		# 유형별 학습	이름

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 24~25p
선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 점과 직선 사이의 거리

01 좌표평면에서 두 점 $A(-4+\sqrt{3},\ \sqrt{2})$, $B(\sqrt{3},\ 3+\sqrt{2})$ 사이의 거리를 구하시오.

02 [2017년 3월 고2 문과 22번 변형]
좌표평면 위의 두 점 $A(3,\ 0)$, $B(0,\ 7)$에 대하여 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.

03 [2024년 10월 고1 2번/2점]
좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 3)$, $(2,\ 5)$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

04 [2017년 3월 고2 문과 22번/3점]
좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 5)$에 대하여 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.

05 두 점 $A(-4,\ -3)$, $B(11,\ 9)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ ③ $(3,\ 3)$
④ $\left(\frac{7}{5},\ \frac{5}{2}\right)$ ⑤ $(6,\ 5)$

06 [2017년 3월 고2 문과 2번 변형]
좌표평면 위의 두 점 $A(5,\ 8)$, $B(-5,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 y좌표는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07 [2022년 9월 고1 5번/3점]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 다음 두 직선의 교점의 개수를 구하시오.

$$3x+4y-5=0,\ 4x+3y+5=0$$

09 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

점 $(-4,\ 1)$, 직선 $3x-4y+1=0$

10 원점과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리를 구하시오.

11 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$
④ $(4,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

12 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

13 [2024년 9월 고1 6번 변형]

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(3,\ 4)$일 때, $a+b$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

14 두 점 $\mathrm{A}(6,\ 8)$, $\mathrm{B}(1,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $a:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(b,\ 0)$일 때, 선분 AB를 $1:a$로 내분하는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.

15 두 직선 $x+2y-3=0$, $x-2y+1=0$의 교점을 지나고, 직선 $3x+2y+2=0$에 평행한 직선의 방정식이 $ax+by-5=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

16 $a>0$일 때, 두 직선 $x+\dfrac{y}{a^2}=\dfrac{1}{a}$, $x-\dfrac{y}{a^2}=\dfrac{1}{a}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 두 직선은 x축에서 만난다.
ㄴ. 두 직선은 수직이다.
ㄷ. 원점에서 두 직선에 이르는 거리는 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선과 직선 $(2k-1)x-y+4=0$이 y축에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

18 두 직선 $(k-2)x+10y-1=0$, $(k+1)x-4y+3=0$이 평행하도록 하는 상수 k의 값을 α, 수직이 되도록 하는 상수 k의 값을 β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, $\beta>0$)

19 좌표평면 위의 세 직선

$$l : 5x-2y+7=0$$
$$m : x-y+2=0$$
$$n : ax-y+3=0$$

이 있다. 세 직선 l, m, n으로 삼각형을 만들지 못하도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은?

① $\frac{2}{5}$ ② 1 ③ $\frac{5}{2}$
④ 5 ⑤ 10

20 세 직선 $x+ay-3=0$, $2x+ay-2=0$, $x-(a+1)y+2=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 실수 a의 값은 M개이고 그 합은 N일 때, MN의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

21 두 직선 $x+3y+4=0$, $3x+y+16=0$이 이루는 각의 이등분선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은?

① $x-y-6=0$ ② $x-y-4=0$
③ $x-y-2=0$ ④ $x-y+4=0$
⑤ $x-y+6=0$

		유형별 학습	이름

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 24~25p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 점과 직선 사이의 거리

정답

01 5	02 58	03 ①
04 29	05 ①	06 ⑤
07 ④	08 1	09 3
10 1	11 ③	12 4
13 ①	14 11	15 1
16 ④	17 ③	18 -1
19 ④	20 ①	21 ⑤

		유형별 학습	이름

교과서_천재교육(홍) - 공통수학2 24~25p

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 점과 직선 사이의 거리

01 **정답** 5

해설 두 점 $A(-4+\sqrt{3},\ \sqrt{2})$, $B(\sqrt{3},\ 3+\sqrt{2})$ 사이의 거리는

$\overline{AB}$

$=\sqrt{\{\sqrt{3}-(-4+\sqrt{3})\}^2+\{3+\sqrt{2})-(\sqrt{2})\}^2}$

$=\sqrt{4^2+3^2}$

$=\sqrt{25}$

$=5$

02 **정답** 58

해설 선분 AB의 길이는 두 점 A, B 사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0-3)^2+(7-0)^2}=\sqrt{58}$

$\therefore l^2=58$

03 **정답** ①

해설 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $(1,\ 3)$, $(2,\ 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

04 **정답** 29

해설 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구한다.

선분 AB의 길이는 두 점 A, B사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

따라서 $l^2=29$

05 **정답** ①

해설 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\dfrac{11-8}{1+2}=1,\ \dfrac{9-6}{1+2}=1$

$\therefore (1,\ 1)$

06 **정답** ⑤

해설 두 점 $A(5,\ 8)$, $B(-5,\ 2)$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{5+(-5)}{2},\ \dfrac{8+2}{2}\right)$이므로 $(0,\ 5)$이다.

따라서 중점의 y좌표는 5이다.

07 **정답** ④

해설 선분의 내분점 계산하기

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$a=\dfrac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}=2,\ b=\dfrac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1}=2$

$\therefore\ a+b=2+2=4$

08 **정답** 1

해설 $\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{4}{3}$이므로 두 직선의 교점의 개수는 1이다.

09 **정답** 3

해설 점 $(-4,\ 1)$과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\cdot(-4)-4\cdot1+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{25}}=3$

10 **정답** 1

해설 원점 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}$

$=1$

11 정답 ③

해설 x축 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{a^2-6a+25}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2}=\sqrt{a^2-12a+40}$

조건에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$\sqrt{a^2-6a+25}=\sqrt{a^2-12a+40}$

양변을 제곱하면 $a^2-6a+25=a^2-12a+40$

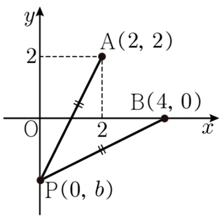
$6a=15$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

12 정답 4

해설 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 y축 위의 점이므로 $a=0$이다.



이때 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\sqrt{(2-0)^2+(2-b)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(0-b)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b+8=b^2+16,\ -4b=8$

$\therefore b=-2$

$\therefore a^2+b^2=0+(-2)^2=4$

13 정답 ①

해설 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot a+3\cdot 1}{1+3},\ \dfrac{1\cdot b+3\cdot 3}{1+3}\right)=\left(\dfrac{a+3}{4},\ \dfrac{b+9}{4}\right)$

$\dfrac{a+3}{4}=3,\ a=9$

$\dfrac{b+9}{4}=4,\ b=7$

$\therefore a+b=16$

14 정답 11

해설 선분 AB를 $a:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(b,\ 0)$이므로

$\dfrac{a\cdot 1+1\cdot 6}{a+1}=b,\ \dfrac{a\cdot(-2)+1\cdot 8}{a+1}=0$

$a+6=ab+b,\ -2a+8=0$

$\therefore a=4,\ b=2$

따라서 선분 AB를 $1:4$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot 1+4\cdot 6}{1+4},\ \dfrac{1\cdot(-2)+4\cdot 8}{1+4}\right)$, 즉 $(5,\ 6)$

따라서 $p=5,\ q=6$이므로

$p+q=11$

15 정답 1

해설 두 식 $x+2y-3=0,\ x-2y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=1$

즉, 직선 $ax+by-5=0$이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$a+b-5=0$ $\cdots$ ㉠

또한, 직선 $ax+by-5=0$이

직선 $3x+2y+2=0$과 평행하므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{2}\neq\dfrac{-5}{2}$

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{2}$에서 $2a=3b$

$\therefore 2a-3b=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$

$\therefore a-b=3-2$

$=1$

16 정답 ④

해설 $x+\frac{y}{a^2}=\frac{1}{a}$에서 $a^2x+y-a=0$ …… ㉠

$x-\frac{y}{a^2}=\frac{1}{a}$에서 $a^2x-y-a=0$ …… ㉡

ㄱ. ㉠ − ㉡ 을 하면 $2y=0$ $\therefore y=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2x=a$ $\therefore x=\frac{1}{a}$

따라서 두 직선은 x축에서 만난다.

ㄴ. 두 직선이 수직이려면 $a^2 \cdot a^2+1 \cdot (-1)=0$ 이어야 한다.

$a^4=1$에서 $a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $a=1$일 때에만 두 직선은 서로 수직이다.

ㄷ. 원점에서 두 직선 ㉠, ㉡에 이르는 거리를 각각 d_1, d_2라 하면

$d_1=\frac{|-a|}{\sqrt{(a^2)^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{a^4+1}}$

$d_2=\frac{|-a|}{\sqrt{(a^2)^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^4+1}}$

$\therefore d_1=d_2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 정답 ③

해설 직선 $(2k-1)x-y+4=0$, 즉 $y=(2k-1)x+4$의 기울기는 $2k-1$, y절편은 4이므로 이 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2k-1}x+4$

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{2}{2k-1}+4$

$\frac{2}{2k-1}=4$, $8k-4=2$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

18 정답 -1

해설 두 직선

$(k-2)x+10y-1=0$,

$(k+1)x-4y+3=0$에 대하여

(ⅰ) 두 직선이 평행하려면

$\frac{k-2}{k+1}=\frac{10}{-4}\neq\frac{-1}{3}$에서

$-4(k-2)=10(k+1)$, $-14k=2$

$\therefore k=-\frac{1}{7}$

(ⅱ) 두 직선이 수직이려면

$(k-2)\cdot(k+1)+10\cdot(-4)=0$

$k^2-k-42=0$, $(k+6)(k-7)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha=-\frac{1}{7}$, $\beta=7$ ($\because \beta>0$)이므로

$\alpha\beta=-\frac{1}{7}\times 7=-1$

19 정답 ④

해설 (ⅰ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

직선 l, m의 교점이 $(-1, 1)$이므로

직선 n도 $(-1, 1)$을 지나야 한다.

$-a-1+3=0$ $\therefore a=2$

(ⅱ) 두 직선이 평행한 경우

$l /\!/ n$ 일 때, $\frac{5}{a}=\frac{-2}{-1}$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

$m /\!/ n$ 일 때, $\frac{1}{a}=\frac{-1}{-1}$ $\therefore a=1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times\frac{5}{2}\times 1=5$

20 정답 ①

해설 세 직선이 삼각형을 이루지 않기 위해서는 세 직선이 한 점에서 만나거나, 세 직선 또는 두 직선이 평행하거나 일치하면 된다.
그런데 주어진 세 직선의 방정식에서 세 직선은 평행할 수 없고, 어떤 두 직선도 일치할 수 없다.
따라서 세 직선이 한 점에서 만나거나 두 직선이 평행해야 한다.

$$\begin{cases} x+ay-3=0 & \cdots ㉠ \\ 2x+ay-2=0 & \cdots ㉡ \\ x-(a+1)y+2=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이때 $a=0$이면 ㉠, ㉡에서 $x-3=0$, $x-1=0$이므로 두 직선이 평행하다.
즉, 세 직선은 삼각형을 이루지 않는다.
또한, $a=-1$이면 ㉠, ㉡, ㉢에서 $x-y-3=0$, $2x-y-2=0$, $x+2=0$이므로 세 직선은 삼각형을 이룬다.
즉, $a\neq-1$이다.
$a\neq0$, $a\neq-1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
㉠−㉡을 하면
$-x-1=0$
$\therefore x=-1$
이것을 ㉠에 대입하면
$-1+ay-3=0$
$\therefore y=\dfrac{4}{a}$
즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표가 $\left(-1, \dfrac{4}{a}\right)$이므로
직선 ㉢도 이 점을 지나야 한다.
$-1-\dfrac{4a+4}{a}+2=0$, $\dfrac{4a+4}{a}=1$
$\therefore a=-\dfrac{4}{3}$

(ii) 두 직선이 평행한 경우
두 직선 ㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{a}{a}\neq\dfrac{-3}{-2}$이므로
두 직선 ㉠, ㉡이 평행하도록 하는 a의 값은 존재하지 않는다.
두 직선 ㉡, ㉢에서
$\dfrac{2}{1}=\dfrac{a}{-(a+1)}\neq\dfrac{-2}{2}$
$-2a-2=a$, $3a=-2$
$\therefore a=-\dfrac{2}{3}$
두 직선 ㉠, ㉢에서
$\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{-(a+1)}\neq-\dfrac{3}{2}$
$-a-1=a$, $2a=-1$
$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 a의 값은 $-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}, 0$의 4개이므로
$M=4$, $N=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+0=-\dfrac{5}{2}$
$\therefore MN=4\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-10$

21 정답 ⑤

해설 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x+y+16|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$|x+3y+4|=|3x+y+16|$
$x+3y+4=\pm(3x+y+16)$
$\therefore x-y+6=0$ 또는 $x+y+5=0$
이 중 기울기가 양수인 것은 $x-y+6=0$이다.