교과서 유사문제_미래엔 - 공통수학2_원 의 방정식

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 ...

01 다음 중 중심이 $(-1,\ 4)$이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이 아닌 것은?

① $(-6,\ 4)$ ② $(-5,\ 6)$ ③ $(-1,\ -1)$
④ $(2,\ 8)$ ⑤ $(3,\ 1)$

02 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 5)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-2x-4y-7=0$
② $x^2+y^2+4x+8y-15=0$
③ $x^2+y^2-2x-6y-5=0$
④ $x^2+y^2+4x+8y+15=0$
⑤ $x^2+y^2-4x-6y-7=0$

03 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r일 때, 상수 a, b, r에 대하여 $a+b+r^2$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 14 ⑤ 22

04 원 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r일 때, $a+b+r$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

05 [2020년 3월 고2 24번 변형]
원 $x^2+y^2+12x-16y=0$의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.

06 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-5$ 또는 $k>5$
② $-5<k<5$
③ $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$
④ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$
⑤ $-2<k<2$

07 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=2x+3\sqrt{5}$가 한 점에서 만날 때, 양수 r의 값을 구하시오.

08 직선 $x+4y+k=0$이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=17$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

09 직선 $3x+4y+a=0$이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$에 접할 때, 양수 a의 값을 구하시오.

10 직선 $3x+4y+k=0$이 원 $x^2+y^2=4$와 서로 만나지 않을 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k=-10$ ② $k=10$
③ $-10<k<10$ ④ $k<-10$ 또는 $k>10$
⑤ $k>10$

11 원 $(x-3)^2+y^2=5$와 직선 $y=-2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

12 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은?

① $y=2x\pm\sqrt{10}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{2}$
③ $y=2x\pm2\sqrt{5}$ ④ $y=2x\pm2\sqrt{6}$
⑤ $y=2x\pm\sqrt{30}$

13 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=25$에 접하고 기울기가 2인 두 직선의 y절편의 합은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

14 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=13$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -13 ② -1 ③ 0
④ 4 ⑤ 5

15 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서 원에 그은 접선의 x절편은?

① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1
④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

16 원 $x^2+y^2-4ax+4ay+16a-10=0$의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표는? (단, a는 실수이다.)

① $(-2,\ 2)$ ② $(-1,\ 1)$ ③ $(0,\ 0)$
④ $(1,\ -1)$ ⑤ $(2,\ -2)$

17 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$
② $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 또는 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$
③ $(x-3)^2+(y-3)^2=3$ 또는 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
④ $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 또는 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$ 또는 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

18 점 $(-2,\ 4)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 두 원의 넓이의 합은?

① 96π ② 100π ③ 104π
④ 108π ⑤ 112π

19 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $3x+4y+10=0$과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하시오.

20 원 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$ 위의 점에서 직선 $x-y-1=0$에 이르는 거리의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $5\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}-1$

21 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+4x-2y+k=0$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

22 원 $x^2+y^2=50$ 위의 두 점 $(5,\ 5)$, $(5,\ -5)$에서의 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

23 [2019년 11월 고1 14번 변형]
좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선이 각각 y축과 만나는 점의 좌표를 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{35}{2}$ ② 20 ③ $\frac{45}{2}$
④ 25 ⑤ $\frac{55}{2}$

24 점 $(4,\ 8)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

25 원 $x^2+y^2-6x+4y-k=0$이 y축과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=8$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

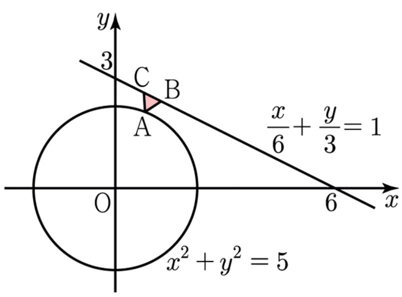
26 [2019년 3월 고2 문과 17번 변형]
좌표평면에서 원 $C: x^2+y^2-6x-2ay+a^2-25=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 원 C는 원점을 지난다.
> (나) 원 C는 직선 $y=-1$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

원 C와 직선 $y=-1$이 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 8　② $2\sqrt{17}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{19}$　⑤ $4\sqrt{5}$

27 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 A와 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ 위의 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비가 $a:b$일 때, $b-a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소)



28 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(-12,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 5)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오.

교과서 유사문제_미래엔 - 공통수학2_원 의 방정식

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 ...

빠른정답

01 ②	02 ⑤	03 ③
04 ②	05 100	06 ②
07 3	08 ④	09 11
10 ④	11 9	12 ⑤
13 ③	14 ⑤	15 ④
16 ⑤	17 ①	18 ③
19 4	20 ①	21 $-\frac{131}{13}$
22 100	23 ③	24 48
25 12	26 ③	27 120
28 56		

교과서 유사문제_미래엔 - 공통수학2_원 의 방정식

원의 방정식과 그래프 ~ 좌표평면에서 원과 ...

01 정답 ②

해설 중심이 $(-1,\ 4)$이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-4)^2=25$
① $x=-6,\ y=4$를 대입하면
$25+0=25$
② $x=-5,\ y=6$을 대입하면
$16+4\neq 20$
③ $x=-1,\ y=-1$을 대입하면
$0+25=25$
④ $x=2,\ y=8$을 대입하면
$9+16=25$
⑤ $x=3,\ y=1$을 대입하면
$16+9=25$

02 정답 ⑤

해설 원의 중심은 두 점의 중점과 같으므로
$\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(2,\ 3)$
반지름의 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(2-6)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{5})^2$
$x^2+y^2-4x-6y-7=0$

03 정답 ③

해설 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로
$(a,\ b)=\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)=(3,\ -1)$
또한, 원의 반지름의 길이는 선분 AB의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로
$r=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{5}$
따라서 $a=3,\ b=-1,\ r^2=5$이므로
$a+b+r^2=3+(-1)+5=7$

04 정답 ②

해설 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$을 표준형으로 고치면
$(x-3)^2+(y+4)^2=4$
따라서 중심의 좌표는 $(3,\ -4)$, 반지름의 길이는 2이므로
$a=3,\ b=-4,\ r=2$
$\therefore\ a+b+r=3+(-4)+2=1$

05 정답 100

해설 $x^2+y^2+12x-16y=0$에서
$x^2+12x+36+y^2-16y+64=100$
$(x+6)^2+(y-8)^2=10^2$
따라서 원 $x^2+y^2+12x-16y=0$은
중심의 좌표가 $(-6,\ 8)$이고 반지름의 길이가 10이므로
원의 넓이는 $10^2\cdot\pi=100\pi$
$\therefore\ k=100$

06 정답 ②

해설 $x^2+y^2=5$에 $y=2x+k$를 대입하면
$x^2+(2x+k)^2=5$
$5x^2+4kx+k^2-5=0$
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이다.
$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)>0$
$-k^2+25>0,\ (k-5)(k+5)<0$
$\therefore\ -5<k<5$

07 정답 3

해설 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+3\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+3\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$
원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면
$r=3$

08 **정답** ④

해설 원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $x+4y+k=0$ 사이의

거리는 $\dfrac{|1-8+k|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\dfrac{|-7+k|}{\sqrt{17}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$ 이므로 원과 직선이

접하려면 $\dfrac{|-7+k|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

$|-7+k|=17,\ -7+k=\pm 17$

$\therefore\ k=24\ (\because\ k>0)$

09 **정답** 11

해설 원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심 $(1,\ -1)$에서 직선까지의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같다

$\dfrac{|3\times1+4\times(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

따라서 $a>0$이므로 $a=11$

10 **정답** ④

해설 직선 $3x+4y+k=0$에서 원의 중심 $(0,\ 0)$까지의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|k|}{5}$

원과 직선이 만나지 않을 때, $d>r$이므로

$\dfrac{|k|}{5}>2$

$\therefore\ k<-10$ 또는 $k>10$

11 **정답** 9

해설 $y=-2x+k$를 $(x-3)^2+y^2=5$에 대입하면

$(x-3)^2+(-2x+k)^2=5$

$5x^2-2(2k+3)x+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(2k+3)^2-5(k^2+4)>0$

$k^2-12k+11<0$

$(k-1)(k-11)<0$

$\therefore\ 1<k<11$

따라서 정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$의 9개다.

12 **정답** ⑤

해설 기울기가 2인 직선의 방정식을

$y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ (k는 상수)라 하면

이 직선이 원 $x^2+y^2=6$에 접하므로 직선과 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{|2\cdot0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$

$|k|=\sqrt{30}$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{30}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{30}$

13 **정답** ③

해설 구하는 접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면

원의 중심 $(-1,\ 4)$와

직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|2\cdot(-1)-1\cdot4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{|-6+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-6+k|}{\sqrt{5}}=5,\ |-6+k|=5\sqrt{5}$

$-6+k=\pm 5\sqrt{5}$

$\therefore\ k=6\pm5\sqrt{5}$

이때 k가 두 직선의 y절편이므로 y절편의 합은

$(6+5\sqrt{5})+(6-5\sqrt{5})=12$

14 **정답** ⑤

해설 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x+3y=13$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로

$a+b=5$

15 **정답** ④

해설 점 $(1,\ -3)$에서 그은 접선의 방정식은

$x-3y=10$

x절편은 $y=0$일 때의 x좌표이므로

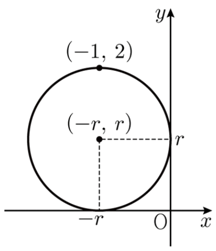
$x=10$

16 정답 ⑤

해설 주어진 원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-2a)^2+(y+2a)^2=8a^2-16a+10$이므로
중심의 좌표는 $(2a,\ -2a)$이고,
반지름의 길이는 $\sqrt{8a^2-16a+10}$ 이다.
이때 $8a^2-16a+10=8(a-1)^2+2$이므로
$a=1$일 때 반지름의 길이는 최소,
즉 원의 넓이는 최소가 된다.
따라서 주어진 원의 넓이가 최소일 때의 원의 중심의 좌표는 $(2a,\ -2a)$에 $a=1$을 대입한 $(2,\ -2)$이다.

17 정답 ①

해설 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축이 동시에 접하려면 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.
따라서 반지름의 길이를 r이라고 하면 원의 중심은 $(-r,\ r)$이므로 구하는 원의 방정식을
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.
이때 이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

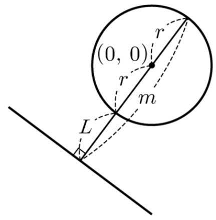


18 정답 ③

해설 주어진 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로
$(-2+r)^2+(4-r)^2=r^2$, $r^2-12r+20=0$
$(r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 두 원의 넓이의 합은
$4\pi+100\pi=104\pi$

19 정답 4

해설 먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.
$$\frac{|0\cdot3+0\cdot4+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$
반지름보다 크므로 다음 그림과 같이 직선이 원 밖에 위치한다.



최소거리 $L=$(중심 사이의 거리)$-$(반지름)
$=2-1=1$
최대거리 $m=$(중심 사이의 거리)$+$(반지름)
$=2+1=3$
$\therefore\ 1+3=4$

20 정답 ①

해설 원 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$에서
$(x+1)^2+(y-3)^2=8$
원의 중심 $(-1,\ 3)$에서 직선 $x-y-1=0$에 이르는 거리를 구하면
$$\frac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$
원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 원 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은
$$a=\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2},$$
$$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$\therefore\ a+b=5\sqrt{2}$

21 정답 $-\dfrac{131}{13}$

해설 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$2x+3y=13$ $\qquad\therefore\ 2x+3y-13=0$
$x^2+y^2+4x-2y+k=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=5-k$
직선 $2x+3y-13=0$과
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5-k$의 중심 $(-2,\ 1)$ 사이의 거리는 $\dfrac{|-4+3-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|-14|}{\sqrt{13}}=\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$
이때 직선과 원이 접하므로
$$5-k=\left(\frac{14\sqrt{13}}{13}\right)^2\qquad\therefore\ k=-\frac{131}{13}$$

22 정답 100

해설 원 $x^2+y^2=50$ 위의 점 $(5,\ 5)$에서의 접선의 방정식은

$5x+5y=50$

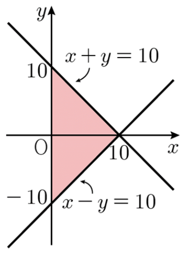
$\therefore\ x+y=10$

점 $(5,\ -5)$에서의 접선의 방정식은

$5x-5y=50$

$\therefore\ x-y=10$

따라서 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{10-(-10)\}\cdot 10=100$

23 정답 ③

해설 점 $(3,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y+4=m(x-3)$이다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y+4=m(x-3)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-3m-4|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{5}$ 에서

$4m^2+24m+11=0$

$\therefore\ m=-\frac{11}{2}$ 또는 $m=-\frac{1}{2}$

$y=mx-3m-4$가 y축과 만나는 점의 좌표는

$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{25}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\left\{\frac{25}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{45}{2}$

24 정답 48

해설 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(4,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-8=m(x-4)$

$\therefore\ mx-y-4m+8=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-4m+8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $4|m-2|=2\sqrt{2m^2+2}$

$2|m-2|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면

$4m^2-16m+16=2m^2+2$

$2m^2-16m+14=0$, $m^2-8m+7=0$

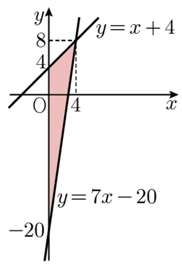
$(m-1)(m-7)=0$

$\therefore\ m=1$ 또는 $m=7$

따라서 두 접선의 방정식은

$x-y+4=0$, $7x-y-20=0$

$\therefore\ y=x+4$, $y=7x-20$



두 직선의 y절편은 각각 4, -20이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{4-(-20)\}\cdot 4=48$

25 정답 12

해설 y축과 만나는 점 A의 좌표를 $(0,\ a)$, 점 B의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로

$\sqrt{(0-0)^2+(a-b)^2}=8$

$(a-b)^2=64$ $\cdots$ ㉠

두 점 A, B의 y좌표는 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입하여 얻은 이차방정식 $y^2+4y-k=0$의 두 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-4$, $ab=-k$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에 대입하면

$64=(-4)^2+4k$

$\therefore\ k=12$

26 정답 ③

해설 조건 (가)에서

원 C : $x^2+y^2-6x-2ay+a^2-25=0$

이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$a^2-25=0$, $a^2=25$

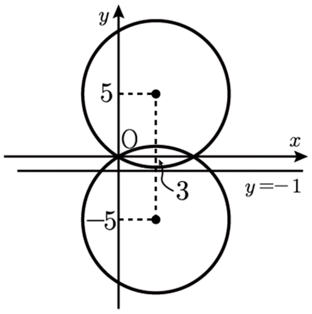
$a=-5$ 또는 $a=5$

$a=-5$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-6x+10y=0$, $(x-3)^2+(y+5)^2=34$

$a=5$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-6x-10y=0$, $(x-3)^2+(y-5)^2=34$



이때 $a=5$이면 원 C는 직선 $y=-1$과 만나지 않으므로

조건 (나)에 의하여 $a=-5$

$(x-3)^2+(y+5)^2=34$, $y=-1$을 연립하면

$(x-3)^2+(-1+5)^2=34$, $(x-3)^2=18$

$\therefore\ x=3\pm3\sqrt{2}$

따라서 원 C와 직선 $y=-1$이 만나는 두 점의 좌표는

각각 $(3-3\sqrt{2},\ -1)$, $(3+3\sqrt{2},\ -1)$이므로

두 점 사이의 거리는 $(3+3\sqrt{2})-(3-3\sqrt{2})=6\sqrt{2}$

27 정답 120

해설 원점 O와 직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1$, 즉 $x+2y-6=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 정삼각형 ABC의

넓이가 최소일 때의 높이는 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

넓이가 최대일 때의 높이는 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이의 최솟값과 최댓값의 비는

$\dfrac{\sqrt{5}}{5}:\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$, 즉 $1:11$이므로

넓이의 최솟값과 최댓값의 비는 $1^2:11^2$, 즉 $1:121$

따라서 $a=1$, $b=121$이므로

$\therefore\ b-a=121-1=120$

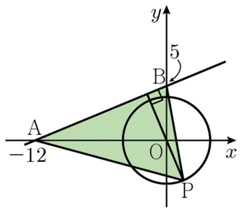
28 정답 56

해설 삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0+12)^2+(5-0)^2}=13$으로 일정하므로

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때

삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.



직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{-12}+\dfrac{y}{5}=1$, $5x-12y+60=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $5x-12y+60=0$ 사이의

거리는

$\dfrac{|60|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{60}{13}$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점 P와 직선 AB

사이의 거리의 최댓값은

$\dfrac{60}{13}+4=\dfrac{112}{13}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot\dfrac{112}{13}=56$