

## 2학년 2024년 성동고 1학기 기말 수학 I

1.  $\triangle ABC$ 에서  $\overline{AC} = 12$ ,  $\overline{BC} = 7$ 이고  $\sin(A+B) = \frac{1}{3}$  일 때,  
 $\triangle ABC$ 의 넓이는? [24성동]

- ① 14      ② 15      ③ 16  
④ 17      ⑤ 18

2.  $\triangle ABC$ 에서  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{AC} = 4$ ,  $\overline{AB} = \sqrt{13}$  일 때,  
 $\angle C$ 의 크기는? [24성동]

- ①  $30^\circ$       ②  $45^\circ$       ③  $60^\circ$   
④  $120^\circ$       ⑤  $150^\circ$

3. 다섯 개의 수  $12, a, b, c, -4$ 가 등차수열이 될 때,  
상수  $a, b, c$ 에 대하여  $a-b-c$ 의 값은? [24성동]

- ① -4      ② -2      ③ 0  
④ 2      ⑤ 4

4.  $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + 1) = 100$  일 때,  $\sum_{k=1}^{10} (5a_k - 2)$ 의 값은? [24성동]

- ① 110      ② 115      ③ 120  
④ 125      ⑤ 130

5.  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 와 같이 정의된  
수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  
 $S_{10}$ 의 값은? [24성동]

- ① 27      ② 30      ③ 33  
④ 36      ⑤ 39

6. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_3 = 12$ ,  $a_7 = 48$ 이다.  $a_n$ 이 처음으로 3000 보다 커질 때의  
 $n$ 의 값은? [24성동]

- ① 16      ② 17      ③ 18  
④ 19      ⑤ 20

7.  $\sum_{k=1}^{10} (1+k)^2 + \sum_{k=1}^{11} (1-k)^2$ 의 값은? [24성동]

- ① 870      ② 880      ③ 890  
④ 900      ⑤ 910

8. 삼각형 ABC에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때,

$$2\sin C - \sin A - \sin B = \frac{q}{p} \text{ 이다. } p+q \text{의 값은?}$$

(단,  $p$  와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [24성동]

(가)  $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 2 : 4 : 5$

(나)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4$

① 27

② 28

③ 29

④ 30

⑤ 31

10. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [24성동]

(가)  $\sin A = 2 \cos B \sin C$

(나)  $\overline{BC} = 6$

(다)  $\cos A = -\frac{1}{2}$

①  $3\sqrt{3}$     ②  $4\sqrt{3}$     ③  $5\sqrt{3}$     ④  $6\sqrt{3}$     ⑤  $7\sqrt{3}$

9. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.  $S_4 = 45$ ,  $S_{12} = 12285$  일 때,  $S_5$ 의 값은? [24성동]

① 88

② 89

③ 90

④ 92

⑤ 93

11. 수열  $\{a_n\}$ 이 첫째항이 4, 공차가  $d$ 인 등차수열일 때,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{16}} + \sqrt{a_{17}}}$$

의 값이  $\frac{4}{3}$ 이다.  $\sum_{k=3}^{11} d$ 의 값은? (단,  $d$ 는 0이 아닌 상수이다.) [24성동]

① 45

② 48

③ 54

④ 63

⑤ 75

12. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 = 5$ 이고

$$a_n = \begin{cases} 2n+1 & (n=2k) \\ n^2-3 & (n=2k+1) \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

이다. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $S_{20}$ 의 값은? [24성동]

- ① 1536      ② 1537      ③ 1538  
④ 1539      ⑤ 1540

13. 다음은  $n \geq 10$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여 부등식

$$2^n > n^3 \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

( i )  $n = \boxed{\text{(가)}}$  일 때, ①이 성립한다.

( ii )  $n = k$  ( $k \geq 10$ ) 일 때, ①이 성립한다고 가정하여

양변에 2를 곱하면  $\boxed{\text{(나)}} > 2k^3$

$k \geq 10$ 에서

$$k^3 \geq 10k^2, \quad k^2 \geq 10k, \quad k \geq 10$$

이므로

$$\begin{aligned} 2k^3 - \boxed{\text{(다)}} &= k^3 - 3k^2 - 3k - 1 \\ &\geq \boxed{\text{(라)}} \times k - 1 > 0 \end{aligned}$$

에서

$$\boxed{\text{(나)}} > 2k^3 > \boxed{\text{(다)}}$$

따라서  $n = k + 1$  일 때도 성립한다.

위의 과정에서 (가), (라)에 알맞은 수를  $a, b$ 라 하고 (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $f(k), g(k)$ 라 할 때,  $a + b + f(3) + g(4)$ 의 값은? [24성동]

- ① 218      ② 219      ③ 220  
④ 221      ⑤ 222

14. 첫째항이  $-90$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $S_{10} = S_{21}$ 이다.  $S_n$ 의 최솟값은? [24성동]

- ①  $-600$
- ②  $-640$
- ③  $-680$
- ④  $-720$
- ⑤  $-760$

15.  $a_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$  일 때,  $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{q}{p}$  이다.  
 $p+q$ 의 값은? (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수) [24성동]

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

16. 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_n = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 + \dots + (n+12)^2$$

이다. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.  $S_n = an^3 + bn^2 + cn$  일 때, 0이 아닌 세 상수  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 에 대하여  $c-a-b$ 의 값은? [24성동]

- ① 340
- ② 350
- ③ 360
- ④ 370
- ⑤ 380

**올림포스 변형**

17. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 9, \quad \log a_{n+1} = \log a_n - \log \sqrt[4]{3} \quad (n \geq 1)$$

이다. 수열  $\{a_n\}$ 의 항의 값이 유리수가 되는 100 이하의  $n$ 의 값의 합은? [24성동]

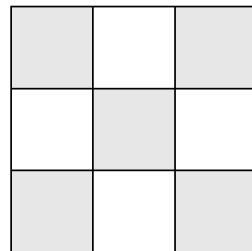
- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| ① 1110 | ② 1115 | ③ 1220 |
| ④ 1225 | ⑤ 1230 |        |

18. 한 변의 길이가 6인 정사각형이 있다. 첫 번째 시행에서 그림 [시행 1]과 같이 정사각형을 9등분하여 가운데 정사각형을 제외한 8개의 정사각형 중 각 변에서 가운데 정사각형 4개를 제거한다. 두 번째 시행에서는 그림 [시행 2]와 같이 남은 5개의 정사각형을 각각 9등분하여 가운데 정사각형을 제외한 8개의 정사각형 중 각 변에서 가운데 정사각형 4개를 제거한다. 이와 같은 시행을 계속할 때,  $n$  번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이를  $a_n$ 이라 하자.

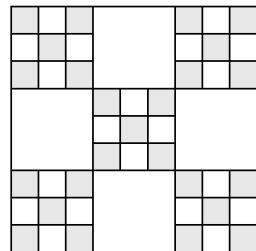
$$\sum_{k=1}^{11} a_k = m \left\{ 1 - \left( \frac{q}{p} \right)^{11} \right\} \text{이라 할 때, 자연수 } m, p, q \text{에}$$

대하여  $m+p+q$ 의 값은?

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소이다.) [24성동]



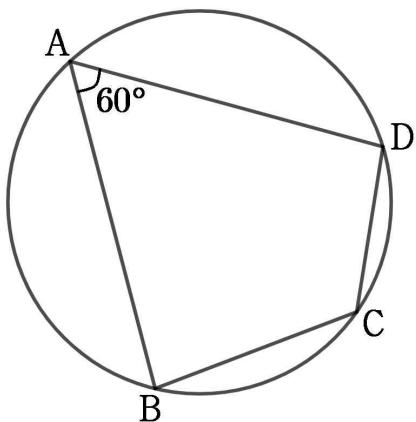
[시행 1]



[시행 2]

- |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| ① 55 | ② 56 | ③ 57 | ④ 58 | ⑤ 59 |
|------|------|------|------|------|

19. 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다.  $\angle A = 60^\circ$ 이고 외접원의 넓이가  $\frac{64}{3}\pi$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [24성동]



[보기]

- ㄱ.  $\overline{BD} = 8$  이다.
- ㄴ.  $\triangle BCD$ 의 넓이가  $\frac{17\sqrt{3}}{4}$  일 때,  $\overline{BC} + \overline{CD} = 9$  이다.
- ㄷ.  $\overline{BC} \times \overline{CD} = 17$ 이고 사각형 ABCD의 넓이가  $\frac{61\sqrt{3}}{4}$  일 때,  $\overline{AB} + \overline{AD} = 13$  이다.

- ① ㄱ                          ② ㄱ, ㄴ                          ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ                          ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (3k+1)a_k = 4n(n+1)^2$$

일 때,  $\sum_{k=1}^{30} \log_5 \left\{ \log_{k+2} \left( \frac{a_{k+1}}{4} \right) \right\}$  의 값은? [24성동]

- ① 2                          ② 1                          ③ 0  
④ -1                          ⑤ -2

21. 0 ⓠ 아닌 세 상수  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a, b, c$  의 값을 각각 구하시오. [24성동]

- (가)  $c - b, c - a, c$  가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
- (나) 이차함수  $f(x) = ax^2 + 2bx + c$  의 그래프는  $x$  축에 접한다.
- (다) 이차함수  $g(x) = cx^2 + 5bx + a$  의 그래프는 점  $(-1, -40)$  을 지난다.

22. 수열  $\{a_n\}$  에서  $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$  일 때, 다음 물음에 답하시오. [24성동]

(1) 자연수  $n$ 에 관한 함수  $f(n)$ 에 대하여

$$f(n) = a_{2n} = \begin{cases} p & (n ⓠ 홀수) \\ q & (n ⓠ 짝수) \end{cases}$$

이라 한다. 두 상수  $p, q$ 의 값을 각각 구하시오.

(2)  $\sum_{n=1}^{2025} nf(n)$  의 값을 구하시오.

## 2학년 2024년 성동고 1학기 기말 수학 I

- 
- 1) ①  
2) ③  
3) ⑤  
4) ⑤  
5) ②  
6) ④  
7) ③  
8) ①  
9) ⑤  
10) ①  
11) ③  
12) ②  
13) ①  
14) ④  
15) ②  
16) ③  
17) ④  
18) ⑤  
19) ②  
20) ④  
21)  $a = 8, b = 16, c = 32$   
22) (1)  $p = -1, q = 1$   
(2)  $-1013$