현대고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 집합 $A=\{a,\ \{b,\ c\},\ c\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

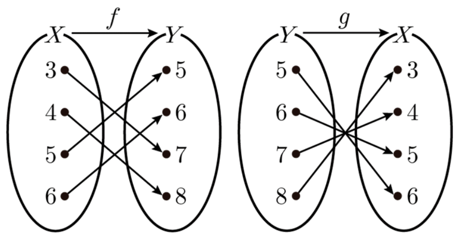
① $\{a,\ b,\ c\} \subset A$　　② $\{b,\ c\} \subset A$
③ $\{a,\ c\} \in A$　　④ $\{\{b,\ c\},\ c\} \in A$
⑤ $\varnothing \subset A$

02 두 집합 $A=\{2,\ 5,\ a\}$, $B=\{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $B-A=\{6\}$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a는 상수이다.)

① $A=\{2,\ 4,\ 5\}$　　② $B=\{4,\ 5,\ 6\}$
③ $A \cap B=\{4,\ 5\}$　　④ $A \cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$
⑤ $A-B=\{2,\ 5\}$

03 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{y \mid y$는 정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(n)=(n^3$을 7로 나눈 나머지)로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하시오.

04 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ g)(6)$의 값을 구하시오.



05 두 집합 $A=\{x \mid 2 \le x < 5\}$, $B=\{x \mid a < x < 2a+7\}$에 대하여 $A \subset B$가 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하시오.

06 다음 명제 중 그 부정이 참인 것은?

① 4는 짝수이다.
② $3<5$
③ $(-2)^4+2=2^4+2$
④ 평행하는 두 직선과 한 직선이 만날 때 생기는 동위각의 크기는 다르다.
⑤ 모든 정사각형은 직사각형이다.

07 두 조건 p, q가
'p : $|x-2| \le 5$', 'q : $x^2+ax+b \le 0$'
일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

08 다음 보기 중 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)의 개수는?

<보기>

(가) $x^2-xy+y^2 \ge 0$
(나) $x^2-x+1>0$
(다) $|a+b| \le |a|+|b|$
(라) $a+b \ge 2\sqrt{ab}$
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$
(바) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개
④ 3개 ⑤ 2개

09 $x>3$일 때, $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12
④ 15 ⑤ 17

10 함수 $f(x)=ax+b$ $(a<0)$에 대하여 $(f \circ f)(x)=9x+4$일 때, $f(-2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(1)=5$, $f^{-1}(7)=2$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

12 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

13 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}=\frac{5x+2}{x^2-x-2}$$

가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $x\neq-1$, $x\neq2$)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

14 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나고 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$일 때, abc의 값을 구하시오.

15 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점$(1,\ 3)$을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

16 두 집합 A, B는 다음과 같고, 집합 X의 원소가 집합 A의 원소에는 속하지만 집합 B의 원소에는 속하지 않을 때 집합 X의 원소들의 합은?

보기

$\mathrm{A}=\{x\,|\,x$는 10 이하의 소수$\}$,
$\mathrm{B}=\{x\,|\,x$는 10의 : 약수$\}$

① 0 ② 2 ③ 5
④ 10 ⑤ 12

17 $\mathrm{U}=\{x\,|\,x$는 5 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $\mathrm{A}=\{1,2,4,5\}$, $\mathrm{B}=\{2,3,5\}$ 일 때, $\{(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup\mathrm{A}\}\cap\mathrm{B}^c$은?

① $\{1\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{1,4\}$
④ $\{2,5\}$ ⑤ $\{1,4,5\}$

18 두 집합 $\mathrm{A}=\{x|x$는 8의 배수$\}$, $\mathrm{B}=\{x|x$는 k의배수$\}$에 대하여 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}$인 조건을 만족하는 자연수 k의 값으로 적당하지 않은 것은?

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

19 전체집합 U 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A)=18$, $n(A^C \cap B)=7$, $n((A-B)\cup(B-A))=19$일 때, $n(A\cap B)$의 값은?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

20 [2021년 3월 고2 19번 변형]
자연수 n에 대한 조건 '$4 \le x \le 7$인 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-10x+n \ge 0$이다.'가 참인 명제가 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 21　② 22　③ 23
④ 24　⑤ 25

21 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 서로 다른 세 함수 f, g, h는 각각 일대일대응, 상수함수, 항등함수이고
$f(0)=g(1)=h(-1)$, $f(0)-g(0)=f(-1)$을 만족할 때, $f(1)+g(1)+h(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

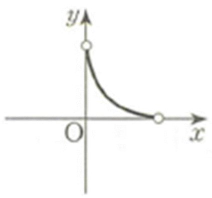
22 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때 함수 $f: X \to X$ 중에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \ge 3$을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

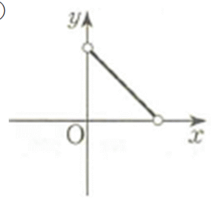
23 두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=2x-5$일 때, $(h \circ f)(x)=g(x)$를 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여 $h(-2)$의 값을 구하시오.

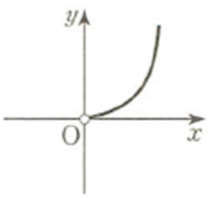
24 실수 전체의 집합 R에서 R로의 세 함수 f, g, h는 모두 일대일대응이고 $f(x)=5x+2$이다.
$h \circ g \circ f=h$가 성립할 때, $g^{-1}(1)$의 값을 구하시오.

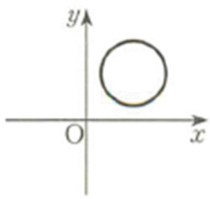
25 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=ax-b$에 대하여 $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=2$, $(g\circ f^{-1})(2)=4$일 때, $a+3b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

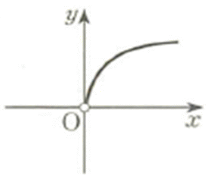
26 제1사분면 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$를 만족하는 점 P가 그리는 도형의 모양은?

①


②


③


④


⑤


27 함수 $y=\dfrac{3x+k-9}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

28 분수함수 $y=\dfrac{x+k-1}{x-1}$ $(k\neq0)$ 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.

② $(1,1)$에 대하여 대칭이다.

③ $|k|$가 클수록 곡선은 $(1,1)$에 가까워진다.

④ 점근선은 $x=1$, $y=1$ 이다.

⑤ $y=-x+2$ 에 대하여 대칭이다.

29 두 실수 x, y가 $x+y=-4$, $xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 의 값은?

① $-4\sqrt{2}$　② $-2\sqrt{2}$　③ $-\sqrt{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{2}$

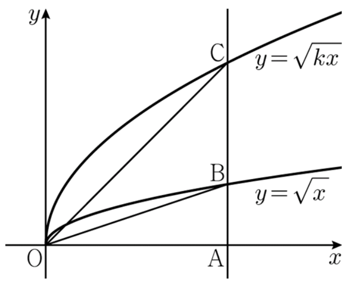
30 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+a & (x<3)\\ \dfrac{2x+3}{x-2} & (x\geq 3)\end{cases}$ 이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 치역은 $\{y\mid y>2\}$이다.
> (나) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

$f(2)f(k)=30$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

31 [2024년 3월 고2 14번/4점]
그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 15　② 18　③ 21
④ 24　⑤ 27

32 직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

33 [2021년 3월 고2 28번/4점]
전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

> (가) $A=\{3,\ 4,\ 5\}$, $A^C\cup B^C=\{1,\ 2,\ 4\}$
> (나) $X\subset U$이고 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 1이다.

34 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 A의 부분집합의 개수를 $s(A)$라 하자. $U=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

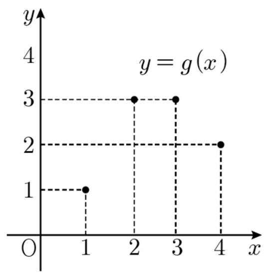
> ㄱ. $s(A)=8$이면 $s(A^C)=16$
> ㄴ. $A\subset B$이면 $s(B^C)\leq s(A^C)$
> ㄷ. $s(A\cup B)=s(A)+s(B)$이면 $A\cap B=\varnothing$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$,
$Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$에 대하여
X에서 Y로의 함수 f가 다음 조건을 만족할 때,
함수 f의 개수를 구하시오.

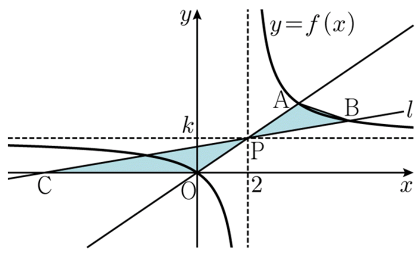
> (가) $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
> (나) $f(1)=2$
> (다) 집합 X의 임의의 원소 a에 대하여
> $\dfrac{12}{f(a)} \in \{f(x) \mid x \in X\}$

36 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여
두 함수 $f: X \to X$, $g: X \to X$가 있다.
함수 $y=f(x)$는 $f(2)=1$을 만족시키고
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여
함수 $h: X \to X$를 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (g(x) > f(x)) \end{cases}$라
정의하자. 함수 $y=h(x)$가 일대일대응일 때,
$f(1)+h(3)$의 값을 구하시오.

37 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{2k}{x-2}+k$ $(k>2)$의
그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2, k)$에 대하여 직선 OP와
함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이
아닌 점을 A라 하자. 점 P를 지나고 원점으로부터 거리가
1인 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 제1사분면에서
만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 PBA의 넓이를 S_1, 삼각형 PCO의 넓이를 S_2라
할 때, $2S_1=S_2$이다. 상수 k에 대하여 $35k^2$의 값을
구하시오. (단, O는 원점이다.)



38 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+b$에 대하여
함수 $y=\left|f(x-a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여
대칭일 때, $a+f(b)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a \neq 0$이다.)

① $\dfrac{13}{6}$ ② $\dfrac{17}{6}$ ③ $\dfrac{7}{2}$
④ $\dfrac{25}{6}$ ⑤ $\dfrac{29}{6}$

39 함수 $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x-1} & (x \geq 1) \\ \sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$에 대하여 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=-15$를 만족시키는 상수 a의 값에 대하여 $\frac{1}{3}a^2$의 값을 구하시오.

40 [2020년 11월 고1 29번/4점]
전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A)=n(B)=8$, $n(A\cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 9의 배수가 아니다.
(다) 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 10의 배수가 아니다.

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$, 집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구하시오.

41 [2022년 3월 고2 30번/4점]
최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
방정식 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$의 모든 실근의 집합을 A라 하고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 집합을 B라 하면 두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여 $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{\alpha, \beta+3\}$이다. 상수 k에 대하여 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 이 세 실근의 합이 12일 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오.

42 [2023년 11월 고1 21번/4점]
$n(U)=5$인 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $n(B\cap C)=2$, $n(B-A)=1$, $n(C-A)=2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $n(A\cap B\cap C)\neq 0$
ㄴ. $n(A\cap B\cap C)=2$이면 $n(C)=4$이다.
ㄷ. $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은 42이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43 [2017년 3월 고3 문과 20번 변형]
실수 x에 대한 두 조건
$p: x^2+2x-3\leq 0$,
$q: x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2>0$
이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 a의 값의 범위는 $p<a\leq q$ 또는 $r\leq a<s$이다. 이때 $p+q+s+r$의 값은?

① -3　② $-\frac{7}{2}$　③ -4
④ $-\frac{9}{2}$　⑤ -5

44 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수
$f(x)=3-|x^2-2|$, $g(x)=|x-1|-1$
에 대하여 $h=g\circ f$라 할 때, 방정식
$2\{h(x)\}^3-\{h(x)\}^2-2h(x)+1=0$
의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

45 [2018년 11월 고1 30번 변형]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여
함수 $f: X \to X$가 역함수가 존재하고, 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $x=1, 2, 5$일 때,
$(f \circ f)(x)+2f^{-1}(x)=3x$이다.
(나) $f(5) \neq 5$

$f(3) \cdot \{f(4)+f(6)\}$의 값을 구하시오.

46 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과
곡선 $y=-\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만나고,
이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(4)+f(6)=\dfrac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

47 함수 $f(x)=\sqrt{3x+4}$에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A,
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B,
두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ 6
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

현대고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ⑤	03 7
04 5	05 3	06 ④
07 84	08 ③	09 ⑤
10 ④	11 6	12 ④
13 ②	14 2	15 ①
16 ④	17 ③	18 ④
19 ②	20 ①	21 ③
22 18	23 $-\frac{23}{3}$	24 7
25 -11	26 ①	27 ②
28 ③	29 ⑤	30 9
31 ⑤	32 ①	33 11
34 ①	35 12	36 5
37 64	38 ②	39 1
40 63	41 50	42 ⑤
43 ④	44 13	45 48
46 89	47 ③	

현대고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
47문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 **정답** ⑤

해설 ① $\{a, \{b, c\}\} \subset A$
② $\{b, c\} \in A$
③ $\{a, c\} \subset A$
④ $\{\{b, c\}, c\} \subset A$

02 **정답** ⑤

해설 $B-A=\{6\}$에서 $4 \in (A \cap B)$이므로 $4 \in A$이다.
즉, $a=4$
$\therefore A=\{2, 4, 5\}, B=\{4, 5, 6\}$
⑤ $A-B=\{2\}$

03 **정답** 7

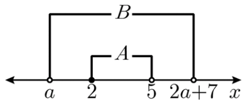
해설 $1^3=1$
즉, 나머지 : 1
$2^3=7\times1+1$
즉, 나머지 : 1
$3^3=27=7\times3+6$
즉, 나머지 : 6
$4^3=64=7\times9+1$
즉, 나머지 : 1
$5^3=125=7\times17+6$
즉, 나머지 : 6
따라서 치역은 $\{1, 6\}$
$\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

04 **정답** 5

해설 $(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(5)=5$

05 **정답** 3

해설 $A \subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



그러므로 $a<2$, $2a+7 \geq 5$
$2a+7 \geq 5$에서 $a \geq -1$이므로 $-1 \leq a < 2$
따라서 정수 a는 $-1, 0, 1$의 3개이다.

06 **정답** ④

해설 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
① 4는 홀수이다. (거짓)
② $3 \geq 5$ (거짓)
③ $(-2)^4+2 \neq 2^4+2$ (거짓)
④ 평행하는 두 직선과 한 직선이 만날 때 생기는 동위각의 크기는 같다. (참)
⑤ 어떤 정사각형은 직사각형이 아니다. (거짓)
따라서 부정이 참인 명제는 ④이다.

07 **정답** 84

해설 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 두 명제
'$|x-2| \leq 5$이면 $x^2+ax+b \leq 0$이다.',
'$x^2+ax+b \leq 0$이면 $|x-2| \leq 5$이다.'가 모두 참이다.
$|x-2| \leq 5$에서 $-5 \leq x-2 \leq 5$
$\therefore -3 \leq x \leq 7$
따라서 부등식 $x^2+ax+b \leq 0$의 해가
$-3 \leq x \leq 7$이다.
이때 x^2의 계수가 1이고 해가 $-3 \leq x \leq 7$인 이차부등식은
$(x+3)(x-7) \leq 0$, 즉 $x^2-4x-21 \leq 0$이므로
$a=-4$, $b=-21$
$\therefore ab=84$

08 정답 ③

해설 (가) $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(나) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
실수 x, y에 대하여 항상 성립한다.
(다) $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$
$=a^2+2ab+b^2-(a^2+2|ab|+b^2)$
$=2(ab-|ab|) \leq 0$ (단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)
따라서 실수 a, b에 대하여 항상 성립한다.
(라) [반례] $a=b=-1$인 경우 $a+b=-2$,
$2\sqrt{ab}=2$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(마) [반례] $a=b=-1$, $c=1$인 경우
$(a+b)(b+c)(c+a)=0$, $8abc=8$이므로
부등식이 성립하지 않는다.
(바) 코시-슈바르츠 부등식은 모든 실수에 대하여 항상 성립한다.
따라서 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식은
(가), (나), (다), (바)의 4개이다.

09 정답 ⑤

해설 $\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$
이때 $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\frac{3}{x-3}>0$이고
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$
$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$
$=2\cdot 3+11=17$
(단, 등호는 $3(x-3)=\frac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)
따라서 구하는 최솟값은 17이다.

10 정답 ④

해설 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$
따라서 $a^2x+ab+b=9x+4$이므로
$a^2=9$, $ab+b=4$
$a^2=9$에서 $a=-3$ ($\because a<0$)
$ab+b=4$에서 $a=-3$을 대입하면
$-2b=4$
$\therefore b=-2$
따라서 $f(x)=-3x-2$이므로
$f(-2)=(-3)\cdot(-2)-2=4$

11 정답 6

해설 $f(1)=5$에서 $a+b=5$ $\cdots$ ㉠
$f^{-1}(7)=2$에서 $f(2)=7$이므로
$2a+b=7$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$
$\therefore ab=6$

12 정답 ④

해설 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$\frac{1}{2}x+2=x$에서 $\frac{1}{2}x=2$
$\therefore x=4$
따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$이므로 $a=4$, $b=4$
$\therefore a+b=4+4=8$

13 정답 ②

해설 좌변의 분모를 통분하면
$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$
$=\frac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}$
따라서 주어진 등식은
$\frac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}=\frac{5x+2}{x^2-x-2}$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=5$, $a-2b=2$
$\therefore$ $a=4$, $b=1$
$\therefore$ $ab=4$

14 정답 2

해설 점근선이 $x=2$, $y=1$이므로 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ $\cdots$ ㉠

㉠이 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=-k+1$

$\therefore k=1$

$y=\dfrac{1+x-2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=-2$

$\therefore abc=2$

15 정답 ①

해설 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 함수의 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-2)}$

이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(-x-2)}$

이 때, 이 그래프가 점$(1,3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-3a}$, $-3a=9$

$\therefore a=-3$

16 정답 ④

해설 $\mathrm{A}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $\mathrm{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$,

$\{x\,|\,x\in\mathrm{A}$ 그리고 $x\notin\mathrm{B}\}=\mathrm{A}-\mathrm{B}$이므로

$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{3,\ 7\}$

$\therefore 3+7=10$

17 정답 ③

해설 $\mathrm{U}=\{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{1,4\}$ 이므로

$\{(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup\mathrm{A}\}\cap\mathrm{B}^c=\{\{1,4\}\cup\mathrm{A}\}-\mathrm{B}=$

$\{1,2,4,5\}-\{2,3,5\}=\{1,4\}$ 이다.

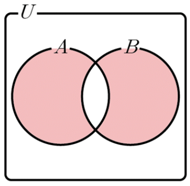
18 정답 ④

해설 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}$를 만족하려면 $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$인 관계가 성립하여야 하므로 집합 B는 집합 A의 원소인 8의 배수를 모두 포함하여야 한다. 따라서 k가 8의 약수일 때다.

즉, 6의 배수는 8의 배수 전부를 포함하지 않는다.

19 정답 ②

해설 $(A-B)\cup(B-A)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$n(A^C\cap B)=n(B-A)=7$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$

$=18+7=25$

$\therefore n(A\cap B)=n(A\cup B)-n((A-B)\cup(B-A))$

$=25-19=6$

20 정답 ①

해설 $f(x)=x^2-10x+n$이라 하자.

$4\le x\le 7$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면 $4\le x\le 7$이고 $f(x)\ge 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로 이 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-10x+n$

$=(x-5)^2+n-25$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 5는 $4\le x\le 7$에 속한다.

$f(4)=n-24,\ f(5)=n-25,\ f(7)=n-21$이므로

함수 $f(x)$는 $x=7$에서 최댓값 $n-21$을 갖는다.

$f(7)=n-21\ge 0$

$n\ge 21$

따라서 자연수 n의 최솟값은 21이다.

21 정답 ③

해설 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여

함수 h는 X에서 X로의 항등함수이므로

$h(-1)=-1,\ h(0)=0,\ h(1)=1$

$\therefore f(0)=g(1)=h(-1)=-1$

이때 함수 g는 X에서 X로의 상수함수이므로

$g(-1)=g(0)=g(1)=-1$

또한, $f(0)-g(0)=f(-1)$이므로

$f(-1)=-1-(-1)$

$=0$

함수 f는 X에서 X로의 일대일대응이므로

$f(-1)=0,\ f(0)=-1,\ f(1)=1$

$\therefore f(1)+g(1)+h(1)=1+(-1)+1$

$=1$

22 정답 18

해설 $x+f(x) \geq 3$에서

(ⅰ) $x=1$일 때,

$1+f(1) \geq 3$이므로 $f(1) \geq 2$

따라서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3의 2개이다.

(ⅱ) $x=2$일 때,

$2+f(2) \geq 3$이므로 $f(2) \geq 1$

따라서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개이다.

(ⅲ) $x=3$일 때,

$3+f(3) \geq 3$이므로 $f(3) \geq 0$

따라서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$2 \cdot 3 \cdot 3=18$

23 정답 $-\dfrac{23}{3}$

해설 $(h \circ f)(x)=g(x)$에서

$(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(3x+2)=g(x)$

$\therefore h(3x+2)=2x-5$

이때 구하는 값이 $h(-2)$이므로

$3x+2=-2$라 하면 $x=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore h(-2)=2 \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right)-5=-\dfrac{23}{3}$

24 정답 7

해설 세 함수 f, g, h는 모두 일대일대응이므로

역함수 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}가 각각 존재한다.

이때 $h \circ g \circ f=h$의 양변에 h^{-1}를 합성하면

$h^{-1} \circ h \circ g \circ f=h^{-1} \circ h$, 즉 $I \circ g \circ f=I$

$\therefore (g \circ f)(x)=x$

따라서 f와 g는 서로 역함수 관계이므로

$g^{-1}(x)=f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore g^{-1}(1)&=f(1)\\&=5 \cdot 1+2\\&=7\end{aligned}$$

25 정답 -11

해설 $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)=2$에서

$g(f(2))=1$

$g(f(2))=g(5)=5a-b=1$

한편, $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$에서

$k+3=2$

$\therefore k=-1$

$(g \circ f^{-1})(2)=4$에서

$(g \circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(-1)=-a-b=4$

따라서 $5a-b=1$, $-a-b=4$를 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{7}{2}$

$\therefore a+3b=-\dfrac{1}{2}+3 \cdot \left(-\dfrac{7}{2}\right)=-11$

26 정답 ①

해설 제1사분면 위의 점 P의 좌표를

$\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=y$, $\overline{\mathrm{PR}}=x$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$ 에서

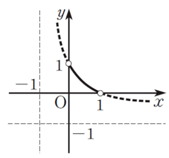
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=y+x$

양변을 제곱하여 풀면

$-2x-2y+2=2xy$

$(x+1)y=-x+1$

$$\begin{aligned}\therefore y&=\frac{-x+1}{x+1}\\&=\frac{-(x+1)+2}{x+1}\\&=\frac{2}{x+1}-1\ (x>0,\ y>0)\end{aligned}$$



따라서 점 P가 그리는 도형의 모양은 ①이다.

27 정답 ②

해설 $y=\dfrac{3x+k-9}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+k-12}{x+1}=\dfrac{k-12}{x+1}+3$

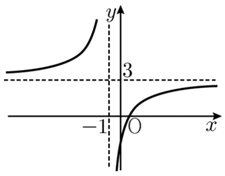
이므로 $y=\dfrac{3x+k-9}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{k-12}{x}$의

그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로

3만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\dfrac{3x+k-9}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면

다음 그림과 같이 $k-12<0$이어야 하므로



$k<12$ ⋯ ㉠

또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$k-9<0$

$\therefore\ k<9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<9$

따라서 자연수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 8$의 8개이다.

28 정답 ③

해설 ① 정의역은 $x\neq 1$ 인 실수, 치역은 $y\neq 1$ 인 실수

② 점근선의 교점인 $(1, 1)$ 에 대해 대칭이다.

③ $|k|$가 커질 수록 $(1, 1)$에 멀어진다.

⑤ 기울기가 ± 1이고 $(1, 1)$을 지나는 직선에 대칭이다.

29 정답 ⑤

해설 $x+y=-4$, $xy=2$에서 $x<0$, $y<0$이므로

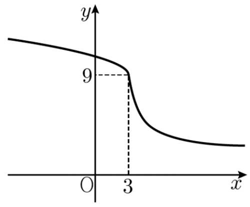
$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}\sqrt{y}}{\sqrt{y}\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}{-\sqrt{xy}}$$
$$=\frac{-(-x)-(-y)}{-\sqrt{xy}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-4}{-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

30 정답 9

해설 조건 (가)에서 치역이 $\{y|y>2\}$이고,

조건 (나)에서 f는 일대일함수이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(3)=9$에서 $a=9$

이때 $f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이고,

$f(2)f(k)=30$이므로 $f(k)=3$

따라서 $\dfrac{2k+3}{k-2}=3$에서 $2k+3=3k-6$이므로

$k=9$

31 정답 ⑤

해설 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 $\mathrm{B}(k,\ \sqrt{k})$, 점 $\mathrm{C}(k,\ k)$이고 삼각형 OBC의 넓이가

삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{k}$, $\overline{\mathrm{AC}}=k$에서

$k=3\sqrt{k}$, $k^2-9k=0$

$k>1$이므로

$k=9$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

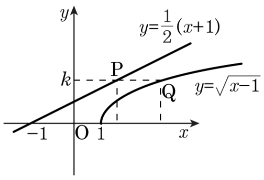
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$

32 정답 ①

해설 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}(x+1)$을 좌표평면 위에

나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P 의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P의 x좌표는 $k=\frac{1}{2}(x+1)$에서

$x=2k-1$

② 점 Q의 x좌표는 $k=\sqrt{x-1}$ 에서

$x=k^2+1$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=|k^2+1-(2k-1)|$

$=|k^2-2k+2|$

$=|(k-1)^2+1|\geq 1$

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 1이다.

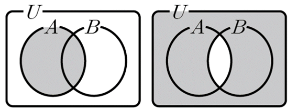
33 정답 11

해설 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 구하는 문제를 해결한다.

$A^C \cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4\}$

두 집합 A, $(A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.

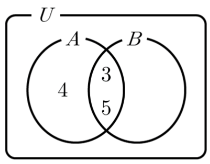


두 집합 A, $(A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이고,
두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로

$A-B=\{4\}$

또한, $A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$,

$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서



$4\notin B$이고, $3\in B$, $5\in B$이다.

조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여

$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C$

$=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$

$=(A-B)\cup(X-B)$

$=\{4\}\cup(X-B)$

이때 $4\in(A-B)$이므로 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면 집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$가 되어야 한다.

(ⅰ) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{5\}$일 때,
집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로
1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.

(ⅱ) $X=\{4\}$일 때,
$X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4\}\cup(X-B)$는
집합 $\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.

따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5=11$

34 정답 ①

해설 ㄱ. $s(A)=8$이면 $n(A)=3$
따라서 $n(A^C)=n(U)-n(A)=6-3=3$이므로
$n(A^C)=2^3=8$
ㄴ. $A\subset B$이면 $B^C\subset A^C$이므로 $s(B^C)\le s(A^C)$
ㄷ. $n(A)=2$, $n(B)=2$ $n(A\cap B)=1$이면
$n(A\cup B)=2+2-1=3$이므로
$s(A\cup B)=2^3=8$이고
$s(A)+s(B)=2^2+2^2=8$에서
$s(A\cup B)=s(A)+s(B)$이지만 $A\cap B\neq\varnothing$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

35 정답 12

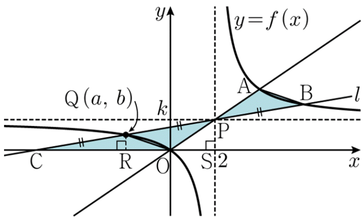
해설 조건 (다)에서 $\dfrac{12}{f(a)}\in\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)\}$이고
조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로
$\dfrac{12}{f(a)}\in\{2,\ f(2),\ f(3),\ f(4)\}$
이때 $a=1$이면 $6\in\{2,\ f(2),\ f(3),\ f(4)\}$이어야
하므로 $f(2)=6$ 또는 $f(3)=6$ 또는 $f(4)=6$이다.
(ⅰ) $f(2)=6$일 때
$f(3)\cdot f(4)=12$이어야 하므로
순서쌍 $(f(3),\ f(4))$는 $(1,\ 12)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(12,\ 1)$의 4가지
(ⅱ) $f(3)=6$일 때
$f(2)\cdot f(4)=12$이어야 하므로
순서쌍 $(f(2),\ f(4))$는 $(1,\ 12)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(12,\ 1)$의 4가지
(ⅲ) $f(4)=6$일 때
$f(2)\cdot f(3)=12$이어야 하므로
순서쌍 $(f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 12)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(12,\ 1)$의 4가지
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$4+4+4=12$

36 정답 5

해설 $f(2)=1$이고 주어진 그래프에서 $g(2)=3$이므로
$g(2)>f(2)$에서 $h(2)=g(2)=3$
그런데 함수 $h(x)$는 일대일대응이므로 $h(3)\neq 3$
이때 $g(3)=3$이므로 $h(3)\neq g(3)$
즉, $h(3)=f(3)$이고 $f(3)>g(3)=3$이므로 $f(3)=4$
$\therefore\ h(3)=4$
이때 $h(2)=3$, $h(3)=4$이므로
$h(1)$, $h(4)$는 각각 1, 2 중 하나의 값을 갖고 $h(1)\neq h(4)$
(ⅰ) $h(1)=1$인 경우
$h(1)$은 $f(1)$과 $g(1)$ 중 작지 않은 값을 가지는데
$g(1)=1$이므로 $f(1)=1$이면 만족한다.
$\therefore\ f(1)=1$
(ⅱ) $h(4)=1$인 경우
$h(4)$는 $f(4)$와 $g(4)$중 작지 않은 값을 가지는데
$g(4)=2$이므로 $h(4)$의 값은 $f(4)$의 값에 관계없이
2 이상이 되어 모순이다.
따라서 $f(1)+h(3)=1+4=5$

37 정답 64

해설 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자.
삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이고,
$S_2=2S_1$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$



이때 $\mathrm{P}(2,\ k)$이므로 두 점 Q, P에서 x축에 내린 수선의 발을 R, S라 하면 $\triangle\mathrm{CQR} \backsim \triangle\mathrm{CPS}$이고 닮음비가 $1:2$이다.
$\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{PS}}=1:2$에서 $b:k=1:2$
$\therefore\ b=\dfrac{k}{2}$
점 Q는 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $b=f(a)$에서
$\dfrac{k}{2}=\dfrac{2k}{a-2}+k$
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{a-2}+1,\ a-2=4+2a-4$
$\therefore\ a=-2$
즉, $\mathrm{Q}\left(-2,\ \dfrac{k}{2}\right)$
또한, $\overline{\mathrm{CR}}=\overline{\mathrm{RS}}$이므로 $\mathrm{C}(-6,\ 0)$
직선 l은 두 점 $\mathrm{C}(-6,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(-2,\ \dfrac{k}{2}\right)$를 지나므로
직선의 방정식은
$y-0=\dfrac{\dfrac{k}{2}-0}{-2-(-6)}(x+6)$
$\therefore\ kx-8y+6k=0$
이때 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로
$\dfrac{|6k|}{\sqrt{k^2+(-8)^2}}=1$에서 $\sqrt{k^2+64}=|6k|$
위의 식의 양변을 제곱하면
$k^2+64=36k^2$
$\therefore\ 35k^2=64$

38 정답 ②

해설 $y=f(x-a)+\dfrac{a}{3}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{a}{3}$만큼
평행이동한 것이고, $y=\left|f(x-a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프는
$y=f(x-a)+\dfrac{a}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을
x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
$y=\left|f(x-a)+\dfrac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여
대칭이려면 $y=f(x-a)+\dfrac{a}{3}$의 그래프의
점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 한다.
이때 $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=-2,\ y=b$이므로
$y=f(x-a)+\dfrac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=a-2,\ y=b+\dfrac{a}{3}$
이 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로
$a=2,\ b=-\dfrac{2}{3}$
따라서 $f(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2}{3}$이므로
$f(b)=f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{\dfrac{4}{3}}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$
$\therefore\ a+f(b)=2+\dfrac{5}{6}=\dfrac{17}{6}$

39 정답 1

해설 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=-15$에서 $a=f(f(-15))$
$f(-15)=\sqrt{1-(-15)}=\sqrt{16}=4$
$f(4)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$
$\therefore\ a=f(f(-15))=f(4)=\sqrt{3}$
$\therefore\ \dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^2=1$

40 정답 63

해설 집합의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고 $S(B)$의 값이 최소이어야 한다.

9로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 10, 19\}$	8	$\{8, 17\}$
2	$\{2, 11, 20\}$	7	$\{7, 16\}$
3	$\{3, 12\}$	6	$\{6, 15\}$
4	$\{4, 13\}$	5	$\{5, 14\}$
0	$\{9\}$	0	$\{18\}$

나머지의 합이 0 또는 9가 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 A에 속할 수 있다.

따라서 $S(A)$가 최대가 되려면 집합 U의 부분집합 $\{1, 10, 19\}$, $\{2, 11, 20\}$, $\{6, 15\}$, $\{5, 14\}$, $\{18\}$의 원소 중 큰 수부터 차례대로 집합 A의 원소가 되어야 한다.

조건 (가)에서 $n(A)=8$이므로 $S(A)$가 최대가 되기 위하여 가능한 집합 A는

$\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$ $\cdots$ ㉠

10으로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 11\}$	9	$\{9, 19\}$
2	$\{2, 12\}$	8	$\{8, 18\}$
3	$\{3, 13\}$	7	$\{7, 17\}$
4	$\{4, 14\}$	6	$\{6, 16\}$
5	$\{5\}$	5	$\{15\}$
0	$\{10\}$	0	$\{20\}$

나머지의 합이 0 또는 10이 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 B에 속할 수 있다.

따라서 $S(B)$가 최소가 되려면 집합 U의 부분집합 $\{1, 11\}$, $\{2, 12\}$, $\{3, 13\}$, $\{4, 14\}$, $\{5\}$, $\{10\}$의 원소 중 작은 수부터 차례대로 집합 B의 원소가 되어야 한다.

조건 (가)에서 $n(B)=8$이므로 $S(B)$가 최소가 되기 위하여 가능한 집합 B는

$\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 조건 (가)의 $n(A\cap B)=1$을 만족시키려면 10, 11은 동시에 집합 $A\cap B$에 속할 수 없다.

$10\in B$, $11\in B$이면 $10\not\in A$ 또는 $11\not\in A$이다.

이때 1, 2, 5 중 적어도 하나가 집합 A에 속해야 하므로 $n(A\cap B)\neq 1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$S(B)$가 최소가 되려면 $10\in B$, $11\not\in B$이어야 한다.

따라서 $A=\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 13\}$일 때 $S(A)-S(B)$의 최댓값은 63이다.

41 정답 50

해설 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 함수를 추론한다.

$\alpha\in A$, $\alpha\in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$이다.

또한, $\beta\in A$, $\beta\not\in B$이므로

$f(\beta)=1$, $g(\beta)\neq 1$ 또는 $f(\beta)\neq 1$, $g(\beta)=1$이다.

즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C, 방정식 $g(x)=1$의 모든 실근의 집합을 D라 하면

$C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$

(ⅰ) $C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$,

$g(x)=(x-\alpha)^2+1$ $\cdots$ ㉠

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

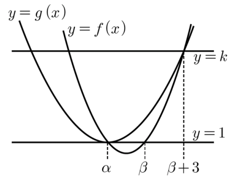
$2(\beta+3-\alpha)\cdot 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$

$\therefore\ \beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=6$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=3$

$\alpha<\beta$ 이므로 $\beta-\alpha=3$ $\cdots$ ㉡

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=1$은 다음 그림과 같다.



그림에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값은 $k=g(\beta+3)$이다. $\cdots$ ㉢

곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

$\alpha-3$, $\beta+3$

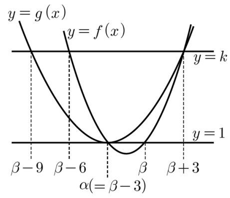
이때 $\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$이다.

또한, 곡선 $y=g(x)$의 축의 방정식은 $x=\alpha$이므로

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

$2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$이다.

이때 $2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3=\beta-9$이다.



그림에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근은 $\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$이고 그 합이 12이므로

$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$

$\therefore\ \beta=8$

㉡에서 $\alpha=5$

㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$,

$g(x)=(x-5)^2+1$

㉢에서

$k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ⅱ) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$,

$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha)\cdot 3+1$

$\therefore\ \beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$

이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$이므로

$\alpha+\beta+k=50$

42 정답 ⑤

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기

ㄱ. $n(A\cap B\cap C)=0$이면

$n(B\cap C)=2$에서 $n(A^C\cap B\cap C)=2$

$n(B-A)\geq n(A^C\cap B\cap C)=2$이므로

$n(B-A)=1$을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ n(A\cap B\cap C)\neq 0$ (참)

ㄴ. $n(A\cap B\cap C)=2$이면

$n(B\cap C)=n(A\cap B\cap C)+n(A^C\cap B\cap C)=2$

이므로 $n(A^C\cap B\cap C)=0$

$n(B-A)$

$=n(A^C\cap B\cap C)+n(A^C\cap B\cap C^C)=1$이므로

$n(A^C\cap B\cap C^C)=1$

$n(C-A)$

$=n(A^C\cap B\cap C)+n(A^C\cap B^C\cap C)=2$이므로

$n(A^C\cap B^C\cap C)=2$

$n(A\cap B\cap C)+n(A^C\cap B\cap C^C)$

$+n(A^C\cap B^C\cap C)=5=n(U)$

$\therefore\ n(C)=n(A\cap B\cap C)+n(A^C\cap B^C\cap C)=4$

(참)

ㄷ. $n(B\cap C)=2$이므로 ㄱ에 의하여

$n(A\cap B\cap C)=1$ 또는 $n(A\cap B\cap C)=2$

(ⅰ) $n(A\cap B\cap C)=2$일 때

ㄴ에 의하여

$n(A)=n(A\cap B\cap C)=2$

$n(B)$

$=n(A\cap B\cap C)+n(A^C\cap B\cap C^C)=3$

$\therefore\ n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=2\cdot 3\cdot 4=24$

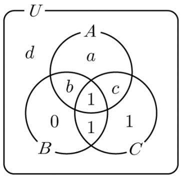
(ⅱ) $n(A\cap B\cap C)=1$일 때

$n(B\cap C)=2$에서 $n(A^C\cap B\cap C)=1$

$n(B-A)=1$에서 $n(A^C\cap B\cap C^C)=0$

$n(C-A)=2$에서 $n(A^C\cap B^C\cap C)=1$

이때 각 집합의 원소의 개수를 표현하면 다음 그림과 같다.



$n(A)=a+b+c+1,\ n(B)=b+2,$

$n(C)=c+3$이고 $a+b+c+d=2$이다.

이때 $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$의 값이 최소가 되기 위해서는 $a=b=c=0,\ d=2$

$\therefore\ n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=1\cdot 2\cdot 3=6$

이때 $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$의 값이 최대가 되기 위해서는 $a=d=0,\ b+c=2$

(a) $b=2,\ c=0$일 때

$n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=3\cdot 4\cdot 3=36$

(b) $b=1,\ c=1$일 때

$n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=3\cdot 3\cdot 4=36$

(c) $b=0,\ c=2$일 때

$n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=3\cdot 2\cdot 5=30$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$의 최댓값은 36, 최솟값은 6

따라서 $n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)$의 최댓값과 최솟값의 합은 42이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

43 정답 ④

해설 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)\leq 0$이므로

조건 $p: x^2+2x-3\leq 0$의 진리집합 P는

$P=\{x\,|\,-3\leq x\leq 1\}$

$x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2$

$=x^2-5ax+(2a-1)(a+2)$

$=(x-2a+1)(x-a-2)$이므로

조건 $q: x^2-5ax+6a^2-a-1>0$의

진리집합 Q는 a의 범위에 따라 각각 다음과 같다.

(ⅰ) $2a-1<a+2$, 즉 $a<3$일 때

$Q=\{x\,|\,x<2a-1$ 또는 $x>a+2\}$

(ⅱ) $2a-1=a+2$, 즉 $a=3$일 때

$Q=\{x\,|\,x\neq 5$인 모든 실수$\}$

(ⅲ) $2a-1>a+2$, 즉 $a>3$일 때

$Q=\{x\,|\,x<a+2$ 또는 $x>2a-1\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\geq 3$일 때

$P\cap Q=\{x\,|\,-3\leq x\leq 1\}$이므로

두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x는

$-3, -2, -1, 0, 1$의 4개이다.

(ⅲ)에서 $a<3$일 때 두 조건 p, q를 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면

$-3<2a-1\leq -2$이거나 $0\leq a+2<1$이다.

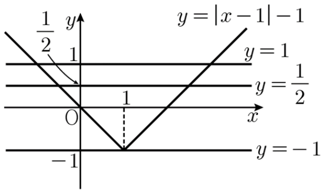
따라서 $-1<a\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $-2\leq a<-1$이므로

$p=-1,\ q=-\dfrac{1}{2},\ r=-2,\ s=-1$

$\therefore\ p+q+r+s=-\dfrac{9}{2}$

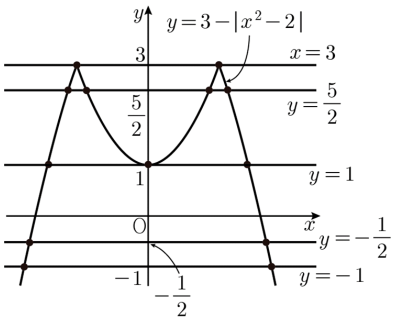
44 정답 13

해설 방정식 $2\{h(x)\}^3-\{h(x)\}^2-2h(x)+1=0$에서
$\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}\{2h(x)-1\}=0$이므로
$h(x)=-1$ 또는 $h(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $h(x)=1$이다.



함수 $g(x)=|x-1|-1$의 그래프가 위와 같으므로
$h(x)=g(f(x))=-1$일 때, $f(x)=1$ … ㉠
$h(x)=g(f(x))=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{2}$ … ㉡
$h(x)=g(f(x))=1$일 때, $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=3$ … ㉢

한편, $f(x)=3-|x^2-2|$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=|x^2-2|$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음과 같다.



㉠에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3,
㉡에서 방정식 $f(x)=-\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 2,
㉡에서 방정식 $f(x)=\frac{5}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 4,
㉢에서 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2,
㉢에서 방정식 $f(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2
따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는
$3+2+4+2+2=13$이다.

45 정답 48

해설 함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
조건 (가)에서 $x=1, 2, 5$일 때,
$f(f(x))+2f^{-1}(x)=3x$이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x=1$일 때
$f(f(1))+2f^{-1}(1)=3$이고
$f(f(1))\in X$, $f^{-1}(1)\in X$이므로
$f(f(1))=1$, $f^{-1}(1)=1$
이때 $f^{-1}(1)=1$에서 $f(1)=1$이고
$f(f(1))=f(1)=1$을 만족하므로
$f(1)=1$ … ㉠

(ii) $x=2$일 때
$f(f(2))+2f^{-1}(2)=6$이고
$f(f(2))\in X$, $f^{-1}(2)\in X$이므로
(a) $f(f(2))=4$, $f^{-1}(2)=1$일 때
$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이고
이는 ㉠에서 $f(1)=1$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.
(b) $f(f(2))=2$, $f^{-1}(2)=2$일 때
$f^{-1}(2)=2$에서 $f(2)=2$이고
$f(f(2))=f(2)=2$를 만족하므로
$f(2)=2$

(iii) $x=5$일 때
$f(f(5))+2f^{-1}(5)=15$이고
$f(f(5))\in X$, $f^{-1}(5)\in X$이므로
(a) $f(f(5))=5$, $f^{-1}(5)=5$일 때
$f^{-1}(5)=5$에서 $f(5)=5$이고
이는 조건 (나)를 만족하지 않는다.
(b) $f(f(5))=3$, $f^{-1}(5)=6$일 때
$f^{-1}(5)=6$에서 $f(6)=5$ … ㉡
$f(5)=3$인 경우 $f(f(5))=f(3)=3$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.
$f(5)=4$인 경우 $f(f(5))=f(4)=3$이고
함수 f가 일대일대응이므로 $f(3)=6$
$f(5)=6$인 경우 $f(f(5))=f(6)=3$
이는 ㉡에서 $f(6)=5$이므로
함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.

따라서 $f(3)=6$, $f(4)=3$, $f(6)=5$이므로
$f(3)\cdot\{f(4)+f(6)\}=6\cdot(3+5)=48$

46 정답 89

해설 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=-\dfrac{k}{x}$가

두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이므로

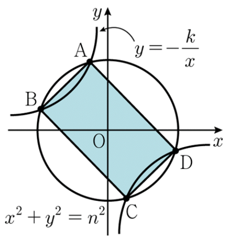
원과 곡선의 교점은 서로 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$에

대하여 대칭이다.

즉, 네 점의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{A}\left(-a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{k}{a},\ a\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ -\dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{k}{a},\ -a\right)$

$\left(\text{단, } 0<a<\dfrac{k}{a}\right)$



직사각형의 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가

되려면 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$이므로

$$2\sqrt{\left(-a+\frac{k}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{a}-a\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{k}{a}+a\right)^2+\left(-a-\frac{k}{a}\right)^2}$$

$$2\sqrt{2}\left|\frac{k}{a}-a\right|=\sqrt{2}\left|a+\frac{k}{a}\right|$$

$$2\left(\frac{k}{a}-a\right)=a+\frac{k}{a}\ \left(\because\ 0<a<\frac{k}{a}\right)$$

$$\frac{2k}{a}-2a=a+\frac{k}{a}$$

$\therefore\ k=3a^2 \qquad \cdots ㉠$

$\mathrm{A}\left(-a,\ \dfrac{k}{a}\right)$는 원 $x^2+y^2=n^2$ 위의 점이므로

$$a^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2=n^2$$

위 식에 ㉠을 대입하면

$$a^2+\frac{9a^4}{a^2}=n^2$$

$$\therefore\ a^2=\frac{n^2}{10}$$

㉠에서 $a^2=\dfrac{k}{3}$ 이므로 $k=\dfrac{3n^2}{10}$

$$\therefore\ f(n)=\frac{3n^2}{10}$$

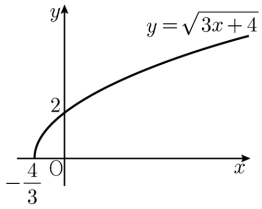
$$\therefore\ f(2)+f(4)+f(6)=\frac{12}{10}+\frac{48}{10}+\frac{108}{10}=\frac{84}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=84$ 이므로

$p+q=89$

47 정답 ③

해설 함수 $f(x)=\sqrt{3x+4}$의 그래프는 다음과 같다.



$x=0$일 때 함숫값이 2이므로 $\mathrm{A}(0,\ 2)$이다.

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와

$y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

즉, $\mathrm{B}(2,\ 0)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하는 형태이므로 함수의

그래프가 역함수의 그래프와 만나는 교점은

직선 $y=x$와의 교점과 같다.

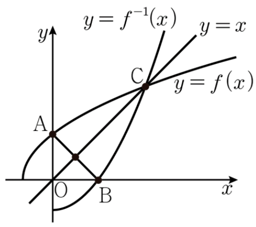
$\sqrt{3x+4}=x$에서 양변을 각각 제곱하면

$3x+4=x^2$, $x^2-3x-4=0$,

$(x+1)(x-4)=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=4$

이때 점 $(-1,\ -1)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이

아니므로 $\mathrm{C}(4,\ 4)$이다.



한편, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{H}(1,\ 1)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2}(4-1)=3\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=6$이다.