

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

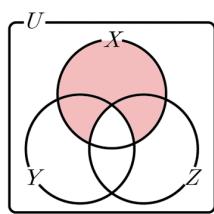
실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

- 01** 두 집합 $X = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,
 $Y = \{y | a \leq y \leq b\}$ 에서 $f: X \rightarrow Y$,
 $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재할 때,
실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

- 02** 다음 중 아래 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는
집합과 항상 같은 집합은?



- ① $X - (Y - Z)$ ② $X - (Y \cap Z)$
③ $X \cap (Y - Z)$ ④ $X \cap (Y \cup Z)$
⑤ $X \cup (Y \cap Z)$

- 03** 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $B \subset A$
② $A \subset (A \cup B)$
③ $A \cup B = A$
④ $(A \cap B) \cup B = A$
⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

- 04** 다음은 ‘ x, y 가 실수일 때, $x - y$ 가 무리수이면 x, y 중 적어도 하나는 무리수이다.’를 증명한 과정이다.
(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짹지어진 것은?

주어진 명제의 대우는

‘ x, y 가 모두 유리수이면 $x - y$ 는 유리수이다.’이다.

x, y 가 모두 유리수이면

$$x = \frac{b}{a}, y = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \text{는 정수, } a \neq 0, c \neq 0)$$

로 놓을 수 있으므로

$$x - y = \frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{(가)}{ac}$$

(가) 와 ac 는 (나)이고, $ac \neq 0$ 이므로

$$x - y = \boxed{\text{(다)}} \text{이다.}$$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로

주어진 명제도 참이다.

- ① $bc - ad$, 정수, 유리수
② $bc - ad$, 정수, 무리수
③ $bc - ad$, 무리수, 유리수
④ $ad - bc$, 정수, 유리수
⑤ $ad - bc$, 무리수, 무리수



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

05

두 집합 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{4-x}\}$,
 $B = \{(x, y) | y = -x + k\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 0$ 을
 만족시키는 정수 k 의 최솟값을 구하시오.

06

세 함수 $f(x) = -x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 2x$ 에
 대하여 $(h \circ f) \circ g$ 를 구하시오.

07

[2009년 3월 고2 8번]
 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $*$ 을

$$A * B = (A \cup B)^C \cup (A \cap B)$$

 로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른
 것은?

<보기>

- ㄱ. $A * B = B * A$
- ㄴ. $A * A = A$
- ㄷ. $\underbrace{A * A * \dots * A}_{A가 2009개} = A$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

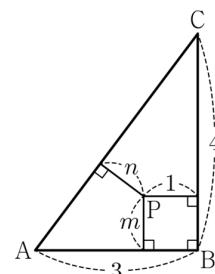
08

어느 놀이공원의 입장객 85명을 대상으로 범퍼카와
 자이로드롭을 이용한 입장객 수를 조사하였더니 각각
 40명, 50명이었다. 이때 범퍼카와 자이로드롭을 모두
 이용한 입장객 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때,
 Mm 의 값은?

- | | | |
|-------|-------|-------|
| ① 50 | ② 100 | ③ 150 |
| ④ 200 | ⑤ 250 | |

09

다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ 인 직각삼각형
 ABC의 내부의 한 점 P에서 \overline{BC} 에 내린 수선의
 길이가 1이고, \overline{AB} , \overline{AC} 에 내린 수선의 길이가 각각
 m, n 일 때, $m^2 + n^2$ 의 최솟값은?



- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① $\frac{28}{17}$ | ② $\frac{29}{17}$ | ③ $\frac{30}{17}$ |
| ④ $\frac{31}{17}$ | ⑤ $\frac{32}{17}$ | |

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

10

함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타낸 것은?

- ① $g\left(\frac{x}{3}\right)$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

11

함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 는 $x=p$ 에서 최댓값 q 를 갖는다.
이때 $p+q$ 의 값을?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

12

다음 보기 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이고
충분조건은 아닌 것을 있는 대로 고르시오.
(단, a, b 는 실수이다.)

〈보기〉

- ㄱ. $p: A \cup B = B, q: A \subset B$
ㄴ. $p: a^2 + b^2 = 0, q: a = 0$ 이고 $b = 0$
ㄷ. $p: a^2 = b^2, q: a = b$

13

2이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이
정의된 함수 f 가 있다.

<보기>

- I. $f(p) = p$ (p 가 소수)
II. $f(rs) = f(r) + f(s)$ ($r, s \in A$)

이 때, $f(1200)$ 의 값을 구하시오.

14

함수 $f(x) = \sqrt{3x-3} + 1$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의
그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른
두 점 P, Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

15

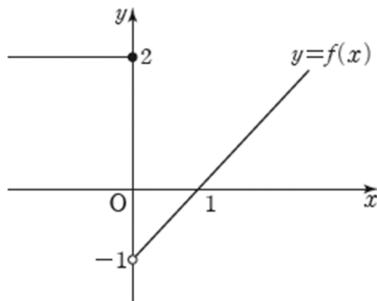
집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ 이라 하고, A_1 의 원소의 총합을 $S(A_1)$, A_2 의 원소의
총합을 $S(A_2)$, ..., A_8 의 원소의 총합을 $S(A_8)$ 이라 할 때, $S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_8)$ 의 값은?

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

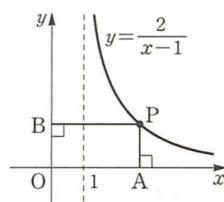
- 16** 함수 $f(x) = \begin{cases} 2 & (x \leq 0) \\ x-1 & (x > 0) \end{cases}$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k 의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

- 18** 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{2}{x-1}$ 위의 한 점 P와 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 사각형 OAPB의 둘레의 길이가 최소가 될 때, 이 사각형의 넓이는?
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



- ① 1 ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ 4

- 17** 직선 $y = -x + 6$ 이 두 유리함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y축에 가까운 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

- ㄱ. $3x_1 > x_2$
ㄴ. $y_1 - y_2 = x_2 - x_1$
ㄷ. $x_1y_2 + x_2y_1 = 2x_1x_2$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

19

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| \text{에 대하여 } a < b \text{인 두 양수 } a, b \text{가}$$

$f(a)=f(b)$ 를 만족시킬 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

$$\begin{aligned} &\neg. 0 < f(a) < 2 \\ &\neg. \frac{3}{4} < a < \frac{5}{2} \\ &\neg. \frac{f(a)+f(b)}{7} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)} \end{aligned}$$

① \neg

② \neg

③ \neg, \neg

④ \neg, \neg

⑤ \neg, \neg, \neg

20

실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a(1-x)} + 2 & (x \geq 1) \\ -2(x-1)^2 + b & (x < 1) \end{cases}$$

다음 중 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위한 상수 a, b 에 대한 조건으로 옳은 것은?

- ① $a < 0, b = 1$ ② $a > 0, b = 2$
③ $a < 0, b = 2$ ④ $a > 0, b = 1$
⑤ $a < 0, b = -1$

21

좌표평면에서

$$\text{두 함수 } f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4, g(x) = \sqrt{x+1} \text{의}$$

그래프에 대하여 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다.

ㄴ. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 곡선 $y = g(x)$ 위에 있는 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 3이다.

ㄷ. 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = 3, x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 87이다.

① \neg

② \neg, \neg

③ \neg, \neg

④ \neg, \neg

⑤ \neg, \neg, \neg

22

집합 $A = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키면서 k 개의 원소를 갖는 집합 B 의 개수를 a_k 라 하자. 이때 $a_1 + a_3$ 의 값을 구하시오.

(가) $B \subset A, n(B) \neq 0$

(나) $x \in B$ 이면 $\frac{729}{x} \in B$ 이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

- 23** 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 의
두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $A \cap B = \{1, 2, 5\}$
(나) $A^C \cap B^C = \{7, 11\}$

집합 X 의 모든 원소의 합을 $S(X)$ 라 할 때,
 $S(A) = 3S(B)$ 가 되도록 하는 두 집합 A, B 에 대하여
 $\frac{S(A)S(B)}{2}$ 의 값을 구하시오.

- 24** 함수 $f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여
방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로 다른
실근의 합을 구하시오.

- 25** 좌표평면에서 무리함수 $f(x) = 2\sqrt{x}$ 의 그래프와
원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을 각각
A, B라 하고, 함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의
그래프와 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ 가 만나는 두 점을
각각 C, D라 하자. 두 직선 AB, CD의 기울기를 각각
 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 \cdot m_2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

유형별 학습

이름

빠른정답

01 4	02 ②	03 ④
04 ①	05 5	
06 $((h \circ f) \circ g)(x) = -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$		
07 ④	08 ④	09 ⑤
10 ⑤	11 ②	12 ㄷ
13 21	14 $3\sqrt{2}$	15 ③
16 ②	17 ②	18 ②
19 ③	20 ③	21 ⑤
22 4	23 294	24 14
25 ③		



고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

실시일자	-
25문제 / dre수학	

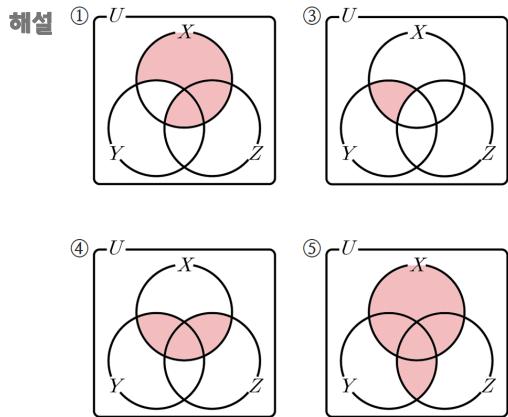
유형별 학습

이름

01 정답 4

해설 함수 $y = f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
따라서 함수 $y = f(x)$ 는 점 $(0, a), (2, b)$ 를 지나야 한다.
즉, $a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$ 이므로
 $a + b = 4$

02 정답 ②



03 정답 ④

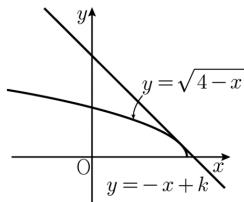
해설 $A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로
옳지 않다.

04 정답 ①

해설 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad}{ac}$ 이므로 (가)는 $bc - ad$ 이다.
따라서 $bc - ad$ 와 ac 은 정수이므로 (나)는 정수이다.
또한 위의 조건과 $ac \neq 0$ 에 의해
 $x - y$ 는 유리수이므로 (다)는 유리수이다.

05 정답 5

해설 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고
직선 $y = -x + k$ 는 기울기가 -1 이고 y절편이 k 이므로
다음 그림과 같다.



$n(A \cap B) = 0$ 이므로 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와
직선 $y = -x + k$ 가 만나지 않아야 한다.
 $y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 접할 때,
 $\sqrt{4-x} = -x + k$ 의 양변을 제곱하면
 $4 - x = x^2 - 2kx + k^2$
 $x^2 + (1 - 2k)x + k^2 - 4 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (1 - 2k)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$
 $-4k + 17 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$
따라서 $k > \frac{17}{4}$ 이므로 정수 k 의 최솟값은 5이다.

06 정답 $((h \circ f) \circ g)(x) = -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

해설 $(h \circ f)(x) = h(f(x))$
 $= h(-x^3 - 1)$
 $= -2x^3 - 2$ 이므로
 $((h \circ f) \circ g)(x) = (h \circ f)(g(x))$
 $= (h \circ f)(x^2 - 1)$
 $= -2(x^2 - 1)^3 - 2$
 $= -2x^6 + 6x^4 - 6x^2$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

07 정답 ④

해설 집합의 연산의 성질을 이해하고 연산의 규칙성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned} \neg. A * B &= (A \cup B)^C \cup (A \cap B) \\ &= (B \cup A)^C \cup (B \cap A) \\ &= B * A \quad (\text{참}) \\ \vdash. A * A &= A^C \cup A = U \quad (\text{거짓}) \\ \sqsubset. A * A * A &= U * A = U^C \cup A = A \\ &A * A * A * A = A * A * A = A \\ &\vdots \\ \text{위로부터} \\ &\underbrace{A * A * A * \cdots * A = U}_{A \text{가 짝수개}} \\ &\underbrace{A * A * A * \cdots * A = A}_{A \text{가 홀수개}} \\ \text{임을 알 수 있다. } 2009 &\text{가 홀수이므로} \\ &\underbrace{A * A * A * \cdots * A = A}_{A \text{가 } 2009 \text{개}} \quad (\text{참}) \\ \text{따라서 옳은 것은 } \neg \text{과 } \sqsubset \text{이다.} \end{aligned}$$

[참고]

연산 $*$ 에 대한 결합법칙

$A * (B * C) = (A * B) * C$ 이 성립하므로

$A * (B * C), (A * B) * C$ 는 모두

$A * B * C$ 로 나타낼 수 있다.

08 정답 ④

해설 입장객 전체의 집합을 U ,

범퍼카를 이용한 입장객의 집합을 A ,

자이로드롭을 이용한 입장객의 집합을 B 라 하면

$n(U) = 85, n(A) = 40, n(B) = 50$

범퍼카와 자이로드롭을 모두 이용한 입장객의 집합은

$A \cap B$ 이므로 $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이다.

$\therefore M = n(A) = 40$

또, $A \cup B = U$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최소이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 에서

$m = 40 + 50 - 85 = 5$

$\therefore Mm = 200$

09 정답 ⑤

해설 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA$ 에서

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 3m + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5n$$

$$\therefore 3m + 5n = 8$$

이때 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2 + 5^2)(m^2 + n^2) \geq (3m + 5n)^2$$

$$34(m^2 + n^2) \geq 8^2$$

$$\therefore m^2 + n^2 \geq \frac{64}{34} = \frac{32}{17}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{32}{17}$ 이다.

10 정답 ⑤

해설 $f(x) = 4x - 1$ 을 $y = 4x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 4y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 를 $y = 12x - 1$ 로 놓고

x, y 를 바꾸면

$$x = 12y - 1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{12}$$

$$\therefore \{f(3x)\}^{-1} = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{3}g(x)$$

〈다른풀이〉

$y = f(3x)$ 에서 x, y 를 바꾸면 $x = f(3y)$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3y \quad \therefore y = \frac{1}{3}f^{-1}(x)$$

따라서 $y = f(3x)$ 의 역함수는

$$\frac{1}{3}f^{-1}(x) = \frac{1}{3}g(x)$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

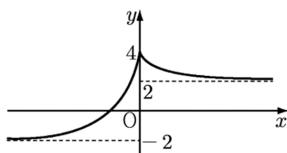
집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

11 정답 ②

해설 (i) $x < 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{-x+1} = \frac{-6}{x-1} - 2$

(ii) $x > 0$ 일 때, $y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2$

함수 $y = \frac{2x+4}{|x|+1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 0$ 일 때 최댓값 4를 가지므로 $p = 0$, $q = 4$
 $\therefore p+q=4$

12 정답 □

해설 ㄱ. $A \cup B = B$ 에서 $A \subset B$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = 0$ 이고 $b = 0$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $a^2 = b^2$ 에서 $a = \pm b$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

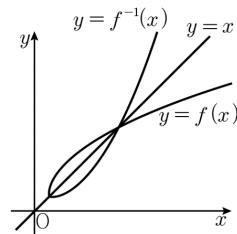
13 정답 21

해설 $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1200) &= f(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^4) + f(3) + f(5^2) \\ &= 4f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 4 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 21 \end{aligned}$$

14 정답 $3\sqrt{2}$

해설 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{3x-3} + 1 = x \text{에서 } \sqrt{3x-3} = x-1$$

양변을 제곱하면

$$3x-3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 P(1, 1), Q(4, 4) 또는 P(4, 4), Q(1, 1)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

15 정답 ③

해설 집합 A 의 부분집합을 모두 구해보면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 이다.

이때 1을 반드시 포함하는 집합은 4개, 2를 반드시 포함하는 집합은 4개, 3을 반드시 포함하는 집합은 4개이므로 원소의 총합은
 $4(1+2+3)=24$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

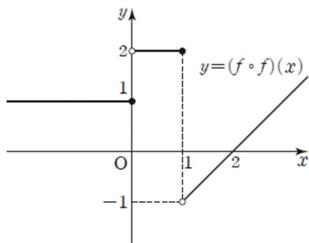
16 정답 ②

해설 $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 값은 -1 부터 커지므로 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프 중 $x > -1$ 인 부분을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

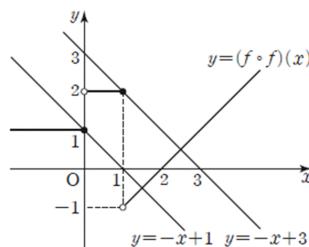
또, $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(2) = 1$ 이다.

그러므로 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



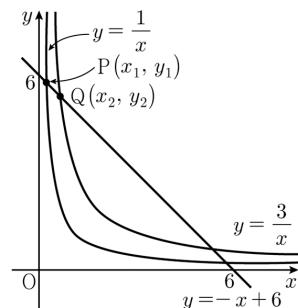
이때 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 두 점에서 만나는 정수 k 는 1, 3으로 그 합은 4이다.



17 정답 ②

해설 직선 $y = -x + 6$ 이 두 함수 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와

제 1사분면에서 만나는 점 중에서 y 축에 가까운 점을 다음 그림과 같이 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 라 하자.



⊓ 주어진 그래프에서 $y_1 > y_2$ 이므로

$$\frac{1}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

이때 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 이므로 위의 부등식의 양변에

$x_1 x_2$ 를 곱하면 $x_2 > 3x_1$ (거짓)

⊓ 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식이 $y = -x + 6$ 이므로 직선 PQ의 기울기는 -1 이다.

$$\text{즉}, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1, y_1 - y_2 = -(x_1 - x_2)$$

$$\therefore y_1 - y_2 = x_2 - x_1 \text{ (참)}$$

⊓ 원점 O에서 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 를 각각

지나는 직선의 기울기를 비교하면

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} > \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}, \frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2}{x_2}$$

$$\therefore x_2 y_1 > x_1 y_2 \quad (\because x_1 > 0, x_2 > 0)$$

이 부등식의 양변에 $x_1 y_2$ 를 각각 더하면

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 > x_1 y_2 + x_1 y_2$$

$$= 2x_1 y_2$$

$$> 2x_1 x_2 \quad (\because y_2 > x_2)$$

$$\therefore x_1 y_2 + x_2 y_1 > 2x_1 x_2 \text{ (거짓!)}$$

따라서 옳은 것은 ⊓이다.

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

18 정답 ②

해설 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{t-1}\right)$ 로 놓으면 $t > 1$ 이므로

사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2\left(t + \frac{2}{t-1}\right) &= 2\left(1+t-1 + \frac{2}{t-1}\right) \\ &\geq 2\left\{1+2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}}\right\} \\ &= 2(1+2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

이때 등호는 $t-1 = \frac{2}{t-1}$ 일 때 성립하므로

$t = \sqrt{2} + 1$ 일 때 둘레의 길이가 최소가 된다.

따라서 이때의 사각형 OAPB의 넓이는

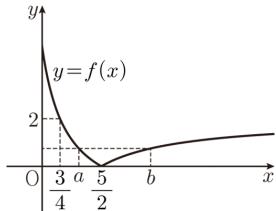
$$t \cdot \frac{2}{t-1} = (\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

19 정답 ③

해설 $f(x) = \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| = \left| \frac{7}{x+1} - 2 \right|$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$,

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음

그림과 같다.



ㄱ. 위 그림에서와 같이 $0 < f(a) = f(b) < 2$ 이다. (참)

ㄴ. 위 그림에서 알 수 있듯이 $0 < f(a) < 2$ 이기 위해서는

$$\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$$

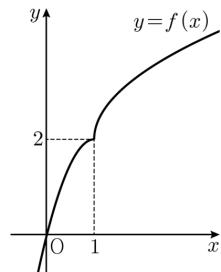
ㄷ. $f(a) = \frac{7}{a+1} - 2$, $f(b) = 2 - \frac{7}{b+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{f(a)+f(b)}{7} &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \\ &= \frac{b+1-(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 정답 ③

해설 아래 그림과 같이 $x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는
이차함수 $y = -2(x-1)^2 + b$ 의 그래프의 일부이고
증가하는 함수이다.



따라서 다음 그림과 같이 $x \geq 1$ 일 때, 무리함수
 $y = \sqrt{a(1-x)} + 2$ 의 그래프도 증가해야 함수
 $f(x)$ 가 일대일대응이 된다.

즉, $y = \sqrt{a(1-x)} + 2 = \sqrt{-a(x-1)} + 2$ 에서
 $-a > 0$ 이므로 $a < 0$

$$f(1) = b = 2$$

$$\therefore a < 0, b = 2$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

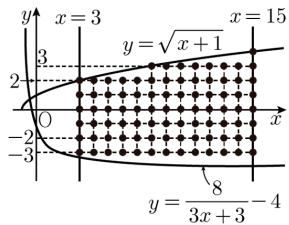
21 정답 ⑤

해설 ㄱ. 함수 $f(x) = \frac{8}{3x+3} - 4$ 의 점근선의 방정식은

$x = -1, y = -4$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는
직선 $x = -1$ 과 만나지 않는다. (참)

ㄴ. $3 \leq x \leq 15$ 일 때, 함수 $g(x) = \sqrt{x+1}$ 에서
 $2 \leq g(x) \leq 4$ 이므로 y 좌표가 정수인 점의 개수는
3이다. (참)

ㄷ. 다음 그림과 같이 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
점 $(3, -\frac{10}{3})$ 을 지나고, 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
점 $(3, 2)$ 를 지난다.



$3 \leq x \leq 15$ 에서 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4$ 는
 y 좌표가 정수인 점이 없고 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 은
 $x = 3, 8, 15$ 일 때만 y 좌표가 정수이다.

두 곡선 $y = \frac{8}{3x+3} - 4, y = \sqrt{x+1}$ 과

두 직선 $x = 3, x = 15$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는
그 경계에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의
개수는

$x = 3, 4, 5, 6, 7$ 일 때 각각 6

$x = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ 일 때 각각 7

$x = 15$ 일 때 8

따라서 조건을 만족시키는 모든 점의 개수는

$$5 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 87 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

22 정답 4

해설 조건 (가), (나)를 모두 만족시키려면 집합 B 는 공집합이
아니어야 하고, 집합 B 의 원소는 729의 양의 약수이어야
한다.

이때 729의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729이고
조건 (나)에 의하여 1과 729, 3과 243, 9와 81은 어느
하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의
원소이다.

(i) $n(B) = 1$ 인 경우는 $\{27\}$ 이므로 $a_1 = 1$

(ii) $n(B) = 3$ 인 경우는 $\{1, 27, 729\}, \{3, 27, 243\},$
 $\{9, 27, 81\}$ 이므로 $a_3 = 3$

(i), (ii)에 의하여

$$a_1 + a_3 = 1 + 3 = 4$$

23 정답 294

해설 조건 (가)에서 $S(A \cap B) = 8$

조건 (나)에서 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{7, 11\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\therefore S(A \cup B) = 48$$

$$S(A) + S(B) = S(A \cup B) + S(A \cap B) \\ = 48 + 8 = 56$$

이때 $S(A) = 3S(B)$ 이므로

$$S(A) + S(B) = 3S(B) + S(B) = 4S(B)$$

따라서 $4S(B) = 56$ 이므로

$$S(B) = 14, S(A) = 3S(B) = 42$$

$$\therefore \frac{S(A)S(B)}{2} = \frac{42 \cdot 14}{2} = 294$$

고등학교 1학년 2학기 내신 모의고사 (기말) [6회]

집합의 뜻과 표현 ~ 무리함수의 그래프

24 정답 14

해설 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 에서

$(f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$ 이므로

$(f \circ f)(x) = t$ 라면 $f(t) = t$ 이다.

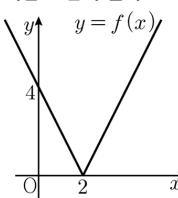
$|2t - 4| = t$ 의 양변을 제곱하면 $(2t - 4)^2 = t^2$,

$$3t^2 - 16t + 16 = 0, (t - 4)(3t - 4) = 0$$

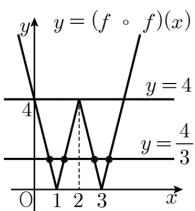
즉, $t = \frac{4}{3}$ 또는 $t = 4$ 이므로 $(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$,

$(f \circ f)(x) = 4$ 이다.

$f(x) = |2x - 4|$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3}$ 의 교점의

x 좌표가 각각 $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$ 이므로 방정식

$(f \circ f)(x) = \frac{4}{3}$ 의 서로 다른 실근의 합은

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 8$$

이고, 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 의 교점의 x 좌표가 각각

0, 2, 4이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = 4$ 의 서로 다른

실근의 합은 $0 + 2 + 4 = 6$ 이다.

따라서 방정식 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 서로 다른 실근의 합은 $8 + 6 = 14$ 이다.

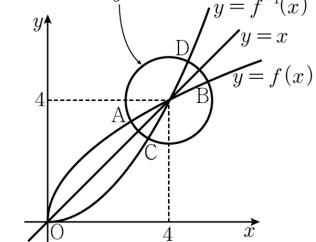
25 정답 ③

해설 원 $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

두 직선 AB, CD는 서로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$$



따라서 직선 AB의 방정식을 $y = m_1x + n$ 이라 하면

직선 CD의 방정식은 $x = m_1y + n$

$$\text{즉, } y = \frac{1}{m_1}x - \frac{n}{m_1} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } m_2 = \frac{1}{m_1} \text{ 이므로 } m_1m_2 = 1$$