수학 영역

5지선다형

1. $\left(3^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

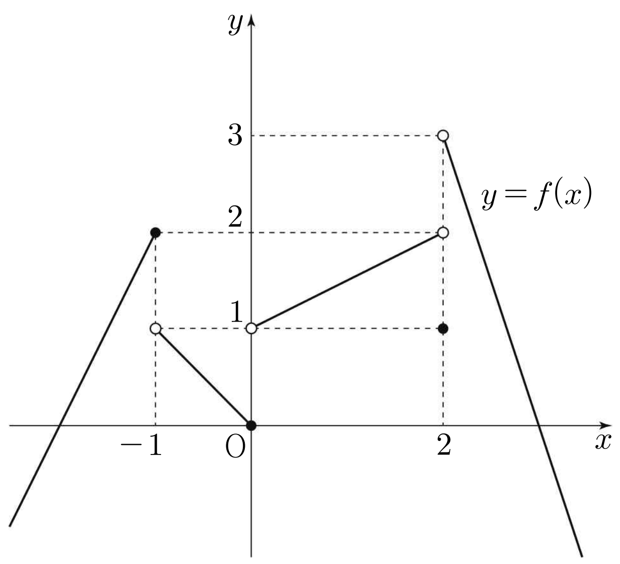
2. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{3h}=2$일 때, $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 세 수 a, 4, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a\times b$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-2a)^2 & (x<a)\\ x^2-3x+6 & (x \geq a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. $\sum_{k=1}^{5}(k^2+2k-4)-\sum_{k=1}^{5}(2k+5)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. $\log_3 a = 2\log_a \sqrt{3}$ 을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.) [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

9. $3\tan(\pi+\theta) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

10. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}(x-1)f(x) = 12$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)f(x)}{3x+1}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 부등식

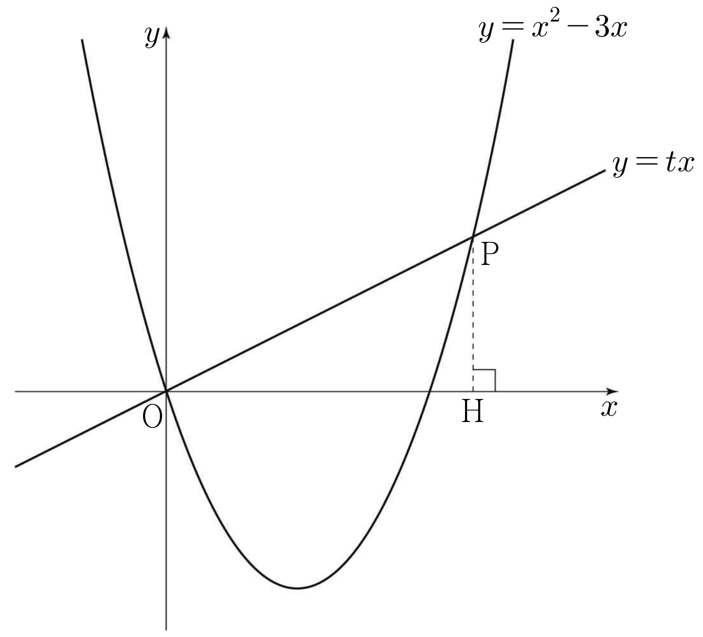
$$\log_2(x^2-x) < 1-\log_{\frac{1}{2}} x$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=tx$가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}}{t^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



13. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $y=\tan ax$의 그래프와 직선 $y=b$가 제1사분면에서 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하자. $x_4-x_2=6\pi$이고 $x_1=\pi$일 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\frac{1}{n}$일 때, $a_1+\sum_{k=2}^{7}\frac{1}{(k-1)\times a_k}$의 값은? [4점]

① -34 ② -32 ③ -30 ④ -28 ⑤ -26

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n-12$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

16. 최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(1)=0,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}=0$$

을 만족시킬 때, $f(5)+g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

17. 첫째항이 자연수이고 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 k가

$$a_4 \times a_5 \le 0, \quad |a_1 - a_k| = 4|a_k|$$

를 만족시킬 때, $a_1 + k$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

18. 함수 $f(x) = \sin(x+a)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 3π보다 작은 모든 양수 a의 값의 합은? [4점]

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $2\|M\| = \|m\|$이다.

① $\frac{25}{6}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ $\frac{14}{3}\pi$ ⑤ $\frac{29}{6}\pi$

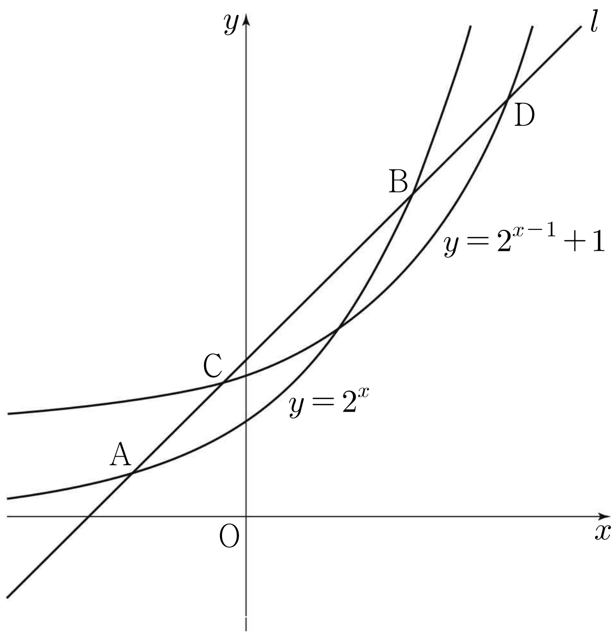
19. 그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이

곡선 $y=2^x$과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고,

곡선 $y=2^{x-1}+1$과 서로 다른 두 점 C, D에서 만난다.

점 B가 선분 AD를 $3:1$로 내분할 때, 점 B의 x좌표는?

(단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크고, 점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\log_2 \frac{23}{7}$　② $\log_2 \frac{24}{7}$　③ $\log_2 \frac{25}{7}$

④ $\log_2 \frac{26}{7}$　⑤ $\log_2 \frac{27}{7}$

20. 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n > a_1,\quad a_n = (a_4 + a_5 - 1) \times a_{n-1}$$
>
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{3} a_n = \frac{6}{a_1 - a_2}$

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2^{x+3}+a & (x<0) \\ 2^{-x+6}+a-12 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

x에 대한 방정식 $f(x)\times f(x-k)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 4 이하의 양수 k가 존재한다.

① 16 ② 19 ③ 22 ④ 25 ⑤ 28

단답형

22. $\log_3 54-\log_3 2$의 값을 구하시오. [3점]

23. 중심각의 크기가 $\frac{2}{5}\pi$이고 호의 길이가 4π인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $y=\log(x-2)$의 그래프의 점근선과 함수 $y=2^x+5$의 그래프의 점근선이 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{11}=88$이고 $a_5=3$일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 상수 $a,\ k$에 대하여 함수 $f(x)=a|x-2|$가

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=6$$

을 만족시킬 때, $f(a+k)$의 값을 구하시오. [4점]

27. $\overline{\mathrm{AB}}=6$인 삼각형 ABC에 대하여

$$2\sin A=\sin B,\quad \cos C=\frac{4}{5}$$

일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [4점]

28. 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f(0)}{f(2)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서만 불연속이고, $\lim_{x\to 1} f(x)=3f(2)$이다.

(나) $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 2$이고, $f(0)+f(2)=4$이다.

29. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $12(a_{14}+a_{15})$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n}-1 & (a_n>0) \\ -a_n & (a_n \le 0) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_1>6$이고, $a_1+a_5+a_9+a_{13}=13$이다.

30. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} (x+4)(x+a) & (x<-4,\ -4<x<0) \\ b & (x=-4) \\ -x^2+6x+c & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 있다.
상수 $k(k>4)$와 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 t에서 $t+k$까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$라 하고, $f(t)\times g(t)$의 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $f(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $f(k)=b$

$f(c-a-b)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2025학년도 10월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	①	**3**	④	**4**	⑤	**5**	①
6	②	**7**	⑤	**8**	①	**9**	③	**10**	④
11	②	**12**	③	**13**	②	**14**	⑤	**15**	③
16	④	**17**	①	**18**	⑤	**19**	②	**20**	③
21	③	**22**	3	**23**	20	**24**	7	**25**	13
26	9	**27**	12	**28**	5	**29**	28	**30**	50

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$\left(3^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}=3^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3^{2-1}=3$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{3h}=\dfrac{1}{3}f'(1)=2$에서 $f'(1)=6$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

4는 a와 b의 등비중항이므로 $a\times b=4^2=16$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=2+3=5$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$에서

$2\sin\theta=\sqrt{5}\cos\theta$

$4\sin^2\theta=5\cos^2\theta$

$4(1-\cos^2\theta)=5\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이다.

$f(a)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x^2-3x+6)=a^2-3a+6$,

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x-2a)^2=a^2$

이므로 $a^2-3a+6=a^2$에서 $a=2$

7. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{5}(k^2+2k-4)-\sum\limits_{k=1}^{5}(2k+5)$

$=\sum\limits_{k=1}^{5}(k^2-9)$

$=\sum\limits_{k=1}^{5}k^2-\sum\limits_{k=1}^{5}9=\dfrac{5\times 6\times 11}{6}-45=10$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_3 a=2\log_a\sqrt{3}$에서

$\log_3 a=2\times\dfrac{1}{2}\log_a 3$

$\log_3 a=\dfrac{1}{\log_3 a}$

$(\log_3 a)^2=1$

$\log_3 a=1$ 또는 $\log_3 a=-1$

$a=3$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

9. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$3\tan(\pi+\theta)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$에서

$3\tan\theta=2\cos\theta$

$\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}=2\cos\theta$

$3\sin\theta=2\cos^2\theta$

$3\sin\theta=2-2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$

$-1\le\sin\theta\le 1$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

10. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)f(x)}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x+1}{3x+1}\times(x-1)f(x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}}\times(x-1)f(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times 12=4$$

11. [출제의도] 로그함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

x^2-x, x는 로그의 진수이므로

$x^2-x>0$, $x>0$에서 $x>1$ ⋯ ㉠

부등식 $\log_2(x^2-x)<1-\log_{\frac{1}{2}}x$에서

$\log_2(x^2-x)<\log_2 2+\log_2 x$

$\log_2(x^2-x)<\log_2 2x$

밑 2가 1보다 크므로

$x^2-x<2x$, $x(x-3)<0$에서 $0<x<3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 모든 x의 값의 범위는

$1<x<3$

따라서 $\alpha+\beta=1+3=4$

12. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x^2-3x=tx$에서

$x(x-t-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=t+3$

점 P는 원점 O가 아니므로

점 P의 좌표는 $(t+3,\ t^2+3t)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(t+3)^2+t^2(t+3)^2}=(t+3)\sqrt{t^2+1}$

$\overline{\mathrm{OH}}=t+3$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(t+3)\sqrt{t^2+1}-(t+3)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(t+3)\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(t+3)\{(t^2+1)-1\}}{t^2\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}+1}=\frac{3}{2}$$

13. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

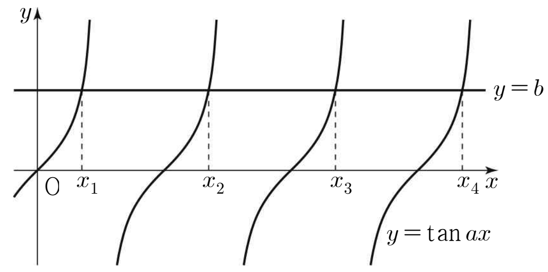
함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이고

$x_4-x_2=6\pi$이므로 $2\times\dfrac{\pi}{a}=6\pi$, $a=\dfrac{1}{3}$

$x_1=\pi$이므로 $\tan a\pi=b$이고,

$b=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $a\times b=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



14. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제해결하기

$a_1=S_1=1$

$n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}=-\dfrac{1}{n(n-1)}$

따라서

$$a_1+\sum_{k=2}^{7}\frac{1}{(k-1)\times a_k}=1+\sum_{k=2}^{7}\frac{-k(k-1)}{k-1}$$

$$=1-\sum_{k=2}^{7}k$$

$$=1-\left(\sum_{k=1}^{7}k-1\right)$$

$$=2-\frac{7\times 8}{2}=-26$$

15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

(ⅰ) $1<n<6$일 때

$n-12<0$이므로

n이 짝수이면 $f(n)=0$, n이 홀수이면 $f(n)=1$

또한

$2n-12<0$이고 $2n$은 짝수이므로 $f(2n)=0$

그러므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 3, 5

(ⅱ) $n=6$일 때

$n-12<0$이고 6은 짝수이므로 $f(n)=0$

$2n-12=0$이므로 $f(2n)=1$

그러므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시킨다.

(ⅲ) $n>6$일 때

$2n-12>0$이고 $2n$은 짝수이므로 $f(2n)=2$

$f(n)\ge 0$이므로 $f(n)+f(2n)=1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 n의 값의 합은 $3+5+6=14$

16. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

$f(1)=0$에서 $f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 실수)

(ⅰ) $a=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)^2g(x)}{(x-1)^4}$

사차다항식 $(x+2)^2g(x)$는 $(x-1)^5$을 인수로 가질 수 없으므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}=0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a\ne 1$일 때

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)\times g(x)}{\{f(x)\}^2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x+3-a)g(x)}{(x-1)^2(x-a)^2}=0$

이므로 사차다항식 $(x+2)(x+3-a)g(x)$는

$(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

그러므로 $(x+3-a)g(x)=(x-1)^3$이고,

$a=4,\ g(x)=(x-1)^2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(x)=(x-1)(x-4),\ g(x)=(x-1)^2$

따라서 $f(5)+g(5)=4+16=20$

17. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$a_4\times a_5=(a_1-6)(a_1-8)\le 0$에서 $6\le a_1\le 8$이고

a_1이 자연수이므로

a_1의 값은 6, 7, 8 중 하나이다. ⋯ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 -2이므로 2 이상의 자연수 k에 대하여 $a_k<a_1$이고 a_k는 정수이다.

(ⅰ) $a_k\ge 0$일 때

$|a_1-a_k|=4|a_k|$에서

$a_1-a_k=4a_k,\ a_1=5a_k$

이고 a_k는 정수이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_k<0$일 때

$|a_1-a_k|=4|a_k|$에서

$a_1-a_k=-4a_k,\ a_1=-3a_k$

이고 a_k가 정수이므로 ㉠에서 $a_1=6,\ a_k=-2$

$a_k=6+(k-1)\times(-2)=-2$에서 $k=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_1+k=6+5=11$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

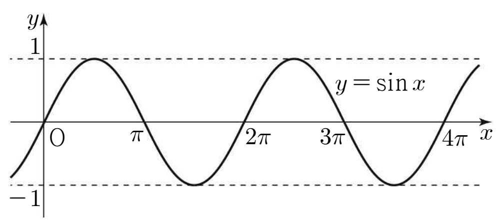
닫힌구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(x)=\sin(x+a)$의

최댓값, 최솟값은 각각

닫힌구간 $[a,a+\pi]$에서 함수 $y=\sin x$의

최댓값, 최솟값과 같다.

함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $0<a\le\frac{\pi}{2}$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin(a+\pi)=-\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

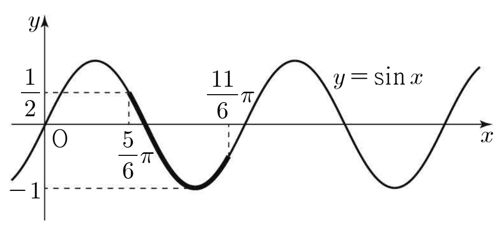
$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}<a\le\pi$일 때

$M=\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=\frac{1}{2},\ a=\frac{5}{6}\pi$

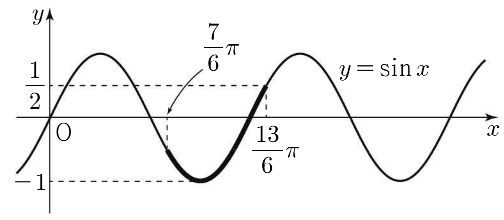


(ⅲ) $\pi<a\le\frac{3}{2}\pi$일 때

$M=\sin(a+\pi)=-\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=-\frac{1}{2},\ a=\frac{7}{6}\pi$



(ⅳ) $\frac{3}{2}\pi<a\le 2\pi$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(ⅴ) $2\pi<a\le\frac{5}{2}\pi$일 때

$M=1$에서 $2|M|=2$이고

$m=\sin(a+\pi)=-\sin a$에서 $|m|\le 1$이므로

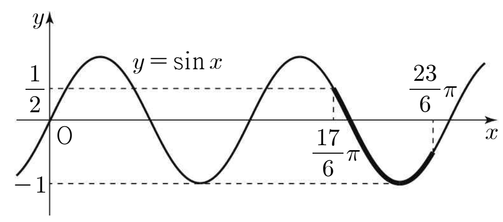
$2|M|=|m|$을 만족시키지 않는다.

(ⅵ) $\frac{5}{2}\pi<a\le 3\pi$일 때

$M=\sin a,\ m=-1$이고

$2|M|=|m|$이므로

$\sin a=\frac{1}{2},\ a=\frac{17}{6}\pi$



(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 구하는 모든 양수 a의 값의

합은 $\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{17}{6}\pi=\frac{29}{6}\pi$

19. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=2^{x-1}+1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이다.

그러므로 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A, B를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′은 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위에 있다.

또한 두 직선 AA′, BB′의 기울기가 모두 1이므로 두 점 A′, B′은 모두 직선 l 위에 있다.

그러므로 두 점 A′, B′은 각각 점 C, 점 D와 일치하고, $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

점 B가 선분 AD를 $3:1$로 내분하므로

$\overline{AB}:\overline{BD}=3:1$

$\overline{AB}=3\overline{BD}=3\sqrt{2}$

그러므로 점 B의 좌표를 $(k,2^k)$이라 하면

점 A의 좌표는 $(k-3,2^k-3)$이다.

점 A는 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$2^{k-3}=2^k-3,\ 2^k=\frac{24}{7}$에서 $k=\log_2\frac{24}{7}$

따라서 점 B의 x좌표는 $\log_2\frac{24}{7}$

20. [출제의도] 등비수열을 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

조건 (가)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n>a_1$이므로

$a_1>0,\ r>1$ 또는 $a_1<0,\ -1<r<1$ ⋯ ㉠

또한 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=(a_4+a_5-1)\times a_{n-1}$

이므로

$a_4+a_5-1=r$

$a_1r^3+a_1r^4-1=r$

$a_1r^3(1+r)=1+r$

㉠에서 $r\neq-1$이므로 $a_1r^3=1,\ r^3=\frac{1}{a_1}$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{3}a_n=\frac{6}{a_1-a_2}$이므로

$\frac{a_1(1-r^3)}{1-r}=\frac{6}{a_1(1-r)}$

$a_1^2\left(1-\frac{1}{a_1}\right)=6$

$a_1^2-a_1-6=(a_1-3)(a_1+2)=0$

$a_1=3$ 또는 $a_1=-2$

$a_1=3$이면 $r^3=\frac{1}{3}$이므로 $r<1$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

$a_1=-2$이면 $r^3=-\frac{1}{2}$이므로 $-1<r<1$이 되어 ㉠을 만족시킨다.

따라서

$a_{10}=a_1r^9=a_1(r^3)^3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

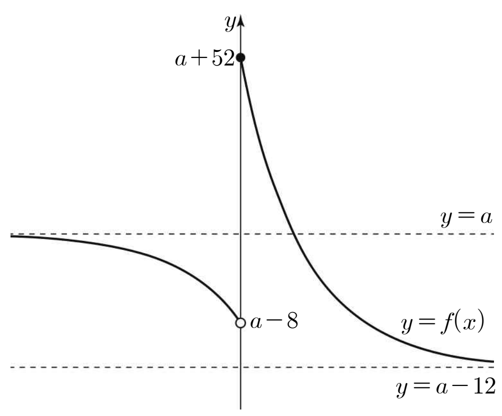
$f(x)f(x-k)=0$이면

$f(x)=0$ 또는 $f(x-k)=0$이므로

x에 대한 방정식 $f(x)f(x-k)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는

서로 다른 점의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는

서로 다른 점의 개수와 같고, 그 개수는

$a<-52$ 또는 $a\ge 12$일 때 0,

$-52\le a\le 0$ 또는 $8\le a<12$일 때 1,

$0<a<8$일 때 2이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의

그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a\le 0$ 또는 $a\ge 8$일 때 2 이하이고,

$0<a<8$일 때 4 이하이므로

조건을 만족시키려면 $0<a<8$이어야 한다. ⋯ ㉠

$0<a<8$일 때,

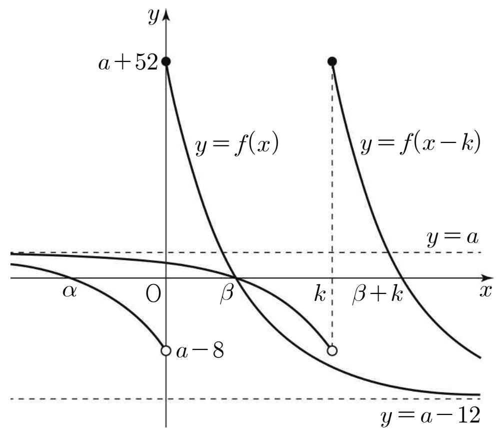
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha<0<\beta$이고,

함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $\alpha+k$, $\beta+k$이다.

이때

함수 $y=f(x)$의 그래프 또는 함수 $y=f(x-k)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이려면 $\beta=\alpha+k$이어야 한다.

$0<a<8$이고 $\beta=\alpha+k$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-k)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(\alpha)=0$이므로

$-2^{\alpha+3}+a=0$, $2^{\alpha+3}=a$에서 $\alpha=\log_2 a-3$

$f(\beta)=0$이므로

$2^{-\beta+6}+a-12=0$, $2^{-\beta+6}=12-a$에서

$\beta=6-\log_2(12-a)$

k는 4 이하의 양수이므로

$$\begin{aligned}k&=\beta-\alpha\\&=6-\log_2(12-a)-\log_2 a+3\\&=9-\log_2(12a-a^2)\le 4\end{aligned}$$

$\log_2(12a-a^2)\ge 5$

$12a-a^2\ge 32$

$a^2-12a+32=(a-4)(a-8)\le 0$

㉠에서 $0<a<8$이므로 $4\le a<8$

따라서 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은 $4+5+6+7=22$

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 54-\log_3 2=\log_3 27=3$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하자.

부채꼴의 호의 길이가 4π이므로

$4\pi=r\times\dfrac{2}{5}\pi$에서 $r=10$이고,

부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times10^2\times\dfrac{2}{5}\pi=20\pi$

따라서 $a=20$

24. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

두 함수 $y=\log(x-2)$, $y=2^x+5$의 그래프의 점근선의 방정식은 각각 $x=2$, $y=5$이다.

그러므로 두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $(2, 5)$

따라서 $a+b=2+5=7$

25. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$$\begin{aligned}S_{11}&=\frac{11\{2a_1+(11-1)d\}}{2}\\&=11(a_1+5d)=88\end{aligned}$$

에서 $a_1+5d=8$이고

$a_5=3$에서 $a_1+4d=3$이다.

두 식을 연립하여 계산하면 $d=5$, $a_1=-17$

따라서 $a_7=-17+6\times5=13$

【 다른 풀이 】

$S_{11}=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}=88$에서 $\dfrac{a_1+a_{11}}{2}=8$

a_1과 a_{11}의 등차중항은 a_6이므로 $a_6=8$이고,

$a_5=3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 5이다.

따라서 $a_7=8+5=13$

26. [출제의도] 미분계수를 이용하여 추론하기

함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax+2a & (x<2)\\ ax-2a & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여

(ⅰ) $k<2$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}&=\lim_{x\to k}\frac{-ax+2a-(-ak+2a)}{x-k}\\&=\lim_{x\to k}\frac{-a(x-k)}{x-k}=-a\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=-a-(-a)=0\ne 6$$

(ⅱ) $k=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{ax-2a}{x-2}-\lim_{x\to 2-}\frac{-ax+2a}{x-2}$$
$$=a-(-a)=2a$$

$2a=6$에서 $a=3$

(ⅲ) $k>2$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}&=\lim_{x\to k}\frac{ax-2a-(ak-2a)}{x-k}\\&=\lim_{x\to k}\frac{a(x-k)}{x-k}=a\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=a-a=0\ne 6$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=3$, $k=2$이므로

$f(a+k)=f(3+2)=f(5)=9$

27. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}$$

이고 $2\sin A=\sin B$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{BC}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=2k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times 2k\times\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{9}{5}k^2=36$이고, $k>0$이므로 $k=2\sqrt{5}$

$\cos C=\dfrac{4}{5}$에서 $\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4\sqrt{5}\times\dfrac{3}{5}=12$

28. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x<1,\ 1<x\le 2)\\ 3f(2) & (x=1)\end{cases}$$

이라 하자.

조건 (가)에 의하여

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이다.

또한 조건 (나)에 의하여

$g(0)\ne 2$, $g(2)\ne 2$이고 $\dfrac{g(0)+g(2)}{2}=2$이므로

$g(0)<2<g(2)$ 또는 $g(2)<2<g(0)$이다.

그러므로 사잇값 정리에 의하여

$0<c<2$이고 $g(c)=2$인 c가 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의하여

$0\le x<1$, $1<x\le 2$에서 $g(x)=f(x)\ne 2$

이므로 $c=1$

$g(1)=3f(2)=2$에서 $f(2)=\dfrac{2}{3}$

$f(0)+f(2)=4$에서 $f(0)=\dfrac{10}{3}$

따라서 $\dfrac{f(0)}{f(2)}=5$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1>6$에서 $a_2=\dfrac{1}{a_1}-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=-a_2=-\dfrac{1}{a_1}+1$

$a_3>0$이므로 $a_4=\dfrac{1}{a_3}-1=\dfrac{1}{a_1-1}$

$a_4>0$이므로 $a_5=\dfrac{1}{a_4}-1=a_1-2$

자연수 n에 대하여 $a_n>1$이면

위와 같은 과정에 의하여

$a_{n+1}<0$, $a_{n+2}>0$, $a_{n+3}>0$

이므로 $a_{n+4}=a_n-2$

$a_5>1$이므로 $a_9=a_1-4$

$a_9>1$이므로 $a_{13}=a_1-6$

그러므로

$$\begin{aligned}a_1+a_5+a_9+a_{13}&=a_1+(a_1-2)+(a_1-4)+(a_1-6)\\&=4a_1-12\end{aligned}$$

$4a_1-12=13$에서 $a_1=\dfrac{25}{4}$이고

$a_{13}=\dfrac{25}{4}-6=\dfrac{1}{4}$

그러므로 $a_{14}=4-1=3$, $a_{15}=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $12(a_{14}+a_{15})=12\times\left\{3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}=28$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

실수 p에 대하여

함수 $f(x)$가 $x=p$, $x=p+k$에서 모두 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{t\to p}g(t)&=\lim_{t\to p}\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\\&=\frac{f(p+k)-f(p)}{k}=g(p)\end{aligned}$$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=p$에서 연속이고,

함수 $h(t)=f(t)g(t)$도 $t=p$에서 연속이다.

함수 $f(x)$는

$\lim\limits_{x\to-4} f(x)=\lim\limits_{x\to-4}(x+4)(x+a)=0$, $f(-4)=b$에서

$\lim\limits_{x\to-4} f(x)\neq f(-4)$이므로 $x=-4$에서 불연속이고

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+4)(x+a)=4a$,

$f(0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=c$이므로

$4a=c$이면 $x=0$에서 연속이고,

$4a\neq c$이면 $x=0$에서 불연속이다. … ㉠

또한 함수 $f(x)$는 a, b, c, k의 값에 관계없이

$x\neq-4$, $x\neq0$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(t)$는 a, b, c, k의 값에 관계없이

$t=-4-k$, $t=-k$, $t=-4$, $t=0$을 제외한

실수 전체의 집합에서 연속이다.

이를 이용하여 a, b, c, k의 값을 구하면 다음과 같다.

$t=-4-k$에서

$$\lim_{t\to-4-k} h(t)=\lim_{t\to-4-k}\left\{f(t)\times\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\right\}$$
$$=f(-4-k)\times\frac{0-f(-4-k)}{k}$$
$$=-\frac{\{f(-4-k)\}^2}{k}$$

$$h(-4-k)=f(-4-k)\times\frac{f(-4)-f(-4-k)}{k}$$

이고 함수 $h(t)$는 $t=-4-k$에서 연속이므로

$$-\frac{\{f(-4-k)\}^2}{k}=\frac{f(-4-k)\{f(-4)-f(-4-k)\}}{k}$$

$f(-4-k)f(-4)=0$

이고 $f(-4)\neq0$이므로 $f(-4-k)=0$

즉, $-a=-4-k$, $a=k+4$이고

$x<-4$, $-4<x<0$일 때

$f(x)=(x+4)(x+k+4)$ … ㉡

$t=-k$에서

$$\lim_{t\to-k+} h(t)=\lim_{t\to-k+}\left\{f(t)\times\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\right\}$$
$$=f(-k)\times\frac{c-f(-k)}{k}$$

$$\lim_{t\to-k-} h(t)=\lim_{t\to-k-}\left\{f(t)\times\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\right\}$$
$$=f(-k)\times\frac{4a-f(-k)}{k}$$

$$h(-k)=f(-k)\times\frac{c-f(-k)}{k}$$

함수 $h(t)$가 $t=-k$에서 연속이므로

$$f(-k)\times\frac{c-f(-k)}{k}=f(-k)\times\frac{4a-f(-k)}{k}$$

$k>4$이므로 ㉡에서 $f(-k)\neq0$

그러므로 $c=4a$이고, ㉠에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$t=-4$에서

$$\lim_{t\to-4} h(t)=\lim_{t\to-4}\left\{f(t)\times\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\right\}$$
$$=0\times\frac{f(-4+k)-0}{k}=0$$

$$h(-4)=f(-4)\times\frac{f(-4+k)-f(-4)}{k}$$

함수 $h(t)$가 $t=-4$에서 연속이므로

$$f(-4)\times\frac{f(-4+k)-f(-4)}{k}=0$$

$f(-4)\neq0$이므로 $f(-4+k)=f(-4)=b$

조건 (나)에서 $b=f(k)$이므로

$f(-4+k)=f(k)$이고 $-4+k>0$, $k>0$

이차함수 $y=-x^2+6x+c$의 그래프가

직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{(-4+k)+k}{2}=3$, $k=5$이고

$a=5+4=9$

$c=4\times9=36$

$b=f(5)=-25+30+36=41$

그러므로 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)(x+9) & (x<-4,\ -4<x<0)\\ 41 & (x=-4)\\ -x^2+6x+36 & (x\geq0)\end{cases}$$

따라서 $f(c-a-b)=f(36-9-41)=f(-14)=50$