마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 분수식 $\frac{x}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x^2+2x}$를 간단히 하면?

① $-\frac{1}{(x+2)^2}$ ② $\frac{1}{(x+2)^2}$ ③ $\frac{2}{(x+2)^2}$
④ $-\frac{1}{x(x+2)^2}$ ⑤ $\frac{1}{x(x+2)^2}$

02 $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}-\frac{8}{x^2+16}=\frac{a}{f(x)}$일 때, $f\left(\frac{a}{64}\right)$의 값을 구하시오.
(단, $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, a는 상수이다.)

03 $\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}$가 x에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c의 값을 정하였을 때, abc의 값은? (단, $x \neq \pm 1$)

① 2 ② 3 ③ 6
④ 12 ⑤ 24

04 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여
등식 $\frac{2x+5}{x+2}-\frac{3x+10}{x+3}+\frac{3x+13}{x+4}-\frac{2x+11}{x+5}$

$$=\frac{ax^2+bx+c}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

가 성립할 때, $ab+c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수)

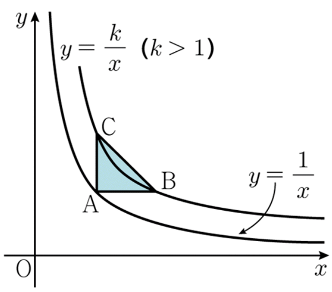
05 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$일 때,
$\frac{2a}{(a+b)(c+a)}+\frac{2b}{(b+c)(a+b)}+\frac{2c}{(c+a)(b+c)}$의 값을 구하시오.

06 세 실수 x, y, z에 대하여 $x:y:z=1:4:3$일 때,
$\frac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2}$의 값을 구하시오. (단, $xyz \neq 0$)

07 다음 중 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-3}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \neq -3$인 실수$\}$이다.
② 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=1$이다.
④ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$이다.
⑤ 그래프는 모든 사분면을 지난다.

08 다음 그림과 같이 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점 A에서 x축과 y축에 평행한 직선을 그어 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 8일 때, 상수 k의 값을 구하시오.



09 $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a$, $y=b$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오.

10 두 유리함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-a}$, $y=\dfrac{-ax+2}{x-2}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 32일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

11 빈칸에 알맞은 말로 올바른 것을 고르면?

$$y=\frac{2x+1}{x-5},\ y=\frac{x^2+3}{x-2},\ y=\frac{5x-5}{x+1}$$

위 주어진 함수들은 $\boxed{}$함수 이면서 $\boxed{}$함수가 아니다.

① 다항, 유리
② 상수, 다항
③ 유리, 다항
④ 항등, 다항
⑤ 항등, 유리

12 함수 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고 동시에 $y=x+r$에 대하여 대칭이다. 이때 $p+q+r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

13 유리함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=\frac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

14 두 함수 $y=\frac{-2x+5}{x-a}$, $y=\frac{ax+3}{x+4}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 80일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

15 함수 $y=\frac{3x+1}{x-4}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{5x+28}{x+3}$의 그래프와 일치한다. 상수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.

16 유리함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=\frac{ax+b}{x-c}$일 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하시오.

17 함수 $y=\frac{3x-9}{x-2}$의 정의역이 $\{-1\le x<2\}$일 때, 치역은?

① $\{y|y<4\}$ ② $\{y|y\le 4\}$
③ $\{y|y\ge 4\}$ ④ $\{y|y>4\}$
⑤ $\{y|-1\le y<4\}$

18 [2019년 10월 고3 문과 5번 변형]

함수 $f(x)=-\dfrac{2}{3x-5}+a$의 정의역과 치역이 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① 1　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\dfrac{7}{3}$

19 함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-3,\ 5)$를 지나고 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭일 때, abc의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 18　② 20　③ 22　④ 24　⑤ 26

20 좌표평면에서 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

21 유리함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}$ $(b\neq-3)$에 대하여 $(f\circ f)(a)=a$를 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재할 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

22 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$의 그래프가 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 동시에 직선 $y=x+a$에 대하여 대칭이다. 이때 $a+p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

23 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{3x-1}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+3\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최댓값을 구하시오.

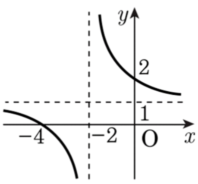
24 함수 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

25 유리함수 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p의 최솟값은?

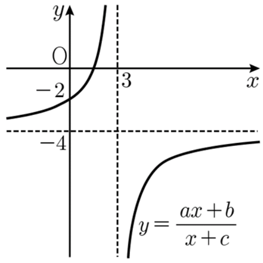
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

26 함수 $y=\dfrac{c-x}{ax+b}$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① -1 ② -2 ③ -4
④ -7 ⑤ 0

27 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $ac\neq b$)



① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

28 [2018년 9월 고2 이과 8번/3점]
두 상수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,2\leq x\leq a\}$인 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$의 치역이 $\{y\,|\,-1\leq y\leq b\}$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>2$, $b>-1$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

29 $0\leq x\leq a$에서 함수 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}$의 최댓값이 6, 최솟값이 5일 때, 상수 a, k에 대하여 $a+k$의 값을 구하시오. (단, $k>12$)

30 다음 보기 중 함수 $f(x)=\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.
ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x \neq 0,\ x \neq 2$인 실수$\}$이다.
ㄷ. 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

31 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동 한 것이다.
ㄷ. 모든 사분면을 지난다.

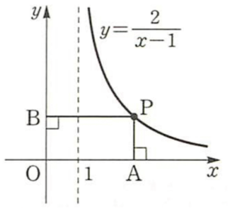
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

32 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{2x+3}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+2\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

33 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가 한 점에서 만날 때, 모든 k의 값의 합을 구하시오.

34 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+2\}$에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 정수 a의 최솟값을 구하시오.

35 다음 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 위의 한 점 P와 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소가 될 때, 이 사각형의 넓이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 1 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ 4

36 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+1998}$가 정의역의 임의의 x에 대하여 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시킬 때 상수 a의 값은? (단 $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이고 $x \neq 1998$)

① 1998 ② -1998 ③ 1
④ -1 ⑤ 0

37 두 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $g(x)=1-x$에 대하여 $g(x)=f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)$이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

38 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{-x+c}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

39 함수 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$를 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. 이때 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

40 두 함수 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}$, $g(x)=-x+3$의 역함수를 각각 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$라 할 때, $(f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

41 함수 $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx+1}$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 $(f\circ f)(1)=2$, $g(3)=1$일 때, $(g\circ g)\left(\dfrac{8}{3}\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

42 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$으로 정의할 때, $f^{2020}(202)$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

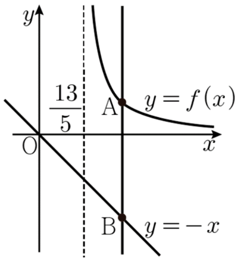
① 0 ② 2 ③ 20
④ 202 ⑤ 2020

43 두 함수 $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여 함수 $h(x)$가 $(h\circ g)(x)=f(x)$를 만족할 때, $h(-1)$의 값을 구하시오.

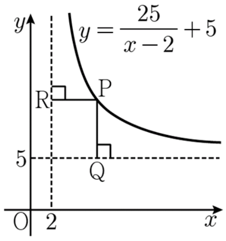
44 함수 $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$에 대하여 $f_1(x)=f(x)$, $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의한다. 이때 $f_{180}(f_{600}(3))$의 값을 구하시오.

45 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}(x)=(f^n\circ f)(x)$ (n은 자연수)로 정의할 때, $\dfrac{1}{f^{199}(2)}$의 값을 구하시오.

46 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{20}{5x-13}\left(x>\dfrac{13}{5}\right)$의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때 선분 AB의 길이의 최솟값을 구하시오.



47 다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{25}{x-2}+5\ (x>2)$의 그래프 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은?



① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

48 함수 $f(x)=\dfrac{bx+6}{x+a}$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=5$, $y=2$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

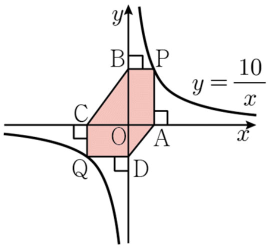
〈보기〉

ㄱ. $f(x)=f^{-1}(x)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+7$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49 함수 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 점 $\mathrm{A}\,(2,\ 0)$에 대하여 두 선분 AP, AQ의 길이가 각각 최소가 될 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오.
(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

50 다음 그림과 같이 함수 $y=\frac{10}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 제1사분면 위에 있는 점을 P, 제3사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값을 구하시오.



51 $2 \leq x \leq 4$인 모든 x에 대하여 부등식 $ax+1 \leq \frac{3x}{x-1} \leq bx+1$이 항상 성립할 때, 상수 a의 최댓값과 상수 b의 최솟값의 합을 구하시오.

52 두 유리함수 $y=\frac{6x+2}{x+a}$, $y=\frac{ax+4}{2-x}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $y=4x-7$에 의해 이등분될 때, a의 값을 구하시오.
(단, a는 $a \neq -8$, $a \neq -6$, $a \neq -2$, $a \neq \frac{1}{3}$인 상수이다.)

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ②	02 0	03 ③
04 54	05 0	06 $-\frac{12}{35}$
07 ④	08 5	09 2
10 6	11 ③	12 ③
13 3	14 6	15 -5
16 -18	17 ③	18 ③
19 ④	20 ②	21 ⑤
22 ③	23 -1	24 ②
25 ④	26 ④	27 ⑤
28 ①	29 21	30 ③
31 ④	32 1	33 2
34 1	35 ②	36 ②
37 -9	38 3	39 ①
40 ⑤	41 9	42 ④
43 -2	44 3	45 2
46 $\frac{33}{5}$	47 ②	48 ④
49 8	50 30	51 $\frac{13}{4}$
52 -4		

마플시너지(2025) - 공통수학2 (유리함수)267~271,273~294p

유리함수의 그래프

실시일자	-
52문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ②

해설 $\dfrac{x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2+2x}=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}\cdot\dfrac{x-2}{x(x+2)}$

$=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

02 정답 0

해설 $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{8}{x^2+16}$

$=\dfrac{x+4-(x-4)}{(x+4)(x-4)}-\dfrac{8}{x^2+16}$

$=\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{8}{x^2+16}$

$=\dfrac{8(x^2+16)-8(x^2-16)}{(x^2+16)(x^2-16)}$

$=\dfrac{256}{x^4-256}$

따라서 $f(x)=x^4-256$, $a=256$이므로

$f\left(\dfrac{a}{64}\right)=f(4)=4^4-256=0$

03 정답 ③

해설 $\dfrac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+1}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$을 곱하면

$4x^2=a(x-1)(x+1)+b(x+1)+c(x-1)^2$

$4x^2=a(x^2-1)+b(x+1)+c(x^2-2x+1)$

$4x^2=(a+c)x^2+(b-2c)x+(-a+b+c)$ ⋯ ㉡

이때 ㉡이 x에 대한 항등식이므로

$a+c=4,\ b-2c=0,\ -a+b+c=0$

따라서 세 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=2,\ c=1$이므로

$abc=6$

04 정답 54

해설 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{3x+10}{x+3}+\dfrac{3x+13}{x+4}-\dfrac{2x+11}{x+5}$

$=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{3(x+3)+1}{x+3}+\dfrac{3(x+4)+1}{x+4}$

$-\dfrac{2(x+5)+1}{x+5}$

$=\left(2+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(3+\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(3+\dfrac{1}{x+4}\right)$

$-\left(2+\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{x+5-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{2x^2+14x+26}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

따라서 $a=2,\ b=14,\ c=26$이므로

$ab+c=54$

05 정답 0

해설 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$에서

$\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore\ ab+bc+ca=0$

$\therefore\ \dfrac{2a}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{2b}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{2c}{(c+a)(b+c)}$

$=\dfrac{2a(b+c)+2b(c+a)+2c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$

06 정답 $-\dfrac{12}{35}$

해설 $x:y:z=1:4:3$이므로

$x=k$, $y=4k$, $z=3k$ $(k\neq 0)$으로 놓으면

$$\frac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2}=\frac{k\cdot 4k\cdot 3k}{k^2\cdot 4k-(4k)^2\cdot 3k+k\cdot (3k)^2}$$
$$=\frac{12k^3}{4k^3-48k^3+9k^3}$$
$$=-\frac{12k^3}{35k^3}$$
$$=-\frac{12}{35}$$

07 정답 ④

해설 $y=\dfrac{2x-2}{x-3}=\dfrac{4}{x-3}+2$

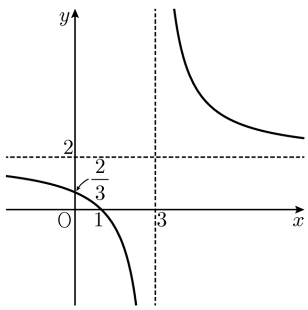
① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$이다.

② 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=2$이다.

④ 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$이다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



08 정답 5

해설 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점

A의 좌표를 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$이라 하면

두 점 B, C는 $\mathrm{B}\left(k\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{C}\left(\alpha,\ \dfrac{k}{\alpha}\right)$이고, $k>1$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=k\alpha-\alpha=\alpha(k-1)$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{k}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{k-1}{\alpha}$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\alpha(k-1)\cdot\frac{k-1}{\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}(k-1)^2$$

즉, $\dfrac{1}{2}(k-1)^2=8$이므로

$(k-1)^2=16$

$k-1=\pm 4$

$\therefore\ k=5$ $(\because\ k>1)$

09 정답 2

해설
$$y=\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$이므로

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=2$

10 정답 6

해설 $y=\dfrac{2x-4}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-4}{x-a}=\dfrac{2a-4}{x-a}+2$이므로

이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은

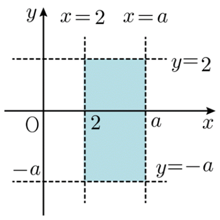
$x=a$, $y=2$이고,

$y=\dfrac{-ax+2}{x-2}=\dfrac{-a(x-2)-2a+2}{x-2}=\dfrac{-2a+2}{x-2}-a$

이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-a$이다.

그런데 $0<a<2$이면 네 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 32보다 작으므로 다음 그림과 같이 $a>2$이어야 한다.



이때 넓이는 32이므로 $(a-2)(a+2)=32$에서

$a^2-4=32$, $a^2=36$

$\therefore a=6$ ($\because a>2$)

11 정답 ③

해설 주어진 함수들은 유리함수면서 다항함수가 아닌 분수함수이다.

12 정답 ③

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-5}{x+4}=\dfrac{-5}{x+4}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(-4,\ 2)$에 대하여 대칭이고 점 $(-4,\ 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x+6$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=-4,\ q=2,\ r=6$

$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

13 정답 3

해설 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{2}{x-2}-3=\dfrac{-3x+8}{x-2}$

이 식이 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$와 같아야 하므로

$a=-3,\ b=8,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=3$

14 정답 6

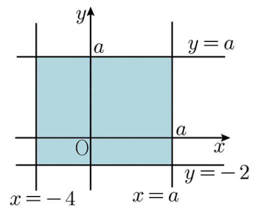
해설 $y=\dfrac{-2x+5}{x-a}=-2+\dfrac{5-2a}{x-a}$이므로

점근선의 방정식은 $x=a$, $y=-2$

$y=\dfrac{ax+3}{x+4}=a+\dfrac{3-4a}{x+4}$이므로

점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=a$

따라서 두 함수의 점근선은 다음 그림과 같다.



색칠한 부분의 넓이가 80이므로

$(a+4)(a+2)=80$

$a^2+6a-72=0$

$(a+12)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

15 정답 -5

해설 두 함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$, $y=\dfrac{5x+28}{x+3}$에서

$y=\dfrac{3x+1}{x-4}=\dfrac{13}{x-4}+3$ $\cdots$ ㉠

$y=\dfrac{5x+28}{x+3}=\dfrac{13}{x+3}+5$ $\cdots$ ㉡

이때 함수 ㉠을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 함수는

$y-q=\dfrac{13}{(x-p)-4}+3$

$y=\dfrac{13}{x-p-4}+3+q$ $\cdots$ ㉢

두 함수 ㉡과 ㉢이 일치해야 하므로

$-p-4=3,\ 3+q=5$에서 $p=-7,\ q=2$

$\therefore p+q=-7+2=-5$

16 정답 -18

해설 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행 이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{3}{x-3}-2=\dfrac{-2x+3}{x-3}$

$\therefore a=-2, b=3, c=3$

$\therefore abc=-18$

17 정답 ③

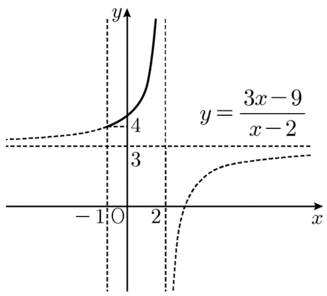
해설 $y=\dfrac{3x-9}{x-2}=\dfrac{3(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}+3$이므로

$y=\dfrac{3x-9}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x<2$에서 $y=\dfrac{3x-9}{x-2}$의 그래프는

다음 그림과 같으므로 치역은 $\{y|y\ge 4\}$이다.



18 정답 ③

해설 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$이고

치역은 $\{y|y\neq a$인 실수$\}$

따라서 정의역과 치역이 서로 같아야 하므로

$a=\dfrac{5}{3}$

19 정답 ④

해설 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-3, 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{3\cdot(-3)+b}{-3+a}$, $5=\dfrac{-9+b}{-3+a}$

$-15+5a=-9+b$

$\therefore b=5a-6$ $\cdots$ ㉠

한편,

$y=\dfrac{3x+b}{x+a}=\dfrac{3(x+a)-3a+b}{x+a}=\dfrac{-3a+b}{x+a}+3$

에서 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$,

$y=3$이므로 그래프는 점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $-a=-2$, $c=3$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore abc=24$

20 정답 ②

해설 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=k$

이때 함수 $y=\dfrac{2}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$(5, k)$는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\therefore k=5$

21 정답 ⑤

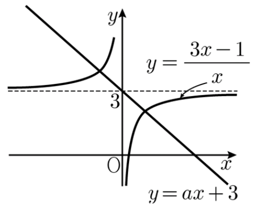
해설 $b \neq -3$이면 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다.
$(f \circ f)(a)=f(f(a))=a$에서 $f(a)=f^{-1}(a)$이므로
$x=a$는 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
그런데 함수 $f(x)=\dfrac{3x-3}{3x+b}(b \neq -3)$과 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로
$f(a)=f^{-1}(a)=a$에서
$\dfrac{3a-3}{3a+b}=a$
$3a-3=3a^2+ab$
$\therefore 3a^2+(b-3)a+3=0$ $\cdots$ ㉠
이때 조건을 만족시키는 실수 a가 단 1개 존재한다고 하였으므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(b-3)^2-4 \cdot 3 \cdot 3=0$에서
$(b-3)^2=36$, $b-3=\pm 6$
$\therefore b=9$ ($\because b \neq -3$)
이것을 ㉠에 대입하면
$3a^2+6a+3=0$, $a^2+2a+1=0$
$(a+1)^2=0$
$\therefore a=-1$
$\therefore a+b=(-1)+9=8$

22 정답 ③

해설 $y=\dfrac{3x-1}{x+2}=-\dfrac{7}{x+2}+3$
이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=3$
따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2, 3)$에 대하여 대칭이므로
$p=-2$, $q=3$
또, 직선 $y=x+a$가 점 $(-2, 3)$을 지나므로
$3=-2+a$ $\therefore a=5$
$\therefore a+p+q=6$

23 정답 -1

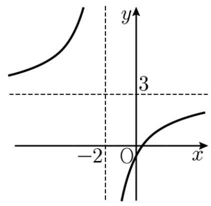
해설 $y=\dfrac{3x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+3$이므로 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 3)$을 지난다.



이때 $A \cap B \neq \varnothing$이므로 $y=\dfrac{3x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만나야 한다.
따라서 a의 값의 범위는 $a<0$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다.

24 정답 ②

해설 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+k-14}{x+2}=\dfrac{k-14}{x+2}+3$
이므로 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{k-14}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\dfrac{3x+k-8}{x+2}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 다음 그림과 같이 $k-14<0$이어야 하므로



$k<14$ $\cdots$ ㉠
또 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 하므로
$\dfrac{k-8}{2}<0$
$\therefore k<8$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k<8$
따라서 자연수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 7$의 7개이다.

25 정답 ④

해설 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=p,\ y=2$

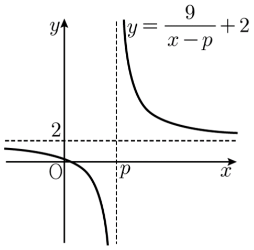
이때 $p \le 0$이면 함수 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가

제3사분면을 지나므로 $p>0$이어야 한다.

$p>0$일 때 $y=\dfrac{9}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을

지나지 않으려면 다음 그림과 같아야 하므로 $x=0$에서의

함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다.



즉, $\dfrac{9}{-p}+2 \ge 0$이므로 $\dfrac{9}{-p} \ge -2$

$-p<0$이므로 양변에 $-p$를 곱하면

$9 \le 2p$

$\therefore\ p \ge \dfrac{9}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 5이다.

26 정답 ④

해설 점근선이 $x=-2,\ y=1$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+1 \quad \cdots ㉠$

㉠이 $(0,\ 2)$를 지나므로 대입하면 $k=2$이다.

$y=\dfrac{2}{x+2}+1=\dfrac{-x-4}{-x-2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2,\ c=-4$

$\therefore\ a+b+c=-7$

27 정답 ⑤

해설 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=3,\ y=-4$이므로 주어진 함수를

$y=\dfrac{k}{x-3}-4\ (k \ne 0) \quad \cdots ㉠$

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{k}{-3}-4$

에서 $k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-6}{x-3}-4=\dfrac{-4x+6}{x-3}$

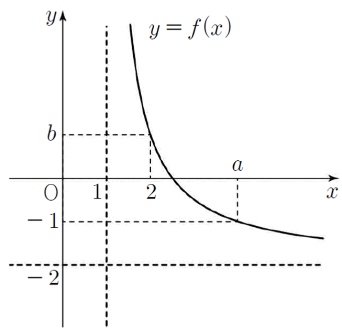
따라서 $a=-4,\ b=6,\ c=-3$이므로

$a+b+c=-4+6+(-3)=-1$

28 정답 ①

해설 유리함수의 성질 이해하기

$f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$이라 하면



$f(2)=b=1,\ f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2=-1$

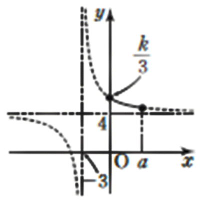
따라서 $a=4,\ b=1$이므로 $a+b=5$

29 정답 21

해설 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}=\dfrac{4(x+3)+k-12}{x+3}=\dfrac{k-12}{x+3}+4$

$k>12$이므로 $k-12>0$이다.

따라서 $0 \le x \le a$에서 $y=\dfrac{4x+k}{x+3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=0$일 때 최댓값을 가지며 그 값이 6이므로 $6=\dfrac{k}{3}$

$\therefore k=18$

$x=a$에서 최솟값이 5이므로

$5=\dfrac{4a+18}{a+3}$

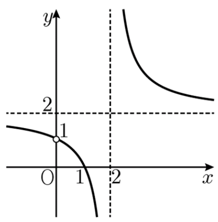
$\therefore a=3$

$\therefore a+k=3+18=21$

30 정답 ③

해설 $f(x)=\dfrac{2-\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\dfrac{\frac{2x-2}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나고, 제3사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. 정의역은 $\{x \mid x \neq 0,\ x \neq 2$인 실수$\}$이다. (참)

ㄷ. 그래프가 점 $(4,\ 3)$은 지나지만 점 $(0,\ 1)$은 지나지 않으므로
점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

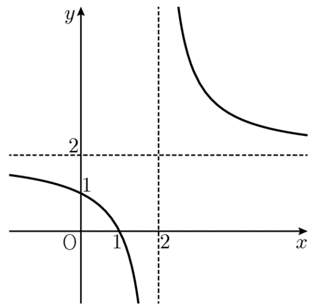
31 정답 ④

해설 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$이므로

ㄱ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이다.

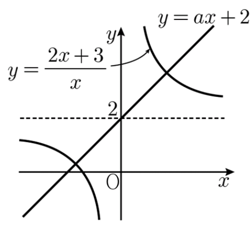
ㄷ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같고 제1, 2, 4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32 정답 1

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x}=\dfrac{3}{x}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지난다.



이때 $A \cap B \neq \varnothing$이므로

$y=\dfrac{2x+3}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 만나야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $a>0$이므로

정수 a의 최솟값은 1이다.

33 정답 2

해설 함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가

한 점에서 만나므로 $\dfrac{x-2}{x+4}=kx+2$에서

$x-2=(kx+2)(x+4)$

$x-2=kx^2+2(2k+1)x+8$

$\therefore\ kx^2+(4k+1)x+10=0 \quad \cdots ㉠$

(ⅰ) $k=0$인 경우

㉠에 $k=0$을 대입하면 $x+10=0$

$\therefore\ x=-10$

따라서 한 개의 근을 가지므로

함수 $y=\dfrac{x-2}{x+4}$의 그래프와 직선이 한 점에서 만난다.

(ⅱ) $k\neq 0$인 경우

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(4k+1)^2-40k=0$

$16k^2-32k+1=0$

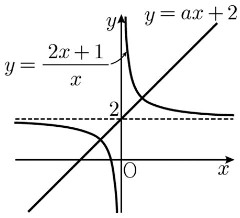
이차방정식에서 근과 계수와의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 k의 값의 합은 2이다.

34 정답 1

해설 $y=\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x}$의

그래프는 다음 그림과 같고, 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$을 지난다.



이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x}$의 그래프와

직선 $y=ax+2$가 만나야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $a>0$이므로 정수 a의 최솟값은 1이다.

35 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{2}{t-1}\right)$로 놓으면 $t>1$이므로

사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$2\left(t+\dfrac{2}{t-1}\right)=2\left(1+t-1+\dfrac{2}{t-1}\right)$

$\geq 2\left\{1+2\sqrt{(t-1)\cdot\dfrac{2}{t-1}}\right\}$

$=2(1+2\sqrt{2})$

이때 등호는 $t-1=\dfrac{2}{t-1}$일 때 성립하므로

$t=\sqrt{2}+1$일 때 둘레의 길이가 최소가 된다.

따라서 이때의 사각형 OAPB의 넓이는

$t\cdot\dfrac{2}{t-1}=(\sqrt{2}+1)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

36 정답 ②

해설 $y=\dfrac{ax+1}{x+1998}$의 역함수는 $y^{-1}=\dfrac{-1998x+1}{x-a}$

$f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$a=-1998$

37 정답 -9

해설 먼저 $f^{-1}(x)$를 구해보면

$y=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

$\longrightarrow\quad x=1-\dfrac{1}{y}$

$\longrightarrow\quad y=\dfrac{1}{1-x}=f^{-1}(x)$

$\therefore\quad f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)=10$

$\longrightarrow\quad g(x)=1-x=10 \qquad x=-9$

38 정답 3

해설 $y=\dfrac{2x+3}{x+4} \Leftrightarrow xy+4y=2x+3$

$\Leftrightarrow x(y-2)=-4y+3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4y+3}{y-2}$

이때, x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{-4x+3}{x-2}$이다.

따라서 $(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로

$f(x)=\dfrac{-4x+3}{x-2}=\dfrac{4x-3}{-x+2}$에서

$a=4,\ b=-3,\ c=2$

$\therefore a+b+c=3$

39 정답 ①

해설 $y=\dfrac{x+6}{x+2}$에서 $x=\dfrac{-2y+6}{y-1}$이므로

$g(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$

즉, $f(x)=1+\dfrac{4}{x+2},\ g(x)=-2+\dfrac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=f(x)$와 일치하므로

$a=-3,\ b=3$

$\therefore a+b=-3+3=0$

40 정답 ⑤

해설 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1},\ g(x)=-x+3$에 대하여

$(f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(g(f^{-1}(0)))$이므로

$f^{-1}(0)=k$로 놓으면 $f(k)=0$

$f(k)=\dfrac{2k-4}{k+1}=0,\ 2k-4=0$

$\therefore k=2$

이므로 $f^{-1}(g(f^{-1}(0)))=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(1)$

또, $f^{-1}(1)=l$로 놓으면 $f(l)=1$

$f(l)=\dfrac{2l-4}{l+1}=1,\ 2l-4=l+1$

$\therefore l=5$

$\therefore (f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(1)=5$

41 정답 9

해설 $g(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$\dfrac{a+5}{b+1}=3,\ a+5=3b+3$

$\therefore a-3b=-2 \quad \cdots ㉠$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$이므로

$\dfrac{3a+5}{3b+1}=2,\ 3a+5=6b+2$

$\therefore a-2b=-1 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{x+5}{x+1}$

$g\left(\dfrac{8}{3}\right)=k$로 놓으면 $f(k)=\dfrac{8}{3}$

$\dfrac{k+5}{k+1}=\dfrac{8}{3},\ 3k+15=8k+8,\ 5k=7$

$\therefore k=\dfrac{7}{5}$

$g\left(\dfrac{7}{5}\right)=l$로 놓으면 $f(l)=\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{l+5}{l+1}=\dfrac{7}{5},\ 5l+25=7l+7,\ 2l=18$

$\therefore l=9$

따라서 $(g\circ g)\left(\dfrac{8}{3}\right)=g\left(g\left(\dfrac{8}{3}\right)\right)=g\left(\dfrac{7}{5}\right)=9$

42 정답 ④

해설 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\dfrac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-(x-1)}{x-1}}$$

$$=\dfrac{2x}{2}=x$$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^2(x)=f^4(x)=\cdots=f^{2n}(x)=x$이므로

$f^{2020}(202)=202$

43 정답 -2

해설 $(h \circ g)(x)=f(x)$에서

$h(g(x))=f(x)$이므로 $h\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{1}{t}$이므로

$$h(t)=\frac{3\cdot\frac{1}{t}+1}{2\cdot\frac{1}{t}+3}=\frac{3+t}{2+3t}$$

$\therefore h(x)=\dfrac{3+x}{2+3x}$

$\therefore h(-1)=-2$

44 정답 3

해설 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 분수함수 중에 순환성을 가지는 것이 있다.

이때 순환마디를 찾는 것이 기본이다.

$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)-3}{f_1(x)+1}$$

$$=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}=-\frac{x+3}{x-1}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)-3}{f_2(x)+1}$$

$$=\frac{-\frac{x+3}{x-1}-3}{-\frac{x+3}{x-1}+1}=x$$

$f_3(x)=x$이므로 $f_n(x)$의 순환마디는 3

따라서 다음이 성립한다.

$f_{3n}(x)=f_3(x)$, $f_{3n+1}(x)=f_1(x)$,

$f_{3n+2}(x)=f_2(x)$ (단, n은 자연수)

또, 두 자연수 m, n에 대하여

$f_m(f_n(x))=f_{m+n}(x)$

따라서

$$f_{180}(f_{600}(3))=f_{780}(3)$$
$$=f_{3\cdot 260}(3)$$
$$=f_3(3)=3$$

45 정답 2

해설 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x)=f^2(f(x))=\frac{-1}{\frac{x-1}{x}-1}=x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n은 자연수)는 항등함수이므로

$$\frac{1}{f^{199}(2)}=\frac{1}{f^{3\cdot 66+1}(2)}=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

46 정답 $\dfrac{33}{5}$

해설 점 A의 x좌표를 k $\left(k>\dfrac{13}{5}\right)$이라 하면

$\mathrm{A}\left(k,\ \dfrac{20}{5k-13}\right)$, $\mathrm{B}(k,\ -k)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{20}{5k-13}-(-k)=\dfrac{20}{5k-13}+k$

이때 $k>\dfrac{13}{5}$에서 $5k-13>0$이므로 산술평균과

기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{20}{5k-13}+k=\frac{20}{5k-13}+\frac{1}{5}(5k-13)+\frac{13}{5}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{20}{5k-13}\cdot\frac{1}{5}(5k-13)}+\frac{13}{5}$$
$$=2\sqrt{4}+\frac{13}{5}=\frac{33}{5}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{20}{5k-13}=\dfrac{1}{5}(5k-13)\text{일 때 성립}\right)$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\dfrac{33}{5}$ 이다.

47 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(k,\ \dfrac{25}{k-2}+5\right)$ $(k>2)$라 하면

$\mathrm{Q}(k,\ 5)$, $\mathrm{R}\left(2,\ \dfrac{25}{k-2}+5\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{25}{k-2}+5\right)-5=\dfrac{25}{k-2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=k-2$이고

$k>2$에서 $k-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\frac{25}{k-2}+k-2\\&\geq 2\sqrt{\frac{25}{k-2}\cdot(k-2)}\\&=2\cdot 5\\&=10\ (\text{단, 등호는 } k=7\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 10이다.

48 정답 ④

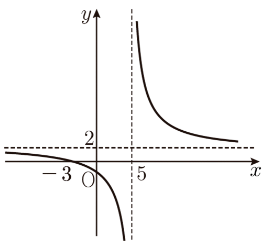
해설 $f(x)=\dfrac{bx+6}{x+a}=\dfrac{-ab+6}{x+a}+b$

이때 점근선은 $x=-a$, $y=b$이므로

$-a=5$, 즉 $a=-5$이고, $b=2$이다.

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x+6}{x-5}=\dfrac{16}{x-5}+2$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. [반례] $f(9)=\dfrac{16}{9-5}+2=6$에서 $f^{-1}(6)=9$이고,

$f(6)=\dfrac{16}{6-5}+2=18$이므로

$f(x)\neq f^{-1}(x)$ (거짓)

ㄴ. $f(x)$의 점근선이 $x=5$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점은 $(5,\ 2)$이다.

따라서 $f(x)$는 $y=\pm(x-5)+2$, 즉 $y=x-3$, $y=-x+7$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수의 그래프는 모든 사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

49 정답 8

해설 함수 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프 위의 점 P를

$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha-2}\right)$이라 하면 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(\alpha-2)^2+\left(\dfrac{1}{\alpha-2}-0\right)^2}$

이때

$(\alpha-2)^2+\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2\geq 2\sqrt{(\alpha-2)^2\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2}=2$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\geq\sqrt{2}$이고, $(\alpha-2)^2=\left(\dfrac{1}{\alpha-2}\right)^2$일 때

등호가 성립한다.

즉, $\alpha-2=1$ 또는 $\alpha-2=-1$일 때 등호가 성립하므로

$\alpha=3$ 또는 $\alpha=1$

에서 두 선분 AP, AQ의 길이가 각각 최소가 되는 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(3,\ 1)$

이고 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 8이다.

50 정답 30

해설 두 점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\dfrac{10}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{10}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ -\dfrac{10}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}\\&=a\cdot\frac{10}{a}+b\cdot\frac{10}{b}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{10}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{10}{b}\\&=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}S&=20+5\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\\&\geq 20+5\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})\\&=20+5\cdot 2\\&=30\end{aligned}$$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 30이다.

51 **정답** $\frac{13}{4}$

해설 $f(x)=ax+1$, $g(x)=\frac{3x}{x-1}$, $h(x)=bx+1$이라 하자.

$2\le x\le 4$인 모든 x에 대하여

부등식 $ax+1\le\frac{3x}{x-1}\le bx+1$이 성립하려면

직선 $y=f(x)$는 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에,

직선 $y=h(x)$는 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에

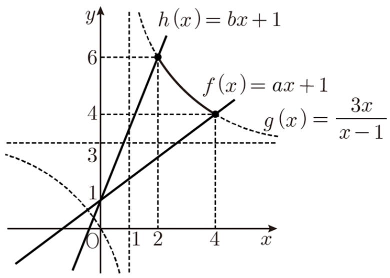
있어야 한다.

$g(x)=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$이므로

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고 $x=2$일 때 $y=6$, $x=4$일 때 $y=4$이므로

$2\le x\le 4$에서 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=f(x)$는 기울기 a의 값에 관계없이

점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이고 a의 값이 최대가 될 때는

직선이 점 $(4,\ 4)$를 지날 때이므로

$a\le\frac{3}{4}$

또, 직선 $y=h(x)$도 기울기 b의 값에 관계없이

점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이고 b의 값이 최소가 될 때는

직선이 점 $(2,\ 6)$을 지날 때이므로

$b\ge\frac{5}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{4}$, b의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{13}{4}$

52 **정답** -4

해설 함수 $y=\frac{6x+2}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=6$

함수 $y=\frac{ax+4}{2-x}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-a$

네 점근선으로 둘러싸인 부분은 직사각형이고,

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-a+2}{2},\ \frac{6-a}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=4x-7$ 위에 있으므로

$\frac{6-a}{2}=4\cdot\left(\frac{-a+2}{2}\right)-7$

$6-a=-4a+8-14$

$\therefore\ a=-4$