기말고사 내신 대비-(집합)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 24년 3월 ~ 고2 15년 3월

실시일자	-
6문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

01 [2024년 3월 고2 28번/4점]

1보다 큰 자연수 k에 대하여
전체집합 $U=\{x|x$는 k 이하의 자연수$\}$의
두 부분집합 $A=\{x|x$는 k 이하의 짝수$\}$,
$B=\{x|x$는 k의 약수$\}$가
$n(A)\cdot n((A\cup B)^C)=15$를 만족시킨다.
집합 $(A\cup B)^C$의 모든 원소의 곱을 구하시오.

02 [2015년 9월 고2 문과 20번/4점]

집합 $X=\{x\mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 n에 대하여 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 갖는 모든 집합의 개수를 $f(n)$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(8)=4$
ㄴ. $a\in X$, $b\in X$일 때 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$
ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=682$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 [2015년 3월 고2 문과 30번/4점]

두 집합
$A=\{x\mid x$는 100 이하의 자연수$\}$
$B=\{x\mid x$는 50과 서로소인 자연수$\}$
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

(가) $X\subset A$, $X\neq\varnothing$
(나) $X\cap B=\varnothing$
(다) 집합 X의 모든 원소는 12와 서로소이다.

04 [2022년 3월 고2 30번/4점]

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
방정식 $\{f(x)-1\}\{g(x)-1\}=0$의 모든 실근의 집합을 A라 하고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 집합을 B라 하면 두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여
$A=\{\alpha,\ \beta\}$, $B=\{\alpha,\ \beta+3\}$이다. 상수 k에 대하여 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이고 이 세 실근의 합이 12일 때, $\alpha+\beta+k$의 값을 구하시오.

05 [2018년 3월 고2 문과 21번/4점]

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의
두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A\cup B)=5$
(나) $n(A-B)=2$
(다) $a\in A$이면 $\dfrac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\dfrac{a+8}{2}\in B$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M,
최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

06 [2017년 11월 고2 문과 20번/4점]

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 21 이하의 자연수$\}$의
두 부분집합 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X\cup Y)=17$, $n(X\cap Y)=1$
(나) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소는 서로 나누어떨어지지 않는다.

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$,
집합 Y의 모든 원소의 합을 $S(Y)$라 할 때,
$S(X)-S(Y)$의 최댓값은? (단, $n(X)\geq 2$)

① 140 ② 144 ③ 148
④ 152 ⑤ 156

기말고사 내신 대비-(집합)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 24년 3월 ~ 고2 15년 3월

실시일자	-
6문제 / DRE수학	

고등수학(하)

이름

빠른정답

01 189	02 ③	03 127
04 50	05 ②	06 ②

기말고사 내신 대비-(집합)킬러문항 대비(모의고사 시리즈)

고2 24년 3월 ~ 고2 15년 3월

실시일자	-	고등수학(하)	이름
6문제 / DRE수학			

01 **정답** 189

해설 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

$n(A)\cdot n((A\cup B)^C)=15$에서 $n(A)$는 15의 양의 약수이다.

(ⅰ) $n(A)=1$일 때

$A=\{2\}$이므로 $k=2$ 또는 $k=3$

$k=2$이면 $U=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2\}$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=3$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3\}$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n(A)=3$일 때

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$이므로 $k=6$ 또는 $k=7$

$k=6$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$에서

$(A\cup B)^C=\{5\}$, $n((A\cup B)^C)=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=7$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7\}$, $B=\{1,\ 7\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3,\ 5\}$, $n((A\cup B)^C)=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $n(A)=5$일 때

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로 $k=10$ 또는 $k=11$

$k=10$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3,\ 7,\ 9\}$, $n((A\cup B)^C)=3$이므로 조건을 만족시킨다.

$k=11$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11\}$, $B=\{1,\ 11\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $n((A\cup B)^C)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $n(A)=15$일 때

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 30\}$이므로 $k=30$ 또는 $k=31$

$k=30$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 30\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$에서

$(A\cup B)^C=\{7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29\}$,

$n((A\cup B)^C)=11$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=31$이면 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 31\}$, $B=\{1,\ 31\}$에서 $(A\cup B)^C=\{3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 29\}$,

$n((A\cup B)^C)=14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 두 집합 A, B가 조건을 만족시키도록 하는 k는 $k=10$이고,

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $(A\cup B)^C=\{3,\ 7,\ 9\}$이므로

집합 $(A\cup B)^C=\{3,\ 7,\ 9\}$의 모든 원소의 곱은

$3\cdot 7\cdot 9=189$

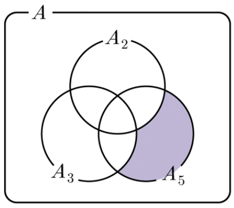
02 **정답** ③

해설 부분집합의 개수 추론하기
$f(n)$은 원소 n을 최소의 원소로 갖는
집합 X의 부분집합의 개수이므로 $f(n)=2^{10-n}$
ㄱ. $f(8)=4$ (참)
ㄴ. $f(9)=2,\ f(10)=1$이므로 $f(9)>f(10)$ (거짓)
ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=682$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

03 **정답** 127

해설 집합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구한다.
$50=2\cdot 5^2$이므로 집합 B의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.
조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.
조건 (다)에서 $12=2^2\cdot 3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.
따라서 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는
$5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95$ 이다.
조건 (가)에서 집합 X는
집합 $\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는
$2^7-1=128-1=127$

[다른 풀이]
집합 A를 전체집합으로 생각하자.
조건 (가)에서 $X\subset A$이므로 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 자연수이다.
집합 A의 부분집합 중에서 2의 배수의 집합을 A_2,
3의 배수의 집합을 A_3, 5의 배수의 집합을 A_5라 하자.
조건 (나)에서 $X\cap B=\varnothing$이고, $50=2\cdot 5^2$이므로
집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 $A_2\cup A_5$에 속한다.
조건 (다)에서 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.
따라서 집합 X의 모든 원소는
$A_2^C\cap A_3^C=(A_2\cup A_3)^C$에 속한다.
세 조건 (가), (나), (다)에서 집합 X의 모든 원소는
$(A_2\cup A_5)\cap(A_2\cup A_3)^C=A_5-(A_2\cup A_3)$에 속한다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.

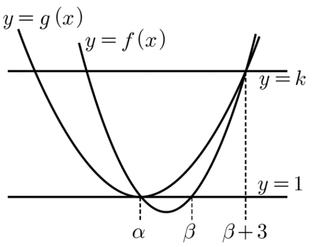


그러므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는
$5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95$ 이다.
(가)에서 집합 X는 집합 $\{5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는
$2^7-1=128-1=127$

04 정답 50

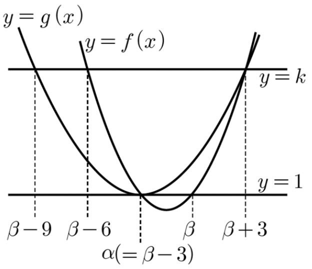
해설 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 함수를 추론한다.
$\alpha \in A$, $\alpha \in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$이다.
또한, $\beta \in A$, $\beta \notin B$이므로
$f(\beta)=1$, $g(\beta) \neq 1$ 또는 $f(\beta) \neq 1$, $g(\beta)=1$이다.
즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C,
방정식 $g(x)=1$의 모든 실근의 집합을 D라 하면
$C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$

(ⅰ) $C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$일 때
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$,
$g(x)=(x-\alpha)^2+1$ $\cdots$ ㉠
이때 $\beta+3 \in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로
$2(\beta+3-\alpha) \cdot 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$
$\therefore$ $\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=6$
즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=3$
$\alpha<\beta$ 이므로 $\beta-\alpha=3$ $\cdots$ ㉡
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=1$은 다음 그림과 같다.



그림에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값은
$k=g(\beta+3)$이다. $\cdots$ ㉢

곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는
$\alpha-3$, $\beta+3$
이때 $\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$이다.
또한, 곡선 $y=g(x)$의 축의 방정식은 $x=\alpha$이므로
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는
$2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$이다.
이때 $2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3=\beta-9$이다.



그림에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근은 $\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$이고 그 합이 12이므로
$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$
$\therefore$ $\beta=8$
㉡에서 $\alpha=5$
㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$,
$g(x)=(x-5)^2+1$
㉢에서
$k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ⅱ) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$일 때
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은
$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$,
$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$
이때 $\beta+3 \in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로
$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha) \cdot 3+1$
$\therefore$ $\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$
즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$
이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$이므로
$\alpha+\beta+k=50$

05 정답 ②

해설 조건을 만족시키는 집합에 속하는 원소의 합의 최댓값과 최솟값을 추론한다.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 원소 중에서 조건 (다)를 만족시키는 $a\in A$, $b\in B$를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.

$(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$,
$(5, 3)$, $(6, 7)$, $(7, 4)$, $(8, 8)$

따라서 1과 8은 집합 $A-B$의 원소가 아니다.

$p\in A-B$ $(p\neq 1,\ p\neq 8)$이면

$(p, q)\in$
$\{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인

q가 집합 B에 존재한다.

$q\in B-A$ 또는 $q\in A\cap B$

그런데 $q\in A\cap B$인 경우에는

$(q, r)\in$
$\{(2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 7), (7, 4)\}$인

r가 집합 $B-A$에 존재하게 된다.

그러므로 $r\neq 1$, $r\neq 8$

한편 $p\neq 1$, $p\neq 8$이므로

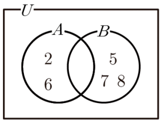
1과 8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있다.

따라서 $n(A-B)\leq n(B-A)$

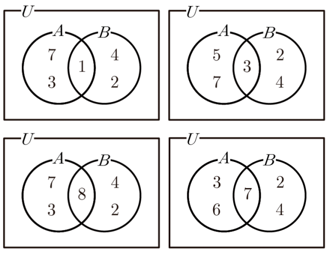
$n(A-B)=2$, $n(A\cup B)=5$이므로

$n(B-A)=2$ 또는 $n(B-A)=3$

(i) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 구하기 위해 $n(B-A)=3$인 경우를 생각하자.
8은 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있으므로
$8\in B-A$,
$n(A-B)=2$, $n(B-A)=3$이고
$8\in B-A$이므로 7이 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $6\in A-B$이다. 그러므로 $7\in B-A$이면
$6\notin B-A$
5가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $2\in A-B$이다.
$A-B=\{2, 6\}$, $B-A=\{5, 7, 8\}$일 때,
집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최대가 된다. 그러므로 최댓값은 $5+7+8=20$



(ii) 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값을 구하기 위해 $n(B-A)=2$인 경우를 생각하자.
$n(A-B)=2$, $n(B-A)=2$이므로 $1\notin B-A$
2가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $3\in A$
그러므로 $2\in B-A$이면 $3\notin B-A$
4가 집합 $B-A$의 원소가 되려면 $7\in A$이다.
$B-A=\{2, 4\}$일 때, 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합이 최소이다.
그러므로 최솟값은 $2+4=6$
실제로 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최솟값이 6인 경우는 다음 그림의 4가지이다.



따라서 $M=20$, $m=6$이므로

$M+m=26$

06 정답 ②

해설 집합의 성질을 활용하여 추론하기

$S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소일 때,

$S(X)-S(Y)$는 최댓값을 갖는다.

집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어떨어지지 않으려면 $k\in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.

11, 12, 13, $\cdots$, 21은 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면 집합 X는 11, 12, 13, $\cdots$, 21을 원소로 가져야한다.

이때 1, 3, 7은 21의 약수이고,

2, 4, 5, 10은 20의 약수, 6, 9는 18의 약수,

8은 16의 약수이므로

1, 2, $\cdots$, 10은 집합 X의 원소가 될 수 없다.

또한 $n(X\cup Y)=17$, $n(X\cap Y)=1$이므로

$S(Y)$가 최솟값을 가지려면 집합 Y는

1, 2, 3, 4, 5, 6, 11을 원소로 가져야 한다.

따라서 $X=\{11, 12, 13, \cdots, 20, 21\}$,

$Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$일 때

$S(X)-S(Y)$는 최댓값 144를 갖는다.