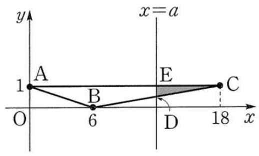
1. [직선의 방정식]

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $A(0,\ 1)$, $B(6,\ 0)$, $C(18,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=a$가 $\triangle ABC$의 두 변 BC, CA와 각각 점 D, E에서 만나고

$$\triangle CED=\frac{1}{6}\triangle ABC$$

일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

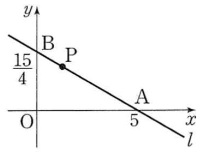


2. [두 직선의 위치 관계]

좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(3,\ a)$를 지나는 직선 l_1의 방정식은 $x+by+3=0$이고, 직선 l_1과 직교하면서 점 $C(3,\ c)$를 지나는 직선 l_2의 방정식은 $dx+y-6=0$이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수)

3. [점과 직선 사이의 거리]

좌표평면 위의 두 점 $A(5,\ 0)$, $B\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$를 지나는 직선 l 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값은? (단, O는 원점)



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

4. [점과 직선과의 거리]

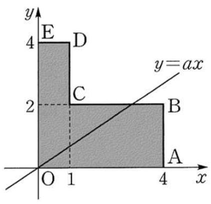
두 점 $A(1,\ 4)$, $B(4,\ 3)$에서 직선 $3x+4y+1=0$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① $\frac{23}{2}$　② $\frac{25}{2}$　③ $\frac{27}{2}$
④ $\frac{29}{2}$　⑤ $\frac{31}{2}$

5. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(2,\ 1)$에 대하여 직선 $2x-3y+k=0$이 선분 AB와 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

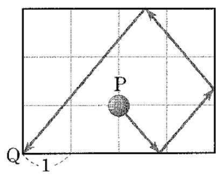
6. 오른쪽 그림과 같이 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 2)$, $C(1,\ 2)$, $D(1,\ 4)$, $E(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 도형의 넓이를 직선 $y=ax$가 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오.



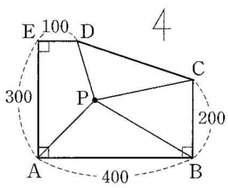
7. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 2)$, $B(1,\ k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

8. 가로의 길이가 4, 세로의 길이가 3인 직사각형 모양의 당구대가 있다. 당구공은 당구대의 내부에서는 직선 운동을 하고 벽에 부딪히면 입사각과 반사각이 같도록 움직인다. P지점에 있는 공을 쳤더니 오른쪽 그림과 같이 벽에 3번 부딪힌 후 Q지점으로 돌아갔다. 공이 처음으로 벽에 부딪힌 곳에서 Q지점까지의 거리를 구하시오.
(단, 모눈 한 눈금의 길이는 1이고 당구공의 크기는 무시한다.)



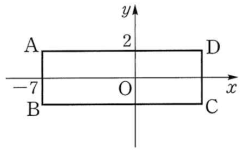
9. 오른쪽 그림과 같은 오각형 ABCDE의 내부에 한 점 P가 있다. 점 P에서 네 꼭짓점 A, B, C, D에 이르는 거리의 합이 최소가 될 때, 점 P는 점 A로부터 동쪽으로 a만큼, 북쪽으로 b만큼 떨어진 위치에 있다고 한다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① $\frac{1000}{3}$　② 400　③ 450

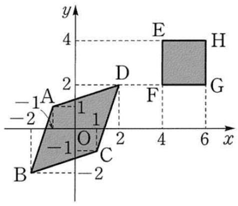
④ $\frac{1400}{3}$　⑤ 500

10. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 48이고, 가로의 길이는 세로의 길이의 3배라 한다.



두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by-1=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.
(단, 직사각형의 각 변은 x축 또는 y축에 평행하며, 원점이 직사각형의 내부에 있다.)

11. 오른쪽 그림의 두 사각형 ABCD와 EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$이라 하자. a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.
(단, 선분 EH, FG는 x축에 평행하고, 선분 EF, HG는 y축에 평행하다.)



[평면좌표와 직선의 방정식 정답지]

1. 정답 12
2. 정답 3
3. 정답 ③
4. 정답 ③
5. 정답 ⑤
6. 정답 $\frac{2}{3}$
7. 정답 ③
8. 정답 $\frac{20}{7}$
9. 정답 ②
10. 정답 4
11. 정답 4

1. 정답 12

직선 BC 의 방정식은 $y-0=\frac{1-0}{18-6}(x-6)$

$\therefore\ y=\frac{1}{12}(x-6)$ $\therefore\ \mathrm{D}\left(\mathrm{a},\ \frac{\mathrm{a}-6}{12}\right)$

또 E(a, 1)이므로

$\triangle\mathrm{CED}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CE}}\cdot\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}(18-a)\left(1-\frac{a-6}{12}\right)$

$=\frac{1}{24}(18-a)^2$

$\triangle\mathrm{CED}=\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$이므로

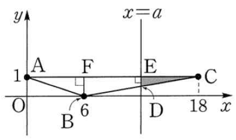
$\frac{1}{24}(18-a)^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 1$

$(18-a)^2=36$ $18-a=\pm 6$

$6<a<18$ 이므로 $a=12$

[다른 풀이]

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle\mathrm{CFB}\backsim\triangle CED$

따라서 $\overline{\mathrm{CF}}:\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{DE}}$ 이므로

$12:(18-a)=1:\overline{\mathrm{DE}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=\frac{18-\mathrm{a}}{12}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{CED}=\frac{1}{2}\cdot(18-a)\cdot\frac{18-a}{12}=\frac{1}{24}(18-a)^2$

$\triangle\mathrm{CED}=\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$ 이므로

$\frac{1}{24}(18-a)^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 1$

$(18-a)^2=36$, $18-a=\pm 6$

$6<a<18$ 이므로 $a=12$

2. 정답 3

직선 $l_1: x+by+3=0$ 이 점 A(1, 2)를 지나므로

$1+2b+3=0$ $\therefore\ b=-2$

$\therefore\ l_1: x-2y+3=0$

이때 점 B(3, a)는 직선 l_1 위에 있으므로

$3-2a+3=0$ $\therefore\ a=3$

두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로

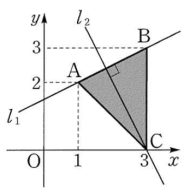
$1\cdot d+(-2)\cdot 1=0$ $\therefore\ d=2$

이때 점 C(3, c)는 직선

$l_2: 2x+y-6=0$ 위에 있으므로

$6+c-6=0$ $\therefore\ c=0$

따라서 오른쪽 $\triangle$ABC 의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$

3. 정답 ③

x 절편이 5, y 절편 $\frac{15}{4}$ 인 직선 l 의 방정식은

$\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{15}{4}}=1$

$\therefore\ 3x+4y-15=0$

선분 OP 의 길이가 최소일 때는 직선 l 과 $\overline{\mathrm{OP}}$ 가 수직일 때이다.

즉 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 길이의 최솟값은 원점 O와 직선 $l=3x+4y-15=0$ 사이의 거리이므로

$\frac{|-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

다른 풀이

점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

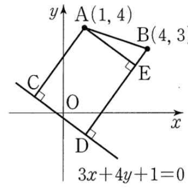
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\frac{25}{4}$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{15}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\cdot\overline{\mathrm{OH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=3$

4. 정답 ③

점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 E라 하자.



이때 사각형 ACDE는 직사각형이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 4+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{|3\cdot 4+4\cdot 3+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{ED}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BE}}^2}$

$=\sqrt{\{(4-1)^2+(3-4)^2\}-1^2}$

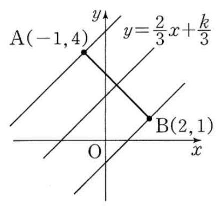
$=3$

$\therefore\ \square\mathrm{ACDB}=\frac{1}{2}\cdot(4+5)\cdot 3=\frac{27}{2}$

5. 정답 ⑤

$2x-3y+k=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{k}{3}$ 는 기울기가 $\frac{2}{3}$ 인 직선이다.

(ⅰ) 주어진 직선이 점 A(−1, 4)를 지날 때 k의 값이 최대이므로



$2\cdot(-1)-3\cdot 4+k=0$

$\therefore\ k=14$

(ⅱ) 주어진 직선이 점 B(2, 1)을 지날 때 k의 값이 최소이므로

$2\cdot 2-3\cdot 1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

이상에서 k의 값의 범위는

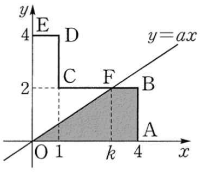
$-1\le k\le 14$

따라서 구하는 정수 k는

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 13,\ 14$

의 16개이다.

6. 정답 $\frac{2}{3}$



도형의 넓이가 10이므로 직선 $y=ax$와 $\overline{BC}$의 교점을 F라 하고, 점 F의 좌표를 $(k,\ 2)$라 하면 사다리꼴 OABF의 넓이는

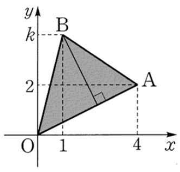
$$\frac{1}{2}\{4+(4-k)\}\cdot 2=5$$

$\therefore\ k=3$

따라서 $F(3,\ 2)$이므로 $\quad 2=3a$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

7. 정답 ③



직선 OA의 방정식은 $\quad y=\frac{1}{2}x$

점 $B(1,\ k)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$,

즉 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2\cdot k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$$

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$$

$|1-2k|=4,\quad 1-2k=\pm 4 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{2}(\because\ k>0)$

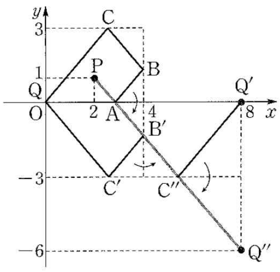
[다른 풀이]

삼각형 OAB의 세 꼭짓점이 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 2)$, $B(1,\ k)$이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|4\cdot k-2\cdot 1|=4$$

$|2k-1|=4 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{2}(\because\ k>0)$

8. 정답 $\frac{20}{7}$



오른쪽 그림과 같이 점 Q가 원점에 오도록 좌표평면 위에 당구대를 나타내면 $P(2,\ 1)$ 공이 벽에 부딪힐 때마다 공의 이동 경로를 벽에 대하여 대칭시켜 나가면 P지점에서 Q지점까지의 직선 경로를 위의 그림과 같이 $\overline{PQ''}$으로 나타낼 수 있다.

이때 점 Q″의 좌표는 $(8,\ -6)$이므로 직선 PQ″의 방정식은

$$y-1=\frac{-6-1}{8-2}(x-2)$$

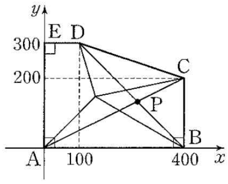
$$\therefore\ y=-\frac{7}{6}x+\frac{10}{3}$$

따라서 공이 처음 벽에 부딪힌 곳, 즉 점 A의 좌표는

$\left(\frac{20}{7},\ 0\right) \qquad \therefore\ \overline{QA}=\frac{20}{7}$

9. 정답 ②

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=(\overline{PA}+\overline{PC})+(\overline{PB}+\overline{PD})$$
$$\geq \overline{AC}+\overline{BD}$$



이므로 점 P가 □ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점일 때, 네 점 A, B, C, D에서 점 P에 이르는 거리의 합이 최소가 된다.

오른쪽 그림과 같이 점 A가 원점에 오도록 하여 오각형 ABCDE를 좌표평면 위에 나타내면

$B(400,\ 0)$, $C(400,\ 200)$, $D(100,\ 300)$

이므로 두 직선 AC, BD의 방정식은 각각

$$y=\frac{1}{2}x,\ y=-x+400$$

이고 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{800}{3},\ y=\frac{400}{3}$

따라서 두 직선의 교점 P의 좌표는 $\left(\frac{800}{3},\ \frac{400}{3}\right)$이므로

점 P는 점 A로부터 동쪽으로 $\frac{800}{3}$만큼, 북쪽으로 $\frac{400}{3}$만큼 떨어진 위치에 있다.

$$\therefore\ a+b=\frac{800}{3}+\frac{400}{3}=400$$

10. 정답 4

직사각형 ABCD의 세로의 길이를 k라 하면 가로의 길이는 $3k$이고, 그 넓이가 48이므로

$3k\times k=48,\qquad k^2=16 \qquad \therefore\ k=4(\because\ k>0)$

즉 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 12, 세로의 길이는 4이므로

$B(-7,\ -2)$, $D(5,\ 2)$

직선 BD의 방정식은

$$y-2=\frac{2-(-2)}{5-(-7)}(x-5)$$

$$\therefore\ -x+3y-1=0$$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$$b-a=3-(-1)=4$$

11. 정답 4

□ABCD에서

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2+1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1+2)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{10}$$
$$\overline{CD}=\sqrt{(2-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$$
$$\overline{AD}=\sqrt{(2+1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

즉 네 변의 길이가 모두 같으므로 □ABCD는 마름모이다.

또 □EFGH는 한 변의 길이가 2인 정사각형이다.

이때 각 사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 각각의 넓이를 이등분한다.

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\quad\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 0)$

$\overline{FH}$의 중점의 좌표는 $\quad\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(5,\ 3)$

따라서 □ABCD와 □EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 $(0,\ 0)$, $(5,\ 3)$을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y=\frac{3}{5}x \qquad \therefore\ 3x-5y=0$$

a, b, c는 모두 절댓값의 크기가 10이하인 정수이므로 순서쌍

$(a,\ b,\ d)$는

$$(3,\ -5,\ 0),\ (6,\ -10,\ 0),\ (-3,\ 5,\ 0),\ (-6,\ 10,\ 0)$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 4이다.