고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1\in A$ ② $\{2\}\in A$ ③ $\{2\}\subset A$
④ $\{1,\ 2\}\in A$ ⑤ $\{1,\ \{2\}\}\in A$

02 두 집합 $\mathrm{A}=\{5,\ 9,\ a-2\}$, $\mathrm{B}=\{5,\ 7,\ b+3\}$ 에 대하여 집합 A는 집합 B에 포함되고, 집합 B는 집합 A에 포함될 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 7 ③ 11
④ 15 ⑤ 19

03 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이고, $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이다. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는?

① $P^C\subset Q\subset R$ ② $P\subset R^C\subset Q$
③ $Q\subset P^C\subset R$ ④ $R\subset P^C\subset Q$
⑤ $R^C\subset Q\subset P$

04 $\sqrt{5x+10}+\sqrt{3x-9}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 실수 x의 최솟값을 구하시오.

05 부등식 $|x+y|\le|x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$
③ $xy\ge 0$ ④ $x\ge 0,\ y\ge 0$
⑤ $x\le 0,\ y\le 0$

06 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{3,\ 4\}\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\{1\}\subset A$
ㄴ. $\{3,\ 4\}\not\subset A$
ㄷ. $\varnothing\subset A$
ㄹ. $\{\varnothing\}\not\subset A$
ㅁ. $\{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{3,\ 4\}\}\subset A$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ, ㅁ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

07 점 $(1,\ 2)$가 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}\ (a\neq 0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

08 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 a, 일대일대응의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

09 함수 $f(x)=x+2$에 대하여

$$f^{1}=f,\ f^{n+1}=f\circ f^{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $f^{10}(a)=27$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

10 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+m$이 만나지 않도록 하는 정수 m의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 `~p 이면 ~q 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P\cap Q^{c}$ ② $P\cup Q^{c}$
③ $P\cap Q$ ④ $P^{c}\cap Q$
⑤ $P^{c}\cap Q^{c}$

12 [2019년 11월 고3 문과 10번/3점]
함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

13 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가질 때, $a+\dfrac{9}{a+1}$의 최솟값을 m, 그때의 a의 값을 n이라 하자. 이때 $m+n$의 값을 구하시오. (단, a는 실수)

14 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a+2<0$이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

15 실수 x에 대하여 분수식 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하시오.

16 일차함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $y=f\left(\dfrac{1}{3}x-6\right)$의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면 $y=ag(x)+b$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

17 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$\{(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\}\cap\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}$
를 간단히 하면?

① $\varnothing$ ② A ③ B
④ B^C ⑤ U

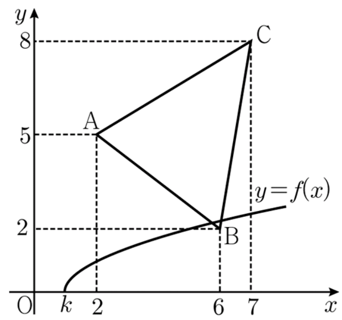
18 함수 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=kx+3k+4$ $(k\neq 0)$의 교점이 존재하지 않을 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-3<k<-1$
② $-3\le k<-1$
③ $-3<k\le -1$
④ $k<-3$ 또는 $k>-1$
⑤ $k<-3$ 또는 $k\ge -1$

19 두 실수 x, y에 대하여
$3x^2+2y^2-4x+\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$은 $x=a$, $y=b$일 때, 최솟값 m을 갖는다. 세 상수 a, b, m에 대하여 $a+b+m$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$, $\mathrm{C}(7,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

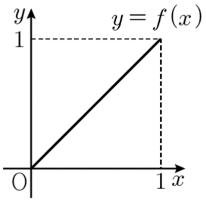
21 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-2b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 한 점에서 만날 때, 양수 a, b에 대하여 ab의 최댓값은?

① $\dfrac{1}{256}$ ② $\dfrac{1}{128}$ ③ $\dfrac{1}{64}$
④ $\dfrac{1}{32}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$

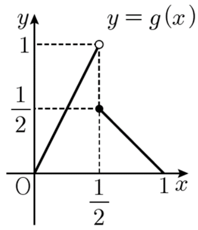
22 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$, $g(x)$는 모두 주기가 2인 함수이다.
> (나) 임의의 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{9}{4}\right)\right)$의 값을 구하시오.



[그림 1]

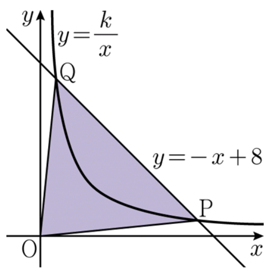


[그림 2]

23 [2019년 3월 고2 이과 21번/4점]
두 이차함수 $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=x^2+2x+a$가 있다. x에 대한 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24 그림과 같이 유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+8$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{87}{16}$ ③ $\frac{45}{8}$
④ $\frac{93}{16}$ ⑤ 6

25 [2023년 3월 고2 30번 변형]
두 실수 a $(a<2)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2-a}{x-2}+3 & (x \le a) \\ bx(x-a)+2 & (x>a) \end{cases}$$

라 하자.
함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 모든 순서쌍이 (a_1, b_1), (a_2, b_2)일 때, $-18(a_1+b_1+a_2+b_2)$의 값을 구하시오.

> (가) $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) \ge f(-3)$이다.
> (나) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ⑤	02 ④	03 ③
04 3	05 ③	06 ④
07 ④	08 ③	09 ④
10 ①	11 ④	12 ③
13 7	14 2	15 5
16 54	17 ①	18 ②
19 ②	20 ①	21 ②
22 $\frac{1}{2}$	23 ④	24 ②
25 160		

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [3회]

집합 사이의 포함 관계 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 **정답** ⑤

해설 ⑤ $1 \in A$, $\{2\} \in A$이므로
$\{1, \{2\}\} \subset A$

02 **정답** ④

해설 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ 이므로 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ 이다.
$7 \in \mathrm{A}$ 이므로 $a-2=7$
$\therefore\ a=9$
$9 \in \mathrm{B}$ 이므로 $b+3=9$
$\therefore\ b=6$
$\therefore a+b=9+6=15$

03 **정답** ③

해설 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로
$Q \subset P^C$
$\sim r$는 p이기 위한 충분조건이므로
$\sim r \Rightarrow p$
명제 $\sim r \rightarrow p$가 참이므로
그 대우인 $\sim p \rightarrow r$도 참이다.
즉, $\sim p \Rightarrow r$이므로
$\sim p$는 r이기 위한 충분조건이다.
따라서 $P^C \subset R$
$\therefore\ Q \subset P^C \subset R$

04 **정답** 3

해설 $5x+10 \geq 0$, $3x-9 \geq 0$이어야 하므로
$5x+10 \geq 0$에서
$x \geq -2$ $\cdots$ ㉠
$3x-9 \geq 0$에서
$x \geq 3$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $x \geq 3$
따라서 실수 x의 최솟값은 3이다.

05 **정답** ③

해설 $|x+y|=|x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$xy=|xy|$
(ⅰ) $xy=|xy|$
$\longrightarrow xy \geq 0$
(ⅱ) 또 $xy>0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \geq 0 \longrightarrow xy=|xy|$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$xy=|xy| \longleftrightarrow xy \geq 0$

06 **정답** ④

해설 ㄹ. $\varnothing \in A$이므로 $\{\varnothing\} \subset A$ (거짓)

07 **정답** ④

해설 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수는 $x=\sqrt{ay+b}$
이 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로
$1=\sqrt{2a+b}$
$\therefore\ 2a+b=1$

08 **정답** ③

해설 집합 X에서 Y로의 함수의 개수는
$a=3 \cdot 3 \cdot 3=27$
집합 X에서 Y로의 일대일대응의 개수는
$b=3 \cdot 2 \cdot 1=6$
$\therefore\ a+b=27+6=33$

09 정답 ④

해설 $f^1(x)=f(x)=x+2$에서

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=(x+2)+2$
$\quad=x+4$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=(x+4)+2$
$\quad=x+6$

$\vdots$

$\therefore f^{10}(x)=x+20$

$f^{10}(a)=27$에서 $a+20=27$

$\therefore a=7$

10 정답 ①

해설 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+m$이 만나지 않으므로

$\dfrac{x-3}{x+1}=mx+m$에서

$x-3=m(x+1)^2$

$\therefore mx^2+(2m-1)x+m+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2m-1)^2-4m(m+3)<0$

따라서 $m>\dfrac{1}{16}$이므로 정수 m의 최솟값은 1이다.

11 정답 ④

해설 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q\subset P$ 가 거짓이므로 $Q-P\neq\varnothing$ 임을 보이면 된다.

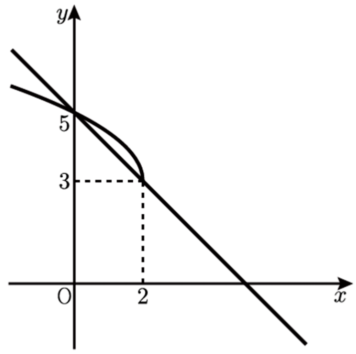
따라서 $Q\cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

12 정답 ③

해설 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, 조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.

따라서 구하는 k의 최솟값은

$3=-2+k$

$\therefore k=5$

13 정답 7

해설 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 허근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4a<0$

$\therefore a>\dfrac{1}{4}$

$a+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{9}{a+1}=(a+1)+\frac{9}{a+1}-1$$
$$\geq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{9}{a+1}}-1$$
$$=2\cdot 3-1=5$$

이때 등호는 $a+1=\dfrac{9}{a+1}$일 때 성립하므로

$(a+1)^2=9,\ a+1=3\ (\because a+1>0)$

$\therefore a=2$

따라서 $a+\dfrac{9}{a+1}$는 $a=2$일 때 최솟값 5를 가지므로

$m=5,\ n=2$

$\therefore m+n=7$

14 정답 2

해설 주어진 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a+2\geq 0$이다.'가 참이 되어야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a+2)\leq 0$$

$$\therefore a\geq 2$$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 2이다.

15 정답 5

해설
$$\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}$$
$$=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+1$$

이때 모든 실수 x에 대하여 항상

$x^2+1>0$, $\dfrac{4}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}+1$$
$=4+1=5$ $\left(\text{단, 등호는 } x^2+1=\dfrac{4}{x^2+1}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

16 정답 54

해설 $h(x)=\dfrac{1}{3}x-6$이라 하면 함수 $y=f\left(\dfrac{1}{3}x-6\right)$

즉, $y=f(h(x))$의 역함수는

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(g(x))$

$h(x)=\dfrac{1}{3}x-6$에서 $y=\dfrac{1}{3}x-6$으로 놓으면

$\dfrac{1}{3}x=y+6\qquad \therefore x=3y+18$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3x+18$

즉, $h^{-1}(x)=3x+18$이므로

$h^{-1}(g(x))=3g(x)+18$

따라서 $y=f\left(\dfrac{1}{3}x-6\right)$의 역함수는

$y=3g(x)+18$이므로 $a=3$, $b=18$

$\therefore ab=54$

17 정답 ①

해설
$$\{(A\cup B)\cap(A^C\cup B)\}\cap\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)\}$$
$$=\{(A\cap A^C)\cup B\}\cap\{(A\cup A^C)\cap B^C\}$$
$$=(\varnothing\cup B)\cap(U\cap B^C)$$
$$=B\cap B^C=\varnothing$$

18 정답 ②

해설
$$y=-\frac{|2x|-2}{|x+1|}$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{-2x-2}{-(x+1)} & (x<-1)\\ -\dfrac{-2x-2}{x+1} & (-1<x<0)\\ -\dfrac{2x-2}{x+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<0)\\ \dfrac{4}{x+1}-2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에서 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프는

두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이고

x절편이 1, y절편이 2이다.

또한, 직선 $y=kx+3k+4$,

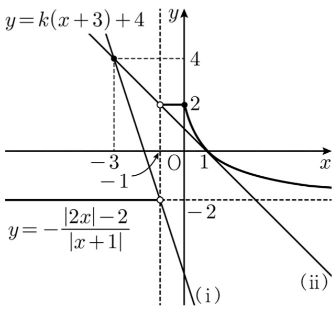
즉 $y=k(x+3)+4$ $(k\neq 0)$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 4)$를 지난다.

따라서 함수 $y=-\dfrac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와

직선 $y=k(x+3)+4$의 교점이 존재하지 않으려면

다음 그림과 같이 직선 $y=k(x+3)+4$가

직선 (i)이거나 두 직선 (i)과 (ii)의 두 가지 경우 사이에 존재해야 한다.



(i) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 경우

$-2=2k+4$, $2k=-6$

$\therefore k=-3$

(ii) 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나거나 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하는 경우

직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나면

$2=2k+4$, $2k=-2$

$\therefore\ k=-1$

직선 $y=k(x+3)+4$가 유리함수

$y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접하면

방정식 $k(x+3)+4=\dfrac{4}{x+1}-2$가 오직 하나의 근을 가져야 하므로 이 방정식의 양변에 $x+1$을 곱하면

$k(x+3)(x+1)+4(x+1)=4-2(x+1)$

$kx^2+4kx+3k+4x+4=4-2x-2$,

$kx^2+2(2k+3)x+3k+2=0$

$k\neq 0$이므로 이 이차방정식이 중근을 가져야 하고, 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k+3)^2-k(3k+2)=0$

$k^2+10k+9=0,\ (k+1)(k+9)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=-9$

그런데 직선 $y=k(x+3)+4$가 $x\geq 0$에서

유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2$의 그래프와 접해야 하므로

$k=-1$

따라서 직선 $y=k(x+3)+4$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나거나 유리함수 $y=\dfrac{4}{x+1}-2\ (x\geq 0)$의 그래프와 접하는 경우는 같은 직선이다.

즉, $k=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 상수 k의 값의 범위는 $-3\leq k<-1$

19 정답 ②

해설 $x,\ y$는 실수이므로 $x^2\geq 0,\ y^2\geq 0$이다.

따라서 $x^2+2y^2+3>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x^2+2y^2-4x+\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$

$=x^2+2y^2+3+\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}+2x^2-4x-3$

$\geq 2\sqrt{(x^2+2y^2+3)\cdot\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}}+2x^2-4x-3$ $\cdots$ ㉠

$=2x^2-4x+5$

$=2(x-1)^2+3\geq 3$ $\cdots$ ㉡

㉠에서 등호는 $x^2+2y^2+3=\dfrac{16}{x^2+2y^2+3}$에서

$x^2+2y^2=1$일 때 성립하고

㉡에서 이 값은 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 $x=1$일 때 $x^2+2y^2=1$에서 $y=0$이므로

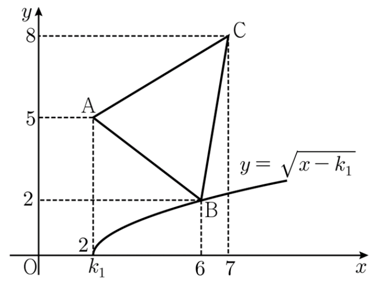
$a=1,\ b=0,\ m=3$이다.

$\therefore\ a+b+m=1+0+3=4$

20 정답 ①

해설 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 점 B에서 만날때의 k의 값을 k_1이라 하면

$y=\sqrt{x-k_1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(x)=\sqrt{x-k}$에서 $k>k_1$이면

곡선 $y=f(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

즉, k는 곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 최대이고

최댓값은 k_1이다.

곡선 $y=\sqrt{x-k_1}$이 점 $\mathrm{B}(6,\ 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{6-k_1},\ 6-k_1=4$

$\therefore\ k_1=2$

또한, 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{C}(7,\ 8)$ 지날 때 최소이므로

$8=\sqrt{7-k},\ 64=7-k$

$\therefore\ k=-57$

따라서 $-57\leq k\leq 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만난다. $\cdots$ ㉠

한편, $y=\sqrt{x-k}$에서

$y^2=x-k,\ x=y^2+k$

x와 y를 서로 바꾸면

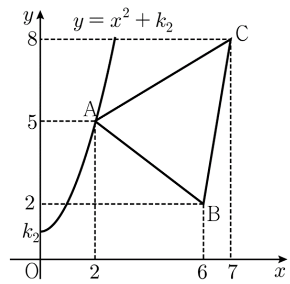
$y=x^2+k$

즉, 함수 $y=f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=x^2+k\ (x\geq 0)$

같은 방법으로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 점 A에서 만날 때의 k의 값을 k_2라 하면

$y=x^2+k_2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f^{-1}(x)=x^2+k$에서 $k>k_2$이면

곡선 $y=f^{-1}(x)$는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

즉, k는 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 A를 지날 때 최대이고

최댓값은 k_2이다.

곡선 $y=x^2+k_2$가 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$를 지나므로

$5=2^2+k_2$

$\therefore\ k_2=1$

또한 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 $\mathrm{C}(7,\ 8)$을 지날 때

최소이므로

$8=49+k$

$\therefore\ k=-41$

따라서 $-41\le k\le 1$일 때,

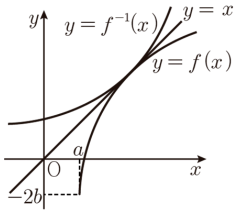
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만난다.

$\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 동시에 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-41\le k\le 1$이므로 구하는 최댓값은 1이다.

21 정답 ②

해설 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-2b$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 한 점에서 만날 때, 다음 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접한다.



$\sqrt{x-a}-2b=x$에서

$\sqrt{x-a}=x+2b$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-a=x^2+4bx+4b^2$

$\therefore\ x^2+(4b-1)x+4b^2+a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4b-1)^2-4(4b^2+a)=0$

$-4(a+2b)+1=0$

$\therefore\ a+2b=\dfrac{1}{4}$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+2b\ge 2\sqrt{2ab}$, $\dfrac{1}{4}\ge 2\sqrt{2ab}$

$\therefore\ ab\le\dfrac{1}{128}$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{1}{8},\ b=\dfrac{1}{16}\text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최댓값은 $\dfrac{1}{128}$이다.

22 정답 $\dfrac{1}{2}$

해설 주어진 그림에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 각각 구하면

$f(x)=x\ (0\le x\le 1)$

$$g(x)=\begin{cases}2x & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right)\\ -x+1 & \left(\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 주기가 2이고, $g(-x)=-g(x)$이므로

$g\left(-\dfrac{9}{4}\right)=-g\left(\dfrac{9}{4}\right)=-g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$f(-x)=f(x)$이므로

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f\left(g\left(-\dfrac{9}{4}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$

23 정답 ④

해설 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$이므로

$x^2+2x+a=x$

$x^2+x+a=0$ $\cdots$ ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$

$x^2+3x+a-2=0$ $\cdots$ ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(ⅰ) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서 $a<\frac{1}{4}$

$D_2<0$에서 $a>\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서 $a=\frac{1}{4}$

$D_2=0$에서 $a=\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1<0$에서 $a>\frac{1}{4}$

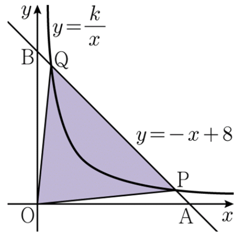
$D_2>0$에서 $a<\frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 정수 a는 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4

24 정답 ②

해설 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A(8, 0), B(0, 8)



삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 26이므로

$\triangle OAP=\triangle OQB=\frac{1}{2}(32-26)=3$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot b=3$에서 $b=\frac{3}{4}$이다.

점 P는 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$b=-a+8=\frac{3}{4}$에서 $a=\frac{29}{4}$이다.

또, 점 P는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\frac{29}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{87}{16}$

25 정답 160

해설 $a<2$, 즉 $2-a>0$이므로

$x\le a$에서 함수 $f(x)=\frac{2-a}{x-2}+3$은 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다. $\cdots$ ㉠

이때 $x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$을 점근선으로 가지므로 $x\le a$이면

$f(a)\le f(x)<3$ $\cdots$ ㉡

조건 (가)에 의하여 $x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최소이므로 a의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) $-3<a<2$인 경우

㉠에서 $f(-3)>f(a)$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=-3$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{x-2}+3 & (x\le -3)\\ bx(x+3)+2 & (x>-3)\end{cases}$$

㉠에서 $x\le -3$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq f(-3)$

$f(-3)=f(0)=2$이고

$-3<x \leq 0$에서 $f(x)=bx(x+3)+2$이므로

조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$이어야 한다.

또, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가

직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-3$과

만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.

㉡에서 $f(-3)=2 \leq f(x)<3$이므로

$x \leq -3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $y=3$ 또는 $y=-3$과 만나지 않는다.

$x>-3$에서

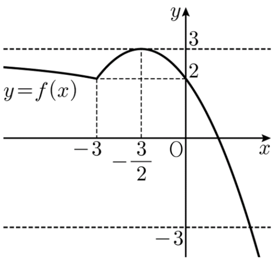
함수 $f(x)=bx(x+3)+2$ $(b<0)$의 그래프는

직선 $y=-3$과 한 점에서 만난다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 1]과 같이

함수 $f(x)=bx(x+3)+2$의 그래프는

직선 $y=3$에 접해야 한다.



[그림 1]

함수 $f(x)=bx(x+3)+2$는 $x=-\dfrac{3}{2}$에서

최대이므로 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3$

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=b \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) \cdot \dfrac{3}{2}+2=3$에서

$b=-\dfrac{4}{9}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-3,\ -\dfrac{4}{9}\right)$이다.

(iii) $a<-3$인 경우

$f(a)=f(0)=2$이고 ㉠, ㉡에서

$x \leq a$일 때 $2 \leq f(x)<3$

$a<x \leq 0$에서 $f(x)=bx(x-a)+2$이므로

조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 최소이어야 한다.

따라서 $b>0$이고 $\dfrac{a}{2}=-3$이어야 한다.

$a=-6$이고 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{x-2}+3 & (x \leq -6) \\ bx(x+6)+2 & (x>-6) \end{cases}$$

또, ㉡에서

$f(-6)=2 \leq f(x)<3$이므로

$x \leq -6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $y=3$ 또는 $y=-3$과 만나지 않는다.

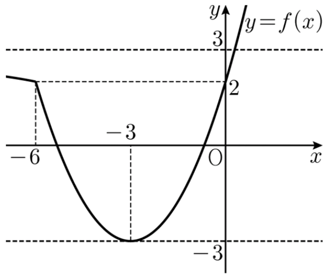
$x>-6$에서 함수 $f(x)=bx(x+6)+2$의

그래프는 직선 $y=-3$과 한 점에서 만난다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 2]와 같이

$x>-6$에서 함수 $f(x)=bx(x+6)+2$의

그래프는 직선 $y=-3$에 접해야 한다.



[그림 2]

함수 $f(x)=bx(x+6)+2$는 $x=-3$에서

최소이므로 $f(-3)=-3$

$f(-3)=b \cdot (-3) \cdot 3+2=-3$에서

$b=\dfrac{5}{9}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-6,\ \dfrac{5}{9}\right)$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의

모든 순서쌍 (a_1, b_1), (a_2, b_2)는

$\left(-3,\ -\dfrac{4}{9}\right)$, $\left(-6,\ \dfrac{5}{9}\right)$이다.

$\therefore\ -18(a_1+b_1+a_2+b_2)$

$=-18 \cdot \left\{-3+\left(-\dfrac{4}{9}\right)+(-6)+\dfrac{5}{9}\right\}=160$