

수학 영역

제2교시

1

5지선다형

1. 두 다항식

$A = 2x^2 + xy - 2y, \quad B = x^2 + xy + y$

에 대하여 $A - B$ 는? [2점]

- ① $-x^2 - xy$
- ② $-x^2 - 3y$
- ③ $x^2 - xy$
- ④ $x^2 - 3y$
- ⑤ $x^2 + y$

2. 좌표평면 위의 두 점 $(1, 0), (2, -3)$ 사이의 거리는? [2점]

- ① 3
- ② $\sqrt{10}$
- ③ $\sqrt{11}$
- ④ $2\sqrt{3}$
- ⑤ $\sqrt{13}$

3. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A + 2B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

4. 등식

$x^2 + ax - 1 = (x - 1)(x + b) + 3x$

가 x 에 대한 항등식일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

5. 좌표평면 위의 점 $(3, a)$ 를 점 $(8, 8)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(5, 5)$ 가 점 $(b, 2)$ 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

6. 다항식 $(4x - ay + 2)^2$ 의 전개식에서 x^2 의 계수와 y 의 계수가 같을 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

7. 두 이차정사각행렬 A, B 의 (i, j) 성분을 각각 a_{ij}, b_{ij} 라 할 때,

$$a_{ij} = i + 2j \quad (i = 1, 2, j = 1, 2),$$

$$b_{ij} = i \times j \quad (i = 1, 2, j = 1, 2)$$

이다. 행렬 AB 의 $(2, 1)$ 성분은? [3점]

- ① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

8. 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2-6x+4y=11 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha, y=\beta$ 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은? [3점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

10. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. $a\times b$ 가 4의 약수 또는 12의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [3점]

- ① 7
- ② 9
- ③ 11
- ④ 13
- ⑤ 15

9. x 에 대한 다항식 $x^3-(a+1)x^2+(a-3)x+8$ 을 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지가 a 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

11. 점 $(m, -m)$ 과 직선 $3x + y + 3 = 0$ 사이의 거리를 d_1 ,
점 $(0, 5)$ 와 직선 $3x + y + 3 = 0$ 사이의 거리를 d_2 라 하자.
 $d_1 < d_2$ 가 되도록 하는 정수 m 의 개수는? [3점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

12. 실수 a 에 대하여 복소수 z 를 $z = a^2 + (1+i)a - 6(2+i)$ 라
하자. z^2 이 실수가 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?
(단, $i = \sqrt{-1}$) [3점]

- ① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

13. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \geq 4n^2 \\ x^2 - nx - 6n^2 \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 10이 되도록 하는 자연수 n 의 값은? [3점]

- ① 4
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

14. 좌표평면 위에 두 점 $A(-3, 2)$, $B(2, 6)$ 이 있다. $\overline{PQ}=1$ 인 x 축 위의 두 점 P , Q 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{QB}$ 의 최솟값은?
(단, 점 P 의 x 좌표는 점 Q 의 x 좌표보다 작다.) [4점]

- ① $2\sqrt{17}$
- ② $6\sqrt{2}$
- ③ $2\sqrt{19}$
- ④ $4\sqrt{5}$
- ⑤ $2\sqrt{21}$

15. 세 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, B , C 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $AB = CA = O$
 (나) 행렬 B 의 모든 성분의 합이 3이고,
 행렬 C 의 $(1, 1)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분이 같다.

$BC = A$ 일 때, 행렬 C 의 모든 성분의 합은?
 (단, O 는 영행렬이다.) [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

16. 1학년 학생 3명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 있다.
 이 6명의 학생 중에서 5명의 학생을 선택하고 이 5명의 학생이
 모두 한 번씩 발표하도록 순서를 정하려고 할 때, 1학년 학생끼리는
 연속해서 발표하지 않도록 순서를 정하는 경우의 수는?
 (단, 발표는 한 명씩 한다.) [4점]

- ① 228 ② 234 ③ 240 ④ 246 ⑤ 252

17. 양수 a 에 대하여 $0 \leq x \leq a$ 에서
이차함수 $f(x) = -2x^2 + 16x - 7$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 0이
되도록 하는 모든 a 의 값의 합은? [4점]

- ① $\frac{17}{2}$
- ② 9
- ③ $\frac{19}{2}$
- ④ 10
- ⑤ $\frac{21}{2}$

18. x 에 대한 다항식 $x^3 + (2a + 3)x^2 + (3a + 5)x + a + 3$ 이
 $(x + b)(x + c)^2$ 으로 인수분해되도록 하는 세 실수 a, b, c 에 대하여
 $a + b + c$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?
[4점]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 와 모든 항의 계수가 실수인 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x)$ 를 $P(x)$ 로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$ 이고 나머지는 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 이다.
 (나) $f(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때의 몫은 $P(x)$ 이고 나머지는 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 이다.

$P(0) = -2$, $Q(0) = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

20. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 좌표평면 위의 서로 다른 세 점 $A(2a, 0)$, B , C 가 다음 조건을 만족시킨다.

- 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.
- $\overline{AB} = \overline{AC}$

다음은 $\overline{BC} = 2\sqrt{a^2 + 1}$ 일 때, 점 B 의 x 좌표와 y 좌표의 합을 구하는 과정이다. (단, 점 B 의 x 좌표는 점 C 의 x 좌표보다 크다.)

선분 BC 의 중점을 $M(b, c)$, 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 하면, 점 $G(0, 2)$ 는 선분 AM 을 $2:1$ 로 내분하는 점이므로 $b = -a$, $c = \boxed{\text{가}}$ 이다.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 직선 AM 의 기울기가 $-\frac{1}{a}$ 이므로

직선 BC 의 방정식은

$$y = \boxed{\text{나}} \times \{x - (-a)\} + \boxed{\text{가}}$$

이다.

점 B 의 x 좌표를 k 라 하면

점 B 의 y 좌표는 $\boxed{\text{나}} \times (k + a) + \boxed{\text{가}}$ 이다.

$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고 점 B 의 x 좌표가 점 C 의 x 좌표보다 크므로

$k = \boxed{\text{다}}$ 이다.

따라서 점 B 의 x 좌표와 y 좌표의 합은 $\boxed{\text{라}}$ 이다.

위의 (가), (라)에 알맞은 수를 각각 p , q 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$ 라 할 때, $f(p) \times g(q)$ 의 값은? [4점]

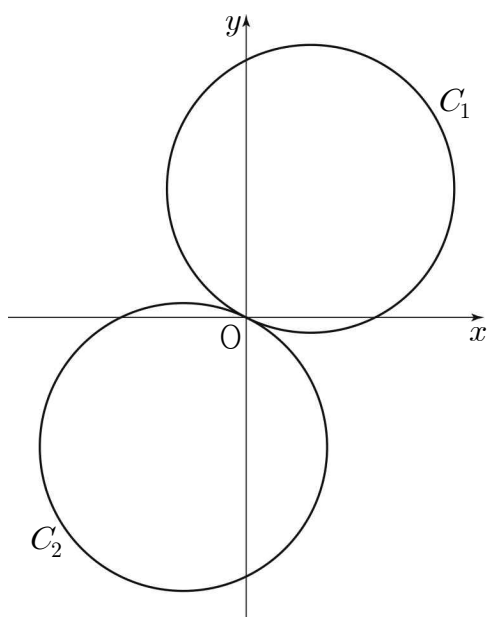
- ① -10 ② $-\frac{19}{2}$ ③ -9 ④ $-\frac{17}{2}$ ⑤ -8

21. 좌표평면 위의 제1사분면에 있는 점 A를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 원 C_1 이 있다. 원 C_1 을 원점 O에 대하여 대칭이동한 원을 C_2 라 할 때, 두 원 C_1, C_2 가 다음 조건을 만족시킨다.

삼각형 OPQ의 외접원의 중심이 선분 PQ 위에 있도록 하는 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}=6$ 이다.

원 C_2 가 x 축과 만나는 점 중 O가 아닌 점을 B라 할 때, 원 C_2 위의 점 B에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 일 때, 점 A와 직선 l 사이의 거리는? [4점]

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$



단답형

22. 직선 $y = (5 - 2k)x + 2$ 와 직선 $y = x + 3$ 이 서로 평행할 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등식 ${}_nC_2 = {}_3P_2 \times n$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$pA - B = q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 상수이다.) [3점]

26. x 에 대한 사차방정식 $(2x^2 + kx)^2 + 10(2x^2 + kx) + 16 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. [4점]

25. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다.

이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때,
양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되도록 나열하는
경우의 수를 구하시오. [3점]



27. 상수 k 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 + kx - \frac{1}{2}k^2 + 3k = 0$$
이 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

$\alpha^2 - k\beta = 12$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 원 O 가 x 축과 두 점 A, B에서 만나고, y 축과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D와 원 O 가 다음 조건을 만족시킬 때, 사각형 ACBD의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작고, 점 C의 y 좌표는 점 D의 y 좌표보다 작다.) [4점]

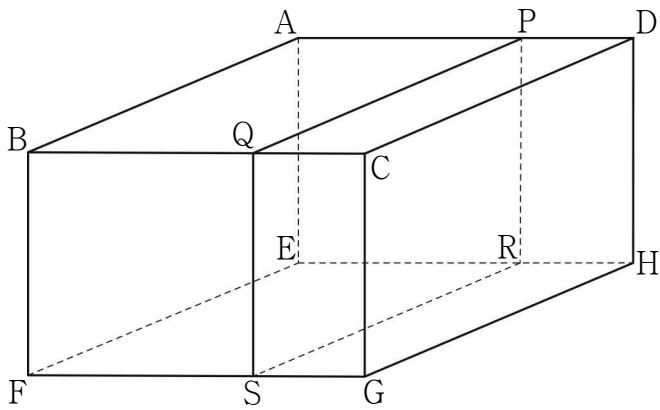
- (가) 선분 AB를 1:4로 내분하는 점은 선분 CD의 중점이다.
(나) 원 O 가 직선 $4x - 3y + 13 = 0$ 에 접한다.

29. 그림과 같이 정사각형 ABCD를 밑면으로 하는 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 선분 AD 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q를 $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{BF}$ 가 되도록 잡고, 점 P에서 선분 EH에 내린 수선의 발을 R, 점 Q에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 S라 하자. 직육면체 ABCD-EFGH의 부피를 V_1 , 직육면체 ABQP-EFSR의 부피를 V_2 라 하자.

$$(\overline{AB} + \overline{BF}) \times \overline{SD}^2 = \frac{35}{4}, \quad V_1 + V_2 = \frac{15}{4}$$

일 때, $(\overline{AB} + \overline{BF})^3 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $\overline{AB} > \overline{BF}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 두 상수 $p(p > 0)$, q 에 대하여

이차함수 $f(x) = \frac{1}{2}(x-p)^2 + q$ 가 있다.

함수 $f(x)$ 와 양수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = -f(x-m)$$

이라 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 두 실근

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 갖는다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \\ g(x) & (\alpha < x < \beta) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $h(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

x 에 대한 방정식 $h(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이면서 서로 다른 모든 실근의 합이 $4p + 2m$ 이 되도록 하는 모든 실수 t 의 값의 범위는 $g(p) < t < 5$ 이다.

$f(m) + g(m) = -4$ 일 때, $m \times (p-q)$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.

2025학년도 10월 고1 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

1	④	2	②	3	③	4	①	5	①
6	②	7	⑤	8	③	9	⑤	10	④
11	①	12	④	13	③	14	④	15	②
16	⑤	17	④	18	②	19	⑤	20	③
21	①	22	2	23	13	24	6	25	144
26	18	27	20	28	40	29	133	30	16

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A - B = (2x^2 + xy - 2y) - (x^2 + xy + y) = x^2 - 3y$$

2. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $(1, 0)$, $(2, -3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{10}$$

3. [출제의도] 행렬의 덧셈 이해하기

$$\begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+2 & 0+4 \\ 3+0 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로 구하는 모든 성분의 합은 $4+4+3+3=14$

4. [출제의도] 항등식 이해하기

$$\text{등식 } x^2 + ax - 1 = (x-1)(x+b) + 3x \text{가}$$

x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1+a-1=0+3$ 에서 $a=3$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $-1=-b$ 에서 $b=1$

따라서 $a+b=4$

5. [출제의도] 평행이동 이해하기

점 $(3, a)$ 를 점 $(8, 8)$ 로 옮기는 평행이동은

x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 $8-a$ 만큼 옮기는 평행이동이다.

점 $(5, 5)$ 를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로

$8-a$ 만큼 평행이동한 점 $(10, 13-a)$ 의 좌표가

$(b, 2)$ 이므로 $b=10$, $13-a=2$ 에서 $a=11$

따라서 $a+b=21$

6. [출제의도] 곱셈공식 이해하기

$$(4x - ay + 2)^2 = 16x^2 + a^2y^2 + 4 - 8axy - 4ay + 16x$$

x^2 의 계수는 16, y 의 계수는 $-4a$ 이므로

$$16 = -4a \text{에서 } a = -4$$

7. [출제의도] 행렬의 뜻 이해하기

$$a_{ij} = i + 2j, \quad b_{ij} = i \times j \text{에서}$$

$$a_{21} = 4, \quad a_{22} = 6, \quad b_{11} = 1, \quad b_{21} = 2 \text{이므로}$$

$$\text{행렬 } AB \text{의 } (2, 1) \text{ 성분은 } a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} = 16$$

8. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases} x - y = -3 & \cdots \text{㉠} \\ x^2 - 6x + 4y = 11 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $y = x + 3$

㉡에 $y = x + 3$ 을 대입하면

$$x^2 - 6x + 4(x + 3) = 11, \quad (x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1, \quad y = 4$$

따라서 $\alpha + \beta = 5$

9. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$$f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (a-3)x + 8 \text{이라 하면}$$

나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} f(a) &= a^3 - (a+1)a^2 + (a-3)a + 8 \\ &= -3a + 8 = a \end{aligned}$$

따라서 $a = 2$

10. [출제의도] 합의 법칙 이해하기

(i) $a \times b$ 가 4의 약수인 경우

$a \times b = 1$ 이 되는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1)$ 의 1가지

$a \times b = 2$ 가 되는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 2), (2, 1)$ 의 2가지

$a \times b = 4$ 가 되는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 의 3가지

그러므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1 + 2 + 3 = 6$$

(ii) $a \times b$ 가 12의 배수인 경우

$a \times b = 12$ 가 되는 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$ 의 4가지

$a \times b = 24$ 가 되는 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 6), (6, 4)$ 의 2가지

$a \times b = 36$ 이 되는 순서쌍 (a, b) 는 $(6, 6)$ 의 1가지

그러므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4 + 2 + 1 = 7$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b) 의

$$\text{개수는 } 6 + 7 = 13$$

11. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리 이해하기

점 $(m, -m)$ 과 직선 $3x + y + 3 = 0$ 사이의 거리

$$d_1 \text{은 } d_1 = \frac{|3 \times m + 1 \times (-m) + 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|2m + 3|}{\sqrt{10}}$$

점 $(0, 5)$ 와 직선 $3x + y + 3 = 0$ 사이의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|3 \times 0 + 1 \times 5 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

$$d_1 < d_2 \text{이므로 } \frac{|2m + 3|}{\sqrt{10}} < \frac{8}{\sqrt{10}} \text{에서}$$

$$|2m + 3| < 8, \quad -8 < 2m + 3 < 8$$

그러므로 $-\frac{11}{2} < m < \frac{5}{2}$ 를 만족시키는 정수 m 은

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

따라서 구하는 정수 m 의 개수는 8

12. [출제의도] 복소수의 뜻과 연산 이해하기

$$z = a^2 + (1+i)a - 6(2+i) = (a^2 + a - 12) + (a-6)i$$

z^2 이 실수가 되려면

$$a^2 + a - 12 = 0 \text{ 또는 } a - 6 = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$a^2 + a - 12 = (a+4)(a-3) = 0 \text{에서}$$

$$a = -4 \text{ 또는 } a = 3$$

$$a - 6 = 0 \text{에서 } a = 6$$

따라서 z^2 이 실수가 되도록 하는 모든 실수 a 의

$$\text{값의 합은 } -4 + 3 + 6 = 5$$

13. [출제의도] 연립이차부등식을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{cases} x^2 \geq 4n^2 & \cdots \text{㉠} \\ x^2 - nx - 6n^2 \leq 0 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

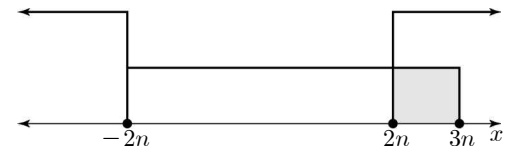
$$\text{㉠에서 } x^2 - 4n^2 \geq 0, \quad (x+2n)(x-2n) \geq 0$$

$$\text{㉡에서 } (x+2n)(x-3n) \leq 0$$

n 이 자연수이므로

$$x \leq -2n \text{ 또는 } x \geq 2n, \quad -2n \leq x \leq 3n$$

$$\text{그러므로 } x = -2n \text{ 또는 } 2n \leq x \leq 3n$$



연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$1 + (3n - 2n + 1) = n + 2$$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가

10이 되도록 하는 자연수 n 의 값은 8

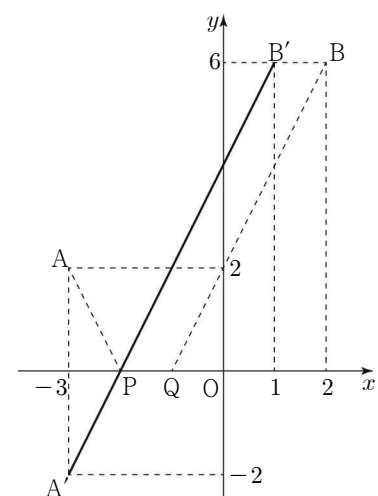
14. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라

하면 점 A' 의 좌표는 $(-3, -2)$ 이다.

점 B 를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점을

B' 이라 하면 점 B' 의 좌표는 $(1, 6)$ 이다.



$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \quad \overline{QB} = \overline{PB'} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PB'} \geq \overline{A'B'}$$

점 P 가 선분 $A'B'$ 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{QB}$ 는

최소이고, 그 값은

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\{1 - (-3)\}^2 + \{6 - (-2)\}^2} = 4\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{5}$

15. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 문제해결하기

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{라 하자.}$$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6b_{11} & 6b_{12} \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

이므로 $b_{11} = b_{12} = 0$ 이고,

$$\begin{aligned} CA &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6c_{12} & 0 \\ 6c_{22} & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

이므로 $c_{12} = c_{22} = 0$ 이다.

$$\text{조건 (나)에서 } b_{21} + b_{22} = 3, \quad c_{11} = c_{21}$$

$BC = A$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 3 - b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3c_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

에서 $c_{11} = 2$

$$\text{그러므로 } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 C 의 모든 성분의 합은 4

16. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

(i) 발표하는 5명의 학생 중 1학년 학생이 3명인 경우

1학년 학생 3명의 발표 순서를 정하는

경우의 수는 $3!=6$
 1학년 학생의 발표 순서를 ㉠, ㉡, ㉢이라 하고
 발표 순서를 그림으로 나타내면 1학년
 학생끼리는 연속해서 발표하지 않아야 하므로
 V로 표시된 두 곳에서 2학년 또는 3학년 학생이
 발표해야 한다.

$$\textcircled{1} \vee \textcircled{2} \vee \textcircled{3}$$

2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명 중에서 2명을
 선택하여 발표 순서를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2=6$$

그러므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

(ii) 발표하는 5명의 학생 중 1학년 학생이 2명인
 경우

1학년 학생 3명 중에서 2명의 학생을 선택하는
 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명 모두
 발표해야 하므로 이 3명의 발표 순서를 정하는
 경우의 수는 $3!=6$

2학년 학생과 3학년 학생의 발표 순서를
 ㉣, ㉤, ㉥라 하고 발표 순서를 그림으로 나타내면
 1학년 학생끼리는 연속해서 발표하지 않아야
 하므로 V로 표시된 네 곳 중 두 곳에서
 1학년 학생이 발표해야 한다.

$$\vee \textcircled{A} \vee \textcircled{B} \vee \textcircled{C} \vee$$

1학년 학생 2명의 발표 순서를 정하는
 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 6 \times 12 = 216$

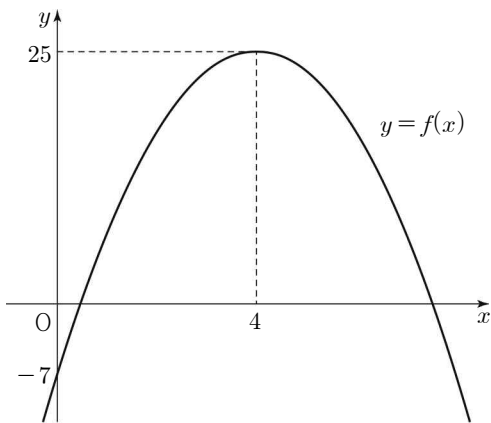
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$36+216=252$$

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

$$f(x) = -2x^2 + 16x - 7 = -2(x-4)^2 + 25$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $0 < a \leq 4$ 일 때

$0 \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0) = -7$
 이므로

함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 0이라면
 $f(a) = 7$ 이어야 한다.

$$f(a) = -2a^2 + 16a - 7 = 7 \text{에서}$$

$$2(a-1)(a-7) = 0, a = 1$$

(ii) $a > 4$ 일 때

$0 \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(4) = 25$
 이므로

함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 0이라면
 $f(a) = -25$ 이어야 한다.

$$f(a) = -2a^2 + 16a - 7 = -25 \text{에서}$$

$$2(a+1)(a-9) = 0, a = 9$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 양수 a 의 값의
 합은 $1+9=10$

18. [출제의도] 인수분해를 활용하여 문제해결하기

다항식 $x^3 + (2a+3)x^2 + (3a+5)x + a+3$ 을

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a+3 & 3a+5 & a+3 \\ & & -1 & -2a-2 & -a-3 \\ \hline & 1 & 2a+2 & a+3 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + (2a+3)x^2 + (3a+5)x + a+3$$

$$= (x+1)\{x^2 + (2a+2)x + a+3\}$$

(i) 다항식 $x^2 + (2a+2)x + a+3$ 이 $x+1$ 을 인수로
 가질 때

인수정리에 의하여

$$(-1)^2 + (2a+2)(-1) + a+3 = 0 \text{에서 } a=2$$

$$(x+1)\{x^2 + (2a+2)x + a+3\}$$

$$= (x+1)(x^2 + 6x + 5) = (x+5)(x+1)^2$$

에서 $b=5, c=1$

$$\text{그러므로 } a+b+c = 2+5+1 = 8$$

(ii) 다항식 $x^2 + (2a+2)x + a+3$ 이 $x+1$ 을 인수로
 갖지 않을 때

다항식 $x^2 + (2a+2)x + a+3$ 이 완전제곱식이어야
 하므로 $(a+1)^2 = a+3, (a+2)(a-1) = 0$ 에서

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

(a) $a = -2$ 일 때

$$(x+1)\{x^2 + (2a+2)x + a+3\}$$

$$= (x+1)(x^2 - 2x + 1) = (x+1)(x-1)^2$$

에서 $b=1, c=-1$

$$\text{그러므로 } a+b+c = -2+1+(-1) = -2$$

(b) $a = 1$ 일 때

$$(x+1)\{x^2 + (2a+2)x + a+3\}$$

$$= (x+1)(x^2 + 4x + 4) = (x+1)(x+2)^2$$

에서 $b=1, c=2$

$$\text{그러므로 } a+b+c = 1+1+2 = 4$$

(i), (ii)에 의하여 $M=8, m=-2$ 이므로

$$M+m = 6$$

19. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의하여 $f(x)$ 를 $P(x)$ 로

나누었을 때와 $f(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때의

나머지가 모두 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 이므로

다항식 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 의 차수는 두 다항식 $P(x)$,
 $Q(x)$ 의 차수보다 작다. ... ㉠

$$f(x) = P(x)Q(x) + P(x) + \{Q(x)\}^2$$

(i) $Q(x)$ 의 차수가 2 이상일 때

$P(x)$ 의 차수는 1 이하이므로 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 의
 차수가 4 이상이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $Q(x)$ 의 차수가 1일 때

$P(x)$ 의 차수가 2이고 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 은
 상수이다.

$P(x), Q(x)$ 의 최고차항의 계수를 각각 p, q 라
 하자.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $P(x)Q(x)$ 의
 최고차항의 계수와 같으므로 $pq=1$

$P(x) + \{Q(x)\}^2$ 은 상수이므로 $p+q^2=0$

그러므로 $q^3 = -1$ 에서 $q = -1, p = -1$

$$P(0) = -2, Q(0) = 1 \text{이므로}$$

$$P(x) = -x^2 + ax - 2 \text{ (} a \text{는 상수)}, Q(x) = -x + 1$$

$P(x) + \{Q(x)\}^2$ 은 상수이고

$$P(x) + \{Q(x)\}^2 = -x^2 + ax - 2 + (-x+1)^2 \\ = (a-2)x - 1$$

이므로 $a=2$ 에서 $P(x) = -x^2 + 2x - 2$

$$\text{그러므로 } f(x) = (-x^2 + 2x - 2)(-x + 1) - 1$$

(iii) $Q(x)$ 가 0이 아닌 상수일 때

$P(x)$ 의 차수가 3이므로 $P(x) + \{Q(x)\}^2$ 의
 차수가 3이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(2) = 1$

20. [출제의도] 선분의 내분점을 활용하여 문제해결하기

선분 BC의 중점을 M(b, c), 삼각형 ABC의

무게중심을 G라 하면, 점 G(0, 2)는 선분 AM을

2:1로 내분하는 점이므로

$$\left(\frac{2 \times b + 1 \times 2a}{2+1}, \frac{2 \times c + 1 \times 0}{2+1} \right) \text{에서}$$

$$2a+2b=0, 2c=6$$

$$b=-a, c=\boxed{3} \text{이다.}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \text{이므로 직선 AM과 직선 BC는 서로}$$

수직이고, 직선 AM의 기울기가 $-\frac{1}{a}$ 이므로

직선 BC의 기울기는 a 이다.

직선 BC는 기울기가 a 이고 점 M($-a, 3$)을 지나므로

직선 BC의 방정식은

$$y = \boxed{a} \times \{x - (-a)\} + \boxed{3} \text{이다.}$$

점 B의 x 좌표를 k 라 하면

점 B는 직선 BC 위의 점이므로

$$\text{점 B의 } y \text{좌표는 } \boxed{a} \times (k+a) + \boxed{3} \text{이다.}$$

$$B(k, a(k+a)+3), M(-a, 3) \text{이므로}$$

$$\overline{BM} = \sqrt{(-a-k)^2 + (3-ak-a^2-3)^2} \\ = \sqrt{(a+k)^2 + a^2(a+k)^2} \\ = \sqrt{(a+k)^2(a^2+1)}$$

$$\text{이고, } \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \sqrt{a^2+1} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(a+k)^2(a^2+1)} = \sqrt{a^2+1}$$

$$\sqrt{(a+k)^2} = 1 \text{에서 } |a+k| = 1 \text{이므로}$$

$$k = -a+1 \text{ 또는 } k = -a-1$$

점 B의 x 좌표가 점 C의 x 좌표보다 크므로

점 B의 x 좌표는 점 M의 x 좌표보다 크다.

$$\text{그러므로 } k = \boxed{-a+1} \text{이다.}$$

점 B의 y 좌표는 $a(-a+1) + a^2 + 3 = a+3$ 이므로

점 B의 x 좌표와 y 좌표의 합은

$$(-a+1) + (a+3) = \boxed{4} \text{이다.}$$

따라서 $p=3, q=4$ 이고

$$f(a) = a, g(a) = -a+1 \text{이므로}$$

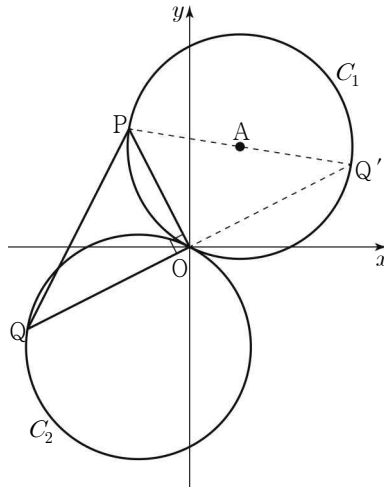
$$f(p) \times g(q) = 3 \times (-4+1) = -9$$

21. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 추론하기

삼각형 OPQ의 외접원의 중심이 선분 PQ 위에

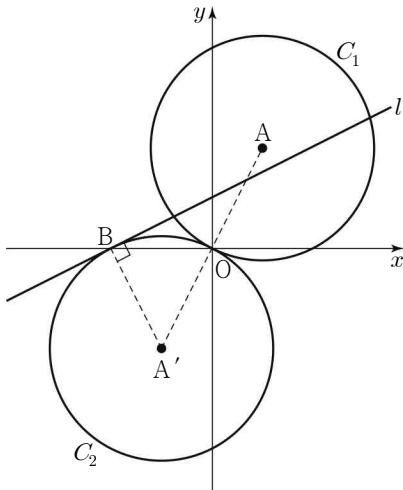
있으려면 삼각형 OPQ는 $\angle POQ = 90^\circ$ 인

직각삼각형이어야 한다.



점 Q를 원점 O에 대하여 대칭이동한 점을 Q'이라
 하면 점 Q'은 원 C_1 위의 점이고

$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$, $\angle POQ' = 180^\circ - \angle POQ = 90^\circ$
 이므로 두 삼각형 OPQ , OPQ' 은 서로 합동이다.
 그러므로 $\overline{PQ'} = \overline{PQ} = 6$
 또한 원 C_1 은 직각삼각형 OPQ' 의 외접원이므로
 선분 PQ' 은 원 C_1 의 지름이다.
 원 C_1 의 중심의 좌표를 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)이라
 하면 원 C_1 이 원점을 지나므로
 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3, a^2 + b^2 = 9 \dots \textcircled{1}$



원 C_2 의 중심을 A' 이라 하면 점 A' 은 점 A 를
 원점 O 에 대하여 대칭이동한 점이므로
 점 A' 의 좌표는 $(-a, -b)$ 이다.
 원 C_2 의 방정식은 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2$ 이므로
 점 B 의 좌표는 $(-2a, 0)$

직선 l 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이고 직선 l 과 직선 BA' 이
 서로 수직이므로 직선 BA' 의 기울기는 -2 이다.
 $\frac{-b-0}{-a-(-2a)} = -\frac{b}{a} = -2$ 에서 $b = 2a \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = \frac{3}{5}\sqrt{5}, b = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

직선 l 의 방정식은 $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$

즉, $5x - 10y + 6\sqrt{5} = 0$

따라서 점 $A\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$ 와 직선 l 사이의

거리는 $\frac{|3\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5}|}{\sqrt{5^2 + (-10)^2}} = \frac{3}{5}$

22. [출제의도] 두 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y = (5-2k)x + 2$ 와 직선 $y = x + 3$ 이
 서로 평행하므로 두 직선의 기울기는 같다.
 $5-2k = 1$ 에서 $k = 2$

23. [출제의도] 순열과 조합 이해하기

등식 ${}_nC_2 = {}_3P_2 \times n$ 에서

$$\frac{n \times (n-1)}{2!} = 3 \times 2 \times n, n(n-1) = 12n$$

n 은 자연수이므로 $n-1 = 12$ 에서 $n = 13$

24. [출제의도] 행렬의 실수배 이해하기

$$pA - B = \begin{pmatrix} 4p & 3p \\ 3p & 4p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p-8 & 3p-2 \\ 3p-2 & 4p-8 \end{pmatrix}$$

이고 $q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$ 이므로

$4p-8=0$ 에서 $p=2$,

$3p-2=q$ 에서 $q=4$

따라서 $p+q=6$

25. [출제의도] 순열 이해하기

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가
 되려면 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두
 홀수이어야 한다.

홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 2장의 카드를
 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

양 끝에 놓인 카드 사이에 나머지 4장의 카드를
 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_4 = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$

26. [출제의도] 사차방정식을 활용하여 문제해결하기

$2x^2 + kx = X$ 라 하면

$$(2x^2 + kx)^2 + 10(2x^2 + kx) + 16 = 0 \text{에서}$$

$$X^2 + 10X + 16 = 0, (X+2)(X+8) = 0$$

$$(2x^2 + kx + 2)(2x^2 + kx + 8) = 0$$

모든 실수 x 에 대하여

$$(2x^2 + kx + 2) - (2x^2 + kx + 8) = -6 \neq 0 \text{이므로}$$

연립방정식

$$\begin{cases} 2x^2 + kx + 2 = 0 \\ 2x^2 + kx + 8 = 0 \end{cases}$$

의 실근은 존재하지 않는다. $\dots \textcircled{1}$

두 이차방정식 $2x^2 + kx + 2 = 0, 2x^2 + kx + 8 = 0$ 의
 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$D_1 = k^2 - 4 \times 2 \times 2 = k^2 - 16,$$

$$D_2 = k^2 - 4 \times 2 \times 8 = k^2 - 64$$

이므로 $D_1 > D_2$

$\textcircled{1}$ 에 의하여 사차방정식

$$(2x^2 + kx)^2 + 10(2x^2 + kx) + 16 = 0 \text{의}$$

서로 다른 실근의 개수가 2이기 위해서는

$$D_1 > 0, D_2 < 0 \text{이어야 한다.}$$

$$D_1 = k^2 - 16 > 0 \text{에서 } k < -4 \text{ 또는 } k > 4,$$

$$D_2 = k^2 - 64 < 0 \text{에서 } -8 < k < 8$$

그러므로 $-8 < k < -4$ 또는 $4 < k < 8$

따라서 구하는 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$5 + 6 + 7 = 18$$

27. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 문제해결하기

이차방정식 $x^2 + kx - \frac{1}{2}k^2 + 3k = 0$ 이 서로 다른

두 실근을 가지므로 이차방정식

$$x^2 + kx - \frac{1}{2}k^2 + 3k = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D = k^2 - 4\left(-\frac{1}{2}k^2 + 3k\right) = 3k(k-4) > 0$$

$$k < 0 \text{ 또는 } k > 4 \dots \textcircled{1}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = -\frac{1}{2}k^2 + 3k$$

또한 α 는 이차방정식 $x^2 + kx - \frac{1}{2}k^2 + 3k = 0$ 의

한 근이므로

$$\alpha^2 + k\alpha - \frac{1}{2}k^2 + 3k = 0 \text{에서 } \alpha^2 = -k\alpha + \frac{1}{2}k^2 - 3k$$

$$\alpha^2 - k\beta = -k\alpha + \frac{1}{2}k^2 - 3k - k\beta$$

$$= -k(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}k^2 - 3k$$

$$= k^2 + \frac{1}{2}k^2 - 3k$$

$$= \frac{3}{2}k^2 - 3k = 12$$

$$\text{에서 } \frac{3}{2}k^2 - 3k - 12 = 0, (k+2)(k-4) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } k = -2$$

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -8$$

$$\text{따라서 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-8) = 20$$

28. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 추론하기

선분 AB 는 x 축 위에 있으므로 선분 AB 를

1:4로 내분하는 점은 x 축 위의 점이고,

선분 CD 는 y 축 위에 있으므로 선분 CD 의 중점은
 y 축 위의 점이다.

x 축 위에 있고 동시에 y 축 위에 있는 점은

원점 O 뿐이므로 $\overline{AO} : \overline{BO} = 1 : 4, \overline{CO} = \overline{DO}$ 이다.

직선 AB 는 선분 CD 의 수직이등분선이므로

선분 AB 는 원 O 의 지름이다.

점 O 는 두 점 A, B 를 1:4로 내분하는 점이므로

점 A 의 좌표를 $A(-a, 0)$ ($a > 0$)이라 하면 점 B 의
 좌표는 $B(4a, 0)$ 이다.

선분 AB 가 원 O 의 지름이므로 원 O 의 중심의

좌표는 $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$ 이고 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}a$ 이다.

조건 (나)에 의하여 원 O 의 중심 $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$ 과

직선 $4x - 3y + 13 = 0$ 사이의 거리는 $\frac{5}{2}a$ 이다.

$$\frac{|6a + 13|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{2}a, |6a + 13| = \frac{25}{2}a \text{에서}$$

$a = 2$ 이므로 $A(-2, 0), B(8, 0)$ 이고

원 O 의 방정식은 $(x-3)^2 + y^2 = 25$ 이다.

두 점 C, D 는 원 O 와 y 축과의 교점이므로

$$9 + y^2 = 25 \text{에서 } y = 4 \text{ 또는 } y = -4$$

그러므로 $C(0, -4), D(0, 4)$ 이다.

따라서 사각형 $ACBD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40$$

29. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

$\overline{AB} = a, \overline{BF} = b$ ($a > b$)라 하자.

직사각형 $RSQH$ 에서 $\overline{SG} = a - b, \overline{GH} = a$ 이므로

$$\overline{SH}^2 = \overline{SG}^2 + \overline{GH}^2$$

$$= (a-b)^2 + a^2$$

$$= 2a^2 - 2ab + b^2$$

직각삼각형 DHS 에서

$$\overline{SD}^2 = \overline{SH}^2 + \overline{DH}^2$$

$$= (2a^2 - 2ab + b^2) + b^2$$

$$= 2(a^2 - ab + b^2)$$

이므로

$$(\overline{AB} + \overline{BF}) \times \overline{SD}^2 = (a+b) \times 2(a^2 - ab + b^2) = 2(a^3 + b^3) = \frac{35}{4}$$

$$\text{에서 } a^3 + b^3 = \frac{35}{8}$$

$$V_1 = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BF} = a^2b,$$

$$V_2 = \overline{AB} \times \overline{BQ} \times \overline{BF} = ab^2$$

$$\text{이므로 } V_1 + V_2 = a^2b + ab^2 = \frac{15}{4}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{AB} + \overline{BF})^3 &= (a+b)^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2) \\
&= \frac{35}{8} + \frac{45}{4} = \frac{125}{8}
\end{aligned}$$

이므로 $p=8, q=125$

따라서 $p+q=133$

30. [출제의도] 이차함수를 이용하여 추론하기

$q \geq 0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) \geq 0, g(x) \leq 0$ 가 되어 방정식 $f(x)=g(x)$ 는

서로 다른 두 실근을 갖지 않으므로 $q < 0$

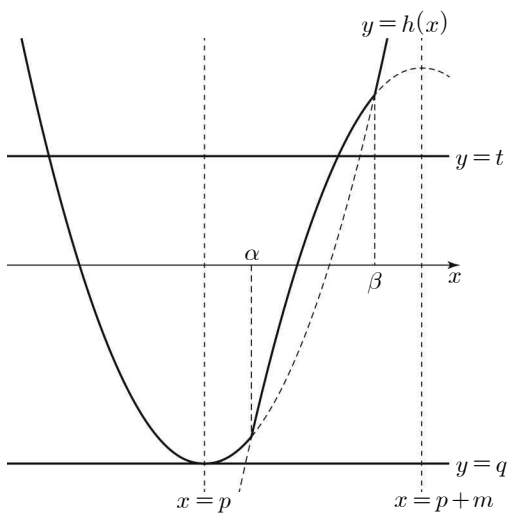
방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 두 실근 α, β 를

가지므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는

서로 다른 두 점 $P(\alpha, f(\alpha)), Q(\beta, f(\beta))$ 에서

만난다.

(i) $\alpha \geq p$ 일 때



$t > q$ 인 모든 실수 t 에 대하여 방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$t > q$ 인 실수 t 에 대하여

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

두 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 ,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

두 교점의 x 좌표를 x_3, x_4 라 하자.

이때 $t > q$ 인 모든 실수 t 에 대하여

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

두 교점의 x 좌표의 합은 $2p$ 이므로

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 두 실근의 합

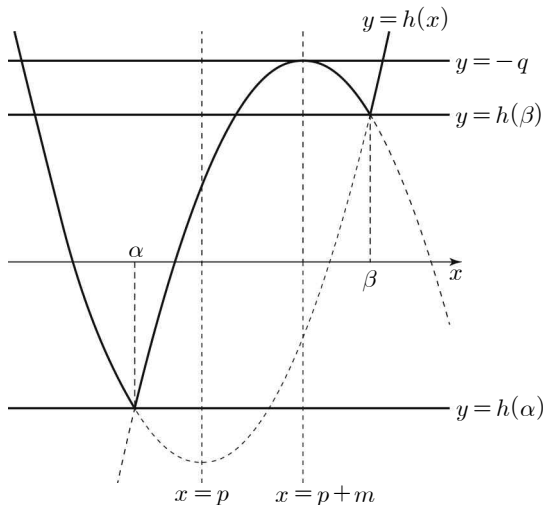
x_1+x_2 는

$$x_1+x_2 \leq x_3+x_4=2p$$

$p > 0, m > 0$ 이므로 $x_1+x_2 < 4p+2m$ 이 되어

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha < p$ 일 때



$h(\alpha) < t < h(\beta)$ 또는 $t > -q$ 인 모든 실수 t 에

대하여 방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 실근의

개수는 2이고,

$t=h(\beta)$ 또는 $t=-q$ 인 실수 t 에 대하여

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는

3이고,

$h(\beta) < t < -q$ 인 모든 실수 t 에 대하여

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는

4이다.

(a) $h(\alpha) < t < h(\beta)$ 또는 $t > -q$ 일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 두 실근의 합은

$2p$ 보다 작거나 같으므로 조건을 만족시키지

않는다.

(b) $t=h(\beta)$ 또는 $t=-q$ 일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 세 실근의 합은

$3p+m$ 보다 작거나 같으므로 조건을

만족시키지 않는다.

(c) $h(\beta) < t < -q$ 일 때

함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

네 교점의 x 좌표를 작은 수부터 차례로

x_5, x_6, x_7, x_8 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

두 교점의 x 좌표는 x_5, x_8 이고

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는

두 교점의 x 좌표는 x_6, x_7 이다.

이때 $x_5+x_8=2p, x_6+x_7=2p+2m$ 이므로

방정식 $h(x)=t$ 의 서로 다른 네 실근의 합

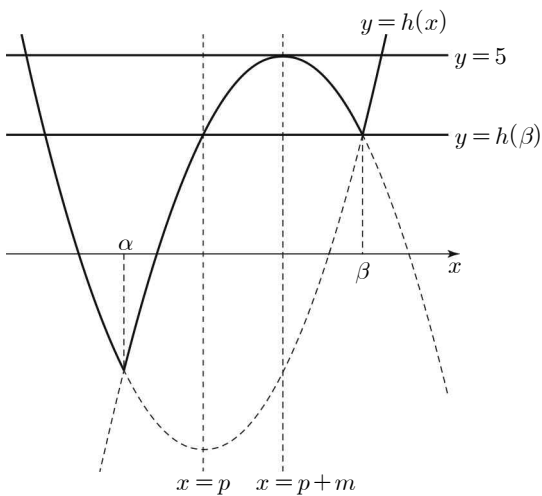
$x_5+x_6+x_7+x_8$ 은

$$x_5+x_6+x_7+x_8=4p+2m$$

그러므로 조건을 만족시키는 모든 실수 t 의

값의 범위는 $h(\beta) < t < -q$

조건에 의하여 $h(\beta)=g(p)$ 이고 $-q=5, q=-5$



이때 $h(\beta)=f(\beta)=g(\beta)$ 이므로 $g(p)=f(\beta)$

이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

직선 $x=p+m$ 에 대하여 대칭이므로

$$p+\beta=2(p+m), \beta=p+2m$$

$$f(\beta)=f(p+2m)$$

$$=\frac{1}{2}(2m)^2-5=2m^2-5$$

이고

$$g(p)=-\frac{1}{2}(-m)^2+5=-\frac{1}{2}m^2+5$$

$$\text{이므로 } 2m^2-5=-\frac{1}{2}m^2+5 \text{에서}$$

$$m^2=4, m=2$$

$$\text{그러므로 } f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2-5,$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}(x-2-p)^2+5$$

$$f(m)+g(m)=f(2)+g(2)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}(2-p)^2-5\right\}+\left\{-\frac{1}{2}p^2+5\right\}$$

$$=-2p+2$$

$$-2p+2=-4 \text{이므로 } p=3$$

(i), (ii)에 의하여

$$m \times (p-q)=2 \times \{3-(-5)\}=16$$