실시일자	-	유형별 학습	이름
100문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29,41~47,68~71p

함수의 극한 ~ 도함수

빠른정답

01 23	02 16	03 -2
04 3	05 0	06 -2
07 1	08 -1	09 4
10 0	11 $\frac{3}{5}$	12 1
13 0	14 4	15 ④
16 ③	17 $\frac{7}{4}$	18 ⑤
19 -4	20 -1	21 2
22 ④	23 ③	24 ①
25 ②, ③	26 3	27 ④
28 -2	29 5	30 ④
31 67	32 ①	33 ④
34 ①	35 ②	36 ④
37 ①	38 18	39 0
40 ⑤	41 ①	42 ④
43 -16	44 10	45 0
46 ①	47 ②	48 ④
49 ②	50 ④	51 26
52 ②	53 -2	54 ①
55 ③	56 -8	57 18
58 ③	59 ③	60 ⑤
61 ②	62 ⑤	63 2
64 ②	65 ②	66 -9
67 ①	68 4	69 ④
70 ②	71 100	72 ⑤
73 25	74 ③	75 0
76 ④	77 ③	78 ④
79 ⑤	80 ⑤	81 ⑤
82 ③	83 ②	84 ②
85 ③	86 ③	87 ③
88 6	89 6	90 ②
91 ④	92 ①	93 ④
94 21	95 ②	96 ③
97 19	98 15	99 ③
100 30		

실시일자	-	# 유형별 학습	이름
100문제 / DRE수학			

교과서 (수학Ⅱ) - 미래엔 26~29,41~47,68~71p

함수의 극한 ~ 도함수

01 정답 23

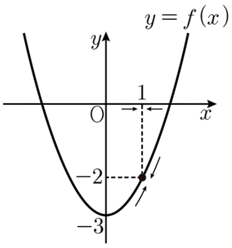
해설 $\lim_{x\to 2}(5x^2+x+1)=5\cdot 2^2+2+1=23$

02 정답 16

해설 $\lim_{x\to 2}(3x^2-4)(x^3-6)=(3\cdot 2^2-4)(2^3-6)=16$

03 정답 -2

해설 $f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}(x^2-3)=-2$

04 정답 3

해설 $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+5)=2^2-3\cdot 2+5=3$

05 정답 0

해설 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 놓으면

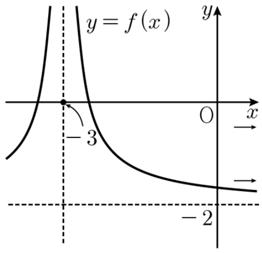
$y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$

06 정답 -2

해설 $f(x)=\frac{1}{|x+3|}-2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{|x+3|}-2\right)=-2$

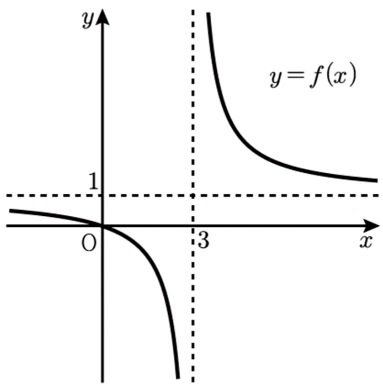


07 정답 1

해설 $f(x)=\frac{x}{x-3}=1+\frac{3}{x-3}$으로 놓으면

$y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x-3}=1$



08 **정답** -1

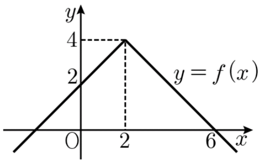
해설 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

09 **정답** 4

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

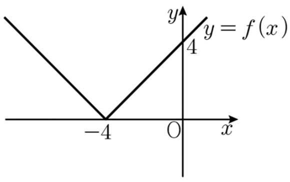
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 4$$



10 **정답** 0

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$$\lim_{x \to -4+} f(x) = 0$$

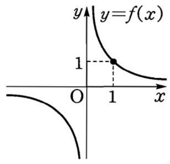


11 **정답** $\frac{3}{5}$

해설 $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}}{x^2-4} = \frac{\sqrt{3+6}}{3^2-4} = \frac{3}{5}$$

12 **정답** 1

해설



$f(x) = \frac{1}{x}$로 놓으면

$y=f(x)$의 그래프에서

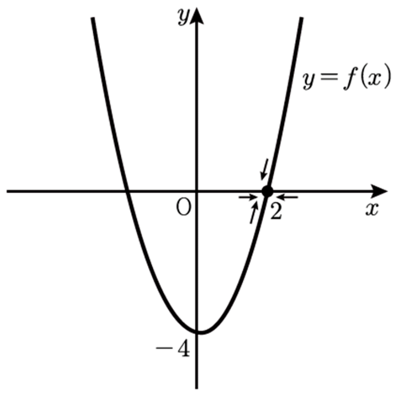
x의 값이 1에 한없이 가까워질 때,

$f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

13 **정답** 0

해설 $f(x) = x^2-4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 2} (x^2-4) = 0$$

14 **정답** 4

해설 $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+14}}{x^2-3} = \frac{\sqrt{2+14}}{2^2-3} = 4$$

15 **정답** ④

해설 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+3) = 4$$

16 정답 ③

해설 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+2)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+2)=6$$

17 정답 $\frac{7}{4}$

해설

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x-3}{4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7-\frac{3}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{7}{4}$$

18 정답 ⑤

해설 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to0-}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+}f(x)=3$

$\therefore\ \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=5$

19 정답 -4

해설

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{x+2}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1-\frac{2}{x}}=-4$$

20 정답 -1

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{1+5x-3x^2}{3x^2}=-1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}=-1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$

21 정답 2

해설 $x=1,\ 2,\ 3$인 점에서 함수 $f(x)$의 연속성을 조사한다.

(ⅰ) $x\to1$일 때의 극한값은 $\lim_{x\to1+}f(x)=3$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$x=1$에서 불연속이다.

(ⅱ) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=4$

$x\to2$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=3$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로

$x=2$에서 불연속이다.

(ⅲ) $x=3$에서의 함숫값은 $f(3)=4$

$x\to3$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to3+}f(x)=4,\ \lim_{x\to3-}f(x)=4$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

즉, $x=3$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 $a=1$

$x=1$ $x=2$에서 불연속이므로 $b=2$

$\therefore\ ab=2$

22 정답 ④

해설 (ⅰ) $x=p$에서는 $\lim_{x\to p}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(ⅱ) $x=q$에서는 $\lim_{x\to q}f(x)\neq f(q)$이므로 불연속이다.

(ⅲ) $x=r$에서는 $f(r)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

따라서 순서대로 적으면 ㄴ, ㄷ, ㄱ이다.

23 정답 ③

해설 (ⅰ) $\lim_{x \to p} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=p$에서 불연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x \to q} f(x)$와 $f(q)$가 존재하지만 $\lim_{x \to q} f(x) \neq f(q)$이므로 $x=q$에서 불연속이다.

(ⅲ) $f(r)$가 정의되어 있지 않으므로 $x=r$에서 불연속이다.

따라서 순서대로 적으면 (나), (다), (가)이다.

24 정답 ①

해설 ① $f(-2)=-4$이고,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x-2) = -4$$이므로

$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.

② $$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2+} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \to -2+} \frac{x+2}{x+2} = 1$$

$$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{x \to -2-} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \to -2-} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$\therefore \lim_{x \to -2+} f(x) \neq \lim_{x \to -2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to -2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

③ $f(-2)=2$이고, $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} 2(x+2)^2 = 0$

$\therefore \lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

④ $f(-2)$가 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

⑤ $\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2+} [x]^2 = (-2)^2 = 4$

$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{x \to -2-} [x]^2 = (-3)^2 = 9$

$\therefore \lim_{x \to -2+} f(x) \neq \lim_{x \to -2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to -2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

25 정답 ②, ③

해설 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

① $f(1)=2$이고 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}=2$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $x=1$에서 연속이다.

② $\lim_{x\to1+}[x]=1$, $\lim_{x\to1-}[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+[x])=2$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+[x])=1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$x=1$에서 불연속이다.

③ $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$x=1$에서 불연속이다.

④ $f(1)=1$이고

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-2x+2)=1$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $x=1$에서 연속이다.

⑤ $f(1)=2$이고

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x}=2$$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 불연속인 것은 ②, ③이다.

26 정답 3

해설 모든 양수 x에 대하여 $3-\frac{2}{x}\le f(x)\le 3+\frac{2}{x}$이고

$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)=3$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

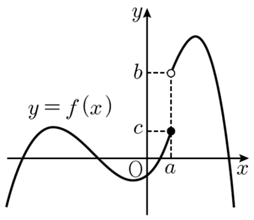
27 정답 ④

해설 다음 그림에서

$f(a)=c$, $\lim_{x\to a+}f(x)=b$, $\lim_{x\to a-}f(x)=c$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.



28 정답 -2

해설 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3}=\frac{\{-2(3+\Delta x)+3\}-(-3)}{\Delta x}=\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$$

29 정답 5

해설 $f(x)=4x^2-3x$에서

$f'(x)=8x-3$

$\therefore f'(1)=8\cdot1-3=5$

30 정답 ④

해설 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+4$ 위의 점 $(2,\ 8)$의 접선의 기울기는 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^3-3x^2+4-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x^2+x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(2x^2+x+2)=8+2+2=12$$

따라서 접선의 기울기는 12이다.

31 정답 67

해설 다항함수의 미분법

$f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$에서

$f'(x)=4x(x^2+x-2)+(2x^2-1)(2x+1)$

$\therefore f'(2)=32+35=67$

32 정답 ①

해설 $f'(x)=4x-3$이므로 $f'(1)=4-3=1$

33 정답 ④

해설 미분계수 계산하기

$f'(x)=4x^3$이므로 $f'(1)=4$

34 정답 ①

해설 $f(x)=3x^3-5x^2+8$에서

$f'(x)=9x^2-10x$

$\therefore f'(2)=36-20=16$

35 정답 ②

해설 $f'(x)=1\cdot(x^2-x+2)+(x+2)(2x-1)$이므로

$f'(1)=5$

36 정답 ④

해설 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에서

$f'(x)=2x\cdot(3x^2-x)+(x^2+1)\cdot(6x-1)$

$\therefore f'(1)=2\cdot2+2\cdot5=14$

37 정답 ①

해설

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x}\right)\times\frac{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$=\frac{-6}{1+1}=-3$$

38 정답 18

해설 $\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-a)}{x^2-bx+18}=2$ $\cdots$ ㉠

$x\to3$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^2-bx+18)=0$이므로 $b=9$

b의 값을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-a)}{(x-3)(x-6)}=\lim_{x\to3}\frac{x-a}{x-6}=2$

$\therefore a=9$

$\therefore a+b=18$

39 정답 0

해설

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$$

40 정답 ⑤

해설
$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}(\sqrt{x^2+2}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2}(\sqrt{x^2+2}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\left(x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left\{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)\right\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$
$$=\frac{2}{1(1+1)}=1$$

41 정답 ①

해설 함수의 극한 이해하기
$$\lim_{x\to2}\frac{2xf(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2x}{x+3}\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$
$$=\frac{4}{5}\cdot15=12$$

42 정답 ④

해설
$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x^2}{x+2}+a\right)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+2a}{(x-2)(x+2)}=b$$
$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+2a)=0$이므로 $4+4a=0$

$\therefore a=-1$
$$\therefore b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore b-a=\frac{3}{4}-(-1)=\frac{7}{4}$$

43 정답 -16

해설
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{x}=8$에서

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$
$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x+a)=a=8$$
따라서 $f(x)=x^2+8x=(x+4)^2-16$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=-4$일 때 -16이다.

44 정답 10

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=2$에서 $f(x)$는

이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또한, $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)}{x}=8$에서 $x\to0$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(1+x)=f(1)=0$

이때 $f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x(x+a+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}2(x+1+a)$$
$$=2(1+a)=8$$

이므로 $1+a=4$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x+3)$이므로

$f(x)=2\cdot1\cdot5=10$

45 정답 0

해설 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le1$이므로

$-1\le f(x)\le1,\ -2x^2\le2x^2f(x)\le2x^2$

이때 $\lim_{x\to0}(-2x^2)=\lim_{x\to0}2x^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}2x^2f(x)=0$

46 정답 ①

해설 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$

$f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)=b-4$이므로

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$$

$\lim_{x\to2-}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7$$

이므로

$b-4=7$

$\therefore\ b=11$

따라서 $a=-10,\ b=11$이므로

$a+b=1$

47 정답 ②

해설 ㄱ. 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 두 함수 $2f(x),\ 3g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $2f(x)-3g(x)$도 연속이다.

ㄴ. $f(x),\ g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 함수 $f(x)-g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=-3x^2,\ g(x)=x$일 때, 두 함수 $f(x),\ g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(x)+g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 하지만 $f(x)+3x^2$은 실수 전체의 집합에서 0이므로 함수 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+3x^2}$은 실수 전체의 집합에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

48 정답 ④

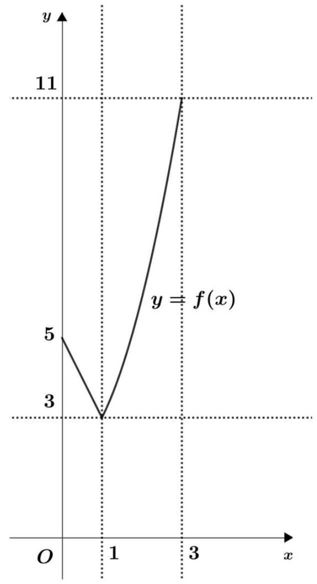
해설 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=2$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로
$\lim_{x\to2}f(x)=8-f(2)$에서
$f(2)=8-f(2)$
$2f(2)=8$
$\therefore\ f(2)=4$

49 정답 ②

해설 $f(x)=\dfrac{4}{x-3}$는 $x=3$에서 불연속이고, 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.
①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
② $5<x\le6$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 없다.
③ $-1\le x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은
$f(-1)=\dfrac{4}{-1-3}=-1$
따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ②이다.

50 정답 ④

해설 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-ax+5)=-a+5$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+a)=a+1$
$f(1)=a+1$
$-a+5=a+1$ 에서
$a=2$
$f(x)=\begin{cases}-2x+5 & (x<1)\\ x^2+2 & (x\ge1)\end{cases}$ 이므로
닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $M=f(3)=11$, $m=f(1)=3$ 이므로
$M+m=14$

51 정답 26

해설 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$
$\therefore\ a+2=-2+b$ $\cdots$ ㉠
또, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$
$\therefore\ 3a+2=b$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=5$
$\therefore\ a^2+b^2=26$

52 정답 ②

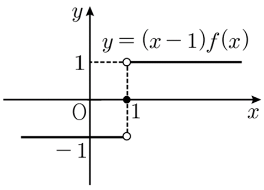
해설

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{(x-1)^2} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-1} & (x<1)\\ 0 & (x=1)\\ \dfrac{1}{x-1} & (x>1)\end{cases}$$

이므로

$$(x-1)f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ 0 & (x=1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=(x-1)f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 실수에서 연속이다.



즉, 불연속이 되는 점의 개수는 1이다.

53 정답 -2

해설 (ⅰ) $x>5$일 때, $f(x)=\dfrac{x-5}{-(x-5)}=-1$

(ⅱ) $x<5$일 때, $f(x)=\dfrac{-(x-5)}{-(x-5)}=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim\limits_{x\to5+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to5-}f(x)=1$이므로

$a=-1$, $b=1$

$\therefore\ a-b=-2$

54 정답 ①

해설 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+4f(x)}{3x^2-f(x)}$의 분자와 분모를 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+4f(x)}{3x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\dfrac{4f(x)}{x^2}}{3-\dfrac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}1+4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}}{\lim\limits_{x\to0}3-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{1+4a}{3-a}=-3$$

이므로 $1+4a=-9+3a$

$\therefore\ a=-10$

55 정답 ③

해설

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-5x-10}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-5x-10}}{(x-\sqrt{x^2-5x-10})(x+\sqrt{x^2-5x-10})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-5x-10}}{5x+10}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{5}{x}-\dfrac{10}{x^2}}}{5+\dfrac{10}{x}}=\frac{1+1}{5+0}=\frac{2}{5}$$

56 정답 -8

해설 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^2}{x}=a$에서

$f(x)$는 이차항의 계수가 2, 일차항의 계수가 a인 이차식임을 알 수 있다.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=4$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이므로

$f(x)\to0$에서 $f(3)=0$이다.

즉, $f(x)=2(x-3)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(x+k)}{x-3}=\lim_{x\to3}2(x+k)$$

$$=2(3+k)=4$$

$\therefore\ k=-1$

따라서 $f(x)=2(x-3)(x-1)=2x^2-8x+6$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x+6-2x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x+6}{x}=-8$$

57 정답 18

해설 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{ax}-b}{x-3}=1 \quad \cdots ㉠$$

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(\sqrt{ax}-b)=0$이므로

$\sqrt{3a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{3a} \quad \cdots ㉡$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{3a}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{a}(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3a}}{6}$$

$\frac{\sqrt{3a}}{6}=1$에서 $\sqrt{3a}=6$

$\therefore a=12$

$a=12$를 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=12+6=18$

58 정답 ③

해설 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\{f(x)-x^2\}=0$에서

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}-1\right\}=0$, 즉 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+x}{3f(x)-2x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot\frac{f(x)}{x^2}+\frac{1}{x}}{3\cdot\frac{f(x)}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{4\cdot1}{3\cdot1}=\frac{4}{3}$$

59 정답 ③

해설 $f(x)=\frac{5}{x+2}$는 $x=-2$에서 불연속이고, 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.

①, ④, ⑤ $f(x)$는 주어진 구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② $-3\le x<-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 $f(-3)=\frac{5}{-3+2}=-5$

③ $-2<x\le2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 최댓값은 없다.

따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ③이다.

60 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)=|2x-1|-2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=-1<0,\ f(2)=1>0$이므로

사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=\sqrt{3}-2<0,\ f(2)=\sqrt{7}-2>0$이므로

사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=\frac{4}{3x-1}-1$로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=1>0,\ f(2)=-\frac{1}{5}<0$이므로

사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 적어도 하나의 실근을 갖는다.

61 정답 ②

해설 함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$

이때 $\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a+}(3x-a)^2=4a^2$,

$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(x-3)^2=(a-3)^2$,

$\{f(x)\}^2=(3a-a)^2=4a^2$이므로

$4a^2=(a-3)^2$, $(a-1)(a+3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-3+1=-2$

62 정답 ⑤

해설 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=10+9+8+\cdots+2+1$$
$$=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

63 정답 2

해설 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3^2-3+1)-(1^2-1+1)}{3-1}$$
$$=\frac{7-1}{2}=3 \quad \cdots ㉠$$

또, $f(x)=x^2-x+1$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^2-(a+h)+1\}-(a^2-a+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h-1)=2a-1 \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $3=2a-1$이므로

$a=2$

64 정답 ②

해설 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$에서 극한값이 존재하고, $h\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{h\to 0}f(h)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=3$$

65 정답 ②

해설 $\lim_{h\to 1}\frac{f(h)-2}{h-1}=7$에서 극한값이 존재하고, $h\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{h\to 1}f(h)=2$이므로 $f(1)=2$

$$\therefore \lim_{h\to 1}\frac{f(h)-2}{h-1}=\lim_{h\to 1}\frac{f(h)-f(1)}{h-1}$$
$$=f'(1)=7$$

66 정답 -9

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2-9x-1-(-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-8x^2-9x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2-8x-9)=-9$$

이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

$\tan\theta=-9$

67 정답 ①

해설 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이고, 미분가능하다.

(ⅰ) $x=1$에서 연속

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서

$a+b=4$ … ㉠

(ⅱ) $x=1$에서 미분가능

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax^2+b-5}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+(a+1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{x^2+(a+1)x+(a+1)\}=2a+3$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{7x-7}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{7(x-1)}{x-1}$$
$$=7$$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$에서

$2a+3=7$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=2$, $b=2$

따라서 $f(0)=2$

68 정답 4

해설 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 0)$을 지나므로

$a+b+c=2$ … ㉠

$4a+2b+c=0$ … ㉡

또, 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(2)=1$

$f'(x)=2ax+b$이므로

$4a+b=1$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-11$, $c=10$

$\therefore\ a-b-c=3-(-11)-10=4$

69 정답 ④

해설 $f(-1)=8$에서

$a-b=8$ … ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(2)=7$에서

$4a+b=7$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-5$

$\therefore\ ab=-15$

70 정답 ②

해설 $x=a$에서 미분가능하므로 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to a}(bx^2+1)=\lim_{x\to a}cx$

$\therefore\ a^2b+1=ac$ … ㉠

$x\ge a$ 일 때, $f'(x)=2bx$

$x<a$ 일 때, $f'(x)=c$ 이므로

$\lim_{x\to a}(2bx)=\lim_{x\to a}c$

$\therefore\ 2ab=c$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2b+1=2a^2b$

$\therefore\ a^2b=1$

71 정답 100

해설 $f'(x)=-1+2x-3x^2+4x^3-\cdots+200x^{199}$

$\Rightarrow f'(1)=-1+2-3+4-5+\cdots+200$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-199+200)$

$=1+1+\cdots+1=100$

72 정답 ⑤

해설 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$f'(-3)=\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$
$$=f'(3)=4$$

73 정답 25

해설 $f(x)=3x^7-2x^4+1$을 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하자. 또 이차식으로 나누었으므로 나머지는 일차식 또는 상수가 된다. 따라서 $R(x)$를 $ax+b$라고 하면

$3x^7-2x^4+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b \cdots$ ①

①의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-3-2+1=-a+b$

$\therefore\ a-b=4 \qquad \cdots$ ②

①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$21x^6-8x^3=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$21+8=a,\ \therefore\ a=29$

$a=29$를 ②에 대입하면

$b=25$

따라서 $R(x)=ax+b=29x+25$

$\therefore\ R(0)=25$

74 정답 ③

해설 그래프에서 함수의 극한을 구할 수 있는가?

직선 $y=x+1$과 수직인 직선은 기울기가 -1이므로 점 $P(t,\ t+1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-1(x-t)$

$y=-x+2t+1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2t+1)$이므로

$A(-1,\ 0)$과 $Q(0,\ 2t+1)$에서

$\overline{AQ}^2=1+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$이고

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

75 정답 0

해설 점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0)$이라고 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.

또, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은 $ax+by=r^2$이다.

접선의 방정식에 $y=0$을 대입하면 $ax=r^2$에서

$x=\dfrac{r^2}{a}$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{r^2}{a},\ 0\right)$이므로

$\overline{PR}=\dfrac{r^2}{a}-a$

이때 점 A의 좌표가 $(r,\ 0)$이므로 $\overline{PA}=r-a$이고,

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a\to0+$이다.

$$\therefore\ \lim_{a\to0+}\frac{\overline{PA}}{\overline{PR}}=\lim_{a\to0+}\frac{r-a}{\frac{r^2}{a}-a}=\lim_{a\to0+}\frac{a(r-a)}{r^2-a^2}$$

$$=\lim_{a\to0+}\frac{a}{r+a}=0$$

76 정답 ④

해설 치환을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$

$$=4$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$$

77 정답 ③

해설
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x^2})}{(\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+x^2})}\times\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\{(1+x)-(1+2x^2)\}(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{\{(1-2x)-(1+x^2)\}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{-x(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{(1-2x)(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x^2})}{(2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})}\right\}$$
$$=-\frac{1\cdot2}{2\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

78 정답 ④

해설 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2+3x}=2$이므로
$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{x^2+3x}\times(x+3)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2+3x}\times\lim_{x\to0}(x+3)$$
$$=2\times3=6$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{x\{f(x)+2xg(x)\}}{f(x)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x\{f(x)+2xg(x)\}}{x^3}}{\dfrac{f(x)g(x)}{x^3}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{2g(x)}{x}}{\dfrac{f(x)}{x^2}\times\dfrac{g(x)}{x}}$$
$$=\frac{2+2\times6}{2\times6}=\frac{7}{6}$$

79 정답 ⑤

해설 함수의 극한값 구하기
$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\lim_{t\to1}\frac{2-\dfrac{2}{t}}{t-1}=2$$

80 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면
$g(x)=f(x)-h(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로
$g(x)$도 연속함수이다. (참)
ㄴ. $\frac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)h(x)$
이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다. (참)
ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}g(x)=b$로 놓으면
$g(x)$가 연속이므로 $b=g(a)$
또, $f(x)$가 연속함수이므로
$\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))=f(b)$
따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

81 정답 ⑤

해설 ㄱ. 두 케이블카가 동시에 출발하고, 속력이 일정하므로 움직인 거리가 같다. 따라서 두 케이블카는 산의 정상과 아래쪽 중간 지점에서 만난다.
ㄴ. ㄱ에 의하여 두 케이블카가 서로 만날 때까지 걸리는 시간은 전체 운행 시간의 $\frac{1}{2}$이다.
ㄷ. 사잇값 정리에 의하여 두 케이블카가 만나는 곳은 산의 정상과 아래쪽 사이의 한 곳이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

82 정답 ③

해설 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,\ 5]$ 에서 연속이고
$$2f(0)+1=-1<0,\ 2f(1)+1=\frac{1}{2}>0$$
$$2f(2)+1=\frac{3}{2}>0,\ 2f(3)+1=3>0$$
$$2f(4)+1=\frac{1}{3}>0,\ 2f(5)+1=-1<0$$
이므로 방정식 $2f(x)+1=0$ 은 열린 구간 $(0,\ 1)$, $(4,\ 5)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $2f(x)+1=0$ 은 열린 구간 $(0,\ 5)$ 에서 적어도 2 개의 실근을 가지므로 k 의 값은 2 이다.

83 정답 ②

해설 (ⅰ) x가 유리수일 때, $f(x)=x^3$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^3=a^3$$

(ⅱ) x가 무리수일 때, $f(x)=x^4$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x^4=a^4$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면

$a^3=a^4$이어야 하므로

$a^4-a^3=0$, $a^3(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 실수 a의 개수는 2이다.

84 정답 ②

해설 $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x-3)}{x^2-3x}=5$에서 $x-3=t$로 치환하면,

$\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t(t+3)}=5$ 그러므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3\cdot 5=15$$

85 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$

(α, β는 상수)라 하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a}f(x)$

$=\lim_{x\to a}g(x)$

$=\beta-\alpha$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 상수)라 하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$

$=2\lim_{x\to a}f(x)=\alpha+\beta$

$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x$, $g(x)=[x]$, a는 정수라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}x=a$로 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.

그런데 $\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}[x]$이므로

$\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

86 정답 ③

해설 ㄱ. $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다고 가정하고

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)로

놓으면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=\alpha+\beta$$

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$가 존재하므로 가정에

모순이다. (참)

ㄴ. $f(x)+2g(x)=h(x)$, $2f(x)+g(x)=k(x)$로

놓고 $\lim_{x\to a}\{f(x)+2g(x)\}=\alpha$,

$\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}k(x)=\beta$

이때 $f(x)=\dfrac{2k(x)-h(x)}{3}$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{2k(x)-h(x)}{3}=\frac{2\beta-\alpha}{3}$$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다. (참)

ㄷ. [반례]

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ge 0)\\ x-1 & (x<0)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}x+2 & (x\ge 0)\\ x-2 & (x<0)\end{cases}$이면

$2f(x)-g(x)=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 0}\{2f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to 0}f(x)$와 $\lim_{x\to 0}g(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

87 정답 ③

해설 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{2x+a}}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{2x+a}\}=0$이므로

$\sqrt{9}-\sqrt{2+a}=0$

$\sqrt{2+a}=3,\ 2+a=9 \qquad \therefore\ a=7$

$a=7$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{2x+7}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{2x+7}\}\{\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{2x}}{(x+1)(x-1)\{\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{2x+7}\}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)\{\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{2x+7}\}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)\{\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{2x+7}\}}$$
$$=\frac{1}{2(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\frac{1}{12}=b$$
$$\therefore\ ab=7\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

88 정답 6

해설 $A(x)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot y=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}x^2$

또한 삼각형 OPR의 넓이 $B(x)$는

$B(x)=\frac{1}{2}\cdot6\cdot x=3x$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{xB(x)}{A(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{2}x^2}=6$$

89 정답 6

해설 $x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}$이고

$f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}$

따라서 분자 x^3+ax+b는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 한다.

나눗셈의 정리에서 $x^3+ax+b=(x-2)^2(x+4)$

$$\therefore\ f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+4)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}(x+4)=6$$

90 정답 ②

해설 연속함수와 주기함수를 활용하여 함숫값 계산하기

(ⅰ) $f(0)=f(4)$

$0=16+4a+b$

(ⅱ) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$3=1+a+b$

$a=-6,\ b=8$

$\therefore\ f(10)=f(2)=0$

91 정답 ④

해설 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to3+}3(x-3)=\lim_{x\to3-}(-x^2+ax+b)$

$\therefore\ -9+3a+b=0\ \cdots$ ㉠

또, $f(x-1)=f(x+3)$에 x대신 $x+1$을 대입하면

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$\therefore\ b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$-9+3a+3=0$

$\therefore\ a=2$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3 & (0\le x<3)\\ 3(x-3) & (3\le x\le4)\end{cases}$$ 이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$

92 정답 ①

해설 ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1-} g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3)=1\times2=2$

$\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=3$, $\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=3$에서

$\lim_{x\to3} f(x)g(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=4$이고,

ㄱ에 의하여 $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=2$이다.

따라서 $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)\neq \lim_{x\to1+} f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의하여 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

93 정답 ④

해설 $x^3+a-9=0$에서 $f(x)=x^3+a-9$라 하면

열린구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가져야 하므로 $f(-1)f(2)<0$이어야 한다.

$(a-1)(a-10)<0$

$1<a<10$에서 정수 a의 개수는 8개다.

94 정답 21

해설 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

(분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-2)=0$

$\therefore a=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{1}{4}=b$$

$\therefore 10a+4b=10\cdot2+4\cdot\frac{1}{4}=21$

95 정답 ②

해설 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$인 점에서 접선의 기울기는 $f'(0)$과 같고 이 접선은 두 점 $(0,\ 4)$와 $(-2,\ 6)$을 지나므로

$f'(0)=\frac{4-6}{0+2}=-1$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(5h)-f(0)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(5h)-f(0)}{5h}\cdot\frac{5}{2}$$

$$=\frac{5}{2}f'(0)=\frac{5}{2}\cdot(-1)$$

$$=-\frac{5}{2}$$

96 정답 ③

해설 $\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)-5}{x^2-x}=2$에서 극한값이 존재하고,

$x\to0$일 때 (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x+1)-5\}=0$이므로 $f(1)=5$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x+1)-5}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x+1)-f(1)}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}\cdot\frac{1}{x-1}\right\}$$

$$=f'(1)\cdot(-1)$$

$-f'(1)=2$이므로 $\therefore f'(1)=-2$

$\therefore f(1)-f'(1)=5-(-2)=7$

97 정답 19

해설 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+4}=3$이므로

$f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 3인 삼차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

조건 (다)에서 $f(0)=0$이므로 $b=0$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2+ax \quad \cdots ㉠$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\\&=f'(1)\cdot\frac{1}{2}=12\end{aligned}$$
이므로

$f'(1)=24 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $f'(x)=3x^2+6x+a$,

㉡에서 $f'(1)=24$이므로

$3+6+a=24$

$\therefore\ a=15$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+15x$이므로

$f(1)=1+3+15=19$

98 정답 15

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$y=x^2$과 $y=tx$를 연립하여 정리하면

$x(x-t)=0$이고 $x>0$이므로 $x=t$

따라서 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$이다.

이때 원점을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=t\sqrt{1+t^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}&=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OQ}}\\&=\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

$x^2+y^2=2$와 $y=x^2$을 연립하여 정리하면

$(y+2)(y-1)=0$이고 $y>0$이므로

$y=1$

즉, $x^2=1$에서 $x>0$이므로

$x=1$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(1,\ 1)$이다.

점 A에서 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$0<t<1$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$$

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$는

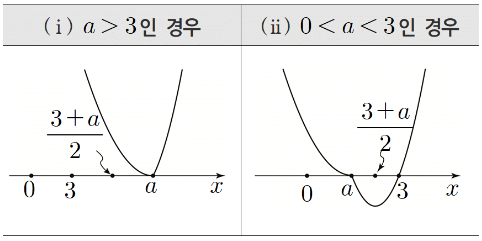
$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}\right)\cdot\frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ k&=\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}\\&=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}}\\&=\lim_{t\to1-}\frac{2-t^2(1+t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}\\&=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1-t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}\\&=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1+t)}{2\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}\\&=\frac{3\cdot2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

즉, $20k=20\cdot\frac{3}{4}=15$

99 정답 ③

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 가지 경우로 나눌 수 있다.



(ⅰ) $a>3$인 경우

함수 $f(x)$는 $0<x<\frac{3+a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0<a<3$인 경우

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $\left[0, \frac{3+a}{2}\right]$에서 연속이고, $f(0)>0$, $f\left(\frac{3+a}{2}\right)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 0과 $\frac{3+a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의해 $0<a<3$인 경우의 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(3-a)\cdot\left\{-f\left(\frac{3+a}{2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(3-a)\cdot\left(\frac{a-3}{2}\right)\left(\frac{3-a}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}(3-a)^3=\frac{1}{8}$$

$(3-a)^3=1$, 즉 $a=2$

따라서 $f(3a)=f(6)=(6-3)(6-2)=12$

100 정답 30

해설 $x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-2$ $\quad\therefore f(0)=2$

이때

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-2-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}+1$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1=f'(0)+1$$

이므로 $f'(0)+1=4$ $\quad\therefore f'(0)=3$

자연수 k에 대하여

$$f'(k)=\lim_{h\to0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(k)+f(h)+kh-2-f(k)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}+k$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+k$$

$$=f'(0)+k=k+3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}f'(k)=\sum_{k=1}^{5}(k+3)=\frac{5\cdot6}{2}+15=30$$