실시일자	-	# 유형별 학습	이름
26문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 61~72p_문제연습

원의 방정식과 그래프

01 원 $x^2+y^2+4x-2y+2=0$과 중심이 같고 점 $(2, 3)$을 지나는 원의 넓이는?

① 12π　② 14π　③ 16π
④ 18π　⑤ 20π

02 다음의 x, y에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않는</u> 것은?

① $x^2+y^2+2x+6y+8=0$
② $x^2+y^2+2x+6y+12=0$
③ $x^2+y^2+6x+2y+8=0$
④ $x^2+y^2-6x+2y+8=0$
⑤ $x^2+y^2-6x+6y+16=0$

03 다음 중 두 점 $(1, 4)$, $(-5, -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점인 것은?

① $(-5, 4)$　② $(-3, 6)$
③ $(-2, 3)$　④ $(1, 2)$
⑤ $(4, 0)$

04 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=5$와 중심이 같고 점 $(6, 1)$을 지나는 원이 점 $(a, 0)$을 지날 때, 모든 a의 값의 합을 구하시오.

05 x, y에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+ax+ay=0$이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

06 세 점 $(-1, 3)$, $(2, 4)$, $(4, 8)$을 지나는 원의 넓이는?

① 4π　② 9π　③ 16π
④ 25π　⑤ 36π

07 두 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$로부터의 거리의 비가 $1:2$인 점의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 반지름의 길이는?

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

08 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$의 교점과 점 $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 할 때, 상수 A, B, C의 합 $A+B+C$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

09 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

10 중심이 직선 $y=2x-4$ 위에 있고 두 점 $(-1,\ 1)$, $(-2,\ -4)$를 지나는 원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오.

11 좌표평면에서 직선 $4x-5y=2$와 수직이고 원 $x^2+y^2+4x-4y=0$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $4x+5y=2$ ② $4x+5y=-2$
③ $5x+4y=0$ ④ $5x+4y=-2$
⑤ $5x+4y=2$

12 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$, $\mathrm{C}(2,\ -5)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$일 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이다.)

13 좌표평면에서 점 $C(2,3)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다.
이 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 하나의 접선을 그을 때, 그 접점을 Q, 원점을 O라 하자.
이 때, $\overline{OP}=\overline{PQ}$ 를 만족시키는 점 P의 자취방정식을 구하면?

① $2x+3y=6$
② $x+y=2$
③ $3x+2y=6$
④ $2x-3y=6$
⑤ $3x-2y=6$

14 좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(-1,\ 2)$에 대하여 다음 보기 중 점 P의 자취가 원이 되는 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $\overline{PA}=\overline{PB}$ ㄴ. $2\overline{PA}=\overline{PB}$
ㄷ. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=9$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

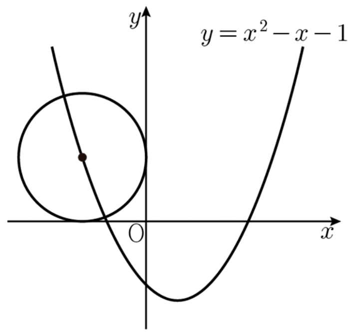
15 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

16 원 $x^2+y^2-2kx-2ky+4k-4=0$이 x축, y축에 동시에 접할 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

17 [2022년 3월 고2 25번/3점]
곡선 $y=x^2-x-1$ 위의 점 중 제2사분면에 있는 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



18 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+ay=0$의 교점을 지나는 직선이 직선 $y=x+3$과 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

19 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

20 [2020년 9월 고1 20번/4점]
좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ -9)$, $B(5,\ 3)$에 대하여 $\angle APB=45^\circ$ 를 만족시키는 점 P가 있다.
서로 다른 세 점 A, B, P를 지나는 원의 중심을 C라 하자.
선분 OC의 길이를 k라 할 때, k의 최솟값은?
(단, O는 원점이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

21 좌표평면 위의 두 점 $A(-2+\sqrt{3},\ 1)$, $B(-2-\sqrt{3},\ -3)$과 직선 $y=-x-3$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\angle APB=\angle AQB=90^\circ$ 일 때, 선분 PQ의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오.

22 방정식 $x^2+y^2-6y+k^2-8k+24=0$이 원을 나타낼 때, 그중 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

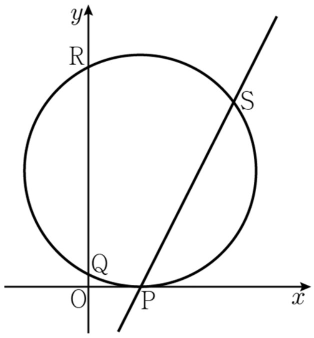
23 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1:2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ △PAB 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

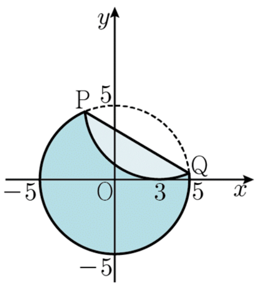
24 [2021년 9월 고1 17번/4점]

그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 점 P에서 접하며 y축과 두 점 Q, R에서 만나는 원이 있다. 점 P를 지나고 기울기가 2인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 S라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=4$를 만족시킨다. 원점 O와 원의 중심 사이의 거리는?



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

25 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$를 선분 PQ를 접는 선으로 하여 접었더니 점 $(3,\ 0)$에서 x축에 접하였다. 이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 a라고 할 때, $30a$의 값을 구하시오.



26 두 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3 cm , 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 4 ② 4.2 ③ 4.4
④ 4.6 ⑤ 4.8

실시일자	-	유형별 학습	이름
26문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 61~72p_문제연습

원의 방정식과 그래프

빠른정답

01 ⑤	02 ②	03 ①
04 8	05 ③	06 ④
07 ④	08 ①	09 ④
10 6	11 ④	12 45
13 ①	14 ④	15 ③
16 ②	17 1	18 -4
19 ④	20 ②	21 28
22 1	23 ③	24 ①
25 170	26 ⑤	

실시일자	-	유형별 학습	이름
26문제 / DRE수학			

마플시너지(2025) - 공통수학2 61~72p_문제연습

원의 방정식과 그래프

01 정답 ⑤

해설 $x^2+y^2+4x-2y+2=0$을 변형하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=3$이므로

원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$

따라서, 중심이 $(-2, 1)$이고

반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$이고,

이 원이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$r=\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$

따라서, 이 원의 넓이는 $\pi r^2=20\pi$

02 정답 ②

해설 ① $(x+1)^2+(y+3)^2=2$

② $(x+1)^2+(y+3)^2=-2$

③ $(x+3)^2+(y+1)^2=2$

④ $(x-3)^2+(y+1)^2=2$

⑤ $(x-3)^2+(y+3)^2=2$

03 정답 ①

해설 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1-5}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$, 즉 $(-2, 1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(-5-1)^2+(-2-4)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-1)^2=18$이므로

이 원 위의 점인 것은 ①이다.

04 정답 8

해설 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=5$의 중심의 좌표는 $(4, -2)$

이므로 이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라

하면 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(6, 1)$을 지나므로

$r^2=4+9=13$

$\therefore (x-4)^2+(y+2)^2=13$

이 원이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$(a-4)^2+4=13$, $(a-4)^2=9$, $a-4=\pm 3$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은 $1+7=8$

05 정답 ③

해설 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$

$x^2+y^2-2x-2y+2-r^2=0$ $\cdots$ ㉠

이때 원 ㉠과 $x^2+y^2+ax+ay=0$이 같으므로

$a=-2$, $2-r^2=0$

$\therefore a=-2$, $r=\sqrt{2}$ $(\because r>0)$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

06 정답 ④

해설 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고

세 점 $(-1, 3)$, $(2, 4)$, $(4, 8)$의 좌표를 각각 대입하면

$-A+3B+C+10=0$,

$2A+4B+C+20=0$,

$4A+8B+C+80=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A=2$, $B=-16$, $C=40$

즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2+2x-16y+40=0$이므로

$(x+1)^2+(y-8)^2=25$

따라서 구하는 원의 넓이는 25π이다.

07 정답 ④

해설 주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 2$이므로

$2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}},\ 4\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$

$4\{(x-3)^2+(y+1)^2\} = \{(x+3)^2+(y-5)^2\}$

$x^2+y^2-10x+6y+2=0$

$\therefore\ (x-5)^2+(y+3)^2=32$

따라서 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

08 정답 ①

해설 $x^2+y^2=1$에서 $x^2+y^2-1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$ ⋯ ㉠

이고

㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$(1+1-1)+k(1+1-2-2+1)=0$

$1-k=0,\quad \therefore\ k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-x-y=0$

따라서 $A=-1,\ B=-1,\ C=0$이므로

$A+B+C=-2$

09 정답 ④

해설 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-6x-2y+8)+k(x^2+y^2-4x)=0$

위 식이 점 $(1,0)$을 지나므로

$x=1,\ y=0$을 대입하면 $3-3k=0,\ k=1$

$k=1$을 위 식에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$

이때 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=3$

10 정답 6

해설 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a-4)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(2a-4)\}^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$(-1-a)^2+(5-2a)^2=r^2$

$\therefore\ 5a^2-18a+26=r^2$ ⋯ ㉠

또, 원이 점 $(-2,\ -4)$를 지나므로

$(-2-a)^2+(-2a)^2=r^2$

$\therefore\ 5a^2+4a+4=r^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ r^2=13$

따라서 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=13$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(x-1)^2+4=13,\ (x-1)^2=9$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$

즉, 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-2,\ 0),\ (4,\ 0)$이므로 구하는 거리는

$|4-(-2)|=6$

11 정답 ④

해설 직선 $4x-5y=2$, 즉 $y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}$의 기울기가

$\frac{4}{5}$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{5}{4}$이다.

한편, $x^2+y^2+4x-4y=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=8$이고 원의 넓이를 이등분하는 직선은 그 원의 중심을 지나므로

점 $(-2,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{5}{4}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{5}{4}(x+2)$

$\therefore\ 5x+4y=-2$

12 정답 45

해설 세 점 A$(0, 5)$, B$(2, 3)$, C$(2, -5)$를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.
삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 두 선분 AB, BC의 수직이등분선의 교점이다.
선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$
즉, $(1, 4)$이고 직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{2-0}=-1$이므로
선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-4=1\cdot(x-1)$
$y=x+3$
선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right)$
즉, $(2, -1)$이고 직선 BC의 방정식은 $x=2$이므로
선분 BC의 수직이등분선은 점 $(2, -1)$을 지나고 x축과 평행한 직선이다.
즉, 선분 BC의 수직이등분선의 방정식은 $y=-1$이고,
두 직선 $y=x+3$, $y=-1$이 만나는 점의 좌표는 $(-4, -1)$이다.
이때 두 점 $(-4, -1)$, A$(0, 5)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{0-(-4)\}^2+\{5-(-1)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y+1)^2=52$
$x^2+y^2+8x+2y-35=0$
따라서 $a=8$, $b=2$, $c=-35$이므로
$|a|+|b|+|c|=|8|+|2|+|-35|=45$

13 정답 ①

해설 점 P(x, y)와 C$(2, 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=1$
이고, $\triangle$PCQ가 직각삼각형이므로
피타고라스정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1}$
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}$ 이므로
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1}=\sqrt{x^2+y^2}$
$\therefore 2x+3y=6$

14 정답 ④

해설 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
ㄱ. $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$
$(x-2)^2+y^2=(x+1)^2+(y-2)^2$
$\therefore 6x-4y+1=0$
따라서 점 P의 자취는 직선이다.
ㄴ. $2\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $4\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$
$4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+1)^2+(y-2)^2$
$3x^2-18x+3y^2+4y+11=0$
$\therefore (x-3)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$
따라서 점 P의 자취는 원이다.
ㄷ. $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=9$에서
$(x-2)^2+y^2+(x+1)^2+(y-2)^2=9$
$x^2-x+y^2-2y=0$
$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$
따라서 점 P의 자취는 원이다.
따라서 점 P의 자취가 원이 되는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 정답 ③

해설 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3, 4)$를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31$ ……㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1}$, $4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore a=2 \qquad \therefore a+b=2+1=3$

16 정답 ②

해설 $x^2+y^2-2kx-2ky+4k-4=0$에서
$(x-k)^2+(y-k)^2=2k^2-4k+4$
이 원의 x축, y측에 동시에 접하므로
|중심의 x좌표|=|중심의 y좌표|
=(반지름의 길이)
$|k|=\sqrt{2k^2-4k+4}$, $k^2=2k^2-4k+4$
$k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0$
$\therefore\ k=2$

17 정답 1

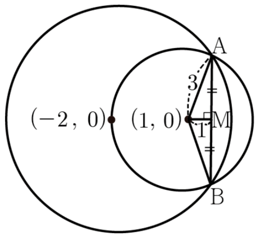
해설 원과 좌표축의 위치 관계를 이해하여 원의 방정식을 구한다.
원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로
$r=r^2+r-1$, $r^2=1$
$r>0$이므로 $r=1$
중심이 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인
원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
즉, $x^2+y^2+2x-2y+1=0$
따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로
$a+b+c=1$

18 정답 -4

해설 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+ay=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x+ay)=0$
$\therefore 4x-ay-4=0$
위의 직선이 직선 $y=x+3$과 수직이므로
$\frac{4}{a}=-1$ $\qquad\therefore a=-4$

19 정답 ④

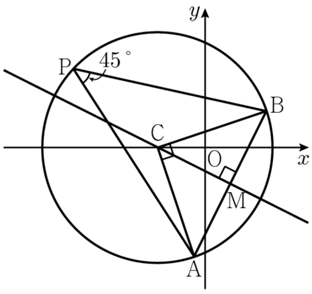
해설 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$
즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의
공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-2x-8)-(x^2+y^2+4x-20)=0$
$-6x+12=0$
$\therefore\ x=2$
이때 원 $(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과
직선 $x=2$ 사이의 거리를 d라 하면 $d=1$이다.



따라서 위의 그림에서 두 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,
$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 구하는 공통현의 길이는
$\overline{AM}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

20 **정답** ②

해설 원의 방정식을 활용하여 문제 해결하기



호 AB에 대한 원주각이 $\angle APB = 45^\circ$ 이므로
호 AB에 대한 중심각은 $\angle ACB = 90^\circ$
삼각형 ABC는 $\overline{CA} = \overline{CB}$인 직각이등변삼각형이다.
주어진 원의 반지름의 길이를 $r = \overline{CA}$라 하면
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2r^2$
이때 선분 AB의 길이가 $6\sqrt{5}$ 이므로 $r = 3\sqrt{10}$
선분 AB의 중점을 M이라 하면
점 M의 좌표는 $M(2,\ -3)$
직선 AB의 기울기가 2이고
직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이므로
직선 CM의 방정식은 $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$
이때 점 C의 좌표를 $C(2a,\ -a-2)$라 하자.
점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은
$(x-2a)^2 + (y+a+2)^2 = 90$
점 $B(5,\ 3)$이 원 위의 점이므로
$(5-2a)^2 + (5+a)^2 = 90$
$5a^2 - 10a - 40 = 0$
$a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2) = 0$
$\therefore\ a = 4$ 또는 $a = -2$
따라서 $C(8,\ -6)$ 또는 $C(-4,\ 0)$이므로
$k = 10$ 또는 $k = 4$
따라서 k의 최솟값은 4

21 **정답** 28

해설 $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이므로
두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.
$\overline{AB}$의 중점은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 중심이므로
그 좌표는 $\left(\dfrac{-2+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+(-3)}{2}\right)$,
즉 $(-2,\ -1)$
또, $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는
$\dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{7}$
따라서 원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 7$이고,
직선 $y = -x-3$과 원 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 7$의
교점의 좌표는 $\left(-2-\dfrac{\sqrt{14}}{2},\ -1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$,
$\left(-2+\dfrac{\sqrt{14}}{2},\ -1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$이므로
$l = \sqrt{(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{14})^2} = 2\sqrt{7}$
$\therefore\ l^2 = 28$

22 **정답** 1

해설 $x^2 + y^2 - 6y + k^2 - 8k + 24 = 0$에서
$x^2 + (y-3)^2 = -k^2 + 8k - 15$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k^2 + 8k - 15 > 0,\ k^2 - 8k + 15 < 0$
$(k-3)(k-5) < 0 \qquad \therefore\ 3 < k < 5$
원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고
$\sqrt{-k^2 + 8k - 15} = \sqrt{-(k-4)^2 + 1}$
이므로 $3 < k < 5$에서 $k = 4$일 때 반지름의 길이가 최대이다.
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 1이다.

23 정답 ③

해설 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle$PBA 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로

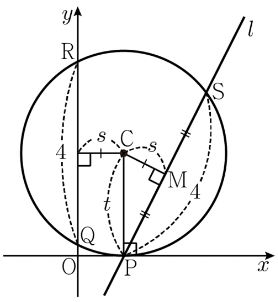
$\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$에서

$\angle PBA=30^\circ$

점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

24 정답 ①

해설 점과 직선 사이의 거리를 활용한 문제해결하기
양수 s, t에 대하여 원의 중심의 좌표를 $C(s,\ t)$라 하면 점 P의 좌표는 $(s,\ 0)$ 이다.



점 P를 지나고 기울기가 2인 직선을 l이라 하면
직선 l의 방정식은
$y-0=2(x-s)$, $2x-y-2s=0$
이때 $\overline{QR}=\overline{PS}=4$에 의하여 점 C와 y축 사이의 거리와 점 C와 직선 l 사이의 거리가 같으므로

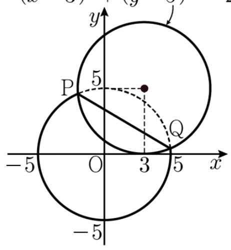
$s=\dfrac{|2s-t-2s|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$, $\sqrt{5}s=|-t|$

$\therefore\ t=\sqrt{5}s \qquad \cdots$ ㉠

선분 PS의 중점을 M이라 하면
$\overline{PM}=2$, $\overline{CM}=s$, $\overline{CP}=t$이고
삼각형 CPM이 직각삼각형이므로
$t^2=s^2+4 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $s=1$, $t=\sqrt{5}$ 이므로
원점 O와 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$

25 정답 170

해설 호 PQ는 다음 그림과 같이 점 $(3,\ 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 5인 원의 일부이다.
이 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-5)^2=25$



이때 선분 PQ는
두 원 $x^2+y^2=25$, $(x-3)^2+(y-5)^2=25$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은
$x^2+y^2-25-\{(x-3)^2+(y-5)^2-25\}=0$
$\therefore\ 3x+5y-17=0$

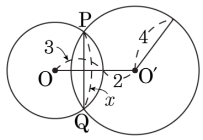
따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 $\dfrac{17}{3}$ 이므로

$a=\dfrac{17}{3}$

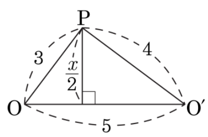
$\therefore\ 30a=170$

26 정답 ⑤

해설 $\overline{PQ}$를 x라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{x}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{24}{5}=4.8$