

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

## 공통수학2

이름

01 다음 중 집합은 모두 몇 개인가?

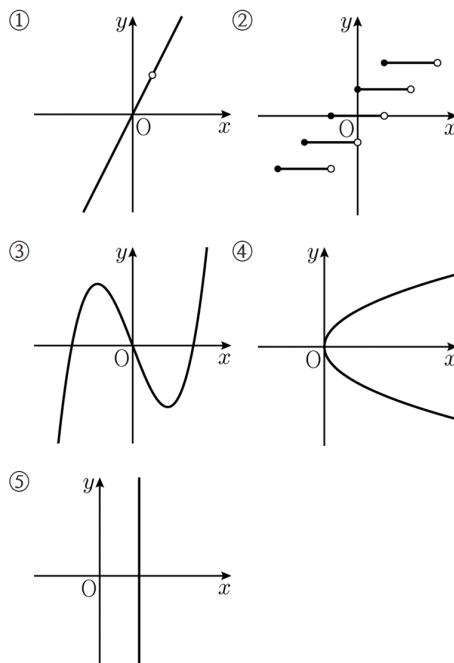
- ㄱ. 우리나라의 놀이공원의 모임
- ㄴ. 머리가 긴 가수들의 모임
- ㄷ. 10에 가까운 수들의 모임
- ㄹ. 큰 자동차들의 모임
- ㅁ. 1보다 작은 자연수의 모임
- ㅂ. 6의 배수의 모임

- ① 1개      ② 2개      ③ 3개  
④ 4개      ⑤ 5개

02 전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합  
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 7\}$ 에 대하여  $A^C \cap B^C$ 은?

- ①  $\{5, 6\}$       ②  $\{6, 7\}$       ③  $\{4\}$   
④  $\{5, 6, 7\}$       ⑤  $\{4, 5, 6\}$

03 다음 중 함수의 그래프인 것은?

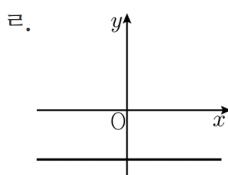
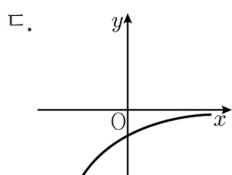
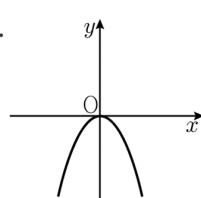
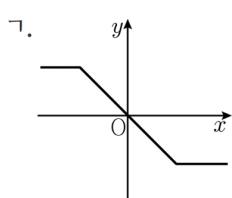


04

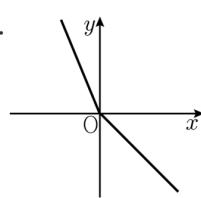
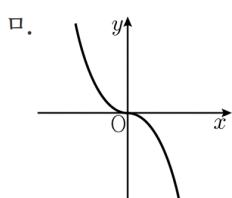
다음 보기의 함수의 그래프 중 일대일함수인 것의 개수를  $a$ , 일대일대응인 것의 개수를  $b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값을 구하시오.

(단, 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합이다.)

<보기>



(단, D의 그래프는  $x$ 축과 만나지 않는다.)

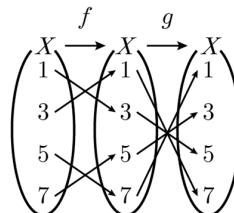


05

함수  $f(x) = 5x - 3$ 에 대하여  $f^{-1}(a) = 12$ 를 만족시키는 상수  $a$ 의 값을 구하시오.

06

두 함수  $f, g$ 를 다음 그림과 같이 정의할 때,  $(f^{-1} \circ g)(5) + (g^{-1} \circ f)(5)$ 의 값을 구하시오.



07

다음 중 분수식이 아닌 것은? (정답 2개)

- |                      |                       |                    |
|----------------------|-----------------------|--------------------|
| ① $\frac{1}{5-x}$    | ② $\frac{x+1}{3}$     | ③ $\frac{x-1}{2x}$ |
| ④ $\frac{2x^2+1}{2}$ | ⑤ $\frac{5x}{x(x+2)}$ |                    |

08

$x : y = 4 : 3$  일 때,  $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$ 의 값은?

- |      |      |     |
|------|------|-----|
| ① -3 | ② -1 | ③ 2 |
| ④ 3  | ⑤ 4  |     |

**09**

집합  $A$ 는  $(i, j)$  성분  $a_{ij}$ 가  
 $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2$ )를 만족시키는 행렬의  
 집합이다. 다음 중 집합  $A$ 의 원소인 것만을 있는 대로 고른  
 것은?

〈보기〉

$$\neg \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqcup \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sqsubseteq \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ①  $\neg, \sqsubseteq$   
 ④  $\sqcup, \sqsubseteq$

- ②  $\neg, \sqcup$   
 ⑤  $\sqcup, \equiv$

- ③  $\sqcup, \sqsubseteq$

**10**

집합  $S$ 의 원소가 자연수이고  
 $'a \in S, b \in S' \text{이면 } ab \in S'$ 가 성립한다.  $3 \in S, 5 \in S$ 일  
 때, 다음 중 반드시 집합  $S$ 의 원소라고 할 수 없는 것은?

- ①  $9 \in S$   
 ④  $18 \in S$

- ②  $15 \in S$   
 ⑤  $45 \in S$

- ③  $25 \in S$

**11**

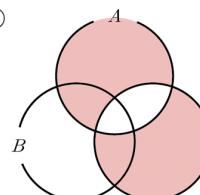
$(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B)$ 을 간단히 하면?

- ① A    ② B    ③  $\emptyset$   
 ④ U    ⑤  $A \cap B$

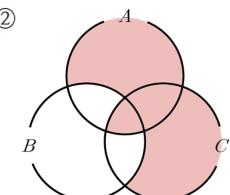
**12**

전체집합  $U$ 의 세 부분집합  $A, B, C$ 에 대하여 다음 중  
 $A \cup (B^c \cap C)$ 를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

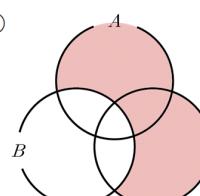
①



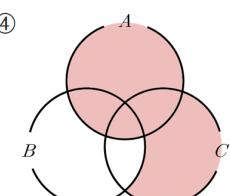
②



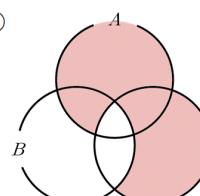
③



④



⑤



**13**

전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여  
 $n(U) = 20, n(A \cap B) = 4, n(A^c \cap B^c) = 8$ 일 때,  
 $n(A) + n(B)$ 의 값은?

- ① 12

- ② 13

- ③ 14

- ④ 15

- ⑤ 16

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

**14** 명제 ‘모든 자연수는 정수이다.’의 부정은?

- ① 모든 정수는 자연수이다.
- ② 정수가 아닌 수는 자연수이다.
- ③ 정수가 아닌 자연수가 있다.
- ④ 정수가 아닌 수는 자연수도 아니다.
- ⑤ 정수가 아닌 수는 자연수이다.

**15** 실수  $x$ 에 대하여 두 조건

$$p: a \leq x \leq 1, q: x \geq -1$$

이 있다. 명제  $p \rightarrow q$ 가 참이 되게 하는 상수  $a$ 의 값의 범위는? (단,  $a \leq 1$ )

- ①  $a \leq -1$
- ②  $a \leq 0$
- ③  $a \leq 1$
- ④  $-1 \leq a \leq 1$
- ⑤  $-2 \leq a \leq 1$

**16** 다음 보기 중  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것을 있는 대로 고른 것은? (단,  $x, y$ 는 임의의 실수)

〈보기〉

- ㄱ.  $p: x^2 \leq 0, q: x = 0$
- ㄴ.  $p: x^2 + y^2 = 0, q: xy = 0$
- ㄷ.  $p: a, b$ 는 유리수,  $q: a+b, ab$ 는 유리수

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**17** 실수  $x$ 에 대한 두 조건  $p : x^2 - 4 \leq 0, q : x \leq a$ 에 대하여  $p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수  $a$ 의 최솟값을 구하시오.

**18** 집합  $X = \{3, a\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수  $f(x) = x^2 - 5x + 19, g(x) = bx + 4$ 에 대하여  $f = g$ 일 때,  $ab$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b$ 는 상수이고  $a \neq 3$ 이다.)

**19** 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 세 함수  $f, g, h$ 는 각각 일대일대응, 항등함수, 상수함수이고  $f(1) = g(2) = h(3), f(1) + f(3) = f(2)$ 일 때,  $f(2)g(1)h(3)$ 의 값을 구하시오.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

20

집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 함수 중 일대일대응의 개수는  $a$ 이고, 항등함수의 개수는  $b$ 이면 상수함수의 개수는  $c$ 이다. 이때  $a, b, c$ 에 알맞은 수를 차례대로 적은 것은?

- ① 6, 3, 3      ② 6, 3, 1      ③ 6, 1, 3  
④ 27, 3, 1      ⑤ 27, 1, 3

21

집합  $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 는 일대일대응이다. 함수  $f$ 가  $(f \circ f)(3) = 1$ 을 만족시킬 때,  $3f(1) + f(2)$ 의 값을 구하시오.

22

함수  $f(x) = ax + b$  ( $a > 0$ )에 대하여  $(f \circ f)(x) = 9x + 4$ 일 때,  $f(2)$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

23

$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{4x^2 + 16x}{x+1} \div \frac{2x-4}{x-3}$ 를 간단히 하면?

- ①  $x$       ②  $2x$       ③  $x-2$   
④  $2x-6$       ⑤  $x+4$

24

$x \neq -1, x \neq 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{b}{x^a-1}$  가 성립할 때,  $ab$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

25

함수  $y = \frac{5x-12}{2x+1}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $n$ 만큼 평행이동한 그래프가 직선  $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이고  $x$ 축과 만나지 않을 때, 실수  $m, n$ 에 대하여  $m-n$ 의 값을 구하시오.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

**26**

[2006년 3월 고2 28번]

두 분수함수  $y = \frac{ax+1}{2x-6}$ ,  $y = \frac{bx+1}{2x+6}$ 의 그래프가  
직선  $y = x$ 에 대하여 대칭일 때,  $b-a$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.)

**27**

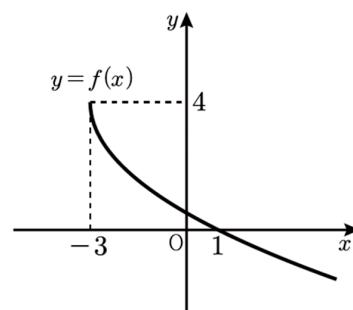
함수  $y = \sqrt{6-3x} + 1$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은  $\{x | x \leq 2\}$ 이다.
- ② 치역은  $\{y | y \geq 1\}$ 이다.
- ③ 그래프는 점  $(2, 0)$ 을 지난다.
- ④ 그래프는  $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
- ⑤ 그래프는 제2사분면을 지난다.

**28**

[2017년 9월 고2 이과 10번 변형]

정의역이  $\{x | x \geq -3\}$ 인 무리함수  
 $f(x) = -\sqrt{ax+b} + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 점  $(1, 0)$ 을 지난 때,  
두 상수  $a, b$ 의 합  $a+b$ 의 값은?

- |      |      |      |
|------|------|------|
| ① 14 | ② 15 | ③ 16 |
| ④ 17 | ⑤ 18 |      |

**29**

두 함수  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{4x+1}$ 에 대하여  
 $(f \circ g^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

30

세 집합  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x+y \mid x \in A, y \in A\}$ ,  $C = \{xy \mid x \in A, y \in A\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ①  $A \subset B \subset C$       ②  $A \subset C \subset B$   
③  $A \subset B, A \subset C$       ④  $A \subset C, B \subset C$   
⑤  $B \subset A, B \subset C$

31

두 집합  $A = \{1, a+2\}$ ,  $B = \{3, a^2+2, a+1\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 일 때, 실수  $a$ 의 값을 구하시오.

32

두 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\}$ ,  
 $B = \left\{ x \left| x = \frac{16}{n}, x, n \text{은 자연수} \right. \right\}$ 에 대하여  
 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합  $X$ 의 개수를 구하시오.

33

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합  
 $A = \{2, 4, a+1\}$ ,  $B = \{a^2 - 3a + 1, a - 3\}$   
에 대하여  $(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) = \{1, 2, 4\}$  일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 2      ② 3      ③ 4  
④ 5      ⑤ 6

34

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 16 \text{의 양의 약수}\}$ 의 두 부분집합  
 $A = \{2, 4, 8\}$ ,  $B = \{2, 8, 16\}$ 에 대하여  
 $A \cup X = B \cup X$ 를 만족시키는  $U$ 의 부분집합  $X$ 의 개수를 구하시오.

35

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합  
 $A, B$ 에 대하여 연산 \* 를  
 $A * B = (A - B^C) \cup (A^C - B)$ 로 약속할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- 〈보기〉  
ㄱ.  $\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$   
ㄴ.  $A^C * B = B^C * A$   
ㄷ.  $A^C * B = \emptyset$  을 만족시키는 두 집합  $A, B$ 의 순서쌍  $(A, B)$ 의 개수는 128이다.

- ① ㄴ      ② ㄷ      ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

**36** 두 집합  $A = \{x \mid x^2 - 6x + a \leq 0\}$ ,

$B = \{x \mid x^2 - x + b < 0\}$ 에 대하여  $A \cap B = \emptyset$ ,

$A \cup B = \{x \mid -1 < x \leq 4\}$ 를 만족시키는

두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

**39** 명제 ' $x^2 - 6x - 27 > 0$ 이면

$x^2 - 4ax + 3a^2 > 0$ 이다.'의 대우가 참이 되도록 하는

정수  $a$ 의 개수는?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

**37** 어느 반 25명의 학생에게 3개의 수학 문제  $a, b, c$ 를 풀게 하였더니  $a$ 문제만 맞힌 학생은 5명,  $b$ 문제만 맞힌 학생은 8명이었고,  $c$ 문제를 맞힌 학생은 9명이었다.  $a$ 문제와  $b$ 문제는 맞히고  $c$ 문제는 틀린 학생 수를 구하시오.

(단, 세 문제를 모두 틀린 학생은 없었다.)

**38** 다음 보기 중 참인 명제의 개수는?

(단,  $a, b, c$ 는 실수이다.)

〈보기〉

ㄱ.  $|a| + |b| = 0$ 이면  $ab = 0$ 이고,

$ab = 0$ 이면  $|a| + |b| = 0$ 이다.

ㄴ.  $a < b$ 이면  $ac < bc$ 이다.

ㄷ.  $a < b$ 이면  $a^2 < b^2$ 이다.

ㄹ.  $a + b\sqrt{3} = 0$ 이면  $a = 0$ 이고  $b = 0$ 이다.

ㅁ.  $a < b$ 이면  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이다.

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

**40** 두 집합  $P, Q$ 는 각각 조건  $p, q$ 의 진리집합이다. 두 집합  $P, Q$ 에 대하여  $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

②  $p$ 는  $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

③  $p$ 는  $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

④  $\sim p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤  $\sim p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

41

다음은 명제 ‘정수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2$ 이 짝수이면  $a+b$ 가 짝수이다.’가 참임을 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. 이때 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것은?

주어진 명제의 대우 ‘ $a+b$ 가 홀수이면  $a^2 + b^2$ 이 (가)이다.’가 참임을 보이면 된다.  
 $a+b$ 가 홀수이므로  $a+b = 2k-1$  ( $k$ 는 정수)라 하자.  
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - \boxed{\text{(나)}} = 2(\boxed{\text{(다)}}) + 1$$
이고 (다)는 정수이므로  $a^2 + b^2$ 은 (가)이다.  
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

- |      |     |                   |
|------|-----|-------------------|
| (가)  | (나) | (다)               |
| ① 홀수 | 2ab | $2k^2 - 2k - ab$  |
| ② 홀수 | 2ab | $k^2 - k - ab$    |
| ③ 홀수 | 4ab | $2k^2 - 2k - 2ab$ |
| ④ 짝수 | 4ab | $k^2 - k - 2ab$   |
| ⑤ 짝수 | 2ab | $2k^2 + 2k + ab$  |

42

다음은 명제 “ $x, y$ 가 정수일 때,  $xy$ 가 짝수이면  $x, y$  중 적어도 하나는 짝수이다.”를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 결론을 부정하여

(가)이면  $x = 2m+1, y = \boxed{\text{(나)}}$  ( $m, n$ 은 정수)

라 할 수 있다. 이때

$xy = 2(2mn+m+n) + 1$ 이므로  $xy$ 는 홀수이다.

이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 고르면?

(가)

(나)

①  $x$  또는  $y$ 가 짝수

2n

②  $x, y$  중 하나만 짝수

2n

③  $x, y$  중 하나만 홀수

2n+1

④  $x, y$  모두 홀수

2n+1

⑤  $x, y$  모두 짝수

2n+1

43

[2017년 3월 고3 문과 12번 변형]

실수  $x$ 에 대한 조건

‘모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2 - 2kx - 3k^2 > 4k - 30$ 이다.’

가 참인 명제가 되도록 하는 정수  $k$ 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

44

[2021년 11월 고1 14번 변형]

$\angle C = 90^\circ$  인 직각삼각형 ABC에 대하여

삼각형 ABC의 넓이가 7일 때,  $\overline{AB}^2$ 의 최솟값은?

- ① 28      ② 32      ③ 36  
④ 40      ⑤ 44

47

[2008년 4월 고3 이과 이산수학 26번]

두 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 조건을

모두 만족하는 함수  $f : X \rightarrow Y$  의 개수는?

I.  $f(4) = 5$

II. 집합 X의 임의의 두 원소  $x_1, x_2$ 에 대하여

$x_1 < x_2$  이면  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① 8      ② 9      ③ 10  
④ 11      ⑤ 12

45

$f$ 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

- Ⓐ  $f(2n) = 2 \cdot f(n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
Ⓑ  $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

이때  $f(32)$ 의 값을 구하시오.

46

이차함수  $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수  $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합  $X$ 가  $X = \{x \mid x \geq k\}$ 일 때, 실수  $k$ 의 값은?

- ① 0      ② 1      ③ 2  
④ 3      ⑤ 4

48

정의역이  $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수  $f(x) = |x| - 2$ 에 대하여 방정식  $(f \circ f)(x) = ax + b$ 의 근이 무수히 많을 때,  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

49

두 함수  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = 2x + 4$ 에서  $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족하는 일차함수  $h(x)$ 에 대하여  $h(1)$ 의 값을 구하시오.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

**50** 함수  $f(x) = 3x$ 에 대하여

$$f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

일 때,  $f^k(3) = 2187$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 값은?

- |     |     |     |
|-----|-----|-----|
| ① 5 | ② 6 | ③ 7 |
| ④ 8 | ⑤ 9 |     |

**51** 두 정수  $a, b$ 에 대하여

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} a(x-3)^2 + b & (x < 3) \\ -x + 10 & (x \geq 3) \end{cases}$$

집합에서 정의된 역함수를 갖는다.  $a+b$ 의 최솟값은?

- |     |      |     |
|-----|------|-----|
| ① 6 | ② 7  | ③ 8 |
| ④ 9 | ⑤ 10 |     |

**52** [2017년 3월 고2 이과 25번 변형]

함수  $f(x) = 2x^3 - 1$ 에 대하여

$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(a) = 2$ 을 만족시키는 실수  $a$ 의 값을 구하시오.

**53** 세 함수  $f(x) = x + 1, g(x) = -2x + 5, h(x)$ 에 대하여  $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때,

$h(2)$ 의 값은?

- |      |      |     |
|------|------|-----|
| ① -2 | ② -1 | ③ 0 |
| ④ 1  | ⑤ 2  |     |

**54** 함수  $f(x) = x^2 + 4x + k \quad (x \geq -2)$ 의 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 에 대하여 점  $(4, 1)$ 이 함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점일 때, 상수  $k$ 의 값은?

- |      |      |     |
|------|------|-----|
| ① -2 | ② -1 | ③ 0 |
| ④ 1  | ⑤ 2  |     |

**55** 함수  $y = \frac{3x+5}{x+1}$ 의 치역이  $\{y | y \leq 1 \text{ 또는 } y \geq 5\}$ 일 때, 정의역에 속하는 모든 정수의 합을  $k$ 라 하자.  $k^2$ 의 값을 구하시오.

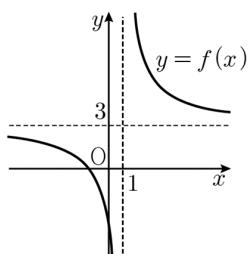
# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 56** 유리함수  $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점  $(a-1, 2a)$ 를 지날 때,  $1 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은?  
(단,  $a$ 는 상수)

- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$   
④ 2      ⑤  $\frac{5}{2}$

- 57** 다음 그림은 유리함수  $f(x) = \frac{7}{x-1} + 3$ 의 그래프이다.  
제1사분면에서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위에 점  $P(a, b)$ 가 있을 때,  $(a-1)+(b-3)$ 의 최솟값은?



- ①  $2\sqrt{3}$       ② 4      ③  $2\sqrt{5}$   
④  $2\sqrt{6}$       ⑤  $2\sqrt{7}$

- 58** 유리함수  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ 에 대하여  $f^{2015}(1)$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $f^1 = f$ ,  $f^{n+1} = f \circ f^n$ ,  $n$ 은 자연수)

- 59** 무리함수  $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선  $y = x+k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수  $k$ 의 범위는?

- ①  $\frac{3}{2} < k < 2$       ②  $\frac{3}{2} \leq k < 2$       ③  $\frac{3}{2} \leq k \leq 2$   
④  $\frac{3}{2} < k \leq 2$       ⑤  $1 \leq k < 2$

- 60** 두 조건  
 $p : -1 \leq x \leq k$ ,  $q : x \leq 0$  또는  $x \geq 7$   
에 대하여 명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 양의 정수인 반례가  $x = 6$ 뿐일 때, 실수  $k$ 의 값의 범위는?

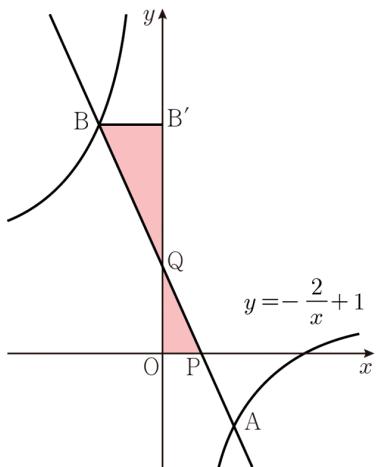
- ①  $k < 5$       ②  $k \geq 6$       ③  $4 \leq k < 5$   
④  $5 \leq k < 6$       ⑤  $6 \leq k < 7$

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 61** 전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 공집합이 아닌 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여 두 명제  
 ‘집합  $A$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $x^2 - 5x + 4 < 0$ 이다.’  
 ‘집합  $B$ 의 어떤 원소  $x$ 에 대하여  $x \in A$ 이다.’  
 가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합  $A, B$ 의 모든 순서쌍  $(A, B)$ 의 개수를 구하시오.

- 62** 곡선  $y = -\frac{2}{x} + 1$  위의 두 점  $A(1, -1), B\left(k, -\frac{2}{k} + 1\right)$  ( $-2 < k < 0$ )을 지나는 직선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각  $P, Q$ 라 하자.  
 점  $B$ 에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을  $B'$ 이라 할 때,  
 두 삼각형  $BQB'$ ,  $OPQ$ 의 넓이를 각각  $S_1, S_2$ 라 하자.  
 $S_1 + S_2$ 의 최솟값을  $m$ , 그 때의  $k$ 값을  $\alpha$ 라 할 때,  
 $m + \alpha$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.)



- ①  $\frac{\sqrt{5}}{5} - 1$     ②  $\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1$     ③  $\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1$   
 ④  $\frac{4\sqrt{5}}{5} - 1$     ⑤  $\sqrt{5} - 2$

- 63** 함수  $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 4) \\ -2x + 12 & (x > 4) \end{cases}$ 에 대하여  
 합성함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가  
 이차함수  $y = -x^2 + 8x + k$ 의 그래프와 오직 한 점에서  
 만나기 위한 상수  $k$ 의 값은?  
 ① -13    ② -11    ③ -9  
 ④ -7    ⑤ -5

- 64** 자연수  $n$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 곡선  
 $y = \sqrt{x+n+2}, y = \sqrt{-x+n+2}$  와  $x$ 축으로  
 둘러싸인 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 좌표를  
 $(x, y)$ 라 하자.  $x$ 좌표는 정수,  $y$ 좌표는 자연수인 점의  
 개수를  $f(n)$ 이라 할 때,  
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(14)$ 의 값을 구하시오.

# 중앙대학교 사범대학 부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

## 공통수학2

이름

### 빠른정답

01 ③	02 ①	03 ③
04 6	05 57	06 2
07 ②, ④	08 ⑤	09 ①
10 ④	11 ④	12 ④
13 ⑤	14 ③	15 ④
16 ①	17 2	18 15
19 6	20 ③	21 10
22 7	23 ②	24 16
25 4	26 12	27 ③
28 ③	29 17	30 ③
31 0	32 2	33 ③
34 8	35 ④	36 ③
37 3	38 ①	39 ②
40 ①	41 ①	42 ④
43 ②	44 ①	45 64
46 ③	47 ①	48 1
49 -2	50 ②	51 ③
52 15	53 ③	54 ②
55 4	56 ③	57 ⑤
58 -3	59 ②	60 ④
61 56	62 ③	63 ①
64 486		



# 중앙대학교 사범대학 부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
64문제 / DRE수학	

## 공통수학2

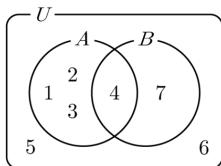
이름

### 01 정답 ③

해설  $\neg$ ,  $\exists$ . 같은 기준이 명확하지 않으므로 집합이 될 수 없다.

### 02 정답 ①

해설  $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = (\{1, 2, 3, 4, 7\})^C = \{5, 6\}$



### 03 정답 ③

해설 함수의 그래프는 임의의 실수  $a$ 에 대하여  $y$ 축에 평행한 직선  $x = a$ 와 오직 한 점에서 만난다.  
따라서 함수의 그래프인 것은 ③이다.

### 04 정답 6

해설 ㄱ. 실수  $k$ 에 대하여 직선  $y = k$ 와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.  
ㄴ. 음수  $k$ 에 대하여 직선  $y = k$ 와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.  
ㄷ. 음수  $k$ 에 대하여  $y = k$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.  
그런데 치역이  $\{y | y < 0\}$ 이므로 일대일대응이 아니다.  
ㄹ. 음수  $k$ 에 대하여 직선  $y = k$ 와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.  
ㅁ, ㅂ. 실수  $k$ 에 대하여 직선  $y = k$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.  
따라서 그래프가 일대일함수인 것은 ㄷ, ㅁ, ㅂ의 3개, 일대일대응인 것은 ㅁ, ㅂ의 2개이다.  
즉,  $a = 3$ ,  $b = 2$ 이므로  
 $ab = 6$

### 05 정답 57

해설  $f^{-1}(a) = 12$ 에서  $a = f(12)$   
즉,  $f(12) = 5 \cdot 12 - 3 = 60 - 3 = 57$ 이므로  
 $a = 57$

### 06 정답 2

해설  $(f^{-1} \circ g)(5) + (g^{-1} \circ f)(5)$   
 $= f^{-1}(g(5)) + g^{-1}(f(5))$   
 $= f^{-1}(3) + g^{-1}(7)$   
 $= 1 + 1$   
 $= 2$

### 07 정답 ②, ④

해설 분모에 미지수  $x$ 가 포함되지 않은  
②  $\frac{x+1}{3}$ , ④  $\frac{2x^2+1}{2}$ 는 다항식이므로 분수식이  
아니다.

### 08 정답 ⑤

해설  $x : y = 4 : 3$ 에서  $3x = 4y$ 이므로  
 $x = \frac{4}{3}y$   
 $\therefore \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{16}{9}y^2 + \frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 - y^2} = \frac{28}{7} = 4$

### 09 정답 ①

해설 (i)  $i = j$ 일 때  
 $a_{11} = -a_{11}$ ,  $a_{22} = -a_{22}$ 에서  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} = 0$   
(ii)  $i \neq j$ 일 때  $a_{12} = -a_{21}$   
(i), (ii)에서 집합  $A$ 의 원소는  
 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  ( $a$ 는 상수) 꼴이어야 하므로 집합  $A$ 의 원소인 것은 ㄱ, ㄷ이다.



# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 10 정답 ④

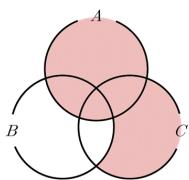
- 해설 ①  $3 \in S$ 이므로  $3 \cdot 3 = 9 \in S$   
②  $3 \in S, 5 \in S$ 이므로  $3 \cdot 5 = 15 \in S$   
③  $5 \in S$ 이므로  $5 \cdot 5 = 25 \in S$   
④  $3 \in S, 15 \in S$ 이므로  $3 \cdot 15 = 45 \in S$

## 11 정답 ④

해설  $(A^c \cap B^c) \cup (A \cup B) = (A \cup B)^c \cup (A \cup B)$   
 $= U$

## 12 정답 ④

해설  $A \cup (B^c \cap C) = A \cup (C - B)$ 이므로 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



## 13 정답 ⑤

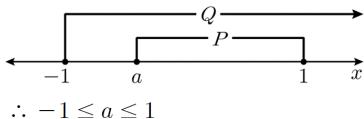
해설  $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$   
 $= n(U) - n(A \cup B)$   
 $= 20 - n(A \cup B) = 8$   
 $\therefore n(A \cup B) = 12$   
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서  
 $12 = n(A) + n(B) - 4$   
 $\therefore n(A) + n(B) = 16$

## 14 정답 ③

해설 명제 '모든 자연수는 정수이다.'의 부정은  
'어떤 자연수는 정수가 아니다.'이다.  
따라서 '정수가 아닌 자연수가 있다.'이다.

## 15 정답 ④

해설 조건  $p, q$ 를 만족하는 진리집합을 각각 P, Q라 하면 다음과 같이 수직선으로 나타낼 수 있다.



$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

## 16 정답 ①

- 해설 ㄱ.  $x$ 가 실수이므로 필요충분조건이다.  
ㄴ.  $q \rightarrow p$  (반례)  $x = 0, y = 1$   
즉,  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.  
ㄷ.  $q \rightarrow p$  (반례)  $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$   
즉,  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.  
따라서  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ이다.

## 17 정답 2

해설 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면  
 $P = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}, Q = \{x \mid x \leq a\}$   
 $P \subset Q$ 를 만족시켜야 하므로  
 $a \geq 2$   
따라서 실수  $a$ 의 최솟값은 2이다.

## 18 정답 15

해설 두 함수  $f, g$ 가 서로 같으므로  
 $f(3) = g(3)$ 에서  $9 - 15 + 19 = 3b + 4$   
 $3b = 9 \quad \therefore b = 3$   
 $f(a) = g(a)$ 에서  $a^2 - 5a + 19 = 3a + 4$   
 $a^2 - 8a + 15 = 0, (a-3)(a-5) = 0$   
 $\therefore a = 5 (\because a \neq 3)$   
 $\therefore ab = 5 \cdot 3 = 15$

## 19 정답 6

해설 함수  $g$ 는 항등함수이므로  
 $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3$   
 $f(1) = g(2) = h(3)$ 에서  $f(1) = h(3) = 2$   
이때 함수  $f$ 는  $X$ 에서  $X$ 로의 함수이고,  
일대일대응이므로  $f(1) + f(3) = f(2)$ 에서  
 $f(2) = 3, f(3) = 1$   
 $\therefore f(2)g(1)h(3) = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 20 정답 ③

- 해설**
- (i) 일대일대응  $f: X \rightarrow X$  라 하면  
 $f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-1, 0, 1$  중  
 하나이므로 3개  
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $f(-1)$ 의 값을 제외한  
 2개  
 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $f(-1), f(0)$ 의 값을  
 제외한 1개이다.  
 따라서 일대일대응의 개수는  
 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
  - (ii) 항등함수  $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 의 1개
  - (iii) 상수함수의 개수는  $x \in X$ 에 대하여  
 $f(x) = -1$  또는  $f(x) = 0$  또는  $f(x) = 1$ 의 3개
- (i), (ii), (iii)에 의하여  $a, b, c$ 에 알맞은 수는 차례대로  
 $6, 1, 3$ 이다.

## 21 정답 10

- 해설**
- (i)  $f(3) = 1$ 이면  
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 1$   
 이때 함수  $f$ 가 일대일대응이 아니므로  $f(3) \neq 1$
  - (ii)  $f(3) = 2$ 이면  
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(2) = 1$
  - (iii)  $f(3) = 3$ 이면  
 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(3) = 1$   
 이때  $f(3) = 3$ 을 만족시키지 않으므로  $f(3) \neq 3$
- (i) ~ (iii)에서  $f(2) = 1, f(3) = 2$ 이고,  
 $f$ 가 일대일대응이므로  $f(1) = 3$   
 $\therefore 3f(1) + f(2) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

## 22 정답 7

- 해설**
- $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a^2x + ab + b$$
- 이므로  $a^2x + ab + b = 9x + 4$
- $$a^2 = 9 \text{에서 } a = 3 (\because a > 0)$$
- $$ab + b = 4 \text{에서 } b = 1$$
- 따라서  $f(x) = 3x + 1$ 이므로  $f(2) = 7$

## 23 정답 ②

**해설**

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{4x^2 + 16x}{x+1} \div \frac{2x - 4}{x-3} \\ &= \frac{(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)} \cdot \frac{4x(x+4)}{(x+1)} \cdot \frac{(x-3)}{2(x-2)} \\ &= 2x \end{aligned}$$

## 24 정답 16

**해설**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \\ &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2+1} \\ &= \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} \\ &= \frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{4}{x^4-1} \\ &\text{따라서 } a = 4, b = 4 \text{이므로 } ab = 16 \end{aligned}$$

## 25 정답 4

**해설**

$$y = \frac{5x-12}{2x+1} = \frac{\frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{29}{4}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{x + \frac{1}{2}} - \frac{\frac{29}{4}}{x + \frac{1}{2}}$$

이므로 이 함수의 점근선은  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{5}{2}$

이 함수의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼,  
 $y$ 축의 방향으로  $n$ 만큼 평행이동한 그래프의 점근선은  
 $x = -\frac{1}{2} + m, y = \frac{5}{2} + n$ 이므로

그래프가  $x$ 축과 만나지 않으려면  
 $\frac{5}{2} + n = 0, \text{ 즉 } n = -\frac{5}{2}$

점  $\left(-\frac{1}{2} + m, 0\right)$ 은 직선  $y = -x + 1$  위의 점이므로  
 $-\frac{1}{2} + m = 1, \text{ 즉 } m = \frac{3}{2}$

$\therefore m - n = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 26 정답 12

**해설** 분수함수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 분수함수  $y = \frac{ax+1}{2x-6}$ ,  $y = \frac{bx+1}{2x+6}$ 의 그래프가

직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이면 두 함수는 서로 역함수이다.

$$y = \frac{ax+1}{2x-6} \text{에서 } x, y \text{를 서로 바꾸면 } x = \frac{ay+1}{2y-6}$$

이를 정리하면

$$x(2y-6) = ay+1, (2x-a)y = 6x+1$$

$$\therefore y = \frac{6x+1}{2x-a}$$

따라서  $y = \frac{ax+1}{2x-6}$ 의 역함수는  $y = \frac{6x+1}{2x-a}$ 이다.

이때  $y = \frac{bx+1}{2x+6} = \frac{6x+1}{2x-a}$ 이어야 하므로

$$a = -6, b = 6$$

$$\therefore b - a = 12$$

[다른 풀이]

두 분수함수의 그래프가 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이면 점근선의 교점도 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$y = \frac{ax+1}{2x-6}$ 의 점근선은  $x = 3, y = \frac{a}{2}$  이므로

점근선의 교점의 좌표는  $\left(3, \frac{a}{2}\right)$ 이다.

$y = \frac{bx+1}{2x+6}$ 의 점근선은  $x = -3, y = \frac{b}{2}$  이므로

점근선의 교점의 좌표는  $\left(-3, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

이때 두 점  $\left(3, \frac{a}{2}\right), \left(-3, \frac{b}{2}\right)$ 가 직선  $y = x$ 에 대하여

대칭이려면  $3 = \frac{b}{2}, \frac{a}{2} = -3$ 이어야 한다.

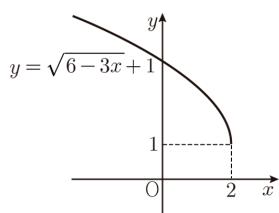
$$\therefore a = -6, b = 6$$

$$\therefore b - a = 12$$

## 27 정답 ③

**해설**  $y = \sqrt{6-3x} + 1 = \sqrt{-3(x-2)} + 1$  이므로

함수  $y = \sqrt{6-3x} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그레프는 점  $(2, 1)$ 을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ③

## 28 정답 ③

**해설** 정의역이  $\{x | x \geq -3\}$ 이므로

$$f(x) = -\sqrt{a(x+3)} + 4, b = 3a$$

$$f(1) = -\sqrt{4a} + 4 = 0, \sqrt{4a} = 4$$

$$a = 4, b = 12$$

$$\text{따라서 } a+b = 16$$

## 29 정답 17

**해설**  $g^{-1}(5) = k$ 라 하면  $g(k) = 5$

$$\sqrt{4k+1} = 5 \text{에서 } 4k+1 = 25$$

$$\therefore k = 6$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5)) = f(6)$$

$$= 3 \cdot 6 - 1$$

$$= 17$$

## 30 정답 ③

**해설**  $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ 이므로

$$A \subset B, A \subset C$$

## 31 정답 0

**해설**  $A \subset B$ 이므로 집합  $A$ 의 모든 원소가 집합  $B$ 에 속한다.

즉,  $1 \in A$ 에서  $1 \in B$ 이므로  $a^2 + 2 = 1$  또는  $a + 1 = 1$

(i)  $a^2 + 2 = 1$ 일 때,  $a^2 = -1$ 을 만족시키는  $a$ 의 값은 존재하지 않는다.

(ii)  $a + 1 = 1$ 일 때,  $a = 0$

이때  $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ 이므로  $A \subset B$

(i), (ii)에서  $A \subset B$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은 0이다.

## 32 정답 2

**해설**  $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

따라서 집합  $X$ 의 개수는  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 의

부분집합 중에서 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는

부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-4} = 2^1 = 2$$

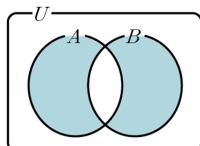
# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 33 정답 ③

**해설**  $(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$   
 $= \{1, 2, 4\}$

이때 집합  $(A - B) \cup (B - A)$ 는 다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분과 같고



$2 \in (A - B), 4 \in (B - A)$   
 $a + 1 \in (A - B)$ 이면  $a + 1 = 1$ 이므로  
 $a = 0$   
 이때  $B = \{1, -3\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.  
 $\therefore a + 1 \in (A \cap B)$   
 즉,  $a + 1 = a^2 - 3a + 1$  또는  $a + 1 = a - 3$ 이어야 한다.  
 (i)  $a + 1 = a^2 - 3a + 1$  일 때,  
 $a^2 - 4a = 0$ 에서  $a(a - 4) = 0$   
 $\therefore a = 0$  또는  $a = 4$   
 이때  $a - 3 = 1$ 이어야 하므로  
 $a = 4$   
 (ii)  $a + 1 = a - 3$  일 때,  
 $1 \neq -3$ 이므로  $a$ 의 값이 존재하지 않는다.  
 (i), (ii)에 의하여  $a = 4$

## 34 정답 8

**해설**  $U = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이고,  $U$ 의 부분집합  $X$ 가  $\{2, 4, 8\} \cup X = \{2, 8, 16\} \cup X$ 를 만족시키려면  
 집합  $X$ 는 두 집합  $\{2, 4, 8\}, \{2, 8, 16\}$ 의 공통인 원소  
 $2, 8$ 을 제외한 나머지 원소  $4, 16$ 을 반드시 원소로 가져야  
 한다. 따라서 구하는 집합  $X$ 의 개수는  
 $2^{5-2} = 2^3 = 8$

## 35 정답 ④

**해설**  $A * B = (A - B^C) \cup (A^C - B)$   
 $= (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$   
 $= (A \cap B) \cup (A \cup B)^C$   
 $\vdash \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 3\}$   
 $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로  
 $\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 5\} = \{2, 3\} \cup \{4, 6, 7\}$   
 $= \{2, 3, 4, 6, 7\}$

$$\begin{aligned} \vdash A^C * B &= (A^C \cap B) \cup (A^C \cup B)^C \\ &= (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C) \\ B^C * A &= (B^C \cap A) \cup (B^C \cup A)^C \\ &= (B^C \cap A) \cup (B \cap A^C) \\ &= (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C) \\ \text{따라서 } A^C * B &= B^C * A \\ \vdash A^C * B &= (A^C \cap B) \cup (A^C \cup B)^C = \emptyset \text{에서} \\ A^C \cap B &= \emptyset, (A^C \cup B)^C = \emptyset \\ \text{즉, } A^C \cap B &= \emptyset, A^C \cup B = U \text{이므로} \\ B &= (A^C)^C = A \\ \text{따라서 } A^C * B &= \emptyset \text{를 만족시키는 집합 } A \text{가} \\ \text{정해지면 집합 } B \text{도 정해지므로} \\ \text{구하는 순서쌍 } (A, B) \text{의 개수는 전체집합 } U \text{의} \\ \text{부분집합 } A \text{의 개수와 같다.} \\ \therefore 2^7 &= 128 \\ \text{따라서 옳은 것은 } \vdash, \vdash \text{이다.} \end{aligned}$$

## 36 정답 ③

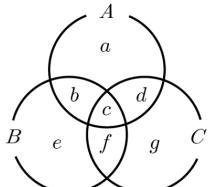
**해설**  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{x | -1 < x \leq 4\}$   
 이므로  
 $x^2 - 6x + a = (x - 4)(x - 2)$ 이고  
 $x^2 - x + b = (x + 1)(x - 2)$ 이다.  
 따라서  $a = 8, b = -2$ 이다.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 37 정답 3

**해설** 수학 문제  $a, b, c$ 를 맞힌 학생의 집합을 각각  $A, B, C$ 라 하면 다음과 같은 벤다이어그램에서  $a$  부분에 속하는 원소의 개수가 5,  $e$  부분에 속하는 원소의 개수가 8,  $c, d, f, g$  부분에 속하는 원소의 개수의 합이 9이다.



이때 구하는 학생 수는  $b$  부분에 속한 원소의 개수이므로  
 $25 - (5 + 8 + 9) = 3$

## 38 정답 ①

**해설** ㄱ.  $|a| + |b| = 0$ 이면  $a = 0, b = 0$ 이므로  $ab = 0$ 이다.  
그런데  $ab = 0$ 이면  $a = 0$  또는  $b = 0$ 이므로  
 $ab = 0$ 이면  $|a| + |b| = 0$ 이 아닐 수 있다. (거짓)  
ㄴ.  $c \leq 0$ 이면  $a < b$ 일 때  $ac \geq bc$ 이다. (거짓)  
ㄷ. [반례]  $a = -1, b = 0$  (거짓)  
ㄹ. [반례]  $a = \sqrt{3}, b = -1$  (거짓)  
ㅁ. [반례]  $a = -1, b = 1$  (거짓)  
따라서 주어진 명제 중 참인 명제의 개수는 0이다.

## 39 정답 ②

**해설** 명제 ' $x^2 - 6x - 27 > 0$ 이면  
 $x^2 - 4ax + 3a^2 > 0$ 이다.'의 대우는  
' $x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$ 이면  $x^2 - 6x - 27 \leq 0$ 이다.'이다.  
두 조건을 각각

$p : x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0, q : x^2 - 6x - 27 \leq 0$   
이라 하고, 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면  
 $x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$ 에서  $(x-a)(x-3a) \leq 0$ 이므로  
 $P = \{x | (x-a)(x-3a) \leq 0\},$   
 $x^2 - 6x - 27 \leq 0$ 에서  $(x+3)(x-9) \leq 0$ 이므로  
 $-3 \leq x \leq 9$   
즉,  $Q = \{x | -3 \leq x \leq 9\}$   
이때 명제  $p \rightarrow q$ 가 참이므로  $P \subset Q$ 이므로  
(i)  $a < 0$ 일 때  
 $P = \{x | 3a \leq x \leq a\}$ 이고  $P \subset Q$ 이므로  
 $-3 \leq 3a, a \leq 9$   
즉,  $-1 \leq a < 0$   
(ii)  $a = 0$ 일 때  
 $P = \{0\}$ 이므로  $P \subset Q$ 가 성립한다.  
(iii)  $a > 0$ 일 때  
 $P = \{x | a \leq x \leq 3a\}$ 이고  $P \subset Q$ 이므로  
 $-3 \leq a, 3a \leq 9$   
즉,  $0 < a \leq 3$   
(i), (ii), (iii)에서  $-1 \leq a \leq 3$ 이므로 구하는 정수  $a$ 의  
개수는 5이다.

## 40 정답 ①

**해설**  $P - (P - Q) = P - (P \cap Q^c)$   
 $= P \cap (P \cap Q^c)^c$   
 $= P \cap (P^c \cup Q)$   
 $= (P \cap P^c) \cup (P \cap Q)$   
 $= \emptyset \cup (P \cap Q)$   
 $= P \cap Q$

따라서  $P \cap Q = P$ 에서  $P \subset Q$ , 즉  $p \rightarrow q$ 이므로  
 $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

### 41 정답 ①

**해설** 주어진 문제의 대우 '  $a+b$  가 홀수이면  $a^2 + b^2$  이 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다.  
 $a+b$  가 홀수이므로  $a+b = 2k-1$  ( $k$ 는 정수)라 하자.  

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= (2k-1)^2 - 2ab \\ &= 4k^2 - 4k + 1 - 2ab \\ &= 2(2k^2 - 2k - ab) + 1 \end{aligned}$$
 이고  $2k^2 - 2k - ab$ 는 정수이므로  $a^2 + b^2$ 은 홀수이다.  
 따라서 주어진 문제의 대우가 참이므로 주어진 문제도 참이다.  
 $\therefore (\text{가}): \text{홀수}, (\text{나}): 2ab, (\text{다}): 2k^2 - 2k - ab$

### 42 정답 ④

**해설** 주어진 문제의 결론을 부정하여  $x, y$ 가 모두 홀수이면  $x = 2m+1, y = 2n+1$  ( $m, n$ 은 정수)라 할 수 있다.  
 이때  $xy = 2(2mn+m+n)+1$ 이므로  $xy$ 는 홀수이다.  
 이것은 가정에 모순이므로 주어진 문제는 참이다.  
 따라서 (가)  $x, y$  모두 홀수, (나)  $2n+1$ 이다.

### 43 정답 ②

**해설** 모든 실수  $x$ 에 대하여  
 부등식  $x^2 - 2kx - 3k^2 > 4k - 30$ 이 참인 문제가 되려면  
 $f(x) = x^2 - 2kx - 3k^2 - 4k + 30$ 이라 할 때,  
 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 만나지 않아야 한다.  
 즉, 이차방정식  $x^2 - 2kx - 3k^2 - 4k + 3 = 0$ 이  
 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로  
 이차방정식  $x^2 - 2kx - 3k^2 - 4k + 3 = 0$ 의 판별식을  
 $D$ 라 하면  

$$\begin{aligned} D &= k^2 - (-3k^2 - 4k + 3) \\ &= 4k^2 + 4k - 3 \\ &= (2k+3)(2k-1) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}$$
 따라서 정수  $k$ 의 개수는  $-1, 0$ 의 2이다.

### 44 정답 ①

**해설**  $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ 라 하면  
 직각삼각형 ABC의 넓이는  $\frac{1}{2}ab$ 이므로  

$$\frac{1}{2}ab = 7$$

$$\therefore ab = 14$$
 선분 AB가 직각삼각형 ABC의 빗변이므로  

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$$
 이때  $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로  
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여  

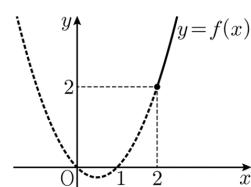
$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$
 (단, 등호는  $a^2 = b^2$ 일 때 성립)  
 따라서  $a^2 + b^2 \geq 28$ 이므로  $\overline{AB}^2$ 의 최솟값은 28이다.

### 45 정답 64

**해설**  $f(32) = 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4)$   
 $= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1)$   
 $= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64$

### 46 정답 ③

**해설** 주어진 함수  $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면 함수  $f$ 의 정의역과 치역이 모두 집합  $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이어야 한다.  
 즉,  $f(k) = k$ 에서  
 $k^2 - k = k, k^2 - 2k = 0$   
 $\therefore k = 0$  또는  $k = 2$   
 (i)  $k = 0$ 일 때  
 $f(0) = f(1)$ 이므로  
 함수  $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.  
 (ii)  $k = 2$ 일 때  
 다음 그림과 같이 함수  $f(x) = x^2 - x$ 는  
 일대일대응이 된다.



따라서 (i), (ii)에서 구하는 실수  $k$ 의 값은 2이다.

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 47 정답 ①

해설 조합을 이용하여 경우의 수 구하기

조건 Ⅱ에 의하여 순서가 정해지므로

1, 2, 3, 4에서 3개를 선택하는 방법의 수는  ${}_4C_3 = 4$

6, 7에서 1개를 선택하는 방법의 수는  ${}_2C_1 = 2$

$$\therefore {}_4C_3 \times {}_2C_1 = 8$$

## 48 정답 1

해설  $(f \circ f)(x) = ax + b$ 의 실근의 개수는

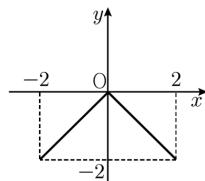
함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선  $y = ax + b$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = |x| - 2 \text{에서 } (f \circ f)(x) = ||x| - 2| - 2$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{일 때, } (f \circ f)(x) = -x$$

$$-2 \leq x < 0 \text{일 때, } (f \circ f)(x) = x$$

따라서  $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수  $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 개수가 무수히 많으려면 직선  $ax + b$ 는  $y = -x$  또는  $y = x$

$$\therefore a = -1, b = 0 \text{ 또는 } a = 1, b = 0 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

## 49 정답 -2

해설  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2h(x) + 4$ 이므로

$(g \circ h)(x) = f(x)$ 에서

$$2h(x) + 4 = x - 1$$

$$h(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$\therefore h(1) = \frac{1-5}{2} = -2$$

## 50 정답 ②

해설  $f^1(x) = f(x) = 3x$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 \cdot 3x = 3^2x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = 3 \cdot 3^2x = 3^3x$$

⋮

$$\therefore f^k(x) = 3^kx$$

$$f^k(3) = 3^k \cdot 3 = 3^{k+1} \text{이므로 } 3^{k+1} = 2187 = 3^7$$

$$k+1=7 \quad \therefore k=6$$

## 51 정답 ③

해설 함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면

$f(x)$ 가 일대일대응이어야 한다.

즉, 곡선  $y = a(x-3)^2 + b$ 가 점 (3, 7)을 지나야 하므로  $b = 7$

또,  $x \geq 3$ 일 때 직선  $-x + 10$ 의 기울기가 음수이므로  $x < 3$ 일 때 곡선  $y = a(x-3)^2 + b$ 의 모양이 아래로 볼록이어야 한다.

$$\therefore a > 0$$

따라서 정수  $a$ 의 최솟값은 1이므로  $a+b$ 의 최솟값은 8이다.

## 52 정답 15

해설  $f^{-1}(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이므로 실수  $a$ 에 대하여

$$(f^{-1} \circ f)(a) = a \text{이다. 따라서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f^{-1}(f(a))) \\ = f^{-1}(a)$$

이때  $f^{-1}(a) = 2$ 에서 역함수의 성질에 의하여

$$a = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 1 = 15$$

## 53 정답 ③

해설  $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 에서

$$(f \circ g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(x) = (f \circ g \circ f)(x)$$

$$\therefore h(x) = (f \circ g \circ f)(x)$$

$$\text{따라서 } h(2) = f(g(f(2))) = f(g(3)) = f(-1) = 0$$

## 54 정답 ②

해설 점 (4, 1)이 함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

점 (1, 4)는 함수  $y = f(x)$  위의 점이다.

$$\therefore f(1) = 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1^2 + 4 + k = 4$$

$$\therefore k = -1$$

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

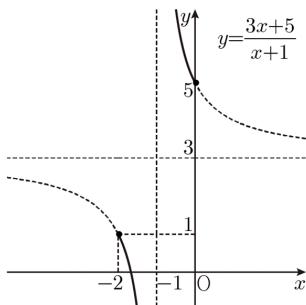
집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 55 정답 4

**해설**  $y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 3$  이므로

$y \leq 1$  또는  $y \geq 5$ 에서

함수  $y = \frac{3x+5}{x+1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은

$$\{x \mid -2 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 0\}$$

정의역에 속하는 정수는  $-2, 0$ 이므로

$$k = -2 + 0 = -2$$

$$\therefore k^2 = (-2)^2 = 4$$

## 56 정답 ③

**해설** 유리함수  $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점  $(a-1, 2a)$ 를 지나므로

$$2a = \frac{a}{a-1}, 2a^2 - 3a = 0 \text{ 이고}$$

$$a(2a-3) = 0 \text{이므로}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} (\because a \neq 0)$$

따라서  $f(x) = \frac{3}{2x}$ 이므로

$$1 \leq x \leq 3 \text{에서}$$

함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 일 때 최댓값  $f(1) = \frac{3}{2}$ 을 가진다.

## 57 정답 ⑤

**해설**  $f(x) = \frac{7}{x-1} + 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = 1, y = 3$$

점  $P(a, b)$ 가 제1사분면에서  $y = \frac{7}{x-1} + 3$ 의 그래프

위에 있으므로  $a > 1, b > 3$

$$\text{이때 } b = \frac{7}{a-1} + 3 \text{에서 } b-3 = \frac{7}{a-1} \text{ 이고}$$

$a-1 > 0$ 으로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a-1)+(b-3) = (a-1) + \frac{7}{a-1}$$

$$\geq 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{7}{a-1}} = 2\sqrt{7}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a-1 = \frac{7}{a-1} \text{ 일 때 성립}\right)$$

따라서  $(a-1)+(b-3)$ 의 최솟값은  $2\sqrt{7}$ 이다.

## 58 정답 -3

**해설**  $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2x+1}{x-2} + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 2}$$

$$= \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2(x-2)}{x-2}}$$

$$= \frac{5x}{5} = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x)$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f(f(x)) = f^2(x) = x$$

⋮

$$\therefore f^n(x) = \begin{cases} x & (n \text{이 짝수}) \\ f(x) & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$$

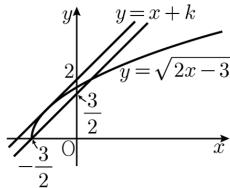
$$\therefore f^{2015}(1) = f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 - 2} = -3$$

# 중앙대학교 사범대학부속고등학교 - 고등학교 공통수학2

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

## 59 정답 ②

**해설** 두 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 두 함수의 그래프가 접할 때

$$\sqrt{2x+3} = x+k \text{의 양변을 제곱하여 정리하면}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$$

이 차방정식이 중근을 가지므로 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = -2k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

(ii) 직선  $y = x + k$ 가 점  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날 때

$$0 = -\frac{3}{2} + k$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한  $k$ 의 값의 범위는

$$\frac{3}{2} \leq k < 2$$

## 60 정답 ④

**해설** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{x \mid -1 \leq x \leq k\},$$

$$Q = \{x \mid x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 7\} \text{이다.}$$

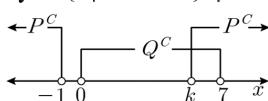
명제  $\sim p \rightarrow q$ 의 반례가 될 수 있는 값은

$P^C$ 의 원소이면서 집합  $Q$ 의 원소가 아니어야 하므로

$$P^C - Q = P^C \cap Q^C \text{의 원소이다.}$$

집합  $P^C = \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > k\}$ 이고,

$$Q^C = \{x \mid 0 < x < 7\} \text{이므로}$$



집합  $P^C \cap Q^C$ 에 양의 정수인 원소가  $x = 6$ 뿐이라면

$$5 \leq k < 6 \text{이어야 한다.}$$

## 61 정답 56

**해설** 조건  $x^2 - 5x + 4 < 0$ 의 진리집합을  $P$ 라 하면

$$(x-1)(x-4) < 0 \text{에서 } 1 < x < 4 \text{이므로}$$

$$P = \{2, 3\} \text{이다.}$$

명제

'집합  $A$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $x^2 - 5x + 4 < 0$ 이다.'

가 참이 되기 위해서는 집합  $A$ 가 집합  $P$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

그러므로  $A = \{2\}$  또는  $A = \{3\}$  또는  $A = \{2, 3\}$ 이다.

명제 '집합  $B$ 의 어떤 원소  $x$ 에 대하여  $x \in A$ 이다.'가 참이 되기 위해서는  $A \cap B \neq \emptyset$ 이어야 한다.

(i)  $A = \{2\}$ 인 경우

집합  $B$ 는 2를 원소로 갖는 집합  $U$ 의 부분집합이므로 집합  $B$ 의 개수는

$$2^{5-1} = 2^4 = 16$$

(ii)  $A = \{3\}$ 인 경우

집합  $B$ 는 3을 원소로 갖는 집합  $U$ 의 부분집합이므로 집합  $B$ 의 개수는

$$2^{5-1} = 2^4 = 16$$

(iii)  $A = \{2, 3\}$ 인 경우

집합  $B$ 는 2 또는 3을 원소로 갖는 집합  $U$ 의 부분집합이다.

2를 원소로 갖고, 3을 원소로 갖지 않는 집합  $B$ 의 개수는  $2^{5-2} = 2^3 = 8$

3을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합  $B$ 의 개수는  $2^{5-2} = 2^3 = 8$

2, 3을 모두 원소로 갖는 집합  $B$ 의 개수는

$$2^{5-2} = 2^3 = 8$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍  $(A, B)$ 의 개수는

$$16 + 16 + (8 + 8 + 8) = 56$$

## 62 정답 ③

**해설** 두 점 A(1, -1), B( $k, -\frac{2}{k}+1$ ) ( $-2 < k < 0$ )을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{-\frac{2}{k}+2}{k-1} = \frac{-2+2k}{k(k-1)} = \frac{2}{k}$$

이므로 직선의 방정식은  $y = \frac{2}{k}(x-1)-1$ ,

즉  $y = \frac{2}{k}x - \frac{2}{k} - 1$ 이다.

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각  $P\left(\frac{k}{2}+1, 0\right)$ ,

$Q\left(0, -\frac{2}{k}-1\right)$  이므로

$$\overline{OP} = \frac{k}{2} + 1, \overline{OQ} = -\frac{2}{k} - 1, \overline{B'Q} = 2, \overline{BB'} = -k$$

따라서 두 삼각형의 넓이  $S_1, S_2$ 는

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-k) = -k,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{2}+1\right) \left(-\frac{2}{k}-1\right) = -\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{k}{4}\right)$$

이므로

$$S_1 + S_2 = -\frac{5}{4}k - \frac{1}{k} - 1$$

이때 두 수  $-\frac{5}{4}k, -\frac{1}{k}$ 이 모두 양수이므로,

( $\because -2 < k < 0$ )

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_1 + S_2 \geq 2\sqrt{\left(-\frac{5}{4}k\right) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)} - 1$$

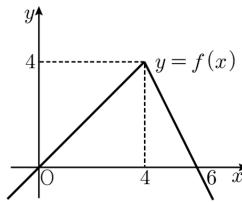
$$= \sqrt{5} - 1$$

(단, 등호는  $k = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$  일 때 성립)

$$\therefore m + \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5} - 1$$

## 63 정답 ①

**해설** 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq 4) \\ -2f(x)+12 & (f(x) > 4) \end{cases}$$

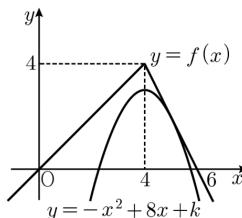
그런데 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \leq 4$ 이므로  $(f \circ f)(x) = f(x)$ 이다.

이차함수  $y = -x^2 + 8x + k = -(x-4)^2 + k+16$ 의 그래프는 직선  $x=4$ 에 대하여 대칭이므로

함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 오직 한 점에서 만나기

위해서는 그림과 같이 이차함수  $y = -x^2 + 8x + k$ 의

그래프와 직선  $y = -2x + 12$ 가 접해야 한다.



$-x^2 + 8x + k = -2x + 12$ 에서 이차방정식

$$x^2 - 10x + 12 - k = 0$$

이 중근을 가져야 하므로

이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

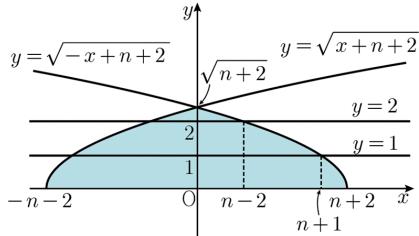
$$\frac{D}{4} = 25 - (12 - k) = 0, 13 + k = 0$$

$$\therefore k = -13$$

## 64 정답 486

**해설**  $\sqrt{x+n+2} = \sqrt{-x+n+2}$  에서  $x=0$

즉, 두 곡선의 교점의 좌표는  $(0, \sqrt{n+2})$



두 곡선  $y = \sqrt{x+n+2}$ ,  $y = \sqrt{-x+n+2}$  와

x축으로 둘러싸인 영역은 y축에 대하여 대칭이므로

제1사분면의 영역 위의 점의 개수와 제2사분면 영역 위의

점의 개수는 같다. 이때 곡선  $y = \sqrt{-x+n+2}$  와

직선  $y = k$  ( $k$ 는 자연수)의 교점의  $x$ 좌표가  $n+2-k^2$

이므로 제1사분면의 영역에서 직선  $y = k$  위에 있는

$x$ 좌표가 정수인 점의 개수는  $n+2-k^2$ 이다.

또, 영역에 포함되는  $y$ 축 위의 점의 개수는

$\sqrt{n+2}$  이하의 자연수의 개수이다.

따라서 자연수  $n$ 에 대하여

$$f(n) = 2 \times (\text{제1사분면의 영역 위의 점의 개수})$$

$$+ (\sqrt{n+2} \text{ 이하의 자연수의 개수})$$

(i)  $n = 1$  일 때,

$$f(n) = 2(n+1) + 1 = 2n+3$$

(ii)  $2 \leq n < 7$  일 때,

$$f(n) = 2\{(n+1) + (n-2)\} + 2$$

$$= 4n$$

(iii)  $7 \leq n < 14$  일 때,

$$f(n) = 2\{(n+1) + (n-2) + (n-7)\} + 3$$

$$= 6n - 13$$

(iv)  $14 \leq n < 23$  일 때,

$$\begin{aligned} f(n) &= 2\{(n+1) + (n-2) \\ &\quad + (n-7) + (n-14)\} + 4 \end{aligned}$$

$$= 8n - 40$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(14)$$

$$= 5 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 29 + 35$$

$$+ 41 + 47 + 53 + 59 + 65 + 72$$

$$= 486$$