ADS - Serie 5

Aufgabe 5.2

Vor.: Seien $f, g, h, f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}, i \in \mathbb{N}$ gegeben.

a) Beh.: $\big(f \in \mathcal{O}(g) \land g \in \mathcal{O}(f)\big) \iff \big(f \in \Theta(g) \land g \in \Theta(f)\big)$

Bew.: '$\Longrightarrow$': Es gelte $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$.
Also gilt $\exists C_0 \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : f(n) \leq C_0 \cdot g(n)$
und $\exists C_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_1} : g(n) \leq C_1 \cdot f(n)$.
Es seien C_0, n_0, C_1 und n_1 entsprechend gewählt.

Sei $C_2 = \frac{1}{C_0}$. Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} f(n) &\leq C_0 \cdot g(n) \\ \frac{1}{C_0} \cdot f(n) &\leq g(n) \\ C_2 \cdot f(n) &\leq g(n) \end{aligned}$$

Also gilt für $\max(n_0, n_1)$: $g(n) \geq C_2 \cdot f(n)$ und $g(n) \leq C_1 f(n)$. Damit gilt $g \in \Theta(f)$.

Sei $C_3 = \frac{1}{C_1}$. Dann gilt für $n \geq n_1$:

$$\begin{aligned} g(n) &\leq C_1 \cdot f(n) \\ \frac{1}{C_1} \cdot f(n) &\leq f(n) \\ C_3 \cdot f(n) &\leq f(n) \end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq \max(n_0, n_1)$: $f(n) \geq C_3 \cdot g(n)$ und $f(n) \leq C_0 \cdot g(n)$. Damit gilt $g \in \Theta(f)$.

'$\Longleftarrow$' folgt direkt aus der Definition von Θ.

b) Beh.: $\big(f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } h \in \Omega(g)\big) \Longrightarrow f \in \mathcal{O}(h)$

Bew.: Es gelte $f \in \mathcal{O}(g) \land h \in \Omega(g)$.
Dann gilt $\exists C_0 \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\leq n_0} : f(n) \leq C_0 \cdot g(n)$
und $\exists C_1 \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\leq n_1} : h(n) \geq C_1 \cdot g(n)$
Sei $C_2 = \frac{C_0}{C_1}$. Dann gilt für $n \geq \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned} f(n) &\leq C_0 \cdot g(n) \\ f(n) &\leq C_0 \cdot \frac{C_1}{C_1} \cdot g(n) \\ &\leq \frac{C_0}{C_1} \cdot h(n) \end{aligned}$$

Also ist $f \in \mathcal{O}(h)$.

c) Beh.: $\big(\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \mathcal{O}(g)\big) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \in \mathcal{O}(g)$

Bew.: Induktion über k

IA.: Sei $k = 1$ und es gelte $\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \mathcal{O}(g)$.
Dann ist $\sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{1} f_i = f_1 \in \mathcal{O}(g)$.

IV.: Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte $\big(\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \mathcal{O}(g)\big) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \in \mathcal{O}(g)$.

IS.: zz.: $\big(\forall i \in \{1,\dots,k+1\} : f_i \in \mathcal{O}(g)\big) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} f_i \in \mathcal{O}(g)$

Es gelte: $\forall i \in \{1,\dots,k+1\} : f_i \in \mathcal{O}(g)$
Dann gilt insbes.: $\exists C_1 \in \mathbb{N} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{>n_1} : f_{k+1}(n) \leq C_1 \cdot g(n)$
und nach IV gilt: $\exists C_0 \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{>n_0} : \sum_{i=1}^{k} f_i(n) \leq C_0 \cdot g(n)$

Sei $C_2 = C_0 + C_1$. Dann gilt für $n > \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k} f_i(n) && \leq \quad C_0 \cdot g(n) \\
\Longleftrightarrow \quad & f_{k+1}(n) + \sum_{i=1}^{k} f_i(n) && \leq \quad C_0 \cdot g(n) + f_{k+1}(n) \\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \leq \quad C_0 \cdot g(n) + C_1 \cdot g(n) \\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \leq \quad (C_0 + C_1) \cdot g(n) \\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \leq \quad C_2 \cdot g(n)
\end{aligned}$$

Also ist $\sum_{i=1}^{k} f_i \in \mathcal{O}(g)$.

d) Beh.: $\big(\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \Omega(g)\big) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} f_i \in \Omega(g)$

Bew.: Induktion über k

IA.: Sei $k = 1$ und es gelte $\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \Omega(g)$.
Dann ist $\prod_{i=1}^{k} f_i = \prod_{i=1}^{1} f_i = f_1 \in \Omega(g)$.

IV.: Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte $\big(\forall i \in \{1,\dots,k\} : f_i \in \Omega(g)\big) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} f_i \in \Omega(g)$.

IS.: zz.: $\big(\forall i \in \{1,\dots,k+1\} : f_i \in \Omega(g)\big) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{k+1} f_i \in \Omega(g)$

Es gelte: $\forall i \in \{1,\dots,k+1\} : f_i \in \Omega(g)$
Dann gilt insbes.: $\exists C_1 \in \mathbb{N} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{>n_1} : f_{k+1}(n) \geq C_1 \cdot g(n)$
und nach IV gilt: $\exists C_0 \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{>n_0} : \prod_{i=1}^{k} f_i(n) \geq C_0 \cdot g(n)$

Sei $C_2 = C_0 \cdot C_1$. Dann gilt für $n > \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{k} f_i(n) && \geq && C_0 \cdot g(n) \\
\iff \quad & f_{k+1}(n) \cdot \prod_{i=1}^{k} f_i(n) && \geq && C_0 \cdot g(n) \cdot f_{k+1}(n) \\
\iff \quad & \prod_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \geq && C_0 \cdot g(n) \cdot C_1 \cdot g(n) \\
\iff \quad & \prod_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \geq && (C_0 \cdot C_1) \cdot g(n) \\
\iff \quad & \prod_{i=1}^{k+1} f_i(n) && \geq && C_2 \cdot g(n)
\end{aligned}$$

Also ist $\prod_{i=1}^{k} f_i \in \Omega(g)$.

Aufgabe 5.3

a) Beh.: Sei $C = 14$ und $n_0 = 1$. Dann ist $7n^6 + 3n^2 \in \mathcal{O}(n^7)$.

Bew.: Es gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} 7n^6 + 3n^2 &\leq 7n^6 + 7n^2 \\ &= 7(n^6 + n^2) \\ &\leq 7(n^6 + n^6) \\ &= 14n^6 \\ &\leq 14n^7 = C \cdot n^7 \end{aligned}$$

b) Beh.: Sei $C = 1$ und $n_0 = 1$. Dann ist $n^a \in \mathcal{O}(e^n)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Bew.: Es gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} n^a &= a! \cdot \frac{n^a}{a!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{a!} \frac{n^a}{a!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \\ &= e^n = C \cdot e^n \end{aligned}$$

c) Beh.: Sei $C = 1$ und $n_0 = 3$. Dann ist $n! \in \Omega(2^n)$.

Bew.: Es gilt für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{k=1}^{n} k \\ &\overset{n\geq 3}{\geq} \prod_{k=1}^{n} 2 \\ &= 2^n = C \cdot 2^n \end{aligned}$$

d) Beh.: Sei $C = \frac{1}{\log_b(a)}$ und $n_0 = 1$. Dann ist $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>1}$.

Bew.: Es gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} log_a(n) &= \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)} \\ &= \frac{1}{\log_b(a)} \cdot \log_b(n) \\ &= C \cdot \log_b(n) \end{aligned}$$