공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-3회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

공통수학2

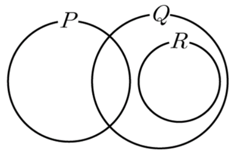
이름

01 집합 $\{1,\ 2\} \subset X \subset \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하시오.

02 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=A\cup B$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A=B$
② $A^C=B$
③ $A\cap B=\varnothing$
④ $A\cup B=U$
⑤ $A^C\cap B^C=\varnothing$

03 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하고, 벤 다이어그램으로 나타내면 아래 그림과 같다.
다음 보기 중 참인 명제만을 있는대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $q \to r$
ㄴ. (p이고 q) $\to p$
ㄷ. (p 또는 q) $\to r$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

04 다음은 $a \geq 0$, $b \geq 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다.

$\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$= \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$
$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ \boxed{(다)}\ 0$
따라서 $\boxed{(가)} \geq \boxed{(나)}$
한편, 등호는 $\boxed{(라)}$일 때 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$a+b$	$\sqrt{ab}$	$\geq$	$a=0,\ b=0$
②	$\frac{a+b}{2}$	$2\sqrt{ab}$	$\leq$	$a=0,\ b=0$
③	$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$	$\geq$	$a=b$
④	$\sqrt{ab}$	$a+b$	$\geq$	$a=b$
⑤	$2\sqrt{ab}$	$\frac{a+b}{2}$	$\leq$	$a=0,\ b=0$

05 함수 $y=\frac{2x-2}{x-2}$의 그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 평행이동 한 것이다.
ㄷ. 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

06 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{8,\ 9,\ 10\}$에 대하여 $X-A=X\cup B$를 만족시키는 집합 U의 부분집합 X의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

07 전체집합 U에 대하여 두 조건 '$p: x \leq 2$', '$q: x < -3$'의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중 조건 '$-3 \leq x \leq 2$'의 진리집합을 나타낸 것은?

① $P\cup Q$ ② $P\cap Q$
③ $P\cup Q^C$ ④ $P\cap Q^C$
⑤ $P^C\cap Q$

08 명제 '$|x-a| \geq 6$이면 $|x-1| > 2$이다.'가 참이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

09 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=5$일 때, x^2+2x+y^2+y의 최댓값을 구하시오.

10 집합 $A=\{x\,|\,x$는 40 이하의 자연수$\}$의 부분집합 X를 정의역으로 하는 함수 f를

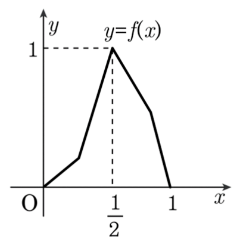
$f(x)=$(x를 5로 나누었을 때의 나머지)

로 정의하자. 이 함수 f의 치역이 $\{4\}$가 되도록 하는 정의역 X의 개수를 구하시오.

11 [2022년 3월 고2 26번 변형]
집합 $X=\{x\,|\,x\geq a\}$에서 집합 $Y=\{y\,|\,y\geq b\}$로의 함수 $f(x)=x^2-6x+2$가 일대일대응이 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

12 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 함수 $f: X\to Y$가 $a<b$이면 $f(a)>f(b)$를 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오.
(단, $a\in X$, $b\in X$)

13 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $0\leq x\leq 1$을 만족하는 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

14 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=|4x-3|+kx-2$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-8$ 또는 $k>0$　② $k<-6$ 또는 $k>2$
③ $k<-4$ 또는 $k>4$　④ $k<-2$ 또는 $k>6$
⑤ $k<0$ 또는 $k>8$

15 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$의 역함수는?

① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$　② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$
③ $3g(x)-2$　④ $3g(x)+2$
⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

16 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x+a & (x<2) \\ 2x-1 & (x \geq 2) \end{cases}$의 역함수를 g라고 하자. $g(g(3))=b$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $-\frac{10}{3}$　② $-\frac{7}{3}$　③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

17 함수 $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프와 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 교점의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3, y_4라 하자. 이때, $y_1+y_2+y_3+y_4$의 값을 구하시오.

18 유리함수 $y=\frac{7}{x-p}+5$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p의 최솟값은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

19 함수 $f(x)=\frac{x+6}{x+2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$를 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. 이때 $a+b$의 값은?

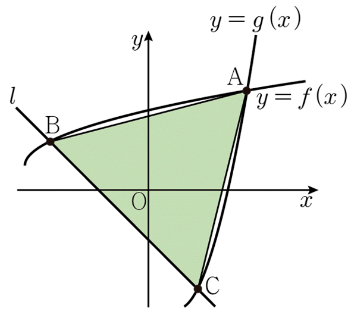
① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

20 함수 $f(x)=\frac{a}{x-3}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $a+f(b)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a \neq 0$이다.)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

21 정의역이 $\{x|x>-4\}$인
두 함수 $f(x)=\dfrac{-4x-15}{x+4}$, $g(x)=\sqrt{x+4}-4$에
대하여 $(f^{-1}\circ g)(5)\cdot(g^{-1}\circ f)(-3)$의 값을
구하시오.

22 다음 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}+1$,
$g(x)=(x-1)^2-5\ (x\geq 1)$의 그래프의 교점을 A라
하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 B$(-4,\ 2)$를
지나고 기울기가 -1인 직선 l이 함수 $y=g(x)$의
그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

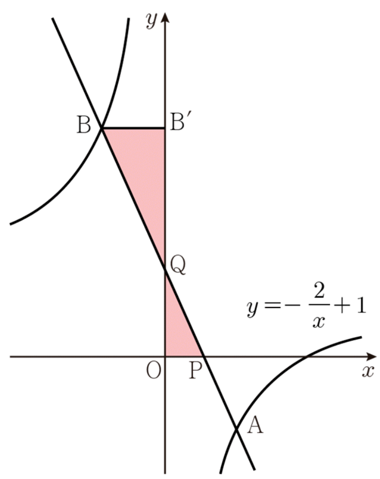


① 32 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

23 양수 a, b에 대하여 $ab+a+b=24$일 때, ab의
최댓값은?

① 4 ② 9
③ 16 ④ 25
⑤ 36

24 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}+1$ 위의
두 점 A$(1,\ -1)$, B$\left(k,\ -\dfrac{2}{k}+1\right)$ $(-2<k<0)$을
지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B$'$이라 할 때,
두 삼각형 BQB$'$, OPQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.
S_1+S_2의 최솟값을 m, 그 때의 k값을 α라 할 때,
$m+\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-1$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$
④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

25 [2018년 11월 고1 28번/4점]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 7이다.
> (나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=42$
> (다) 함수 f의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X의 어떤 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$)

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-3회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / DRE수학	

공통수학2

이름

빠른정답

01 4	02 ③	03 ②
04 ③	05 ④	06 ④
07 ④	08 7	09 10
10 255	11 45	12 15
13 ④	14 ③	15 ①
16 ②	17 8	18 ①
19 ①	20 ⑤	21 11
22 ③	23 ③	24 ③
25 7		

공통수학2_기말고사 내신대비 최종점검-3회

집합의 개념과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-	공통수학2	이름
25문제 / DRE수학			

01 정답 4

해설 $\{1, 2\} \subset X \subset \{\varnothing, 1, 2, \{1, 2\}\}$이므로
집합 X는 $\{\varnothing, 1, 2, \{1, 2\}\}$의 부분집합 중
원소 $1, 2$를 포함하는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{4-2}=4$

02 정답 ③

해설 $(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)$
$=A\cup B$
이므로 $A\cap B=\varnothing$

03 정답 ②

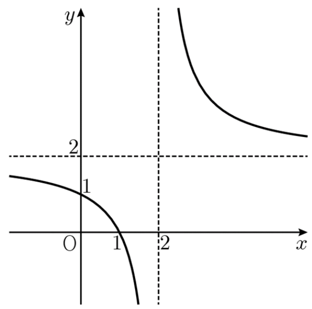
해설 ㄱ. $Q \not\subset R$이므로 명제 $q \to r$는 거짓이다.
ㄴ. $(P\cap Q)\subset P$이므로
명제 (p이고 q)$\to p$는 참이다.
ㄷ. $(P\cup Q)\not\subset R$이므로
명제 (p 또는 q)$\to r$는 거짓이다.
따라서 참인 명제는 ㄴ뿐이다.

04 정답 ③

해설 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$
$=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$
$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
한편, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

05 정답 ④

해설 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$이므로
ㄱ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 점 $(2, 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이다.
ㄷ. 함수 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같고 제$1, 2, 4$사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 정답 ④

해설 $X-A=X\cup B$에서
$(X-A)\subset X$이므로 $(X\cup B)\subset X$
즉, $X\subset(X\cup B)\subset X$이므로 $X\cup B=X$
$\therefore B\subset X$
또, $X\subset(X\cup B)$이므로 $X\subset(X-A)$
즉, $X\subset(X-A)\subset X$이므로 $X-A=X$
$\therefore X\cap A=\varnothing$, 즉 $X\subset A^C$
$\therefore B\subset X\subset A^C$
$A^C=\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로
$\{8, 9, 10\}\subset X\subset\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
즉, 집합 X는 $\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중 $8, 9, 10$을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

07

정답 ④

해설 $-3 \le x \le 2$에서 $x \le 2$이고 $x \ge -3$

p: $x \le 2$이므로

$P=\{x|x \le 2\}$

q: $x<-3$에서 $\sim q$: $x \ge -3$이므로

$Q^C=\{x|x \ge -3\}$

따라서 구하는 진리집합은

$P \cap Q^C$

08

정답 7

해설 주어진 명제가 참이 되려면

그 대우 '$|x-1| \le 2$이면 $|x-a|<6$이다.'도 참이 되어야 한다.

이때 두 조건 p, q를

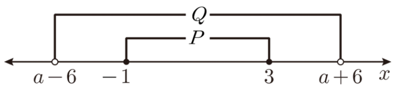
각각 p: $|x-1| \le 2$, q: $|x-a|<6$이라 하고,

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-1 \le x \le 3\}$,

$Q=\{x|a-6<x<a+6\}$이다.

명제 $p \to q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 한다.



위의 그림에서 $a-6<-1$, $a+6>3$

$\therefore\ -3<a<5$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 7개이다.

09

정답 10

해설 $x^2+y^2=5$이므로 $x^2+2x+y^2+y=2x+y+5$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \ge (2x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로

$5 \cdot 5 \ge (2x+y)^2$

$\therefore\ -5 \le 2x+y \le 5$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+2x+y^2+y의 최댓값은 10

10

정답 255

해설 $f(x)=4$이려면 $x=5k+4$ (k는 음이 아닌 정수)이어야 한다.

따라서 함수 f의 정의역 X는

$\{x|x=5k+4,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7\}$

즉, $\{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29,\ 34,\ 39\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 것이어야 하므로 구하는 정의역 X의 개수는

$2^8-1=255$

11

정답 45

해설 $f(x)=x^2-6x+2=(x-3)^2-7$에서

이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는

$a \ge 3$이어야 한다.

$a \ge 3$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y \ge f(a)\}$이고

치역이 집합 $Y=\{y|y \ge b\}$와 같아야 하므로

$b=f(a)$이다.

$$\begin{aligned} a-b &= a-f(a) \\ &= -a^2+7a-2 \\ &= -\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{41}{4} \end{aligned}$$

$a \ge 3$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\dfrac{7}{2}$일 때 $\dfrac{41}{4}$이다.

따라서 $p=4$, $q=41$이므로

$p+q=45$

12

정답 15

해설 $a<b$이면 $f(a)>f(b)$이므로

$f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$

즉, Y의 원소 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 4개를 택하여 큰 것부터 차례대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

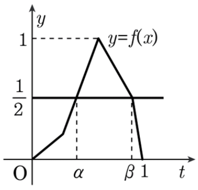
Y의 원소 6개 중에서 4개를 택하는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{C}_4=15$

13 정답 ④

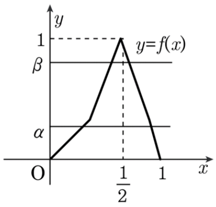
해설 $f(x)=t$라 하면



$f(f(x))=\dfrac{1}{2}$

$f(t)=\dfrac{1}{2}$

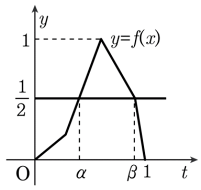
$t=\alpha$ 또는 $t=\beta\left(0<\alpha<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<\beta<1\right)$

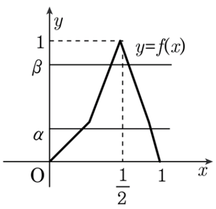


(i) $t=\alpha$일 때, $f(x)=\alpha$를 만족하는 x는 두 개

(ii) $t=\beta$일 때, $f(x)=\beta$를 만족하는 x는 두 개

따라서 방정식 $f(f(x))=\dfrac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.





14 정답 ③

해설 $f(x)=|4x-3|+kx-2$에서

(i) $x<\dfrac{3}{4}$일 때

$f(x)=(-4x+3)+kx-2$
$=(k-4)x+1$

(ii) $x\ge\dfrac{3}{4}$일 때

$f(x)=(4x-3)+kx-2$
$=(k+4)x-5$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}(k-4)x+1 & \left(x<\dfrac{3}{4}\right) & \cdots ㉠\\ (k+4)x-5 & \left(x\ge\dfrac{3}{4}\right) & \cdots ㉡\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이어야 하므로 ㉠, ㉡의 그래프의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(k+4)(k-4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$

15 정답 ①

해설 $y=f(3x-2)$의 역함수를 구하기 위하여 x, y를 바꾸면

$x=f(3y-2)$

$3y-2=f^{-1}(x)=g(x)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{3}\{g(x)+2\}$

16 정답 ②

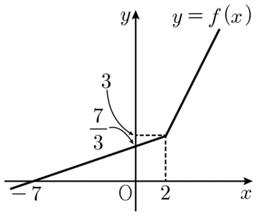
해설 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로
함수 f는 일대일대응이다. 이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 오직 하나의 값을 가져야하므로 $f(2)=3$이어야 한다.

즉, $f(2)=\frac{2}{3}+a=3$

$\therefore\ a=\frac{7}{3}$ $\cdots$ ㉠

즉, 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} & (x<2)\\ 2x-1 & (x\geq 2)\end{cases}$의 그래프는

다음 그림과 같다.



한편, $g(3)=k$라고 하면 $f(k)=3$이고
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $k\geq 2$이므로
$f(k)=2k-1=3,\ k=2$
또, $g(g(3))=g(2)=b$에서 $f(b)=2$이고 $b<2$이므로

$f(b)=\frac{1}{3}b+\frac{7}{3}=2$

$\therefore\ b=-1$ $\cdots$ ㉡

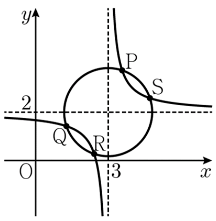
따라서 ㉠, ㉡에서 $ab=\frac{7}{3}\cdot(-1)=-\frac{7}{3}$

17 정답 8

해설 $y=\frac{2x-5}{x-3}=2+\frac{1}{x-3}$이므로

점근선의 방정식은 $x=3,\ y=2$

다음 그림과 같이 함수 $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프와 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$인 원이 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하자.



이때 두 점 P, R과 S, Q는 각각 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
따라서 네 점 P, Q, R, S의 y좌표를 각각

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$라 하면 $\frac{y_1+y_3}{2}=2,\ \frac{y_2+y_4}{2}=2$

$\therefore\ y_1+y_2+y_3+y_4=4+4=8$

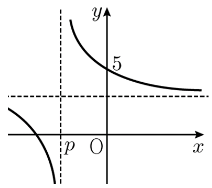
18 정답 ①

해설 함수 $y=\frac{7}{x-p}+5$의 그래프의 점근선의방정식은

$x=p,\ y=5$이다.

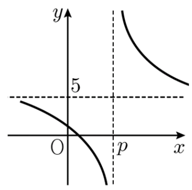
(ⅰ) $p\leq 0$일 때, 함수 $y=\frac{7}{x-p}+5$의 그래프는

다음 그림과 같으므로 p의 값과 관계없이 항상
제3사분면을 지난다.



(ⅱ) $p>0$일 때, 함수 $y=\frac{7}{x-p}+5$의 그래프가

제3사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같이
$x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 한다.



즉, $\frac{7}{-p}+5\geq 0$ $\qquad\therefore\ p\geq\frac{7}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p\geq\frac{7}{5}$

따라서 정수 p의 최솟값은 2이다.

19 정답 ①

해설 $y=\frac{x+6}{x+2}$에서 $x=\frac{-2y+6}{y-1}$이므로

$g(x)=\frac{-2x+6}{x-1}$

즉, $f(x)=1+\frac{4}{x+2},\ g(x)=-2+\frac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 3만큼
평행이동하면 $y=f(x)$와 일치하므로
$a=-3,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-3+3=0$

20 정답 ⑤

해설 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼

평행이동한 것이고, $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프는

$y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을

x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$y=\left|f(x+a)+\frac{a}{3}\right|$의 그래프가 y축에 대하여

대칭이려면 $y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의

점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.

이때 $f(x)=\frac{a}{x-3}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3$, $y=b$이므로

$y=f(x+a)+\frac{a}{3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-a$, $y=b+\frac{a}{3}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{x-3}-1$이므로

$f(b)=f(-1)=\frac{3}{-4}-1=-\frac{7}{4}$

$\therefore a+f(b)=3+\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}$

21 정답 11

해설 $g(5)=\sqrt{5+4}-4=-1$이므로

$(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(-1)$

$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$에서

$\frac{-4k-15}{k+4}=-1$, $-4k-15=-k-4$

$\therefore k=-\frac{11}{3}$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(-1)=-\frac{11}{3}$

$f(-3)=\frac{12-15}{-3+4}=-3$이므로

$(g^{-1}\circ f)(-3)=g^{-1}(f(-3))=g^{-1}(-3)$

$g^{-1}(-3)=l$이라 하면 $g(l)=-3$에서

$\sqrt{l+4}-4=-3$, $\sqrt{l+4}=1$

$l+4=1$

$\therefore l=-3$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(-3)=g^{-1}(-3)=-3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)\cdot(g^{-1}\circ f)(-3)=-\frac{11}{3}\cdot(-3)$

$=11$

22 정답 ③

해설 $f(x)=\sqrt{x+5}+1$ $(y\geq 1)$이라 하면
$(y-1)^2=x+5$, $x=(y-1)^2-5$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=(x-1)^2-5$ $(x\geq 1)$
즉, 함수 $g(x)=(x-1)^2-5$ $(x\geq 1)$은
함수 $f(x)$의 역함수이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와
역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여
대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의
교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\sqrt{x+5}+1=x$에서
$x+5=(x-1)^2$
$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)=0$
$\therefore x=4$ $(\because x\geq 1)$
$\therefore$ A$(4,\ 4)$
점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
C$(2,\ -4)$
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-4-2)^2+(2+4)^2}=6\sqrt{2}$
직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로
직선 l의 방정식은
$y=-(x+4)+2$
$x+y+2=0$
점 A$(4,\ 4)$와 직선 l 사이의 거리는
$\dfrac{|4+4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=30$

23 정답 ③

해설 $ab+a+b=24$에서 $a+b=24-ab$ ······㉠
$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a+b\geq 2\sqrt{ab}$
$24-ab\geq 2\sqrt{ab}$ (∵㉠)
$ab+2\sqrt{ab}-24\leq 0$
$(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-24\leq 0$
$(\sqrt{ab}+6)(\sqrt{ab}-4)\leq 0$
$\therefore 0<\sqrt{ab}\leq 4$ $(\because \sqrt{ab}>0)$
$\therefore 0<ab\leq 16$
따라서 ab의 최댓값은 16이다.

24 정답 ③

해설 두 점 A$(1,\ -1)$, B$\left(k,\ -\dfrac{2}{k}+1\right)$ $(-2<k<0)$을
지나는 직선의 기울기가
$\dfrac{-\dfrac{2}{k}+2}{k-1}=\dfrac{-2+2k}{k(k-1)}=\dfrac{2}{k}$
이므로 직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{k}(x-1)-1$,
즉 $y=\dfrac{2}{k}x-\dfrac{2}{k}-1$이다.
이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 P$\left(\dfrac{k}{2}+1,0\right)$,
Q$\left(0,\ -\dfrac{2}{k}-1\right)$이므로
$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{k}{2}+1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{2}{k}-1$, $\overline{\mathrm{B'Q}}=2$, $\overline{\mathrm{BB'}}=-k$
따라서 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2는
$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-k)=-k$,
$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{2}+1\right)\left(-\dfrac{2}{k}-1\right)=-\left(1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{k}{4}\right)$
이므로
$S_1+S_2=-\dfrac{5}{4}k-\dfrac{1}{k}-1$
이때 두 수 $-\dfrac{5}{4}k$, $-\dfrac{1}{k}$이 모두 양수이므로,
$(\because\ -2<k<0)$
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$S_1+S_2\geq 2\sqrt{\left(-\dfrac{5}{4}k\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{k}\right)}-1$
$=\sqrt{5}-1$
(단, 등호는 $k=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$일 때 성립)
$\therefore m+\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$

25 정답 7

해설 함수의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

$1+2+3+4+5+6+7+8=36$이므로

조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$
$+f(8)=36+n-m=42$

$\therefore n-m=6$

집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) $n=8$, $m=2$일 때
함수 f의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=7$, $m=1$일 때
함수 f의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $n=7$