

실시일자	-	교재 오답	이름
100문제 / DRE수학			

## 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

### 빠른정답

01 ⑤	02 ③	03 ③
04 ⑤	05 ①	06 3
07 6	08 25	09 4
10 29	11 ⑤	12 ④
13 ⑤	14 ③	15 4
16 ③	17 ①	18 ⑤
19 ④	20 ③	21 ②
22 ③	23 ①	24 ⑤
25 ③	26 ②	27 ①
28 -3	29 ②	30 ①
31 -10	32 ④	33 -13
34 ③	35 ②	36 ④
37 ③	38 -9	39 8
40 6	41 ③	42 5
43 ②	44 -1	45 ①
46 ①	47 2	48 4
49 2	50 ①	51 21
52 ②	53 ③	54 5
55 5	56 14	57 ④
58 ②	59 6	60 12
61 ②	62 5	63 ②
64 ②	65 ③	66 ③
67 1	68 ④	69 ④

70 ①	71 ③	72 19
73 ③	74 ⑤	75 $\frac{3}{2}$
76 36	77 4	78 4
79 ④	80 2	81 $\frac{20}{7}$
82 -3	83 $\frac{6}{5}$	84 ②
85 ①	86 -25	87 ②
88 ③	89 1	90 ①
91 15	92 21	93 ⑤
94 40	95 8	96 13
97 33	98 120	99 $\frac{33}{4}$

100 50m



실시일자	-	교재 오답	이름
100문제 / DRE수학			

## 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

### 01 정답 ⑤

**해설** 두 점 A(5, 8), B(-5, 2)의 중점의 좌표는  $\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{8+2}{2}\right)$  이므로 (0, 5)이다.  
따라서 중점의 y좌표는 5이다.

### 02 정답 ③

**해설** 두 점 O(0, 0), A(8, 12)를 3:1로 내분하는 점의 x좌표는  $\frac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 0}{3+1} = 6$

### 03 정답 ③

**해설**  $\frac{m \cdot 6 + n \cdot (-8)}{m+n} = -4, \frac{m \cdot (-4) + n \cdot 3}{m+n} = 1$   
이므로  $5m = 2n$   
 $\therefore m:n = 2:5$   
따라서  $\overline{AB}$ 를 5:2로 내분하는 점의 좌표는  $\left(\frac{5 \cdot 6 + 2 \cdot (-8)}{5+2}, \frac{5 \cdot (-4) + 2 \cdot 3}{5+2}\right)$ , 즉 (2, -2)

### 04 정답 ⑤

**해설** 점 (-4, 6)을 지나고 기울기가  $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은  
 $y - 6 = -\frac{1}{2}(x + 4)$   
 $\therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$   
 따라서  $a = -\frac{1}{2}, b = 4$ 이므로  
 $ab = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$

### 05 정답 ①

**해설** 두 점 (-4, -10), (3, 4)를 지나는 직선의 방정식은  
 $y - (-10) = \frac{4 - (-10)}{3 - (-4)}(x + 4)$   
 $y + 10 = 2(x + 4)$   
 $\therefore y = 2x - 2$   
 따라서  $a = 2, b = -2$ 이므로  
 $ab = -4$

### 06 정답 3

**해설** 점 (-4, 1)과 직선  $3x - 4y + 1 = 0$  사이의 거리는  
 $\frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$

### 07 정답 6

**해설** 점 (0, -4)과 직선  $y = 2$  사이의 거리는  
 $|2 - (-4)| = 6$

### 08 정답 25

**해설** 원의 방정식을 이해하여 원의 넓이를 구한다.  
 $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ 에서  
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 25$   
 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2$   
 따라서 원  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ 은 중심의 좌표가 (4, -3)이고 반지름의 길이가 5이므로 원의 넓이는  
 $5^2 \cdot \pi = 25\pi$   
 따라서  $k = 25$ 이다.



# 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

## 09 정답 4

해설  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$   
 $= (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 - 11 = 0$   
원의 방정식은  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$   
따라서 원의 반지름의 길이는 4

## 10 정답 29

해설  $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$ 에서  
 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 29$   
이 원의 반지름의 길이는  $\sqrt{29}$  이므로  
원의 넓이는  $\pi \cdot (\sqrt{29})^2 = 29\pi$   
 $\therefore k = 29$

## 11 정답 ⑤

해설 원  $x^2 + y^2 = 13$  위의 점 (2, 3)에서의 접선의 방정식은  
 $2x + 3y = 13$   
따라서  $a = 2, b = 3$ 이므로  
 $a + b = 5$

## 12 정답 ④

해설 점 (1, -3)에서 그은 접선의 방정식은  
 $x - 3y = 10$   
 $x$ 절편은  $y = 0$ 일 때의  $x$ 좌표이므로  
 $x = 10$

## 13 정답 ⑤

해설 기울기가 2인 직선의 방정식을  
 $y = 2x + k$ , 즉  $2x - y + k = 0$  ( $k$ 는 상수)라 하면  
이 직선이 원  $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하므로 직선과 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.  
즉,  $\frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6}$   
 $|k| = \sqrt{30}$   
 $\therefore k = \pm \sqrt{30}$   
따라서 구하는 접선의 방정식은  
 $y = 2x \pm \sqrt{30}$

## 14 정답 ③

해설 구하는 접선의 방정식을  $y = -2x + k$ 라 하면  
원의 중심 (3, -1)과  
직선  $y = -2x + k$ , 즉  $2x + y - k = 0$  사이의 거리  $d$ 는  
 $d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|5 - k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면  
 $\frac{|5 - k|}{\sqrt{5}} = 5, |k - 5| = 5\sqrt{5}$

$$k - 5 = \pm 5\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 5 \pm 5\sqrt{5}$$

이때  $k$ 가 두 직선의  $y$ 절편이므로  $y$ 절편의 합은  
 $(5 + 5\sqrt{5}) + (5 - 5\sqrt{5}) = 10$

## 15 정답 4

해설  $5 + a = 1, 2 - 3 = b$ 이므로  
 $a = -4, b = -1$   
 $\therefore ab = 4$

## 16 정답 ③

해설 방정식  $y = -3x + 1$ 이 나타내는 도형을  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식은  
 $y + 2 = -3(x - 4) + 1$   
 $\therefore y = -3x + 11$

## 17 정답 ①

해설 직선  $y = -3x$ 의 그래프를  $y$  축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동 시킨 직선은  
 $y - (-2) = -3x$   
 $\therefore y = -3x - 2$

## 18 정답 ⑤

해설  $x - 2 = x', y + 1 = y'$ 이라 하고 주어진 식에 대입하면  
 $(x' + 2 + 1)^2 + (y' - 1 - 2)^2 = 5$   
 $(x' + 3)^2 + (y' - 3)^2 = 5$   
 $\therefore (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$

**19****정답 ④****해설** 평행이동 이해하기

원  $x^2 + y^2 = 16$ 을  $x$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은  
 $(x-4)^2 + y^2 = 16 \quad \dots \textcircled{①}$   
 이때 점  $(4, a)$ 가  $\textcircled{①}$  위의 점이므로  
 $a^2 = 16$   
 $\therefore a = 4$  또는  $a = -4$   
 이때  $a > 0$ 이므로  $a = 4$

**20****정답 ③**

**해설** 직선  $x - 2y + 4 = 0$ 에  $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y$ 를 각각 대입하면  
 $(-x) - 2(-y) + 4 = 0$   
 $\therefore x - 2y - 4 = 0$

**21****정답 ②**

**해설** 원점대칭은  $x, y$ 의 부호를 각각 반대로 해주면 된다.  
 즉,  $2x - y + 3 = 0$ 의  $x$  대신  $-x, y$  대신  $-y$ 를 대입하면  
 $2 \cdot (-x) - (-y) + 3 = 0$   
 $\therefore 2x - y - 3 = 0$

**22****정답 ③**

**해설** 직선  $x - 2y + 4 = 0$ 에  $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y$ 를 각각 대입하면  
 $(-x) - 2(-y) + 4 = 0$   
 $\therefore x - 2y - 4 = 0$

**23****정답 ①**

**해설**  $x$ 축대칭은  $y$ 의 부호를 반대로, 원점대칭은  $x, y$  부호를 각각 반대로 해주면 된다.

**24****정답 ⑤****해설** 직선  $x + 3y - 1 = 0$ 을

직선  $y = -x$ 에 대하여 대칭이동하면  
 $-y - 3x - 1 = 0, 3x + y + 1 = 0$   
 $\therefore y = -3x - 1$   
 따라서  $a = -3, b = -1$ 이므로  
 $a + b = -4$

**25****정답 ③**

**해설**  $y = x$  대칭은  $x$  대신  $y$ 를,  $y$  대신  $x$ 를 대입한다.  
 즉,  $y = 2x$ 에서  $x = 2y$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x$$

**26****정답 ②**

**해설** 주어진 두 원이 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로  
 두 원의 중심도 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.  
 두 원의 중심의 좌표가 각각  
 $(a, 2), (b-2, 1)$ 이므로  
 $a = 1, b - 2 = 2$ 에서  $b = 4$   
 $\therefore a + b = 5$

**27****정답 ①**

**해설** 점 A를 지나고  $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면 직선이  $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$ 의 중점은  $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ , 즉  $(3, 1)$ 이므로

두 점  $(1, 2), (3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1-2}{3-1}(x - 1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

# 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

## 28 정답 -3

**해설**  $mx + y - m + 2 = 0$ 에서  $m(x-1) + (y+2) = 0$   
 따라서 직선  $m(x-1) + (y+2) = 0$ 은  $m$ 의 값에  
 관계없이 항상 점  $(1, -2)$ 를 지난다.  
 이때 A  $(1, -2)$ 이므로 직선  $m(x-1) + (y+2) = 0$ 이  
 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면  
 직선  $m(x-1) + (y+2) = 0$ 은  $\overline{BC}$ 의 중점  $(2, 1)$ 을  
 지나야 한다.  
 따라서 직선  $m(x-1) + (y+2) = 0$ 에 점  $(2, 1)$ 을  
 대입하면  $m+3=0$   
 $\therefore m=-3$

## 29 정답 ②

**해설**  $y = 2x + 4$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이다.  
 따라서 구하는 직선의 방정식은  
 $y - (-1) = 2(x - 2)$   
 $\therefore y = 2x - 5$

## 30 정답 ①

**해설** 두 직선  $y = ax + b$ ,  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 이 수직이므로  
 $\frac{1}{2}a = -1$   
 $\therefore a = -2$   
 따라서 직선  $y = -2x + b$ 가 점  $(1, 2)$ 를 지난므로  
 $2 = -2 + b$   
 $\therefore b = 4$   
 $\therefore ab = -8$

## 31 정답 -10

**해설**  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 2 + k = 0$ 에서  
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 15 - k$   
 이 원의 반지름의 길이는  $\sqrt{15-k}$ 이므로  
 $\sqrt{15-k} = 5$   
 양변을 제곱하면  
 $15 - k = 25$   
 $\therefore k = -10$

## 32 정답 ④

**해설** 원의 중심:  $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (0, 3)$   
 반지름:  $\frac{1}{2} \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2}$   
 따라서 구하는 원의 방정식은  
 $x^2 + (y-3)^2 = 2$

## 33 정답 -13

**해설**  $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 20 = 0$ 에서  
 $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 45$   
 따라서  $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가  $(-4, 7)$ 이므로  
 $\frac{a-7}{2} = -4, \frac{b+1}{2} = 7$   
 $\therefore a = -1, b = 13$   
 $\therefore ab = -13$

## 34 정답 ③

**해설** 구하는 원의 중심이 직선  $2x + y = 0$  위에 있으므로  
 중심을  $(a, -2a)$  라 할 수 있다.  
 $(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$   
 점  $(3, 0)$ 을 지난므로,  
 $(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \cdots ①$   
 또, 점  $(0, 1)$ 을 지난므로,  
 $a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \cdots ②$   
 $①, ②$ 에서  $a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$   
 $\therefore (x - \frac{4}{5})^2 + (y + \frac{8}{5})^2 = \frac{37}{5}$   
 정리하면  $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$

### 35 정답 ②

**해설** 원의 중심  $(a, b)$ 는 직선  $y = x - 1$  위에 있으므로  
 $b = a - 1$   
 구하는 원의 방정식을  
 $(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$   
 으로 놓으면 이 원이 두 점  $(-2, 4), (6, 4)$ 를 지나므로  
 $(-2-a)^2 + (4-a+1)^2 = r^2$ 에서  
 $2a^2 - 6a + 29 = r^2 \quad \dots \textcircled{①}$   
 $(6-a)^2 + (4-a+1)^2 = r^2$ 에서  
 $2a^2 - 22a + 61 = r^2 \quad \dots \textcircled{②}$   
 ①, ②를 연립하여 풀면  
 $a = 2, r^2 = 25$   
 $\therefore a = 2, b = 1, r = 5 (\because r > 0)$   
 $\therefore a+b+r = 8$

### 36 정답 ④

**해설**  $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 40 = 0$ 에서  
 $(x-a)^2 + (y+3a)^2 = 10(a^2 - 4)$   
 이 방정식이 원을 나타내려면  
 $10(a^2 - 4) > 0, (a+2)(a-2) > 0$   
 $\therefore a < -2$  또는  $a > 2$

### 37 정답 ③

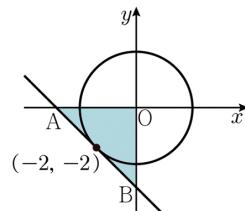
**해설**  $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서  
 $(x+m-1)^2 + (y-m)^2 = (m-1)^2 + m^2 - 3m^2 + 2$   
 $(x+m-1)^2 + (y-m)^2 = 3 - 2m - m^2 \quad \dots \textcircled{①}$   
 ①이 원의 방정식이므로  
 $3 - 2m - m^2 > 0$   
 $m^2 + 2m - 3 < 0, (m+3)(m-1) < 0$   
 $\therefore -3 < m < 1$   
 따라서 정수  $m$ 은  $-2, -1, 0$ 의 3개다.

### 38 정답 -9

**해설**  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$ 에서  
 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$   
 원의 중심  $(3, 2)$ 와 직선  $x - 2y + k = 0$  사이의 거리는  
 $\frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1 + k|}{\sqrt{5}}$   
 원의 반지름의 길이가  $2\sqrt{5}$  이므로 원과 직선이 서로  
 접하려면  
 $\frac{|-1 + k|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}, |-1 + k| = 10$   
 $-1 + k = -10$  또는  $-1 + k = 10$   
 $\therefore k = -9 (\because k < 0)$

### 39 정답 8

**해설** 원  $x^2 + y^2 = 8$  위의 점  $(-2, -2)$ 에서의 접선의  
 방정식은  $(-2) \cdot x + (-2) \cdot y = 8$   
 $\therefore x + y + 4 = 0$   
 이 접선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점의 좌표는  $A(-4, 0)$ ,  
 $B(0, -4)$   
 따라서 삼각형  $OAB$ 의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$



### 40 정답 6

**해설**  $(-3, 4)$ 를 지나는 방정식  $y = m(x+3) + 4$ 은  
 원에 접하므로 원의 중심에서 직선까지의 거리는 반지름과  
 같다.  
 $\frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$   
 $(m+3)^2 = 10m^2 + 10$   
 $(3m-1)^2 = 0 \quad \therefore m = \frac{1}{3}$   
 따라서 접선의 방정식은  $y = \frac{1}{3}x + 5$ 이므로  $3m+n = 6$

# 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

## 41 정답 ③

해설 점  $(2, 2)$ 를 지나고 기울기가  $m$ 인 접선을

$$y - 2 = m(x - 2), 즉 mx - y - 2m + 2 = 0$$

이라고 하면

원의 중심  $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는

원의 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$|-2m+2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 - 8m + 4 = m^2 + 1$$

$$3m^2 - 8m + 3 = 0$$

따라서 두 기울기의 곱은

근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

## 42 정답 5

해설 점  $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를  $m$ 이라고 하면

$$y + 1 = m(x - 3) \quad \dots \textcircled{①}$$

따라서 원의 중심  $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가 원의 반지름  $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m-1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$\text{따라서 기울기 } m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

여기서 기울기가 음수인  $-2$ 를  $\textcircled{①}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서  $y$ 절편은 5이다.

## 43 정답 ②

해설  $-3 + m = n, 6 + m - 2 = 5$ 이므로

$$m = 1, n = -2$$

$$\therefore m + n = -1$$

## 44 정답 -1

해설 직선  $y = 4x - 7$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,

$y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 도형은

직선  $y - 4 = 4(x - a) - 7$ 이고

이 도형이 점  $(3, 13)$ 을 지나므로

$$13 - 4 = 4(3 - a) - 7$$

$$\therefore a = -1$$

## 45 정답 ①

해설 평행이동한 직선의 방정식은

$$(x - a) + 5(y + 1) - 10 = 0$$

$$\therefore x + 5y - a - 5 = 0$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-a - 5 = 0$$

$$\therefore a = -5$$

## 46 정답 ①

해설  $x^2 + y^2 + 2x + 10y + a = 0$ 에서

$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 26 - a$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는  
원의 방정식은

$$(x - 1 + 1)^2 + (y + 5 + 5)^2 = 26 - a$$

$$\therefore x^2 + (y + 10)^2 = 26 - a$$

이 원이 원  $x^2 + (y + b)^2 = 9$ 와 일치하므로

$$a = 17, b = 10$$

$$\therefore a - b = 7$$

## 47 정답 2

해설 점  $(-4, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는  $(4, -1)$

이 점이 직선  $ax + 3y - 5 = 0$  위에 있으므로

$$4a - 3 - 5 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

## 48 정답 4

해설 점  $(4, a)$ 를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는  $(4, -a)$

이 점이 직선  $y = -2x + a$  위의 점이므로

$$-a = -8 + a, 2a = 8$$

$$\therefore a = 4$$

## 49 정답 2

**해설** 점  $(-4, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는  $(4, -1)$

이 점이 직선  $ax + 3y - 5 = 0$  위에 있으므로

$$4a - 3 - 5 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

## 50 정답 ①

**해설** 점 P의 좌표를  $(m, n)$ 이라 하면 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점  $(m, -n)$ 이  $(a, 3)$ 이므로

$$m = a, n = -3 \quad \dots \textcircled{①}$$

점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점  $(-m, n)$ 이  $(4, b)$ 이므로  $m = -4, n = b$   $\dots \textcircled{②}$

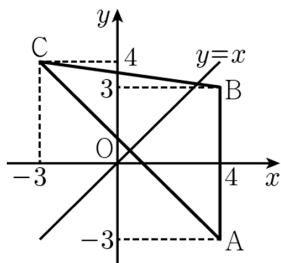
$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{에서 } m = -4, n = -3$$

$$\therefore m + n = -7$$

## 51 정답 21

**해설** 점 A( $4, -3$ )을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는  $(4, 3)$

점 A( $4, -3$ )을 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는  $(-3, 4)$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$$

## 52 정답 ②

$$\begin{aligned}\text{해설 } \overline{AB} &= \sqrt{(1-t)^2 + (2t+3)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 + 10t + 10} \\ &= \sqrt{5(t+1)^2 + 5}\end{aligned}$$

따라서  $t = -1$  일 때 선분 AB의 길이는 최소이고

선분 AB의 길이의 최솟값은  $\sqrt{5}$  이다.

## 53 정답 ③

**해설** 이차방정식이 중근을 가질 때 판별식이 0이므로

$$(a+b)^2 - 4(a+b-1) = 0$$

$$(a+b-2)^2 = 0, a+b = 2$$

점  $(-1, 0)$ 과 점  $(a, b)$  사이의 거리는

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2 + b^2} &= \sqrt{(a+1)^2 + (2-a)^2} \\ &= \sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}\end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{1}{2}$  일 때, 최솟값은  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  이다.

## 54 정답 5

**해설** 점 P의 좌표는

$$\left( \frac{4 \cdot 9 + 1 \cdot (-1)}{4+1}, \frac{4 \cdot (-3) + 1 \cdot 2}{4+1} \right), 즉 (7, -2)$$

점 M의 좌표는

$$\left( \frac{3 \cdot 9 + 2 \cdot (-1)}{3+2}, \frac{3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2}{3+2} \right), 즉 (5, -1)$$

$$\overline{PM} = k = \sqrt{(7-5)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore k^2 = 5$$

## 55 정답 5

$$\text{해설 } \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5}{2+1} = 1, \frac{2 \cdot 14 + 1 \cdot 2}{2+1} = 10 \text{이므로}$$

$$P(1, 10)$$

따라서  $\overline{OP}$ 의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{10}{2} \right), 즉 \left( \frac{1}{2}, 5 \right)$$

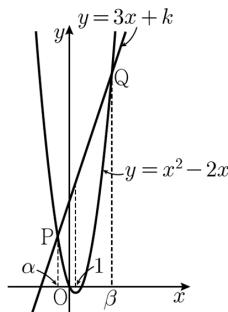
$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = 5 \text{이므로}$$

$$2ab = 5$$

## 56 정답 14

**해설** 근과 계수의 관계와 선분의 내분을 이용하여 상수를 구하는 문제를 해결한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하자.



곡선  $y = x^2 - 2x$ 와 직선  $y = 3x + k$ 가 만나는 점이

P, Q이므로 두 식  $y = x^2 - 2x, y = 3x + k$ 를 연립하여

얻은 방정식  $x^2 - 2x = 3x + k$ , 즉  $x^2 - 5x - k = 0$ 의

두 실근이  $\alpha, \beta$ 이어야 한다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5 \quad \dots \textcircled{\text{①}}$$

$$\alpha\beta = -k \quad \dots \textcircled{\text{②}}$$

선분 PQ를 1:2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$$\frac{1 \cdot \beta + 2 \cdot \alpha}{1+2} = 1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 3 \quad \dots \textcircled{\text{③}}$$

①, ③을 연립하여 풀면

$$\alpha = -2, \beta = 7$$

$$\textcircled{\text{②}} \text{에서 } -k = \alpha\beta = -14$$

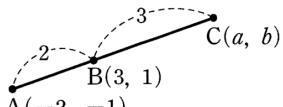
$$\therefore k = 14$$

## 57 정답 ④

**해설**  $3\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

오른쪽 그림에서 점



C는 점 B의

방향으로 그은  $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 있으므로 점

B는 선분 AC를 2:3으로 내분하는

점이다.

$$\therefore \left( \frac{2 \cdot a + 3 \cdot (-2)}{2+3}, \frac{2 \cdot b + 3 \cdot (-1)}{2+3} \right) = (3, 1)$$

$$\frac{2a-6}{5} = 3, \frac{2b-3}{5} = 1$$

$$\therefore a = \frac{21}{2}, b = 4 \quad \therefore a+b = \frac{29}{2}$$

## 58 정답 ②

**해설** 선분의 내분점과 외분점 이해하기

두 점 B, C의 좌표를 각각  $(c, d), (e, f)$ 라 하면

선분 BC의 중점의 좌표가  $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{c+e}{2} = 1, \frac{d+f}{2} = 2$$

$$c+e = 2, d+f = 4$$

또, 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$$\frac{a+c+e}{3} = \frac{a+2}{3} = 0, a = -2$$

$$\frac{b+d+f}{3} = \frac{b+4}{3} = 0, b = -4$$

$$\therefore ab = 8$$

## 59 정답 6

**해설**  $\triangle ABC$ 와 이 삼각형 내부의 임의의 점 P에 대하여

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는  $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치하므로 점 P의 좌표는

$$\left( \frac{1+7+1}{3}, \frac{0+0+a}{3} \right), \text{즉 } \left( 3, \frac{a}{3} \right)$$

따라서  $P\left(3, \frac{a}{3}\right)$ 일 때  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값이

48이므로

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \left\{ (3-1)^2 + \left( \frac{a}{3} \right)^2 \right\} + \left\{ (3-7)^2 + \left( \frac{a}{3} \right)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ (3-1)^2 + \left( \frac{a}{3} - a \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{3}a^2 + 24 = 48$$

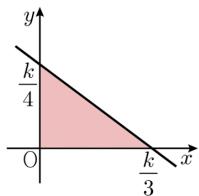
$$a^2 = 36$$

$$\therefore a = 6 (\because a > 0)$$

60 정답 12

**해설**  $3x + 4y = k$ 에서  $x$ 절편은  $\frac{k}{3}$ ,  $y$ 절편은  $\frac{k}{4}$ 이다.

다음 그림에서 삼각형의 넓이가 6이므로



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \frac{k}{4} = 6, k^2 = 144$$

$$\therefore k = 12 (\because k > 0)$$

61 정답 ②

**해설** 주어진 식의 양변을  $4a$ 로 나누면

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{a} = 1$$

즉,  $x$ 절편이 4,  $y$ 절편이  $a$ 이므로 직선  $ax + 4y = 4a$ 와  $x$ 축,  $y$ 축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 6$$

$$\therefore a = 3$$

62 정답 5

**해설** 직선 AP의 기울기는

$$\frac{7-5}{2+2} = \frac{1}{2}$$

직선 BP의 기울기는

$$\frac{7-1}{2-n} = \frac{6}{2-n}$$

두 직선 AP와 BP가 수직이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2-n} = -1$$

$$n-2=3 \quad \therefore n=5$$

63 정답 ②

**해설**  $2x + y - 7 = 0 \cdots \textcircled{\text{I}}$

$3x + 2y - 12 = 0 \cdots \textcircled{\text{II}}$

$$\textcircled{\text{I}} \times 2 - \textcircled{\text{II}} : x = 2, y = 3$$

$$\therefore \textcircled{\text{I}}, \textcircled{\text{II}} \text{의 교점} : (2, 3)$$

구하는 직선의 기울기는  $-\frac{8}{5}$

$(\because y = -\frac{8}{5}x \text{ 와 평행하다.})$

$\therefore$  구하는 직선은 기울기  $-\frac{8}{5}$ 이고

$$(2, 3) \text{ 을 지나므로}$$

$$y - 3 = -\frac{8}{5}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$$

64 정답 ②

**해설** 구하는 직선은  $(2x + 3y + 1) + k(x - 2y + 5) = 0$

$$\therefore (2+k)x + (3-2k)y + 5k + 1 = 0 \cdots \textcircled{\text{I}}$$

$\textcircled{\text{I}}$ 과 직선  $x + 4y - 4 = 0$ 이 수직이므로

$$(2+k) \cdot 1 + (3-2k) \cdot 4 = 0$$

$$14 - 7k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

이것을  $\textcircled{\text{I}}$ 에 대입하면  $4x - y + 11 = 0$

$$\therefore y = 4x + 11$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4^2 - 11^2 = 16 - 121 = -105$$

# 교과서\_비상교육 - 공통수학2 26~56p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 대칭이동

## 65 정답 ③

**해설**  $\frac{x}{k} + y = 1$  을 직선  $l_1$ ,  $x - \frac{y}{k} = k$  를 직선  $l_2$  이라 하자

⊓.  $\frac{x}{k} + y = 1$ ,  $x - \frac{y}{k} = k$  를 연립하여 풀면

$x = k$ ,  $y = 0$ , 즉  $(k, 0)$ ,  $x$ 축 위에서 만난다.

⊓.  $l_1$ 의 기울기는  $-\frac{1}{k}$ ,  $l_2$ 의 기울기는  $k$

$-\frac{1}{k} \cdot k = -1$  이다. 따라서 두 직선은 수직이다.

⊓.  $l_1$ 은  $x + ky - k = 0$ ,  $l_2$ 는  $kx - y - k^2 = 0$

$l_1$ 과 원점사이의 거리  $d_1$ 은

$$d_1 = \frac{|-k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$l_2$ 과 원점사이의 거리  $d_2$ 은

$$d_2 = \frac{|-k^2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}$$

$d_1 \neq d_2$  를 원점에서 두 직선에 이르는 거리는 같지 않다.

## 66 정답 ③

$$d_1 = \frac{|2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$d_2 = \frac{|2 \times 4 - 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } |d_1 - d_2| = \left| \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{7\sqrt{5}}{5} \right| = \sqrt{5}$$

## 67 정답 1

**해설** 점  $(-1, 2)$ 와 직선  $kx + 3y + k - 3 = 0$  사이의 거리를  $f(k)$ 라 하면

$$f(k) = \frac{|-k + 6 + k - 3|}{\sqrt{k^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{k^2 + 9}}$$

$f(k)$ 는  $\sqrt{k^2 + 9}$ 의 값이 최소일 때, 즉  $k=0$  일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

따라서  $a=0$ ,  $b=1$  이므로  $a+b=1$

## 68 정답 ④

**해설**  $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 8k - 20 = 0$  에서

$$(x-k)^2 + (y+k)^2 = 2k^2 - 8k + 20$$

이 원의 중심의 좌표는  $(k, -k)$ 이고 반지름의 길이는  $\sqrt{2k^2 - 8k + 20}$  이다.

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름의 길이가 최소가 되어야 하므로

$$\sqrt{2k^2 - 8k + 20} = \sqrt{2(k-2)^2 + 12} \text{ 에서}$$

$k=2$  일 때 원의 반지름의 길이가 최소가 되고 그 때의 원의 중심의 좌표는  $(2, -2)$  이다.

## 69 정답 ④

**해설**  $x^2 + y^2 + 4kx - 2y - k^2 + 7 = 0$  에서

$$(x+2k)^2 + (y-1)^2 = 5k^2 - 6$$

이때 (우변)  $= 5k^2 - 6 > 0$  에서

$$k^2 > \frac{6}{5} \text{ 이므로}$$

$$k < -\frac{\sqrt{30}}{5} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{30}}{5} \quad \dots \textcircled{①}$$

원의 반지름의 길이가 3 이하이려면

$$5k^2 - 6 \leq 9, k^2 - 3 \leq 0$$

$$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{②}$$

따라서 ①, ②에서 실수  $k$ 의 값의 범위는

$$-\sqrt{3} \leq k < -\frac{\sqrt{30}}{5} \text{ 또는 } \frac{\sqrt{30}}{5} < k \leq \sqrt{3}$$

## 70 정답 ①

**해설**  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$  에서

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

점 A  $(-3, -5)$  와 원의 중심  $(-1, 1)$  사이의 거리는

$$\sqrt{(-1+3)^2 + (1+5)^2} = 2\sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

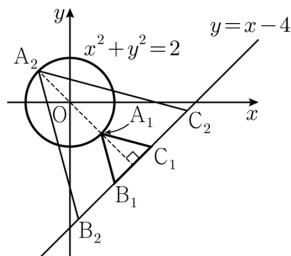
$$M = 2\sqrt{10} + 3, m = 2\sqrt{10} - 3$$

$$\therefore Mm = (2\sqrt{10} + 3)(2\sqrt{10} - 3)$$

$$= 31$$

## 71 정답 ③

**해설** 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



원 위를 움직이는 점 A와 직선 사이의 거리가 구하고자 하는 정삼각형의 높이이고, 원점과 직선 사이의 거리는

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

정삼각형의 넓이가 최소일 때의 삼각형은 그림의

삼각형  $A_1B_1C_1$ 이고 높이는  $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ , 최대일 때는 삼각형  $A_2B_2C_2$ 이고 높이는

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

두 삼각형의 닮음비가  $\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 1 : 3$ 이므로

넓이의 비는  $1^2 : 3^2 = 1 : 9$ 이다.

## 72 정답 19

**해설** 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서  $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (a+4)^2 + b^2$$

$$8a + 16 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

$\overline{PB} = \overline{PC}$ 에서  $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a+4)^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-5)^2$$

$$10a + 10b - 10 = 0$$

$$\therefore a + b - 1 = 0$$

$a = -2$ 를 위의 식에 대입하면  $b = 3$

$$\therefore P(-2, 3)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

이고 원의 중심 P(-2, 3)과 직선  $2x + 3y - k = 0$

사이의 거리는

$$\frac{|-4 + 9 - k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|5 - k|}{\sqrt{13}}$$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|5 - k|}{\sqrt{13}} > \sqrt{13}, |5 - k| > 13$$

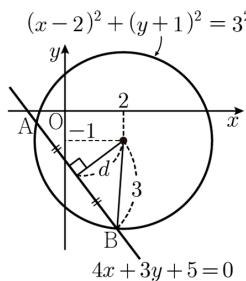
$$5 - k > 13 \text{ 또는 } 5 - k < -13$$

$$\therefore k < -8 \text{ 또는 } k > 18$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 19이다.

## 73 정답 ③

**해설** 원의 방정식  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 을 표준형으로 나타내면  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 이므로 중심이  $(2, -1)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이다.



위의 그림과 같이 원의 중심에서 직선  $4x + 3y + 5 = 0$  까지의 거리를  $d$ 라 하면

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

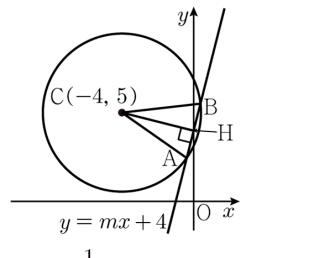
따라서 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{5}$$

## 74 정답 ⑤

**해설** 다음 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C( $-4, 5$ )라 하고 점 C에서 직선  $y = mx + 4$ , 즉  $mx - y + 4 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}, \overline{CA} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

이때 점 C( $-4, 5$ )와 직선  $mx - y + 4 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|-4m - 5 + 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|4m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{따라서 } \frac{|4m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{17} \text{ 이므로}$$

$$|4m + 1| = \sqrt{17m^2 + 17}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 - 8m + 16 = 0, (m-4)^2 = 0$$

$$\therefore m = 4$$

75 정답  $-\frac{3}{2}$ 

**해설** 두 접선  $l_1, l_2$ 의 방정식은

$$l_1 : 2x + 3y = 13, l_2 : ax + by = 9$$

이때  $l_1, l_2$ 가 서로 수직이므로

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

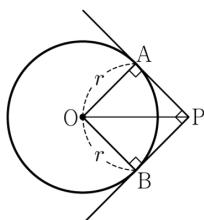
$$\therefore \frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$$

## 76 정답 36

**해설** 원  $x^2 + y^2 = 100$  위의 점  $(-8, a)$ 에서의 접선의 방정식은  
 $-8x + ay = 100$   
이 접선이 점  $(10, b)$ 를 지나므로  
 $-80 + ab = 100$   
 $\therefore ab = 180 \quad \dots \textcircled{①}$   
또, 점  $(-8, a)$ 는 원  $x^2 + y^2 = 100$  위의 점이므로  
 $64 + a^2 = 100$   
 $\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$   
 $a = 6$ 을  $\textcircled{①}$ 에 대입하면  
 $b = 30$   
 $\therefore a + b = 36$

## 77 정답 4

**해설** 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선이 수직하려면 다음 그림과 같은 상황이어야 한다.



이때 사각형 OAPB는 한 변의 길이가  $r$ 인 정사각형이다.

따라서  $\overline{OP} = \sqrt{2}r$ 이다.

이를 문제 상황에 적용하면

점  $(-1, 5)$ 과 원의 중심  $(-5, 1)$ 의 거리가  $\sqrt{2}r$ 이어야 하므로

$$2r^2 = (-1 - (-5))^2 + (5 - 1)^2 = 32$$

$$\therefore r = 4 \quad (\because r > 0)$$

## 78 정답 4

**해설** 평행이동  $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여  
원  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 9$ 가 옮겨지는 원의 방정식은  
 $(x-a+3)^2 + (y-b-5)^2 = 9$   
이 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 이 원이  $x$ 축과  
 $y$ 축에 모두 접하므로  
 $a-3=3, b+5=3$   
 $\therefore a=6, b=-2$   
 $\therefore a+b=4$

## 79 정답 ④

**해설** 점의 평행이동과 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기  
점 A( $-3, 4$ )를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한  
점 B의 좌표는  
 $(4, -3)$   
점 B( $4, -3$ )을  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로  
 $k$ 만큼 평행이동한 점 C의 좌표는  
 $(6, -3+k)$   
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은  
 $y-4 = \frac{-3-4}{4-(-3)}\{x-(-3)\}$   
 $\therefore y = -x + 1$   
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로  
 $-3+k = -5$   
 $\therefore k = -2$

## 80 정답 2

**해설** 점  $(a, -5)$ 를 직선  $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 점의  
좌표는  $(5, -a)$   
이 점을  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $2$ 만큼  
평행이동한 점의 좌표는  $(4, -a+2)$   
이 점이 점  $(4, b)$ 와 일치하므로  $-a+2=b$   
 $\therefore a+b=2$

## 81 정답 $\frac{20}{7}$

**해설** 직선  $l$ 을  $x$ 축의 방향으로 7만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-4$ 만큼  
평행이동한 직선의 방정식은  
 $y+4 = a(x-7)+12$   
 $\therefore y = ax - 7a + 8$   
이 직선을  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은  
 $-y = ax - 7a + 8$   
 $\therefore y = -ax + 7a - 8$   
두 직선  $l, l'$ 이  $y$ 축 위의 점  $(0, 12)$ 에서 만나므로  
 $12 = 7a - 8$   
 $\therefore a = \frac{20}{7}$

## 82 정답 -3

**해설** 직선  $2x + 3y + 3 = 0$ 을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-2x + 3y + 3 = 0, 2x - 3y - 3 = 0$$

이 직선을  $y$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2x - 3(y - m) - 3 = 0$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x + m - 1$$

이 직선과 직선  $nx - y + 1 = 0$ , 즉  $y = nx + 1$ 이  $y$ 축에서 수직으로 만나므로

$$\frac{2}{3} \cdot n = -1, m - 1 = 1$$

따라서  $n = -\frac{3}{2}$ ,  $m = 2$ 이므로

$$mn = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2 = -3$$

## 83 정답 $\frac{6}{5}$

**해설** 직선  $l$ 을  $x$ 축의 방향으로 5만큼,  $y$ 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y + 2 = a(x - 5) + 4$$

$$\therefore y = ax - 5a + 2$$

이 직선을  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y = ax - 5a + 2$$

$$\therefore y = -ax + 5a - 2$$

두 직선  $l$ ,  $l'$ 이  $y$ 축 위의 점  $(0, 4)$ 에서 만나므로

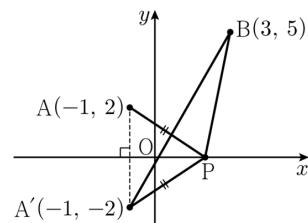
$$4 = 5a - 2$$

$$\therefore a = \frac{6}{5}$$

## 84 정답 ②

**해설**  $\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = 5$ 로 일정하므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소일 때 삼각형 APB의 둘레의 길이도 최소가 된다.



점 A와  $x$ 축에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면  $A'(-1, -2)$

$$\overline{AP} = \overline{A'P}$$
 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

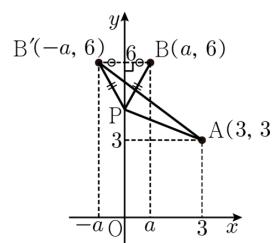
$$= \sqrt{(3+1)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{65}$$

따라서  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은  $\sqrt{65}$ 이므로 삼각형 APB의 둘레의 길이의 최솟값은  $5 + \sqrt{65}$ 이다.

## 85 정답 ①

**해설** 다음 그림과 같이 점  $B(a, 6)$ 을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 점을  $B'$ 이라 하면

$$B'(-a, 6)$$



이때  $\overline{BP} = \overline{B'P}$  이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(3+a)^2 + (3-6)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 6a + 18}$$

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5이므로

$$\sqrt{a^2 + 6a + 18} = 5$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 6a - 7 = 0, (a+7)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

## 86 정답 - 25

**해설**  $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

이 원을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

이 원이 직선  $y = x + k$ , 즉  $x - y + k = 0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심  $(-3, -2)$ 와 직선  $x - y + k = 0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이인  $\sqrt{13}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|-3+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < \sqrt{13}, |k-1| < \sqrt{26}$$

$$-\sqrt{26} < k-1 < \sqrt{26}$$

$$\therefore 1 - \sqrt{26} < k < 1 + \sqrt{26}$$

따라서  $a = 1 - \sqrt{26}$ ,  $b = 1 + \sqrt{26}$  이므로

$$ab = -25$$

## 87 정답 ②

**해설** 선분 AB를  $t : 1-t$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$(2t + (-2) \cdot (1-t), -4t + 6 \cdot (1-t))$$

$$= (4t-2, -10t+6)$$

이 점이 제4사분면에 있으려면

$$4t-2 > 0 \text{이고}, -10t+6 < 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{따라서 } 4t-2 > 0 \text{에서 } t > \frac{1}{2} \text{이고}$$

$$-10t+6 < 0 \text{에서 } t > \frac{3}{5} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{5} < t < 1$$

## 88 정답 ③

**해설**  $\overline{AB}$ 를  $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left( \frac{9m+an}{m+n}, \frac{-16m+bn}{m+n} \right)$$

이 점이  $x$ 축 위에 있으므로

$$\frac{-16m+bn}{m+n} = 0$$

$$-16m+bn = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{16}bn \quad \dots \textcircled{①}$$

$\overline{AC}$ 를  $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left( \frac{-2m+an}{m+n}, \frac{7m+bn}{m+n} \right)$$

이 점이  $y$ 축 위에 있으므로

$$\frac{-2m+an}{m+n} = 0$$

$$-2m+an = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}an \quad \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{에서 } \frac{1}{16}bn = \frac{1}{2}an$$

$$\therefore b = 8a (\because n > 0)$$

이때  $a, b$ 는 30 이하의 자연수이므로 점 A는  $(1, 8), (2, 16), (3, 24)$ 의 3개

따라서 만들 수 있는  $\triangle ABC$ 의 개수도 3이다.

## 89 정답 1

**해설**  $2x-y-4=0$ 에서  $y=2x-4 \Rightarrow$  (기울기)=2

$x+y-5=0$ 에서  $y=-x+5 \Rightarrow$  (기울기)=-1

$ax-y+2=0$ 에서  $y=ax+2 \Rightarrow$  (기울기)= $a$

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선  $2x-y-4=0, x+y-5=0$ 의 기울기가 각각 2, -1로 다르므로 세 직선이 평행할 수 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

①: 두 직선  $2x-y-4=0, ax-y+2=0$ 이 평행한 경우  $a=2$

②: 두 직선  $x+y-5=0, ax-y+2=0$ 이 평행한 경우  $a=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

직선  $ax-y+2=0$ 이 두 직선  $2x-y-4=0, x+y-5=0$ 의 교점  $(3, 2)$ 를 지나야 하므로

$$3a-2+2=0$$

$$\therefore a=0$$

(i), (ii), (iii)에서 모든  $a$ 의 값의 합은

$$2+(-1)+0=1$$

90

정답 ①

**해설** 세 직선이 삼각형을 이루지 않기 위해서는 세 직선이 한 점에서 만나거나, 세 직선 또는 두 직선이 평행하거나 일치하면 된다.  
그런데 주어진 세 직선의 방정식에서 세 직선은 평행할 수 없고, 어떤 두 직선도 일치할 수 없다.  
따라서 세 직선이 한 점에서 만나거나 두 직선이 평행해야 한다.

$$\begin{cases} x + ay - 3 = 0 \\ 2x + ay - 2 = 0 \\ x - (a+1)y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dots \textcircled{①} \\ \dots \textcircled{②} \\ \dots \textcircled{③} \end{array}$$

이때  $a = 0$ 이면 ①, ②에서  $x - 3 = 0$ ,  $x - 1 = 0$ 이므로 두 직선이 평행하다.

즉, 세 직선은 삼각형을 이루지 않는다.

또한,  $a = -1$ 이면 ①, ②, ③에서  $x - y - 3 = 0$ ,  $2x - y - 2 = 0$ ,  $x + 2 = 0$ 이므로 세 직선은 삼각형을 이룬다.

즉,  $a \neq -1$ 이다.

$a \neq 0$ ,  $a \neq -1$ 일 때, ①, ②, ③이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

①-②을 하면

$$-x - 1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

이것을 ③에 대입하면

$$-1 + ay - 3 = 0$$

$$\therefore y = \frac{4}{a}$$

즉, 두 직선 ①, ②의 교점의 좌표가  $\left(-1, \frac{4}{a}\right)$ 이므로

직선 ③도 이 점을 지나야 한다.

$$-1 - \frac{4a+4}{a} + 2 = 0, \frac{4a+4}{a} = 1$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}$$

(ii) 두 직선이 평행한 경우

$$\text{두 직선 } ①, ② \text{에서 } \frac{1}{2} \neq \frac{a}{a} \neq \frac{-3}{-2} \text{이므로}$$

두 직선 ①, ②이 평행하도록 하는  $a$ 의 값은 존재하지 않는다.

두 직선 ②, ③에서

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{-(a+1)} \neq \frac{-2}{2}$$

$$-2a - 2 = a, 3a = -2$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

두 직선 ①, ③에서

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(a+1)} \neq \frac{-3}{2}$$

$$-a - 1 = a, 2a = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지

않도록 하는  $a$ 의 값은  $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0$ 의 4개이므로

$$M = 4, N = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore MN = 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -10$$

91

정답 15

**해설**  $A(1, 3)$ ,  $B(22, 0)$ ,  $C(7, 15)$   
두 점  $B, C$ 를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{15-0}{7-22} = -\frac{1}{5} \text{이므로 이 직선에 수직이며 점 } A \text{를 지나는}$$

직선의 방정식은

$$y = 1(x-1) + 3 = x + 2 \quad \dots \textcircled{①}$$

두 점  $A, B$ 를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{0-3}{22-1} = -\frac{1}{7} \text{이므로}$$

이 직선에 수직이며 점  $C$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = 7(x-7) + 15 = 7x - 34 \quad \dots \textcircled{②}$$

위의 두 직선의 교점이  $H$ 이므로 ①, ②을 연립하여 풀면  $H(6, 8)$

점  $A(1, 3)$ ,  $C(7, 15)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{15-3}{7-1}(x-1) + 3 = \frac{12}{6}(x-1) + 3$$

$$= 2x + 1$$

$$\therefore 2x - y + 1 = 0$$

점  $H$ 와 직선  $2x - y + 1 = 0$  사이의 거리는

$$\sqrt{|2 \cdot 6 - 1 \cdot 8 + 1|} = \sqrt{|12 - 8 + 1|} = \sqrt{5}$$

선분  $AC$ 의 길이는

$$\sqrt{(7-1)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

따라서 삼각형  $HAC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 15$$

92

정답 21

**해설** 직선  $OA$ 와 직선  $4x - 7y + 42 = 0$ 의 기울기가  $\frac{4}{7}$ 로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

삼각형  $OAP$ 에서  $\overline{OA}$ 를 밑변으로 하면 원점과

직선  $4x - 7y + 42 = 0$  사이의 거리가 높이가 된다.

$$\overline{OA} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

이고, 원점과 직선  $4x - 7y + 42 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|42|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2}} = \frac{42}{\sqrt{65}}$$

$$\therefore \triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{42}{\sqrt{65}} = 21$$

### 93 정답 ⑤

**해설** 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 직선  $x-2y+k=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \quad \dots\dots$$

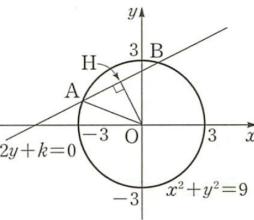
①

또 점 O(0, 0)과 직선  $x-2y+k=0$  사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①}, \textcircled{②} \text{에서 } \frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |k| = 5$$

$$\therefore k = 5 (\because k > 0)$$

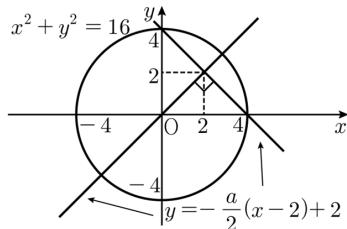


### 94 정답 40

**해설** 직선  $ax+2y-2a-4=0$ , 즉  $y = -\frac{a}{2}(x-2)+2$ 는

기울기인  $-\frac{a}{2}$ 의 값에 관계없이 항상 점 (2, 2)를 지난다.

따라서 다음 그림과 같이 선분 AB의 길이의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같고, 최솟값은 두 점 (4, 0), (0, 4) 사이의 거리와 같다.



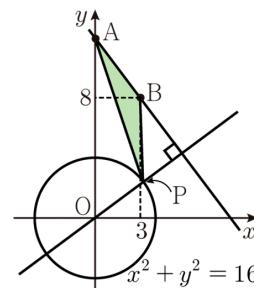
$$\therefore M = 8, m = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore M+m^2 = 40$$

### 95 정답 8

**해설**  $\triangle PAB$ 의 밑변을  $\overline{AB}$ 라 하면

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + (8-12)^2} = 5$ 이고, 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로  $\triangle PAB$ 의 넓이가 최소이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이어야 한다.



직선 AB의 방정식은

$$y - 12 = \frac{8-12}{3-0}(x-0)$$

$$\therefore 4x + 3y - 36 = 0$$

원의 중심 (0, 0)과 직선  $4x + 3y - 36 = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|-36|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{36}{5}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은  $\frac{36}{5} - 4$

따라서  $\triangle PAB$ 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{36}{5} - 4\right) = 8$$

### 96 정답 13

**해설** 원점과 점 (4, 6)을 지나는 직선의 기울기는  $\frac{3}{2}$ 이므로

직선 l의 기울기는  $-\frac{2}{3}$ 이다.

따라서 직선 l의 방정식은  $y - 6 = -\frac{2}{3}(x-4)$

$$\therefore 2x + 3y - 26 = 0$$

원의 중심 (9, 7)과 직선  $2x + 3y - 26 = 0$  사이의

$$\text{거리는 } \frac{|18 + 21 - 26|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{13}$$

원의 반지름의 길이가  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 이므로 점 P와

직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m = \sqrt{13} - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore 4m^2 = 13$$

**97 정답 33**

**해설** 두 점 A(3, 0), B(0, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$\therefore 4x - 3y - 12 = 0 \quad \cdots \textcircled{①}$$

이때 원  $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 중심 (-3, 3)과  
직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|-12 - 9 - 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{33}{5}$$

다음 그림과 같이 원  $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$  위의  
점 P와 직선 AB 사이의 거리는 점 P가

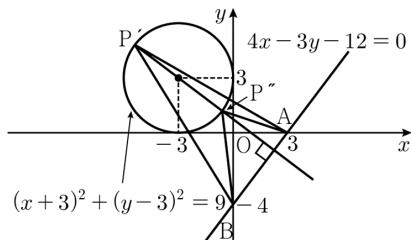
$$\text{점 } P' \text{의 위치에 있을 때 최댓값 } \frac{33}{5} + 3 = \frac{48}{5},$$

$$\text{점 } P'' \text{의 위치에 있을 때 최솟값 } \frac{33}{5} - 3 = \frac{18}{5} \text{을 갖고,}$$

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로 삼각형 ABP의 넓이의  
최댓값 M과 최솟값 m은 각각

$$M = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{48}{5} = 24, m = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{18}{5} = 9$$

$$\therefore M+m = 24+9=33$$



**98 정답 120**

**해설** 원점 O와 직선  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ , 즉  $x + 2y - 6 = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|-6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이가  $\sqrt{5}$ 이므로 정삼각형 ABC의

$$\text{넓이가 최소일 때의 높이는 } \frac{6\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{넓이가 최대일 때의 높이는 } \frac{6\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

따라서 정삼각형 ABC의 높이의 최솟값과 최댓값의 비는

$$\frac{\sqrt{5}}{5} : \frac{11\sqrt{5}}{5}, \text{즉 } 1 : 11 \text{이므로}$$

넓이의 최솟값과 최댓값의 비는  $1^2 : 11^2$ , 즉  $1 : 121$

따라서  $a = 1$ ,  $b = 121$ 이므로

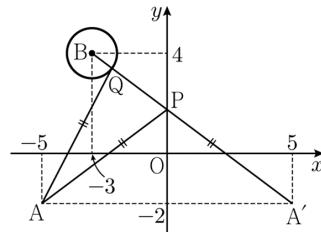
$$\therefore b-a = 121-1 = 120$$

**99 정답  $\frac{33}{4}$**

**해설**  $\overline{BQ} = 1$ 을 만족시키므로 점 Q는 중심이 B(-3, 4)이고  
반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을  
A'(5, -2)라고 하면

$$\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{A'P} + \overline{PQ} \geq \overline{A'Q}$$



즉, 점 A', P, Q, B가 한 직선 상에 있을 때  $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 의  
값이 최소가 된다.

이때 A'(5, -2), B(-3, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4-(-2)}{-3-5}(x-5)-2$$

$$-8y = 6(x-5)+16$$

$$6x+8y-14=0$$

$$3x+4y-7=0$$

이고 점 P는 이 직선의 y절편이므로

$$\therefore P\left(0, \frac{7}{4}\right)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ} = \overline{PB} - \overline{QB}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + \left(4 - \frac{7}{4}\right)^2} - 1$$

$$= \sqrt{9 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{225}{16}} - 1$$

$$= \frac{15}{4} - 1$$

$$= \frac{11}{4}$$

점 A와 직선  $3x+4y-7=0$  사이의 거리는

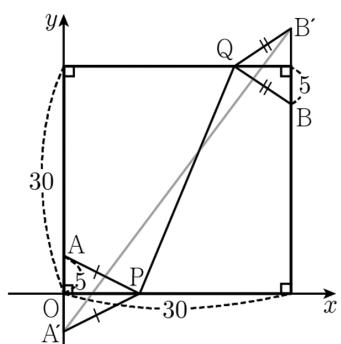
$$\frac{|3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15 - 8 - 7|}{5} = 6$$

따라서 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{4} \cdot 6 = \frac{33}{4}$$

**100 정답** 50m

**해설** 다음 그림과 같이 주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내고  
처음 토끼의 위치를 A, 움직인 후의 토끼의 위치를 B라  
하면



$$A(0, 5), B(30, 25)$$

점 A를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점은

$$A'(0, -5)$$

점 B를 직선  $y = 30$ 에 대하여 대칭이동한 점은

$$B'(30, 35)$$

이때 토끼가  $x$ 축의 벽면을 거치는 지점을 P,  $x$ 축에

대하여 평행한 벽면을 거치는 지점을 Q라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(30-0)^2 + (35+5)^2} \\ &= 50 \end{aligned}$$

따라서 토끼가 움직인 최단 거리는 50m이다.