)=7$이므로
$f(3)=6$
$f(f(3))=f(6)=6-6+2=2$
$\therefore\ f(3)=6$, $f(6)=2$ $\cdots$ ㉢
㉠에 $x=2$를 대입하면
$f(f(2))=f(2)-4+2\ge 3$
즉, $f(2)\ge 5$이고 $f(3)=6$, $f(4)=7$이므로
$f(2)=5$
$f(f(2))=f(5)=5-4+2=3$
$\therefore\ f(2)=5$, $f(5)=3$ $\cdots$ ㉣
㉡, ㉢, ㉣에 의하여
$f(1)=4$
$\therefore\ f(1)+f(3)+f(4)=4+6+7=17$

19 정답 4

해설 $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))=f(f^n(x))$이고
$f^1(-1)=f(-1)=0$이므로
$f^2(-1)=f(f(-1))=f(0)=3$
$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(3)=-3$
$f^4(-1)=f(f^3(-1))=f(-3)=-1$
$f^5(-1)=f(f^4(-1))=f(-1)=0$
$\vdots$
$\therefore\ f^{2022}(-1)=3$
$f^1(1)=f(1)=1$이므로
$f^2(1)=f(f(1))=f(1)=1$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(1)=1$
$f^4(1)=f(f^3(1))=f(1)=1$
$\vdots$
$\therefore\ f^{2021}(1)=1$
$\therefore\ f^{2022}(-1)+f^{2021}(1)=3+1=4$

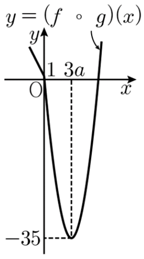
20 정답 ③

해설 $f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-1)$
$=2(2x-1)-1=4x-3$
$f^3(x)=(f^2\circ f)(x)=f^2(f(x))=f^2(2x-1)$
$=4(2x-1)-3=8x-7$
$f^4(x)=(f^3\circ f)(x)=f^3(f(x))=f^3(2x-1)$
$=8(2x-1)-7=16x-15$
$\vdots$
$f^{n-1}=2^{n-1}\cdot x-(2^{n-1}-1)$ 로 놓으면
$f^n(x)=(f^{n-1}\circ f)(x)=f^{n-1}(f(x))$
$=f^{n-1}(2x-1)=2^{n-1}(2x-1)-(2^{n-1}-1)$
$=2^n x-(2^n-1)$
$n=10$ 을 대입하면 $f^{10}(x)=2^{10}x-(2^{10}-1)$ 이므로
$\therefore a=2^{10},\ b=-2^{10}+1$ 이다.
$\therefore a-b=2^{10}+2^{10}-1=2^{11}-1$

21 정답 2

해설 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}-2x+1 & (x<0)\\ x^2-6ax+1 & (x\geq 0)\end{cases}$
그런데 $a\leq 0$이면
함수 $y=x^2-6ax+1=(x-3a)^2+1-9a^2$의
그래프의 꼭짓점의 x좌표가 0 또는 음수이므로
합성함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq 1\}$이 되어 조건을
만족시키지 않는다.
$\therefore a>0$
이때 함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq -35\}$이려면 다음
그림과 같이 함수 $y=(x-3a)^2+1-9a^2$의 그래프의
꼭짓점의 y좌표가 -35이어야 한다.

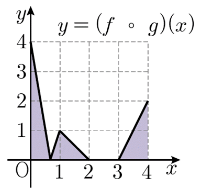
$y=(f\circ g)(x)$



따라서 $1-9a^2=-35$이므로
$a^2=4$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$

22 정답 3

해설 $f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\leq x\leq 2)\\ x-2 & (2<x\leq 4)\end{cases}$,
$g(x)=\begin{cases}3x & (0\leq x<1)\\ -x+4 & (1\leq x<2)\\ 2 & (2\leq x<3)\\ 2x-4 & (3\leq x\leq 4)\end{cases}$ 이므로
$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-2g(x)+4 & (0\leq g(x)\leq 2)\\ g(x)-2 & (2<g(x)\leq 4)\end{cases}$
(i) $0\leq x\leq \frac{2}{3}$ 일 때, $0\leq g(x)\leq 2$이므로
$(f\circ g)(x)=-6x+4$
(ii) $\frac{2}{3}<x<1$일 때, $2<g(x)\leq 3$이므로
$(f\circ g)(x)=3x-2$
(iii) $1\leq x<2$일 때, $2<g(x)\leq 3$이므로
$(f\circ g)(x)=-x+2$
(iv) $2\leq x\leq 3$일 때, $g(x)=2$이므로
$(f\circ g)(x)=(-2)\cdot 2+4=0$
(v) $3<x\leq 4$일 때, $2<g(x)\leq 4$이므로
$(f\circ g)(x)=2x-6$
이상에서
$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-6x+4 & \left(0\leq x\leq \frac{2}{3}\right)\\ 3x-2 & \left(\frac{2}{3}<x<1\right)\\ -x+2 & (1\leq x<2)\\ 0 & (2\leq x\leq 3)\\ 2x-6 & (3<x\leq 4)\end{cases}$ 이므로
함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=3$

23 정답 ④

해설 주어진 그래프에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 식은 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \frac{3}{2}\right) \\ -2x+6 & \left(\frac{3}{2} \le x \le 3\right) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x=1$일 때를 기준으로 함수식이 바뀌므로 방정식 $f(x)=1$의 두 근 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{2}$과 $y=f(x)$의 함수식이 바뀌는 $x=\frac{3}{2}$을 기준으로 x의 범위를 나누어 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.

(i) $0 \le x \le \frac{1}{2}$일 때

$0 \le f(x) \le 1$이므로 $(g \circ f)(x)=2(2x)=4x$

(ii) $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$일 때

$1 \le f(x) \le 3$이므로

$(g \circ f)(x)=\frac{1}{2}(2x)+\frac{3}{2}=x+\frac{3}{2}$

(iii) $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$일 때

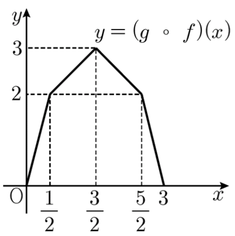
$1 \le f(x) \le 3$이므로

$(g \circ f)(x)=\frac{1}{2}(-2x+6)+\frac{3}{2}=-x+\frac{9}{2}$

(iv) $\frac{5}{2} \le x \le 3$일 때, $0 \le f(x) \le 1$이므로

$(g \circ f)(x)=2(-2x+6)=-4x+12$

(i) ~ (iv)에 의하여 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.

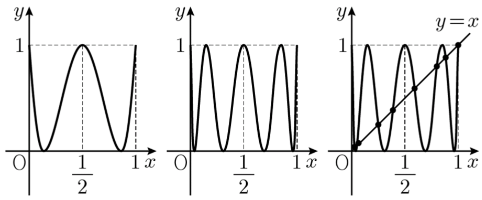


따라서 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2}+2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2}=6$$

24 정답 ③

해설 다음 그림에서 구하는 원소의 개수는 8개이다.



$y=f(f(x))$ $y=f(f(f(x)))$ $f(f(f(x)))=x$

25 정답 ④

해설 $f(x)=x^2+8x+20=(x+4)^2+4$이므로

$f(x)\ge 4$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))$

$=-3\{f(x)\}^2+12f(x)+k$

$=-3\{f(x)-2\}^2+k+12$

$f(x)\ge 4$이므로 $f(x)=4$일 때,

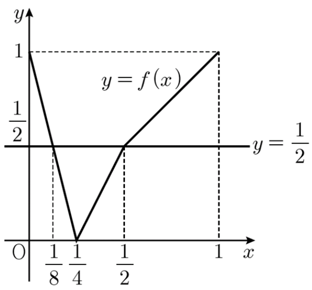
$(g \circ f)(x)$의 최댓값은

$-3(4-2)^2+k+12=18$

$\therefore k=18$

26 정답 ⑤

해설 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(f(x))=\frac{1}{2}$에서 $f(x)=\frac{1}{8}$ 또는 $\frac{1}{2}$

(ⅰ) $f(x)=\frac{1}{8}$을 만족하는 x의 값은

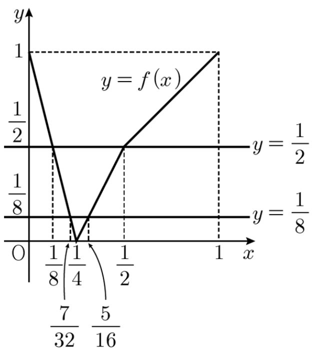
$0 \le x < \frac{1}{4}$에서 $-4x+1=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore x=\frac{7}{32}$

$\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$에서 $2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{16}$

(ⅱ) $f(x)=\frac{1}{2}$을 만족하는 x의 값은

$0 \le x < \frac{1}{4}$에서 $-4x+1=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$에서 $2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 x의 값의 합은

$\frac{7}{32}+\frac{5}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{37}{32}$

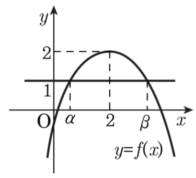
27 정답 ③

해설 $(f\circ f)(x)=1$을 만족하므로 $f(f(x))=1$

$f(x)=t$ 라 놓고 $f(t)=1$을 만족하는 t의 값을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<2<\beta$ 이다.

이 때, $f(x)=\alpha$를 만족하는 x의 값은 2개이지만 $f(x)=\beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f\circ f)(x)=1$을 만족하는 x의 값은 2개이다.

28 정답 ②

해설 주어진 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0\le x\le 3) \\ \frac{5}{2}x-\frac{15}{2} & (3<x\le 5) \end{cases}$$

방정식 $f(f(x))=f(x)+1$에서 $f(x)=t$ $(0\le t\le 5)$라 하면 방정식 $f(t)=t+1$에서

$0\le t\le 3$일 때, $-t+3=t+1$이므로 $t=1$

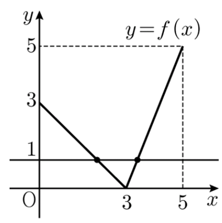
$3<t\le 5$일 때, $\frac{5}{2}t-\frac{15}{2}=t+1$이므로 $t=\frac{17}{3}$

이때 $0\le t\le 5$이므로 $t=1$, 즉 $f(x)=1$이다.

방정식 $f(x)=1$의 해는

$0\le x\le 3$일 때, $-x+3=1$에서 $x=2$

$3<x\le 5$일 때, $\frac{5}{2}x-\frac{15}{2}=1$에서 $x=\frac{17}{5}$



따라서 구하는 서로 다른 실근의 합은

$2+\frac{17}{5}=\frac{27}{5}$

29 정답 19

해설 두 함수 $y=f(x)$와 $y=(g \circ f)(x)$의 정의역이
$\{x|0 \le x \le 3\}$, 치역이 $\{y|0 \le y \le 2\}$이므로
함수 $y=g(x)$의 정의역은 $\{x|0 \le x \le 2\}$,
공역은 $\{y|0 \le y \le 2\}$이다.
이때 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x \le 2), \\ -x+3 & (2 < x \le 3) \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 1) \\ 2 & (1 \le x \le 2) \\ -x+4 & (2 < x \le 3) \end{cases} \quad \cdots ㉠$$

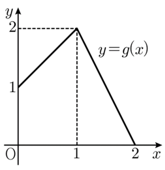
이므로 함수 $f(x)$의 양변에 함수 g를 합성하면

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=\begin{cases} g(-x+2) & (0 \le x < 1) \\ g(1) & (1 \le x \le 2) \\ g(-x+3) & (2 < x \le 3) \end{cases}$$

위의 함수와 ㉠이 같아야 하므로
$0 \le x < 1$일 때 $g(-x+2)=2x$
$1 \le x \le 2$일 때 $f(x)=1$이므로
$g(1)=2$
$2 < x \le 3$일 때 $g(-x+3)=-x+4$
이때 $g(-x+2)=2x$ $(0 \le x < 1)$에서
$-x+2=t$라 놓으면 $x=2-t$이므로
$g(t)=-2t+4$ $(1 < t \le 2)$
다시 $g(-x+3)=-x+4$ $(2 < x \le 3)$에서
$-x+3=t$라 놓으면 $x=3-t$이므로
$g(t)=t+1$ $(0 \le t < 1)$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} x+1 & (0 \le x < 1) \\ -2x+4 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

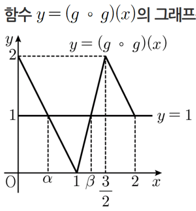
즉, 함수 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $g(g(x))$를 구하면

$$g(g(x))=\begin{cases} g(x)+1 & (0 \le g(x) < 1) \\ -2g(x)+4 & (1 \le g(x) \le 2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -2\times(x+1)+4 & (0 \le x < 1) \\ -2(-2x+4)+4 & \left(1 \le x \le \frac{3}{2}\right) \\ (-2x+4)+1 & \left(\frac{3}{2} < x \le 2\right) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -2x+2 & (0 \le x < 1) \\ 4x-4 & \left(1 \le x \le \frac{3}{2}\right) \\ -2x+5 & \left(\frac{3}{2} < x \le 2\right) \end{cases}$$

함수 $y=(g \circ g)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고



방정식 $(g \circ g)(x)=1$의 실근은
함수 $y=(g \circ g)(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의
교점의 x좌표와 같으므로
세 교점의 x좌표를 각각 α, β, 2 $(\alpha < \beta < 2)$라 하자.

$-2\alpha+2=1$에서 $\alpha=\frac{1}{2}$

$4\beta-4=1$에서 $\beta=\frac{5}{4}$

따라서 방정식 $(g \circ g)(x)=1$의 모든 실근의 합은

$\alpha+\beta+2=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+2=\frac{15}{4}$

$\therefore p+q=4+15=19$

30 정답 ②

해설 $|f(x)|=t$ $(t \ge 0)$ 로 놓으면

$f(|f(x)|)=0 \longleftrightarrow f(t)=0$

$\therefore t=3 (\because t \ge 0)$

$\therefore |f(x)|=3$

ⅰ) $f(x)=3$ 일 때

$y=f(x)$ 와 $y=3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.

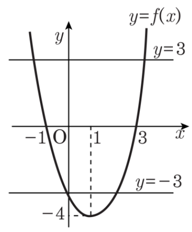
$\therefore$ 2개

ⅱ) $f(x)=-3$ 일 때

$y=f(x)$ 와 $y=-3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.

$\therefore$ 2개

따라서 방정식 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는 4개다.



31 정답 ④

해설 $f(2)=4$이므로
$(g \circ f)(2)+(f \circ g)(2)=g(4)+f(g(2))$
한편, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로
함수 $g(x)$는 일대일대응이다.
즉, $g(2)$와 $g(4)$의 값은 $1, 3, 5$ 중에서 서로 다른 하나의 값을 갖는다.

$g(2)$	1		3		5	
$f(g(2))$	3		1		2	
$g(4)$	3	5	1	5	1	3

위의 표에서 $g(2)=1$이고 $g(4)=5$일 때,
$g(4)+f(g(2))$의 값은 최대가 되고,
최댓값은 $3+5=8$이다.

32 정답 ①

해설 $f(1)=3$, $f(2)=1$이고, 함수 f가 일대일대응이므로
$f(3)=2$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=2$이다.
(i) $f(3)=2$, $f(4)=4$이면
$f(1)=3$, $f^2(1)=2$, $f^3(1)=1$, $f^4(1)=3$
이므로 $f^4 \neq I$가 되어 성립하지 않는다.
(ii) $f(3)=4$, $f(4)=2$이면
$f(1)=3$, $f^2(1)=4$, $f^3(1)=2$, $f^4(1)=1$
$f(2)=1$, $f^2(2)=3$, $f^3(2)=4$, $f^4(2)=2$
$f(3)=4$, $f^2(3)=2$, $f^3(3)=1$, $f^4(3)=3$
$f(4)=2$, $f^2(4)=1$, $f^3(4)=3$, $f^4(4)=4$
이므로 $f^4=I$가 성립한다.
(i), (ii)에 의하여
$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=2$이므로
$g(1)=2$, $g(2)=4$, $g(3)=1$, $g(4)=3$이고,
$f^4=I$에서 $g^4=(f^{-1})^4=I$이다.
따라서 $g^{13}=g^{4\cdot3+1}=g$, $g^{14}=g^{4\cdot3+2}=g^2$이므로
$g^{13}(3)+g^{14}(4)=g(3)+g(g(4))$
$=1+g(3)=1+1=2$

33 정답 ⑤

해설 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로
$f(t)=\dfrac{t+2}{t}$
$\therefore f(x)=\dfrac{x+2}{x}$
$y=\dfrac{x+2}{x}$에서 $xy=x+2$
$x(y-1)=2$, $x=\dfrac{2}{y-1}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\dfrac{2}{x-1}$
$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-1}$
위의 식에 x 대신에 $p-1$을 대입하면
$f^{-1}(p-1)=\dfrac{2}{(p-1)-1}$
$=\dfrac{2}{p-2}$

34 정답 ④

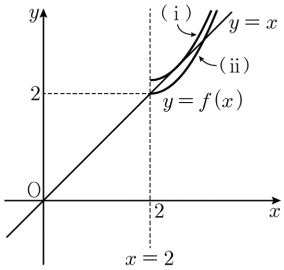
해설 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a\ (x\geq 0)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$위에 있다.
따라서 방정식 $\dfrac{x^2}{4}+a=x$, 즉 $x^2-4x+4a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
$x^2-4x+4a=0$의 두 근 α, β라 하면
$\alpha+\beta=4>0$ … ㉠
$\alpha\beta=4a>0$, $a>0$ … ㉡
$\dfrac{D}{4}=4-4a>0$, $a<1$ … ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $0<a<1$

35 정답 ④

해설 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ … ㉠
ㄱ. $f^{-1}(0)=0$에서 $f(0)=0$이므로 ㉠의 양변에
$x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0+0)=f(0)+f(0)$
$\therefore f(0)=0$
$\therefore f^{-1}(0)=0$ (참)
ㄴ. $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$
$f(2)=3$이므로 $f(1)=\dfrac{3}{2}$
$\therefore f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$
(거짓)
ㄷ. $f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로 ㉠의 양변에
$x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(1+1)=f(1)+f(1)$, $f(2)=3+3=6$
㉠의 양변에 $x=2$, $y=1$을 대입하면
$f(2+1)=f(2)+f(1)=6+3=9$
$\therefore f(3)=9$ (참)
ㄹ. $f^{-1}(x)=a$, $f^{-1}(y)=b$라 하면 $f(a)=x$, $f(b)=y$
이때 $x+y=f(a)+f(b)=f(a+b)$이므로
$f^{-1}(x+y)=a+b$
즉, $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

36 정답 ⑤

해설 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=x$ 위에 있다.
따라서 조건을 만족하려면
$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4\ (x \geq 2)$
의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(ⅰ) $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$가 접할 때,
$x^2-4x+k=x,\ x^2-5x+k=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라하면
$D=5^2-4k=0$
$\therefore\ k=\dfrac{25}{4}$

(ⅱ) $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때,
$2^2-4\cdot 2+k=2$
$\therefore\ k=6$

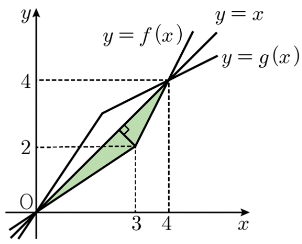
(ⅰ), (ⅱ)에서 $6 \leq k < \dfrac{25}{4}$

37 정답 4

해설 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 직선의 기울기가 $a^2-2>0$
$(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})>0$이므로
$a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$
이때 a의 값이 최소의 양의 정수이므로 $a=2$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x \geq 3) \\ \dfrac{2}{3}x & (x<3) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하려는 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$의 그래프로 둘러싸인 넓이의 2배이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은
$2x-4=x$
$\therefore\ x=4$
또한, 직선 $x-y=0$에서 점 $(3,\ 2)$까지의 거리는
$\dfrac{|3-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$
따라서 구하는 넓이는 $2S=2\cdot 2=4$

38 정답 6

해설 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 x좌표와 같다. 그리고 $y=f(x)$는 단조증가함수이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점과 같다.

(ⅰ) $x<0$일 때

$3x+4=x$

$\therefore x=-2$

(ⅱ) $x\geq 0$일 때

$\frac{1}{2}x+4=x$

$\therefore x=8$

따라서 (ⅰ),(ⅱ)에서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근은

$x=-2,\ 8$이다.

$\therefore 8+(-2)=6$

39 정답 ①

해설 그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 그림 (나)의 그래프와 일치한다.

즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면

$y=f^{-1}(-x)\cdots$㉠이다.

㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$㉡이다.

㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$㉢이므로

㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.

$\therefore y=-f(x+1)$

$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

40 정답 ④

해설 $y=f(x)$ 의 그래프는

두 점 $(0,-4)$, $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.

그런데 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

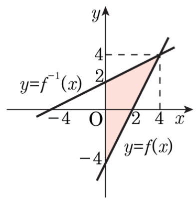
$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

두 점 $(-4,\ 0),(0,\ 2)$ 를 지나는 직선이다.

함수 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x)=x$ 를 풀면 $2x-4=x$

$\therefore x=4$



따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$ 이므로

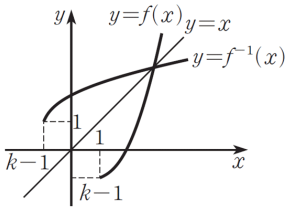
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times4=12$

41 정답 2

해설 $f(x)=x^2-2x+k$

$=(x-1)^2+k-1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



다음 그림에서 알 수 있듯이 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(t,\ t)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$에서

$\sqrt{t^2+t^2}=2\sqrt{2}$, $2t^2=8$

$t^2=4$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t\geq 1)$

이때 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$는 함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프 위의 점이므로

$f(2)=4-2\cdot 2+k=2$

$\therefore\ k=2$

42 정답 ④

해설 (i) $\frac{3}{2}x-3\geq 0$에서 $x\geq 2$일 때,

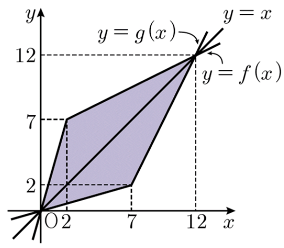
$$f(x)=2x+3-\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{1}{2}x+6$$

(ii) $\frac{3}{2}x-3<0$에서 $x<2$일 때,

$$f(x)=2x+3+\left(\frac{3}{2}x-3\right)=\frac{7}{2}x$$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+6 & (x\geq 2)\\ \frac{7}{2}x & (x<2)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=30$

따라서 구하는 넓이는 $30\cdot 2=60$

43 정답 ①

해설 $f(x)=|x+1|-2$ 에서

$f(f(x))=f(|x+1|-2)=||x+1|-2+1|-2$
$=||x+1|-1|-2$

(ⅰ) $x\ge 0$ 일 때, $f(f(x))=x-2$

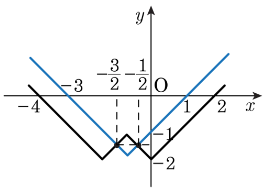
(ⅱ) $-1\le x<0$ 일 때, $f(f(x))=-x-2$

(ⅲ) $-2\le x<-1$ 일 때, $f(f(x))=x$

(ⅳ) $x<-2$ 일 때, $f(f(x))=-x-4$

(ⅰ), (ⅱ)의 경우 $f(x)=x-1$

(ⅲ), (ⅳ)의 경우 $f(x)=-x-3$



따라서 교점은 $x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

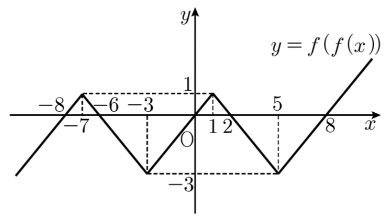
$f(x)=(f\circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$

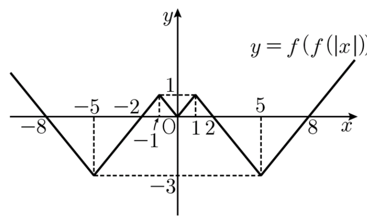
44 정답 ④

해설
$$f(f(x))=\begin{cases} x+8 & (x<-7) \\ -x-6 & (-7\le x<-3) \\ x & (-3\le x<1) \\ -x+2 & (1\le x<5) \\ x-8 & (x\ge 5) \end{cases}$$

이므로 $y=f(f(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(f(|x|))$의 그래프는 $y=f(f(x))$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(|x|))$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\right)=20$

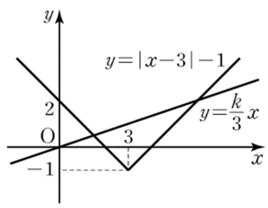
45 정답 ④

해설 $y=|x-3|-1$에서

(ⅰ) $x<3$일 때, $y=-x+2$

(ⅱ) $x\ge 3$일 때, $y=x-4$

이므로 함수 $y=|x-3|-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|x-3|-1$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{3}x$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$-\frac{1}{3}<\frac{k}{3}<1 \qquad \therefore\ -1<k<3$

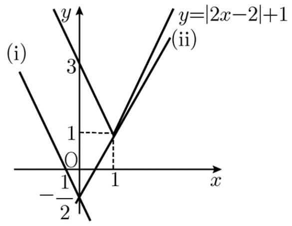
46 정답 4

해설 $y=|2x-2|+1=\begin{cases}2x-1 & (x\geq 1)\\ -2x+3 & (x<1)\end{cases}$이므로

$y=|2x-2|+1$의 그래프는 다음 그림과 같고,

직선 $y=mx-\dfrac{1}{2}$은 m의 값에 관계없이

점 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$을 지난다.



(i) 직선 $y=mx-\dfrac{1}{2}$이

직선 $y=|2x-2|+1$ $(x<1)$, 즉 $y=-2x+3$과 평행할 때, $m=-2$

(ii) 직선 $y=mx-\dfrac{1}{2}$이 점 $(1,\ 1)$를 지날 때,

$1=m-\dfrac{1}{2}$

$\therefore m=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-2\leq m<\dfrac{3}{2}$이므로

정수 m은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다.

47 정답 ⑤

해설 $(f\circ f)(x)=x$이면 집합 X의 임의의 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $f(a)=b$일 때 $f(b)=a$를 만족해야 한다.

즉, $f(a)=a$이거나 $(a=b$인 경우$)$

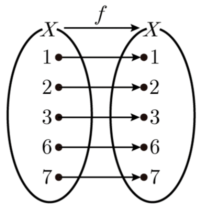
$f(a)=b,\ f(b)=a$이어야 한다. $(a\neq b$인 경우$)$

$f(4)=5$에서 $f(5)=4$이므로 $4,\ 5$에 대한 대응은 생각하지 않고 집합 X의 나머지 원소 $1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7$에 대해서 이와 같은 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $f(a)=b,\ f(b)=a$ $(a\neq b)$를 만족시키는 두 수 $a,\ b$가 존재하지 않는 경우

$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(6)=6,$

$f(7)=f(7)$로 함수 f의 개수는 1이다.



(ii) $f(a)=b,\ f(b)=a$ $(a\neq b)$를 만족시키는 두 수 $a,\ b$가 한 쌍 존재하는 경우

두 수 $a,\ b$가 될 수 있는 값은

$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 6\},\ \{1,\ 7\}\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 6\},$ $\{2,\ 7\},\ \{3,\ 6\},\ \{3,\ 7\},\ \{6,\ 7\}$로 10가지이고,

이때 나머지 3개의 원소는 모두 자기 자신에게 대응되면 되므로 함수 f의 개수는 10이다.

(iii) $f(a)=b,\ f(b)=a$ $(a\neq b)$를 만족시키는 두 수 $a,\ b$가 두 쌍 존재하는 경우

$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7$인 다섯 개의 수를 두 원소씩 두 쌍으로 묶는 경우는 ${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\dfrac{1}{2}$의

15가지이므로 함수 f의 개수는 15이다.

(i)~(iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+10+15=26$이다.

48 정답 12

해설 함수 $g \circ f$가 상수함수가 되려면 두 함수 f, g 중 적어도 하나는 상수함수가 되어야 한다.

(ⅰ) 함수 f가 상수함수일 때
함수 f의 치역이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개다. 함수 g의 개수는 4이므로 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는 $2 \cdot 4 = 8$

(ⅱ) 함수 g가 상수함수일 때
함수 g의 치역이 될 수 있는 것은 1, 3 중 하나이므로 2개다. 함수 f의 개수는 4이므로 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는 $4 \cdot 2 = 8$

(ⅲ) 두 함수 f, g가 상수함수일 때
함수 f의 치역이 될 수 있는 것은 2, 3 중 하나이므로 2개다. 또한 함수 g의 치역이 될 수 있는 것은 1, 3 중 하나이므로 2개이므로 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는 $2 \cdot 2 = 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는
$8+8-4=12$

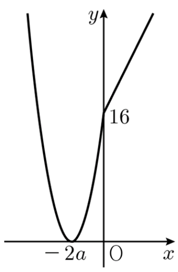
49 정답 2

해설 $f(x)=\begin{cases} x^2+4ax+10 & (x<0) \\ 2x+10 & (x \ge 0) \end{cases}$, $g(x)=x+6$이므로

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x^2+4ax+16 & (x<0) \\ 2x+16 & (x \ge 0) \end{cases}$

(ⅰ) $a \le 0$이면 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y \ge 16\}$이므로 치역이 $y \ge 0$의 조건에 모순이다.

(ⅱ) $a>0$일 때, $y=x^2+4ax+16$의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y \ge 0\}$이기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이다.
즉, $y=x^2+4ax+16=(x+2a)^2+16-4a^2$
$16-4a^2=0$, $a=\pm 2$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a>0$이므로 $a=2$

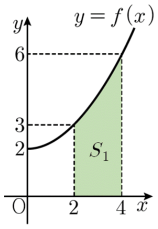
50 정답 4

해설 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하여 문제해결하기
$f(-2)=f(6)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이고,
함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로
$f(x)=(x-2)^2-9$
$\quad =x^2-4x-5$
$\quad =(x+1)(x-5)$
$f(|f(x)|)=0$에서 $|f(x)|=t\ (t \ge 0)$라 하면
$f(t)=0$이고, $t=5$
$\therefore f(x)=5,\ -5$
$y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=5$, $y=-5$는 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 서로 다른 실근의 개수는 4

51 정답 ③

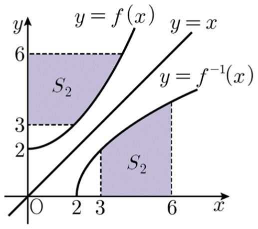
해설 함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+2\ (x\geq 0)$에 대하여

함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 다음과 같다.

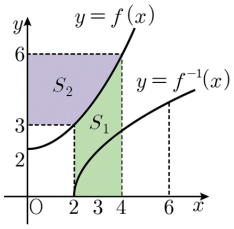


함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(4,\ 6)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점 $(3,\ 2)$, $(6,\ 4)$를 지난다.

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 두 직선 $x=3$, $x=6$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 다음과 같고, 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같다.



따라서 S_1+S_2는 다음 그림의 색칠된 부분의 넓이와 같다.



즉, 구하는 넓이는 가로, 세로의 길이가 4, 6인 직사각형의 넓이에서 가로, 세로의 길이가 2, 3인 직사각형의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\therefore\ S_1+S_2=4\cdot 6-2\cdot 3=18$

52 정답 ⑤

해설 두 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 서로 만나려면 $x^2+4x+a=x$에서 $x^2+3x+a=0$이 실근을 가진다.

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9-4a\geq 0$

$\therefore\ a\leq\dfrac{9}{4}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$

53 정답 4

해설 함수 $f(x)$는 '$3x$를 7로 나눈 나머지'이므로

$f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(2)=6$, $f(3)=2$, $f(4)=5$, $f(5)=1$, $f(6)=4$

함수 $g: X\rightarrow X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $f(5)=g(3)=1$

$(f\circ g)(3)=(g\circ f)(3)$에서 $f(1)=g(2)=3$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(3)=g(6)=2$

$(f\circ g)(6)=(g\circ f)(6)$에서 $f(2)=g(4)=6$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(6)=g(5)=4$

이때 $(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$, $f(0)=0$이므로 $g(0)=0$이어야 한다.

따라서 $g(0)+g(5)=0+4=4$

54 정답 ④

해설 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$로 놓으면

점 B는 점 A와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}(f(a),\ a)$

또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 $\mathrm{C}(c,\ a)$로 놓으면 $f(c)=a$이므로 $c=f^{-1}(a)$

즉, $\mathrm{C}(f^{-1}(a),\ a)$

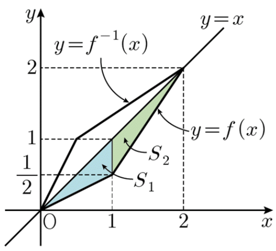
이때 점 D는 점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{D}(a,\ f^{-1}(a))$

따라서 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

55 정답 ①

해설 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



위 그림에서

$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 넓이 S는

$S=2(S_1+S_2)=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$

56 정답 ⑤

해설 ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $f(f(6))\leq3$이므로
$f(f(6))=2$이다. (거짓)

ㄴ. (ⅰ) $f(6)=2$일 때
$f(f(6))=f(2)=2$이므로 $f(2)=2$이다.
(a) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=4$이면 함수 f의 치역이 $\{2,\ 6\}$이 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(b) $f(4)=6$이면 함수 f의 치역이 $\{2,\ 6\}$이므로 $f(2)=2$이고
$f(f(2))=f(2)=2$,
$f(f(4))=f(6)=2$,
$f(f(6))=f(2)=2$가 되어 조건을 만족시킨다.
(ⅱ) $f(6)=4$일 때
함수 f의 치역이 $\{2,\ 6\}$이 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 모든 함수 f에 대하여 $f(4)=6$이다. (참)

ㄷ. ㄴ의 (ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 함수 f는 1개 뿐이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

57 정답 ⑤

해설 $f(ab)=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$ $\cdots$ ㉠

ㄱ. $f(2)=2$이므로
$f^{-1}(2)=2$
㉠의 양변에 $a=2,\ b=2$를 대입하면
$f(2\cdot2)=f^{-1}(2)f^{-1}(2)$
$f(4)=2\cdot2=4$
$\therefore\ f^{-1}(4)=4$
㉠의 양변에 $a=4,\ b=2$를 대입하면
$f(4\cdot2)=f^{-1}(4)f^{-1}(2)$
$\therefore\ f(8)=4\cdot2=8$ (참)

ㄴ. $f(a)=p,\ f(b)=q$라 하면
$f^{-1}(p)=a,\ f^{-1}(q)=b$
㉠의 양변에 $a=p,\ b=q$를 대입하면
$f(pq)=f^{-1}(p)f^{-1}(q)$
$=ab$
$\therefore\ f^{-1}(ab)=pq$
$=f(a)f(b)$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $f(f(a)f(b))=ab$이므로
$f(a)=b,\ f(b)=a$이면
$f(ab)=ab$
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 점 $(ab,\ ab)$에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.