개포고등학교 외 19곳 - 함수와 그래프

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $f(2022)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)=\frac{1}{2}-\left|x-\frac{3}{2}\right|$ $(1 \le x \le 2)$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)$이다.

02 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \to R$가 $f(x)=a|x-3|+2x$로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

03 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x)=|x-3|-|x+3|$, $g(x)=x^2-3$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $(f \circ g)(1)=4$

ㄴ. $(g \circ f)(x)=(g \circ f)(-x)$

ㄷ. $(f \circ g)(x)+g(f(-x))=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 함수 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+1 & (x<1)\\ -x+2 & (x \ge 1)\end{cases}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f^{2n}(0)+f^{2n+1}(2)=0$

ㄴ. $b<1<a$인 두 실수 a, b에 대하여 $f^2(a)>f^2(b)$가 항상 성립한다.

ㄷ. $f^2(x)$의 역함수가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 [2018년 10월 고3 문과 28번/4점]

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f는 일대일대응이다.
> (나) $f(1) \neq 2$
> (다) 등식 $\frac{1}{2}f(a)=(f \circ f^{-1})(a)$를 만족시키는
> a의 개수는 2이다.

$f(2) \cdot f^{-1}(2)$의 값을 구하시오.

06

집합 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \le x \le 1) \\ \frac{3}{2}x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라 할 때, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 [2024년 3월 고2 17번 변형]

두 양수 a, k에 대하여 함수 $f(x)=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+3,\ f(a+3))$이 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은?

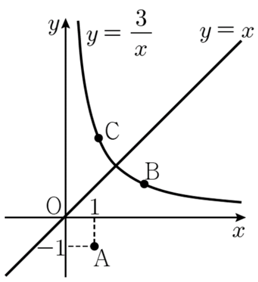
> (가) 직선 PQ의 기울기는 -1이다.
> (나) 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $18\sqrt{2}$이다.

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

08 아래 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$과 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$ 위의 두 점 B, C가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 3이다.

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha>\sqrt{3}$)



① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

09 함수 $y=\dfrac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

10 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5}+7 & (x>5)\\ -(x-a)^2+8 & (x\le 5)\end{cases}$가 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

11 [2019년 3월 고2 이과 21번 변형]
두 이차함수 $f(x)=x^2+4x+a$, $g(x)=x^2-4x-5$가 있다. x에 대한 방정식 $g(f(x))=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 a의 합은?

① 52 ② 55 ③ 58
④ 61 ⑤ 64

12 [2019년 3월 고2 문과 20번 변형]
두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}+k$, $g(x)=-\dfrac{1}{x-2}-k$가 있다.
정수 k에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수를 $h(k)$라 하자.
등식 $h(k)+h(k+1)+h(k+2)=5$를 만족시키는 정수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

13 양의 유리수 전체의 집합을 Q^{+}, 자연수 전체의 집합을 N이라 할 때, 두 함수 $f: Q^{+} \to N$, $g: N \to Q^{+}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f\left(\frac{q}{p}\right) = pq \ (p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수}),$$
$$g(n) = \frac{1}{n}$$

두 함수 f, g의 그래프를 각각 F, G라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3}$을 만족시키는 집합 Q^{+}의 원소 x의 개수는 2이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $(f \circ g)(n) = f(n)$이다.
ㄷ. 집합 $S_k = \{(x,\ y) \mid 0 \le x \le k,\ 0 \le y \le k\}$에 대하여 집합 $S_k \cap (F \cup G)$의 원소의 개수가 18인 자연수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 곡선 $y = \sqrt{x+n+2}$, $y = \sqrt{-x+n+2}$ 와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자. x좌표는 정수, y좌표는 자연수인 점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)$의 값을 구하시오.

15 [2025년 3월 고2 30번/4점]
실수 $a\ (a \ne 0)$과 2보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid x \ne 2\text{인 실수}\}$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax - an}{x-2} - n & (x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < n) \\ -a\sqrt{x-n} - n & (x \ge n) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)| = t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $g(t) = 2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $\frac{3}{2}n$ 이다.
(나) $g(|f(5)|) \cdot g(n) = 6$

개포고등학교 외 19곳 - 함수와 그래프

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 26	02 3	03 ③
04 ⑤	05 12	06 ①
07 ③	08 ②	09 ⑤
10 6	11 ①	12 ①
13 ⑤	14 486	15 68

개포고등학교 외 19곳 - 함수와 그래프

함수의 개념과 그래프 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
15문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

01 정답 26

해설 조건 (나)에 의하여

$$f(2022)=f\left(2\cdot\frac{2022}{2}\right)=2f\left(\frac{2022}{2}\right)=2^2f\left(\frac{2022}{2^2}\right)=\cdots=2^{10}f\left(\frac{2022}{2^{10}}\right)$$ 이다.

$\frac{2022}{2^{10}}$의 범위는 $1<\frac{2022}{2^{10}}<2$이므로

조건 (가)에 의하여 $f\left(\frac{2022}{2^{10}}\right)=2-\frac{2022}{2^{10}}$이다.

$$\therefore\ 2^{10}f\left(\frac{2022}{2^{10}}\right)=2^{10}\left(2-\frac{2022}{2^{10}}\right)=2^{11}-2022=26$$

02 정답 3

해설 (ⅰ) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$f(x)=-a(x-3)+2x=-(a-2)x+3a$

(ⅱ) $x\ge3$일 때, $x-3\ge0$이므로

$f(x)=a(x-3)+2x=(a+2)x-3a$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases}-(a-2)x+3a & (x<3)\\(a+2)x-3a & (x\ge3)\end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=-(a-2)x+3a$, $y=(a+2)x-3a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$-(a-2)(a+2)>0$, $(a-2)(a+2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

따라서 정수 a는 $-1, 0, 1$의 3개이다.

03 정답 ③

해설 (ⅰ) $x<-3$일 때 $f(x)=-(x-3)+(x+3)=6$

(ⅱ) $-3\le x<3$일 때

$f(x)=-(x-3)-(x+3)=-2x$

(ⅲ) $x\ge3$일 때 $f(x)=(x-3)-(x+3)=-6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}6 & (x<-3)\\-2x & (-3\le x<3)\\-6 & (x\ge3)\end{cases}$$

ㄱ. $g(1)=-2$이므로 $(f\circ g)(1)=f(-2)=4$ (참)

ㄴ. $(g\circ f)(-x)=g(f(-x))$에서

① $x>3$일 때 $-x<-3$이므로 $f(-x)=6$

$\therefore\ g(f(-x))=g(6)=33$

② $-3<x\le3$일 때 $-3\le -x<3$이므로

$f(-x)=-2\cdot(-x)=2x$

$\therefore\ g(f(-x))=g(2x)=4x^2-3$

③ $x\le-3$일 때 $-x\ge3$이므로 $f(-x)=-6$

$\therefore\ g(f(-x))=g(-6)=33$

①, ②, ③에 의하여

$$(g\circ f)(-x)=\begin{cases}33 & (x\le-3)\\4x^2-3 & (-3<x\le3)\\33 & (x>3)\end{cases}$$

또, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

④ $x<-3$일 때 $(g\circ f)(x)=g(6)=33$

⑤ $-3\le x<3$일 때

$(g\circ f)(x)=g(-2x)=4x^2-3$

⑥ $x\ge3$일 때 $(g\circ f)(x)=g(-6)=33$

④, ⑤, ⑥에 의하여

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}33 & (x\le-3)\\4x^2-3 & (-3<x\le3)\\33 & (x>3)\end{cases}$$

$\therefore\ (g\circ f)(x)=(g\circ f)(-x)$ (참)

ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

① $g(x)\ge3$일 때

즉, $x\le-\sqrt{6}$ 또는 $x\ge\sqrt{6}$일 때

$(f\circ g)(x)=-6$

② $-3\le g(x)<3$일 때

즉, $-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$일 때

$(f\circ g)(x)=-2(x^2-3)=-2x^2+6$

①, ②에 의하여

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-6 & (x\le-\sqrt{6})\\-2x^2+6 & (-\sqrt{6}<x<\sqrt{6})\\-6 & (x\ge\sqrt{6})\end{cases}$$

ㄴ에서

$$(g\circ f)(-x)=\begin{cases}33 & (x\le-3)\\4x^2-3 & (-3<x\le3)\\33 & (x>3)\end{cases}$$

이므로

$\therefore\ (f\circ g)(x)+g(f(-x))\neq0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 정답 ⑤

해설 ㄱ. $f(0)=2,\ f(2)=0$이므로

$f^2(0)=f(f(0))=f(2)=0$

$f^3(0)=f(f^2(0))=f(0)=2$

$\vdots$

$\therefore\ f^{2n-1}(0)=2,\ f^{2n}(0)=0$

$f^2(2)=f(f(2))=f(0)=2$

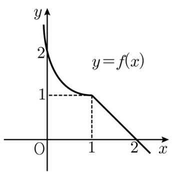
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(2)=0$

$\vdots$

$\therefore\ f^{2n-1}(2)=0,\ f^{2n}(2)=2$

$\therefore\ f^{2n}(0)+f^{2n+1}(2)=0+0=0$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$a>1$일 때 $f(a)<1$이므로 $f(f(a))>1$,

$b<1$일 때 $f(b)>1$ 이므로 $f(f(b))<1$

$\therefore\ f^2(a)>f^2(b)$ (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$에서

(ⅰ) $x<1$일 때

$f(x)=(x-1)^2+1>1$이므로

$f^2(x)=f(f(x))$

$=-\{(x-1)^2+1\}+2$

$=-(x-1)^2+1$

(ⅱ) $x\ge 1$일 때

$f(x)=-x+2\le 1$이므로

$f^2(x)=f(f(x))$

$=\begin{cases}-f(x)+2 & (f(x)=1)\\ \{f(x)-1\}^2+1 & (f(x)<1)\end{cases}$

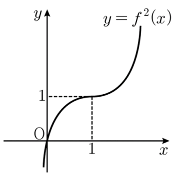
$=\begin{cases}-1+2 & (x=1)\\ (-x+2-1)^2+1 & (x>1)\end{cases}$

$=\begin{cases}1 & (x=1)\\ (x-1)^2+1 & (x>1)\end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서

$f^2(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1 & (x<1)\\ (x-1)^2+1 & (x\ge 1)\end{cases}$

이므로 함수 $y=f^2(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=k$ (k는 상수)와 함수 $y=f^2(x)$의 그래프는 항상 한 점에서 만나므로 합성함수 $f^2(x)$의 역함수가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 정답 12

해설 일대일대응을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (다)에서 역함수의 성질에 의하여

$(f\circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=a$이므로

$\dfrac{1}{2}f(a)=a$

$\therefore\ f(a)=2a$

한편, 함수 $f:X\to Y$의 정의역은 집합 X이고

역함수 $f^{-1}:Y\to X$의 정의역은 집합 Y이므로

조건 (다)에서 a는 $a\in X,\ a\in Y$이어야 한다.

즉, $a\in X\cap Y$이어야 한다.

이때 a의 개수가 2이므로 $f(2)=4,\ f(4)=8$

또, 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이고

조건 (나)에서 $f(1)\neq 2$이므로

$f(1)=6,\ f(3)=2$

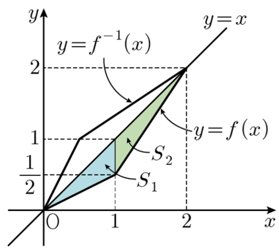
따라서 $f^{-1}(2)=3$이므로

$f(2)\cdot f^{-1}(2)=4\cdot 3=12$

06 정답 ①

해설 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



위 그림에서

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4},\ S_2=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 넓이 S는

$S=2(S_1+S_2)=2\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=1$

07 정답 ③

해설 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a+3,\ \frac{k}{a+3}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\frac{k}{a+3}-\frac{k}{a}}{a+3-a}=-1$$

$$\frac{k}{a+3}-\frac{k}{a}=-3,\ \frac{-3k}{a(a+3)}=-3$$

$\therefore\ k=a(a+3)$

$f(a)=\frac{k}{a}=a+3,\ f(a+3)=\frac{k}{a+3}=a$이므로

따라서 점 P의 좌표는 $(a,\ a+3)$, 점 Q의 좌표는 $(a+3,\ a)$

이때 조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a,\ -a-3)$, 점 S의 좌표는 $(-a-3,\ -a)$

따라서 직선 PS의 기울기는 $\frac{a+3-(-a)}{a-(-a-3)}=1$이고,

직선 RS의 기울기는 $\frac{-a-(-a-3)}{-a-3-(-a)}=-1$,

직선 QR의 기울기는 $\frac{a-(-a-3)}{a+3-(-a)}=1$이므로

사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+3-a)^2+\{a-(a+3)\}^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{\{-(a+3)-a\}^2+\{-a-(a+3)\}^2}$

$=\sqrt{2}(2a+3)$

즉, 사각형 PQRS의 넓이는

$3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(2a+3)=6(2a+3)=18\sqrt{2}$

따라서 $a=\frac{3\sqrt{2}-3}{2}$이므로

$k=a(a+3)$

$=\frac{3\sqrt{2}-3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}+3}{2}=\frac{9}{4}$

08 정답 ②

해설 조건 (가)에 의하여 점 $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{C}(\beta,\ \alpha)$이고, 직선 BC는 점 $\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$를 지나고 기울기가 -1이므로 직선의 방정식은 $x+y-\alpha-\beta=0$이다.

한편, 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)$

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|1-1-\alpha-\beta|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}$

조건 (나)에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는 3이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(\alpha-\beta)\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}=3$에서

$\alpha^2-\beta^2=6$

또한, 점 B는 곡선 $y=\frac{3}{x}$ 위의 점이므로 $\beta=\frac{3}{\alpha}$

즉, $\alpha\beta=3$이므로

$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2$

$=6^2+4\cdot3^2=72$

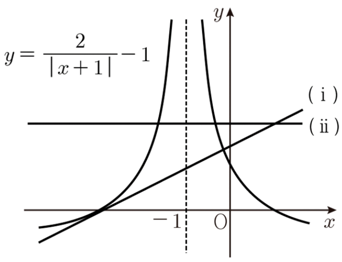
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=6\sqrt{2}$

09 정답 ⑤

해설

$$y=\frac{2}{|x+1|}-1=\begin{cases}\frac{2}{x+1}-1 & (x>-1)\\ -\frac{2}{x+1}-1 & (x<-1)\end{cases}$$

이고 직선 $y=-kx+2+k$는 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=\frac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 함수 $y=\frac{2}{|x+1|}-1$의 그래프와 직선 $y=-kx+2+k$가 접할 때,

$-\frac{2}{x+1}-1=-kx+2+k$에서

$kx^2-3x-k-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4k\cdot(-k-5)=0$에서

$(2k+9)(2k+1)=0$

$\therefore\ k=-\frac{9}{2}$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

이때 직선 $y=-kx+2+k$의 y절편이 0보다 크므로

$k=-\frac{1}{2}$

(ⅱ) 직선 $y=-kx+2+k$가 x축에 평행할 때

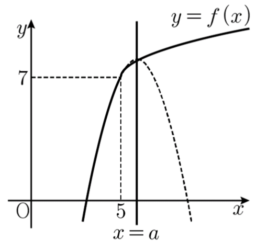
$k=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$

10 정답 6

해설 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되기 위해서는 곡선 $y=-(x-a)^2+8\ (x\le 5)$가 점 $(5,\ 7)$을 지나야 하고, 곡선 $y=-(x-a)^2+8$의 대칭축이 $x=a$이므로 $a\ge 5$이다.



$7=-(5-a)^2+8$ 에서

$a^2-10a+24=0,\ (a-4)(a-6)=0$

$\therefore\ a=4$ 또는 $a=6$

$a\ge 5$이므로 $a=6$

11 정답 ①

해설 $g(f(x))=g(x)$에서

$\{f(x)\}^2-4f(x)-5=x^2-4x-5$

$\{f(x)\}^2-x^2-4\{f(x)-x\}=0$

$\therefore\ \{f(x)-x\}\{f(x)+x-4\}=0$

따라서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x+4$이므로

$x^2+4x+a=x$에서

$x^2+3x+a=0$ $\cdots$ ㉠

$x^2+4x+a=-x+4$에서

$x^2+5x+a-4=0$ $\cdots$ ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=9-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=25-4(a-4)=41-4a$

(ⅰ) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서 $a<\dfrac{9}{4}$

$D_2<0$에서 $a>\dfrac{41}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) 두 방정식 ㉠, ㉡이 각각 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서 $a=\dfrac{9}{4}$

$D_2=0$에서 $a=\dfrac{41}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1<0$에서 $a>\dfrac{9}{4}$

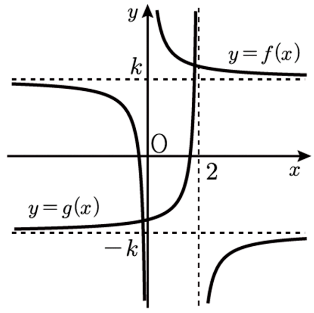
$D_2>0$에서 $a<\dfrac{41}{4}$

따라서 $\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{41}{4}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 정수 a는 $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이므로 합은 52이다.

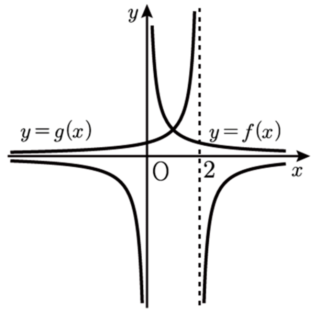
12 정답 ①

해설 (ⅰ) $k>0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



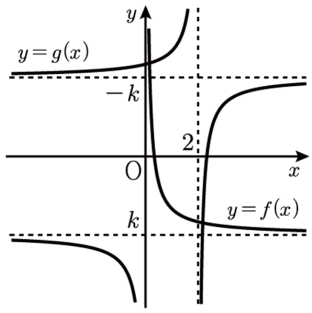
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.

(ⅱ) $k=0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.

(ⅲ) $k<0$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 2이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $h(k)=\begin{cases}2 & (k<0)\\ 1 & (k\geq 0)\end{cases}$

연속하는 세 정수 $k,\ k+1,\ k+2$에 대하여

등식 $h(k)+h(k+1)+h(k+2)=5$가 성립하려면

$h(k)=2,\ h(k+1)=2,\ h(k+2)=1$이어야 한다.

이때 $k<0,\ k+1<0,\ k+2\geq 0$이므로

$-2\leq k<-1$

따라서 등식 $h(k)+h(k+1)+h(k+2)=5$을 만족시키는 정수 k의 값은 -2이다.

13 정답 ⑤

해설 ㄱ. $x=\frac{q}{p}$(p와 q는 서로소인 자연수)라 할 때,

$f(x)=pq$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(pq)=\frac{1}{pq}=\frac{1}{3}$에서 $pq=3$

즉, $\begin{cases}p=1\\q=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=3\\q=1\end{cases}$

따라서 $(g\circ f)(x)=\frac{1}{3}$을 만족시키는 집합 Q^+의 원소 x의 개수는 2이다. (참)

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여

$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f\left(\frac{1}{n}\right)=n$이고,

$f(n)=f\left(\frac{n}{1}\right)=f(n)$

모든 자연수 n에 대하여 $(f\circ g)(n)=f(n)$ (참)

ㄷ. 분배법칙에 의하여 $S_k\cap(F\cup G)=(S_k\cap F)\cup(S_k\cap G)$

$k=6Z$인 경우를 살펴보자.

$S_6\cap(F\cup G)=(S_6\cap F)\cup(S_6\cap G)$ $\cdots$ ㉠

먼저 집합 $S_6\cap F$의 원소의 개수를 구하면

함수 f의 함숫값이 자연수이므로

(ⅰ) 직선 $y=1$과 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=1$에서

$\begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$, 즉 $(1,\ 1)$

(ⅱ) 직선 $y=2$와 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=2$에서

$\begin{cases}p=1\\q=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=2\\q=1\end{cases}$, 즉 $(2,\ 2)$, $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$

(ⅲ) 직선 $y=3$과 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=3$에서

$\begin{cases}p=1\\q=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=3\\q=1\end{cases}$, 즉 $(3,\ 3)$, $\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$

(ⅳ) 직선 $y=4$와 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=4$에서

$\begin{cases}p=1\\q=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=4\\q=1\end{cases}$, 즉 $(4,\ 4)$, $\left(\frac{1}{4},\ 4\right)$

(ⅴ) 직선 $y=5$과 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=5$에서

$\begin{cases}p=1\\q=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=5\\q=1\end{cases}$, 즉 $(5,\ 5)$, $\left(\frac{1}{5},\ 5\right)$

(ⅵ) 직선 $y=6$과 F의 교점은 $f\left(\frac{q}{p}\right)=pq=6$에서

$\begin{cases}p=1\\q=6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=2\\q=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=3\\q=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}p=6\\q=1\end{cases}$

즉, $(6,\ 6)$, $\left(\frac{3}{2},\ 6\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ 6\right)$, $\left(\frac{1}{6},\ 6\right)$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 집합 $S_6\cap F$의 원소의 개수는

$1+2+2+2+2+4=13$ $\cdots$ ㉡

집합 $S_6\cap G$를 원소나열법으로 나타내면

$S_6\cap G$

$=\left\{(1,\ 1),\ \left(2,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(3,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(4,\ \frac{1}{4}\right),\ \left(5,\ \frac{1}{5}\right),\ \left(6,\ \frac{1}{6}\right)\right\}$

집합 $S_6\cap G$의 원소의 개수는 6 $\cdots$ ㉢

$(S_6\cap F)\cap(S_6\cap G)=(1,\ 1)$ $\cdots$ ㉣

㉠과 ㉡, ㉢, ㉣에 의하여 집합 $S_6\cap(F\cup G)$의 원소의 개수는

$13+6-1=18$

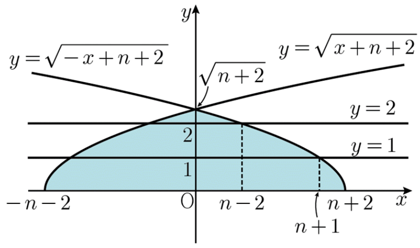
따라서 집합 $S_k\cap(F\cup G)$의 원소의 개수가 18인 자연수 k가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 정답 486

해설 $\sqrt{x+n+2}=\sqrt{-x+n+2}$에서 $x=0$

즉, 두 곡선의 교점의 좌표는 $(0,\ \sqrt{n+2})$



두 곡선 $y=\sqrt{x+n+2}$, $y=\sqrt{-x+n+2}$와 x축으로 둘러싸인 영역은 y축에 대하여 대칭이므로 제1사분면의 영역 위의 점의 개수와 제2사분면 영역 위의 점의 개수는 같다. 이때 곡선 $y=\sqrt{-x+n+2}$와 직선 $y=k$ (k는 자연수)의 교점의 x좌표가 $n+2-k^2$이므로 제1사분면의 영역에서 직선 $y=k$ 위에 있는 x좌표가 정수인 점의 개수는 $n+2-k^2$이다.

또, 영역에 포함되는 y축 위의 점의 개수는 $\sqrt{n+2}$ 이하의 자연수의 개수이다.

따라서 자연수 n에 대하여

$f(n)=2\times$(제1사분면의 영역 위의 점의 개수)

$\qquad+(\sqrt{n+2}$ 이하의 자연수의 개수)

(ⅰ) $n=1$일 때,

$f(n)=2(n+1)+1=2n+3$

(ⅱ) $2\le n<7$일 때,

$f(n)=2\{(n+1)+(n-2)\}+2$

$=4n$

(ⅲ) $7\le n<14$일 때,

$f(n)=2\{(n+1)+(n-2)+(n-7)\}+3$

$=6n-13$

(ⅳ) $14\le n<23$일 때,

$f(n)=2\{(n+1)+(n-2)$

$\qquad+(n-7)+(n-14)\}+4$

$=8n-40$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)$

$=5+8+12+16+20+24+29+35$

$\qquad+41+47+53+59+65+72$

$=486$

15 정답 68

해설 함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

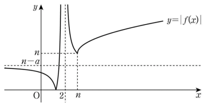
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x \ge n) \end{cases}$$

$$\frac{ax-an}{x-2}-n=\frac{a(x-2)+2a-an}{x-2}-n$$
$$=\frac{a(2-n)}{x-2}+a-n$$

이므로

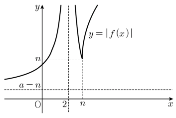
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(2-n)}{x-2}+a-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x \ge n) \end{cases}$$

(i) $0<a<n$인 경우



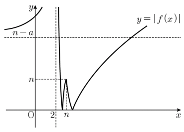
$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,
$g(0)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a>n$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고,
$g(0)=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, 이때

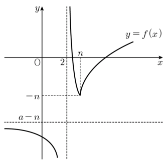
$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } n<t \le n-a) \\ 3 & (t=n \text{ 또는 } t>n-a) \\ 4 & (0<t<n) \end{cases} \quad \cdots ㉠$$

$g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $n-a$이다. 조건 (가)에서

$n-a=\dfrac{3}{2}n$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}n$이고

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{n^2-2n}{2x-4}-\dfrac{3}{2}n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ \dfrac{1}{2}n\sqrt{x-n}-n & (x \ge n) \end{cases}$$

조건 (나)에서 $g(n)=3$이므로 $g(|f(5)|)=2$



$f(5)<0$인 경우 $-n<f(5)<0$이므로 ㉠에서 $g(|f(5)|)=4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ f(5) \ge 0$

즉, ㉠에서 $f(5)=0$ 또는 $n<f(5) \le \dfrac{3}{2}n$

(a) $f(5)=0$인 경우

$2<n \le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n=0$

$2n=n\sqrt{5-n}$

$2=\sqrt{5-n}$

$n=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n=\dfrac{1}{6}n(n-11)=0$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 11이다.

(b) $n<f(5) \le \dfrac{3}{2}n$인 경우

$2<n \le 5$이면

$f(5)=\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n$이므로

$n<\dfrac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n \le \dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{2}\sqrt{5-n}-1 \le \dfrac{3}{2}$

$4<\sqrt{5-n} \le 5$

그런데 $2<n \le 5$에서 $\sqrt{5-n}<\sqrt{3}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\dfrac{n^2-2n}{6}-\dfrac{3}{2}n$
$=\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n$

$n<\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{11}{6}n \le \dfrac{3}{2}n$

$1<\dfrac{1}{6}n-\dfrac{11}{6} \le \dfrac{3}{2}$

$6<n-11 \le 9$

$17<n \le 20$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 18, 19, 20이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값은 11, 18, 19, 20이고 그 합은

$11+18+19+20=68$