고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 자연수를 원소로 갖는 집합 A가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 A의 개수는?

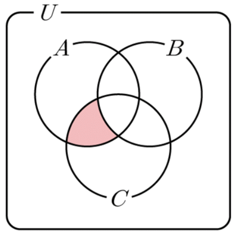
$$x\in A \text{이면 } \frac{16}{x}\in A$$

① 4개 ② 5개 ③ 6개
④ 7개 ⑤ 8개

02 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$의 부분집합 X에 대하여 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자. 집합 X가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $S(X)$의 최솟값을 구하시오.

(가) $\{6,\ 8,\ 9\}\subset X$, $\{1,\ 5,\ 9\}\not\subset X$
(나) $S(X)$의 값은 짝수이다.
(다) $n(X)=6$

03 다음 중 아래 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합은?



① $(B\cap C)\cap A^C$ ② $(A\cap C)-B$
③ $B-(A\cap C)^C$ ④ $B-(A\cup C)^C$
⑤ $A\cap(B^C\cap C^C)$

04 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cap B=A$일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?

① $A\subset B$ ② $A\cup B=B$
③ $A-B=\varnothing$ ④ $A\cup B^c=U$
⑤ $B^c\subset A^c$

05 전체집합 $U=\{x|x$는 7 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $*$를
$A*B=(A-B^C)^C\cap(A^C-B)^C$로 약속할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\{2, 3, 4\}*\{3, 4, 5\}=\{2, 5\}$
ㄴ. $A*B=A^C*B^C$
ㄷ. $A*B=U$을 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는 128이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 두 집합
$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여
집합 P가 다음 조건을 만족한다.

(가) $n(P\cap A)=4$
(나) $P-B=\varnothing$
(다) 집합 P의 모든 원소의 합은 48이다.

집합 $P-A$의 모든 원소의 곱을 구하시오.

07 학생 수가 40인 어느 학습에서 두 인터넷 사이트 A, B의 모의고사를 본 학생 수를 조사하였더니 각각 24명, 32명이었다. 두 인터넷 사이트의 모의고사를 모두 본 학생 수는 최소 몇 명인가?

① 14명 ② 15명 ③ 16명
④ 17명 ⑤ 18명

08 a,b,c가 실수일 때, 〈보기〉에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고른 것은 ?

〈 보 기 〉

ㄱ. p : $a+b>0$
　 q : $a>0$, 또는 $b>0$
ㄴ. p : $(a-b)(b-c)=0$
　 q : $a=b=c$
ㄷ. p : $a>b$ 이고 $b>c$
　 q : $a>c$

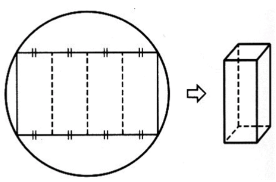
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

09 'ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.'라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다. 이때 (가) ~ (라)에 알맞은 것은? (단, a, b는 정수이다.)

> 주어진 명제의 대우는
> 'a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.'
> a, b를 $a=2k+1$, $b=2l+1$ (단, k, l은 정수)로 놓으면
> $ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1$
> $\quad=2(2kl+k+l)+1$
> k, l이 정수이므로 $2kl+k+l$은 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 따라서 ab는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 이때 주어진 명제의 대우가 $\boxed{\text{(다)}}$이므로 주어진 명제는 $\boxed{\text{(라)}}$이다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	짝수	정수	참	참
②	홀수	홀수	거짓	거짓
③	정수	홀수	참	참
④	홀수	짝수	거짓	거짓
⑤	정수	짝수	참	참

10 지름이 $4\sqrt{5}$인 원에 내접하는 직사각형을 잘라서 다음 그림과 같이 점선을 따라 접어 두 밑면이 없는 정사각기둥을 만들었다. 이 기둥의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하시오.



11 실수 전체의 집합 R에서 정의된 함수 f가 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)+3$을 만족시킬 때, $f(3)+f(-3)$의 값을 구하시오.

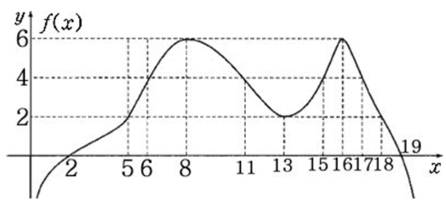
12 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는 유리수}) \\ 1-x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

일 때, $(f\circ f)(x)$를 구하면?

① $-x$　② $1-x$　③ $2x-3$
④ x　⑤ $x+2$

13 다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적은 것은?
($x<2$ 또는 $x>19$일 때, $f(x)<0$이다.)



① 2, 20　② 2, 22　③ 3, 20
④ 4, 42　⑤ 4, 50

14 두 집합

$X=\{x \mid -1 \le x \le a\},\ Y=\{y \mid -13 \le y \le b\}$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=-3x+2$의 역함수가 존재할 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

15 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(5x-9)=10x+1$이다. $f^{-1}(x)=ax+b$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

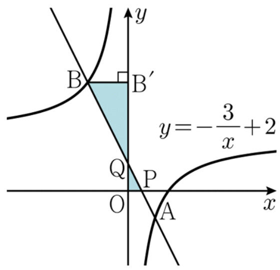
16 다음 중 함수 $y=|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$가 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는?

① $m>-2$ ② $m \le \frac{2}{5}$

③ $-2<m<\frac{2}{5}$ ④ $m<-2$ 또는 $m \ge \frac{2}{5}$

⑤ $m \le -2$ 또는 $m>\frac{2}{5}$

17 곡선 $y=-\frac{3}{x}+2$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(k,\ -\frac{3}{k}+2\right)$ $(-3<k<0)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B'이라 할 때, 두 삼각형 BQB', OPQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최솟값을 m, 그때의 k값을 α라 할 때, $m+\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}-1$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}-1$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}-1$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}-1$ ⑤ $\sqrt{10}-2$

18 $y=\left|\frac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$ (k는 상수)의 교점의 개수를 $N(k)$라 하자. 이때 $N(0)+N(1)+N(2)+N(3)$의 값을 구하시오.

19 [2020년 3월 고2 19번/4점]

함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에 대하여

함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq 0$이다.)

① $-\dfrac{25}{6}$ ② -4 ③ $-\dfrac{23}{6}$
④ $-\dfrac{11}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

20 함수 $f(x)=\left|2-\dfrac{4}{x}\right|$가 있다.

등식 $4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a)=f(b)$를 만족시키는 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $30ab$의 값을 구하시오.

21 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역을 A, 함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

22 두 함수

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}k\ (x\geq 0)$, $g(x)=\sqrt{4x-2k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

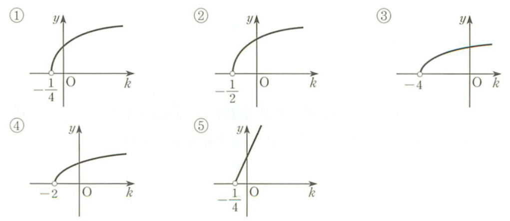
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

23 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{7}k\ (x\geq 0)$,

$g(x)=\sqrt{7x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

24 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 일차함수 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이는 k에 대한 함수가 된다.
이 함수를 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=f(k)$의 그래프의 개형은?



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④	02 30	03 ②
04 ④	05 ⑤	06 5040
07 ③	08 ④	09 ③
10 40	11 -6	12 ④
13 ①	14 25	15 10
16 ④	17 ②	18 6
19 ④	20 128	21 ②
22 ①	23 ④	24 ①

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [7회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
24문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④

해설 $1 \in A$이면 $\dfrac{16}{1}=16 \in A$

$2 \in A$이면 $\dfrac{16}{2}=8 \in A$

$4 \in A$이면 $\dfrac{16}{4}=4 \in A$

따라서 집합 A는 $\{4\}$, $\{1,\ 16\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{1,\ 4,\ 16\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{1,\ 2,\ 8,\ 16\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$의 7개이다.

02 정답 30

해설 조건 (가)에서 $\{6,\ 8,\ 9\} \subset X$이고 조건 (나)에서 $S(X)$의 값은 짝수이므로 X는 홀수 2개와 짝수 4개 또는 홀수 4개와 짝수 2개를 원소로 갖는 집합이다.

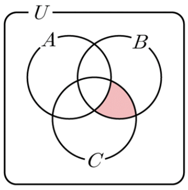
(ⅰ) 집합 X가 홀수 2개와 짝수 4개를 원소로 가질 때
조건 (가)에서 $\{6,\ 8,\ 9\} \subset X$이므로 1, 3, 5, 7에서 원소를 1개, 2, 4, 10에서 원소를 2개를 택하는 것과 같다.
위의 조건을 만족시키면서 $S(X)$가 최소가 되는 경우는 $X=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$일 때
$S(X)=30$이다.

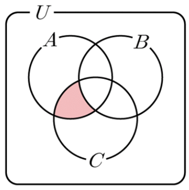
(ⅱ) 집합 X가 홀수 4개와 짝수 2개를 원소로 가질 때
조건 (가)에서 $\{6,\ 8,\ 9\} \subset X$,
$\{1,\ 5,\ 9\} \not\subset X$이므로 $1 \notin X$ 또는 $5 \notin X$이다.
위의 조건을 만족시키면서 $S(X)$가 최소가 되는 경우는 $X=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$일 때
$S(X)=34$이다.

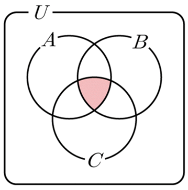
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $S(X)$의 최솟값은 30이다.

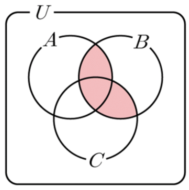
03 정답 ②

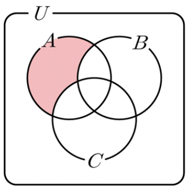
해설 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


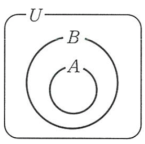
④


⑤


따라서 구하는 집합은 ②이다.

04 정답 ④

해설



$A \cap B=A$에서 $A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B=B$

$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$\Leftrightarrow A \cap B^c=\varnothing$

$\Leftrightarrow A^c \cup B=U$

$\Leftrightarrow B^c \cup A^c$

05 정답 ⑤

해설 $A*B=(A-B^C)^C\cap(A^C-B)^C$

$=(A\cap B)^C\cap(A^C\cap B^C)^C$

$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$

ㄱ. $\{2, 3, 4\}\cap\{3, 4, 5\}=\{3, 4\}$

$\{3, 4\}^C=\{1, 2, 5, 6, 7\}$

$\{2, 3, 4\}\cup\{3, 4, 5\}=\{2, 3, 4, 5\}$이므로

$\{2, 3, 4\}*\{3, 4, 5\}$

$=\{1, 2, 5, 6, 7\}\cap\{2, 3, 4, 5\}$

$=\{2, 5\}$

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C\cap B^C)^C\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A^C\cup B^C)\cap(A\cup B)$

$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$

$=A*B$

ㄷ. $A*B=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)=U$에서

$(A\cap B)^C=U$, $A\cup B=U$

즉, $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=U$이므로 $B=A^C$

따라서 $A*B=U$를 만족시키는 집합 A가 정해지면

집합 B도 정해지므로

구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 전체집합 U의

부분집합 A의 개수와 같다.

$\therefore 2^7=128$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 정답 5040

해설 $n(P\cap A)=4$에서 집합 A에 속한 5개의 원소 중

오직 4개만 집합 P에 속한다. 즉, 집합 A의 원소 중

집합 P에 속하는 원소들의 합의 최댓값은

$2+3+4+5=14$, 최솟값은 $1+2+3+4=10$이다.

그러므로 집합 A에 속하지 않는 원소들의 합은

34 이상 38 이하이다. ⋯㉠

$P-B=\varnothing$에서 $P\subset B$이고 집합 B의 원소 중

집합 A에 속하는 원소를 제외한 나머지 원소들의 집합은

$\{6, 7, 8, 9, 10\}$이다.

(i) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$이 집합 P에 포함되는 경우 원소의 합은 40이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중 네 원소로 이루어진 집합이 집합 P에 포함되는 경우
원소의 합의 최솟값은 $6+7+8+9=30$,
최댓값은 $7+8+9+10=34$이므로
㉠을 만족시키는 집합은 $\{7, 8, 9, 10\}$이고
(다)에 의해 $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$은 집합 P가 될 수 있다.

(iii) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중 세 개 이하의 원소로 이루어진 집합은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$P=\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$이고

$P-A=\{7, 8, 9, 10\}$이다.

따라서 $P-A$의 모든 원소의 곱은 5040이다.

07 정답 ③

해설 학생 전체의 집합을 U, 두 인터넷 사이트 A, B의

모의고사를 본 학생의 집합을 각각 P, Q라 하면

$n(U)=40$, $n(P)=24$, $n(Q)=32$

$n(P\cup Q)\le n(U)$이므로 $n(P\cup Q)\le 40$

그런데 $n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$

$24+32-n(P\cap Q)\le 40$

$\therefore n(P\cap Q)\ge 16$

따라서 두 인터넷 사이트의 모의고사를 모두 본 학생 수는

최소 16명이다.

08 정답 ④

해설 ㄱ. $\sim p$: $a+b \leqq 0$

$\sim q$: $a \leqq 0$이고 $b \leqq 0$

$\sim q \Rightarrow \sim p$이므로 $p \Rightarrow q$

(반례) $a=1$, $b=-2$이면 $q \not\Rightarrow p$이므로

p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. p : $(a-b)(b-c)=0$에서 $a=b$ 또는 $b=c$

q : $a=b=c$

따라서 $p \not\Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$이므로 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. p : $a>b$이고 $b>c$에서 $a>b>c$이므로

$p \Rightarrow q$

(반례) $a=2$, $b=-2, c=1$이면 $q \not\Rightarrow p$이므로

p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

09 정답 ③

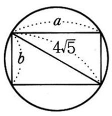
해설 k, l이 정수이므로, $2kl+k+l$은 $\boxed{\text{정수}}$이다.

따라서 $ab=2(2kl+k+l)+1$은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

주어진 명제의 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제 역시 항상 $\boxed{\text{참}}$이다.

10 정답 40

해설



정사각기둥의 전개도에서 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 피타고라스 정리에서

$a^2+b^2=80$ $\cdots$ ㉠

즉, 제곱의 합이 일정하다.

정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합을 l이라 하면

$l=2a+4b$

따라서 제곱의 합이 일정할 때, 합의 최댓값을 구하는 것이므로 코시-슈바르츠의 부등식

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$에

$x=2$, $y=4$를 대입하면

$(a^2+b^2)(2^2+4^2) \geq (2a+4b)^2$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $80 \cdot 20 \geq (2a+4b)^2$

$\therefore 2a+4b \leq \sqrt{80 \cdot 20}=40$

따라서 구하는 최댓값은 40이다.

11 정답 -6

해설 $f(a+b)=f(a)+f(b)+3$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $a=b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+3$

$\therefore f(0)=-3$

㉠에 $a=3$, $b=-3$을 대입하면

$f(3-3)=f(3)+f(-3)+3$

$f(0)=f(3)+f(-3)+3$

$-3=f(3)+f(-3)+3$

$\therefore f(3)+f(-3)=-6$

12 정답 ④

해설 $f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는 유리수}) \\ 1-x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$

에서 $(f \circ f)(x)=f(f(x))$이므로

(ⅰ) x가 유리수일 때, $f(f(x))=f(x)=x$

(ⅱ) x가 무리수일 때, $1-x$도 무리수이므로

$f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $(f \circ f)(x)=x$

13 정답 ①

해설 $f(x+2)=t$라 하면

주어진 그래프에서 $f(t)=4$인 t의 값은

$t=6,\ 11,\ 15,\ 17$

한편, 다음을 만족하는 x의 값을 구한다.

$f(x+2)=6,\ 11,\ 15,\ 17$ $\cdots$ ㉠

이때 그래프에서 $f(x) \leq 6$이므로 ㉠ 중에서 실근을 갖는 것은 $f(x+2)=6$일 때뿐이다.

따라서 그래프에서 $f(8)=6$, $f(16)=6$이므로

$x+2=8,\ 16$

$\therefore x=6,\ 14$

따라서 조건을 만족하는 서로 다른 실근은 2개이고 그 합은

$6+14=20$

14 정답 25

해설 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

$f(x)=-3x+2$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$f(-1)=b$, $f(a)=-13$이다.

$f(-1)=b=5$, $f(a)=-3a+2=-13$

$\therefore a=5,\ b=5$

$\therefore ab=25$

15 정답 10

해설 $5x-9=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t+9}{5}$

따라서 $f(t)=10\cdot\dfrac{t+9}{5}+1=2t+19$

$\therefore f(x)=2x+19$

$y=2x+19$라 하면

$2x=y-19$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{19}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{19}{2}$

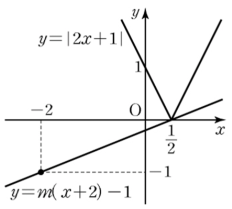
$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{19}{2}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{19}{2}$ 이므로

$a-b=10$

16 정답 ④

해설



위의 그림에서 함수 직선 $y=m(x+2)-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

이때, 함수 $y=|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=m(x+2)-1$이 만나려면

(i) $m<\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}$ 에서 $m<-2$

(ii) $m\geq\dfrac{-1-0}{-2-\frac{1}{2}}$ 에서 $m\geq\dfrac{2}{5}$

(i), (ii)에서 $m<-2$또는 $m\geq\dfrac{2}{5}$

17 정답 ②

해설 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(k,\ -\dfrac{3}{k}+2\right)$ $(-3<k<0)$을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{-\frac{3}{k}+3}{k-1}=\dfrac{-3+3k}{k(k-1)}=\dfrac{3}{k}$

이므로 직선의 방정식은 $y=\dfrac{3}{k}(x-1)-1$,

즉 $y=\dfrac{3}{k}x-\dfrac{3}{k}-1$이다.

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}\left(\dfrac{k}{3}+1, 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ -\dfrac{3}{k}-1\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{k}{3}+1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{3}{k}-1$, $\overline{\mathrm{B'Q}}=3$, $\overline{\mathrm{BB'}}=-k$

따라서 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2는

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot(-k)=-\dfrac{3}{2}k$,

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{3}+1\right)\left(-\dfrac{3}{k}-1\right)=-\left(1+\dfrac{3}{2k}+\dfrac{k}{6}\right)$

이므로

$S_1+S_2=-\dfrac{5}{3}k-\dfrac{3}{2k}-1$

이때 $-3<k<0$에서 두 수 $-\dfrac{5}{3}k$, $-\dfrac{3}{2k}$이 모두 양수이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S_1+S_2\geq 2\sqrt{\left(-\dfrac{5}{3}k\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2k}\right)}-1$

$=\sqrt{10}-1$

$\left(\text{단, 등호는 } k=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10} \text{ 일 때 성립}\right)$

$\therefore m+\alpha=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}-1$

18 정답 6

해설 $y=\dfrac{-x-2}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-4}{x-2}=-\dfrac{4}{x-2}-1$

이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은

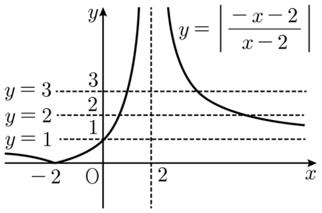
$x=2,\ y=-1$이고, x절편은 -2, y절편은 1이다.

함수 $y=\left|\dfrac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프는

유리함수 $y=\dfrac{-x-2}{x-2}$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은

그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한

것이므로 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y=\left|\dfrac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=0$의

교점의 개수는 1이므로

$N(0)=1$

(ii) 함수 $y=\left|\dfrac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=1$의

교점의 개수는 1이므로

$N(1)=1$

(iii) 함수 $y=\left|\dfrac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=2$의

교점의 개수는 2이므로

$N(2)=2$

(iv) 함수 $y=\left|\dfrac{-x-2}{x-2}\right|$의 그래프와 직선 $y=3$의

교점의 개수는 2이므로

$N(3)=2$

(i)~(iv)에 의하여

$\therefore\ N(0)+N(1)+N(2)+N(3)=1+1+2+2=6$

19 정답 ④

해설 평행이동을 이용하여 유리함수의 그래프를 추론한다.

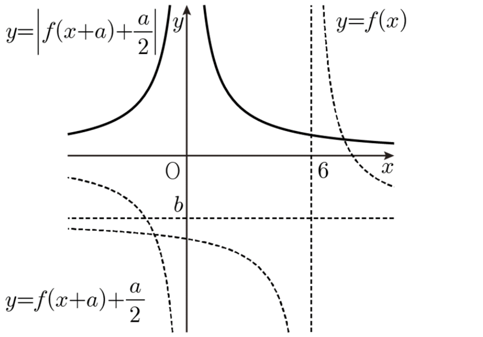
곡선 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$는

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 x축 아래에 그려진 부분을

x축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여

대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의

방정식은 그림과 같이 $x=0,\ y=0$이어야 함을 알 수 있다.



이때 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에서

$f(x+a)+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+b+\dfrac{a}{2}$이고

곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의 방정식은

$x=6-a,\ y=b+\dfrac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로

$6-a=0,\ b+\dfrac{a}{2}=0$

$\therefore\ a=6,\ b=-3$

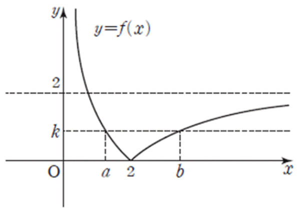
따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=-\dfrac{11}{3}$

20 정답 128

해설 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x}-2 & (0<x<2) \\ 2-\dfrac{4}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$ 이므로

$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $f(a)=f(b)=k$ $(a<b)$라 하면
$0<k<2$이다.

$f(a)=\dfrac{4}{a}-2=k$에서 $a=\dfrac{4}{2+k}$

$f(b)=2-\dfrac{4}{b}=k$에서 $b=\dfrac{4}{2-k}$

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{2+k}+\dfrac{4}{2-k}\right)=\dfrac{8}{4-k^2}$이고

$0<k<2$에서 $\dfrac{8}{4-k^2}>2$이므로

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=2-\dfrac{4}{\dfrac{8}{4-k^2}}=2-\dfrac{4-k^2}{2}=\dfrac{k^2}{2}$

따라서 $4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a)=f(b)$에서

$4\cdot\dfrac{k^2}{2}=k,\ k(2k-1)=0$

$0<k<2$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{4}{2+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{8}{5},\ b=\dfrac{4}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{8}{3}$이므로

$30ab=30\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{8}{3}=128$

21 정답 ②

해설 함수 $y=\sqrt{5x+2}$의 정의역은

$5x+2\geq 0$에서 $x\geq -\dfrac{2}{5}$ 이므로

$\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{2}{5}\right\}$ 이다.

$\therefore A=\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{2}{5}\right\}$

함수 $y=\sqrt{16-4x}$의 정의역은

$16-4x\geq 0$에서 $x\leq 4$이므로 $\{x \mid x\leq 4\}$이다.

따라서 $A\cap B=\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{2}{5}\leq x\leq 4\right\}$이므로 $A\cap B$에 속하는 정수는 $0,1,2,3,4$의 5개이다.

22 정답 ①

해설 함수 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k\ (x\geq 0)$은 집합 $\{x|x\geq 0\}$에서 집합 $\left\{y\middle|y\geq\frac{1}{2}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k$라 하면

$\frac{1}{4}x^2=y-\frac{1}{2}k$

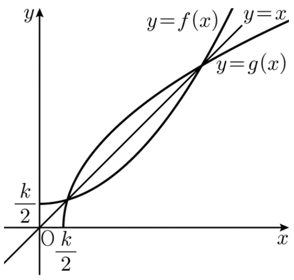
$x^2=4y-2k$

$\therefore x=\sqrt{4y-2k}\ (\because x\geq 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{4x-2k}$

즉, 함수 $g(x)=\sqrt{4x-2k}$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}k=x$에서 $x^2-4x+2k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2k>0$

또한 이차방정식의 두 실근의 곱은 음이 아닌 실수이므로 $2k\geq 0$

$\therefore 0\leq k<2$

따라서 정수 k의 개수는 0, 1로 2이다.

23 정답 ④

해설 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k\ (x\geq 0)$는 집합 $\{x|x\geq 0\}$에서 집합 $\left\{y\middle|y\geq\frac{1}{7}k\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k$에서

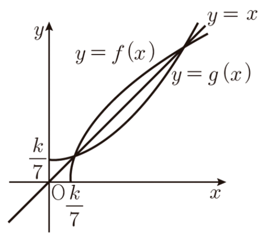
$\frac{1}{7}x^2=y-\frac{1}{7}k$, $x^2=7y-k$

$\therefore x=\sqrt{7y-k}\ (\because x\geq 0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{7x-k}$

즉, 함수 $g(x)=\sqrt{7x-k}$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{7}k=x$에서

$x^2-7x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$k\geq 0$, $D=(-7)^2-4k>0$

$\therefore 0\leq k<\frac{49}{4}$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, \cdots, 12$의 13개이다.

24 정답 ①

해설 $y=x^2$과 $y=x+k$의 그래프의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, \alpha+k),\ B(\beta, \beta+k)$

이때, $x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-k$

$x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로

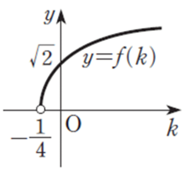
$1+4k>0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{4}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이 $f(k)$는

$$\begin{aligned} f(k) &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha+k-\beta-k)^2} \\ &= \sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{2(1+4k)} = \sqrt{8\left(k+\frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

함수 $y=f(k)$의 그래프는

$y=\sqrt{8k}$의 그래프를 k축 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼 평행 이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(k)$의 그래프 개형은 ①이다.