교과서_미래엔 - 공통수학2 (집합과 명제) 99~101p[대단원]

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
33문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 작은 홀수의 집합
② 이태리 요리를 맛있게 만드는 사람들의 모임
③ 노래를 잘하는 사람들의 모임
④ 우리 반 학생 중에서 3월에 태어난 학생들의 모임
⑤ 1보다 크고 2보다 작은 자연수의 모임

02 다음 보기 중 집합인 것의 개수를 구하시오.

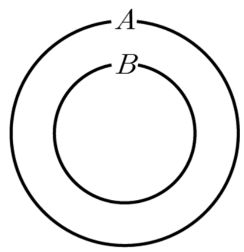
<보기>

ㄱ. 성격이 좋은 사람의 모임
ㄴ. 초식동물의 모임
ㄷ. 20 이상인 7의 배수의 모임

03 집합 $A=\{x\,|\,x$는 14의 양의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $2\in A$
② $4\in A$
③ $\{7\}\subset A$
④ $\{2,\ 8\}\not\subset A$
⑤ $\{2,\ 7,\ 14\}\subset A$

04 다음 중 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 아래 벤다이어그램과 같은 것은?



① $A=\varnothing$, $B=\{0\}$
② $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
③ $A=\{x\,|\,x$는 짝수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 8의 양의 배수$\}$
④ $A=\{x\,|\,x=2n,\ n$은 자연수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 16의 양의 약수$\}$
⑤ $A=\{x\,|\,x$는 10보다 작은 짝수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 10 이하의 짝수$\}$

05 [2019년 3월 고2 이과 25번/3점]

자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x\,|\,x\text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n\subset A_{25}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

06 세 집합 $A=\{x|2a \le x \le a\}$, $B=\{x|-b \le x \le b\}$, $C=\{x|-5<x \le 4\}$에 대하여 $A \subset B \subset C$가 성립할 때, 실수 a, b의 차 $b-a$의 값의 최댓값을 구하시오. (단, $b>0>a$)

07 자연수 a, b에 대하여 두 집합 $A=\{3,\ 2a^2\}$, $B=\{8,\ b^2-2b\}$가 서로 같을 때, $a+b$의 값을 구하시오.

08 두 집합 $A=\{-a,\ 2a+7,\ 4\}$, $B=\{a^2-3a,\ 1,\ 5\}$에 대하여 $A=B$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

09 전체집합 $U=\{x|x$는 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{x|x$는 4의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 20의 약수$\}$일 때, $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

10 $\{x|x$는 4의 약수$\} \subset \mathrm{X} \subset \{x|x$는 12의 약수$\}$를 만족하는 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개
④ 8 개 ⑤ 10 개

11 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $A \cup B=\{x|x$는 짝수$\}$, $A \cup C=\{x|x$는 12의 약수$\}$일 때, $A \cup (B \cap C)$의 모든 원소의 합을 구하시오.

12 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 중 항상 성립하는 것이 아닌 것은?

① $A\cap(A^c\cup B)=A\cap B$
② $(A\cup B)\cap(A^c\cap B^c)=\varnothing$
③ $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$
④ $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$
⑤ $\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B=A$

13 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A\cap B^C)=5$, $n(A\cap B)=3$, $n(A\cup B)=15$일 때, $n(B-A)$를 구하시오.

14 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=20$, $n(A^C\cap B^C)=7$일 때, $n(A\cap B)$는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

15 카드 A 또는 카드 B를 이용하는 고객 중 남자 60명과 여자 70명을 대상으로 두 카드 A, B의 이용 실태를 조사한 결과가 다음과 같다.

(가) 카드 A를 이용하는 고객의 수와 카드 B를 이용하는 고객의 수의 합은 156이다.
(나) 두 카드 A, B 중 한 카드만 이용하는 남자 고객의 수와 두 카드 A, B 중 한 카드만 이용하는 여자 고객의 수는 같다.

이 고객 중 카드 A와 카드 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

16 1에서 100까지의 자연수 중에서 3 또는 4의 배수의 개수를 구하시오.

17 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sim q$의 진리집합은 Q^C이다.
② 명제 $\sim p \to q$가 참이면 $Q^C\subset P$이다.
③ $P\subset Q$이면 명제 $p\to q$는 참이다.
④ $Q\neq\varnothing$이면 '어떤 x에 대하여 q이다.'는 참이다.
⑤ $P\neq U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

18 전체집합 U의 두 부분집합 P, Q를 각각 두 조건 p, q의 진리집합이라 하자. $P\cap Q=\varnothing$일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p\rightarrow q$ ② $\sim p\rightarrow q$ ③ $p\rightarrow\sim q$
④ $\sim p\rightarrow\sim q$ ⑤ $q\rightarrow p$

19 자연수 a에 대한 조건

'모든 음의 실수 x에 대하여 $x+2a-9<0$이다'

가 참인 명제가 되도록 하는 a의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

20 명제 '$-4\le x\le 2$이면 $x\ge k$이다.'가 참이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\le-4$ ② $k\ge-4$ ③ $k\le 2$
④ $k\ge 2$ ⑤ $-4\le k\le 2$

21 두 조건 p, q에 대하여 명제 $q\rightarrow\sim p$의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p\rightarrow q$ ② $\sim p\rightarrow\sim q$
③ $q\rightarrow\sim p$ ④ $\sim q\rightarrow p$
⑤ $\sim q\rightarrow\sim p$

22 전체집합 U에서 정의된 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$인 관계가 성립한다. 다음 중 항상 참인 명제는?

① $q\rightarrow p$ ② $p\rightarrow\sim q$
③ $\sim p\rightarrow q$ ④ $\sim q\rightarrow\sim p$
⑤ $q\rightarrow\sim p$

23 두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는

$p: ab=0$,
$q: a^2+b^2=0$,
$r: a^2+2ab+b^2=0$

이다. 다음 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. p이고 r는 q이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24 자연수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r가 다음과 같다.

p : ab는 짝수이다.

q : $a+ab$는 홀수이다.

r : a^2+b^2은 홀수이다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. q는 r이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

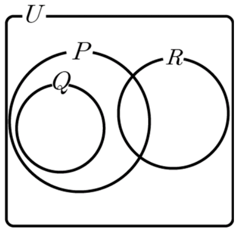
ㄴ. p는 r이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다.

ㄷ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. 세 집합 사이의 포함 관계가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

③ r는 q이기 위한 필요조건이다.

④ $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이다.

⑤ q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

26 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. p가 q이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P-Q=\varnothing$ ② $P^C\cup Q=U$

③ $P^C\cap Q=\varnothing$ ④ $P^C\cap Q^C=\varnothing$

⑤ $P^C\cup Q^C=U$

27 실수 x에 대하여 두 조건 p와 q가
$p: (x-a+3)(x+3a-18)=0$
$q: x(x-3a) \le 0$
일 때, p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

28 $x+4=0$은 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -8 ② 0 ③ 8
④ 16 ⑤ 24

29 다음은 $\sqrt{5}$ 가 유리수가 아님을 증명한 것이다.

> $\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{(가)}$ 인 정수이다.)
> $\therefore \sqrt{5}p=q$
> 양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$ 이므로
> q는 $\boxed{(나)}$ 이다.
> 따라서 p는 $\boxed{(다)}$ 이므로 $\boxed{(가)}$ 에
> 모순이다.
> 즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	양수	5의 배수	짝수
②	음수	짝수	홀수
③	서로소	홀수	5의 배수
④	서로소	5의 배수	짝수
⑤	서로소	5의 배수	5의 배수

30 다음은 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+2}$가 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt{n^2+2}$가 유리수라고 가정하면
> $\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
> 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
> $p^2(n^2+2)=q^2$이다.
> p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로
> $n^2=\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 이때 자연수 k에 대하여
> (ⅰ) $q=2k$일 때
> $(2k-1)^2<n^2<\boxed{\text{(나)}}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅱ) $q=2k+1$일 때
> $\boxed{\text{(나)}}<n^2<(2k+1)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
> $\sqrt{n^2+2}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)
> 를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
> 따라서 $\sqrt{n^2+2}$는 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(q)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)+g(3)$의 값은?

① 56 ② 57 ③ 58
④ 59 ⑤ 60

31 다음은 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$과 $xy+yz+zx$의 대소를 비교한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

> $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$
> $=\dfrac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$
> $=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\ \boxed{\text{(가)}}\ 0$
> $\therefore\ x^2+y^2+z^2\ \boxed{\text{(가)}}\ xy+yz+zx$
> (단, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$일 때 성립한다.)

	(가)	(나)
①	$<$	$x=y=z$
②	$\leq$	$x=y=z$
③	$\geq$	$x=y=z$
④	$<$	$xy=yz=zx$
⑤	$\leq$	$xy=yz=zx$

32 $x>0$, $y>0$일 때, $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{8}{y}+y\right)$의 최솟값을 구하시오.

33 $x>2$일 때, $\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$의 최솟값을 구하시오.

교과서_미래엔 - 공통수학2 (집합과 명제) 99~101p[대단원]

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
33문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 ④, ⑤	02 2	03 ②
04 ③	05 48	06 6
07 5	08 -1	09 8
10 ④	11 24	12 ⑤
13 7	14 ⑤	15 ②
16 50	17 ⑤	18 ③
19 ①	20 ①	21 ④
22 ④	23 ⑤	24 ②
25 ②	26 ③	27 18
28 ③	29 ⑤	30 ④
31 ③	32 16	33 8

교과서_미래엔 - 공통수학2 (집합과 명제) 99~101p[대단원]

집합의 개념과 표현 ~ 절대부등식

실시일자	-
33문제 / DRE수학	

유형별 학습

이름

01 정답 ④, ⑤

해설 '작은', '맛있게', '잘하는' 등은 어떤 기준이 없어서 그 대상을 분명히 구별할 수 없으므로 집합이 아니다.

02 정답 2

해설 '성격이 좋은'은 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ

03 정답 ②

해설 $A=\{1, 2, 7, 14\}$
② $4 \notin A$
따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

04 정답 ③

해설 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B \subset A$이다.
① $A \subset B$
② $A \not\subset B$, $B \not\subset A$
③ $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$, $B=\{8, 16, 24, \cdots\}$이므로
$B \subset A$
④ $B=\{2, 4, 6, \cdots\}$, $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로
$A \not\subset B$, $B \not\subset A$
⑤ $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로
$A \subset B$
따라서 $B \subset A$가 성립하는 것은 ③이다.

05 정답 48

해설 $\sqrt{25}=5$이므로 $A_{25}=\{1, 3, 5\}$
$1 \le \sqrt{n} < 7$이면 $A_n \subset A_{25}$이므로 $1 \le n < 49$
따라서 자연수 n의 최댓값은 48

06 정답 6

해설 $B \subset C$이므로
$-5 < -b < 0$, $0 < b \le 4$
$\therefore\ 0 < b \le 4$
$A \subset B$이므로 $-b \le 2a$, $a \le b$, $a < 0$
$\therefore\ -\frac{b}{2} \le a < 0$
$b < b-a \le \frac{3}{2}b$이므로
$b-a$의 최댓값은 $b=4$일 때 6

07 정답 5

해설 $A=B$에서 $2a^2=8$, $3=b^2-2b$가 성립하므로
$a^2=4$
$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$
$b^2-2b-3=0$, $(b-3)(b+1)=0$
$\therefore\ b=3\ (\because\ b>0)$
따라서 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=5$

08 정답 -1

해설 $A=B$이므로 $a^2-3a=4$
$a^2-3a-4=0$, $(a-4)(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=4$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{1, 5, 4\}$, $B=\{4, 1, 5\}$이므로
$A=B$
(ii) $a=4$일 때
$A=\{-4, 15, 4\}$, $B=\{4, 1, 5\}$이므로
$A \ne B$
(i), (ii)에서 $a=-1$

09 정답 8

해설 $\{1, 2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로
조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$2^{6-3}=2^3=8$

10 **정답** ④

해설 $\{1, 2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

집합 X 는 원소1, 2, 4 를 반드시 포함하는

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합이므로

그 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

11 **정답** 24

해설 $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A \cup (B \cap C)$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$= \{2, 4, 6, 12\}$

따라서 모든 원소의 합은

$2+4+6+12=24$

12 **정답** ⑤

해설 ① $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$

$= \varnothing \cup (A \cap B)$

$= A \cap B$

② $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$

$= \varnothing$

③ $(A-B) \cap (A-C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$

$= A \cap (B^c \cap C^c)$

$= A \cap (B \cup C)^c$

$= A - (B \cup C)$

④ $(A-B) \cup (A-C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$

$= A \cap (B^c \cup C^c)$

$= A \cap (B \cap C)^c$

$= A - (B \cap C)$

⑤ $\{(A \cap B) \cup (A-B)\} \cap B$

$= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B$

$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B$

$= A \cap B \neq A$

13 **정답** 7

해설 $A \cap B^C = A - B$이므로

$n(A \cup B) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A)$에서

$15 = 5+3+n(B-A)$

$\therefore n(B-A) = 7$

14 **정답** ⑤

해설 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이고 $n(A^C \cap B^C) = 7$이므로

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^C)$

$= n(U) - n(A^C \cap B^C)$

$= 40 - 7$

$= 33$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

$33 = 25 + 20 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 12$

15 **정답** ②

해설 카드 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 카드 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면

$n(A \cup B) = 60 + 70 = 130$

이때 조건 (가)에 의하여

$n(A) + n(B) = 156$

$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 156 - 130 = 26$

따라서 두 카드 A, B 중 한 카드만 이용하는 고객의 수는

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 130 - 26 = 104$이므로

조건 (나)에 의하여 두 카드 A, B 중 한 카드만 이용하는 여자 고객의 수는

$\frac{1}{2} \cdot 104 = 52$

따라서 카드 A와 카드 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$70 - 52 = 18$

16 **정답** 50

해설 3, 4의 배수의 집합을 각각 N_3, N_4라고 하면

구하는 개수는 $n(N_3 \cup N_4)$이다.

$\therefore n(N_3 \cup N_4) = n(N_3) + n(N_4) - n(N_3 \cap N_4)$

$= n(N_3) + n(N_4) - n(N_{12})$

$= 33 + 25 - 8 = 50$

17 **정답** ⑤

해설 ⑤ $P \neq U$이면 전체집합 U의 원소 중에서

집합 P에 포함되지 않는 원소가 있으므로

'모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

18 정답 ③

해설 $P \cap Q = \varnothing$이므로 $P \subset Q^c$

따라서 명제 $p \rightarrow \sim q$는 참이다.

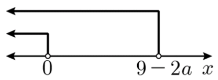
19 정답 ①

해설 주어진 조건이 참인 명제가 되려면

$\{x \mid x < 0\} \subset \{x \mid x + 2a - 9 < 0\}$,

즉, $\{x \mid x < 0\} \subset \{x \mid x < 9 - 2a\}$이어야 하므로

다음 그림에서 $9 - 2a \geq 0$ $\quad \therefore a \leq \dfrac{9}{2}$



따라서 자연수 a는 $1, 2, 3, 4$의 4개다.

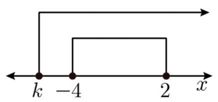
20 정답 ①

해설 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x \mid -4 \leq x \leq 2\} \subset \{x \mid x \geq k\}$이어야 하므로

다음 그림에서

$k \leq -4$



21 정답 ④

해설 명제 $q \rightarrow \sim p$의 역은 $\sim p \rightarrow q$

따라서 $\sim p \rightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q \rightarrow p$도 반드시 참이다.

22 정답 ④

해설 $P \subset Q$이므로 명제 $p \rightarrow q$가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 그 대우인

④ $\sim q \rightarrow \sim p$이다.

23 정답 ⑤

해설 조건 $p : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$

조건 $q : a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

조건 $r : a^2 + 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = -b$

ㄱ. p는 q이기 위한 필요조건 (참)

ㄴ. $\sim p : a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

$\sim q : a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이므로

$\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건 (참)

ㄷ. p이고 r이면 $a = b = 0$이므로

p이고 r는 q이기 위한 필요충분조건 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 정답 ②

해설 ㄱ. $a + ab$가 홀수이면 a는 홀수, b는 짝수이므로

$a^2 + b^2$은 홀수이다.

$\therefore q \Rightarrow r$

한편, $a = 2$, $b = 3$이면 $a + ab = 8$이므로

$a^2 + b^2$은 홀수이지만 $a + ab$는 짝수이다.

즉, 명제 $r \rightarrow q$는 거짓이다.

따라서 q는 r이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다. (참)

ㄴ. $a^2 + b^2$이 홀수이면 a는 홀수, b는 짝수이거나

a는 짝수, b는 홀수이므로 ab는 짝수이다.

$\therefore r \Rightarrow p$

한편, $a = 2$, $b = 2$이면 $a^2 + b^2 = 8$이므로

ab는 짝수이지만 $a^2 + b^2$도 짝수이다.

즉, 명제 $p \rightarrow r$는 거짓이다.

따라서 p는 r이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $q \Rightarrow r$이고 $r \Rightarrow p$이므로 $q \Rightarrow p$이다.

$\therefore \sim p \Rightarrow \sim q$

한편, $a = 2$, $b = 3$이면 $ab = 6$이므로

$a + ab$는 짝수이지만 ab도 짝수이다.

즉, 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$는 거짓이다.

따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25 정답 ②

해설 ① $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
③ $Q \not\subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이 아니다.
④ $R^C \not\subset P$이므로 $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이 아니다.
⑤ $Q \subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

26 정답 ③

해설 p가 q이기 위한 필요조건이므로 $P \supset Q$이다.
① $P-Q \neq \varnothing$
② $P^C \cup Q \neq U$
④ $P^C \cap Q^C \neq \varnothing$
⑤ $P^C \cup Q^C \neq U$
따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

27 정답 18

해설 두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p가 q이기 위한 충분조건이 되어야 하므로 $P \subset Q$이어야 한다.
$P=\{a-3,\ -3a+18\}$,
$Q=\begin{cases}\{x \mid 0 \le x \le 3a\} & (a \ge 0) \\ \{x \mid 3a \le x \le 0\} & (a<0)\end{cases}$ 이므로
(ⅰ) $a \ge 0$일 때
$Q=\{x \mid 0 \le x \le 3a\}$이므로
$a-3 \in Q$, $-3a+18 \in Q$에서
$0 \le a-3 \le 3a$, $0 \le -3a+18 \le 3a$
두 부등식을 연립하면
$3 \le a \le 6$
(ⅱ) $a<0$일 때
$Q=\{x \mid 3a \le x \le 0\}$이므로
$a-3 \in Q$, $-3a+18 \in Q$에서
$3a \le a-3 \le 0$, $3a \le -3a+18 \le 0$
두 부등식을 동시에 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)로부터 조건을 만족하는 정수 a는
3, 4, 5, 6이므로 만족하는 정수의 합은
$3+4+5+6=18$

28 정답 ③

해설 $x+4=0$, 즉 $x=-4$는 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로
명제 '$x=-4$이면 $x^2+ax+b=0$이다.'와
명제 '$x^2+ax+b=0$이면 $x=-4$이다.'가 참이다.
따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는
$x=-4$뿐이어야 하므로 $(x+4)^2=0$에서
$x^2+8x+16=0$
따라서 $a=8$, $b=16$이므로 $b-a=8$

29 정답 ⑤

해설 $\sqrt{5}$ 를 유리수라고 가정하면
$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$ (p, q는 $\boxed{\text{서로소}}$인 정수이다.)
$\therefore \sqrt{5}p=q$
양변을 제곱하면 $5p^2=q^2$이고
q^2 은 5의 배수이므로 q는 $\boxed{\text{5의 배수}}$이다.
$q=5k$ (k는 정수)라 하면
$5p^2=25k^2$
$\therefore p^2=5k^2$
따라서 p도 $\boxed{\text{5의 배수}}$이므로
이는 p, q가 $\boxed{\text{서로소}}$인 조건에 모순이다.
즉, $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.
(가) 서로소 (나) 5의 배수 (다) 5의 배수

30 정답 ④

해설 $\sqrt{n^2+2}$가 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+2}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+2)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로

$p=1$이 되어야 한다.

$\therefore n^2=\boxed{q^2-2}$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2-2=4k^2-2$이고

$(2k-1)^2<4k^2-2<(2k)^2$이므로

$(2k-1)^2<n^2<\boxed{(2k)^2}$

$2k-1<n<2k$

이때 $2k-1$, $2k$는 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2-2=4k^2+4k-1$이고

$(2k)^2<4k^2+4k-1<(2k+1)^2$이므로

$\boxed{(2k)^2}<n^2<(2k+1)^2$

$2k<n<2k+1$

이때 $2k$, $2k+1$은 연속하는 두 자연수이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sqrt{n^2+2}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는

자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+2}$은 무리수이다.

즉, $f(q)=q^2-2$, $g(k)=(2k)^2$이므로

$f(5)+g(3)=25-2+36=59$

31 정답 ③

해설 $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$

$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\boxed{\geq}0$

$\therefore x^2+y^2+z^2\boxed{\geq}xy+yz+zx$

(단, 등호는 $\boxed{x=y=z}$일 때 성립)

32 정답 16

해설 $x>0$, $y>0$이므로

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)=16\cdot\frac{x}{y}+2xy+\frac{8}{xy}+\frac{y}{x}$에서

$16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\cdot\sqrt{16\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=8$

$2xy+\frac{8}{xy}\geq 2\cdot\sqrt{2xy\cdot\frac{8}{xy}}=8$

$\therefore 16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy+\frac{8}{xy}\geq 16$

33 정답 8

해설 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x+9}{x-2}&=\frac{x(x-2)+9}{x-2}\\&=x+\frac{9}{x-2}\\&=x-2+\frac{9}{x-2}+2\\&\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{9}{x-2}}+2\\&=8\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x-2=\frac{9}{x-2}$, 즉, $x=5$일 때 성립한다.)

따라서 $\frac{x^2-2x+9}{x-2}$는 $x=5$일 때 최솟값 8을 갖는다.