✓〈킬러패스〉공통수학1
(반드시 맞춰야 할 킬러문제)

경우의 수편
(경우의 수, 순열,조합)

경우의 수는 킬러보다는 꼭 알아야
될 내용을 중심으로 문제를 선정했습니다.

1등급 받고 싶다면?

킬러문제부터 잡자!

DRE-EDU.com

[순열]

1.내신 핵심 문항

a, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때,
적어도 한쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수는?

① 68 ② 72 ③ 76
④ 80 ⑤ 84

풀이과정)

풀이

풀이법 – 특정한 조건이 있으면 먼저 나열한다.

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$5! = 120$

이때, 자음은 b, c, d이므로

양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2 \times 3! = 3 \times 2 \times 6 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 - 36 = 84$

[조합]

2.내신 킬러 문항

천의 자리의 수를 a, 백의 자리의 수를 b,
십의 자리의 수를 c, 일의 자리의 수를 d라고 할 때,
$0 < a < 4 \le b < c < d < 10$을 만족시키는
네 자리 자연수의 개수는?

① 56 ② 60 ③ 64
④ 68 ⑤ 72

풀이과정)

풀 이

풀이법 - 순서가 있으면 조합으로 생각한다.

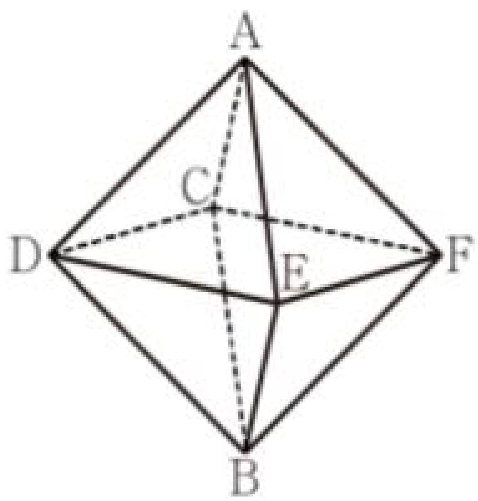
a가 될 수 있는 수는 1 또는 2 또는 3의 3개이다.
또, $4 \le b < c < d < 10$을 만족시키는 b, c, d는
4부터 9까지의 6개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를
택하는 경우의 수와 같으므로
$${}_6C_3 = 20$$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$$3 \cdot 20 = 60$$

DRE-EDU.com

[경우의 수]

3.내신 킬러 문항

다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정팔면체가 있다. 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 꼭짓점 B까지 움직일 때, 이동한 거리가 3인 경우의 수를 구하시오.

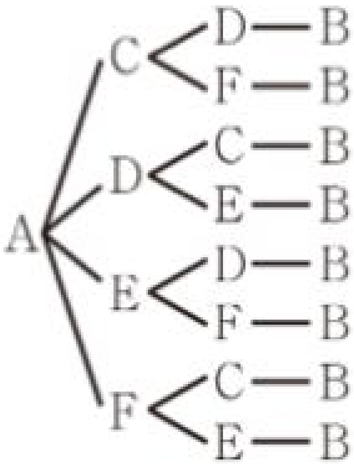


풀이과정)

풀 이

풀이법
A를 중심으로 수형도를 그려본다.

이동한 거리가 3인 경우의 이동한 경로는 다음과 같다.



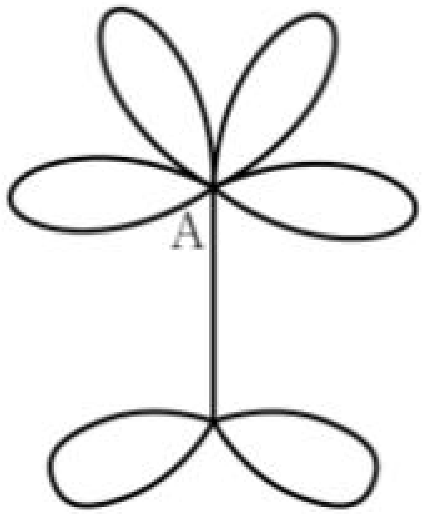
따라서 구하는 경우의 수는 8이다.

DRE-EDU.com

[경우의 수]

4.내신 킬러 문항

지수는 점 A에서 시작하여 펜을 떼지 않고 한 번에
다음 그림과 같은 도형을 그리려고 한다. 이 도형을 그릴 수
있는 방법의 수는?

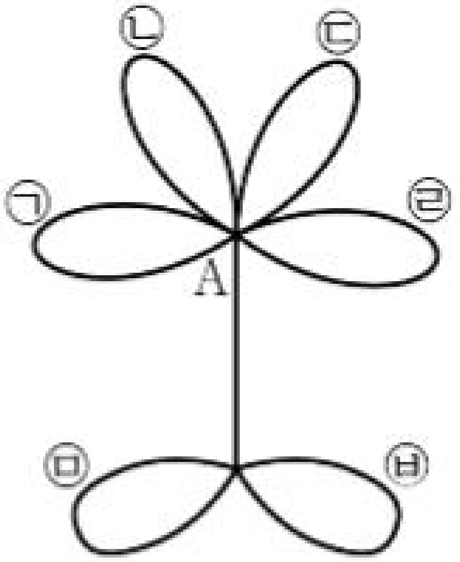


풀이과정)

풀 이

풀이법
A에서 출발하여 돌아오는 경우가 각 각
2가지 이므로 16을 곱해 주어야 한다.

아래 그림에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 그리는 순서를 정하는 방법의 수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$이다.



그런데 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣은 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 그려지므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 그리는 방향을 정하는 경우의 수는 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$이다.
즉, 점 A에서 시작하여 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 한 번에 그릴 수 있는 방법의 수는 $24 \cdot 16 = 384$이다.
같은 방법으로 ㉤, ㉥을 그리는 순서를 정하는 방법의 수는 2, 그리는 방향을 정하는 경우의 수는 $2 \cdot 2 = 4$이므로 ㉤, ㉥을 한 번에 그릴 수 있는 방법의 수는 $2 \cdot 4 = 8$이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $384 \cdot 8 = 3072$이다.

DRE-EDU.com

[경우의 수]

5.내신 킬러 문항

3개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c+abc$가 홀수가 되는 경우의 수를 구하시오.

풀이과정)

풀이

풀이법
abc는 곱이므로 a,b,c중 하나만 짝수
이면 짝수임은 생각하며 푼다.

$a+b+c+abc$가 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a+b+c$: 짝수, abc : 홀수

$a+b+c$가 짝수인 경우는

$(a, b, c)=$(짝, 짝, 짝), (짝, 홀, 홀), (홀, 짝, 홀), (홀, 홀, 짝) 으로 abc는 모두 짝수이다.

따라서 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

(ii) $a+b+c$: 홀수, abc : 짝수

$a+b+c$가 홀수인 경우는

$(a, b, c)=$(짝, 짝, 홀), (짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 짝), (홀, 홀, 홀)의 4가지이다.

이때 $(a, b, c)=$(짝, 짝, 홀)인 경우는

$3\times3\times3=27$(가지)이고, (짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 짝)이 모두 같은 경우이므로 $27\times3=81$(가지)이다.

한편, $(a, b, c)=$ (홀, 홀, 홀)인 경우는

abc가 짝수이라는 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우는 81가지이다.

DRE-EDU.com

[경우의 수]

6.내신 킬러 문항

$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수 중 7의 배수의 개수를 구하시오.

풀이과정)

풀 이

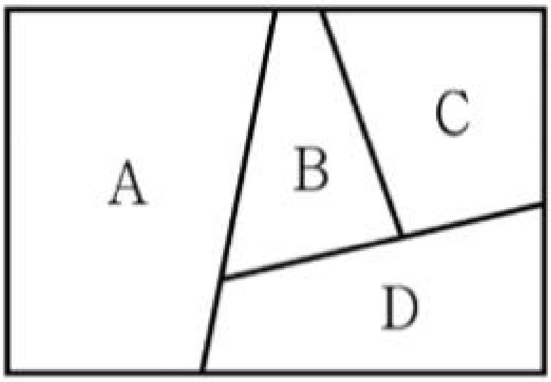
풀이법
(전체) - (7의 배수가 아닌경우)

$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수 중 7의 배수인 것은
소인수 중에서 7을 적어도 1개 갖는 것을 의미한다.
따라서 $2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수의 개수에서 7을 소인수로
갖지 않는 약수, 즉 $2^2 \cdot 5^3$의 약수의 개수를 뺀 것과
같으므로
$2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$의 양의 약수의 개수는
$(2+1) \cdot (3+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
$2^2 \cdot 5^3$의 약수의 개수는
$(2+1) \cdot (3+1) = 3 \cdot 4 = 12$
$\therefore 36 - 12 = 24$

[경우의 수]

7.내신 핵심 문항

다음 그림의 4개의 영역을 6가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복해서 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때 칠하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



풀이과정)

풀이

풀이법
A=C경우, A≠C 경우 B색 칠하는 경우가 달라진다.

D가 A, B, C와 모두 인접하여 있으므로 D를 가장 먼저 칠하면 D에 칠할 수 있는 경우의 수는 6이다.
또, B도 A와 C, D와 인접하여 있으므로 B에 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.
A와 C는 B, D와는 인접하여 있지만 서로 인접하지 않으므로 서로 같은 색을 칠하는 경우와 서로 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

B와 D를 칠하고 남은 색이 4가지이므로 이 중 하나를 선택하여 A와 C에 모두 칠하는 경우의 수는 4이다.
따라서 A와 C에 같은 색을 칠하는 경우에 칠할 수 있는 모든 경우의 수는

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

B와 D를 칠하고 남은 색이 4가지이므로
이 중 두 가지를 선택하여 A와 C에 모두 칠하는
경우의 수는 $4 \cdot 3$이다.
따라서 A와 C에 다른 색을 칠하는 경우에 칠할 수
있는 모든 경우의 수는

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

따라서 칠하는 경우의 수는

$120 + 360 = 480$

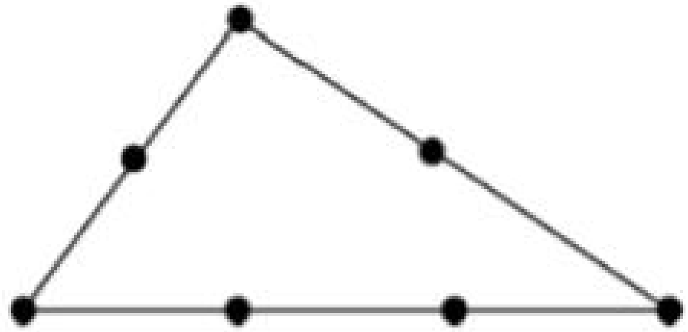
※ 색칠 문제는 같을 때와 다를 때를
나누는 경우와
그냥 계산하는 경우를 구별하는 것이
아주 중요하다.

※나누는 기준!
가운데 있는 영역이 옆에 있는 색에 영
향을 끼치면 경우를 나누고, 그렇지않
으면 그냥 곱해서 계산한다.

[경우의 수]

8.내신 핵심 문항

그림과 같이 삼각형 위에 7개의 점이 있다. 이 중 두 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수는?



① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

풀이과정)

풀이

풀이법
전체 – 아닌 경우 주목!

조합의 수 구하기

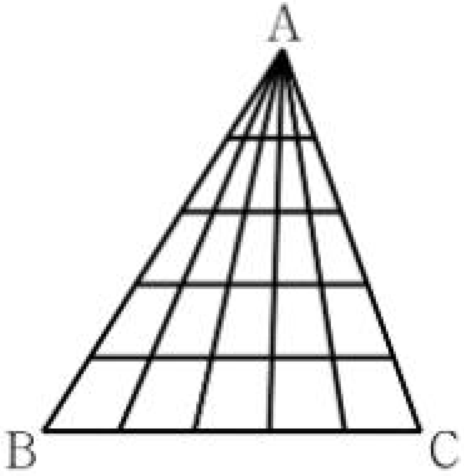
$${}_{7}C_{2} - {}_{3}C_{2} - {}_{4}C_{2} - {}_{3}C_{2} + 3 = 12$$

DRE-EDU.com

[조합]

9.내신 킬러 문항

삼각형 ABC에서 꼭짓점 A와 선분 BC 위의 네 점을 연결하는 4개의 선분을 그리고, 선분 AB 위의 네 점과 선분 AC 위의 네 점을 연결하는 4개의 선분을 그려 다음 그림과 같은 도형을 만들었다. 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오.

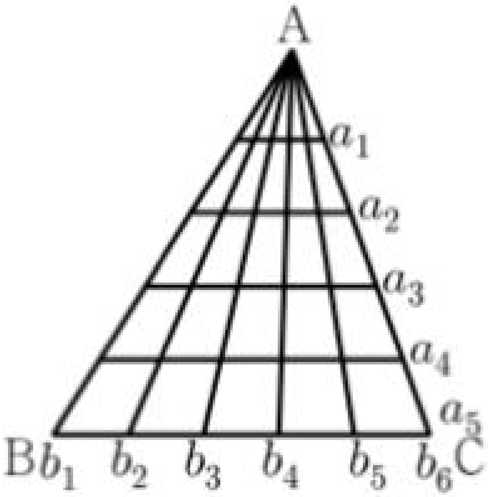


풀이과정)

풀 이

풀이법 - 도형의 개수는 조합을 이용한다.
A를 중심으로 삼각형을 생각한다.

다음 그림과 같이 각각의 선을
a_i, b_j $(i=1, 2, 3, 4, 5, j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 이라 하자.



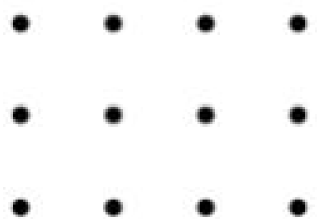
삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 한 개, $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 중 두 개를 택해야 하므로 구하는 삼각형의 개수는
${}_5C_1 \cdot {}_6C_2 = 5 \cdot 15 = 75$

DRE-EDU.com

[조합]

10.내신 킬러 문항

다음 그림과 같이 같은 간격으로 놓인 12개의 점이 있다. 이들 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 180　② 185　③ 190　④ 195　⑤ 200

풀이과정)

풀이

풀이법
(전체) −(아닌경우)

주어진 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

(ⅰ) 가로의 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot 3 = {}_4C_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

(ⅱ) 세로의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅲ) 대각선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는

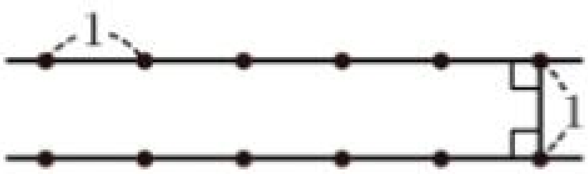
$$220 - (12 + 4 + 4) = 200$$

DRE-EDU.com

[경우의 수]

11.내신 킬러 문항

다음 그림과 같이 서로 평행하고 거리가 1인 두 직선 위에 각각 간격이 1인 점 6개가 있다. 각 직선에서 2개씩 택한 점을 네 꼭짓점으로 하고 넓이가 3인 사각형을 만드는 모든 경우의 수를 구하시오.



풀이과정)

풀 이

풀이법
면적이 3임을 이용하여 경우의 수를 나누어 본다.

각 직선에서 2개씩 점을 택하여 만든 사다리꼴의 윗변의 길이를 a, 아랫변의 길이를 b라고 하면

넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)=3$이므로 $a+b=6$

$a=1$, $b=5$인 경우의 수는 $5\cdot 1=5$

$a=2$, $b=4$인 경우의 수는 $4\cdot 2=8$

$a=3$, $b=3$인 경우의 수는 $3\cdot 3=9$

$a=4$, $b=2$인 경우의 수는 $2\cdot 4=8$

$a=5$, $b=1$인 경우의 수는 $1\cdot 5=5$

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $5+8+9+8+5=35$

DRE-EDU.com

[조합]

12.내신 핵심 문항

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적힌 8장의 카드가 들어 있는 주머니에서 카드를 한 장씩 차례로 5번 꺼낸다. i번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 $a_i(i=1,2,3,4,5)$라 할 때, a_i가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는?
(단, 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.)

(가) $a_3=5$
(나) $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$

풀이과정)

풀이

풀이법
순서가 있을 때 조합으로 계산!

조건 (가)에서 $a_3 = 5$이므로 a_1, a_2는 1부터 4까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2로 정하면 된다.

그러므로 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

그 각각에 대하여 a_4, a_5는 6부터 8까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 작은 수를 a_4, 큰 수를 a_5로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 1 \times 3 = 18$$

[조합]

13. 내신 핵심 문항

${}_{n}\mathrm{P}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r}=392$, ${}_{n}\mathrm{P}_{r}-{}_{n}\mathrm{C}_{r}=280$일 때, $n+r$의 값은? (단, n, r은 자연수이다.)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

풀이과정)

풀 이

풀이법
순열과 조합 계산! 연속수를 찾으며 곱으로 표현해 본다.

${}_{n}\mathrm{P}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r}=392$, ${}_{n}\mathrm{P}_{r}-{}_{n}\mathrm{C}_{r}=280$이므로 두 식을 연립하면

${}_{n}\mathrm{P}_{r}=336$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}=56$ $\cdots$ ㉠

${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$ 이므로 ㉠을 대입하면

$56=\dfrac{336}{r!}$, $r!=6$

$\therefore\ r=3$

${}_{n}\mathrm{P}_{3}=336=8\cdot7\cdot6$

$\therefore\ n=8$

따라서 $n+r=11$

DRE-EDU.com

[조합]

14.내신 핵심 문항

x에 대한 이차방정식 ${}_{n}C_{2}x^{2}-{}_{n}C_{4}x+{}_{n}C_{6}=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta=1$이다. $4(\alpha^{2}+\beta^{2})$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

풀이과정)

풀 이

풀이법
조합 + 이차방정식 근-계수 관계!

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_2},\ \alpha\beta=\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_n\mathrm{C}_2}$$

이때 $\alpha\beta=1$이므로

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_n\mathrm{C}_2}=1$$

${}_n\mathrm{C}_2={}_n\mathrm{C}_6$에서 $n-2=6$이므로

$n=8$

따라서 $\alpha+\beta=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}}=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4(\alpha^2+\beta^2)&=4\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=4\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\right\}\\&=17\end{aligned}$$

DRE-EDU.com

[조합]

15.내신 핵심 문항

$0 < a < b < c \le d < 10$을 만족하는
네 자연수 a, b, c, d를 한 번씩 사용하여 네 자리 자연수를 만들려고 한다. 만들 수 있는 총 자연수의 개수는?

① 4032 ② 4036 ③ 4040
④ 4044 ⑤ 4048

풀이과정)

풀 이

풀이법
순서가 있을 때 조합!

(ⅰ) $0 < a < b < c < d < 10$인 경우

1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 택하여 나열하면 된다.

$${}_9\mathrm{P}_4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

(ⅱ) $0 < a < b < c = d < 10$인 경우

1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하고 그 중 가장 큰 것을 두 번 사용하여 나열하면 된다.

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3 \cdot 4!}{2!} = 1008$$

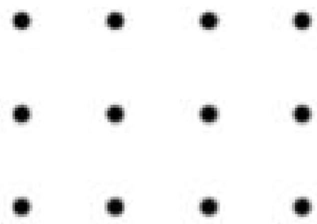
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$3024 + 1008 = 4032$

[조합]

16.내신 핵심 문항

다음 그림과 같이 같은 간격으로 놓인 12개의 점이 있다. 이들 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



① 180 ② 185 ③ 190
④ 195 ⑤ 200

풀이과정)

풀이

풀이법
전체 – 아닌경우

주어진 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

(ⅰ) 가로의 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot 3 = {}_4C_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

(ⅱ) 세로의 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅲ) 대각선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot 4 = 4$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는

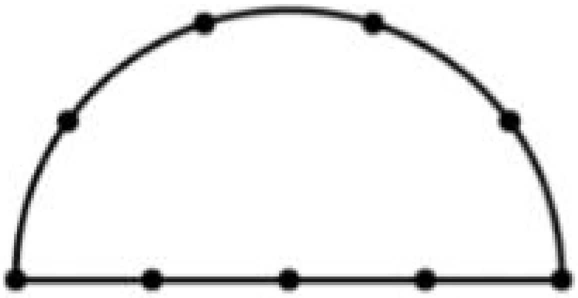
$$220 - (12 + 4 + 4) = 200$$

DRE-EDU.com

[조합]

17.내신 핵심 문항

다음 그림과 같이 반원 위에 있는 9개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.



풀이과정)

풀 이

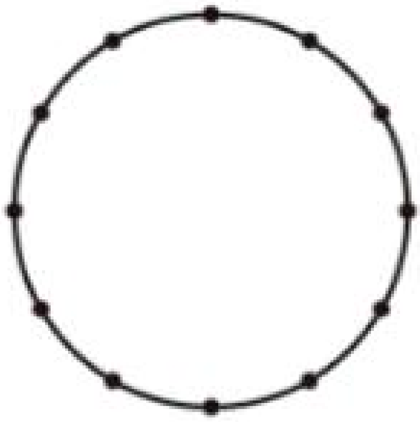
풀이법
삼각형은 세 점 선택!

반원 위의 9개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 9개의 점 중에서 3개를 고르는 경우의 수에서 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 고르는 경우의 수를 빼면 된다.
따라서 구하는 삼각형의 개수는
$_9C_3 - {_5C_3} = 84 - 10 = 74$

[조합]

18.내신 핵심 문항

다음 그림과 같이 원 위에 12개의 점이 같은 간격으로 놓여 있다. 이 중에서 3개의 점을 이어서 만들 수 있는 직각삼각형의 개수를 a, 정삼각형의 개수를 b라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.



풀이과정)

풀 이

직각삼각형 원주각 = 90°
정삼각형 → 센다

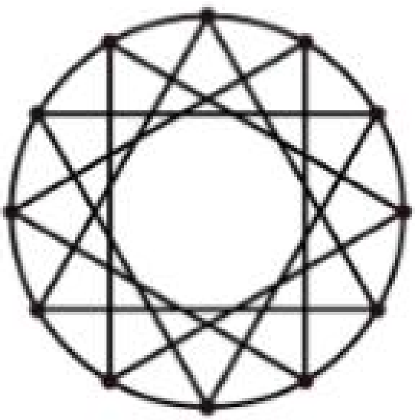
(i) 직각삼각형의 개수

지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$ 이므로
직각삼각형을 만들려면 삼각형의 한 변이 원의
지름이어야 한다.
원 위의 12개의 점 중 두 점을 이어 만들 수 있는
지름은 6개이고 나머지 10개의 점 중에서 1개를
택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_1$ 이므로 구하는 직각삼각형의
개수 a는

$a = 6 \cdot {}_{10}C_1 = 60$

(ii) 정삼각형의 개수

정삼각형은 다음 그림과 같이 4개 만들 수 있으므로
$b = 4$



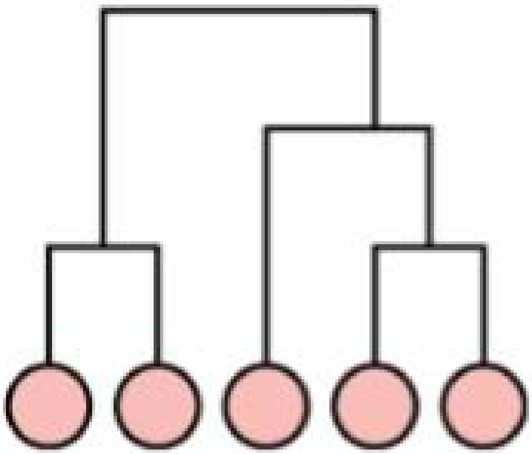
(i), (ii)에서 $a - b = 60 - 4 = 56$

DRE-EDU.com

[조합]

19.내신 핵심 문항

5개의 팀이 축구 시합의 대진표가 다음과 같을 때, 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하시오.



풀이과정)

풀이

풀이법
대진표 (2명+3명)(2명+3명) 배치!

5개의 팀을 2팀과 3팀으로 나누는 경우의 수는
${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10$
3개의 팀 중에서 부전승으로 올라갈 한 팀을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는 $10 \times 3 = 30$

[조합]

20.내신 핵심 문항

서로 다른 7개의 구슬을 3명이 나누어 가지려고 한다. 한 사람이 적어도 한 개의 구슬을 갖도록 나누어 갖는 방법의 수를 구하시오.

풀이과정)

풀 이

풀이법
분할과 분배!

서로 다른 7개의 구슬을 3명이 각각 적어도 한 개의 구슬을 갖도록 나누어 갖는 방법은 다음과 같다.

(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 7 \cdot 15 = 105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 경우

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(iii) 2개, 2개, 3개로 나누는 경우

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

나눈 구슬을 3명에게 나누어주는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 서로 다른 7개의 구슬을 3명 한 사람이 적어도 한 개의 구슬을 갖도록 나누어 갖는 방법의 수는

$(21 + 105 + 70 + 105) \cdot 6 = 301 \cdot 6 = 1806$

DRE-EDU.com

[조합]

21.내신 핵심 문항

1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 네 자리의 정수 $a_1a_2a_3a_4$를 만들 때, $a_i \neq i$를 만족시키는 정수의 개수를 수형도를 이용하여 구하면? (단, $i = 1, 2, 3, 4$)

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

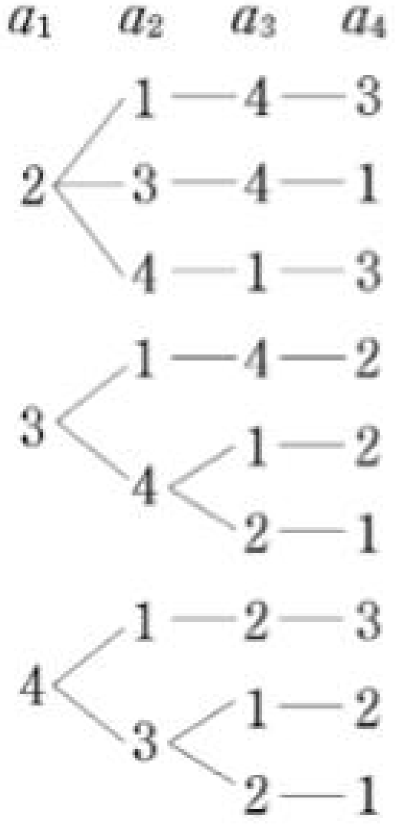
풀이과정)

풀 이

풀이법
자기 짝이 아닌 경우의 수
원소가 4개일 때 = 9
원소가 5가지 일때 =44

$a_1 \neq 1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여

a_2, a_3, a_4를 각각 구해 보면 다음과 같다.



따라서 구하는 정수의 개수는 9이다.

[경우의 수]

22.내신 핵심 문항

$2x+y+z=5$를 만족시키는
음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

풀이과정)

풀이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

$2x+y+z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는

(i) $x=0$일 때, $y+z=5$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$의 6개

(ii) $x=1$일 때, $y+z=3$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$의 4개

(iii) $x=2$일 때, $y+z=1$이므로 (y, z)의 순서쌍은 $(0, 1)$, $(1, 0)$의 2개

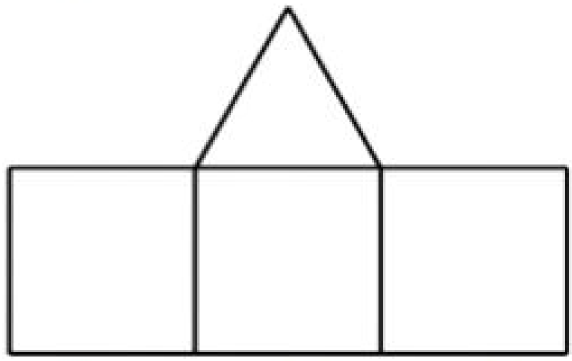
(i)~(iii)에서 합의 법칙에 의하여

$6+4+2=12$

[경우의 수]

23.내신 핵심 문항

그림과 같이 한 개의 정삼각형과 세 개의 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 네 개의 정다각형 내부에 하나씩 적을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

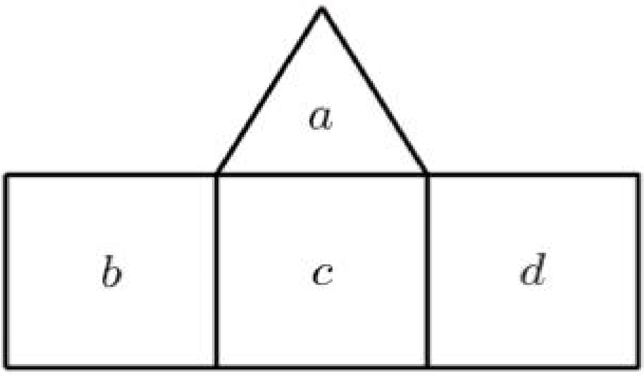
(가) 세 개의 정사각형에 적혀 있는 수는 모두 정삼각형에 적혀 있는 수보다 작다.
(나) 변을 공유하는 두 정사각형에 적혀 있는 수는 서로 다르다.

풀이과정)

풀이

풀이법
b = d, b≠d 나누어서 생각한다.

순열과 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a,
정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.
조건 (가)에서 $a > b$, $a > c$, $a > d$이다.
조건 (나)에서 $b \neq c$, $c \neq d$이다.

(i) $b \neq d$일 때

a, b, c, d가 서로 다르다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4 = 15$
이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1 \cdot 3! = 6$
따라서 $b \neq d$인 경우의 수는 $15 \cdot 6 = 90$

(ii) $b = d$일 때

$a > b = d$, $a > c$이므로

a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는

경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서

가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$,

c로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1 \cdot 2! = 2$

따라서 $b = d$ 인 경우의 수는

$20 \cdot 2 = 40$

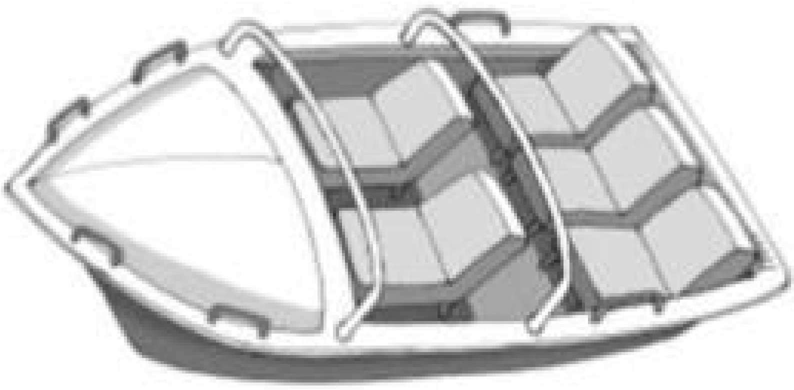
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90 + 40 = 130$

[경우의 수]

24. 내신 핵심 문항

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오.



풀이과정)

풀이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

어른 2명은 반드시 앞줄과 뒷줄에 한 명씩 앉아야 하므로
어른을 앉히는 방법의 수는

${}_2C_1 \cdot {}_2P_1 \cdot {}_3P_1 = 12$

어린이 3명을 나머지 3개의 자리에 앉히는 방법의 수는

$3! = 6$

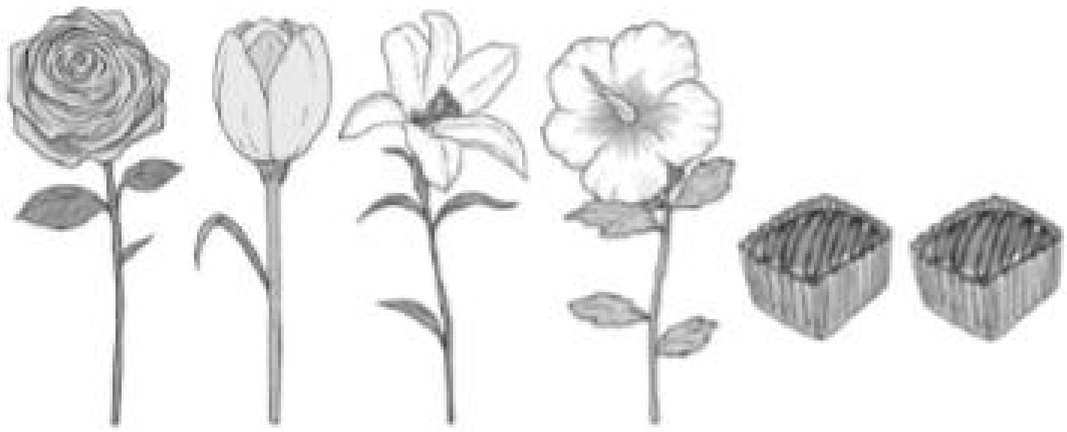
따라서 구하는 경우의 수는

$12 \cdot 6 = 72$

[경우의 수]

25.내신 핵심 문항

서로 다른 종류의 꽃 4송이와 같은 종류의 초콜릿 2개를 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 꽃과 초콜릿을 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.



풀이과정)

풀 이

풀이법
큰 값을 먼저 대입!

순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
꽃 4송이와 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우
초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$이므로
1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는
$5 \cdot 24 = 120$

(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는

${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$이고,

꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는 $6 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 1 = 360$

(iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$이고,

꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는 $120 \cdot 4 = 480$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120 + 360 + 480 = 960$